

Universidade Estadual de Maringá  
Departamento de Física  
Programa de Pós-Graduação em Física

ANDRÉIA ITAMI DA SILVA

ATIVIDADE PSICOMOTORA, EPIDEMIAS E  
LIDERANÇAS  
COMO SISTEMAS COMPLEXOS

2015

ANDRÉIA ITAMI DA SILVA

ATIVIDADE PSICOMOTORA, EPIDEMIAS E  
LIDERANÇAS  
COMO SISTEMAS COMPLEXOS

Tese de Doutorado submetida ao  
Programa de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Estadual de Maringá

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

S586a Silva, Andréia Itami da  
Atividade psicomotora, epidemias e lideranças  
como sistemas complexos / Andréia Itami da Silva. --  
Maringá, 2015.  
xii, 113 f. : il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Departamento de Física, Programa de Pós-  
Graduação em Física, 2015.

1. Sistemas complexos - Física estatística. 2.  
Análise estatística. 3. Distribuição de  
probabilidade. 4. Detrended Fluctuation Analysis  
(DFA). 5. Aprendizagem psicomotora - Tempo de  
reação. 6. Dengue - Análise estatística - DATASUS.  
7. Doença tropical negligenciada - Análise  
estatística - DATASUS. 9. Liderança - Duração de  
mandato. I. Mendes, Renio dos Santos, orient. II.  
Universidade Estadual de Maringá. Departamento de  
Física. Programa de Pós-Graduação em Física. III.  
Título.

CDD 21.ed. 530.13

AMMA-003009

## ABSTRACT

---

In this thesis, we analyzed complex systems using statistical physics tools applied in empirical data. This work is divided into three chapters. Each chapter is dedicated to a type of complex system. In the first one, we analyzed the reaction times needed by individual during the performance of a psychomotor activity that comprised a large number of tasks performed without interruption, this being a cognitive system. We investigated learning in terms of the mean values and their variability. In a broader scenario, we have shown that learning can be associated with a scale factor acting on the reaction times. In addition to these universal patterns, we have verified that performance not displays persistence, but their differences in the absolute values and signs presented. In the second chapter, in a biological context, we reported a statistical analysis of dengue cases numbers in all Brazilian cities over a period of 12 years. We presented the distributions in the cities and their relationship with the population, and its dependence on longitude and latitude. We have characterized the spatial correlation of the number of dengue cases between pairs of cities and have modeled our results based on the Edwards-Wilkinson equation with a fractional spatial derivative. In the third chapter, we performed a study among countries on the times series composed of the term period of successive political and religious leaders, as an example of social system. We have analyzed the characteristic average time in office, how it varied on the time series and the differences amount the types of leaders and their variabilities. We also studied the distributions of time series comparing to with a power law and a Weibull distribution. And finally, the DFA method was applied and we observed long-range correlations on many cases studied.

**Keywords:** Complex systems. Statistical analysis. Probability distribution. Detrended Fluctuation Analysis (DFA). Reaction time. Psychomotor learning. Dengue. Neglected tropical diseases (NTDs). Leadership.



