

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MAURICIO BEGNINI

**Projeto de controle por modos deslizantes fuzzy
adaptativo para robôs móveis com rodas na
resolução do problema de rastreamento de
trajetória**

MAURICIO BEGNINI

**Projeto de controle por modos deslizantes fuzzy
adaptativo para robôs móveis com rodas na resolução do
problema de rastreamento de trajetória**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Departamento de Informática, Centro de Tecnologia da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Nardênio Almeida Martins

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

B417p Begnini, Mauricio
Projeto de controle por modos deslizantes fuzzy adaptativo para robôs móveis com rodas na resolução do problema de rastreamento de trajetória / Mauricio Begnini -- Maringá, 2016.
104 f. : il., color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Nardênio Almeida Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Informática, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, 2016.

1. Robô movel com rodas diferenciais. 2. Rastreamento de trajetória. 3. Controle por modos deslizantes com fuzzy adaptativo. 4. Controle por dinâmica inversa. 5. Incertezas e perturbações. 6. Teoria de Lyapunov. I. Martins, Nardênio Almeida, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Informática. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação. III. Título.

CDD 21.ed. 629.836

AHS-002857


FOLHA DE APROVAÇÃO

MAURICIO BEGNINI

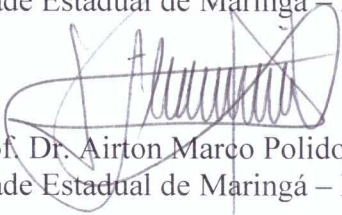
Projeto de controle a estrutura variável *fuzzy* adaptativo para robôs móveis com rodas na resolução do problema de controle de rastreamento de trajetórias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Departamento de Informática, Centro de Tecnologia da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação pela Banca Examinadora composta pelos membros:

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Nardênio Almeida Martins
Universidade Estadual de Maringá – DIN/UEM



Prof. Dr. Airton Marco Polidorio
Universidade Estadual de Maringá – DIN/UEM



Prof. Dr. Carlos Henrique Farias dos Santos
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – CECE/Unioeste

Aprovada em: 12 de fevereiro de 2016.

Local da defesa: Sala 101, Bloco C56, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a Cecilia e Renato Begnini.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, meu pai, Renato Luiz Begnini, minha mãe, Cecília Donel Begnini, minha irmã Gabriela Begnini, e minha avó Angélica Daipra Begnini, cujo amor e apoio me deram condições de chegar até aqui e obter o título de mestre.

Agradeço a minha namorada, Gabriele Rodrigues, que sempre esteve do meu lado, me alegrando e incentivando, com muita paciência, e agora compartilha esse momento comigo.

Aos meus amigos de longa data, que fizeram parte das melhores histórias, em especial Tytu, Bruno, Caio, Toad, Rozzati, Arthur e Marcos. Aos amigos que fiz durante o mestrado, que sempre serão lembrados na hora do café, vendinha, e churrascos de defesas, Luciano, Rodrigo, Rodolfo, Pietro, Paulo, Alexandre, Ariel, Nanni, Emanuel e Max.

Também agradeço as duas de maior influência neste trabalho: meu orientador, Nardênio Almeida Martins, por me conduzir pelo mestrado com a proposta do trabalho, ideias de desenvolvimento, orientações e cobranças; e Douglas Bertol que me recebeu na UFSC, deu todo auxílio que poderia pedir durante os testes no robô, e posteriormente colaborou com o trabalho e artigos.

Por fim, agradeço a agência fomentadora Capes que viabilizou a realização deste trabalho.

Projeto de controle por modos deslizantes fuzzy adaptativo para robôs móveis com rodas na resolução do problema de rastreamento de trajetória

Resumo

Este trabalho propõe o uso do controle por modos deslizantes fuzzy adaptativo (controle cinemático) integrado com um controle por dinâmica inversa com controle proporcional mais derivado (controle dinâmico) aplicado ao problema de rastreamento de trajetória para um robô móvel com rodas de acionamento diferenciais, sujeito a incertezas e perturbações. O controle por modos deslizantes uma técnica bem conhecida, comprovado, apta a lidar com incertezas e perturbações (por exemplo, incertezas estruturais e de parâmetros, perturbações externas e limitações operacionais). Para minimizar os problemas encontrados em implementações práticas do controlador por modos deslizantes clássica, um controlador fuzzy adaptativo do tipo Mamdani substitui a porção descontínua do controle, presente em formas clássicas, causando a perda de invariância, mas ainda garantindo a robustez a incertezas e perturbações sem ter qualquer conhecimento a priori de seus limites, evitando o *chattering*. Além disso, o controlador fuzzy adaptativo é uma ferramenta viável para aproximar qualquer sistema não-linear contínuo com precisão arbitrária, e tem uma estrutura simples, que utiliza funções de pertinência triangulares, um baixo número de regras que devem ser avaliadas, reduzindo a carga computacional e torna viável a implementação em tempo real. Análise de estabilidade e convergência de erros de rastreamento, bem como as leis de adaptação são garantidas com base na teoria de Lyapunov. Simulação e resultados experimentais são explorados como verificação e validação da estratégia de controle proposta.

Palavras-chaves: Robô móvel com rodas diferenciais, Rastreamento de trajetória, Controle por modos deslizantes com fuzzy adaptativo, Controle por dinâmica inversa, Incertezas e perturbações, Teoria de Lyapunov.

Adaptive fuzzy sliding mode control project for differential wheeled mobile robots solving the trajectory tracking problem

Abstract

This paper proposes the use of an adaptive fuzzy sliding mode controller (kinematic control) integrated with an inverse dynamic control with proportional plus derivative control (dynamic control) applied to the trajectory tracking problem for a differential wheeled mobile robot, subject to the uncertainties and disturbances. The sliding mode controller is a well known, proven control method, fit to deal with uncertainties and disturbances (e.g., structural and parameter uncertainties, external disturbances and operating limitations). To minimize the problems found in practical implementations of the classical sliding mode controller, a Mamdani type adaptive fuzzy logic controller replaces the discontinuous portion of the control signals present in classical forms, causing the loss of invariance, but still ensuring the robustness to uncertainties and disturbances without having any a priori knowledge of their boundaries, avoiding the chattering. Moreover, the adaptive fuzzy logic controller is a feasible tool to approximate any real continuous nonlinear system to arbitrary accuracy, and has a simple structure by using triangular membership functions, a low number of rules that must be evaluated, resulting in a lower computational load for execution, making it feasible for real time implementation. Stability analysis and the convergence of tracking errors as well as the adaptation laws are guaranteed with basis on the Lyapunov theory. Simulation and experimental results are explored as verification and validation of the proposed control strategy.

Keywords: Differential wheeled mobile robot, Trajectory tracking, Adaptive fuzzy sliding mode control, Inverse dynamic control, Uncertainties and disturbances, Lyapunov theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – RMRD no plano	14
Figura 2 – Restrição de deslizamento lateral	14
Figura 3 – Powerbot	16
Figura 4 – Estrutura de controle integrado para um RMR.	21
Figura 5 – Representação esquemática do RMRD e das variáveis de interesse (YOUSSEF, 2013).	25
Figura 6 – Representação esquemática de um RMRD e suas restrições não holonômicas (YOUSSEF, 2013).	26
Figura 7 – Esquema de distribuição de velocidades em RMRD (YOUSSEF, 2013).	27
Figura 8 – Representação esquemática de um RMRD e seus centros de inércia (YOUSSEF, 2013).	28
Figura 9 – Representação esquemática de um motor <i>DC Brushless</i> (YOUSSEF, 2013).	36
Figura 10 – Representação planar do RMRD (YOUSSEF, 2013).	40
Figura 11 – Diagrama de blocos do controle em malha fechada do sistema integrador (ELYOUSSEF <i>et al.</i> , 2014).	49
Figura 12 – Funções de pertinência fuzzy	64
Figura 13 – Diagrama de um controle fuzzy.	64
Figura 14 – Funções de pertinência triangulares.	70
Figura 15 – Referências para a trajetória em formato de círculo	73
Figura 16 – Referências para a trajetória em formato de sala	73
Figura 17 – Referências para a trajetória em formato de oito	74
Figura 18 – Diagrama de simulação no cenário ideal.	76
Figura 19 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).	78
Figura 20 – Erros de posição e orientação no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).	78
Figura 21 – Velocidades linear e angular no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).	79
Figura 22 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).	79
Figura 23 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).	80
Figura 24 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).	81

Figura 25 – Erros de posição e orientação no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).	81
Figura 26 – Velocidades linear e angular no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).	82
Figura 27 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).	82
Figura 28 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).	83
Figura 29 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário ideal (controlador <i>fuzzy</i>).	84
Figura 30 – Erros de posição e orientação no cenário ideal (controlador <i>fuzzy</i>).	84
Figura 31 – Velocidades linear e angular no cenário ideal (controlador <i>fuzzy</i>).	85
Figura 32 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação utilizando o controlador <i>fuzzy</i> no cenário ideal.	85
Figura 33 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário ideal (controlador <i>fuzzy</i>).	85
Figura 34 – MobileSim Interface - Eight shape trajectory simulation	86
Figura 35 – Diagrama de simulação no cenário realístico.	86
Figura 36 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário realístico.	88
Figura 37 – Erros de posição e orientação no cenário realístico.	88
Figura 38 – Velocidades linear e angular no cenário realístico.	89
Figura 39 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação no cenário realístico.	89
Figura 40 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário realístico.	90
Figura 41 – Diagrama de aplicação em tempo real.	92
Figura 42 – Rastreamento de trajetória em formato de oito - experimentação no Powerbot.	93
Figura 43 – Erros de posição e orientação - experimentação no Powerbot.	93
Figura 44 – Velocidades linear e angular - experimentação no Powerbot.	94
Figura 45 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação - experimentação no Powerbot.	94
Figura 46 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes - experimentação no Powerbot.	94

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros do RMRD	37
Tabela 2 – Parametros das funções de pertinência de σ_v^* e σ_ω^*	70
Tabela 3 – Ganhos Λ das superfícies deslizantes para cada trajetória	74
Tabela 4 – Constantes de ganhos para o controlador dinâmico	75
Tabela 5 – Constantes de ganhos cinemáticos dos controladores	75
Tabela 6 – Erros quadráticos médios dos controladores - Cenário Ideal	77
Tabela 7 – Erros quadráticos médios dos controladores - Cenário Realístico	87
Tabela 8 – Erros quadráticos médios do controlador u_{BFR} com diferentes valores para G - Cenário Realístico	90
Tabela 9 – PowerBot specifications	91
Tabela 10 – Erros quadráticos médios dos controladores - Experimentação no Powerbot	92

Lista de abreviaturas e siglas

RMR	Robô Móvel com Rodas
RMRD	Robô Móvel com Rodas Diferenciais
CEV	Controlador a Estrutura Variavel
CMD	Controle por Modos Deslizantes
CMDFA	Controle por Modos Deslizantes Fuzzy Adaptativo
FR	Função Relé
PD	Proporcional mais Derivativo

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação	18
1.2	Trabalhos Relacionados	19
1.3	Objetivos	21
1.4	Organização do trabalho	23
2	MODELO DO ROBÔ MÓVEL SOBRE RODAS DE ACIONAMENTO DIFERENCIAL	24
2.1	Modelo de configuração com atuadores	24
2.1.1	Modelagem cinemática de configuração	30
2.1.2	Modelagem dinâmica de configuração	32
2.1.3	Modelo eletro-mecânico	35
2.1.4	Modelo de configuração no espaço de estado	38
2.2	Modelo de postura	39
2.2.1	Modelagem cinemática de postura	42
2.2.2	Modelagem dinâmica de postura	42
2.2.3	Modelo de postura em espaço de estado	43
2.3	Considerações finais	44
3	CONTROLE DE RMRD	45
3.1	Descrição do problema e proposta de controle	45
3.2	Controle dinâmico	46
3.3	Síntese do controle dinâmico	48
3.4	Controle cinemático	49
3.4.1	Modelagem genérica de sistemas não-lineares	50
3.4.2	Projeto de controle por modos deslizantes	51
3.4.3	Análise de estabilidade	52
3.5	Síntese do controlador cinemático	54
3.5.1	Estratégia de Rastreamento de trajetórias	54
3.5.2	Síntese do controlador	56
3.6	Variações do controle por modos deslizantes	60
3.6.1	Variantes do CMD utilizando diferentes leis de alcance	61
3.6.2	Controle por modos deslizantes com função relé	62
3.7	Controle por modos deslizantes com fuzzy adaptativo	63
3.7.1	Introdução a sistemas fuzzy	63
3.7.2	Projeto de CMD com fuzzy adaptativo	66

3.8	Síntese do controle por modos deslizantes fuzzy adaptativo	68
3.8.1	Extração da base de regras para o CMDFA	69
3.9	Considerações finais	71
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS ALCANÇADOS	72
4.1	Simulações no cenário ideal	75
4.2	Simulações em cenário realístico	83
4.3	Experimentação em tempo real	91
4.4	Considerações finais	95
5	CONCLUSÃO	96
	Referências	98

1 Introdução

O desenvolvimento tecnológico, e da robótica, vem proporcionando um aumento na qualidade de vida para os humanos, por permitir a execução de: tarefas perigosas; a exploração de ambientes inóspitos; redução de o custos operacionais e uma melhor eficácia na realização de tarefas repetitivas no setor de manufatura.

Por muito tempo o desenvolvimento da robótica se focou apenas na classe de robôs manipuladores, por serem de grande aplicação industrial, como em montadoras, criando um mercado de bilhões de dólares (SIEGWART; NOURBAKHS; SCARAMUZZA, 2011).

Nas últimas três décadas a robótica móvel vem ganhando atenção de pesquisadores, com aplicações práticas em diferentes atividades demonstrando o quão promissor é o futuro dessa área. Para exemplificar as diversas aplicações, têm-se as domésticas (aspiradores de pó e cortadores de grama robóticos), as industriais (transporte automatizado e veículos de carga autônomos), as urbanas (transporte público, cadeiras de rodas robotizadas), as de segurança e defesa civil e militar (controle e patrulhamento de ambientes, resgate e exploração em ambientes hostis), que demonstram parte da gama de aplicações para robôs móveis e os interesses econômicos envolvidos em relação ao seu desenvolvimento e aplicação. Atualmente a robótica é dividida em três grandes classes: robôs manipuladores, robôs móveis e robôs manipuladores móveis (SCIAVICCO *et al.*, 2009; ORTIGOZA *et al.*, 2012).

A principal característica dos robôs móveis é a presença de uma base móvel que permite o seu movimento livre pelo ambiente. Do ponto de vista mecânico, um robô móvel consiste de um corpo rígido, equipado com um sistema de locomoção, que permite que o robô se movimente livremente, seja em ambiente terrestre, aquático ou aéreo (SCIAVICCO *et al.*, 2009).

Entre os robôs móveis terrestres, a classe que mais se destaca é a dos Robôs Móveis com Rodas (RMRs). Um RMR consiste de uma base ou chassi e um sistema de rodas, das quais algumas são atuadas por motores, fornecendo movimento em relação ao ambiente plano e algumas são livres, para equilíbrio da base móvel ¹ (SIEGWART; NOURBAKHS; SCARAMUZZA, 2011; ORTIGOZA *et al.*, 2012).

Um RMR é classificado pelo grau de manobrabilidade, dado pela tupla (δ_m, δ_s) . Isso é uma representação das rodas do RMR, onde δ_m é o número de rodas fixas atuadas do RMR (grau de mobilidade), e δ_s o numero de rodas orientáveis atuadas (grau de dirigibilidade) (CAMPION; CHUNG, 2008; CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 2011). Com base no grau de manobrabilidade a literatura classifica os seguintes tipos de RMRs: (3, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 1) e (1, 2). Esses tipos definem as características cinemáticas do RMMR o qual ainda pode possuir limitações de movimentos, denominadas restrições

¹ O robô móvel com rodas pode ter ou não rodas livres, mas sempre estará equipado de rodas atuadas.

não holonômicas (CAMPION; CHUNG, 2008; CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 2011).

Essas restrições de movimento do RMR são descritas por variáveis de velocidade, que não podem ser integradas. O termo holonômico significa “universal”, “integral”, “integrável” (MORIN; SAMSON, 2008). Portanto, restrições de movimento são denominadas não holonômicas e um sistema sujeito a esse tipo de restrição recebe o nome de sistema não holonômico.

O robô móvel com rodas diferencial (RMRD), mostrado na Figura 1, é um exemplo de sistema não holonômico. O RMRD é um RMR (2,0) que consiste em um corpo rígido sustentado por duas rodas fixas atuadas independentes, com o mesmo eixo de rotação, e duas rodas livres, cuja a única função é dar estabilidade. Assim, o RMRD realiza apenas movimentos combinados de deslocamentos longitudinal e rotacional. Apesar de seus movimentos serem limitados, o RMRD pode atingir qualquer ponto do plano, como apresentado na Figura 2 (a qual destaca duas possibilidades de manobra) (SCIAVICCO *et al.*, 2009).

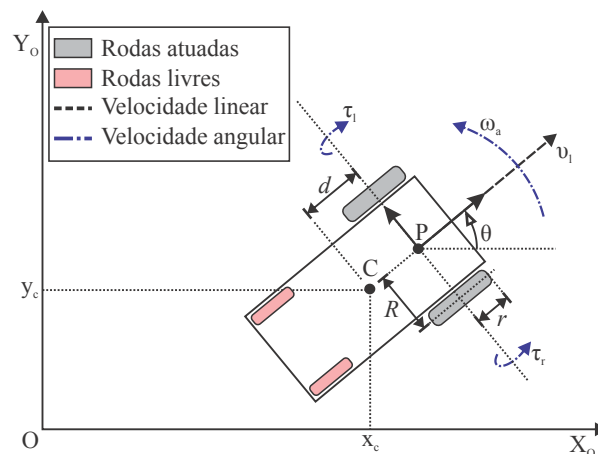


Figura 1 – RMRD no plano

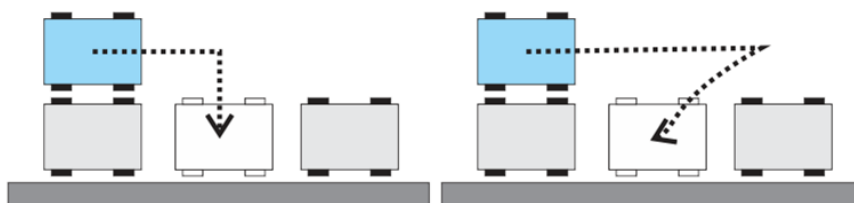


Figura 2 – Restrição de deslizamento lateral

Para que o robô chegue em um ponto do plano é necessário um controle. Sciavicco *et al.* (2009) definem robótica como a ciência que estuda a *conexão inteligente entre percepção e ação* (podendo ser incluído coordenação para o caso de robótica multiagentes). Os componentes básicos de um sistema robótico são: os atuadores, os sensores e o controle.

A capacidade de exercer uma ação é fornecida pelos atuadores, que movimentam os componentes mecânicos do robô. A capacidade de percepção é dada pelo sistema de sensoramento, que adquire informações do estado interno do sistema mecânico e também do ambiente externo. A capacidade de conectar ação com percepção de maneira inteligente é provida pelo sistema de controle, que comanda a execução da ação levando em conta os objetivos definidos pela técnica de planejamento da tarefa.

Em geral, o objetivo do controle é eliminar o erro entre onde deseja-se que o robô esteja e sua posição real. Os principais problemas de controles para RMR apresentados na literatura são (ORTIGOZA *et al.*, 2012):

- **Estabilização:** consiste em atingir uma postura final desejada para o RMR, que é definida por uma localização no espaço cartesiano e uma determinada orientação, a partir de uma configuração inicial qualquer do RMR. Em outras palavras, estabilizar um sistema corresponde a levar o estado do sistema para um dado ponto de equilíbrio;
- **Rastreamento de trajetória:** consiste em fazer com que o RMR atinja e siga uma determinada trajetória no espaço cartesiano ou um caminho geométrico com uma lei temporal associada, iniciando de uma determinada postura inicial, dentro ou fora da trajetória. Em suma, corresponde seguir uma trajetória de referência em função do tempo;
- **Rastreamento de caminho:** consiste em um problema de rastreamento de trajetória, mas com a ausência da lei temporal. Dessa forma, o RMR deve apenas seguir um determinado caminho geométrico sem restrições temporais, ou seja, o RMR deve seguir uma trajetória de referência em função de parâmetros independentes do tempo.
- **Tolerante a falhas:** A tolerância a falhas pode ser definida como a capacidade de um sistema de concluir uma tarefa determinada na presença de defeitos de hardware ou de software. Isso é feito por meio da reconfiguração do sistema de controle de acordo com a falha isolada.

Este trabalho tem como foco principal a síntese de controladores na resolução do problema de rastreamento de trajetórias em ambiente plano e regular para um robô móvel sobre rodas não holonômico de médio porte sujeito a limitações de atuação, incertezas e perturbações, que fazem com que a hipótese de perfeito rastreamento de velocidade não seja mantida.

As incertezas que afetam um RMR podem ser: (i) paramétricas, como a massa do robô, raio das rodas, distância entre uma roda e seu eixo de simetria, variações de carga; ou (ii) não paramétricas, como dinâmicas não modeladas causadas pelos atritos e folgas nas engrenagens, não linearidades dos atuadores (por exemplo saturação, histerese e zona morta), ruídos nas medições e perturbações externas (WANG, 1999; DIAS; ARAÚJO;

ALSINA, 2006; DEFOORT *et al.*, 2007). A hipótese de perfeito rastreamento de velocidade (KANAYAMA *et al.*, 1991) refere-se a capacidade do hardware de reproduzir as velocidades de controle (velocidades calculadas para exercer a tarefa) exatamente como velocidades reais do robô, ou seja, o erro de rastreamento de velocidade é nulo. Isso não se aplica em casos reais, visto que o robô está sujeito a incertezas e perturbações em sua cinemática e dinâmica, que são vistas como erros de rastreamento de velocidade, e podem comprometer a precisão dos resultados se os controladores não forem robustos (FIERRO; LEWIS, 1998; FIGUEIREDO; JOTA, 2004; MORIN; SAMSON, 2008).

O RMRD é tomado como objeto de estudo neste trabalho. A escolha se dá pelo fato do robô ter uma modelagem cinemática relativamente simples, e representar bem as características de um sistema não holonômico. Devido a esses fatores esse tipo de robô é largamente empregado como plataforma de teste na literatura (ORIOLO; LUCA; VENDITTELLI, 2002; SHIM; SUNG, 2004; WU; WANG; ZONG, 2005; LOW; WANG, 2008). Outra vantagem da escolha deste tipo de robô, é a validação dos resultados utilizando o Powerbot, um RMRD de médio porte, apresentado na Figura 3, disponível no Departamento de Automação e Sistemas (DAS) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).



Figura 3 – Powerbot

Para realizar o controle de RMRs, em geral, é necessário a sua modelagem matemática. Assim, faz-se as modelagens de sua cinemática e de sua dinâmica. Os modelos cinemáticos descrevem o RMR em função da velocidade e da orientação, enquanto os modelos dinâmicos descrevem o RMR em função de forças generalizadas aplicadas pelos atuadores.

O desenvolvimento do controle cinemático é elaborado com base nas técnicas de Controle a Estrutura Variável (CEV). Essa técnica de controle é aplicada com sucesso em diversos sistemas não lineares como controle de vôo autônomo, controle de motores

elétricos, regulação de processos químicos, aumento de estabilidade em helicópteros, sistemas espaciais e robótica (HUH; BIEN, 2007; PARK; CHOI; KONG, 2007; SOLEA; CERNEGA, 2009b; WU; SHI; GAO, 2010).

Os controladores a estrutura variável são caracterizados por leis de controle realimentadas e uma regra de decisão, denominada função de chaveamento, a qual tem como entrada alguma medição do comportamento do sistema corrente e produz como saída o controlador realimentado particular, o qual deve ser usado a cada instante de tempo.

Neste trabalho foi adotado o Controle por Modos Deslizantes (CMD) (CHWA, 2004; UTKIN; GULDNER; SHI, 2009; EL'YOUSSED *et al.*, 2010; LIU; ZHANG; WANG, 2011; FILIPESCU *et al.*, 2011), um caso particular dos controles a estrutura variável, em que o CEV é designado para conduzir e então restringir o estado do sistema a seguir uma vizinhança de uma função de chaveamento, denominada superfície deslizante. Há duas vantagens principais nesta abordagem: (i) o comportamento dinâmico do sistema pode ser costurado por uma escolha particular de função de chaveamento; (ii) a resposta em malha fechada torna-se totalmente insensível a uma classe particular de incertezas (incertezas alcançáveis pelo controle). A última propriedade de invariância faz com que a metodologia seja uma candidata apropriada para o controle robusto. Adicionalmente, a habilidade de especificar o desempenho diretamente torna o CMD atrativo sob a perspectiva de projeto (EDWARDS; SPURGEON, 1998). Entre as desvantagens do CMD podem ser citados: o fenômeno de *chattering*, e a necessidade do conhecimento dos limites das perturbações para aplicar o ganho adequado para compensá-las.

O fenômeno de *chattering*, causado por uma parcela descontínua do controle, tem como características oscilações de frequência e amplitude limitadas que surgem sobre as variáveis de estado do sistema. Esse fenômeno indesejado pode ocorrer devido ao sinal de controle de chaveamento excitar dinâmicas rápidas negligenciadas e, também, pela limitação da frequência de chaveamento do sinal de controle (LEE; UTKIN, 2007). No primeiro caso, existe uma relação entre as oscilações de *chattering* e a constante de tempo das dinâmicas não modeladas (LEE; UTKIN, 2007). Esse fenômeno é indesejado por causar redução da exatidão de controle, perda de eficiência energética e perdas por desgaste. Além disso, a robustez dessa técnica está intrinsecamente associada à exatidão com que o controle força o sistema ao atendimento das restrições impostas pela tarefa. Portanto, a existência de *chattering* implica, também, em perda de robustez. Entre os trabalhos associados ao evitamento do *chattering* cita-se (LOH; YEUNG, 2004; LEE; UTKIN, 2007; HSIAO *et al.*, 2009; YU; KAYNAK, 2009; KEIGHOBADI; MOHAMADI, 2012; ELYOUSSEF *et al.*, 2014).

Para resolver o problema do *chattering* e a necessidade de conhecer os limites da perturbação, este trabalho propõe a utilização de um controle por lógica fuzzy adaptativo em conjunto com o CMD. Lógica fuzzy tem se mostrado uma técnica importante na aproximação de sistemas não lineares, na estimação de parâmetros e no controle de sistemas.

Isso porque a técnica permite formular regras a partir de conhecimento especialista para estratégias de controle, tendo sido citada na literatura (WANG, 1999; GUO; WOO, 2003; PILTAN *et al.*, 2011; ABADI; KHOOBAN, 2015) na solução de diversos problemas de controle. A utilização apenas de um Controle Fuzzy pode resolver o problema do *chattering*, mas os resultados ainda estão em uma faixa de valores predefinidos, exigindo o conhecimento dos limites da perturbação. Esse problema pode ser resolvido com a utilização da teoria de controle adaptativo definindo um Controle Fuzzy Adaptativo (CFA), em que a faixa dos valores de saída são atualizados durante execução. Cita-se os seguintes trabalhos que utilizam controle adaptativo (WANG, 1999; GUO; WOO, 2003; HUH; BIEN, 2007; MARTINS *et al.*, 2008; PILTAN *et al.*, 2011; WANG *et al.*, 2011; SHOJAEI; SHAHRI; TARAKAMEH, 2011; MOHARERI; DHAOUADI; RAD, 2012; CHOU; YAO, 2012).

O objetivo do controle dinâmico é compensar as forças conhecidas que atuam sobre o sistema, rastrear a referência de velocidade fornecida pelo controlador cinemático e auxiliar também na atenuação dos efeitos de *chattering* provenientes da excitação de dinâmicas não modeladas. Propõe-se a combinação de um controle de dinâmica inversa com um controlador proporcional mais derivativo (PD) em estrutura paralela. Cita-se os seguintes trabalhos que abordaram o controle dinâmico (SARKAR; YUN; KUMAR, 1994; FIERRO; LEWIS, 1997; ORIOLO; LUCA; VENDITTELLI, 2002; MARTINS *et al.*, 2008; CHEN; LI; YEH, 2009; HSIAO *et al.*, 2009; EL'YOUSSED *et al.*, 2012)

Embora a integração dos controles cinemático e dinâmico seja estudada, e verificada via simulação, apenas o controle cinemático é aplicado ao RMRD Powerbot, visto que esse já possui um controlador dinâmico PD interno, não permitindo a utilização do controle de dinâmica inversa com um controlador PD.

1.1 Motivação

A crescente evolução da robótica móvel em diversas aplicações cotidianas é reflexo de como a área recebeu atenção de pesquisadores nas últimas décadas. E com isso foram obtidos resultados significantes em termos de modelagem, planejamento e controle deste tipo de sistema. Mesmo com essa evolução (KOLMANOVSKY; MCCLAMROCH, 1995; WANG *et al.*, 2004; WANG; GE; LEE, 2004) apontam que há necessidade de estudar os efeitos de incertezas e perturbações alcançáveis pelo controle e desenvolver controladores que tenham bom desempenho na presença dessas incertezas.

Ainda, (ORIOLO, 2014) lista uma série de linhas de pesquisa que considera ainda abertas para pesquisa, incluindo o desempenho de controladores na presença de perturbações, classificando como uma vertente de pesquisa que ainda não recebeu atenção o suficiente.

1.2 Trabalhos Relacionados

A existência de incertezas, perturbações e dinâmicas negligenciadas no RMRD justificam a escolha da técnica de controle por modos deslizantes, devido a sua robustez a incertezas e perturbações assim como bom desempenho, sendo utilizada como solução para o problema de rastreamento de trajetória em robôs móveis e manipuladores (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988; ZHANG; CHUNG; VELINSKY, 2003; JAFAROV; PARLAKCI; ISTEфанOPULOS, 2005; HUH; BIEN, 2007; MARTINS *et al.*, 2008; MARTINS *et al.*, 2011).

Em (SOLEA; FILIPESCU; NUNES, 2009), é utilizado o Controle por Modos Deslizantes (CMD) para resolver o problema de rastreamento de trajetória para RMRD. O *chattering* é atenuado utilizando uma saturação na parcela descontínua, limitando sua magnitude e efeitos. A validação do controle foi feita via experimentação em um RMRD real, o PatrolBot, com o rastreamento de duas trajetórias, uma em formato de oito, e outra em formato de sala, em duas situações: a primeira sem adição de massa ao RMRD; e a segunda com adição de aproximadamente 3kg. Em todos os casos o RMRD rastreou a trajetória com erros de posição e orientação próximos a zero e sinais de controle apresentam baixo *chattering*.

Em (SOLEA; CERNEGA, 2009a) e (SOLEA; CERNEGA, 2009b), CMD com saturação é utilizado no controle de RMRD para rastreamento de trajetória. Como a FR não elimina o *chattering*, a lei de alcance do controle, onde a parcela descontínua se encontra, é investigada, avaliando quatro variações (ainda descontínuas), como feito neste trabalho. A validação de robustez das técnicas de controle feita para o rastreamento de uma trajetória em linha reta com erro inicial no RMRD PatrolBot. Os resultados mostram que é possível atingir maior robustez e limitar o *chattering* mudando características na lei de alcance, sem substituir a parcela descontínua por uma parcela contínua.

Em (EL'YOUSSED *et al.*, 2010) os autores utilizam CMD para controlar um RMRD na tarefa de rastreamento de trajetória. Para reduzir o *chattering*, a parcela descontínua da técnica é substituída pela aproximação contínua FR, a qual embora elimine o *chattering*, traz uma diminuição de robustez. Para verificação da técnica de controle foram feitas simulações do rastreamento de três trajetórias: uma em linha reta; uma em círculo; e uma em formato de oito; todas com erro inicial, e perturbações nas velocidades de controle. Os resultados das simulações foram satisfatórios, com erros de posição e orientação próximos a zero, e os sinais de controle suaves, atingidos pelo aproximação.

Em (MARTINS *et al.*, 2010) e (MARTINS *et al.*, 2011) o controle do RMRD para o problema de rastreamento de trajetória é desenvolvido utilizando Controle a Estrutura Variável (CEV). Para compensar as perturbações e eliminar *chattering* foi proposto a utilização de redes neurais de funções de bases radiais (RNFBRs) no lugar da parcela descontínua do controle. A eficiência do controle foi avaliada comparando seu desempenho, em simulações, com o CEV tradicional, e com o CEV sem a parcela descontínua. Para as

simulações foram implementadas trajetórias em reta, elipse, sala, em forma de oito, com erro inicial e perturbação nas velocidades de controle. O controle CEV tradicional realizou a tarefa com erros de posição e orientação próximos a zero, mas com alto *chattering*, enquanto o CEV sem a parcela descontínua não apresentou *chattering*, mas teve erros de posição e orientação significantes. Por fim, o método proposto, CEV com RNFBRs, manteve erros de posição e orientação próximos a zero sem apresentar *chattering*.

Em (KEIGHOBADI; MOHAMADI, 2011) e (KEIGHOBADI; MOHAMADI, 2012) os autores propõe a utilização do CMD com Lógica Fuzzy para controle de RMRD no rastreamento de trajetória. O Controle por Modos Deslizante Fuzzy (CMDF) substitui a parte descontínua do controle por um controle fuzzy, com objetivo de reduzir o *chattering*. A verificação da técnica é feita por simulação, em uma trajetória circular, com erro inicial, em um cenário sem considerar incertezas, e um considerando incertezas e entradas exógenas. Além do CMDF proposto, os testes incluem um controle utilizando CMD com saturação, e um controle utilizando Lei de Controle de Linearização por Realimentação (LCLR) para comparações. No cenário sem incertezas todos os controles apresentaram erros de posição e orientação próximos a zero, e sinais de controle suaves. Nas simulações com incertezas e entradas exógenas o controle utilizando LCLR apresentou erros significativamente altos, e embora tanto o CMDF e o CMD com saturação apresentaram erros próximos a zero, e sinais de controle suaves, os erros na técnica proposta foram menores do que os apresentados pelo CMD.

Em (MOHAGHEGHI; SHABANINIA; SALIMIFARD, 2013) também foi proposto um controle utilizando CMDF. Os autores verificam a robustez da técnica por simulação em duas trajetórias, uma em reta, e uma em formato de *S*, ambas com erro inicial e perturbações. Para fins comparativos também são simulados o CMD e Controle Dinâmico por Lógica Fuzzy (CDLF), um controle por regras fuzzy. A trajetória em reta, por ser mais simples, apresentou menores erros para todos os controles, com erros de posição próximos a zero para os controles CMD e CMDF, e erros mais elevados para o CDLF, sendo que o único controle que apresentou *chattering* foi o CMD. Para a trajetória em formato de *S*, pela maior complexidade da trajetória, os controles levaram mais tempo para estabilizar sobre a trajetória, com CMD e CMDF apresentando erros próximos a zero e o CDLF erros mais significativos, sendo que o CMD foi, novamente, o único que apresentou *chattering*.