## RESUMO

---

Nesta tese, analisamos sistemas complexos fazendo uso de ferramentas de física estatística aplicadas em dados empíricos. Este trabalho está dividido em três capítulos. Cada capítulo é dedicado a um tipo de sistema complexo. No primeiro, analisamos o tempo de reação obtido de participantes durante uma atividade psicomotora composta de um grande número de tarefas realizadas sem pausa, sendo esse um sistema cognitivo. Investigamos a aprendizagem em termos dos valores médios e suas respectivas variabilidades. Em um cenário mais amplo, mostramos que a aprendizagem pode estar associada com um fator de escala atuando sobre o tempo de reação. Adicionalmente a esses padrões universais, verificamos que a performance não exhibe persistência, mas que as suas diferenças nos valores absolutos e nos sinais apresentam. No segundo capítulo, em um contexto biológico, reportamos uma análise estatística do número de casos de dengue em todas as cidades brasileiras durante um período de 12 anos. Apresentamos as distribuições nas cidades e sua relação com a população e sua dependência com a longitude e a latitude. Caracterizamos a correlação espacial do número de casos de dengue entre pares de cidades e modelamos nossos resultados com base na equação de Edwards-Wilkinson com uma derivada fracionária espacial. No terceiro capítulo, fizemos um estudo entre vários países sobre a série temporal composta pelo período em exercício de sucessivos líderes políticos e religiosos, como um exemplo de sistema social. Analisamos o tempo médio característico do mandato, como ele varia sobre a série temporal e as diferenças entre os tipos de lideranças e suas variabilidades temporais. Também, estudamos as distribuições das séries temporais, comparando com uma lei de potência e com uma distribuição de Weibull. E, finalmente, aplicamos o método do DFA e observamos correlações de longo alcance em vários dos casos estudados.

**Palavras-chave:** Sistemas complexos. Análise estatística. Distribuição de probabilidade. Detrended Fluctuation Analysis (DFA). Tempo de reação. Aprendizagem psicomotora. Dengue. Doença tropical negligenciada. Liderança.

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes, por toda ajuda, orientação, conhecimento e paciência.

Ao Dr. Fernando José Antonio, por sua importante participação na minha vida acadêmica e pessoal.

Ao Dr. Haroldo Valentin Ribeiro, por compartilhar seu conhecimento de forma tão generosa.

Ao Dr. Marcelo del Castillo-Mussot, por sua sugestão inspiradora.

À Ms. Mayumi Yoshikawa, da Fundação Japão, por suas informações preciosas e instrutivas.

Ao Renato e à Lígia, pela imensa ajuda.

À minha mãe, Kikue, por seu amor e apoio.

À minha irmã, Adriana, por sua paciência.

À Akiko Nisida e à Mônica, pelos serviços sempre prestativos da secretaria.

A todos meus colegas do *Complex Lab*, pelas sugestões, ideias, ajuda, conversas produtivas e conversas descontraídas.

A todas as pessoas que colaboraram, apoiaram esses anos de estudo e pesquisa, que doaram seu tempo, sua atenção e sua dedicação.

Também agradeço especialmente a todos que vieram em apoio nos momentos críticos, eu levaria algumas páginas para citar todos os nomes.

Sem a ajuda de todas essas pessoas, não teria sido possível realizar este trabalho.

E, finalmente, agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

*Dedico este trabalho à memória do meu pai, José Rafael,  
e ao sonho de um mundo melhor.*

# SUMÁRIO

---

INTRODUÇÃO	1
<b>i COGNIÇÃO, EPIDEMIAS E LIDERANÇA</b>	<b>5</b>
1 ATIVIDADE PSICOMOTORA	6
1.1 Introdução	6
1.2 Dados	8
1.3 Análise dos dados e resultados	9
1.3.1 Determinando a escala da aptidão	10
1.3.2 Padrões universais	13
1.3.3 Efeito de memória	19
1.4 Discussão e conclusões	22
2 CASOS DE DENGUE NO BRASIL	25
2.1 Introdução	25
2.2 Dados	27
2.3 Resultados e discussões	27
2.3.1 Perfil dos casos de dengue por ano	28
2.3.2 Casos de dengue versus população	30
2.3.3 Correlação espacial dos casos de dengue <i>per capita</i>	34
2.3.4 Modelagem da correlação espacial	37
2.3.5 Função de correlação espacial	39
2.4 Conclusões	42
3 LÍDERES MUNDIAIS	44
3.1 Introdução	44
3.2 Dados	47
3.3 Análise dos dados	47
3.3.1 Tempo de vida médio de mandato	51
3.3.2 Distribuição de probabilidade	54
3.3.3 (Auto)correlação na sucessão de lideranças	56
3.4 Conclusões	59

CONCLUSÕES	63
ii APÊNDICE	67
A PROBABILIDADE	68
A.1 Regras elementares	68
A.2 Função densidade de probabilidade	69
A.3 Valores médios e desvio padrão	69
A.4 Algumas distribuições	71
A.4.1 Distribuição exponencial	71
A.4.2 Distribuição de Laplace	71
A.4.3 Distribuição Gaussiana	73
A.4.4 Distribuição ex-Gaussiana	73
A.4.5 Distribuição de Weibull	75
A.4.6 Distribuição tipo lei de potência	75
A.5 Histogramas	76
A.5.1 Procedimento de Wand	78
A.6 Método de máxima verossimilhança	79
A.7 Bootstrap	80
B CORRELAÇÃO E DFA	84
B.1 Função de correlação	84
B.2 Detrended Fluctuation Analysis	85
B.2.1 A construção do método	86
C GRÁFICOS	90
C.1 Gráficos do <a href="#">Capítulo 1</a> : Atividade Psicomotora	90
C.2 Gráficos do <a href="#">Capítulo 3</a> : Líderes Mundiais	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1.1	Esquema utilizado na atividade psicomotora.	9
Figura 1.2	Média móvel de $T$ de um participante específico.	11
Figura 1.3	A média de $T$ , $\mu$ , de cada pessoa.	11
Figura 1.4	A razão do desvio padrão $\sigma$ e da média de $T$ , $\mu$ , de cada participante.	13
Figura 1.5	Distribuições de $T_1$ e $T_2$ de um participante.	14
Figura 1.6	Colapso das distribuições de $T_1/\mu_1$ e $T_2/\mu_2$ de um participante.	15
Figura 1.7	Média móvel de $\Delta T$ para um participante.	16
Figura 1.8	Distribuição de $\Delta T$ para um participante.	17
Figura 1.9	Gráfico de espalhamento ilustrando o parâmetro $\mu$ da distribuição de Laplace de $\Delta T_2$ como função dos parâmetros de $\Delta T_1$ .	17
Figura 1.10	Gráfico de espalhamento ilustrando o parâmetro $\beta$ da distribuição de Laplace de $\Delta T_2$ como função dos parâmetros de $\Delta T_1$ .	18
Figura 1.11	Colapso das distribuições da densidade de probabilidade dos incrementos normalizados ( $\Delta\tilde{T}$ ) nos intervalos de tempo $\Delta T_1$ e $\Delta T_2$ .	18
Figura 1.12	Gráfico log-log da função de flutuação da <a href="#">Equação 1.7</a> para um participante específico.	20
Figura 1.13	Expoente de Hurst $h$ das séries dos $T$ 's de cada participante no primeiro e no segundo turno.	21
Figura 1.14	Histograma da PDF do intervalo de retorno $\tau$ .	21
Figura 1.15	Expoente de Hurst $h$ das magnitudes e sinais dos incrementos $\Delta T$ .	22
Figura 2.1	Distribuição espacial dos casos de dengue no Brasil.	29

- Figura 2.2 Dependência dos casos de dengue das coordenadas geográficas das cidades. 30
- Figura 2.3 Distribuição em escala log-linear dos resíduos próximos da tendência média descrita pela curva de interpolação. 31
- Figura 2.4 Incidência de dengue nas cidades. Função densidade de probabilidade  $P(z_{i,t})$  para o número total de casos de dengue por ano. 32
- Figura 2.5 Incidência de dengue nas cidades. Evolução temporal do expoente  $\gamma_t$  da lei de potência para o período de 2001 a 2012. 32
- Figura 2.6 Alometria entre os casos de dengue e a população e distribuição dos resíduos. 33
- Figura 2.7 Decaimento da correlação espacial dos casos de dengue. 35
- Figura 2.8 Correlação espacial mostrada em escala log-linear para o número total de casos de dengue nas cidades brasileiras entre 2001 e 2012. 36
- Figura 2.9  $C(r)$  multiplicado por uma exponencial. 37
- Figura 3.1 Esquema comparando o período dos diversos tipos de lideranças estudados neste trabalho ao longo da história. 50
- Figura 3.2 Média móvel de  $T$  em escala mono-log mostrando quatro exemplos de crescimento no tempo médio. 51
- Figura 3.3 Média móvel de  $T$  em escala mono-log mostrando as quatro lideranças com tempo médio em declínio que estudamos neste trabalho. 52
- Figura 3.4 Tempo médio  $\mu$ , em dias, de ocupação da liderança dos 57 países analisados. 53
- Figura 3.5 A razão do desvio padrão e da média de  $T$  para todas as lideranças. 54
- Figura 3.6 PDF das lideranças em escala log-log., usando a variável normalizada  $\tilde{T} = \frac{T}{\mu}$ . 55
- Figura 3.7 PDF das lideranças em escala log-log. 56
- Figura 3.8 PDF das primeiras diferenças das lideranças em escala mono-log. 57