Em (BOHLOULI *et al.*, 2011) o controle de RMRD para rastreamento de trajetória é feito utilizando Controle por Modos Deslizantes com Fuzzy Adaptativo (CMDFA). Diferente do trabalho anterior, o controle fuzzy que substitui a parcela descontínua do CMD é adaptativa, ou seja, sua faixa de valores de saída é atualizada durante a execução, aumentando a robustez a variações de perturbações. O CMDFA, CMDF e o CMD têm seu desempenho comparados em simulações em uma trajetória circular com erro inicial, com e sem influência de perturbações. No caso sem perturbações todos os controles apresentam bom desempenho, com erros de posição e orientação próximos a zero. No

caso com perturbações, novamente os controles apresentam erros próximos a zero, mas, enquanto o CMDFA mantém os erros constantemente próximos a zero, o CMDF e o CMD apresentam variações dos valores, com o CMD tendo o pior desempenho. O trabalho é focado na perda de robustez pelas perturbações com limites desconhecidos, e não apresenta resultados referentes aos sinais de controle.

Em (ELYOUSSEF *et al.*, 2014), para atingir maior robustez no rastreamento de trajetória e atenuar o *chattering*, os autores propuseram um CMD de segunda ordem, o CMD *Super-Twisting* (CMDST). O CMDST apresenta sinais de controle contínuos, ou seja, não apresenta *chattering*. A validação da técnica de controle foi feita por meio de experimentação no RMRD Powerbot, para duas trajetórias circulares, sendo a segunda com velocidades superiores a primeira. Além do controle proposto, o CMD com FR também foi testado no Powerbot para fins comparativos. Nenhuma das estratégias de controle apresentou *chattering*, e o CMDST apresentou erros de posição e orientação próximos a zero para ambas as trajetórias, enquanto o CMD com a aproximação apresentou erros próximos a zero na primeira trajetória, e erros significativamente grandes na segunda trajetória, comprovando a superioridade da técnica proposta.

1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo sintetizar um controle para o rastreamento robusto de trajetórias, que esteja apto a ser aplicado a um RMRD real, sendo robusto a incertezas, perturbações, limitação de chaveamento de controle e limitação de movimentos, e não deve exigir uma carga computacional que inviabilize a aplicação prática. Dado esse cenário, a proposta consiste na construção de uma malha de controle composta por um controlador dinâmico integrado com um controlador cinemático, conforme ilustrado na Figura 4.

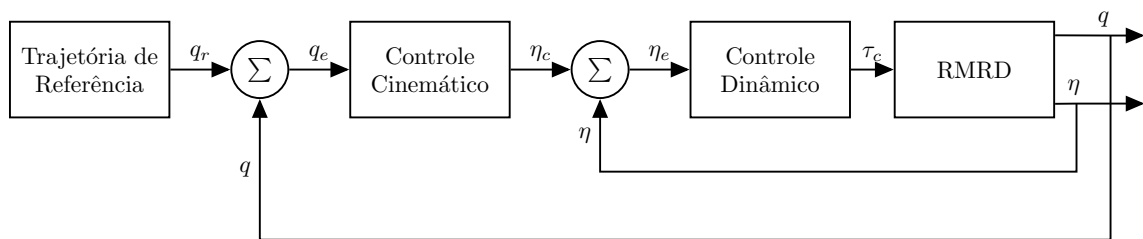


Figura 4 – Estrutura de controle integrado para um RMR.

Para atingir tal objetivo, há necessidade de cumprimento dos seguintes objetivos específicos:

- **Síntese do controlador dinâmico:** O controlador dinâmico é sintetizado para compensar as dinâmicas conhecidas e estabilizar o erro de rastreamento de velocidades

suficientemente rápido em detrimento a dinâmicas negligenciadas. Um controle de dinâmica inversa com controle proporcional mais derivativo (PD) é empregado nessa solução, pois compensa as dinâmicas modeladas e permite que a constante de tempo da malha interna, que é influenciada pela constante de tempo de dinâmicas negligenciadas, seja ajustada pela sintonia do PD.

- **Síntese do controlador cinemático robusto a incertezas e perturbações:** O controle cinemático tem por objetivo calcular velocidades (longitudinal e rotacional) que devem ser aplicadas ao robô para que este cumpra o rastreamento de trajetória com erros mínimos, mesmo sob a influencia de incertezas e perturbações. Para atender esse objetivo o projeto de controle será baseado na técnica de controle por modos deslizantes, e sua estabilidade é provada utilizando a teoria de Lyapunov.
- **Redução de *chattering*:** Para eliminar esse efeito indesejado do CMD é proposto um Controle Fuzzy Adaptativo, que aproxime a parcela do CMD responsável pelo *chattering* e que estime em tempo de execução a magnitude das incertezas e perturbações.
- **Estudo comparativo:** Diferentes técnicas de atenuação de *chattering* são estudadas além do controle fuzzy adaptativo proposto. Essas técnicas incluem variações na lei de alcance do CMD, como apresentados nos trabalhos de (HUNG; GAO; HUNG, 1993; LOH; YEUNG, 2004; SOLEA; CERNEGA, 2009b) e a troca da função de chaveamento do CMD por uma aproximação contínua. Entre as aproximações contínuas são utilizadas a Função Relé (FR), como no trabalho de (EL'YOUSSED *et al.*, 2010).
- **Verificação e validação:** Para validação da pesquisa, é feito o estudo comparativo entre os projetos de controle desenvolvidos. Os métodos de avaliação dos resultados serão: os erros de postura do RMRD durante o rastreamento de trajetória; As velocidades (longitudinal e rotacional) de controle e erros de velocidades durante o rastreamento de trajetória (assim como o *chattering* nos sinais de velocidades); as compensações dos erros de velocidades; e as superfícies deslizantes. Esse estudo contará com:
 - **Verificação e validação via simulações:** Análise dos resultados de simulações obtidos em: (i) cenário ideal, em que se utiliza um modelo matemático para representar a cinemática, dinâmica e dinâmica dos atuadores do RMRD Powerbot; (ii) cenário real, utilizando o simulador do RMRD Powerbot pelo software MobileSim.
 - **Validação experimental:** São analisados os resultados obtidos da aplicação dos projetos de controle no RMRD Powerbot, validando assim esses projetos de controle em uma aplicação real.

1.4 Organização do trabalho

No Capítulo 2 é apresentada a construção de dois modelos matemáticos em espaço de estados para representar o comportamento do RMRD. O primeiro modelo, denominado de modelo de configuração, é um modelo detalhado, que engloba a cinemática, dinâmica, e dinâmica dos atuadores do RMRD. Esse modelo é utilizado para simular o comportamento do RMRD no cenário ideal. O segundo modelo, denominado modelo de postura por se limitar a informações de postura do RMRD, é utilizado na síntese do projeto de controle, visto que a simplicidade do modelo implica em menor complexidade no projeto de controle, e o rastreamento de trajetórias geralmente é dado por meio de coordenadas de postura.

No Capítulo 3, é apresentada a fundamentação teórica das técnicas de controle por dinâmica inversa, controle por modos deslizantes e controle fuzzy adaptativo, e a síntese dos controladores baseados nestas técnicas, bem como a prova de estabilidade destes controladores.

No Capítulo 4 é realizada a análise do desempenho em simulação e experimentos no robô quando se utilizam os controladores apresentados. Analisa-se os resultados de simulação em dois cenários, um ideal, onde considera-se que o modelo de configuração em espaço de estados proposto no Capítulo 2 representa o comportamento do RMRD, e um realístico, onde é utilizado um simulador MobileSim simula o comportamento do RMRD Powerbot, considerando perturbações e limitações reais do robô. No final desse capítulo, a análise do desempenho dos controles é feita para os resultados experimentais no robô Powerbot. Embora a estrutura do robô não permita a implementação do controle dinâmico proposto, é adequada para avaliar a integração do controle cinemático proposto com um controlador PD o qual serve para a validação da proposta.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e as propostas de trabalhos futuros.

2 Modelo do robô móvel sobre rodas de acionamento diferencial

No Capítulo 1 foi feita uma introdução sobre o conceito de robôs móveis não holonômicos, suas limitações de movimentos, e problemas de controle. Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento de modelos de um RMRD. Uma representação matemática em espaço de estado desse tipo de sistema pode ser obtida pela composição de seu modelo cinemático e dinâmico. Nessa formulação os efeitos das restrições não holonômicas são concentrados no modelo cinemático que é, portanto, subatuado, ao passo que, o modelo dinâmico resultante, descrito em termos de velocidades, é totalmente atuado (SARKAR; YUN; KUMAR, 1994; COELHO; NUNES, 2003; CAMPION; CHUNG, 2008).

Neste trabalho são apresentadas duas representações em espaço de estado para o RMRD. A primeira consiste do modelo de configuração em que se considera o comportamento mecânico e elétrico dos motores. Esse modelo é utilizado para construir um ambiente para simulações. Dessa forma, obtém-se uma representação do comportamento do robô, para a avaliação de controladores. A segunda representação consiste em um modelo de postura em que se assume que o robô é um corpo único. Esse modelo simplificado é a base para a construção da estrutura de controle de rastreamento robusto de trajetórias que são dadas em coordenadas de postura.

A metodologia adotada para a construção dos modelos consiste na descrição do sistema, destacando suas variáveis de configuração e atuação, seus parâmetros e suas restrições para, então, realizar a construção do modelo cinemático. Na sequência, a modelagem dinâmica é realizada com base na mecânica Lagrangeana com restrições (MURRAY *et al.*, 1994) e esses dois modelos são associados para se obter uma representação em espaço de estado adequada para simulações e síntese de controle. Inicia-se o estudo pelo cálculo do modelo de configuração e, em seguida, mostra-se a modelagem em postura. As modelagens feitas nesse capítulo têm como objetivo reproduzir o robô Powerbot, e são feitas baseadas nas modelagens encontradas em (SARKAR; YUN; KUMAR, 1994; COELHO; NUNES, 2003; CAMPION; CHUNG, 2008; DAS; KAR, 2006; SHOJAEI; SHAHRI; TARAKAMEH, 2011).

2.1 Modelo de configuração com atuadores

O modelo de configuração com atuadores apresentada nesta seção representa o comportamento de um RMRD, e será utilizada como plataforma para simulações e análises de desempenho dos controladores propostos. Para o desenvolvimento do modelo, considera-se que o RMRD possua estrutura mostrada na Figura 5, que é similar à do

Powerbot.

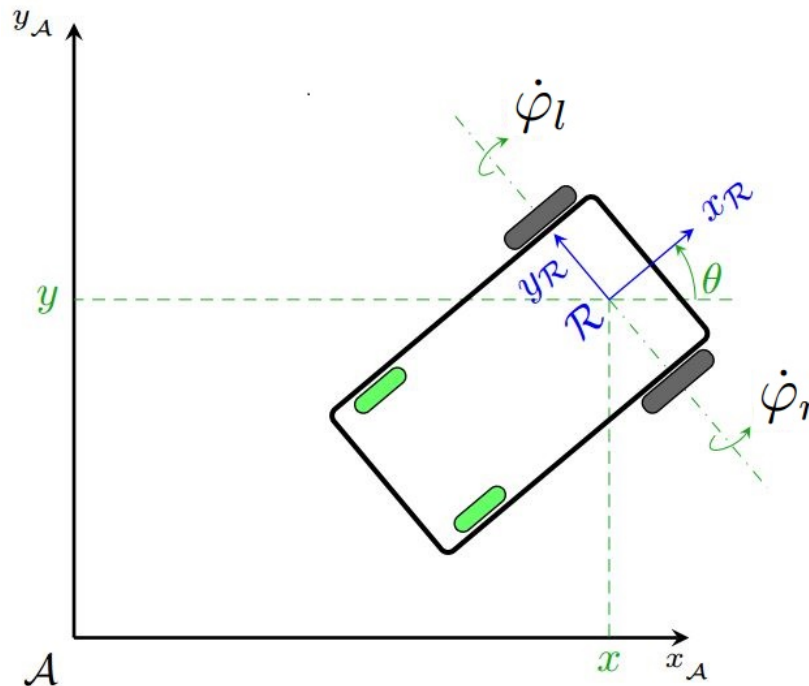


Figura 5 – Representação esquemática do RMRD e das variáveis de interesse (YOUSSEF, 2013).

Esse sistema consiste de um corpo rígido (base) que possui duas rodas convencionais fixas, acionadas por atuadores independentes, com o intuito de realizar a movimentação e orientação. Para a modelagem é suposto que o contato dessas rodas com o chão se reduz a um único ponto, e a velocidade nesse ponto é zero, não ocorrendo deslizamento ou derrapagem das rodas. O robô ainda possui mais duas rodas que giram livremente (rodas passivas), servindo de suporte para o robô, e que são desconsideradas da modelagem, pois seus efeitos são desprezíveis na dinâmica do RMR.

A posição do robô é representada pelas coordenadas (x, y) referentes à origem do referencial R medidas sobre o referencial inercial A . A orientação é medida pelo ângulo θ , descrito entre os eixos x_R e x_A no sentido anti-horário. A tripla $\xi = (x, y, \theta)$ é denominado como postura do robô. Consequentemente, a tripla $\dot{\xi} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ representa as velocidades de postura do robô, ou seja, as velocidades no eixo x , no eixo y e a velocidade angular, respectivamente. Os deslocamentos angulares da roda direita e da roda esquerda do robô são dados por (φ_r, φ_l) . Assim, as velocidades de controle do robô podem ser expressas por velocidades em suas rodas atuadas, $\varphi = [\dot{\varphi}_r \ \dot{\varphi}_l]^T$, onde $\dot{\varphi}_r$ é a velocidade angular da roda direita e $\dot{\varphi}_l$ a velocidade angular da roda esquerda. Um vetor de coordenadas generalizadas definido como $q = [x \ y \ \theta \ \varphi_r \ \varphi_l]^T$, composto pelas coordenadas de postura do RMRD e de deslocamento angular das rodas define a configuração do sistema. Por fim, o torque nas rodas é representado pelo vetor $\tau = [\tau_r \ \tau_l]^T$.

A descrição matemática das restrições de movimento do robô é feita assumindo-se que o contato entre as rodas e o chão se reduz a um ponto e que a velocidade desse contato é igual a zero. Ao se considerar que não há deslizamento e derrapagens das rodas tem-se: (i) O módulo da velocidade linear de cada roda na direção do eixo x_R é igual ao módulo de suas respectivas velocidades tangenciais; (ii) As velocidades em qualquer outra direção são iguais a zero (COELHO; NUNES, 2003).

Essa situação é ilustrada na Figura 6 a partir da definição de um conjunto de dois vetores para cada roda, onde r representa o raio da roda: (i) o primeiro conjunto é referente às velocidades lineares das rodas cujas direções são paralelas ao eixo x_R e, assim, para a roda direita tem-se $v_{dx_R} = v_{dtag} = r\dot{\varphi}_r$ e para a roda esquerda $v_{ex_R} = v_{etag} = r\dot{\varphi}_l$, em módulo; (ii) e o segundo conjunto é referente às velocidades na direção do eixo y_R , $v_{dy_R} = v_{ey_R} = 0$. Conclui-se que para cada roda, tem-se somente velocidade na direção x_R .

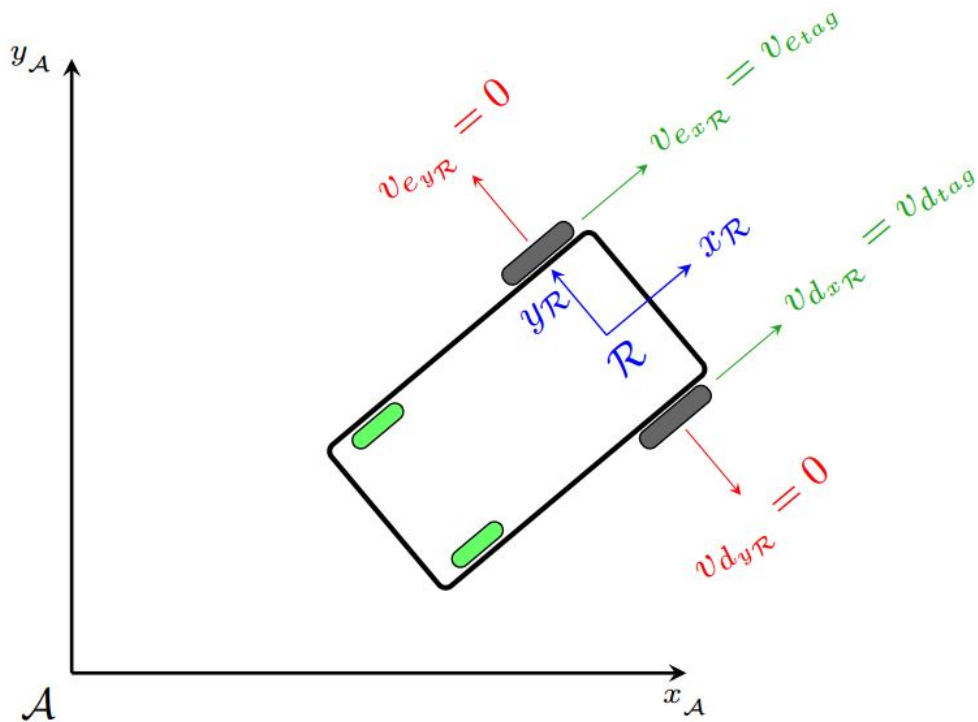


Figura 6 – Representação esquemática de um RMRD e suas restrições não holonômicas (YOUSSEF, 2013).

Como resultado desta análise as restrições não holonômicas do RMRD são definidas como:

$$\begin{aligned} v_{dx_R} &= r\dot{\varphi}_r \\ v_{ex_R} &= r\dot{\varphi}_l \\ v_{y_R} = v_{dy_R} = v_{ey_R} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

e devem ser reescritas em função das coordenadas generalizadas. Para tanto, é suficiente descrever as velocidades v_{dx_R} , v_{ex_R} e v_{y_R} em função de q .

As velocidades $v_{d_{x_R}}$ e $v_{e_{x_R}}$ são compostas pela soma das contribuições da velocidade na direção do eixo x_R , a saber, \dot{x}_R , e da velocidade tangencial, $b\dot{\theta}$, onde b é a distância entre o centro da roda e o eixo de simetria do robô, resultante da rotação em torno do centro de R com velocidade $\dot{\theta}$. Por outro lado a velocidade v_{y_R} é composta apenas da contribuição da velocidade na direção do eixo y_R , ou seja, \dot{y}_R , conforme é mostrado na Figura 7 e expresso pelas Eq. 2.2.

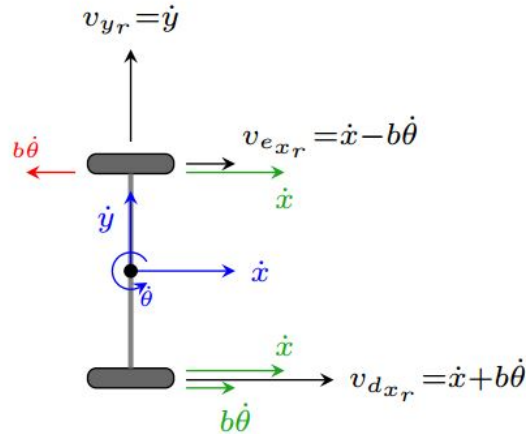


Figura 7 – Esquema de distribuição de velocidades em RMRD (YOUSSEF, 2013).

$$\begin{aligned} v_{d_{x_R}} &= \dot{x}_R + b\dot{\theta} \\ v_{e_{x_R}} &= \dot{x}_R - b\dot{\theta} \\ v_{y_R} &= \dot{y}_R \end{aligned} \quad (2.2)$$

O próximo passo é expressar as velocidades \dot{x}_R e \dot{y}_R em termos das componentes do vetor de velocidade de postura \dot{x} e \dot{y} , que são medidas no referencial A . Para isso, considera-se a seguinte operação de rotação entre R e A :

$$\begin{aligned} q_R &= R_A(\theta)q \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assim, têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= \dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) \\ \dot{y}_R &= \dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta), \end{aligned} \quad (2.4)$$

e as restrições são obtidas relacionando-se as Eq. 2.1, 2.2 e 2.4, como:

$$\begin{aligned} -\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) &= 0 \\ -\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) - b\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_l &= 0 \\ -\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) + b\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_l &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essas restrições podem ser reescritas em uma forma matricial conhecida como forma de Pfaffian (FIGUEIREDO; JOTA, 2004):

$$A(\theta)\dot{q} = 0, \quad (2.6)$$

na qual:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & -b & r & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & b & 0 & r \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Com a definição dos sistemas de coordenadas, é possível também determinar a localização do centro de inércia C_I do robô. Este é expresso no referencial A por meio das coordenadas (x_I, y_I) . No referencial R , o centro de inércia é expresso pela distância d e pelo ângulo α , como apresentado na Figura 8.

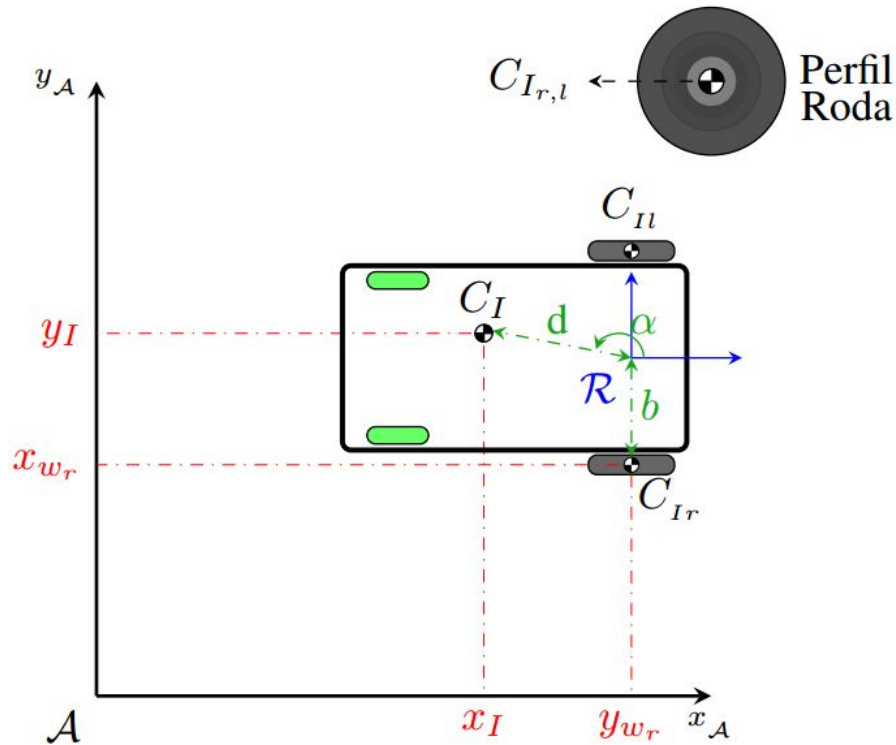


Figura 8 – Representação esquemática de um RMRD e seus centros de inércia (YOUSSEF, 2013).

Localizam-se, no referencial (Ax_Ay_A) , os centros de inércia das rodas direita C_{I_r} e esquerda C_{I_l} pelas coordenadas (x_{w_r}, y_{w_r}) e (x_{w_l}, y_{w_l}) expressas no referencial A . No referencial R , essas coordenadas podem ser expressas pela distância b medida entre a origem desse sistema e os centros de inércia das rodas.

Essas coordenadas de centro de inércia podem ser escritas na forma homogênea e expressas sobre o referencial R como (TSAI, 1999):

$${}^R \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos(\alpha) \\ d \sin(\alpha) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^R \begin{bmatrix} x_{w_r} \\ y_{w_r} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^R \begin{bmatrix} x_{w_l} \\ y_{w_l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Para expressar os pontos 2.8 no referencial A é aplicada a matriz de transformação homogênea:

$${}^A T_r = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R_r(\theta) & & & {}^A O_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad {}^A R_r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^A O_r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

em que ${}^A R_r(\theta)$ representa a matriz de rotação do referencial R para o referencial A e ${}^A O_r$ representa as coordenadas da origem de R no referencial A . Aplicando Eq. 2.9 nos pontos dados pela Eq. 2.8 obtém-se:

$$\begin{aligned} {}^A \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x + d \cos(\theta + \alpha) \\ y + d \sin(\theta + \alpha) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ {}^A \begin{bmatrix} x_{w_r} \\ y_{w_r} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x + b \sin(\theta) \\ y - b \cos(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ {}^A \begin{bmatrix} x_{w_l} \\ y_{w_l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x - b \sin(\theta) \\ y + b \cos(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

e derivando em função do tempo, obtém-se os seguintes vetores de velocidades:

$$\begin{aligned}
 {}^A \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} - d\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha) \\ \dot{y} + d\dot{\theta} \cos(\theta + \alpha) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\
 {}^A \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_r} \\ \dot{y}_{w_r} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} + b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} + b\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\
 {}^A \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_l} \\ \dot{y}_{w_l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} - b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} - b\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

os quais são necessários para a construção do modelo dinâmico.

A seguir, os comportamentos cinemáticos e dinâmicos são modelados para, então, determinar o modelo de configuração em espaço de estado adequado para a realização de simulações.

2.1.1 Modelagem cinemática de configuração

A cinemática tem como objetivo descrever o movimento de pontos, corpos e sistemas de corpos sem considerar sua causa. No caso da modelagem cinemática de um RMR não holonômico, tem-se que o sistema, com estado $q \in \mathfrak{R}^n$, é sujeito a k restrições, divididas em l restrições holonômicas e $k - l$ não holonômicas, descritas na forma de Pfaffian (FIGUEIREDO; JOTA, 2004) pela Eq. 2.6 em que $A(q)$ é uma matriz de dimensão $k \times n$ de posto completo (MURRAY *et al.*, 1994). O objetivo é definir uma representação matemática dos movimentos permissíveis que atendem à Eq. 2.6. Para tanto, pode-se calcular um mapeamento entre o espaço que representa as velocidades permitidas ao robô, ou seja, o espaço nulo (SCIAVICCO *et al.*, 2009) de $A(q)$, $\mathcal{N}(A(q))$, e o espaço definido pelo vetor \dot{q} .

Existe um campo vetorial, linearmente independente e continuamente diferenciável, $s_1(q), \dots, s_{n-k}(q)$ que pertence ao $\mathcal{N}(A(q))$, ou seja, $A(q)s_i(q) = 0$, $i = 1, \dots, n - k$, e forma uma base para esse espaço. Então esse campo vetorial define uma distribuição $\Delta = \text{span}\{s_1(q), \dots, s_{n-k}(q)\} \mid \dot{q} \in \Delta$ (SARKAR; YUN; KUMAR, 1994; COELHO; NUNES, 2003; CAMPION; CHUNG, 2008).

Portanto existem: (i) uma matriz $S(q)$ cujas colunas são formadas pelos elementos do campo vetorial, isto é $s(q) = [s_1(q) \ \dots \ s_{n-k}(q)]$ que verifica $\dim(S(q)) = \dim\Delta$

e $A(q)S(q) = 0$; e um vetor $\varphi(t) = [\varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_{n-k}(t)]$ pertencente à $\mathcal{N}(A(q))$ e que representa as velocidades permissíveis ao sistema, tais que para todo tempo t é válido o seguinte mapeamento:

$$\dot{q} = S(q)\varphi(t), \quad (2.12)$$

em que $S(q)$ é uma matriz Jacobiana que mapeia a variável φ no espaço definido por \dot{q} (SARKAR; YUN; KUMAR, 1994; COELHO; NUNES, 2003; CAMPION; CHUNG, 2008). Embora as escolhas de $S(q)$ e de φ não sejam únicas, elas são dependentes uma da outra. Portanto, partindo-se de um vetor de velocidades φ desejado e adequado é possível encontrar a matriz $S(q)$ associada que mapeia φ em \dot{q} .

O RMRD é representado pela coordenada generalizada $q \in \mathfrak{R}^5$ (as três variáveis de postura e o deslocamento angular das rodas direita e esquerda) e opera no plano descrito pelo sistema de coordenadas A , conforme mostrado na Figura 5. O robô pode atingir qualquer ponto desse plano por meio de trajetórias que respeitem suas restrições de movimentos (Eq. 2.6 e 2.7), ou seja, trajetórias compostas pela combinação de seus deslocamentos longitudinais e rotacionais. O robô tem $k = 3$ restrições (Eq. 2.5), que implica que $S(q) \in \mathfrak{R}^{5 \times 2}$ ($n \times (x - k)$) e o vetor de velocidades $\varphi \in \mathfrak{R}^2$ ($n - k$). As velocidades angulares das rodas são a escolha mais natural para compor esse vetor, pois não possuem limitações, estão diretamente relacionadas aos atuadores e aos possíveis deslocamentos, portanto define-se:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Como o vetor de estados é representado pelas cinco coordenadas generalizadas $q = [x \ y \ \theta \ \varphi_r \ \varphi_l]$, as três restrições são dadas pela matriz $A(q)$, Eq. 2.7 e com a escolha do vetor de velocidades φ , Eq. 2.13, define-se a matriz Jacobiana como (FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; COELHO; NUNES, 2005):

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r \cos \theta}{2} & \frac{r \cos \theta}{2} \\ r \sin \theta & r \sin \theta \\ \frac{2}{r} & \frac{2}{r} \\ \frac{2b}{1} & -\frac{2b}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

que verifica $A(q)S(q) = 0$. Portanto, o modelo cinemático de configuração para o RMRD é descrito pela Eq. 2.12. O modelo apresentado pela Eq. 2.12 é denominado na como modelo cinemático de configuração (CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 2011) e é útil para a modelagem em que os atuadores são considerados, pois a escolha de φ é exatamente a velocidade de saída dos motores DC.

2.1.2 Modelagem dinâmica de configuração

A modelagem dinâmica tem como objetivo descrever a interação de forças e acelerações que agem sobre o sistema e geram movimento. No caso desse trabalho, são estudadas as forças que geram os movimentos discutidos na modelagem cinemática do sistema.

Para a modelagem dinâmica do RMRD, utiliza-se o formalismo Euler-Lagrange associado ao princípio de d'Alembert, cuja formulação é baseada em energia e o produto é uma equação denominada equação de movimento (SHOJAEI; SHAHRI; TARAKAMEH, 2011). Esse formalismo permite o estudo das forças que atuam sobre o sistema, dentre as quais têm-se: (i) forças conservativas, como forças de *Coriolis*, inerciais, gravitacionais e centrífugas; (ii) forças não conservativas, exemplificadas como forças externas geradas por atrito, perturbações e atuadores; e (iii) forças restritivas, provenientes de restrições físicas do sistema, evitam movimentos nas direções nas quais as restrições são violadas e podem ser descritas como (MURRAY *et al.*, 1994):

$$\Gamma = A^T(q)\lambda, \quad (2.15)$$

na qual $A(q)$ é o conjunto de k restrições apresentado nas Eq. 2.7 e 2.12, $\lambda \in \mathfrak{R}^k$ é um vetor de magnitudes das forças restritivas e seus elementos λ_i são denominados multiplicadores de Lagrange. Para que estas forças possam ser consideradas no equacionamento, assume-se que não realizam trabalho e, portanto, conservam energia, conforme estabelece o princípio de d'Alembert (MURRAY *et al.*, 1994).

A equação de movimento de Euler-Lagrange para sistemas conservativos é descrita

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (2.16)$$

sendo q o vetor de coordenadas generalizadas e $L(q, \dot{q})$ denominado Lagrangeano e definido a partir da energia do sistema. O Lagrangeano é calculado como a diferença entre a energia cinética $K(q)$ e a energia potencial $U(q)$ do sistema (MURRAY *et al.*, 1994; SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006):

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q), \quad (2.17)$$

em que a energia cinética pode ser escrita como:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (2.18)$$

sendo $M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia, cuja característica é ser simétrica, definida positiva e depende das massas e dos tensores de inércia do sistema (MURRAY *et al.*, 1994). A energia potencial $V(q)$ em contrapartida não tem nenhuma forma específica.

O RMRD é um sistema não conservativo que sofre a ação: de torques nas rodas; forças de atrito; e outras forças externas, além de forças restritivas derivadas das suas

limitações de movimentos. Assumindo-se que as restrições são linearmente independentes e que as forças restritivas não realizam trabalho sobre o sistema, adicionam-se à Eq. 2.16 as contribuições das forças não conservativas, externas e restritivas para obter-se uma equação de movimento para um sistema não holonômico não conservativo como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q)\lambda - \Upsilon = 0, \quad (2.19)$$

em que Υ representa as forças não conservativas e externas, e $A^T(q)\lambda$ representa as forças restritivas.

O cálculo do modelo dinâmico por meio da Eq. 2.19 necessita da definição do Lagrangeano do sistema. No caso de um RMR o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ depende apenas da energia cinética $K(q, \dot{q})$, pois sua energia potencial é igual a zero, devido ao robô estar no plano horizontal. Portanto tem-se para o RMRD que:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}. \quad (2.20)$$

Aplicando-se a formulação de Euler-Lagrange, apresentada na Eq. 2.19, considerando o Lagrangeano dado pela Eq. 2.20 e, que Υ é formado pelos torques nas rodas τ , e um vetor τ_p que representa as perturbações e incertezas de parâmetros e modelo, tem-se:

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}) + A^T(q)\lambda + \tau_p = B(q)\tau, \quad (2.21)$$

que é reescrito como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + A^T(q)\lambda + \tau_p = B(q)\tau, \quad (2.22)$$

na qual a matriz $C(q, \dot{q})$ refere-se às forças de *Coriolis* e centrífugas e é definida como:

$$C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q)\dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}), \quad (2.23)$$

e $B(q)$ é uma matriz de entrada que associa os torques nas rodas às outras forças que atuam no sistema determinada na Eq. 2.34.

O cálculo da energia cinética é feito considerando três corpos, o chassi do robô e suas duas rodas com os rotores. O valor total desta energia é a soma da energia cinética do chassi do robô, K_c , e das energias cinéticas da roda direita K_{w_r} e da roda esquerda K_{w_l} :

$$K = K_c + K_{w_r} + K_{w_l}. \quad (2.24)$$

A energia cinética do chassi do robô é calculada como:

$$K_c(v_c, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} v_c^T m v_c + \frac{1}{2} \dot{\theta} I \dot{\theta}, \quad (2.25)$$

sendo $\dot{\theta} = \omega_a$ a velocidade angular do centro de massa do robô e v_c a velocidade linear, apresentada na Eq. 2.11 em termos das coordenadas generalizadas, como:

$$v_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - d\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha) \\ \dot{y} + d\dot{\theta} \cos(\theta + \alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

A energia cinética das rodas é calculada com:

$$\begin{aligned} K_{w_r}(v_{w_r}, \theta, \varphi_r) &= \frac{1}{2} v_{w_r}^T m_r v_{w_r} + \frac{1}{2} \dot{\theta} I_r \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_r I_{r\varphi} \dot{\varphi}_r, \\ K_{w_l}(v_{w_l}, \theta, \varphi_l) &= \frac{1}{2} v_{w_l}^T m_l v_{w_l} + \frac{1}{2} \dot{\theta} I_l \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_l I_{l\varphi} \dot{\varphi}_l, \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo $\dot{\varphi}_r$ e $\dot{\varphi}_l$ as velocidades angulares das rodas direita e esquerda, v_{w_r} e v_{w_l} as velocidades lineares das rodas direita e esquerda determinadas na Eq. 2.11, reescrita aqui:

$$v_{w_r} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_r} \\ \dot{y}_{w_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} + b\dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix}; \quad (2.28)$$

$$v_{w_l} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_l} \\ \dot{y}_{w_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} - b\dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

A energia cinética total pode então ser calculada assumindo a matriz de inércia que segue:

$$K(\dot{q}) = \frac{1}{2} \left[(2m_w + m_c)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I\dot{\theta}^2 + I_{w_\varphi}(\dot{\varphi}_r^2 + \dot{\varphi}_l^2) + 2\dot{\theta}(f_1\dot{x} + f_2\dot{y}) \right] \quad (2.30)$$

para qual se tem que:

$$\begin{aligned} I &= I_c + 2b^2 m_w + d^2 m_c + 2I_w, \\ f_1(\theta) &= -dm_c \sin(\theta + \alpha), \\ f_2(\theta) &= dm_c \cos(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (2.31)$$

A energia cinética do RMRD, Eq. 2.30, pode ser reescrita na forma matricial, como na Eq. 2.18:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m & 0 & f_1(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & m & f_2(\theta) & 0 & 0 \\ f_1(\theta) & f_2(\theta) & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{w_\varphi} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

A matriz de *Coriolis* é calculada a partir da Eq. 2.23 resultando em:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_2(\theta)\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1(\theta)\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

A matriz de entrada $B(q)$ deve relacionar os torques no motor com as coordenadas generalizadas. Como estes torques têm relação direta com as acelerações nas rodas, determina-se:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Para completar a equação de movimento é necessário o cálculo dos termos relacionados às forças restritivas $A^T(q)\lambda$. A matriz de restrições $A(\theta)$ foi definida na Eq. 2.7, enquanto o cálculo do vetor λ pode ser equacionado algebricamente conforme mostrado em (MURRAY *et al.*, 1994). Entretanto, dependendo da complexidade do modelo, é inviável obter-se esse vetor (YOUSSEF, 2013).