Figura 3.9	Expoente de Hurst $h$ obtido via DFA para o tempo de mandato de líderes. 58
Figura A.1	Distribuições exponenciais com $\lambda = 0,5, 1$ e $2$ . 72
Figura A.2	Distribuições de Laplace com $\mu = 0$ e $\beta = 0,5, 1$ e $2$ . 72
Figura A.3	Distribuições Gaussianas com $\mu = 0$ e $\sigma = 0,75, 1$ e $2$ . 73
Figura A.4	Distribuições de Weibull em escala normal com $\beta = 2$ e $\alpha = 0,5, 2$ e $4$ . 75
Figura A.5	Distribuições tipo lei de potência em escala log-log para $\alpha = 0,5, 1$ e $2$ . 76
Figura A.6	Exemplos de histogramas para o mesmo conjunto de dados usando diferentes números de janelas. 77
Figura A.7	Exemplo de histograma construído usando o procedimento de Wand. 79
Figura A.8	Exemplos de histogramas construídos usando diferentes procedimentos. 79
Figura A.9	Histograma da distribuição da <i>skewness</i> , valores para 1000 reamostragens. 83
Figura B.1	Série de dados com $n = 1000$ , ilustrando os procedimentos envolvidos no DFA. 88
Figura B.2	O DFA para uma série de dados correlacionados. 89
Figura C.1	Média móvel de $T$ de cada participante. 90
Figura C.2	Média móvel de $T$ de cada participante. 91
Figura C.3	Comparação das distribuições de $T_1$ e $T_2$ com o colapso das distribuições de $T_1/\mu_1$ e $T_2/\mu_2$ . 92
Figura C.4	Comparação das distribuições de $T_1$ e $T_2$ com o colapso das distribuições de $T_1/\mu_1$ e $T_2/\mu_2$ . 93
Figura C.5	Comparação das distribuições de $T_1$ e $T_2$ com o colapso das distribuições de $T_1/\mu_1$ e $T_2/\mu_2$ . 94
Figura C.6	Média móvel de $T$ em escala log-normal das lideranças. 95
Figura C.7	Média móvel de $T$ em escala log-normal das lideranças. 96
Figura C.8	Média móvel de $T$ em escala log-normal das lideranças. 97



## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 3.1	Líderes mundiais.	48
Tabela 3.2	Expoente de Hurst.	60

## INTRODUÇÃO

---

Sistemas macroscópicos são formados por muitas partes (partículas) com um grau maior ou menor de interação mútua ou com agentes externos. Dependendo das circunstâncias envolvidas, várias abordagens podem ser usadas nos estudos desses sistemas. Por exemplo, conceitos de termodinâmica clássica, incluindo suas equações de estado fenomenológicas, são empregados no estudo de sistemas em equilíbrio térmico [1]. Uma das muitas aplicações da termodinâmica clássica é a investigação de transições de fase, tanto de primeira quanto de segunda ordem [1, 2]. Nesse último tipo de transição de fase, em particular, são comuns, entre outros, os conceitos de invariância de escala, leis de potência e universalidade. Todas essas vertentes também são objeto de estudo da termodinâmica estatística (mecânica estatística do equilíbrio), porém partindo da interação entre as partes que compõem o sistema [3, 4, 5].