Para evitar a necessidade de se calcular os multiplicadores de Lagrange, na Seção 2.1.4 é desenvolvido um modelo em espaço de estado sem restrições associando os modelos cinemático e dinâmico, Eq. 2.12 e Eq. 2.22, e o modelo do circuito elétrico dos motores (Seção 2.1.3) por meio de manipulações algébricas, conforme desenvolvido no trabalho (FIERRO; LEWIS, 1995).

2.1.3 Modelo eletro-mecânico

O comando do robô é feito normalmente por motores *DC Brushless*, que geram os torques que acionam as rodas do RMRD, como é o caso do Powerbot. Este tipo de motor possui uma redução por meio de um sistema de engrenagens que amplifica seu torque e diminui sua velocidade de saída. A tensão nos seus terminais de armadura u_a é definida como variável de entrada, ao passo que o torque mecânico τ é a variável de saída.

Além dessas variáveis, o comportamento desse dispositivo é influenciado pela corrente i_a , resistência R_a e indutância L_a que compõem seu circuito elétrico de armadura e, ainda, pela velocidade de saída $\dot{\varphi}$. O torque τ e a velocidade $\dot{\varphi}$ se relacionam ao torque τ_M e à velocidade $\dot{\varphi}_M$ antes do sistema de engrenagens, por meio de um redutor por engrenagens de relação n_w , que representa a redução gerada pelo sistema de engrenagens. Na Figura 9 é mostrada a configuração desse sistema

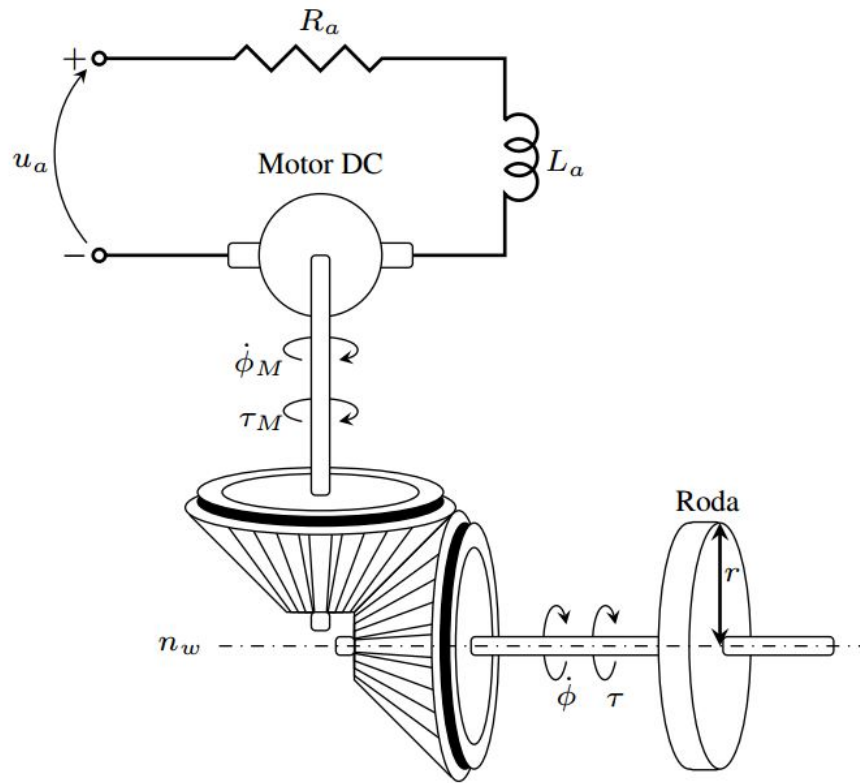


Figura 9 – Representação esquemática de um motor *DC Brushless* (YOUSSEF, 2013).

O RMRD é comandado por dois motores, um para acionar a roda direita e outro a roda esquerda. Portanto, as variáveis de corrente e tensão dos motores direito e esquerdo são representadas, respectivamente, pelos vetores $i_a = [i_{a_r} \ i_{a_l}]^T$, $u_a = [u_{a_r} \ u_{a_l}]^T$, o torque e as velocidades de saída são definidos, respectivamente, pelos vetores $\tau = [\tau_r \ \tau_l]^T$, $\varphi = [\dot{\varphi}_r \ \dot{\varphi}_l]^T$.

Por conveniência os parâmetros utilizados para descrever o sistema são listados na Tabela 1.

Os motores *DC* são comandados pelas tensões nos seus terminais gerando os torques nas rodas do RMRD. O comportamento elétrico desses elementos pode ser representado: (i) pela soma das quedas de tensões ao longo de seus circuitos de armadura, e (ii) pelos torques antes do sistema de engrenagens, que podem ser considerados proporcionais às correntes de armadura (SHOJAEI; SHAHRI; TARAKAMEH, 2011) (ver Figura 9). Portanto, tem-se que:

$$\begin{cases} u_{a_r} &= L_a \frac{d}{dt} i_{a_r} + R_a i_a + k_b \dot{\varphi}_{m_r} + \zeta_r, \\ \tau_{M_r} &= k_\tau i_{a_r}, \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} u_{a_l} &= L_a \frac{d}{dt} i_{a_l} + R_a i_a + k_b \dot{\varphi}_{m_l} + \zeta_l, \\ \tau_{M_l} &= k_\tau i_{a_l}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Tabela 1 – Parâmetros do RMRD

Parâmetro	Descrição
m	massa total do robô
m_w	massa da roda e rotor à qual está presa
m_c	massa do corpo do robô sem rodas e respectivos rotores ($m - 2mr$)
I	inércia total do robô em relação ao sistema de coordenadas R
I_c	inércia do corpo do robô em relação ao seu centro de massa
I_w	inércia das rodas em relação ao eixo normal ao plano do robô e que passa pelo centro de massa da roda
$I_{w,\varphi}$	inércia das rodas em relação ao eixo de rotação do motor
c	comprimento do robô
$2b$	largura do robô
h	altura do robô
d, α	coordenadas do centro de inércia medidas sobre o sistema de coordenadas R
R_a	resistência de armadura do motor
L_a	indutância de armadura
k_b	constante de força contra eletromotriz
k_τ	constante de torque
n_w	redução dos motores

onde ζ_r e ζ_l são as perturbações elétricas e as não linearidades (atrite, histerese, zona morta, *backlash*) nos atuadores direito e esquerdo.

As variáveis de velocidade e torque dos motores $\dot{\varphi}_{m_r}$, $\dot{\varphi}_{m_l}$, τ_{M_r} e τ_{M_l} são relacionadas às variáveis de velocidade e torque nas rodas por:

$$\begin{bmatrix} \tau_{M_r} \\ \tau_{M_l} \end{bmatrix} = n_w \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{m_r} \\ \dot{\varphi}_{m_l} \end{bmatrix} = \frac{1}{n_w} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

em que n_w representa a redução do acoplamento mecânico por engrenagens. Por fim, tem-se que o comportamento dos circuitos elétricos dos motores pode ser representado matematicamente por:

$$L_a \begin{bmatrix} \dot{i}_{a_r} \\ \dot{i}_{a_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{a_r} \\ u_{a_l} \end{bmatrix} - R_a \begin{bmatrix} i_{a_r} \\ i_{a_l} \end{bmatrix} - n_w k_b \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \zeta_r \\ \zeta_l \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

sendo que os torques entregues pelos motores são dados por:

$$\begin{bmatrix} \tau_{M_r} \\ \tau_{M_l} \end{bmatrix} = n_w k_\tau \begin{bmatrix} i_{a_r} \\ i_{a_l} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

2.1.4 Modelo de configuração no espaço de estado

Nesta seção, é apresentado um desenvolvimento algébrico com os modelos cinemático, dinâmico, e do circuito elétrico estudados nas seções anteriores. Com isso, obtêm-se uma representação em espaço de estado em que as restrições não apareçam explicitamente e que será utilizado como ambiente de simulações.

Considerando-se os modelos cinemático, Eq. 2.12, e dinâmico, Eq. 2.22, assim como a propriedade (CAMPION; CHUNG, 2008):

$$A(\theta)S(\theta) = S^T(\theta)A^T(\theta) = 0, \quad (2.41)$$

tem-se, ao pré-multiplicar a Eq. 2.22 por $S^T(\theta)$ e aplicar a Eq. 2.41:

$$S^T(\theta)M(\theta)\ddot{q} + S^T(\theta)C(\theta, \dot{\theta})\dot{q} + S^T(\theta)\tau_p = S^T(\theta)B\tau. \quad (2.42)$$

Diferenciando no tempo a Eq. 2.12, obtém-se:

$$\ddot{q} = \dot{S}(\theta)\dot{\varphi} + S(\theta)\ddot{\varphi}, \quad (2.43)$$

e manipulando-se algebricamente as Eq. 2.12, 2.42 e 2.43 obtém-se:

$$\bar{M}\ddot{\varphi} + \bar{C}(\dot{\theta})\dot{\varphi} + \bar{\tau}_p = \bar{B}\tau, \quad (2.44)$$

na qual:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= S^T(\theta)M(\theta)S(\theta), \\ \bar{C}(\dot{\theta}) &= S^T(\theta)M(\theta)\dot{S}(\theta, \dot{\theta}) + S^T(\theta)C(\theta, \dot{\theta})S(\theta), \\ \bar{B} &= S^T(\theta)B, \\ \bar{\tau}_p &= S^T(\theta)\tau_p, \end{aligned} \quad (2.45)$$

sendo que $\bar{M}(\theta)$ é uma matriz simétrica definida positiva (FIERRO; LEWIS, 1995). Pode-se, ainda, reescrever Eq. 2.44 em função de $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \bar{M}^{-1} \left(\bar{B}\tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}(\dot{\theta})\dot{\varphi} \right), \quad (2.46)$$

em que:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ f_4 & f_5 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(\dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{dm_c r^2 \cos(\alpha)}{2b} \dot{\theta} \\ -\frac{dm_c r^2 \cos(\alpha)}{2b} \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \frac{r^2 I + (b^2 m - 2 \sin(\alpha) b d m_c) r^2 + 4 b^2 I_{w_\varphi}}{4 b^2} \\
 f_4 &= \frac{-r^2 I - b^2 m r^2}{4 b^2} \\
 f_5 &= \frac{r^2 I + (b^2 m + 2 \sin(\alpha) b d m_c) r^2 + 4 b^2 I_{w_\varphi}}{4 b^2}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Portanto, associando as Eq. 2.39 e 2.40 às Eq. 2.12 e 2.46, obtém-se o seguinte modelo de configuração para a representação do comportamento do RMRD:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \\ L_a \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\theta) \varphi \\ \bar{M}^{-1} (n k_r \bar{B} i_a - \bar{\tau}_p - \bar{C}(\dot{\theta}) \varphi) \\ u_a - R_a i_a - n k_b \varphi - \zeta \end{bmatrix}, \tag{2.49}$$

onde: (i) a primeira linha da matriz representa o comportamento cinemático do RMRD; (ii) a segunda linha da matriz representa o comportamento dinâmico do RMRD; (iii) a terceira linha da matriz representa o comportamento do circuito elétrico do RMRD; (iv) o termo $\bar{\tau}_p$ pode ser utilizado para representar incertezas paramétricas, estruturais e perturbações. O modelo representado pela Eq. 2.49 será utilizado para simular o comportamento do RMRD na verificação dos controles, utilizando como parâmetros os valores fornecidos pelo fabricante do Powerbot.

2.2 Modelo de postura

Nesta seção, é apresentada uma modelagem do RMRD cujo propósito é servir de modelo base para a síntese de controladores. O modelo de postura é simplificado quando comparado ao modelo de configuração, uma vez que utiliza menos variáveis e agrega menos detalhes do funcionamento do robô. Entretanto, é adequado à síntese de controles robustos para rastreamento de trajetórias, pois oferece informações suficientes para essa tarefa e, principalmente, tem-se que as trajetórias, normalmente, são dadas em coordenadas de postura (representação mínima) (CAMPION; CHUNG, 2008). Além disso, a menor complexidade desse modelo facilita o desenvolvimento de controladores.

Por ser um modelo mais simples, supõe-se que: (i) o RMRD é formado de um corpo único; (ii) a coordenada do seu centro de massa coincide com o centro geométrico do robô (ângulo $\alpha = 0$); (iii) a dinâmica dos atuadores (assim como de sensores e outros equipamentos eletrônicos, que já foram desconsiderados no modelo de configuração) são desconsideradas, partindo do pressuposto que o tempo de resposta dessas dinâmicas é menor que o da dinâmica do sistema principal. A Figura 10 mostra a representação do RMRD no espaço cartesiano, em que se localiza seu centro de inércia C_I , que coincide com o centro geométrico do robô, medido sobre o eixo x_R pela distância d .

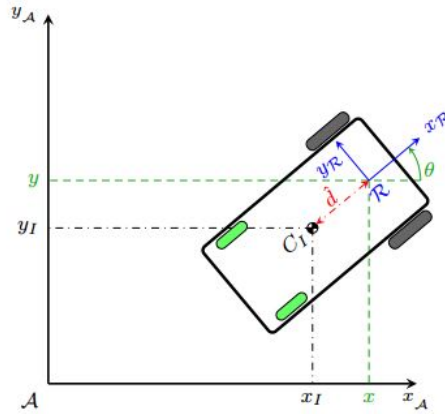


Figura 10 – Representação planar do RMRD (YOUSSEF, 2013).

Outra simplificação deste modelo é, em vez de utilizar o vetor de coordenadas generalizadas q , apenas as coordenadas de postura do robô $q_{pos} = \xi = [x \ y \ \theta]^T$ são consideradas. Assim, as velocidades de postura do robô são definidas como as derivadas temporais das coordenadas de postura $\dot{q}_{pos} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$, e estão sujeitas às mesmas restrições de movimentos expressa na Eq. 2.5. Entretanto, a construção do modelo cinemático de postura é influenciada apenas pela primeira restrição, reescrita abaixo:

$$-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = 0, \quad (2.50)$$

que pode ser escrita na forma de *Pfaffian* (FIGUEIREDO; JOTA, 2004) como:

$$A_{pos}(\theta)\dot{q}_{pos} = 0, \quad (2.51)$$

na qual:

$$A_{pos}\theta = [-\sin(\theta) \ \cos(\theta) \ 0]. \quad (2.52)$$

Há a necessidade de se definir relações entre as variáveis relacionadas às velocidades, acelerações e torques nas rodas e no centro de inércia do robô. Para isso, note que nas duas últimas equações do conjunto de restrições Eq. 2.5:

$$\begin{aligned} -\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) - b\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_r &= 0, \\ -\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) + b\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_e &= 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

o termo $\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta)$ refere-se à velocidade na direção de x_R , e é denominado de velocidade linear v do RMRD, e $\dot{\theta}$ refere-se a velocidade angular ω do RMRD. Assim, reescreve-se a Eq. 2.53 como:

$$\begin{aligned} v + b\omega - r\varphi_r &= 0, \\ v - b\omega - r\varphi_l &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Manipulando a Eq. 2.54 pode-se escrever as velocidades das rodas φ em relação as velocidades no centro de massa do RMRD $\eta = [v \ \omega]$:

$$\begin{aligned} \varphi &= T_v \eta \\ \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

e, aplicando a inversa, escrever as velocidades no centro de massa do RMRD em função das velocidades das rodas:

$$\begin{aligned} \eta &= T_v^{-1} \varphi \\ \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r & r \\ \frac{2}{r} & -\frac{2}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_e \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

De forma análoga, é possível encontrar uma relação entre as acelerações nas rodas e no centro de massa do robô C_I . Para tanto, considera-se a derivada temporal da Eq. 2.53:

$$\begin{aligned} -\ddot{x} \cos(\theta) - \ddot{y} \sin(\theta) - \dot{\theta}(-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta)) - b\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi}_r &= 0, \\ -\ddot{x} \cos(\theta) - \ddot{y} \sin(\theta) - \dot{\theta}(-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta)) + b\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi}_l &= 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

em que o termo $-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos(\theta)$ é igual a zero devido a restrição apresentada na Eq. 2.50. O termo $\ddot{x} \cos(\theta) - \ddot{y} \sin(\theta)$ representa a aceleração linear do RMRD \dot{v} , e $\ddot{\theta}$ à aceleração angular do RMRD $\dot{\omega}$, resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{v} + b\dot{\omega} - r\ddot{\varphi}_r &= 0, \\ \dot{v} - b\dot{\omega} - r\ddot{\varphi}_l &= 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

e aplicando as devidas manipulações algébricas:

$$\dot{\varphi} = T_v \dot{\eta}, \quad (2.59)$$

e

$$\dot{\eta} = T_v^{-1} \dot{\varphi}. \quad (2.60)$$

As coordenadas e velocidades do centro de inércia C_I do RMRD podem ser obtidas substituindo-se $\alpha = 0$ nas Eq. 2.10 e 2.11:

$${}^A \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d \cos(\theta) \\ y + d \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

$${}^A \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + d\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} + d\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

2.2.1 Modelagem cinemática de postura

O modelo cinemático de postura é obtido aplicando-se a metodologia apresentada na Seção 2.1.2 e é descrito pelas coordenadas de postura do robô $q_{post} \in \mathfrak{R}^3$, sujeitas à restrição apresentada na Eq. 2.51. Como a dimensão do vetor de estados é $n = 3$, e o número de restrições é $k = 1$, o vetor de velocidades deve ter dimensão $n - k = 2$, e a matriz Jacobiana $S_{pos}(q_{pos}) \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ ($n \times (n - k)$). Escolhendo o vetor de velocidades como:

$$\eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

em que v é a velocidade linear e ω a velocidade angular do RMRD, para a construção da representação matemática desejada, tem-se:

$$S_{post}(q_{post}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & d \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

que verifica a propriedade $A_{pos}(q_{pos})S_{pos}(q_{pos}) = 0$. Assim, o modelo cinemático é descrito por:

$$\dot{q}_{pos} = S_{pos}(q_{pos})\eta. \quad (2.65)$$

2.2.2 Modelagem dinâmica de postura

Adotando-se novamente a abordagem pelo formalismo de Euler-Lagrange, a equação de movimento para o caso tratado possui a mesma estrutura da Eq. 2.19 e é escrita como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{pos}}{\partial \dot{q}_{pos}} - \frac{\partial L_{pos}}{\partial q_{pos}} + A_{pos}^T(q_{pos})\lambda - \Upsilon = 0, \quad (2.66)$$

na qual Υ representa os torques de entrada τ e as incertezas e perturbação τ_p , enquanto o termo $A_{pos}^T(q_{pos})\lambda$ representa as forças restritivas. O Lagrangeano depende apenas da energia cinética $K(q_{pos}, \dot{q}_{pos})$, conforme discutido na Seção 2.1.2, e é expresso como:

$$L_{pos}(q_{pos}, \dot{q}_{pos}) = K(q_{pos}, \dot{q}_{pos}) = \frac{1}{2} \dot{q}_{pos}^T M_{pos}(q_{pos}) \dot{q}_{pos}, \quad (2.67)$$

em que $M_{pos}(q_{pos})$ é a matriz de inércia. Utilizando o Lagrangeano, Eq. 2.67, pode-se desenvolver a equação de movimento, Eq. 2.66, resultando em:

$$M_{pos}(q_{pos})\ddot{q}_{pos} + C_{pos}(q_{pos}, \dot{q}_{pos})\dot{q}_{pos} + A_{pos}^T(q_{pos})\lambda + \tau_p = B_{pos}(q_{pos})\tau, \quad (2.68)$$

em que $B_{pos}(q_{pos})$ é denominada matriz de entrada, e a matriz $C_{pos}(q_{pos}, \dot{q}_{pos})$ refere-se às forças de *Coriolis* e centrífugas, definida como:

$$C_{pos}(q_{pos}, \dot{q}_{pos}) = \dot{M}_{pos}(q_{pos})\dot{q}_{pos} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_{pos}} \left(\dot{q}_{pos}^T M_{pos}(q_{pos}) \dot{q}_{pos} \right). \quad (2.69)$$

A energia cinética do RMRD é calculada como:

$$K(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left[m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I\dot{\theta} + 2\dot{\theta}(h_1(\theta)\dot{x} + h_2(\theta)\dot{y}) \right] \quad (2.70)$$

na qual:

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= -dm \sin(\theta), \\ h_2(\theta) &= dm \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.71)$$

A energia cinética do RMRD, Eq. 2.70, pode ser escrita na forma matricial 2.67, assumindo a seguinte matriz de inércia:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m & 0 & h_1(\theta) \\ 0 & m & h_2(\theta) \\ h_1(\theta) & h_2(\theta) & I \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

A matriz de *Coriolis*, por sua vez, é calculada a partir da Equação 2.69 resultando em:

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_2(\theta) \\ 0 & 0 & h_1(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

A matriz de entrada deve relacionar os torques nas rodas com as acelerações das coordenadas de postura, ou seja, $B_{pos}(q_{pos}) = T_v^{-1}$:

$$B_{pos} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2R} & -\frac{r}{2R} \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

2.2.3 Modelo de postura em espaço de estado

Associando os modelos cinemático e dinâmico de postura, utilizando a metodologia apresentada na Seção 2.1.4, pode-se obter um modelo dinâmico sem restrições em função do vetor de velocidade η , como:

$$\bar{M}_{pos}\dot{\eta} + \bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta + \bar{\tau} = \bar{B}_{pos}\tau \quad (2.75)$$

em que:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{pos} &= S_{pos}(\theta)^T M_{pos}(\theta) S_{pos}(\theta), \\ \bar{C}_{pos}(\dot{\theta}) &= S_{pos}(\theta)^T M_{pos}(\theta) \dot{S}_{pos}(\dot{\theta}) + S_{pos}(\theta)^T C_{pos}(\theta) S_{pos}(\theta), \\ \bar{B}_{pos} &= S_{pos}(\theta)^T B_{pos},\end{aligned}\quad (2.76)$$

sendo \bar{M}_{pos} uma matriz simétrica positiva definida (FIERRO; LEWIS, 1995) e $\bar{\tau}_p$ um vetor que representa as incertezas e perturbações. Esse modelo pode ser reescrito em função de $\dot{\eta}$ como:

$$\dot{\eta} = \bar{M}^{-1} \left(\bar{B}\tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}(\dot{\theta})v \right), \quad (2.77)$$

em que:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

$$\bar{C}(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -dm\dot{\theta} \\ dm\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2R} & -\frac{r}{2T} \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Associando as Equações 2.65 e 2.77 obtém-se o seguinte modelo de postura em espaço de estado para a representação do comportamento do RMRD:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{pos} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pos}(q_{pos})\eta \\ \bar{M}_{pos}^{-1} \left(\bar{B}_{pos}\tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta \right) \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

onde: (i) a primeira linha da matriz representa o comportamento cinemático do RMRD; (ii) a segunda linha da matriz representa o comportamento dinâmico do RMRD; (iii) o termo $\bar{\tau}_p$ pode ser utilizado para representar incertezas e perturbações. O modelo representado pela Eq. 2.81 é utilizado como base na síntese de controle.

2.3 Considerações finais

Ao longo deste capítulo, foram descritas a obtenção de um modelo de configuração e de um modelo de postura em espaço de estado para um RMRD. A necessidade de se projetar um ambiente de simulação que represente o comportamento do robô motivaram a construção do modelo de configuração. O modelo de postura, em contrapartida, foi construído para servir de base para a síntese de controle, que tem por objetivo o rastreamento de trajetórias descritas pelas coordenadas de postura do robô.

3 Controle de RMRD

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica das técnicas de controle, e em seguida a síntese do controle. As técnicas discutidas aqui são de controle por dinâmica inversa para o controle dinâmico e controle por modos deslizantes (CMD) para o controle cinemático.

O CMD propostos têm como desvantagem, para os propósitos de controle, o fenômeno de *chattering*, ocasionado pela lógica de chaveamento em sua estrutura. Para atenuar seus efeitos negativos, duas soluções frequentemente utilizadas na literatura são apresentadas. A primeira é um estudo das características da parcela descontínua do sistema, investigando variações que diminuam o *chattering*. A segunda consiste em eliminar a parcela descontínua no controle, substituindo por uma aproximação contínua. Por fim, é proposto a utilização de um controle fuzzy adaptativo para resolução do problema do *chattering*, e sua integração com o CMD.

3.1 Descrição do problema e proposta de controle

Neste trabalho aborda-se o controle para o RMRD que consiste de um chassi montado sobre duas rodas livres para sustentação e duas rodas fixas atuadas. Motores *DC* são empregados para acioná-las permitindo ao RMRD realizar trajetórias factíveis, ou seja, trajetórias que respeitam restrições de movimento, perfis de velocidade e aceleração, limites de torques dos motores e condições iniciais.

O objetivo do controle é o rastreamento robusto de trajetórias, descritas em função das coordenadas de postura do RMRD, tal que os erros de rastreamento sejam minimizados. A síntese do controle é realizada assumindo que existe um sistema de navegação que fornece trajetórias factíveis e que, por meio de um sistema de sensoriamento, disponibiliza os dados de postura do robô.

Toma-se como base para o desenvolvimento do controle, o modelo de postura do RMRD em espaço de estados, Eq. 2.81, desenvolvido no Capítulo 2, reescrito abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(q)\eta \\ \bar{M}^{-1} (\bar{B}\tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}(q, \dot{q})\eta) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

no qual¹:

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}, \\
 S(q) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & d \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\
 \bar{C}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -dm\dot{\theta} \\ dm\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

com τ_p representando as incertezas e perturbações e os parâmetros de massa m , inércia I , distância d entre do centro de inércia do RMRD e o eixo das rodas do robô, distância b entre o centro de uma roda atuada ao eixo de simetria do RMRD e o raio das rodas r são dados pela Tabela 1.

A matriz do modelo de postura do robô em espaço de estados, descrito pela Eq. 3.1, apresenta, na primeira linha, a cinemática do RMRD, que é subatuada, pois possui três graus de liberdade $\dot{q} \in \mathfrak{R}^3$, e dois graus de atuação, $\eta \in \mathfrak{R}^2$. A segunda linha apresenta o comportamento dinâmico do sistema e é totalmente atuado, visto que o vetor de velocidade $\eta \in \mathfrak{R}^2$, que representa os graus de liberdade do sistema, é controlado pelas entradas de torque nas rodas $\tau \in \mathfrak{R}^2$.

Esse modelo foi desenvolvido considerando-se que o RMRD é um corpo único que se desloca no plano com as restrições de movimento e desconsiderando-se dinâmicas de atuadores, sensores e outros dispositivos eletrônicos. A existência de incertezas, perturbações e dinâmicas negligenciadas no modelo τ_p justificam a escolha da técnica de controle por modos deslizantes, devido a sua robustez a incertezas e perturbações assim como bom desempenho.

3.2 Controle dinâmico

Nesta seção, é discutido o controle dinâmico utilizando a técnica de controle de dinâmica inversa. Essa técnica é um tipo de controle linearizante que foi formulado para o controle de robôs manipuladores com elos rígidos cujo o objetivo é compensar as forças atuantes no sistema por meio de um sinal de controle linearizante (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006).

¹ O subíndice *pos* utilizado no Capítulo 2 para diferenciar as variáveis do modelo de postura e do modelo configuração foi omitido, mas as variáveis apresentadas aqui referem-se ao modelo de postura.

Considerando um sistema robótico com um espaço de configuração de dimensão n , cuja representação matemática é dada pela seguinte equação de movimento:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u, \quad (3.3)$$

na qual $q \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de coordenadas generalizadas, $u \in \mathfrak{R}^n$ os torques de entrada, $M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia, $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ a matriz de *Coriolis* e $G(q) \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de forças gravitacionais. O controle de dinâmica inversa consiste em sintetizar uma lei de controle de realimentação:

$$u = f(q, \dot{q}, t), \quad (3.4)$$

que compense as não linearidades do sistema apresentado na Eq. 3.3, que atenda a algum objetivo de controle, como rastreamento de trajetória (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006). Para isso, considera-se a seguinte lei de controle:

$$u = M(q)a_q + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (3.5)$$

que, ao ser aplicado no sistema resulta em:

$$\ddot{q} = a_q. \quad (3.6)$$

A dinâmica dada pela Eq. 3.6 pode ser tratada por técnicas de controle linear para atingir o objetivo de controle desejado. Por exemplo, o termo a_q , que representa uma nova entrada de controle, pode ser sintetizado para garantir o rastreamento de trajetória empregando um controle PD:

$$a_q = \ddot{q}^d(t) - K_d\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q}, \quad (3.7)$$

em que $\tilde{q} = q - q^d$, $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}^d$, K_d e K_p são matrizes definidas positivas. Os elementos dessas matrizes representam, respectivamente, os ganhos de posição e velocidade. As trajetórias desejadas de posição, velocidade e aceleração são dependentes do tempo e são representadas, respectivamente, por $q^d(t)$, $\dot{q}^d(t)$ e $\ddot{q}^d(t)$.

Substituindo a Eq. 3.7 na Eq. 3.5, resulta no seguinte sistema em malha fechada:

$$\ddot{\tilde{q}} + K_1\dot{\tilde{q}} + K_0\tilde{q} = 0, \quad (3.8)$$

em que o ajuste das matrizes de ganho K_1 e K_0 deve garantir o objetivo de controle. No próximo capítulo essa técnica será adequada para a síntese de controle dinâmico para o RMRD. Detalhes sobre a estabilidade deste controle podem ser encontrados em (FIERRO; LEWIS, 1997; OH; KIM; LEE, 2004; SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006).

Outro tipo de controle pode ser aplicado, como o Controle Proporcional (P), Controle Integral (PI) e o Controle Proporcional Integral Derivativo (PID), porém optou-se pelo controle PD, fornecido pelo fabricante do robô Powerbot, utilizado neste trabalho.

3.3 Síntese do controle dinâmico

Dado o comportamento das dinâmicas conhecidas do RMRD descrito em função da variável de velocidade η , conforme expresso na Equação 3.1 e reescrito abaixo:

$$\dot{\eta} = \bar{M}^{-1} \left(\bar{B}\tau_c - \bar{C}(q, \dot{q})\eta \right), \quad (3.9)$$

em que τ foi substituído por τ_c para evidenciar que esse é o sinal de controle e as incertezas e perturbações τ_p foi desconsiderado, pois é desconhecido. O objetivo do controle dinâmico é compensar forças e torques conhecidos que atuam sobre o sistema, de forma que possa garantir o rastreamento rápido dos erros de velocidades $\eta_e = \eta_c - \eta$. Baseado na teoria de controle de dinâmica inversa apresentado no Capítulo 3 uma lei controle que compensa as forças e torques conhecidos atuantes sobre o RMRD é determinada como:

$$\tau = \bar{B}(q)^{-1} \left(\bar{C}(q, \dot{q})v + \bar{M}(q)\bar{u} \right), \quad (3.10)$$

em que

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_l \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

deve ser sintetizado para estabilizar o sistema resultante da aplicação do controle, Eq 3.10, no sistema, Eq. 3.9:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_l \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

garantindo que a referência de velocidade η_c , proveniente do controlador cinemático, seja rastreada. Para isso, o sinal de controle \bar{u} deve garantir que o erro de velocidade $\eta_e = \eta_c - \eta = 0$.

O sistema, definido pela Eq. 3.12 pode ser estudado no domínio da frequência para facilitar a síntese dos controladores PD. O sistema em malha fechada desejado é representado por dois diagramas de blocos referentes às velocidades linear v e angular ω , conforme mostrado na Figura 11. Cada diagrama é composto por um sistema integrador e pelo respectivo controlador, $C_v(s)$ ou $C_\omega(s)$.

O vetor $\bar{u} = [\bar{u}_v \quad \bar{u}_\omega]^T$ é a nova entrada de controle a ser projetado como controle PD para alcançar a convergência rápida de v_e . Então, os sinais de controle $\bar{u}_v(s)$ e $\bar{u}_\omega(s)$ são gerados pelo controlador PD como:

$$\begin{aligned} C_v(s) &= \frac{v(s)}{\bar{u}_v(s)} = k_{p_v} + \frac{k_{d_v}N_v}{1 + \frac{N_v}{s}}, \\ C_\omega(s) &= \frac{v(s)}{\bar{u}_\omega(s)} = k_{p_\omega} + \frac{k_{d_\omega}N_\omega}{1 + \frac{N_\omega}{s}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

com os ganhos proporcionais k_{p_v} e k_{p_ω} , ganhos derivativos k_{d_v} e k_{d_ω} , ganhos derivativos do filtro de parâmetros N_v e N_ω sendo positivos e ajustados para alcançar estabilidade com bom desempenho.

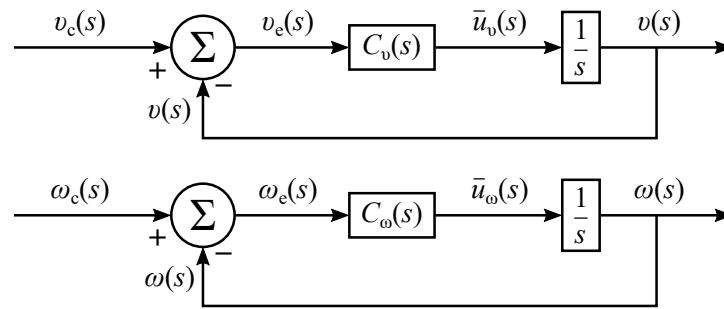


Figura 11 – Diagrama de blocos do controle em malha fechada do sistema integrador (ELYOUSSEF *et al.*, 2014).

O controle por dinâmica inversa com PD é utilizado no cenário de simulação ideal, onde a representação do RMRD é feita pelo modelo de configuração em espaço de estados, Eq. 2.49. Devido ao Powerbot fazer o controle dinâmico apenas com um controlador PD não foi possível aplicar o controle por dinâmica inversa na experimentação com o robô. Embora não tenha sido possível utilizar o controle por dinâmica inversa na experimentação no Powerbot, a análise dos resultados utilizando controle cinemático com controle PD foi suficiente.

3.4 Controle cinemático

Nesta seção, é desenvolvido um controle para solucionar o problema de rastreamento de trajetórias de RMRDs, baseado no modelo cinemático de postura, utilizando controle por modos deslizantes (CMD) (PERRUQUETTI; BARBOT, 2002). Como o objetivo é aplicar o controle em um robô real, deve ser levado em consideração perturbações e incertezas, que podem ser vistas como erros de rastreamento de velocidade², e seus efeitos podem comprometer a precisão dos resultados. Por causa da sua robustez em relação a incertezas e perturbações, são propostos controladores com base na teoria de Controle por Modos Deslizantes, sendo a prova de estabilidade deduzida pelo método de Lyapunov.

Para desenvolver um CMD primeiramente é necessário projetar um espaço de estados, chamado de superfície deslizante, onde as variáveis de estados do sistema devem permanecer. O CMD possui duas etapas: (i) alcance, em que as trajetórias das variáveis de estados devem ser levadas até um estado desejado, chamado de superfície deslizante; (ii) e o deslizamento, em que a trajetória das variáveis de estados é mantida sobre no modo deslizante. Enquanto a trajetória dos estados do sistemas é mantida sobre essa superfície, devido a propriedades dinâmicas da superfície, ela se torna insensível à incertezas e perturbações (HUNG; GAO; HUNG, 1993; UTKIN; GULDNER; SHI, 2009).

² Como discutido anteriormente a hipótese de perfeito rastreamento de velocidade não é mantida para aplicações reais devido as incertezas e perturbações que afetam o RMRD.

3.4.1 Modelagem genérica de sistemas não-lineares

O CMD e suas propriedades são derivadas do modelo genérico para sistemas não lineares, descrito por (HUNG; GAO; HUNG, 1993; LIU; WANG, 2012):

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(\tilde{z}, k, t) + B(\tilde{z}, k, t)u(z, t) + d(t) \quad (3.14)$$

na qual:

- $\tilde{z}(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor dos estados.
- $A(\tilde{z}, k, t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de funções não lineares.
- $B(\tilde{z}, k, t) \in \mathfrak{R}^{n \times (n-k)}$ é a matriz de funções não lineares.
- $u(\tilde{z}, t) \in \mathfrak{R}^{(n-k)}$ é o vetor de das entradas de controle.
- $d(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor das perturbações externas.
- $A(\tilde{z}, k, t) = A_0(x, t) + \Delta A(\tilde{z}, k, t)$.
- $B(\tilde{z}, k, t) = B_0(x, t) + \Delta B(\tilde{z}, k, t)$.
- $\Delta A(\tilde{z}, k, t)$ e $\Delta B(\tilde{z}, k, t)$ são o vetor e a matriz que representam as incertezas paramétricas do sistema, respetivamente.
- $A_0(x, t)$ e $B_0(x, t)$ referem-se ao vetor e matriz de parâmetros nominais, respetivamente.

O objetivo deste estudo é a derivação de um CMD, que seja robusto a incertezas e perturbações. Para garantir a robustez do controlador, as incertezas e perturbações devem ser limitadas, a matriz $B(z, k, t)$ deve ser não singular e as seguintes condições devem ser atendidas:

$$\begin{aligned} \Delta A(\tilde{z}, k, t) &= B_0(\tilde{z}, t)\tilde{a}, \\ \Delta B(\tilde{z}, k, t) &= B_0(\tilde{z}, t)\tilde{b}, \\ d(t) &= B_0(\tilde{z}, t)\tilde{d}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou seja, $\Delta A(z, k, t)$, $\Delta B(z, k, t)$ e $d(t)$ devem pertencer à imagem de $B_0(z, t)$; \tilde{a} e \tilde{b} são vetor e matriz que incorporam as incertezas paramétricas, respetivamente; \tilde{d} representa o vetor das perturbações.

3.4.2 Projeto de controle por modos deslizantes

Nesta seção, um CMD é derivado para atuar na trajetória de estados nas fases de alcance e de deslizamento, mesmo diante de incertezas e/ou de perturbações. Na fase de deslizamento, a trajetória dos estados está restrita à superfície deslizante, então o comportamento do CMD depende da forma e dos parâmetros da superfície escolhida.

A superfície de deslizamento, σ , deve ter como objetivo a convergência dos erros de rastreamento de trajetória $\tilde{z} = [x_e \quad y_e \quad \theta_e]$ a zero, ou seja:

$$\sigma(\tilde{z}, t) = \Lambda \tilde{z} = 0, \quad (3.16)$$

assim, na etapa de deslizamento, os erros tenderão para zero de acordo com um padrão determinado pela matriz de constantes positivas Λ .

Para que se tenham meios de influir também no processo de alcance das superfícies deslizantes, o controle $u(\tilde{z}, t)$ será escolhido de tal modo que imponha a $\sigma(\tilde{z}, t)$ a dinâmica expressa pela seguinte equação diferencial de primeira ordem (HUNG; GAO; HUNG, 1993; UTKIN; GULDNER; SHI, 2009):

$$\dot{\sigma}(\tilde{z}, t) = -G \text{sign}(\sigma) - Kh(\sigma), \quad (3.17)$$

onde: $G = \text{diag}[g_1, g_2, \dots, g_n]$, $g_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$; $K = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n]$, $k_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$; $h(\sigma) = [h_1(\sigma_1), h_2(\sigma_2), \dots, h_n(\sigma_n)]^T$; $\text{sign}(\sigma) = [\text{sign}(\sigma_1), \text{sign}(\sigma_2), \dots, \text{sign}(\sigma_n)]^T$ com $\sigma_i^T h_i(\sigma) > 0, h_i(0) = 0$; $\text{sign}(\sigma_i) = \frac{\sigma_i}{|\sigma_i|}$.

Na Eq. 3.17 o termo $Kh(\sigma)$ contribui para acelerar o processo de convergência à superfície deslizante, enquanto que o termo descontínuo $G \text{sign}(\sigma)$ leva o vetor de erros \tilde{z} a zero de uma forma assintótica.

Diferenciando em função do tempo a Eq. 3.16, substituindo a Eq. 3.14, e levando em consideração a Eq. 3.17 obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\tilde{z}, t) &= \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial \tilde{z}} \dot{\tilde{z}} + \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A + Bu + d) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A_0 + B_0 u) + \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_0 (\tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= -G \text{sign}(\sigma) - Kh(\sigma) \end{aligned} \quad (3.18)$$

de onde se deriva a seguinte lei de controle:

$$u = -(B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G \text{sign}(\sigma) + Kh(\sigma) \right), \quad (3.19)$$

onde:

$$A_{0\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} A_0; \quad B_{0\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} = \Lambda^T.$$

Definindo

$$u^* = -G \text{sign}(\sigma) - Kh(\sigma), \quad (3.20)$$

e substituindo as Eqs. 3.19 e 3.20 na Eq. 3.18, resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= A_{0\sigma} - B_{0\sigma} B_{0\sigma}^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} - u^* \right) + \Delta A_\sigma + \Delta B_\sigma u + d_\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= -G \text{sign}(\sigma) - Kh(\sigma) + \psi \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{aligned} B_{0\sigma} B_{0\sigma}^{-1} &= I_n, & \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_{0\sigma} \tilde{a} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} \Delta A = \Delta A_\sigma, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_{0\sigma} \tilde{b} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} \Delta B = \Delta B_\sigma, & \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_{0\sigma} \tilde{d} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} d = d_\sigma, \end{aligned}$$

e $\psi = \Delta A_\sigma + \Delta B_\sigma u + d_\sigma$ representa as perturbações sofridas pelo sistema.

3.4.3 Análise de estabilidade

Escolhendo a função candidata de Lyapunov como:

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma, \quad (3.22)$$

que é definida positiva, a superfície deslizante será atrativa desde que a lei de controle, definida pela Eq. 3.19, faça com que $\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma}$ seja definida negativa. Utilizando a Eq. 3.21 \dot{V} é obtida como:

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = -\sigma^T G \text{sign}(\sigma) - \sigma^T Kh(\sigma) + \sigma^T \psi. \quad (3.23)$$

Como $\sigma^T Kh(\sigma) \geq 0$, $\dot{V} \leq 0$ é garantida por:

$$\sigma^T G \text{sign}(\sigma) \geq \sigma^T \psi, \quad (3.24)$$

que é satisfeita se os elementos de G cumprirem a seguinte condição:

$$g_i > |\bar{\psi}_i|, \quad (3.25)$$

sendo g o menor valor singular de G e $\bar{\psi}$. Se $g_i > \bar{\psi}_i$, então $\dot{V} \leq 0$ ($\dot{V} = 0$ apenas quando $V = 0$), que implica que V diminui até $V = 0$ exponencialmente. Entretanto, se $g_i < \bar{\psi}_i$, existe um valor de $V = V_{ss} > 0$ para qual $\dot{V} = 0$ pode levar a $q_e \neq 0$. Assim, uma estimativa mais precisa das perturbações leva a melhores resultados.

Para a existência e alcançabilidade de um modo deslizante, a função candidata de Lyapunov deve ser definida positiva, e que a lei de controle garanta $\dot{V} \leq 0$. Para isso é necessário que a matrix $B_{0\sigma}$ seja não singular. Como G é uma matrix diagonal definida

positiva, o modo deslizante pode ser forçado sob a condição que a matriz B_{0_σ} também seja definida positiva, e os elementos de G sejam de valores grandes o suficiente. Entretanto, na lei de controle, Eq. 3.19, a matriz B_{0_σ} é apenas não singular. Para resolver esse problema, um método de diagonalização é usado, a partir do qual são obtidas de novas superfícies deslizantes $\sigma^*(\tilde{z}, t)$:

$$\sigma^*(\tilde{z}, t) = \Gamma(\tilde{z}, t)\sigma(\tilde{z}, t) = \Gamma(\tilde{z}, t)\Lambda^T \tilde{z}, \quad (3.26)$$

onde $\Gamma(\tilde{z}, t) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ é uma transformação não singular adequada. Supondo que o sistema original seja dado pela equação 3.14, com superfícies de deslizamento $\sigma(\tilde{z}, t) = 0$, então o movimento deslizante (trajetória do sistema equivalente) é invariante à transformação das superfícies de deslizamento $\sigma^* = \Gamma(\tilde{z}, t)\sigma = 0 \in \mathfrak{R}^m$, se $\|\dot{\Gamma}\|$ e $\|\Psi^{-1}\|$ são limitadas para todo t , $\tilde{z} \in \Lambda \subseteq \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$ (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988; MARTINS *et al.*, 2010).

Aplicando o método de controle equivalente (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\tilde{z}, t) &= \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial \tilde{z}} \dot{\tilde{z}} + \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A + Bu_{eq} + d) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^*(\tilde{z}, t) &= \Gamma(\tilde{z}, t) \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial \tilde{z}} \dot{\tilde{z}} + \Gamma(\tilde{z}, t) \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial t} + \dot{\Gamma}(\tilde{z}, t)\sigma(\tilde{z}, t) \\ &= \Gamma(\tilde{z}, t) \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A + Bu_{eq}^* + d) + \Gamma(\tilde{z}, t) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \dot{\Gamma}(\tilde{z}, t)\sigma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Visto que $\Gamma(\tilde{z}, t)$ é uma matriz $m \times m$ não-singular,

$$u_{eq} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B \right)^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A + d) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right), \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} u_{eq}^* &= - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B \right)^{-1} \Gamma^{-1} \left(\Gamma \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A + d) + \Gamma \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \dot{\Gamma} \sigma \right) \\ &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B \right)^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} (A + d) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B \right)^{-1} \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \sigma, \end{aligned} \quad (3.30)$$

em que a Eq. 3.30 é diferente da Eq. 3.29 pelo termo $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B \right)^{-1} \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \sigma$, entretanto, no modo deslizante tem-se $\sigma = 0$, resultando em:

$$u_{eq}^* = - \left(\frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial \tilde{z}} B \right)^{-1} \left(\frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial \tilde{z}} (A + d) + \frac{\partial \sigma(\tilde{z}, t)}{\partial t} \right) = u_{eq}, \quad (3.31)$$

ou seja, os sistemas equivalentes são idênticos e os movimentos no modo deslizante coincidem. Para as novas superfícies deslizantes, definidas pela Eq. 3.26, a transformação não singular adequada $\Gamma(\tilde{z}, t)$ é dada como:

$$\Gamma(\tilde{z}, t) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_0 \right)^T = (B_{0\sigma})^T. \quad (3.32)$$

Diferenciando V (Eq. 3.22), substituindo a $\dot{\sigma}$ (Eq. 3.18), utilizando as novas superfícies deslizantes (Eq. 3.26 e 3.32) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma^T \dot{\sigma} \\ &= -\sigma^T A_{0\sigma} + \sigma^T B_{0\sigma} u + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T B_{0\sigma} (\tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d}) \\ &= -\sigma^T B_{0\sigma} (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \sigma^T B_{0\sigma} u + \sigma^T B_{0\sigma} (\tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d}) \\ &= \left((B_{0\sigma})^T \sigma \right)^T (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \left((B_{0\sigma})^T \sigma \right)^T (u + \tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d}) \\ &= \sigma^{*T} (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \sigma^{*T} (u + \tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Redefinindo a lei de controle u , inicialmente descrita pela Eq. 3.19, como:

$$u = -B_{0\sigma}^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) - (G \text{sign}(\sigma^*) + Kh(\sigma^*)), \quad (3.34)$$

e substituindo a nova lei de controle, (Eq. 3.34), na Eq. 3.33, obtêm-se \dot{V} como:

$$\dot{V} = -\sigma^{*T} (G \text{sign}(\sigma^*) + Kh(\sigma^*)) + \sigma^{*T} \Upsilon, \quad (3.35)$$

com $\Upsilon = \tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d}$ sendo a soma das incertezas e perturbações sofridas pelo sistema. A Eq. 3.35 é similar à Eq. 3.23, portanto as mesmas conclusões de análise de estabilidade são validas. O modo deslizante ocorre em σ^* , e como a transformação apresentada pela Eq. 3.32 é não singular, a variedade $\sigma = 0$ coincide com $\sigma^* = 0$, e o modo deslizante também ocorre em $\sigma = 0$, o qual foi selecionado para projetar o movimento deslizante desejado.

3.5 Síntese do controlador cinemático

3.5.1 Estratégia de Rastreamento de trajetórias

As sínteses dos controladores cinemáticos para o RMRD por meio das técnicas de CMD e CMD com FR são tratadas nesta seção, partindo da premissa que o controle dinâmico cumpre seus objetivos. O objetivo do controle cinemático é determinar as velocidades linear e angular necessárias para que o RMRD possa rastrear uma determinada trajetória, descrita por coordenadas de postura. Para isso, utiliza-se um RMRD de referência virtual,

que determina a trajetória, e deve ser seguido pelo RMRD tratado. O comportamento cinemático de postura do RMRD, apresentado na Eq. 3.1, é reescrito abaixo:

$$\dot{q} = S(q)\eta; \quad (3.36)$$

no qual³:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \eta_c = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

onde q representa a postura do RMRD e η_c as velocidades de controle. O RMRD de referência deve ter as mesmas características cinemáticas do RMRD real, portanto seu comportamento cinemático é dado descrito por:

$$\dot{q}_r = S_r(q_r)\eta_r; \quad (3.38)$$

no qual:

$$S_r(q_r) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix}, \quad \eta_r = \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

sendo q_r a postura de referência e η_r as velocidades de referência.

Utilizando a postura do RMRD real e a do RMRD de referência é possível calcular o erro de rastreamento de trajetória no sistema de coordenadas inercial, e rotacionar esse erro para o sistema de coordenadas local do RMRD, obtendo o erro de postura q_e :

$$q_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} = R(\theta)(q_r - q). \quad (3.40)$$

Diferenciando no tempo a Eq. 3.40 e realizando as devidas simplificações, obtém-se a dinâmica de erro de rastreamento de trajetória (KANAYAMA *et al.*, 1991):

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\dot{x}_r - \dot{x}) \cos(\theta) + (\dot{y}_r - \dot{y}) \sin(\theta) - (\dot{x}_r - \dot{x})\dot{\theta} \sin(\theta) + (\dot{y}_r - \dot{y})\dot{\theta} \cos(\theta) \\ &= y_e \omega - v + \dot{x}_r \cos(\theta) + \dot{y}_r \sin(\theta) \\ &= y_e \omega - v + \dot{x}_r \cos(\theta_r - \theta_e) + \dot{y}_r \sin(\theta_r - \theta_e) \\ &= y_e \omega - v + \dot{x}_r (\cos(\theta_r) \cos(\theta_e) + \sin(\theta_r) \sin(\theta_e)) + \dot{y}_r (\sin(\theta_r) \cos(\theta_e) - \cos(\theta_r) \sin(\theta_e)) \\ &= y_e \omega - v + (\dot{x}_r \cos(\theta_r) + \dot{y}_r \sin(\theta_r)) \cos(\theta_e) + (\dot{x}_r \sin(\theta_r) - \dot{y}_r \cos(\theta_r)) \sin(\theta_e) \\ \dot{x}_e &= y_e \omega - v + v_r \cos(\theta_e); \end{aligned}$$

³ Foi considerado que o centro de massa do RMRD coincide com a origem do referencial R, ou seja, $d = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_e &= -(\dot{x}_r - \dot{x}) \sin(\theta) + (\dot{y}_r - \dot{y}) \cos(\theta) - (\dot{x}_r - \dot{x})\dot{\theta} \cos(\theta) - (\dot{y}_r - \dot{y})\dot{\theta} \sin(\theta) \\
&= -x_e \omega + \dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) - \dot{x}_r \sin(\theta) + \dot{y}_r \cos(\theta) \\
&= -x_e \omega - \dot{x}_r \sin(\theta_r - \theta_e) + \dot{y}_r \cos(\theta_r - \theta_e) \\
&= -x_e \omega - \dot{x}_r (\sin(\theta_r) \cos(\theta_e) - \cos(\theta_r) \sin(\theta_e)) + \dot{y}_r (\cos(\theta_r) \cos(\theta_e) + \sin(\theta_r) \sin(\theta_e)) \\
&= -x_e \omega + (\dot{x}_r \cos(\theta_r) + \dot{y}_r \sin(\theta_r)) \sin(\theta_e) + (\dot{y}_r \cos(\theta_r) - \dot{x}_r \sin(\theta_r)) \cos(\theta_e) \\
\dot{y}_e &= -x_e \omega + v_r \sin(\theta_e);
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_e = \dot{\theta}_r - \dot{\theta} = \omega_r - \omega;$$

$$\dot{q}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_e \omega - v + v_r \cos(\theta_e) \\ -x_e \omega + v_r \sin(\theta_e) \\ \omega_r - \omega \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

O efeito de incertezas e perturbações que afetam o sistema pode ser considerado como o termo $\delta(q, t) = [\delta_{x_e} \quad \delta_{y_e} \quad \delta_{\theta_e}]^T$, a qual pode ser adicionado a dinâmica do erro do sistema 3.41. Considerando o princípio da invariância do CMD (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009), e que essas incertezas e perturbações podem ser atingidas pelas entradas de controle, pode-se concluir que se o sistema for forçado a um modo deslizante, ele será invariante a essas perturbações.

Para atender à teoria e ao projeto de CMD descritos no Capítulo 3, a dinâmica do erro de postura definido pela Eq. 3.41, pode ser reescrita como na Eq. 3.14:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_e &= A_0(q_e, t) + B_0(q_e, t)\eta(t) + \delta(q, t) \\
\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_r \cos(\theta_e) \\ v_r \sin(\theta_e) \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & y_e \\ 0 & -x_e \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \delta(q, t).
\end{aligned} \quad (3.42)$$

3.5.2 Síntese do controlador

O primeiro passo para o projeto do CMD (MARTINS, 2010; MARTINS *et al.*, 2010) é a seleção das superfícies deslizantes tal que se a trajetória de estados do sistema for confinada sobre tais superfícies, então o sistema exibe o comportamento desejado. Em outras palavras, essa seleção tem como objetivo a obtenção de um movimento deslizante desejado restrito às variedades $\sigma(q_e, t) = 0$, $\dot{\sigma}(q_e, t) = 0$, $\sigma^*(q_e, t) = 0$ e $\dot{\sigma}^*(q_e, t) = 0$. Porém, a escolha das superfícies deslizantes é um problema difícil devido ao erro de postura q_e , representar um sistema não-linear de múltiplas entradas (LEE *et al.*, 2009).

Para escolha de σ , é considerado que o RMRD é um sistema subatuado, no qual a dinâmica do erro consiste de um vetor de estados $q_e \in \mathfrak{R}^3$, e deve ser controlado pelas

entradas de controle $v \in \mathfrak{R}^2$. Como a síntese da superfície deslizante tem como objetivo a convergência dos erros de rastreamento de trajetória q_e a zero, a superfície deslizante σ obrigatoriamente deve ter a mesma dimensão das velocidades de controle η , assim $\sigma_v = 0$ e $\sigma_\omega = 0$ estão associados, respectivamente, a v e ω . Observando a dinâmica do erro, definida pela Eq. 3.41, fica claro que a velocidade linear v influencia apenas a dinâmica da variável de estado x_e , enquanto a velocidade angular ω atua sobre todas as variáveis de estado.

O fato de v influenciar apenas na dinâmica de x_e leva a escolha de $\sigma_v = \Lambda_1 x_e$, uma restrição simples em função de x_e , com um ganho escalar Λ_1 , que quando imposta ao sistema faz com que x_e decresça ou cresça estritamente de uma condição inicial positiva ou negativa em direção à origem do sistema.

Resta tratar as variáveis de estado y_e e θ_e , o que leva a escolha de $\sigma_\omega = \Lambda_2 y_e + \Lambda_3 \theta_e$, uma restrição dada pela soma ponderada y_e e θ_e com ganhos escalares Λ_2 e Λ_3 . Assim σ é definida como:

$$\begin{aligned} \sigma(q, t) &= \Lambda^T q_e \\ \begin{bmatrix} \sigma_v \\ \sigma_\omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 x_e \\ \Lambda_2 y_e + \Lambda_3 \theta_e \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

e, por consequência:

$$\begin{aligned} \sigma^*(q, t) &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial q_e} B_0 \right)^T \sigma(q_e, t) \\ \begin{bmatrix} \sigma_v^* \\ \sigma_\omega^* \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & y_e \\ 0 & -x_e \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Lambda_1^2 x_e \\ \Lambda_1 y_e \Lambda_1 x_e - (\Lambda_2 x_e + \Lambda_3)(\Lambda_2 y_e + \Lambda_3 \theta_e) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

A obtenção do movimento deslizante desejado é determinada pelo método do controle equivalente (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009) para o sistema dinâmico da Eq. 3.42, ao se considerar que $\sigma(q_e, t) = 0$, $\dot{\sigma}(q_e, t) = 0$, $\sigma^*(q_e, t) = 0$ e $\dot{\sigma}^*(q_e, t) = 0$. O controle

equivalente u_{eq} é calculado, similar à Eq. 3.32, como:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(q_e, t) &= \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} \dot{q}_e + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} (A_0 + B_0 \eta_{eq}) + \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} B_0 \delta(q_e, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \\ \eta_{eq} &= - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial q_e} B_0 \right)^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial q_e} A_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} \delta(q, t) \right) = \eta_{eq}^*\end{aligned}\quad (3.45)$$

onde

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} = \Lambda^T = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

onde Λ_1 , Λ_2 e Λ_3 são constantes positivas escolhidas pelo projetista para conseguir o comportamento dinâmico desejado no modo deslizante.

Após projetar as superfícies deslizantes, definidas pelas Eq. 3.43 e 3.44, para $\sigma(q_e, t) = 0$ e $\sigma^*(q_e, t) = 0$, têm-se que:

$$x_e = 0, \quad \theta_e = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} y_e, \quad (3.47)$$

e para $\dot{\sigma}_v = 0$ e $\dot{\sigma}_\omega = 0$, resulta em:

$$\dot{x}_e = 0 \quad \dot{\theta}_e = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} \dot{y}_e. \quad (3.48)$$

Substituindo a Eq. 3.45 na Eq. 3.42, e considerando as Eq. 3.47 e 3.48 obtém-se o movimento deslizante desejado (MARTINS, 2010; MARTINS *et al.*, 2010):

$$\dot{\theta}_e = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} v_r \sin(\theta_e) \quad (3.49)$$

que é idêntico à Eq. 3.48 com

$$\dot{y}_e = v_r \sin(\theta_e) \quad (3.50)$$

Contantanto que $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, $\Lambda_3 > 0$, $\theta_e \in (-\pi, \pi)$ e $v_r > 0$ as superfícies deslizantes escolhidas são assintoticamente estáveis no modo deslizante. Para realizar a análise de estabilidade do movimento deslizante desejado, a função candidata de Lyapunov é definida como:

$$V_{mdd} = \frac{1}{2} \theta_e^T \theta_e. \quad (3.51)$$

Diferenciando a Eq. 3.51, e substituindo a Eq. 3.49:

$$\dot{V}_{mdd} = \theta_e \dot{\theta}_e = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} v_r \theta_e \sin(\theta_e) \leq 0, \quad (3.52)$$

têm-se $\dot{V}_{mdd} \leq 0$ para $\theta_e \in (-\pi, \pi)$ e $v_r > 0$, e $\dot{V}_{mdd} = 0$ se $\theta_e = 0$ e $\theta_e = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}y_e$. Quando x_e converge a $-\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}y_e$, o estado y_e do sistema também convergirá a zero. Portanto, as superfícies deslizantes desenvolvidas podem ter os estados $x_e = 0$ e $\theta_e = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}y_e$ no modo deslizante, as quais são assintoticamente estáveis.

Concretizada a seleção das superfícies deslizantes, bem como comprovada a estabilidade da equação do movimento deslizante desejado, o segundo passo para o projeto do CMD (MARTINS, 2010; MARTINS *et al.*, 2010) é determinar uma lei de controle por modos deslizantes, a qual permita que $\sigma(q_e, t) \rightarrow 0$ e $\sigma^*(q_e, t) \rightarrow 0$ quando $x_e \rightarrow 0$ e $\theta_e \rightarrow -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}y_e$. Finalmente, o objetivo de postura do RMR pode ser realizado por $y_e \rightarrow 0$ e $\theta_e \rightarrow 0$. Reescrevendo a função candidata de Lyapunov dada pela Eq. 3.22:

$$V = \frac{1}{2}\sigma^T\sigma \quad (3.53)$$

e substituindo a superfície deslizante, escolhida na Eq. 3.43, tem-se:

$$V = \frac{1}{2}(\Lambda_1 x_e)^2 + \frac{1}{2}(\Lambda_2 y_e + \Lambda_3 \theta_e)^2, \quad (3.54)$$

$V = 0$ para $q_e = 0$ e $V > 0$ para $q_e \neq [0 \ 0 \ 0]^T$, ou seja, V é definida positiva. Diferenciando a Eq. 3.54, e substituindo a Eq. 3.45, \dot{V} obtém-se:

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} A_0 + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} B_0 \eta + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial q_e} \delta(q_e, t). \quad (3.55)$$

Utilizando as novas superfícies deslizantes definidas pela Eq. 3.26, e a transformação não singular adequada, definida pela Eq. 3.32, e fazendo as devidas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\dot{V} = \sigma^{*T} B_{0\sigma}^{-1} A_{0\sigma} + \sigma^{*T} (\eta + \delta). \quad (3.56)$$

A lei de controle é definida como:

$$\eta = -(B_{0\sigma}^{-1} A_{0\sigma} - (G \text{sign}(\sigma^*) + Kh(\sigma^*))) \quad (3.57)$$

na qual

$$A_{0\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} A_0 = \begin{bmatrix} \Lambda_1 v_{l_r} \cos(\theta_e) \\ \Lambda_2 v_{l_r} \sin(\theta_e) + \Lambda_3 \omega_{a_r} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$B_{0\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{z}} B_0 = \begin{bmatrix} -\Lambda_1 & \Lambda_1 y_e \\ 0 & -\Lambda_2 x_e - \Lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$B_{0\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Lambda_1} & -\frac{y_e}{\Lambda_2 x_e + \Lambda_3} \\ 0 & -\frac{1}{\Lambda_2 x_e + \Lambda_3} \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

e para que $B_{0\sigma}$ seja sempre não-singular, a seguinte condição tem que ser satisfeita:

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 \kappa, \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{1}{|x_e| + 1}. \quad (3.61)$$

Substituindo a Eq. 3.57 em \dot{V} , Eq. 3.56, resulta em:

$$\dot{V} = -\sigma^{*T} (G \text{sign}(\sigma^*) + K h(\sigma^*)) + \sigma^{*T} \delta. \quad (3.62)$$

Ao considerar que g é o menor valor singular de G e $\rho \geq |\delta|$ o escalar conhecido que é o limite superior das incertezas e perturbações, a Eq. 3.62 é reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sigma^{*T} K h(\sigma^*) - (g - \rho) |\sigma^*| \\ &\leq -K_{11} (-\Lambda_1^2 x_e)^2 - K_{22} (\Lambda_1 y_e \Lambda_1 x_e - (\Lambda_2 x_e + \Lambda_3) (\Lambda_2 y_e + \Lambda_3 \theta_3))^2 - (g - \rho) |\sigma^*|, \end{aligned} \quad (3.63)$$

para $h(\sigma^*) = \sigma^*$ e

$$\dot{V} \leq -(g - \rho) |\sigma^*| \quad (3.64)$$

para $h(\sigma) = 0$. As Eq. 3.63 e 3.64 são definidas negativas se a condição⁴:

$$g > \rho \quad (3.65)$$

for satisfeita. Assim, $\dot{V} < 0$ para $q_e \neq [0 \ 0 \ 0]^T$. Portanto $q_e = [0 \ 0 \ 0]^T$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

3.6 Variações do controle por modos deslizantes

Como dito anteriormente, apesar da simplicidade do projeto, robustez a incertezas e perturbações, o *chattering* é um obstáculo indesejável na aplicação prática do controle. O *chattering* pode causar excitações de dinâmicas não modeladas, que por sua vez podem causar oscilações de alta frequência e baixa amplitude, impondo desgastes desnecessários aos atuadores e até mesmo podendo promover instabilidade o sistema. Imperfeições de chaveamento também podem provocar oscilações de alta frequência, que devido ao chaveamento não ser instantâneo, podem causar atrasos de tempo devido à amostragem e/ou ao tempo de execução necessário para o cálculo de controle.

⁴ Similar a condição apresentada na Eq. 3.25.

3.6.1 Variantes do CMD utilizando diferentes leis de alcance

Como a parte descontínua do sistema é responsável pela atenuação das perturbações, o CMD também exige conhecimento prévio dos limites dessas perturbações, ou altos valores de ganhos ligados a parte descontínua do sistema, aumentando o *chattering*.

Uma solução para atenuação do *chattering* é lidar com a fase de alcance da superfície deslizante, visto que o *chattering* é causado por um alcance não ideal. Essa abordagem estabelece as características dessa fase por método da utilização de um modelo de alcance. O resultado é chamado método da lei de alcance (HUNG; GAO; HUNG, 1993; SOLEA; CERNEGA, 2009b).

Dada a lei de alcance apresentada pela Eq. 3.17, quatro variantes de são apresentadas:

A. Taxa constante de alcance

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_A(z, t) &= -P \text{sign}(\sigma), \\ G &= P, \quad h(\sigma) = 0.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Essa variante força o chaveamento para a superfície deslizante na taxa constante $|\dot{\sigma}_i| = -G_i$. É uma lei de alcance simples, mas, se o ganho G_i for muito pequeno, o tempo de alcance vai ser muito alto. Em contrapartida, se o ganho G_i for muito alto, ele causara muito *chattering*.

B. Taxa constante mais proporcional de alcance

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_B(z, t) &= -G \text{sign}(\sigma) - K\sigma, \\ G &= P, \quad h(\sigma) = \sigma.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Com a adição do termo proporcional $-K\sigma$, as variáveis de estado se aproximam da superfície deslizante mais rápida quando σ está longe de zero (quanto maior σ maior será a taxa proporcional $-K\sigma$).

C. Taxa de potência de alcance

Essa variante aumenta a velocidade de alcance enquanto o RMR está longe da superfície deslizante, e reduz a velocidade quando se aproxima da superfície deslizante. Isso faz com que o alcance ocorra rápido, sem causar fenômeno de *chattering* significativo.

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_C(z, t) &= -P|\sigma|^\alpha \text{sign}(\sigma), \\ G &= P|\sigma|^\alpha, \quad h(\sigma) = 0.\end{aligned}\tag{3.68}$$

D. Taxa de controle de velocidade de alcance

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_D(z, t) &= -Pe^{\alpha|\sigma|} \text{sign}(\sigma), \\ G &= Pe^{\alpha|\sigma|}, \quad h(\sigma) = 0.\end{aligned}\tag{3.69}$$

Substituindo os valores de G e $h(\sigma)$ apresentados nas quatro leis de alcance (Eqs. 3.66 a 3.69) na lei de controle, descrita pela Eq. 3.57, resulta em:

$$\eta_A = -B_{0_\sigma}^{-1}A_{0_\sigma} - P \text{sign}(\sigma), \quad G = P, \quad h(\sigma^*) = 0,\tag{3.70}$$

$$\eta_B = -B_{0_\sigma}^{-1}A_{0_\sigma} - P \text{sign}(\sigma^*) - K_p h(\sigma^*), \quad G = P, \quad h(\sigma^*) = \sigma^*,\tag{3.71}$$

$$\eta_C = -B_{0_\sigma}^{-1}A_{0_\sigma} - P|\sigma^*|^\alpha \text{sign}(\sigma^*), \quad G = P|\sigma^*|^\alpha, \quad h(\sigma^*) = 0,\tag{3.72}$$

$$\eta_D = -B_{0_\sigma}^{-1}A_{0_\sigma} - Pe^{\alpha|\sigma^*|} \text{sign}(\sigma^*) \quad G = Pe^{\alpha|\sigma^*|}, \quad h(\sigma^*) = 0.\tag{3.73}$$

Essas variantes podem atenuar o *chattering*, já que alterando a estrutura do controle, o esforço de controle pode ser diminuído, gerando sinais mais suaves (SOLEA; CERNEGA, 2009b). Embora a técnica possa atenuar o *chattering*, não é capaz de eliminá-lo, e também pode ter efeito na robsutez do controle.

Além da estratégia adotada neste trabalho, deve ser ressaltado que existem duas abordagens para eliminação da fase de alcance do CMD. A primeira consiste em modificar a superfície deslizante com uma função não linear (CHANG; HURMUZLU, 1993). A segunda abordagem consiste em aumentar a ordem da função de deslizamento por uma ação integral (SLOTINE; LI *et al.*, 1991).

3.6.2 Controle por modos deslizantes com função relé

Outra alternativa para atenuação do *chattering* é o método de continuação, onde a parcela descontínua da lei de controle ($G \text{sign}(\sigma)$), responsável pelo chaveamento, é substituída por uma aproximação contínua (DECARLO; ZAK; DRAKUNOV, 1996; MARTINS *et al.*, 2011; EL'YOUSSED *et al.*, 2012). Alguns exemplos de aproximações contínuas para a função sinal são:

$$\frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon}, \quad \frac{1 - e^{-\epsilon\sigma}}{1 + e^{-\epsilon\sigma}}, \quad \tanh(\epsilon\sigma),\tag{3.74}$$

Substituindo a função descontínua $sign(\sigma^*)$, quatro variantes de controles apresentadas pelas Eqs. 3.62 a 3.65 pela aproximação por FR, resulta nos seguintes controles:

$$\eta_{A_{FR}} = -B_{0\sigma}^{-1}A_{0\sigma} - P \frac{\sigma^*}{|\sigma^*| + \epsilon} \quad (3.75)$$

$$\eta_{B_{FR}} = -B_{0\sigma}^{-1}A_{0\sigma} - P \frac{\sigma^*}{|\sigma^*| + \epsilon} - K_p h(\sigma^*), \quad (3.76)$$

$$\eta_{C_{FR}} = -B_{0\sigma}^{-1}A_{0\sigma} - P |\sigma^*|^\alpha \frac{\sigma^*}{|\sigma^*| + \epsilon}, \quad (3.77)$$

$$\eta_{D_{FR}} = -B_{0\sigma}^{-1}A_{0\sigma} - P e^{\alpha|\sigma^*|} \frac{\sigma^*}{|\sigma^*| + \epsilon}. \quad (3.78)$$

Essa técnica é bastante efetiva na atenuação do *chattering*, já que a descontinuidade deixa de existir no controle. Em contrapartida, a substituição da parcela descontínua por uma aproximação faz com que o controle perda a invariância a incertezas e perturbações.