Além do contexto da termoestatística do equilíbrio, têm-se as situações de não equilíbrio. Nesse caso, é comum nos depararmos com termos como difusão, cadeias de Markov, equação de Langevin, equação de Fokker-Planck, equação de Boltzmann, resposta linear, entre outros [6, 7]. Muitos estudos de termoestatística do não equilíbrio envolvem a evolução de sistemas que, em algum sentido, estão perto do equilíbrio ou podem chegar a ele. E, assim, muitos dos conceitos de sistemas em equilíbrio termodinâmico, como citamos anteriormente, também estão presentes na discussão de não equilíbrio.

Tanto no estudo de mecânica estatística do equilíbrio quanto no do não equilíbrio, muito tem sido feito por meio de simulações numéricas [8]. Tais procedimentos estão cada vez mais acessíveis devido ao aumento constante das facilidades computacionais. Deve ser ressaltado que, nas áreas em que procedimentos perturbativos (analíticos), dão bons resultados, tal como em gases diluídos, uma abordagem numérica não é tão importante. Por outro lado, para líquidos, por exemplo, em que há poucos resultados exatos e que muitos desenvolvimentos analíticos não estão sob controle, é de grande valia o uso de simulações numéricas. Em particular, métodos de Monte Carlo são largamente usados em simulações numéricas. Um tipo de abordagem nu-

mérica bem direta é a dinâmica molecular, pois pode ser usada para investigar sem rodeios a evolução temporal de sistemas compostos de várias partes que interagem entre si.

Não deve haver dúvidas que, na física atual, há uma grande variedade de conceitos e técnicas empregadas no estudo desses sistemas, ferramental esse que vai desde métodos analíticos, passando por numéricos, até experimentais. Se, formalmente, imaginarmos que não só os sistemas físicos compostos por muitas partes podem ser estudados empregando conceitos e técnicas de física, obtemos um espectro muito amplo de situações para serem investigadas. Essa abordagem incluiria, por exemplo, os mais diversos tipos de sistemas biológicos e sociais. Essa vertente ampla de sistemas conectados por alguma forma de inter-relação é comum ser referida genericamente como sistemas complexos [9, 10].

De uma maneira mais geral, estudar sistemas complexos pode ser uma tarefa interdisciplinar e/ou multidisciplinar. Apesar de não haver uma definição clara de sistemas complexos, características como emergência de padrões a partir da interação entre as partes, transições de fase, universalidade, adaptabilidade, auto-organização, efeitos não lineares, retroalimentação, leis de potência e invariância de escala são recorrentes em estudos desses sistemas.

A presente tese reporta estudos de sistemas complexos, a exemplo de outras teses em português relacionadas ao tema [11, 12, 13, 14]. Mais precisamente, este estudo foca três cenários: uma atividade psicomotora, epidemia de dengue no Brasil e o tempo em exercício de lideranças mundiais. No caso da atividade psicomotora, os dados foram obtidos a partir de experimentos. Quanto à epidemia de dengue no Brasil, os dados informando o número de casos foram adquiridos, via internet, do banco de dados do Sistema Único de Saúde (DATASUS). No que se refere ao tempo de mandato de líderes políticos e religiosos, os dados foram conseguidos das mais variadas formas, por meio de livros, enciclopédias e fontes da internet. De posse de toda essa informação, fizemos análises dos dados, visando identificar padrões (características) dos sistemas e, em geral, comparando com alguns modelos.