Outra alternativa para atenuação do *chattering* que poderia ter sido explorada é a utilização de um CMD adaptativo (UTKIN; POZNYAK, 2013).

3.7 Controle por modos deslizantes com fuzzy adaptativo

Os controles apresentados anteriormente (Eqs. 3.70 a 3.73 e Eqs. 3.75 a 3.78) são alternativas para atenuar o *chattering*, mas não são ideais, já que podem causar redução de robustez, e exigem o conhecimento previo dos limites das perturbações, ou altos valores de ganhos, o que diminui a efetividade na atenuação do *chattering* e, por consequência, redução de robustez.

Nesta seção é proposta a utilização de uma aproximação para a função sinal baseada em lógica fuzzy para atenuar o *chattering*, sem perder robustez no controle, e sem a necessidade de conhecimento prévio dos limites das perturbações.

3.7.1 Introdução a sistemas fuzzy

Diferente da teoria clássica dos conjuntos, a pertinência de um elemento a um conjunto não é absoluta. Na teoria clássica dos conjuntos, a pertinência de um elemento a um conjunto é $u_A(x) = 1$ se $x \in A$ ou $u_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Em um controle fuzzy, um elemento tem grau de pertinência a um conjunto, que podem variar no intervalo de $[0, 1]$, ou seja, $u_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$, em que $u_A(x)$ indica o quanto x é compatível com o conjunto A . Um determinado elemento ainda pode ter diferentes graus de pertinência em diferentes conjuntos fuzzy. A Figura 12 apresenta as funções de pertinência de um controle fuzzy.

Exemplificando a Figura 12: Se $x = 5$ seu grau de pertinência para o conjunto "baixo" é 1, e seu grau de pertinência para os conjuntos "médio" e "alto" é 0; se $x = 15$ seu

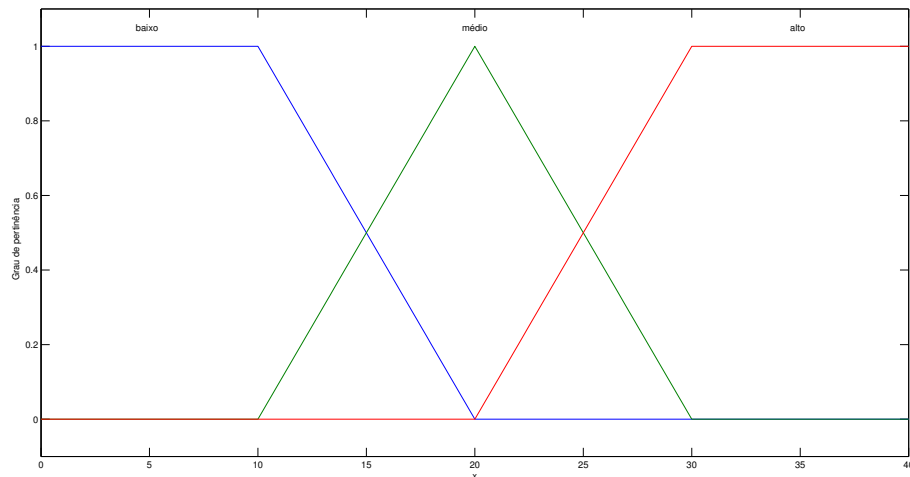


Figura 12 – Funções de pertinência fuzzy

grau de pertinência para os conjuntos "baixo" e "médio" é 0.5 e seu grau de pertinência para o conjunto "alto" é 0; e se $x = 22.5$ seu grau de pertinência para o conjunto "baixo" é 0, para o conjunto "médio" é 0.25 e para o conjunto "alto" é 0.75.

Basicamente, a partir de um conjunto de entradas, com auxílio do conhecimento especialista, gera uma saída adequada. Em um controle fuzzy do tipo Mamdani isso acontece em quatro etapas, como mostrado no diagrama de blocos da Figura 13.

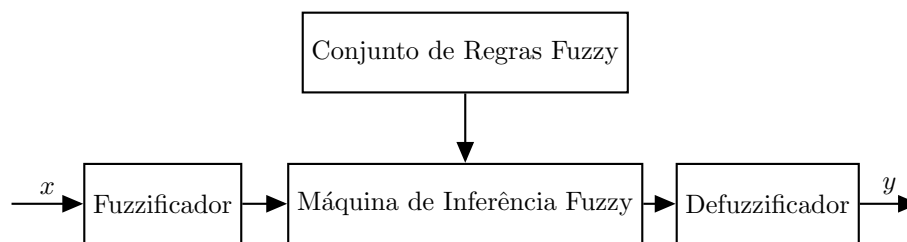


Figura 13 – Diagrama de um controle fuzzy.

Dado um conjunto de entradas não fuzzy, referente ao problema, ou de um sistema externo, o fuzzificador é responsável por mapear essas entradas aos conjuntos fuzzy, ou seja, avaliar o grau de pertinência de cada entrada para cada conjunto fuzzy. O conjunto de regras fuzzy representam o conhecimento humano especialista, em forma de sentenças linguísticas. As regras são escritas na forma "se... então...", referindo-se aos conjuntos fuzzy de entrada e saída. Por exemplo:

- Se $x \in A_1$ e $y \in B_1$ então $z \in C_1$;
- Se $x \in A_1$ e $y \in B_2$ então $z \in C_2$;

- Se $x \in A_2$ e $y \in B_1$ então $z \in C_2$;
- Se $x \in A_2$ e $y \in B_2$ então $z \in C_3$;

Como os valores de x e de y pode ter diferentes graus de pertinência em relação aos conjuntos fuzzy de entrada A_1 , A_2 , B_1 e B_2 , todas as regras são ativadas. Cabe a máquina de inferência combinar os resultados, utilizando operadores lógicos fuzzy, para produzir o resultado desejado. Por fim, o defuzzificador traduz o resultado fuzzy em um resultado que será utilizado no sistema externo.

As quatro partes do controle fuzzy podem ser formuladas matematicamente. Neste trabalho, escolhendo o método de fuzzificação singleton, defuzzificação por centro de massa, maquina de inferência Mamdani, a saída do controle fuzzy pode ser escrita como (WANG; RAD; CHAN, 2001):

$$y = \frac{\sum_{m=1}^M \theta^m \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)}{\sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)} = \theta^T \Psi(x), \quad (3.79)$$

onde x é a entrada, $\theta = [\theta^1 \dots \theta^m \dots \theta^M]^T$ é o vetor dos centros das funções de pertinência de y , $\Psi(x) = [\Psi^1(x) \dots \Psi^m(x) \dots \Psi^M(x)]^T$ é o vetor dos pesos das funções de pertinência de y no qual

$$\Psi^m(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)}{\sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)},$$

com μ_{A_i} sendo a função de pertinência da regra A_i , e M o número de regras.

Neste trabalho optou-se por utilizar um controle fuzzy do tipo Mamdani por seu conjunto de regras ser mais intuitivo, mas poderia ter sido aplicado um controle fuzzy do tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK). É proposto, como trabalho futuro, a implementação do controle fuzzy do tipo TSK equivalente, e a comparação com o controle fuzzy do tipo Mamdani proposto neste trabalho. O controle fuzzy do tipo Tsukamoto não é muito utilizado porque o sistema não é muito transparente em relação aos modelos Mamdani e TSK (CHAUDHARI; PATIL, 2014), e por isso não foi abordado neste trabalho.

Existe uma similaridade entre um controlador lógica fuzzy e um controlador por modos deslizantes. Considere um sistema não autônomo de segunda ordem SISO não linear. No caso de um controlador lógica fuzzy do tipo diagonal, regiões onde a saída do controlador torna-se zero pertence a uma diagonal que separa o plano fuzzy em dois semi-planos. Para todas as regiões fuzzy acima ou abaixo da diagonal fuzzy a saída do controlador assume um valor fuzzy positivo ou negativo com uma magnitude que depende da distância entre está região fuzzy e a região zero particular na diagonal, acima ou abaixo a qual a dada região fuzzy está localizada. A distância entre uma "região fuzzy acima ou

abaixo da diagonal e a diagonal"é definida como a distância entre "o centro desta região e o centro da região zero a qual a região fuzzy está localizada"(RIGATOS; TZAFESTAS; TZAFESTAS, 2000).

3.7.2 Projeto de CMD com fuzzy adaptativo

Liu e Wang (2012) descreve quatro técnicas existentes para controle por modos deslizantes fuzzy:

- **Controle por modos deslizantes fuzzy baseado em controle equivalente:** É estabelecido um controle fuzzy baseado em um controle equivalente e um controle chaveado;
- **Controle por modos deslizantes baseado na regulação do ganho de chaveamento:** A constante de chaveamento do CMD é estimada por um controle fuzzy de acordo com a condição do modo deslizante;
- **Controle por modos deslizantes baseado na aproximação do controle fuzzy:** Proposto para uma classe de sistemas não lineares contínuos;
- **Controle por modos deslizantes adaptativo baseado no chaveamento fuzzy:** Usando o método de controle fuzzy adaptativo, o chaveamento no controlador por modos deslizantes é aproximado para uma saída contínua. Portanto, o fenômeno de *chattering* é atenuado.

Neste trabalho optou-se pela quarta alternativa, que permite a utilização do CMD em conjunto com um Controle Fuzzy Adaptativo, que além de atenuar o *chattering* não precisa de conhecimento dos limites das perturbações. Cita-se como outros trabalhos que adotam essa técnica (GUO; WOO, 2003; BOHLOULI *et al.*, 2011; CHOU; YAO, 2012).

Para o propósito de atualizar os parâmetros das funções de pertinência de $f_i(\sigma_i^*)$, θ_{f_i} é escolhido como o parâmetro a ser atualizado (GUO; WOO, 2003). Definindo $\hat{\theta}_{f_i}$ para que $f_i = \hat{\theta}_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i)$ seja a compensação ideal para Υ_i . De acordo com o teorema de Wang (WANG, 1999), existe um $\omega_i > 0$ que satisfaz:

$$|\tilde{d}_{0_i} - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i)| \leq \omega_i, \quad \Upsilon = \Delta f, \quad (3.80)$$

onde ω_i pode ser o menor valor possível. Definindo a estimativa dos erros como:

$$\tilde{\theta}_{f_i} = \hat{\theta}_{f_i} - \theta_{f_i}. \quad (3.81)$$

Assim, A Eq. 3.97 pode ser reescrita como:

$$\hat{f}_i(\sigma_i^*) = \tilde{\theta}_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) + \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*). \quad (3.82)$$

Definindo a lei adaptativa:

$$\dot{\hat{\theta}}_{f_i} = \dot{\theta}_{f_i} = \sigma_i^* \Psi_{f_i}(\sigma_i^*). \quad (3.83)$$

Adicionando o controle fuzzy adaptativo a lei de controle u , descrita no projeto de CMD pela Eq. 3.34, resulta no controle fuzzy:

$$u_{fuzzy} = -B_{0\sigma}^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) - \left(\hat{F}(\sigma^*) + Kh(\sigma^*) \right) \quad (3.84)$$

Em seguida, verifica-se a estabilidade do sistema de controle. Escolhendo a função candidata de Lyapunov como:

$$V = \frac{1}{2} \left(\sigma^T \sigma + \sum_{i=1}^n \left(\tilde{\theta}_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} \right) \right) \quad (3.85)$$

onde $\tilde{\theta}_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} > 0$ então V é definida positiva. Diferenciando a Eq. 3.85 obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T \dot{\sigma} + \sum_{i=1}^n \left(\tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \right) \\ &= -\sigma^T A_{0\sigma} + \sigma^T B_{0\sigma} u + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T B_{0\sigma} \left(\tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d} \right) + \sum_{i=0}^N \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ &= -\sigma^T B_{0\sigma} (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \sigma^T B_{0\sigma} u + \sigma^T B_{0\sigma} \left(\tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d} \right) + \sum_{i=0}^N \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ &= \left((B_{0\sigma})^T \sigma \right)^T (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \left((B_{0\sigma})^T \sigma \right)^T \left(u + \tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d} \right) + \sum_{i=0}^N \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ &= \sigma^{*T} (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \sigma^{*T} \left(u + \tilde{a} + \tilde{b}u + \tilde{d} \right) + \sum_{i=0}^N \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Usando a lei de controle, Eq. 3.93 e substituindo Eq. 3.86:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^{*T} (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) - \sigma^{*T} (B_{0\sigma})^{-1} \left(A_{0\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \\ &\quad - \sigma^{*T} \hat{F}(\sigma^*) - \sigma^{*T} K \sigma^* + \sigma^{*T} \Upsilon + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ \dot{V} &= -\sigma^{*T} \tilde{\theta}_f^T \Psi_f(\sigma^*) - \sigma^{*T} \theta_f^T \Psi_f(\sigma^*) - \sigma^{*T} K \sigma^* + \sigma^{*T} \Delta f + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ \dot{V} &= \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \left[\Delta f_i - \left(\tilde{\theta}_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) + \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right) \right] - \sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ \dot{V} &= -\sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \left[\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right] + \sum_{i=0}^n \left(-\sigma_i^* \tilde{\theta}_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right) + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i} \\ \dot{V} &= -\sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \left[\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right] - \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \tilde{\theta}_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\tilde{\theta}}_{f_i}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Substituindo a lei de adaptativa, Eq. 3.83, \dot{V} resulta:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \left[\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right] + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \left(-\sigma_i^* \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) + \dot{\hat{\theta}}_{f_i} \right) \\ \dot{V} &= -\sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \left[\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right] + \sum_{i=0}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \left(-\sigma_i^* \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) + \sigma_i^* \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right) \quad (3.88) \\ \dot{V} &= -\sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \sigma_i^* \left[\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \right]\end{aligned}$$

a partir da Eq. 3.80:

$$|\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*)| \leq \omega_i \leq \gamma_i |\sigma_i^*| \quad (3.89)$$

onde $0 < \gamma_i < 1$. Então o segundo termo a direita da Eq. 3.89 satisfaz

$$\sigma_i^* |\Delta f_i - \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*)| \leq \gamma_i |\sigma_i^*|^2 = \gamma_i \sigma_i^{*2} \quad (3.90)$$

portanto,

$$\dot{V} \leq -\sigma^{*T} K \sigma^* + \sum_{i=0}^n \gamma_i \sigma_i^{*2} \quad (3.91)$$

O termo a direita da Eq. 3.91 pode ser escrito como:

$$\sum_{i=0}^N (-k_i \sigma_i^{*2} + \gamma_i \sigma_i^{*2}) = -\sigma^T (A - \gamma) \sigma^* \leq 0. \quad (3.92)$$

onde $\gamma = \text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n]$. Escolhendo $k_i > \gamma_i$ de modo que $(K - \gamma)$ é uma matriz definida positiva, portanto $\dot{V} \leq -\sigma^T (K - \gamma) \sigma^* \leq 0$, $\dot{V} = 0$ somente quando $\sigma^* = 0$, e assim, o CMDFA é assintoticamente estável.

3.8 Síntese do controle por modos deslizantes fuzzy adaptativo

O *chattering* no CMD é causado pela parcela descontínua $G \text{sign}(\sigma^*)$, onde $\text{sign}(\sigma^*)$ causa o chaveamento, e G define a magnitude. É proposto um controle fuzzy adaptativo $F(\sigma^*)$, que não apresente *chattering* e tenha sua magnitude calculada em tempo de execução. Substituindo o termo $G \text{sign}(\sigma^*)$ pelo controle fuzzy adaptativo obtém-se o Controle por Modos Deslizantes Fuzzy Adaptativo (CMDFA), apresentado pela Eq. 3.93

$$\eta_{fuzzy} = -B_{0\sigma}^{-1} A_{0\sigma} - \left(\hat{F}(\sigma^*) + K \sigma^* \right) \quad (3.93)$$

onde $\hat{F}(\sigma^*) = \left[\hat{f}_1(\sigma_1^*) \quad \dots \quad \hat{f}_i(\sigma_i^*) \quad \dots \quad \hat{f}_n(\sigma_n^*) \right]^T$ e cada $\hat{f}_i(\sigma_i^*)$ é estimado por um controle fuzzy individual e $h(\sigma^*) = \sigma^*$.

3.8.1 Extração da base de regras para o CMDFA

Para decidir a base de regras para o controlador proposto é considerada a função candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma, \quad (3.94)$$

onde V é um indicador da energia de σ . A estabilidade do sistema é garantida pela escolha de uma lei de controle que garanta $\dot{V} \leq 0$, e $\dot{V} = 0$ somente quando $\sigma = 0$. Para o controle fuzzy adaptativo, um controle fuzzy $\hat{F}(\sigma^*)$ é aplicado para compensar as incertezas e perturbações do sistema, e reduzir a energia de σ^* . Assim, \dot{V} é escrito como:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n [\sigma_i^* (\Upsilon_i - f_i(\sigma_i^*))] - \sigma^{*T} K \sigma^* \quad (3.95)$$

Como a função $sign(\sigma_i^*)$ tem o mesmo sinal de σ_i^* , $f_i(\sigma_i^*)$ deve ter o mesmo sinal de σ_i^* . Quando σ_i^* tem um valor alto, é esperado que $f_i(\sigma_i^*)$ também tenha um valor alto, fazendo com que \dot{V} tenha um alto valor negativo, e σ_i^* diminua seu valor rápido. Quando σ_i^* tem um valor pequeno, $\sigma_i^* [\Upsilon_i - f_i(\sigma_i^*)]$ também tem um valor pequeno, tendo pouco efeito em \dot{V} , permitindo assim que $f_i(\sigma_i^*)$ tenha um valor pequeno para evitar o *chattering*. Quando σ_i^* é zero, $\sigma_i^* [\Upsilon_i - f_i(\sigma_i^*)]$ também é zero, portanto $f_i(\sigma_i^*)$ pode ser zero. A base de regras é definida como (GUO; WOO, 2003):

- Se $\sigma_i^* \in \text{NB}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{NB}$
- Se $\sigma_i^* \in \text{NM}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{NM}$
- Se $\sigma_i^* \in \text{NS}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{NS}$
- Se $\sigma_i^* \in \text{ZE}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{ZE}$
- Se $\sigma_i^* \in \text{PS}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{PS}$
- Se $\sigma_i^* \in \text{PM}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{PM}$
- Se $\sigma_i^* \in \text{PB}$, então $f_i(\sigma_i^*) \in \text{PB}$

onde N representa negativo, P positivo, ZE zero, S pequeno, M médio e B grande. Neste trabalho as funções de pertinência são as mesmas para as entradas σ_v^* e σ_ω^* assim como para as saídas $f_v(\sigma_v^*)$ e $f_\omega(\sigma_\omega^*)$. As funções de pertinência são escolhidas como funções triangulares, representadas por:

$$\mu_A(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq i \\ \frac{x_i - i}{j - i}, & i \leq x_i \leq j \\ \frac{k - x_i}{k - j}, & j \leq x_i \leq k \\ 0, & k \leq x_i \end{cases} \quad (3.96)$$

onde A representa um dos conjuntos fuzzy NB, ..., PB; x_i representa σ_i^* ou $f_i(\sigma_i^*)$; i e k são as bases da função triangular, e j o ponto máximo da função triangular. Embora as funções de pertinência σ_v^* , σ_ω^* , $f_v(\sigma_v^*)$ e $f_\omega(\sigma_\omega^*)$ tenham os mesmos rotulos, seus parâmetros de comprimento e ponto de máximo são diferentes. Os parâmetros de σ_v^* e σ_ω^* são apresentados pela Tabela 2, enquanto $f_v(\sigma_v^*)$ e $f_\omega(\sigma_\omega^*)$ são atualizados em tempo de execução, tornando o controle adaptativo.

Tabela 2 – Parametros das funções de pertinência de σ_v^* e σ_ω^*

	σ_v^*			σ_ω^*		
	i	j	k	i	j	k
NB	$-\infty$	-0.3	-0.2	$-\infty$	-0.5	-0.33
NM	-0.3	-0.2	-0.1	-0.5	-0.33	-0.16
NS	-0.2	-0.1	0	-0.33	-0.16	0
ZE	-0.1	0	0.1	-0.16	0	0.16
PS	0	0.1	0.2	0	0.16	0.33
PM	0.1	0.2	0.3	0.16	0.33	0.5
PB	0.2	0.3	∞	0.33	0.5	∞

A Figura 14 apresenta as funções de pertinência.

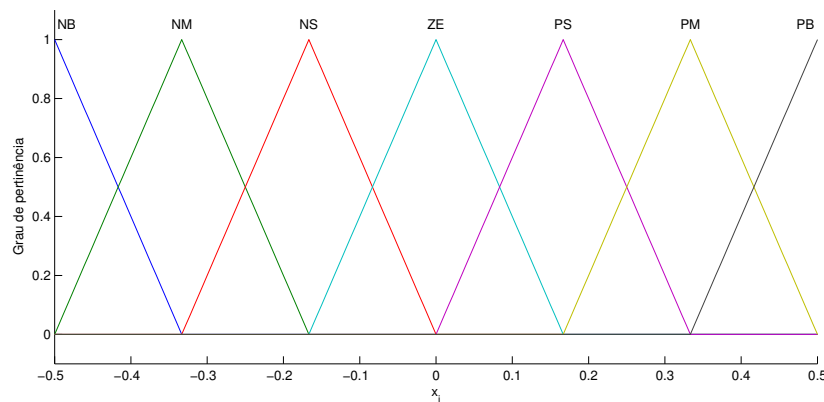


Figura 14 – Funções de pertinência triangulares.

O controle fuzzy $f_i(\sigma_i^*)$ pode ser escrito como:

$$f_i(\sigma_i^*) = \frac{\sum_{m=1}^M \theta_{f_i}^m \mu_{A^m}(\sigma_i^*)}{\sum_{m=1}^M \mu_{A^m}(\sigma_i^*)} = \theta_{f_i}^T \Psi_{f_i}(\sigma_i^*) \quad (3.97)$$

onde $\theta_{f_i} = [\theta_{f_i}^1 \dots \theta_{f_i}^m \dots \theta_{f_i}^M]^T$ é o vetor dos centros das funções de pertinência de $f_i(\sigma_i^*)$, $\Psi_{f_i}(\sigma_i^*) = [\Psi_{f_i}^1(\sigma_i^*) \dots \Psi_{f_i}^m(\sigma_i^*) \dots \Psi_{f_i}^M(\sigma_i^*)]^T$ é o vetor dos pesos das funções de pertinência de $f_i(\sigma_i^*)$, e M é o numero de regras.

3.9 Considerações finais

Neste capítulo foi apresentada a fundamentação teórica e a síntese dos controladores. Inicialmente é estudado o controle dinâmico, cujo o controle é baseado na dinâmica inversa. O objetivo desse controle é compensar forças e torques conhecidos que atuam sobre o sistema e rastreamento de trajetórias de referência para sistemas mecânicos.

Em seguida, a técnica de CMD é apresentada como solução para o controle cinemático. As vantagens desse método de controle são a invariância a incertezas e perturbações que afetam o sistema, mas em contrapartida, apresenta *chattering* e exige o conhecimento prévio dos limites das incertezas e perturbações.

Duas vertentes são citadas na literatura como solução para o problema do *chattering*, as quais foram estudadas neste trabalho. A primeira foi o estudo das características da lei de alcance do CMD, onde se encontra a parcela descontínua do sistema responsável pelo *chattering*. A segunda é a substituição da parcela descontínua do sistema por uma aproximação contínua. Nessa vertente duas opções foram apresentadas: a utilização da FR, uma aproximação popular e com bons resultados na literatura; e um controle fuzzy adaptativo, uma ferramenta poderosa na aproximação de sistemas não lineares, mais complexa que a FR, visto que têm seus parâmetros de saída atualizados em tempo de execução, removendo a necessidade de conhecimento prévio dos limites das perturbações.

4 Análise dos resultados alcançados

Para avaliar o desempenho dos controladores propostos no Capítulo 3, os controladores por modos deslizantes apresentados foram implementados no software MATLAB/Simulink, versão R2014a, e são utilizados na resolução do problema de rastreamento de trajetória para os seguintes casos: (i) simulação usando o modelo de configuração em espaço de estados apresentado no Capítulo 2; (ii) simulador MobileSim; e (iii) experimentação em tempo real no robô Powerbot. Em qualquer desses casos, o tempo de amostragem usado foi 5 ms com utilização do método de integração de Euler. Outros métodos de integração foram experimentados, mas não apresentaram diferença significativa nos resultados.

Três trajetórias foram utilizadas como trajetórias de referência: trajetória em formato de círculo (MARTINS *et al.*, 2011); trajetória em formato de sala (retangular com as bordas arredondadas) (MARTINS *et al.*, 2010); e trajetória em formato de oito (ORIOLO; LUCA; VENDITTELLI, 2002). O equacionamento das trajetórias em círculo, sala e oito são apresentadas pelas Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3 enquanto as trajetórias e as velocidades de referência são apresentadas pelas Figuras 15, 16 e 17.

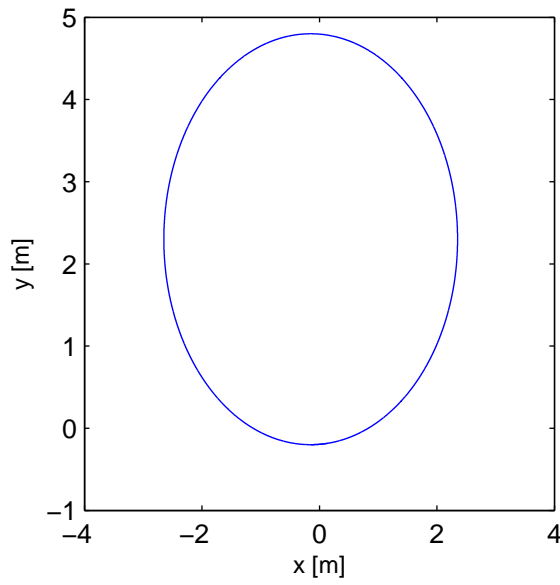
$$\begin{aligned} \eta_r &= \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} \\ \dot{q}_r &= \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r * \cos(\theta_r) \\ v_r * \sin(\theta_r) \\ \omega_r \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

se $(t \geq 0 + 12 * \text{floor}(t/12) \text{ and } t \leq \pi + 12 * \text{floor}(t/12))$

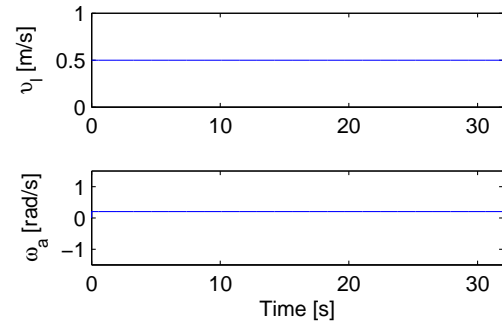
$$\eta_r = \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix};$$

senão se $(t > \pi + 12 * \text{floor}(t/12))$

$$\begin{aligned} \eta_r &= \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \dot{q}_r &= \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos(\theta_r) \\ v_r \sin(\theta_r) \\ \omega_r \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

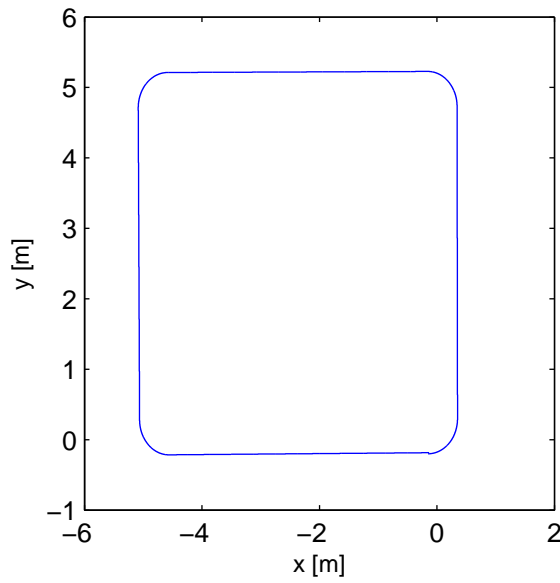


(a) Trajetória de referência.

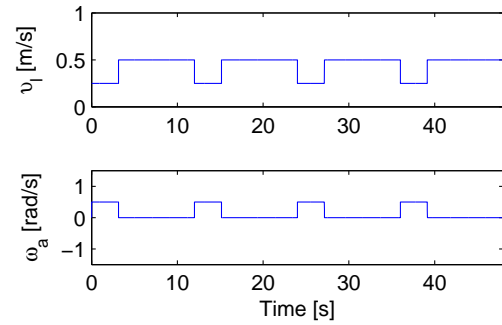


(b) Velocidades linear e angular de referência.

Figura 15 – Referências para a trajetória em formato de círculo



(a) Trajetória de referência.



(b) Velocidades linear e angular de referência.

Figura 16 – Referências para a trajetória em formato de sala

$$\dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * \sin \left(\left(t + \frac{50}{4} \right) \frac{2\pi}{50} \right) \frac{2\pi}{50} / 2 \\ -3 * \cos \left(2 \left(t + \frac{50}{4} \right) \frac{2\pi}{50} \right) \frac{2\pi}{50} \\ \frac{\dot{y}_r \dot{x}_r - \dot{x}_r \dot{y}_r}{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} \end{bmatrix}; \quad (4.3)$$

$$\eta_r = \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix}$$

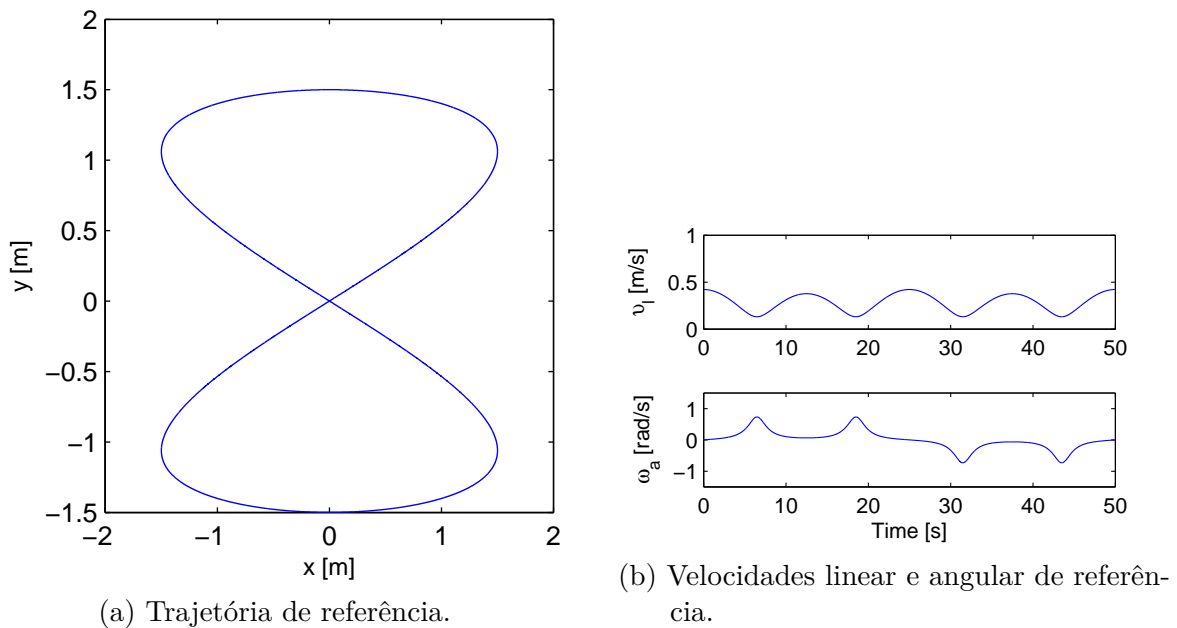


Figura 17 – Referências para a trajetória em formato de oito

Analisando as Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3, e as Figuras 15, 16 e 17, percebe-se que: a trajetória circular mantém as velocidades em valores constantes, sendo a velocidade linear $0.5m/s$ e a velocidade angular $0.2rad/s$; a trajetória em sala é composta de quatro linhas retas, com velocidade linear de $0.5m/s$ e a velocidade angular de $0rad/s$, divididas por quatro curvas à esquerda, com velocidade linear de $0.25m/s$ e a velocidade angular de $0.5rad/s$; e a trajetória em oito é mais complexa, considerando aceleração e desaceleração, com a velocidade linear variando entre $0.1312m/s$ e $0.4215m/s$ e a velocidade angular variando entre $-0.7328rad/s$ e $0.7328rad/s$ durante a trajetória.

Para as duas primeiras trajetórias o RMRD real e o RMRD de referência (virtual) foram posicionados sobre a mesma coordenada planar, sem erro de postura inicial ($q_e = 0$), enquanto para a trajetória em oito o RMRD de referência está a frente do RMRD real, criando um erro de postura inicial, definido por $q_e = [0.15 \ 0.2 \ pi/6]^T$. As constantes de ganhos das trajetórias são dadas pela Tabela 3.

Tabela 3 – Ganhos Λ das superfícies deslizantes para cada trajetória

Trajetoária / Ganho	Λ_1	Λ_2	Λ_3
Trajetoária circular	1.0	4.0	1.0
Trajetoária em sala	1.0	5.0	1.0
Trajetoária em forma de oito	1.5	6.0	1.0

Os ganhos do controle dinâmico por dinâmica inversa, desenvolvido na Seção 3.3 são dados pela Tabela 4.

Por fim, os ganhos dos controladores cinemáticos u_A (Eq. 3.70), u_B (Eq. 3.71), u_C (Eq. 3.72), u_D (Eq. 3.73), $u_{A_{FR}}$ (Eq. 3.75), $u_{B_{FR}}$ (Eq. 3.76), $u_{C_{FR}}$ (Eq. 3.77), $u_{D_{FR}}$ (Eq.

Tabela 4 – Constantes de ganhos para o controlador dinâmico

Trajectoria	Ganhos
k_{p_v}	40.0
k_{p_ω}	40.0
k_{d_v}	20.0
k_{d_ω}	20.0
N_v	1.0
N_w	1.0

3.78) e u_{fuzzy} (Eq. 3.93) desenvolvidos na Seção 3.5.2 são dados pela Tabela 5

Tabela 5 – Constantes de ganhos cinemáticos dos controladores

Controlador/Ganho	P_1	P_2	K_1	K_2	α	ϵ
u_A	0.1	0.3	-	-	-	-
u_B	0.1	0.3	0.1	0.1	-	-
u_C	0.1	0.3	-	-	0.2	-
u_D	0.1	0.3	-	-	0.2	-
u_{AFR}	0.1	0.3	-	-	-	0.1
u_{BFR}	0.1	0.3	0.1	0.1	-	0.1
u_{CFR}	0.1	0.3	-	-	0.2	0.1
u_{DFR}	0.1	0.3	-	-	0.2	0.1
u_{fuzzy}	-	-	0.1	0.1	-	-

Devido o RMRD possuir um controlador PD que rastreia as velocidades fica impossibilitada a utilização do controle por dinâmica inversa na experimentação em tempo real. Essa situação indesejada é comumente encontrada na literatura (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006; ELYOUSSEF *et al.*, 2014). Embora não seja possível implementar compensação das dinâmicas por meio do controle por dinâmica inversa, resultados de análises suficientes são obtidos estudando diferentes estruturas de controle que compõem o controlador PD integrado com os controladores cinemáticos implementados.

4.1 Simulações no cenário ideal

No primeiro cenário de simulações, chamado de cenário ideal, é considerado que o comportamento do RMRD é simulado pelo modelo de configuração em espaço de estados, Eq. 2.49, desenvolvido na Seção 2.1.4, sem influência de incertezas ou perturbações. O objetivo desse cenário de simulações é avaliar o comportamento dos diferentes controladores desenvolvidos. Essas simulações foram feitas utilizando MATLAB/Simulink, seguindo o diagrama de blocos apresentado na Figura 18.

A descrição de execução do diagrama de blocos na Figura 18 é dada como segue:

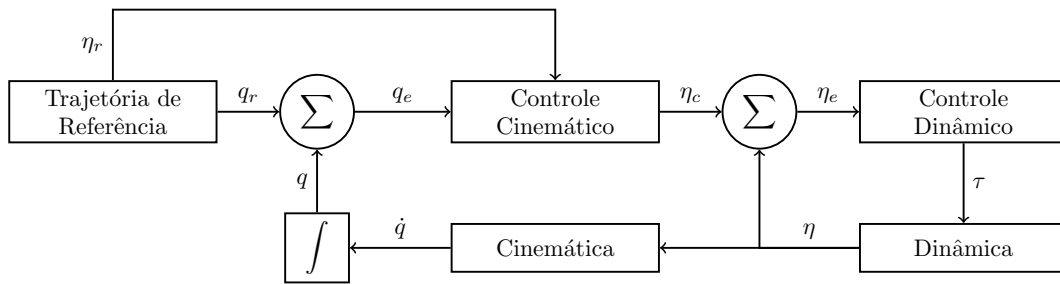


Figura 18 – Diagrama de simulação no cenário ideal.

- Bloco Trajetória de Referência: cria a postura de referência q_r e as velocidades de referência η_r ;
- Bloco Somador: Com a postura de referência e postura real q do RMRD calcula o erro de postura q_e , como em 3.40;
- Bloco Controle Cinemático: com o erro de postura e as velocidades de referência, aplica a lei de controle para calcular a velocidade de controle η_c ;
- Bloco Somador (segundo): Com as velocidades de controle η_c e a velocidade real η do RMRD calcula os erros de rastreamento de velocidades η_e ;
- Bloco Controle Dinâmico: com as velocidades η e os erros de rastreamento de velocidades η_e gera os torques de controle τ_c que serão aplicados ao RMRD;
- Blocos Dinâmica dos Atuadores, Dinâmica e Cinemática: correspondem ao modelo de configuração em espaço de estados (Eq. 2.49), e simulam o comportamento do RMRD. Isso resulta nas velocidades \dot{q} ;
- Bloco Integrador: converte as velocidades na postura do RMRD q , que é utilizada para calcular o erro de postura.

Para demonstrar as diferenças entre as variantes do controle, assim como o *chattering*, os controladores u_A , u_B , u_C , u_D , u_{AFR} , u_{BFR} , u_{CFR} , u_{DFR} e u_{fuzzy} são submetidos a simulações no cenário ideal. Para comparação dos erros de posição ($e_p = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$) e orientação, e análise de robustez, a Tabela 6 apresenta os Erros Quadráticos Médios (*Root Mean Square*) definido por $rms = \sqrt{\frac{1}{N} \sum x(i)^2}$, onde N é o número de amostras, e $x(i)$ é a i -ésima amostra.

Os resultados na Tabela 6 mostram que todos os controladores são capazes de rastrear as trajetórias com erros próximos a zero. Devido a maior complexidade da trajetória em oito, considerando aceleração e desaceleração, e tendo um erro inicial, é a trajetória escolhida para mostrar graficamente os resultados de rastreamento de trajetória; erros

Tabela 6 – Erros quadráticos médios dos controladores - Cenário Ideal

	circulo		sala		oito	
	rms xy	rms θ	rms xy	rms θ	rms xy	rms θ
u_A	0.0016	0.0027	0.0011	0.0033	0.0433	0.0748
u_B	0.0016	0.0027	0.0012	0.0032	0.0358	0.0725
u_C	0.0280	0.0041	0.0013	0.0025	0.0437	0.0767
u_D	0.0016	0.0027	0.0011	0.0033	0.0371	0.0726
$u_{A_{FR}}$	0.0420	0.0062	0.0076	0.0082	0.0489	0.0828
$u_{B_{FR}}$	0.0034	0.0045	0.0070	0.0080	0.0410	0.0797
$u_{C_{FR}}$	0.0752	0.0099	0.0161	0.0097	0.0540	0.0914
$u_{D_{FR}}$	0.0390	0.0060	0.0076	0.0082	0.0434	0.0808
u_{fuzzy}	0.0166	0.0098	0.0092	0.0106	0.0382	0.0858

de posição e orientação; velocidades linear e angular de controle e do robô; erros de rastreamento de trajetória e comensação do erro de rastreamento de trajetória; e as superfícies deslizantes e as novas superfícies deslizantes. Os resultados são apresentados primeiro para os controladores com a parcela descontínua, depois para os com a aproximação FR, e por fim para o controle proposto com a parcela fuzzy adaptativa.

As Figuras 19, 24 e 29 apresenta a trajetória de referência e a trajetória apresentada pelo RMRD. Como pode ser visto, todos os controladores permitiram o RMRD rastrear a trajetória adequadamente, sendo que os controladores u_A e $u_{A_{FR}}$ foram os que exigiram tempo para fazer o RMRD atingir a trajetória. Isso ocorre porque a lei de alcance possui uma taxa constante de alcance, enquanto as leis de alcance dos outros controladores têm maneiras de acelerar o processo de alcance. Também percebe-se que os controladores com a parcela descontínua, uma vez que atingiram a trajetória se mantém mais próximos a elas do que os controladores com a aproximação FR e com a parcela fuzzy adaptativa. Isso é confirmado pelos erros apresentados na Tabela 6 e pelas Figuras 20, 25 e 30. Isso mostra que a substituição da parcela descontínua por uma aproximação aumentou os erros de postura, mas não de forma significativa, visto que todos os controladores fizeram que o RMRD apresentasse erros de rastreamento de trajetória próximos a zero.

As Figuras 22, 26 e 31 apresentam as velocidades de controle e do RMRD. Com essas figuras percebe-se que os controladores com a parcela descontínua geram velocidades com alto *chattering*, o que é passado para as velocidades do RMRD, enquanto os controladores com a aproximação FR e o controle fuzzy adaptativo geraram sinais de controle suaves, que foram passados para o RMRD.

Sabe-se que os controladores cinemáticos baseados em CMD possuem uma função para corrigir os erros de posição e orientação, enquanto controladores dinâmicos com PD tentam corrigir erros de rastreamento de velocidades (v_e). Mesmo com a integração desses controladores, o rastreamento perfeito de velocidades não ocorre. Então, esses erros de rastreamento de velocidade são vistos como incertezas e perturbações para o modelo cinemático, e são compensados pelo controle cinemático, assegurando que erros de posição

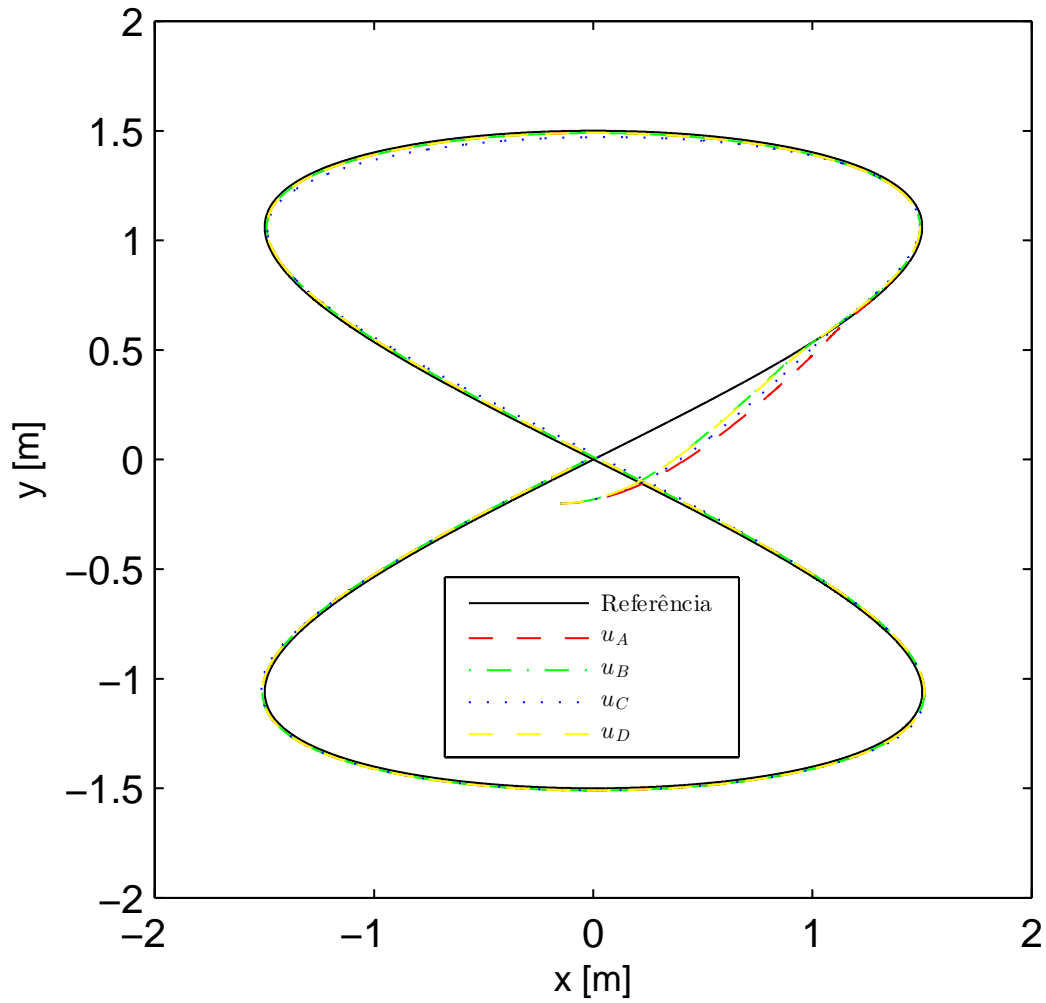


Figura 19 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).

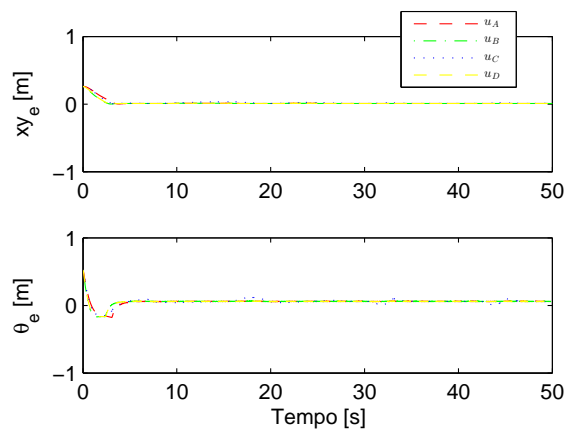


Figura 20 – Erros de posição e orientação no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).

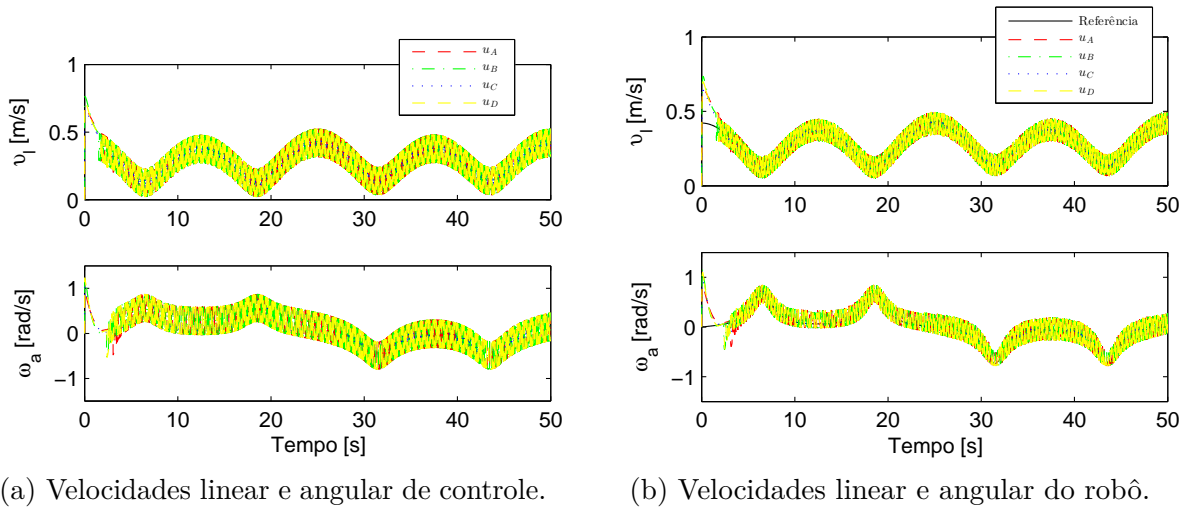


Figura 21 – Velocidades linear e angular no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).

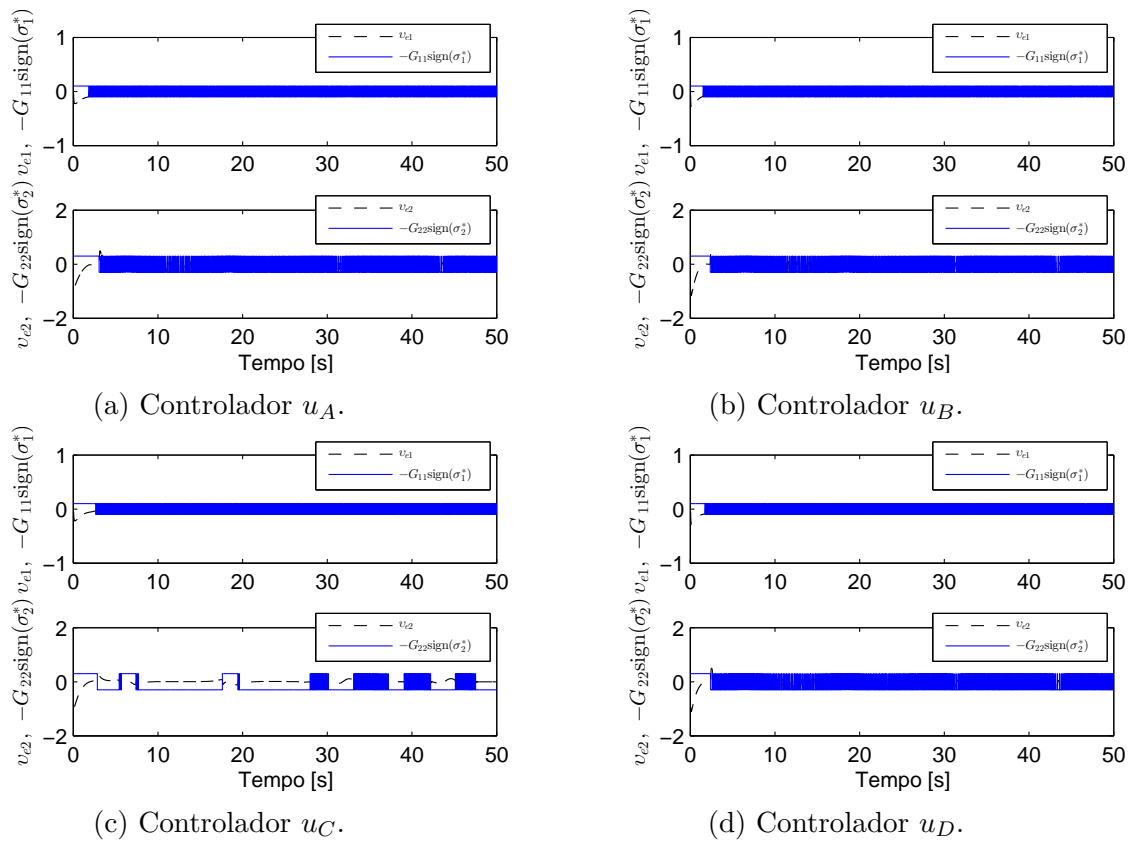


Figura 22 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).

e orientação tendam a zero. Isso pode ser observado nas Figuras 23, 27 e 32, onde se observa os erros de rastreamento de velocidade e a parcela responsável por compensar os erros de rastreamento de velocidades. A compensação de um erro de rastreamento de velocidade deve ser de sinal oposto ao erro, e magnitude igual ou superior, para que possa compensar o erro, ou seja, a diferença entre os erros de rastreamento de velocidades e a compensação

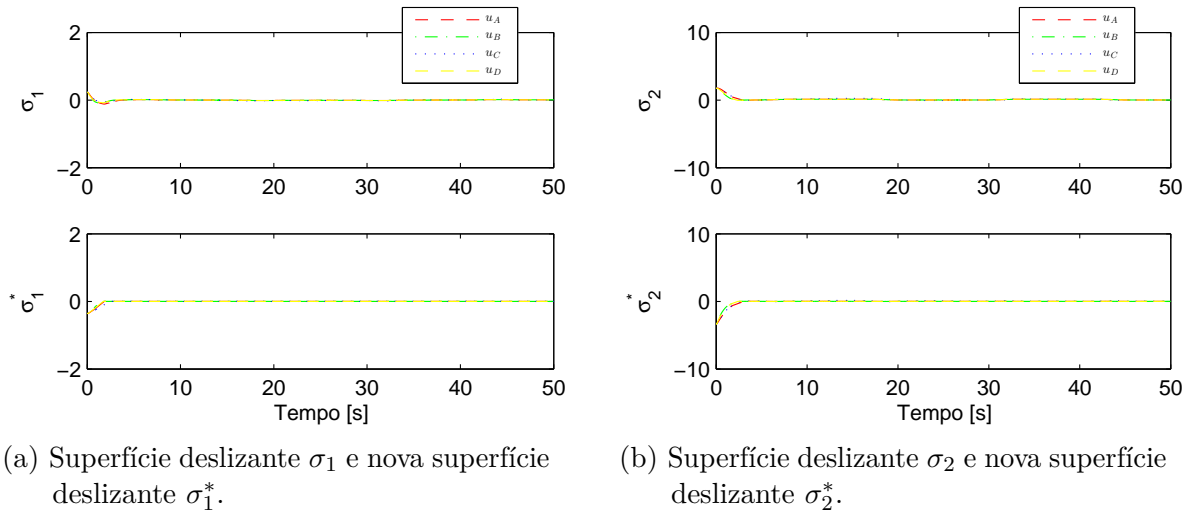


Figura 23 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário ideal (controladores com a parcela descontínua).

deve convergir para zero. Devido ao *chattering* é difícil visualizar esse efeito para os controladores com a parcela descontínua, com exceção ao controlador u_C , que apresentou uma leve atenuação de *chattering* devido a características da lei de alcance. Além disso, é importante ressaltar que, de acordo com considerações de robustez, se um controlador é capaz de compensar os erros de rastreamento de velocidades, então ele é um controlador robusto a incertezas e perturbações. Assim, os controladores com a parcela descontínua são robustos por utilizarem a função $-G\text{sign}(\sigma^*)$. Os controladores com a aproximação FR, e com a parcela fuzzy adaptativa compensam os erros de rastreamento de velocidade pelas funções $-G(\sigma^*/(|\sigma^*| + \alpha))$ e $\hat{f}(\sigma^*)$ respectivamente. Observando as funções responsáveis pela compensação percebe-se que controladores que utilizam a parcela descontínua sempre fazem a atenuação com valor $-G$ ou G , os controladores com a aproximação FR fazem atenuação com valores entre $-G$ e G , enquanto o controle com a parcela fuzzy adaptativa, por ter sua saída calculada em tempo de execução, não é limitado e faz a compensação na magnitude necessária. Isso implica que os controladores que utilizam a parcela descontínua e a aproximação FR precisam do conhecimento prévio dos limites das perturbações ou estimar um valor alto para G , o que pode causar mais *chattering*. Essa observação pode ser observada nas Figuras 23, 27 e 32.

Slotine, Li *et al.* (1991) faz a seguinte consideração a respeito dos erros de rastreamento de velocidades: quando o sinal de velocidade é persistentemente excitado, os sistemas de controle adaptativos apresentam robustez com relação a incertezas não paramétricas. No entanto, quando os sinais não são persistentemente excitados, mesmo pequenas incertezas podem levar a problemas graves em controladores adaptativos. Este problema, denominado *drift*, não ocorreu neste trabalho, mas (SCIavicco *et al.*, 2009) apresenta solução para esse problema na forma de controle *driftless*.

Por fim, as Figuras 24, 28 e 33 mostram que as superfícies deslizantes σ e as

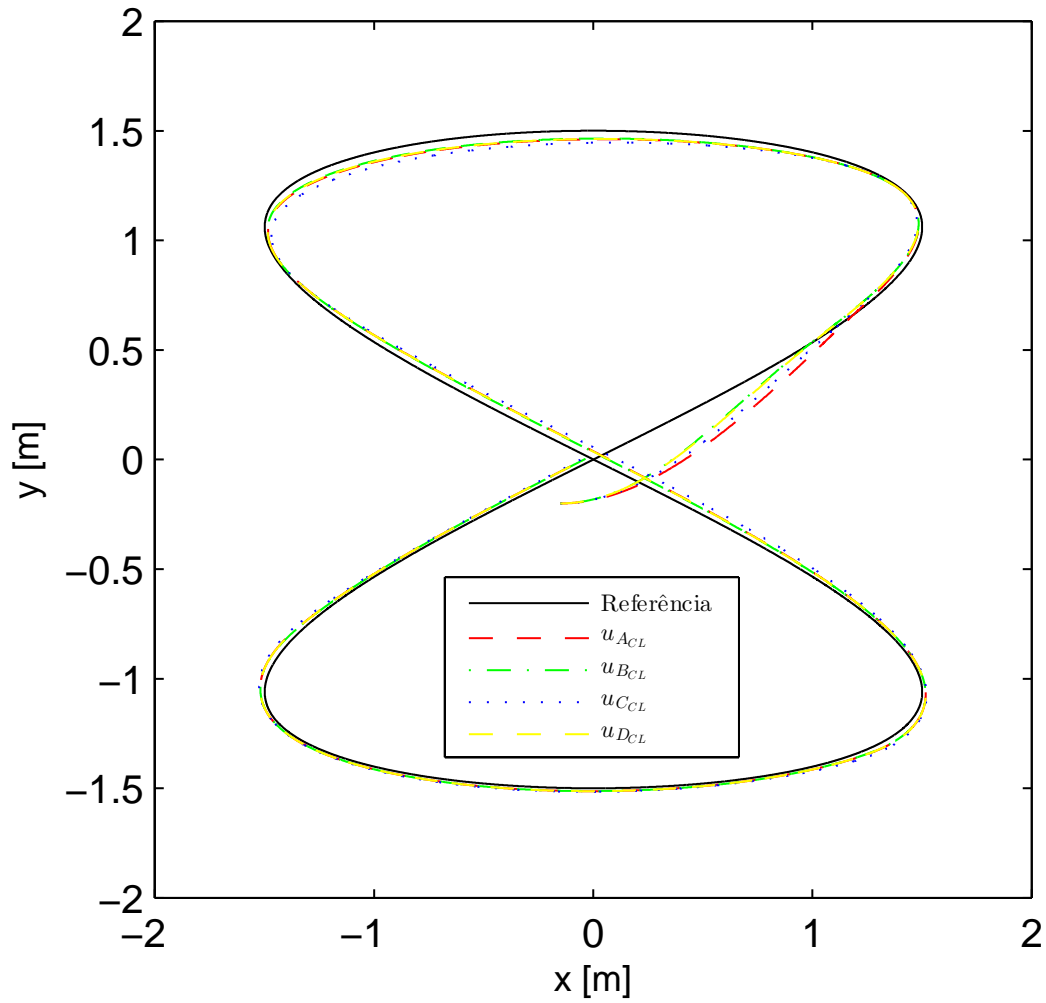


Figura 24 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).

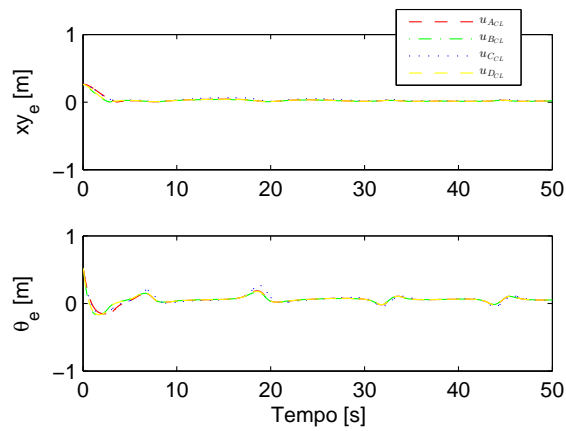


Figura 25 – Erros de posição e orientação no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).

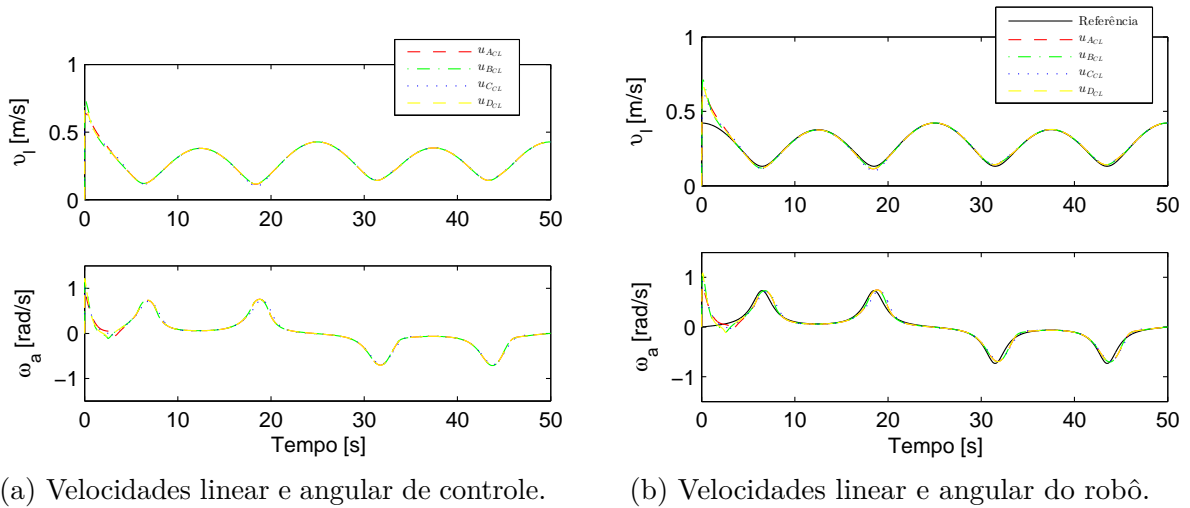


Figura 26 – Velocidades linear e angular no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).

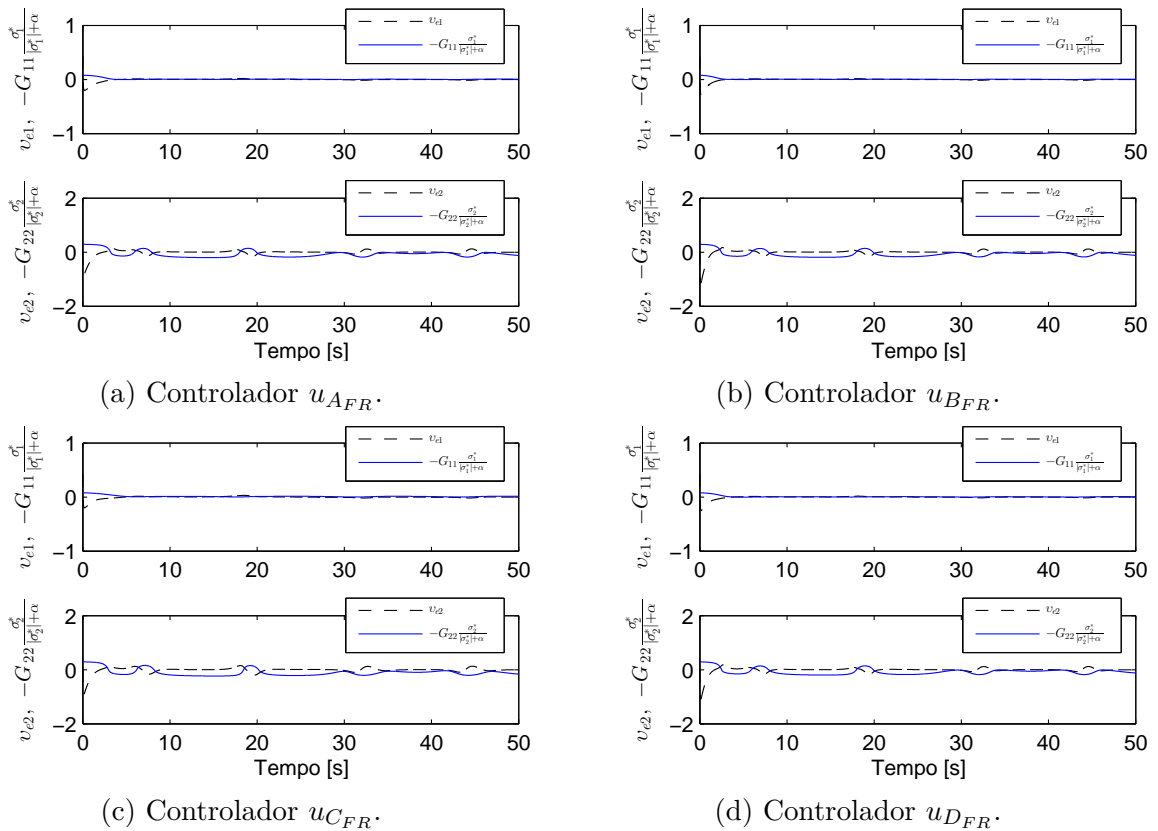


Figura 27 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).

novas superfícies deslizantes σ^* tendem a zero, confirmando a formulação apresentada no Capítulo 3 para desenvolvimento do CMD.

Os resultados de simulação no cenário ideal mostram que o rastreamento de trajetória é ligeiramente melhor para os controladores com a parcela descontínua ao custo de alto *chattering*. É importante ressaltar que no cenário ideal incertezas e perturbações

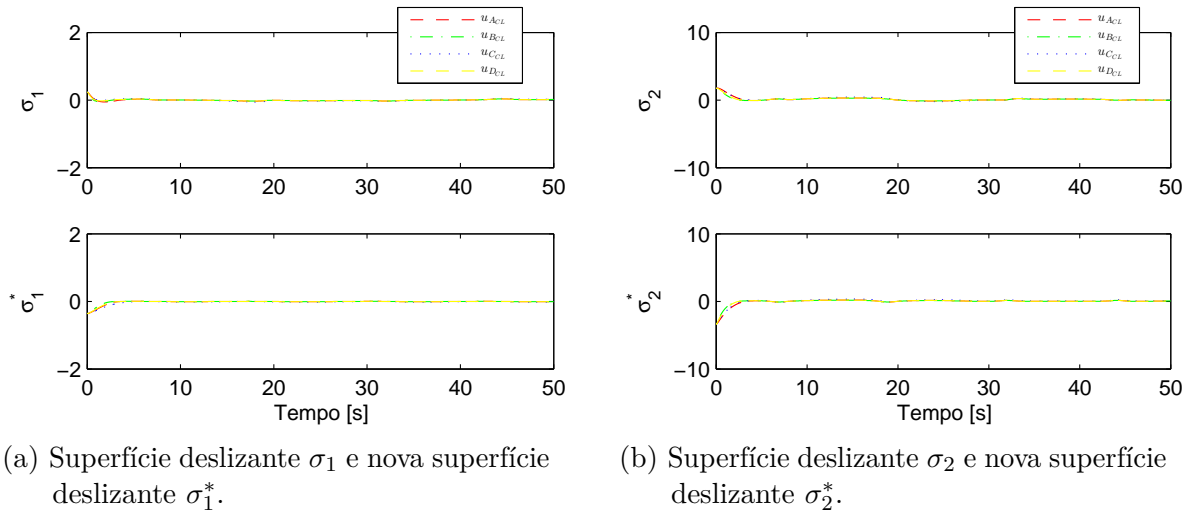


Figura 28 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário ideal (controladores com a aproximação FR).

(por exemplo limitações físicas, dinâmicas não modeladas, imprecisões de modelagem e perturbações externas) do RMRD não são consideradas, e assim o RMRD pode reproduzir as velocidades de controle mesmo com alto *chattering*, o que não se mantém quando considerando um RMRD real. Isso pode ser verificado posteriormente no cenário de simulações realístico (simulador *MobileSim*) e nas experimentações em tempo real (RMRD *Powerbot*).

4.2 Simulações em cenário realístico

O segundo cenário de simulação, chamado de cenário realístico, o comportamento do RMRD não é mais descrito pelo modelo de configuração em espaço de estados, e sim pelo simulador *MobileSim*, e tem como objetivo apresentar resultados de simulação mais precisos que os apresentados no cenário ideal.