No [Capítulo 1](#), apresentaremos nossos resultados a partir dos dados da atividade psicomotora. Iniciaremos o capítulo com uma breve introdução teórica sobre o tema, seguido por uma exposição do nosso experimento. Essa atividade, realizada em dois blocos e em dias diferentes, compreendeu um grande número de tarefas que, durante

o período de experimento, foram executadas ininterruptamente. Os dados consistem no tempo de reação de cada indivíduo ao realizar cada tarefa dentro dos blocos. Faremos uma comparação entre esses dois blocos de atividades para avaliarmos numericamente o fator de aprendizagem, diretamente obtido por meio do tempo entre as tarefas. Investigaremos a aprendizagem em termos dos valores médios e de suas respectivas variabilidades. Em um cenário mais amplo, mostraremos que a aprendizagem pode ser associada com um fator de escala agindo sobre o tempo de reação. Além da melhoria da aptidão, investigaremos a forma da distribuição do tempo de reação e se a prática afeta, de algum modo, a sua forma. Analisaremos as diferenças no tempo de reação depois da prática e se elas seguem algum tipo de regra. Em adição a essa busca por padrões universais, verificaremos se a aptidão da performance exhibe persistência quando investigamos diretamente as séries dos tempos de reação, dos valores absolutos e dos sinais.

No [Capítulo 2](#), estudaremos a epidemia de dengue no Brasil. Assim, como no capítulo anterior, iniciaremos introduzindo, sucintamente, os estudos sobre a dengue encontrados na literatura e a importância em realizá-los. Sendo a dengue um mal negligenciado, fazendo parte de um grupo de doenças infecciosas crônicas, que ocorrem principalmente em áreas rurais e urbanas pobres de países menos favorecidos. É a doença viral via vetor com maior predominância a afetar humanos. Estimativas revelam que as epidemias de dengue, em regiões tropicais e subtropicais, cresceram por volta de trinta vezes ao longo de cinquenta anos no mundo todo, alcançando o alarmante nível de 100 milhões de novas infecções por ano e colocando em risco mais de 40% da população humana. Os dados da ocorrência dessa doença no Brasil se tornam de grande interesse pelas dimensões do nosso país e seu clima tropical. Nesse cenário, buscaremos investigar padrões estatísticos sobre a propagação espacial das epidemias de dengue no Brasil, incluindo sua evolução temporal e correlação espacial. Também, objetivaremos quantificar a relação de novos casos com a localização geográfica e o número desses casos *per capita* das cidades afetadas em função da distância entre elas. Ainda, faremos algumas considerações sobre este último aspecto via um modelo inspirado em crescimento de superfície.

No [Capítulo 3](#), investigaremos as séries temporais compostas pelo período em exercício de sucessivos líderes políticos e religiosos de diversos países. Iniciaremos o capítulo com uma breve discussão sobre uma amostra do vasto campo de estudos

qualitativos em lideranças e seguiremos com nossa abordagem quantitativa. Analisaremos o tempo médio característico do mandato, como ele variou ao longo do tempo e as diferenças entre os tipos de lideranças e a sua variabilidade temporal. Também, investigaremos as distribuições dessas séries temporais, a fim de encontrar possíveis padrões em comum entre elas e outras séries estudadas na literatura. A seguir, avaliaremos se há presença de correlação de longo alcance nas séries das sucessões de lideranças.

Por fim, apresentaremos nossas **Conclusões**. Em seguida, há dois apêndices com dupla finalidade: uma é a apresentar de maneira unificada a notação empregada nesta tese e a outra é rever, de maneira breve, alguns conceitos e técnicas que são empregados ao longo desta pesquisa. No **Apêndice A**, iremos rever, de maneira muito breve, alguns aspectos de probabilidade e estatística: noções gerais; distribuições de probabilidade, entre elas, exponencial, de Laplace, Gaussiana, tipo lei de potência e ex-Gaussiana; histogramas e escolha do tamanho de suas janelas; e *bootstrap*. No **Apêndice B**, também de forma sucinta, apresentaremos (auto) correlação e o *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) para mensurar correlações de longo alcance.