MobileSim é um software utilizado para simular o comportamento de plataformas *MobileSim/ActivMedia* (*Powerbot* é uma dessas plataformas), produzidas pela *Mobile Robots Inc.*, para propósitos de testes e de depuração. Para fazer a comunicação entre o controlador, implementado no Matlab/Simulink, e o simulador *MobileSim*, é utilizada a interface *ARIA*. *ARIA*, do inglês *Advanced Robot Interface for Applications*, ou Interface de Robô Avançada para Aplicações, é uma biblioteca para plataformas da *MobileRobots/ActivMedia* capaz de controlar dinamicamente parâmetros de um RMRD, como por exemplo a velocidade e a orientação. *ARIA* também é responsável por receber informações internas do RMRD, como por exemplo velocidade, posição, leituras de sonares. A Figura 34 mostra a interface do *MobileSim*, após simular o *Powerbot* rastreando a trajetória em formato de oito.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 35 mostra como *ARIA* e *MobileSim*

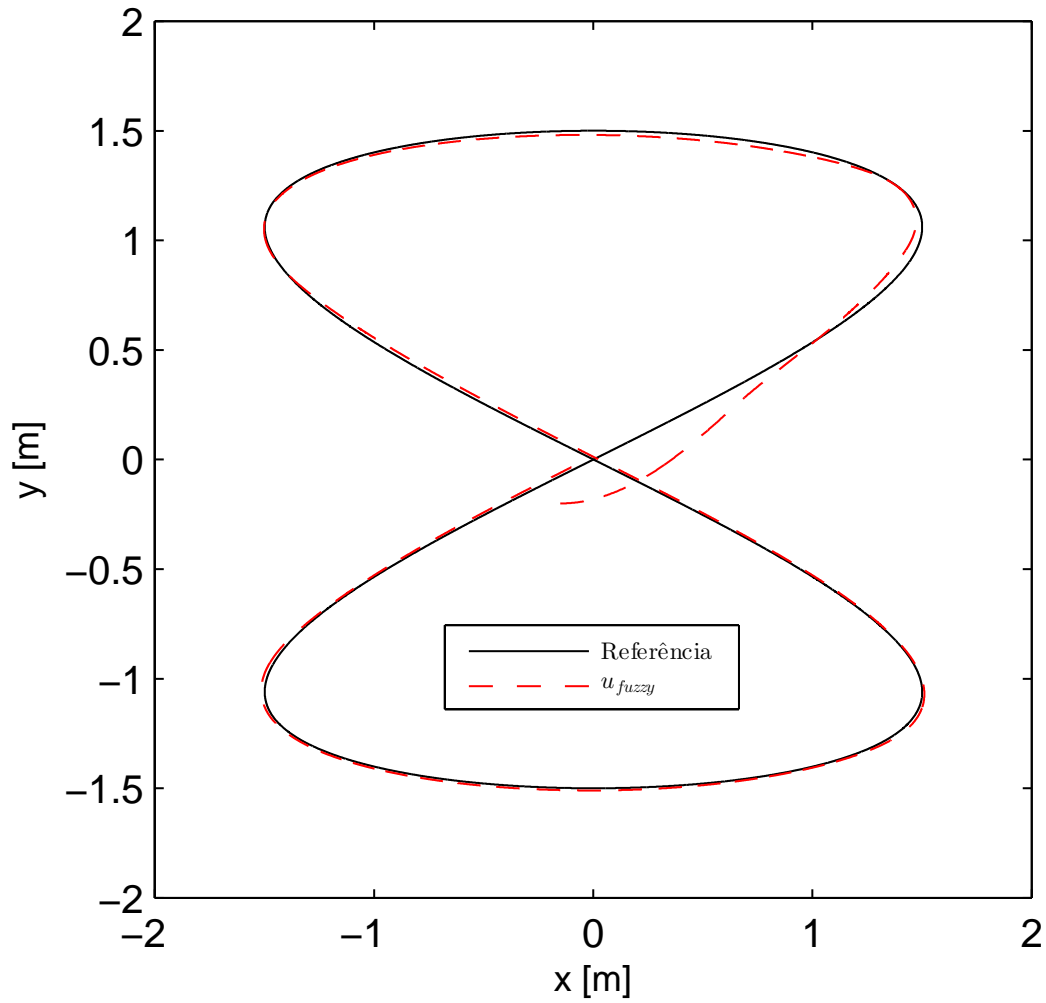


Figura 29 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário ideal (controlador *fuzzy*).

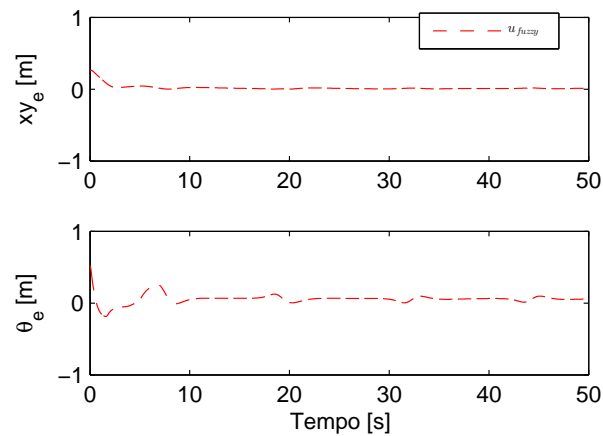


Figura 30 – Erros de posição e orientação no cenário ideal (controlador *fuzzy*).

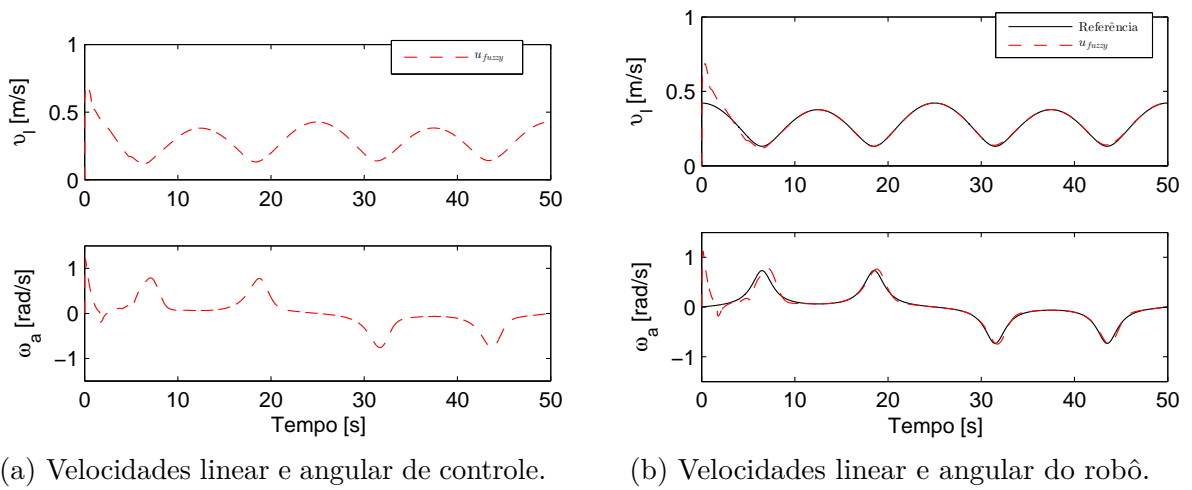


Figura 31 – Velocidades linear e angular no cenário ideal (controlador *fuzzy*).

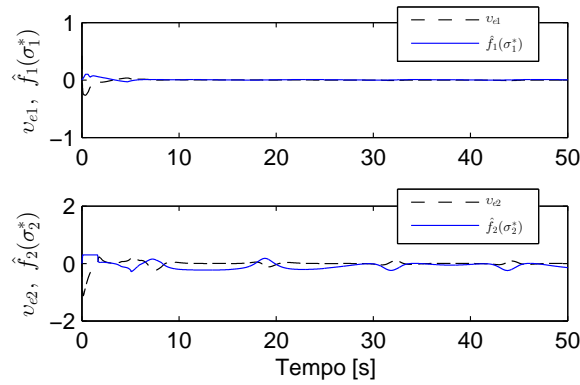


Figura 32 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação utilizando o controlador *fuzzy* no cenário ideal.

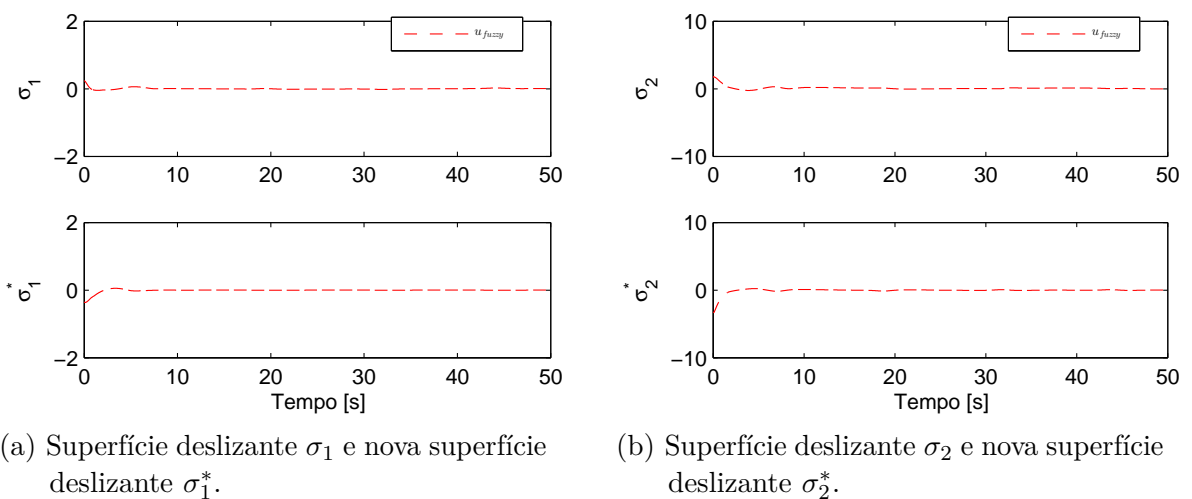


Figura 33 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário ideal (controlador *fuzzy*).

são utilizados para as simulações no cenário realístico.

Na Figura 35 os blocos Trajetória de Referência, Somador e Controle funcionam

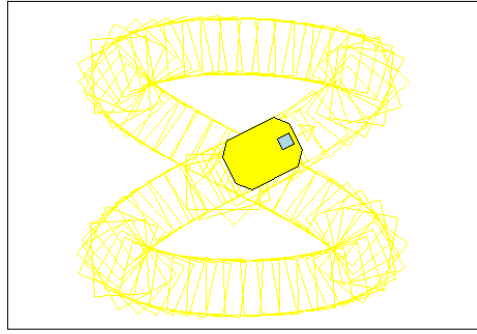


Figura 34 – MobileSim Interface - Eight shape trajectory simulation

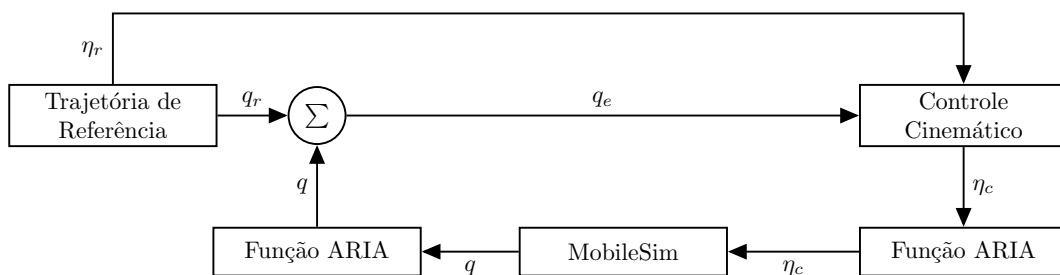


Figura 35 – Diagrama de simulação no cenário realístico.

exatamente como os apresentados na Figura 18. Agora, no cenário realístico, o RMRD não é mais representado por uma formulação matemática no MATLAB/Simulink, as velocidades calculadas pelo controlador são passadas ao bloco função *ARIA*, que faz a comunicação entre MATLAB/Simulink e o simulador *MobileSim*. O bloco *MobileSim* simula o comportamento do RMRD (representando o controlador dinâmico, a dinâmica dos atuadores, a dinâmica, e a cinemática do RMRD), gerando a informação de postura q . Novamente, um bloco de função *ARIA* é necessária para acessar a informação de postura gerada pelo *MobileSim*, e passa essa informação para calcular o erro de postura.

Para avaliar a robustez dos controladores, assim como o efeito do *chattering*, os controladores u_A , u_B , u_C , u_D , u_{AFR} , u_{BFR} , u_{CFR} , u_{DFR} e u_{fuzzy} foram simulados nas três trajetórias (circulo, sala e oito), e são apresentados na Tabela 7 os valores de erros quadráticos médios de posição e orientação.

Pelos resultados apresentados na Tabela 7, fica claro que o *chattering* tem efeito negativo na robustez do controlador, visto que, com exceção do controlador u_C que já tinha apresentado atenuação de *chattering* na simulação em cenário ideal, os controladores com a parcela descontínua (u_A , u_B e u_D) apresentaram erros maiores que seus correspondentes com a função relé (u_{AFR} , u_{BFR} e u_{DFR}). O controlador com a parcela descontínua substituída pela parcela fuzzy adaptativa u_{fuzzy} foi o que apresentou menores erros. Quanto aos outros controladores, os controladores u_B e u_{BFR} foram os que apresentaram menores erros entre os com a parcela descontínua e os com FR, respectivamente.

Tabela 7 – Erros quadráticos médios dos controladores - Cenário Realístico

	circulo		sala		oito	
	rms xy	rms θ	rms xy	rms θ	rms xy	rms θ
u_A	0.1416	0.0820	0.0811	0.1817	0.1501	0.1489
u_B	0.1325	0.0828	0.1054	0.1811	0.1299	0.1335
u_C	0.1534	0.0551	0.0782	0.1744	0.1493	0.1321
u_D	0.1485	0.0878	0.1056	0.2139	0.1350	0.1286
$u_{A_{FR}}$	0.1604	0.0555	0.0780	0.1691	0.1463	0.1316
$u_{B_{FR}}$	0.1434	0.0494	0.0690	0.1545	0.1279	0.0982
$u_{C_{FR}}$	0.1764	0.0574	0.0873	0.1726	0.1514	0.1480
$u_{D_{FR}}$	0.1467	0.0503	0.0798	0.1661	0.1366	0.1152
u_{fuzzy}	0.1353	0.0449	0.0690	0.1470	0.1282	0.0940

Com essa análise, a apresentação gráfica dos resultados de simulação no cenário realístico, novamente para a trajetória em oito, é limitada aos controladores u_B , u_C , $u_{B_{FR}}$ e u_{fuzzy} . Os resultados apresentados são: rastreamento de trajetória; de erros de posição e orientação; de velocidades linear e angular de controle e do RMRD; erros de rastreamento de velocidades e compensação dos erros de rastreamento de velocidades; e superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes.

As Figuras 36 e 37 confirmam a qualidade dos resultados apresentados na Tabela 7. Todos os controladores atingem a trajetória e se mantém próximos a ela pelo tempo sequente, com erros próximos a zero, sendo que os RMRDs controlados por $u_{B_{FR}}$ e u_{fuzzy} apresentam erros levemente menores que os outros os pelos dois outros controladores. Também percebe-se que o controlador u_C é o que mais se distancia da trajetória de referência, enquanto o controlador u_B , embora mantenha um erro de posição similar aos controladores $u_{B_{FR}}$ e u_{fuzzy} , apresenta um chaveamento entre valores positivos e negativos de erro de orientação, o que significa que embora o centro de massa do RMRD esteja sobre a trajetória, a parte frontal dele está direcionada para as laterais da trajetória, invertendo o lado constantemente, efeito do *chattering*.

A Figura 38 apresenta as velocidades de controle e as velocidades do RMRD. Percebe-se claramente que o controlador u_B gera sinais de controle com alto *chattering*, e o controlador u_C , embora atenua o *chattering* em relação aos outros controladores com a parcela descontínua, ainda apresenta uma magnitude alta de chaveamento nos sinais de controle, enquanto os controladores $u_{B_{FR}}$ e u_{fuzzy} apresentam velocidades de controle com um chaveamento de magnitude muito baixa. Passando para as velocidades do RMRD, percebe-se os efeitos das limitações físicas do RMRD, que não permite a reprodução de uma velocidade de controle com alto *chattering*, justificando o aumento dos erros dos controladores descontínuos em relação a simulações no cenário ideal. Ainda assim, as velocidades dos robôs controlados por u_B e u_C apresentam chaveamento nas velocidades (com maior magnitude para o controlado por u_B), indicando mudanças constantes e não suaves de velocidades linear e angular, enquanto os robôs controlados por $u_{B_{FR}}$ e u_{fuzzy}

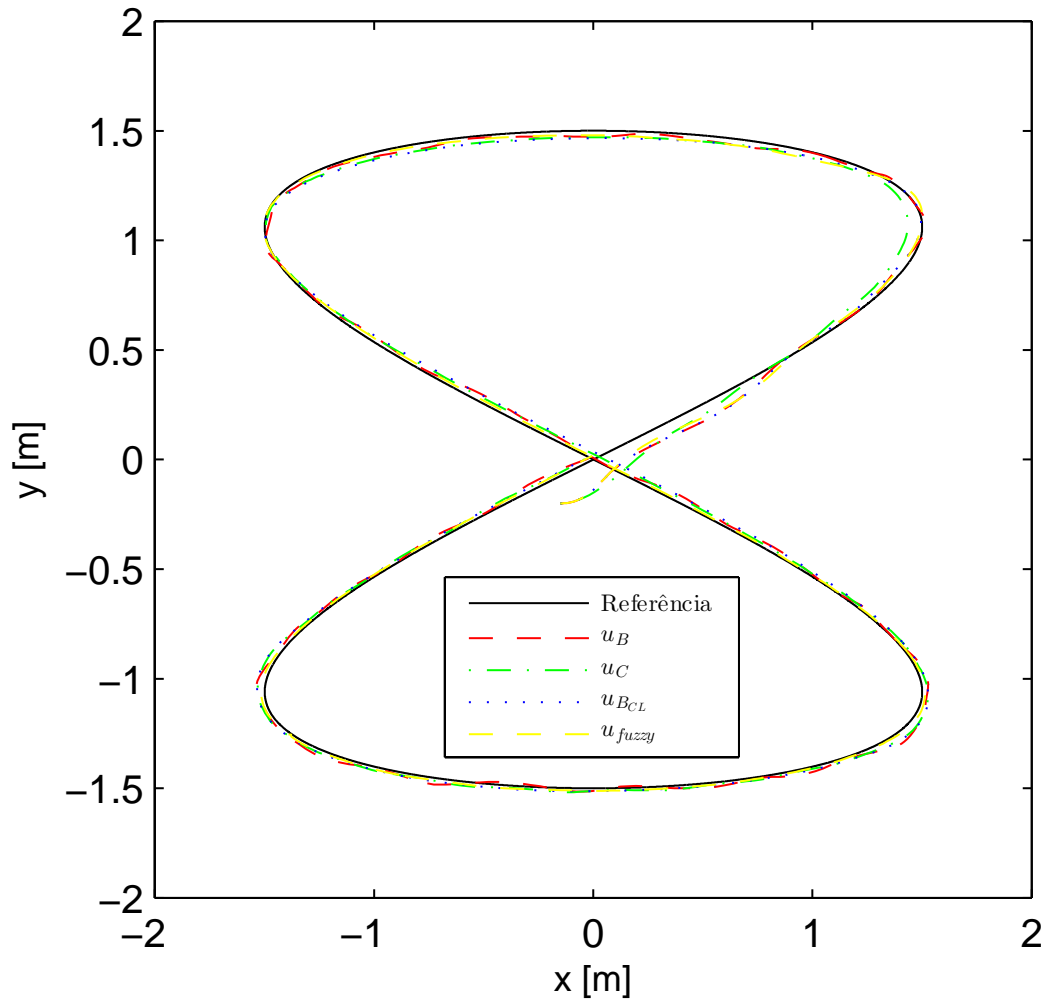


Figura 36 – Rastreamento de trajetória em formato de oito no cenário realístico.

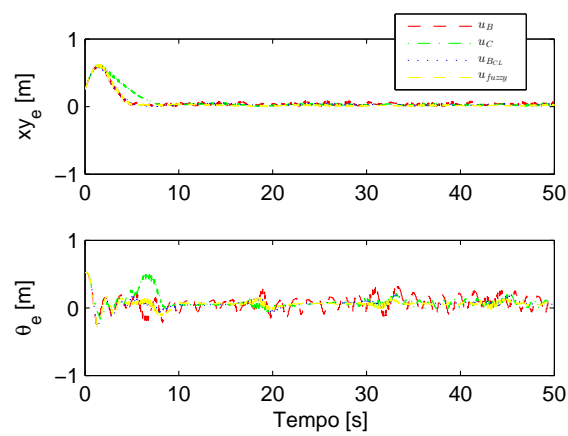


Figura 37 – Erros de posição e orientação no cenário realístico.

não apresentam *chattering*.

A Figura 39 apresenta os erros de rastreamento de velocidades e a compensação dos

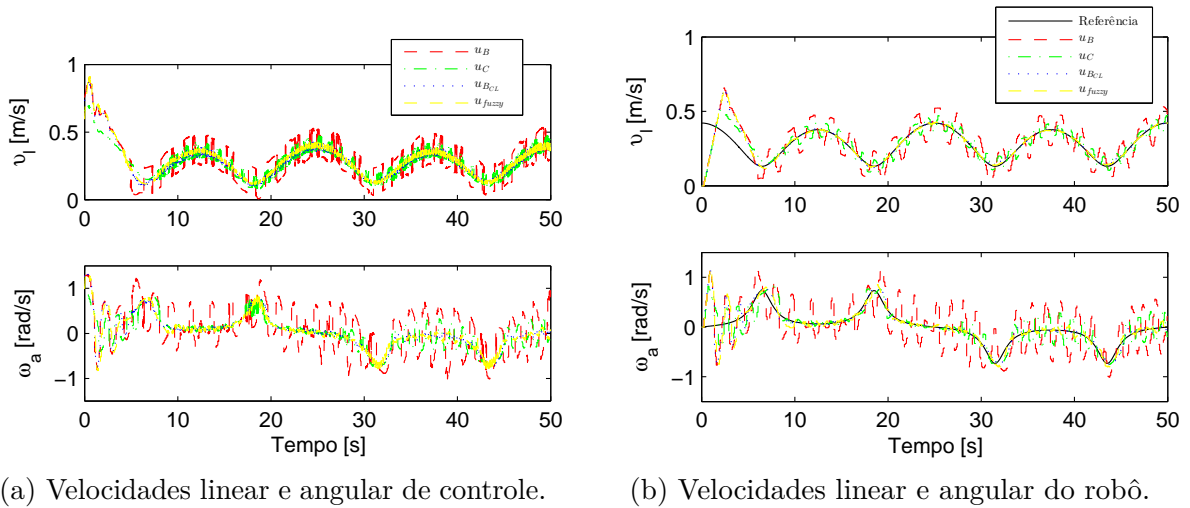


Figura 38 – Velocidades linear e angular no cenário realístico.

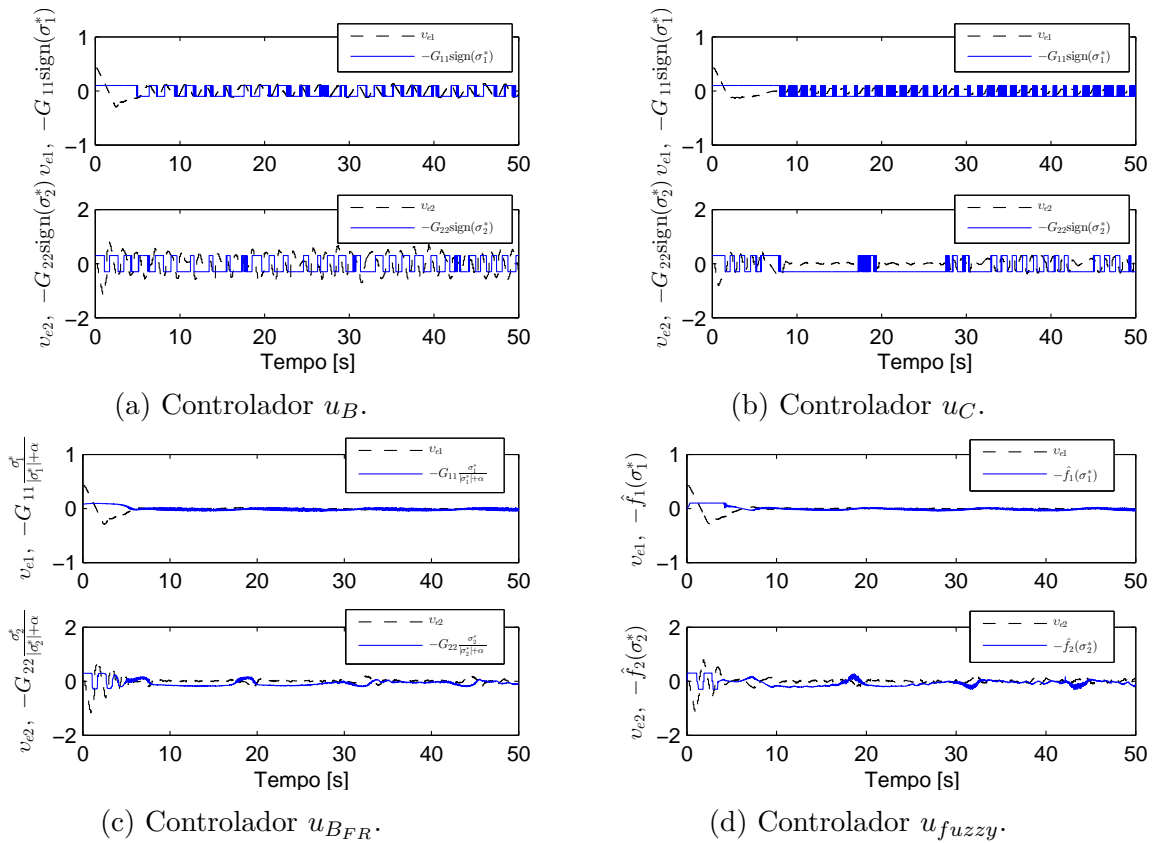


Figura 39 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação no cenário realístico.

erros. Novamente percebe-se que a compensação feita pelos controladores com a parcela descontínua não é ideal, já que é de magnitude $|G|$, enquanto os controladores u_{BFR} e u_{fuzzy} mantêm uma compensação de magnitude próxima a magnitude do erro de rastreamento de velocidade.

Por fim, a Figura 40 mostra as superfícies deslizantes e as novas superfícies deslizantes, e tendem a zero para todos os controladores.

Analisando os resultados obtidos nesses experimentos, os controladores u_{BFR} e

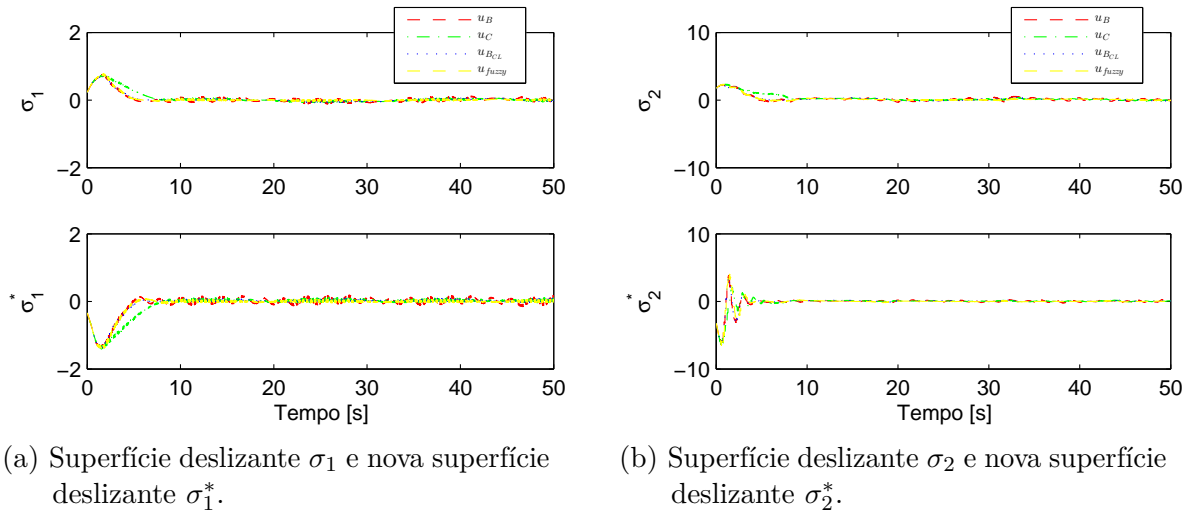


Figura 40 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes no cenário realístico.

u_{fuzzy} apresentaram resultados de erros de posição e orientação ligeiramente melhores do que os com função descontínua, sendo que os controladores com a função descontínua ainda apresentam a desvantagem de *chattering* em suas velocidades. O controlador u_{fuzzy} apresenta resultados de rastreamento de trajetória levemente melhores que o controlador u_{BFR} , mas a grande vantagem da utilização do controlador u_{fuzzy} se dá a parcela adaptativa eliminar a necessidade de conhecer os limites das incertezas e perturbações, enquanto os outros controladores precisam de tal conhecimento para definir um valor para G que faça atingir resultados satisfatórios, sem esforço de controle desnecessário aos atuadores do RMRD. Isso pode ser verificado pelos resultados apresentados na Tabela 8, que apresenta os erros de posição e orientação para o controlador u_{BFR} com diferentes valores de ganho G .

Tabela 8 – Erros quadráticos médios do controlador u_{BFR} com diferentes valores para G - Cenário Realístico

Ganhos		Circulo		Sala		Oito	
		RMS xy	RMS θ	RMS xy	RMS θ	RMS xy	RMS θ
g11=0.05	g22=0.15	0.1711	0.0512	0.0876	0.1140	0.1343	0.1282
g11=0.05	g22=0.30	0.1580	0.0560	0.0841	0.1404	0.1279	0.1104
g11=0.05	g22=0.60	0.1461	0.0901	0.9190	0.2056	0.1314	0.1263
g11=0.10	g22=0.15	0.1737	0.0490	0.0751	0.1168	0.1280	0.1127
g11=0.10	g22=0.30	0.1357	0.0424	0.0758	0.1339	0.1279	0.0982
g11=0.10	g22=0.60	0.1328	0.0783	0.0901	0.2164	0.1256	0.1451
g11=0.20	g22=0.15	0.1671	0.4510	0.0741	0.1251	0.1288	0.1121
g11=0.20	g22=0.30	0.1455	0.0478	0.7910	0.1248	0.1294	0.0973
g11=0.20	g22=0.60	0.1325	0.0791	0.0886	0.2139	0.1339	0.1346

Os resultados apresentados na Tabela 8 mostram como é crítica a escolha dos valores de G . Se os ganhos são muito baixos, o controle não é capaz de compensar as incertezas e perturbações. Se o valor for muito alto, gera um alto esforço de controle, que

pode gerar *chattering* e aumentar os erros, assim como diminuir a vida útil dos atuadores do RMRD. Como os outros controladores com exceção ao u_{fuzzy} utilizam G , a mesma análise é válida para eles.

4.3 Experimentação em tempo real

As de simulações nos cenários ideal e realístico permitem a verificação do desempenho dos controladores propostos na resolução do problema de rastreamento de trajetória. Para validar os resultados obtidos os controladores propostos são aplicados em um caso real para o qual foi usado o RMRD Powerbot. Powerbot é um robô móvel com rodas diferencial desenvolvido pela empresa *MobileRobots* para pesquisa e prototipagem rápida, sendo utilizado como plataforma de testes em diversos trabalhos (WURM *et al.*, 2009; FILIPESCU *et al.*, 2011; FAISAL *et al.*, 2013; ELYOUSSEF *et al.*, 2014). A localização do RMRD no ambiente é obtida pela aplicação da técnica de *dead reckoning*, um dos método mais utilizado para determinar a posição momentânea de um robô móvel (BORENSTEIN; FENG, 1994). A técnica perde em qualidade quando comparada a técnicas que utilizam referências externas, porém tem sua variância de erro reduzida por meio da fusão dos dados do giroscópio e bússola. As especificações do Powerbot são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 – PowerBot specifications

Parameter	Value
mass of the robot body	120 kg
maximum payload	100 kg
radius of the drive wheel	0.135 m
robot length	0.9 m
robot width	0.66 m
robot height	0.48 m
moment of inertia	15.0656 $kg.m^2$
maximum linear velocity	2.1 m/s
maximum angular velocity	$\frac{5\pi}{3}$ rad/s \approx 5.24 rad/s

A Figura 41 mostra o diagrama de blocos execução, onde o simulador é substituído pelo robô Powerbot. A comunicação entre o controle, desenvolvido no Matlab/Simulink, e o RMRD é feita utilizando funções ARIA. As informações são enviadas e recebidas por uma porta serial.

A validação dos controladores desenvolvidos, aplicados ao Powerbot, foi feita pelo rastreamento de trajetória em formato de oito. A Tabela 9 apresenta os erros quadráticos médios de posição e orientação do robô.

Os resultados apresentados na Tabela 10 mostram erros de posição e orientação menores dos que obtidos no cenário realístico (Tabela 6). Analisando os resultados, percebe-

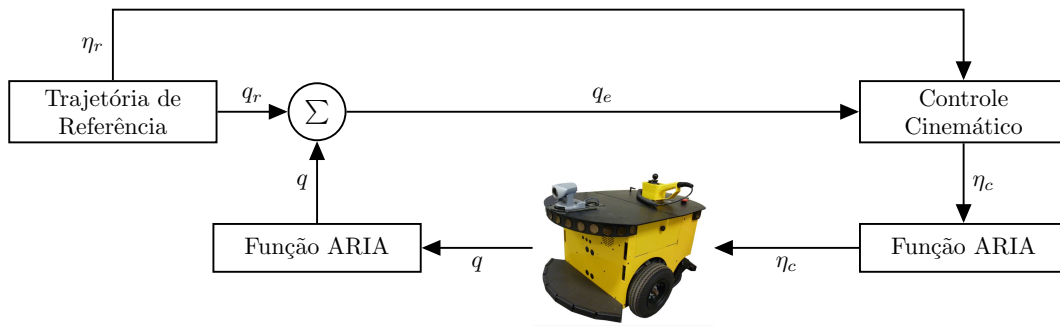


Figura 41 – Diagrama de aplicação em tempo real.

Tabela 10 – Erros quadráticos médios dos controladores - Experimentação no Powerbot

	oitto	
	rms xy	rms θ
u_A	0.0986	0.1377
u_B	0.0941	0.1559
u_C	0.0979	0.1003
u_D	0.0955	0.1434
$u_{A_{FR}}$	0.0970	0.1019
$u_{B_{FR}}$	0.0894	0.1180
$u_{C_{FR}}$	0.1033	0.1178
$u_{D_{FR}}$	0.0943	0.1174
u_{fuzzy}	0.0892	0.1176

se que os controladores que utilizam a parcela descontínua, apesar de erro de posição similares aos outros controladores, apresenta erros de orientação maiores, pois embora o centro de massa do RMRD esteja sobre a trajetória, a parte frontal do robô está mudando de direções constantemente, alterando entre as laterais da trajetória. Entre os controladores que utilizam a função relé, os resultados foram melhores, já que o *chattering* é contido pela aproximação contínua, sendo que o $u_{B_{FR}}$ é o controle com os melhores resultados. Novamente, o controlador *fuzzy* apresentou erros de rastreamento de trajetória ligeiramente menores que os outros controladores.

Após as considerações feitas no final da seção anterior, e análise dos resultados apresentados pela Tabela 10, os controladores $u_{B_{FR}}$ e u_{fuzzy} são escolhidos para terem os resultados apresentados graficamente. Esses controladores foram escolhidos por serem os que apresentaram os melhores resultados.

As Figuras 42 a 46 apresentam, respectivamente: rastreamento de trajetória; erros de posição e orientação; velocidades de controle e velocidades do robô; erro de rastreamento de velocidades e compensação dos erros de rastreamento de velocidades; superfícies deslizantes novas superfícies deslizantes.

Os resultados apresentados pelas Figuras 42 e 43 mostram como os controladores

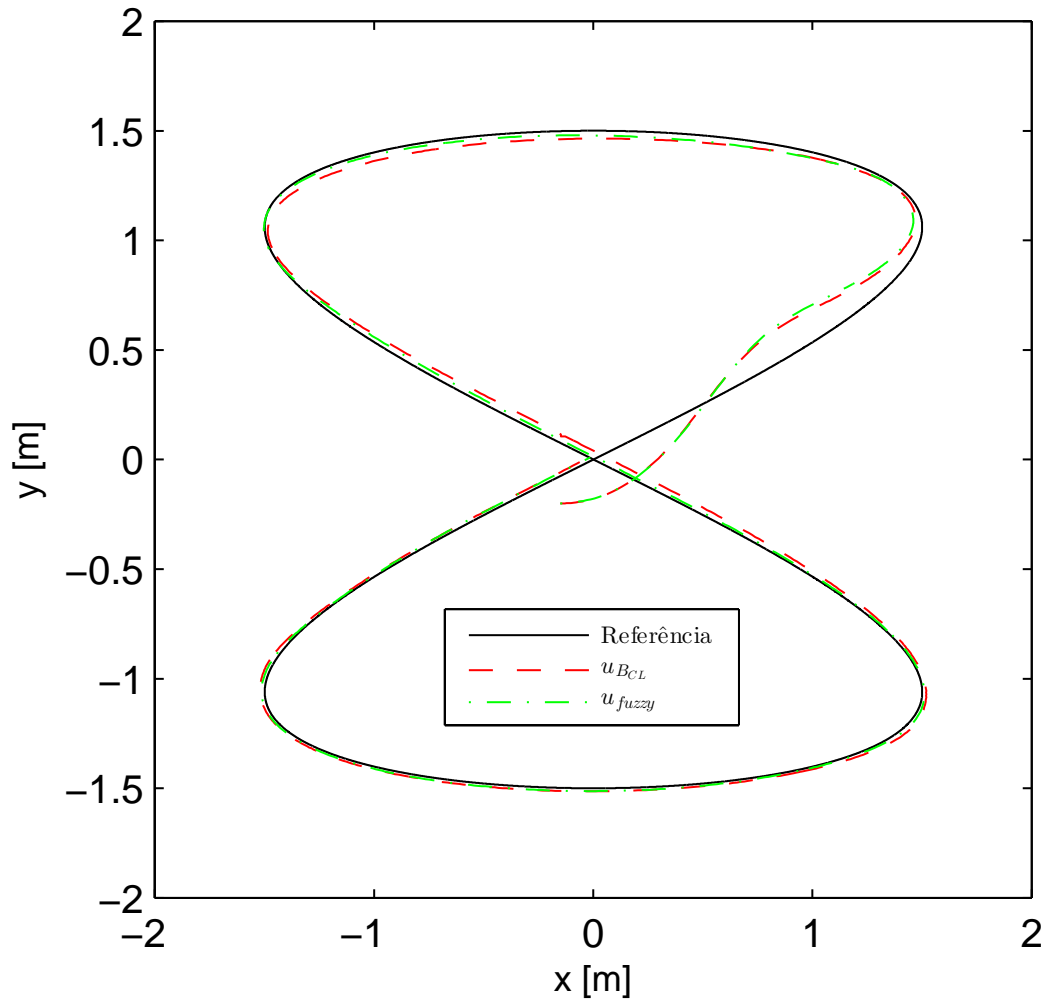


Figura 42 – Rastreamento de trajetória em formato de oito - experimentação no Powerbot.

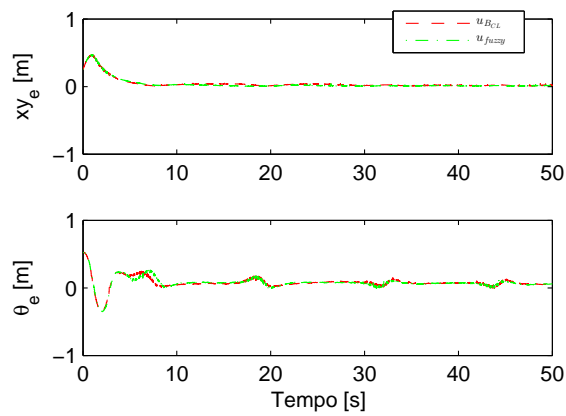


Figura 43 – Erros de posição e orientação - experimentação no Powerbot.

u_{BFR} e u_{fuzzy} seguem a trajetória de referência, com erros de posição e orientação próximos de zero, confirmando visualmente os resultados apresentados pela Tabela 10.

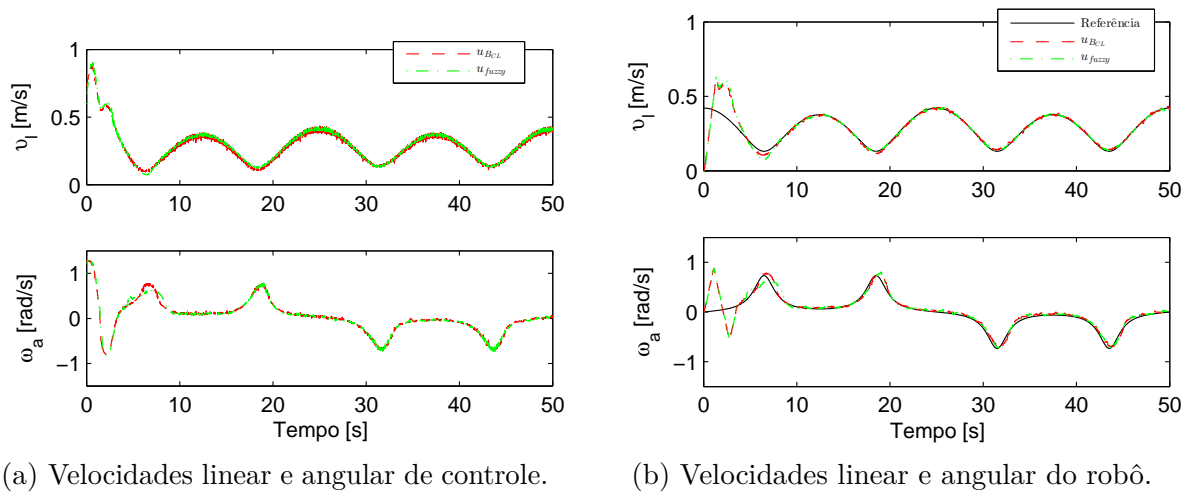


Figura 44 – Velocidades linear e angular - experimentação no Powerbot.

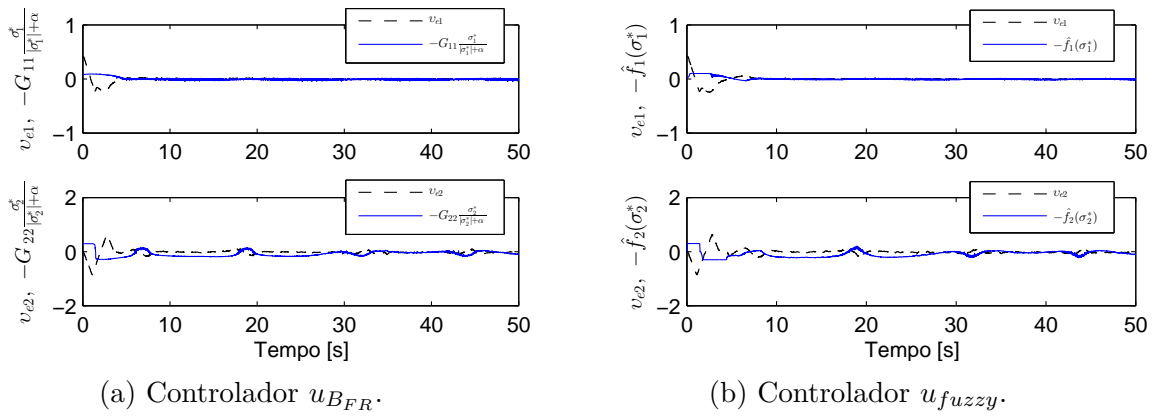


Figura 45 – Erro de rastreamento de velocidade e compensação - experimentação no Powerbot.

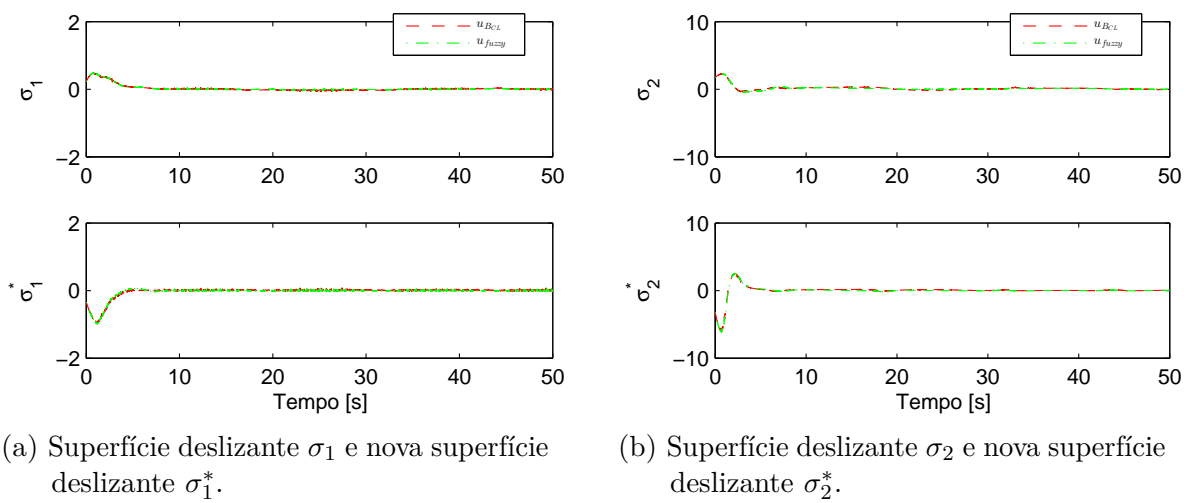


Figura 46 – Superfícies deslizantes e novas superfícies deslizantes - experimentação no Powerbot.

A Figura 44 apresenta as velocidades de controle e as velocidades do RMRD. Como pode ser visto pelas velocidades de controle, ambos os controladores calcularam sinais de controle suaves, limitando os efeitos do *chattering*. As velocidades do RMRD estão próximas as velocidades de controle, por isso os erros de rastreamento de velocidade tendem a zero, como pode ser verificado na Figura 45. Nos momentos que os erros de rastreamento de velocidade se afastam de zero, é possível ver a compensação em sentido oposto, fazendo que o erro tenda a zero novamente.

Por fim, a Figura 46 mostra como as superfícies deslizantes, e as novas superfícies deslizantes tendem a zero em tempo finito, e se estabilizam pelo tempo sequente. Em resumo, os resultados das experimentações em tempo real são coerentes com os resultados obtidos no cenário realístico.

4.4 Considerações finais

Neste capítulo os controladores desenvolvidos foram experimentados em dois cenários de simulação e aplicados em um robô real. Ficou claro que todos os controladores desenvolvidos são capazes de rastrear diferentes trajetórias, com ou sem erro inicial, obtendo resultados de posição e orientação cujo os erros tendem a zero. Também foi verificada a formulação apresentada no Capítulo 3, com a confirmação de que as superfícies deslizantes e as novas superfícies deslizantes tendem a zero.

Comparando os controladores, observa-se que aqueles controladores com função descontínua apresentam *chattering*, o que aumenta os erros de rastreamento de trajetória quando se consider um RMRD real e ainda diminuí a vida útil de seus atuadores. Os controladores que utilizam FR apresentam bons resultados de rastreamento de trajetória, e sinais de controle suaves, mas, assim como os controladores com FR necessitam do conhecimento prévio dos limites das incertezas e perturbações, já que a escolha de ganhos G é fundamental para atingir bom desempenho.

O controle proposto, utilizando fuzzy adaptativo como aproximação para a função descontínua, apresentou os melhores resultados de rastreamento de trajetória, e se mostrou robusto a perturbações e incertezas, e não necessita o conhecimento prévio dos limites das incertezas e perturbações.

Por fim, os resultados mostram que embora os controladores que substituíram a parcela descontínua do controle, e por consequência, perderam a invariância a incertezas e perturbações, realizaram o rastreamento de trajetória de forma robusta, mesmo frente a incertezas e perturbações ocorrentes em um RMRD real, mostrando que a a robustez é garantida.

5 Conclusão

Neste trabalho a integração de um CMDFA (controle cinemático) e um controle por dinâmica inversa com um PD (controle dinâmico) foi proposto como solução para o problema de rastreamento de trajetória para RMRDs. Variações do CMD foram implementados com objetivo de comparação dos resultados. Embora não seja possível implementar o controle baseado na dinâmica inversa no simulador MobileSim e no RMRD Powerbot, análises suficientes dos resultados foram feitas estudando os controles cinemáticos com apenas um PD como controle dinâmico.

O CMD foi considerado devido ao princípio da invariância, mas essa técnica apresenta *chattering*, o que é indesejável ao controle. Para evitar esse problema, assim como suprimir os efeitos das incertezas e perturbações, foi proposto a utilização da função relé, e um controle fuzzy adaptativo para substituir a parcela descontínua do CMD clássico. Devido a essa substituição o princípio da invariância não é mais garantido, entretanto, os resultados obtidos comprovam a observação 2.1 fornecida por (WANG; GAO, 1995), *i.e.*, a realização de que a invariância requer que chaveamento entre a fase de alcance e a fase deslizante ideal, o que é pouco prático. Portanto, a invariância é ideal e tem pouco significado prático. Com isso, as variantes do CMD com FR e o CMDFA apresentam robustez a incertezas e perturbações e sinais de controle suaves.

Simulações e experimentação em tempo real mostraram erros similares entre os controles cinemáticos. Deve ser enfatizado que a principal vantagem do CMDFA em comparação aos outros controles cinemáticos, com e sem FR, é a atualização em tempo real dos parâmetros de saída do controle fuzzy adaptativo, o que remove a necessidade de conhecimento prévio dos limites das incertezas e perturbações no sistema, e a aplicação de grandes valores de ganhos, o que pode causar alto esforço de controle desnecessário aos atuadores, reduzindo sua vida útil.

A integração do controlador CMDFA com o controlador PD demonstraram que a incidência de incertezas e perturbações produz erros de rastreamento de velocidade auxiliares. Tais erros de rastreamento de velocidade não convergem para zero, portanto, o controlador PD não considera as incertezas e perturbações, e os esforços de controle produzidos por esse controlador não foram suficientes para compensá-los. Esses erros de rastreamento de velocidade foram visualizadas como incertezas e perturbações para o modelo cinemático, e o controlador CMDFA compensa esses erros, provocando a convergência dos erros de rastreamento postura a zero e fornecendo robustez significativa no rastreamento de trajetória de referência sem penalizar os esforços de controle.

Além disso, ao contrário de um controlador totalmente fuzzy, que encontra um problema de expansão de tamanho, o AFLC do tipo Mandani usa apenas 7 regras "sete"na base de regras com relação a superfícies deslizantes, bem como utiliza funções de

pertinência triangulares formando uma estrutura ainda mais simples. Por isso, tem uma carga computacional mais baixa para execução e, por isso, se torna mais apropriado para aplicação em sistemas de RMR reais em comparação com os trabalhos relacionados da literatura.

Como trabalhos futuros, é pretendido:

- Desenvolvimento do CMDFA com utilizando o controle fuzzy adaptativo com sistemas de inferência fuzzy do tipo TSK (Takagi-Sugeno-Kang), e comparação com o CMDFA desenvolvido neste trabalho (sistemas de inferência fuzzy do tipo Mamdani).
- Comparação do CMDFA proposto neste trabalho com outras abordagens de redução de *chattering* existentes, das quais destacam-se: controle a estrutura variável com redes neuronais de funções de bases radiais (MARTINS *et al.*, 2011); Controle por modos deslizante fuzzy (KEIGHOBADI; MOHAMADI, 2012)¹; Controle por modos deslizantes fuzzy (MOHAGHEGHI; SHABANINIA; SALIMIFARD, 2013)¹; Controle por modos deslizantes com fuzzy adaptativo (BOHLOULI *et al.*, 2011)¹; Controle por modos deslizantes *Super-Twisting*² (ELYOUSSEF *et al.*, 2014).
- Estudo de geração de trajetórias factíveis, que consideram as limitações cinemáticas e dinâmicas do RMRD, como por exemplo limitações de movimento, de velocidades e de aceleração.
- Estudo detalhado e específico das perturbações e sua consideração na prova de estabilidade.
- Utilização do AFCMD proposto neste trabalho no controle formação de RMRD para o problema de rastreamento de trajetória (trabalho em andamento).
- Desenvolvimento de controle geométrico aplicando Álgebra de Lie e posteriormente realização de estudo comparativo com as técnicas abordadas neste trabalho.

Além disso, está prevista uma atualização de hardware para o RMRD Powerbot, para permitir a implementação do controle baseado na dinâmica inversa.

¹ Embora as técnicas apresentem os mesmos nomes as superfícies deslizantes, a base de regras fuzzy e as funções de pertinências fuzzy de entrada e saída são diferentes.

² Controle por modos deslizantes de segunda ordem.

Referências

- ABADI, D. N. M.; KHOOBAN, M. H. Design of optimal mamdani-type fuzzy controller for nonholonomic wheeled mobile robots. *Journal of King Saud University-Engineering Sciences*, Elsevier, v. 27, n. 1, p. 92–100, 2015. Citado na página 18.
- BOHLOULI, R.; MOHAMADI, Y.; BARMAKI, R.; KEIGHOBADI, J. Adaptive fuzzy sliding mode controller for wheeled mobile robots. In: IEEE. *Automation Science and Engineering (CASE), 2011 IEEE Conference on*. [S.l.], 2011. p. 285–290. Citado nas páginas 20, 66 e 97.
- BORENSTEIN, J.; FENG, L. Umbmark: A method for measuring, comparing, and correcting dead-reckoning errors in mobile robots. 1994. Citado na página 91.
- CAMPION, G.; BASTIN, G.; D’ANDRÉA-NOVEL, B. Structural properties and classification on kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*, Udmurt State University, v. 7, n. 4, p. 733–769, 2011. Citado nas páginas 13, 14 e 31.
- CAMPION, G.; CHUNG, W. Wheeled robots. *Springer Handbook of Robotics*, Springer, p. 391–410, 2008. Citado nas páginas 13, 14, 24, 30, 31, 38 e 39.
- CHANG, T.-H.; HURMUZLU, Y. Sliding control without reaching phase and its application to bipedal locomotion. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, American Society of Mechanical Engineers, v. 115, n. 3, p. 447–455, 1993. Citado na página 62.
- CHAUDHARI, S.; PATIL, M. Study and review of fuzzy inference systems for decision making and control. *American International Journal of Research in Science, Technology, Engineering and Mathematics*, 2014. Citado na página 65.
- CHEN, C.-Y.; LI, T.-H. S.; YEH, Y.-C. Ep-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots. *Information Sciences*, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 180–195, 2009. Citado na página 18.
- CHOU, Y.-C.; YAO, L. Adaptive fuzzy sliding-mode controller with gaussian modulated membership function on tracking trajectory. In: IEEE. *Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2012 IEEE/ASME International Conference on*. [S.l.], 2012. p. 1017–1022. Citado nas páginas 18 e 66.
- CHWA, D. Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 12, n. 4, p. 637–644, 2004. Citado na página 17.
- COELHO, P.; NUNES, U. Lie algebra application to mobile robot control: a tutorial. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 21, n. 5, p. 483–493, 2003. Citado nas páginas 24, 26, 30 e 31.
- COELHO, P.; NUNES, U. Path-following control of mobile robots in presence of uncertainties. *Robotics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 21, n. 2, p. 252–261, 2005. Citado na página 31.

- DAS, T.; KAR, I. N. Design and implementation of an adaptive fuzzy logic-based controller for wheeled mobile robots. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 14, n. 3, p. 501–510, 2006. Citado na página 24.
- DECARLO, R.; ZAK, S.; DRAKUNOV, S. Variable structure, sliding mode controller design. *The Control Handbook*, CRC Press, Boca Raton, v. 57, p. 941–951, 1996. Citado na página 62.
- DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988. Citado nas páginas 19 e 53.
- DEFOORT, M.; PALOS, J.; KOKOSY, A.; FLOQUET, T.; PERRUQUETTI, W.; BOULINGUEZ, D. Experimental motion planning and control for an autonomous nonholonomic mobile robot. In: IEEE. *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2007. p. 2221–2226. Citado nas páginas 15 e 16.
- DIAS, S. M.; ARAÚJO, A. D.; ALSINA, P. J. Controlador adaptativo robusto de um robô móvel com acionamento diferencial. In: *XVI Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2006. v. 1, p. 2069–2074. Citado nas páginas 15 e 16.
- EDWARDS, C.; SPURGEON, S. *Sliding mode control: theory and applications*. [S.l.]: CRC Press, 1998. Citado na página 17.
- EL'YOUSSED, E.; MARTINS, N.; BERTOL, D.; PIERI, E. D.; JUNGERS, M. On a wheeled mobile robot tracking control: Sliding mode control design. In: *Congresso Brasileiro de Automática, CBA'10*. [S.l.: s.n.], 2010. p. CDROM. Citado nas páginas 17, 19 e 22.
- EL'YOUSSED, E.; PIERI, E. D.; MORENO, U.; JUNGERS, M. Super-twisting sliding modes tracking control of a nonholonomic wheeled mobile robot. In: *10th International IFAC Symposium on Robot Control, SYROCO'12*. [S.l.: s.n.], 2012. p. CDROM. Citado nas páginas 18 e 62.
- ELYOUSSEF, E. S.; MARTINS, N. A.; PIERI, E. R. D.; MORENO, U. F. Pd-super-twisting second order sliding mode tracking control for a nonholonomic wheeled mobile robot. In: *World Congress*. [S.l.: s.n.], 2014. v. 19, n. 1, p. 3827–3832. Citado nas páginas 7, 17, 21, 49, 75, 91 e 97.
- FAISAL, M.; AL-MUTIB, K.; HEDJAR, R.; MATHKOUR, H.; ALSULAIMAN, M.; MATTAR, E. Multi modules fuzzy logic for mobile robots navigation and obstacle avoidance in unknown indoor dynamic environment. In: *International Conference on Systems, Control and Informatics, Venice*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 91.
- FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. In: IEEE. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1995. v. 4, p. 3805–3810. Citado nas páginas 35, 38 e 44.
- FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. *Robotic Systems, Journal of*, v. 14, n. 3, p. 149–163, 1997. Citado nas páginas 18 e 47.

FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 9, n. 4, p. 589–600, 1998. Citado na página 16.

FIGUEIREDO, L. C.; JOTA, F. G. Introdução ao controle de sistemas nao-holonômicos. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 15, n. 3, p. 243–268, 2004. Citado nas páginas 16, 28, 30 e 40.

FILIPESCU, A.; MINZU, V.; DUMITRASCU, B.; FILIPESCU, A.; MINCA, E. Trajectory-tracking and discrete-time sliding-mode control of wheeled mobile robots. In: IEEE. *Information and Automation (ICIA), 2011 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 27–32. Citado nas páginas 17 e 91.

FUKAO, T.; NAKAGAWA, H.; ADACHI, N. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 16, n. 5, p. 609–615, 2000. Citado na página 31.

GUO, Y.; WOO, P.-Y. An adaptive fuzzy sliding mode controller for robotic manipulators. *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 33, n. 2, p. 149–159, 2003. Citado nas páginas 18, 66 e 69.

HSIAO, M.-Y.; CHEN, C.-Y.; TSAI, S.-H.; LIU, S.-T. Combined interval type-2 fuzzy kinematic and dynamic controls of the wheeled mobile robot with adaptive sliding-mode technique. In: IEEE. *Fuzzy Systems, 2009. FUZZ-IEEE 2009. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2009. p. 706–711. Citado nas páginas 17 e 18.

HUH, S.; BIEN, Z. Robust sliding mode control of a robot manipulator based on variable structure-model reference adaptive control approach. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 1, n. 5, p. 1355–1363, 2007. Citado nas páginas 17, 18 e 19.

HUNG, J. Y.; GAO, W.; HUNG, J. C. Variable structure control: a survey. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 40, n. 1, p. 2–22, 1993. Citado nas páginas 22, 49, 50, 51 e 61.

JAFAROV, E.; PARLAKCI, M.; ISTEANOPULOS, Y. A new variable structure pid-controller design for robot manipulators. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 13, n. 1, p. 122–130, 2005. Citado na página 19.

KANAYAMA, Y.; KIMURA, Y.; MIYAZAKI, F.; NOGUCHI, T. A stable tracking control method for a non-holonomic mobile robot. In: IEEE. *Intelligent Robots and Systems' 91. Intelligence for Mechanical Systems, Proceedings IROS'91. IEEE/RSJ International Workshop on*. [S.l.], 1991. p. 1236–1241. Citado nas páginas 16 e 55.

KEIGHOBADI, J.; MOHAMADI, Y. Fuzzy sliding mode control of non-holonomic wheeled mobile robot. In: IEEE. *Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMI), 2011 IEEE 9th International Symposium on*. [S.l.], 2011. p. 273–278. Citado na página 20.

KEIGHOBADI, J.; MOHAMADI, Y. Fuzzy robust trajectory tracking control of wMrs. In: *Intelligent Control and Innovative Computing*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 77–90. Citado nas páginas 17, 20 e 97.

KOLMANOVSKY, I.; MCCLAMROCH, N. H. Developments in nonholonomic control problems. *Control Systems, IEEE, IEEE*, v. 15, n. 6, p. 20–36, 1995. Citado na página 18.

LEE, H.; UTKIN, V. I. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 31, n. 2, p. 179–188, 2007. Citado na página 17.

LEE, J. H.; LIN, C.; LIM, H.; LEE, J. M. Sliding mode control for trajectory tracking of mobile robot in the rfid sensor space. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 7, n. 3, p. 429–435, 2009. Citado na página 56.

LIU, J.; WANG, X. *Advanced sliding mode control for mechanical systems*. [S.l.]: Springer, 2012. Citado nas páginas 50 e 66.

LIU, Y.; ZHANG, Y.; WANG, H. Tracking control of wheeled mobile robots based on sliding-mode control. In: IEEE. *Artificial Intelligence, Management Science and Electronic Commerce (AIMSEC), 2011 2nd International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 1787–1790. Citado na página 17.

LOH, A. M.; YEUNG, L. Chattering reduction in sliding mode control: an improvement for nonlinear systems. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, v. 3, n. 10, p. 2090–2097, 2004. Citado nas páginas 17 e 22.

LOW, C. B.; WANG, D. Gps-based tracking control for a car-like wheeled mobile robot with skidding and slipping. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, IEEE, v. 13, n. 4, p. 480–484, 2008. Citado na página 16.

MARTINS, F. N.; CELESTE, W. C.; CARELLI, R.; SARCINELLI-FILHO, M.; BASTOS-FILHO, T. F. An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 16, n. 11, p. 1354–1363, 2008. Citado na página 18.

MARTINS, N. A. *Controle adaptativo e robusto de robôs móveis com rodas*. Tese (Doutorado) — UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, 2010. Citado nas páginas 56, 58 e 59.

MARTINS, N. A.; BERTOL, D. W.; LOMBARDI, W. C.; PIERI, E. R. D. Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot: a suggested neural torque controller based on the sliding mode theory. In: IEEE. *Variable Structure Systems, 2008. VSS'08. International Workshop on*. [S.l.], 2008. p. 384–389. Citado na página 19.

MARTINS, N. A.; ELYOUSSEF, E. S.; BERTOL, D. W.; PIERI, E. R. D.; MORENO, U. F.; CASTELAN, E. B. Nonholonomic mobile robot with kinematic disturbances in the trajectory tracking: A variable structure controller. *Learning and Nonlinear Models*, v. 8, n. 1, p. 23–40, 2010. Citado nas páginas 19, 53, 56, 58, 59 e 72.

MARTINS, N. A.; ELYOUSSEF, E. S.; BERTOL, D. W.; PIERI, E. R. D.; MORENO, U. F.; CASTELAN, E. d. B. Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with kinematic disturbances: a variable structure control design. *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, IEEE, v. 9, n. 3, p. 276–283, 2011. Citado nas páginas 19, 62, 72 e 97.

MOHAGHEGHI, A.; SHABANINIA, F.; SALIMIFARD, M. Fuzzy logic & fuzzy sliding mode tracking control of non-holonomic unicycle wheeled mobile robots. In: IEEE. *Electrical Engineering (ICEE), 2013 21st Iranian Conference on*. [S.l.], 2013. p. 1–6. Citado nas páginas 20 e 97.

- MOHARERI, O.; DHAOUADI, R.; RAD, A. B. Indirect adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot via neural networks. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 88, p. 54–66, 2012. Citado na página 18.
- MORIN, P.; SAMSON, C. Motion control of wheeled mobile robots. In: *Springer Handbook of Robotics*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 799–826. Citado nas páginas 14 e 16.
- MURRAY, R. M.; LI, Z.; SASTRY, S. S.; SASTRY, S. S. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. [S.l.]: CRC press, 1994. Citado nas páginas 24, 30, 32 e 35.
- OH, C.; KIM, M.-S.; LEE, J.-J. Control of a nonholonomic mobile robot using an rbf network. *Artificial Life and Robotics*, Springer, v. 8, n. 1, p. 14–19, 2004. Citado na página 47.
- ORIOLO, G. Wheeled robots. In: *Encyclopedia of Systems and Control*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 1–9. Citado na página 18.
- ORIOLO, G.; LUCA, A. D.; VENDITTELLI, M. Wmr control via dynamic feedback linearization: design, implementation, and experimental validation. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 10, n. 6, p. 835–852, 2002. Citado nas páginas 16, 18 e 72.
- ORTIGOZA, R. S.; MARCELINO-ARANDA, M.; ORTIGOZA, G. S.; GUZMAN, V. M. H.; MOLINA-VILCHIS, M. A.; SALDANA-GONZALEZ, G.; HERRERA-LOZADA, J. C.; OLGUIN-CARBAJAL, M. Wheeled mobile robots: a review. *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, IEEE, v. 10, n. 6, p. 2209–2217, 2012. Citado nas páginas 13 e 15.
- PARK, P.; CHOI, D. J.; KONG, S. G. Output feedback variable structure control for linear systems with uncertainties and disturbances. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 72–79, 2007. Citado na página 17.
- PERRUQUETTI, W.; BARBOT, J.-P. *Sliding mode control in engineering*. [S.l.]: CRC Press, 2002. Citado na página 49.
- PILTAN, F.; SULAIMAN, N.; TALOOKI, I. A.; FERDOSALI, P. Control of ic engine: Design a novel mimo fuzzy backstepping adaptive based fuzzy estimator variable structure control. *International Journal of Robotics and Automation*, v. 2, n. 5, p. 360–380, 2011. Citado na página 18.
- RIGATOS, G. G.; TZAFESTAS, C. S.; TZAFESTAS, S. G. Mobile robot motion control in partially unknown environments using a sliding-mode fuzzy-logic controller. *Robotics and autonomous systems*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 1–11, 2000. Citado na página 66.
- SARKAR, N.; YUN, X.; KUMAR, V. Control of mechanical systems with rolling constraints application to dynamic control of mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, Sage Publications, v. 13, n. 1, p. 55–69, 1994. Citado nas páginas 18, 24, 30 e 31.
- SCIAVICCO, L.; VILLANI, L.; ORIOLO, G.; SICILIANO, B. *Robotics: modelling, planning and control*. [S.l.]: Springer London, 2009. Citado nas páginas 13, 14, 30 e 80.

SHIM, H.-S.; SUNG, Y.-G. Stability and four-posture control for nonholonomic mobile robots. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 20, n. 1, p. 148–154, 2004. Citado na página 16.

SHOJAEI, K.; SHAHRI, A. M.; TARAKAMEH, A. Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Elsevier, v. 27, n. 1, p. 194–204, 2011. Citado nas páginas 18, 24, 32 e 36.

SIEGWART, R.; NOURBAKSHI, I. R.; SCARAMUZZA, D. *Introduction to autonomous mobile robots*. [S.l.]: MIT press, 2011. Citado na página 13.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *et al. Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. Citado nas páginas 62 e 80.

SOLEA, R.; CERNEGA, D. Modeling and performance evaluation for trajectory tracking control of a wheeled mobile robot. In: *1st Proceedings of the 1st Workshop on Energy, Transport, and Environment Control Applications ETECA (FG FILIP, ed.)*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 19.

SOLEA, R.; CERNEGA, D. Sliding mode control for trajectory tracking problem-performance evaluation. In: *Artificial Neural Networks–ICANN 2009*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 865–874. Citado nas páginas 17, 19, 22, 61 e 62.

SOLEA, R.; FILIPESCU, A.; NUNES, U. Sliding-mode control for trajectory-tracking of a wheeled mobile robot in presence of uncertainties. In: *Proceedings of the 7th Asian Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1701–1706. Citado na página 19.

SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. *Robot modeling and control*. [S.l.]: Wiley New York, 2006. Citado nas páginas 32, 46, 47 e 75.

TSAI, L.-W. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado na página 29.

UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. [S.l.]: CRC press, 2009. Citado nas páginas 17, 49, 51, 53, 56 e 57.

UTKIN, V. I.; POZNYAK, A. S. Adaptive sliding mode control. In: *Advances in sliding mode control*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 21–53. Citado na página 63.

WANG, H. An adaptive tracking control approach for nonholonomic mobile robot. In: *Proc. 14th IFAC World Congr.* [S.l.: s.n.], 1999. p. 509–514. Citado nas páginas 15, 16 e 18.

WANG, J.; LU, Z.; CHEN, W.; WU, X. An adaptive trajectory tracking control of wheeled mobile robots. In: IEEE. *Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2011 6th IEEE Conference on*. [S.l.], 2011. p. 1156–1160. Citado na página 18.

WANG, J.; RAD, A. B.; CHAN, P. Indirect adaptive fuzzy sliding mode control: Part i: fuzzy switching. *Fuzzy sets and Systems*, Elsevier, v. 122, n. 1, p. 21–30, 2001. Citado na página 65.

WANG, L.-X. *A course in fuzzy systems*. [S.l.]: Prentice-Hall press, USA, 1999. Citado nas páginas 18 e 66.

WANG, S.; GAO, W. Robustness and invariance of variable structure systems with multiple inputs. In: IEEE. *American Control Conference, Proceedings of the 1995*. [S.l.], 1995. v. 1, p. 1035–1039. Citado na página 96.

WANG, Z.; GE, S.; LEE, T. Adaptive neural network control of a wheeled mobile robot violating the pure nonholonomic constraint. In: IEEE. *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*. [S.l.], 2004. v. 5, p. 5198–5203. Citado na página 18.

WANG, Z.; SU, C.-Y.; LEE, T. H.; GE, S. S. Robust adaptive control of a wheeled mobile robot violating the pure nonholonomic constraint. In: IEEE. *Control, Automation, Robotics and Vision Conference, 2004. ICARCV 2004 8th*. [S.l.], 2004. v. 2, p. 987–992. Citado na página 18.

WU, L.; SHI, P.; GAO, H. State estimation and sliding-mode control of markovian jump singular systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 55, n. 5, p. 1213–1219, 2010. Citado na página 17.

WU, Y.; WANG, B.; ZONG, G. Finite-time tracking controller design for nonholonomic systems with extended chained form. *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 52, n. 11, p. 798–802, 2005. Citado na página 16.

WURM, K. M.; KÜMMERLE, R.; STACHNISS, C.; BURGARD, W. Improving robot navigation in structured outdoor environments by identifying vegetation from laser data. In: IEEE. *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*. [S.l.], 2009. p. 1217–1222. Citado na página 91.

YOUSSEF, E. S. E. *Controle por modo deslizante de robôs móveis sobre rodas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2013. Citado nas páginas 7, 25, 26, 27, 28, 35, 36 e 40.

YU, X.; KAYNAK, O. Sliding-mode control with soft computing: A survey. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 56, n. 9, p. 3275–3285, 2009. Citado na página 17.

ZHANG, Y.; CHUNG, J. H.; VELINSKY, S. A. Variable structure control of a differentially steered wheeled mobile robot. *Journal of intelligent and Robotic Systems*, Springer, v. 36, n. 3, p. 301–314, 2003. Citado na página 19.