Parte I

COGNIÇÃO, EPIDEMIAS E LIDERANÇA

Neste capítulo, analisamos o tempo de reação que os indivíduos levaram durante a execução de uma atividade psicomotora composta por um grande número de tarefas realizadas sem interrupção [15]. Ao compararmos dois diferentes blocos de atividades, avaliamos numericamente o fator de aprendizagem, diretamente obtido por meio do tempo entre tarefas. Investigamos a aprendizagem em termos dos valores médios e suas respectivas variabilidades. Em um cenário mais amplo, mostramos que a aprendizagem pode ser associada a um fator de escala agindo sobre o tempo de reação. Além da melhoria da aptidão, identificamos que o tempo de reação tem uma distribuição não simétrica, enquanto que suas diferenças são distribuídas simetricamente como uma distribuição de Laplace cuja largura diminui com a prática. Encontramos que as diferenças no tempo de reação depois da prática se tornam menores, obedecendo a uma regra linear. Em adição a esses padrões universais, verificamos que a aptidão da performance não exhibe persistência quando investigamos diretamente a série dos tempos de reação, mas suas diferenças exibem comportamento persistente para a série dos valores absolutos e comportamento antipersistente para a série dos sinais.

### 1.1 INTRODUÇÃO

É possível identificar um efeito positivo da prática de muitas atividades em situações cotidianas. Exemplos notáveis são os processos de adquirir novas habilidades, como aprender a ler e escrever, caminhar, andar de bicicleta e praticar qualquer tipo de esporte ou jogo. Sendo um fato notório, o intervalo de tempo necessário para completar uma tarefa diminui com a prática, seguindo uma taxa cada vez mais baixa enquanto a prática contínua [16, 17, 18]. Tradicionalmente, pesquisadores do campo da aquisição de habilidades quantificam o efeito da prática principalmente em função da redução do intervalo de tempo gasto para completar uma dada tarefa [19, 20, 21, 22].

Muitos experimentos têm sido feitos ao longo dos anos com o objetivo de investigar o processo de aprendizagem. O foco tem sido tarefas divididas em blocos com curto tempo de execução e períodos de pausa para descanso. Uma não extensiva, mas representativa, lista de exemplos são: apertar botões, atividade usando simulador de ski [23, 24]; traçar figuras geométricas em um espelho [25], tempo de reação na tarefa das 1023 escolhas [26]; tarefa alfanumérica no estudo da curva de aprendizagem [27]; tarefa com diferentes graus de complexidade no estudo da diferença de aprendizagem relacionada à idade [28]; tarefa de tempo de reação de quatro escolhas fáceis na investigação da prática muito prolongada [29]; movimento de um dedo ou apontador de um lugar para outro no estudo da Lei de Fitts [30]; pessoas equilibrando bastões [31]; velocidade ao empilhar copos em pirâmides usando as duas mãos em um estudo sobre aprendizagem motora em crianças com paralisia cerebral unilateral [32]; e leitura de texto no estudo de fluência na leitura em adultos [33].

Pesquisadores frequentemente têm empregado tarefas em blocos com o objetivo de remover algumas alterações aleatórias e transitórias que se supõe existir entre uma tarefa e outra, enquanto enfatiza as alterações persistentes ou a tendência global de aprendizagem sobre as tarefas [34]. Em contraste, uma perspectiva amplamente aceita no âmbito da aprendizagem psicomotora é que esta envolve não apenas um fator geral, mas sim um grupo de subfatores [35]. Nesse tipo de trabalho, o procedimento de agrupar as tarefas em blocos podem, eventualmente, modificar ou mascarar características intrínsecas, tais como tendências persistentes e mudanças transientes [34, 36].

O objetivo deste estudo é investigar a tendência do desempenho em uma prática muito prolongada composta por blocos de tarefas, realizadas sem pausas, com a finalidade de avaliar em qual nível o fator de aprendizagem está relacionado com os dados, ou seja, se ele está relacionado apenas superficialmente com o declínio do tempo de reação ou se está arraigado de modo mais profundo. Assim, chegamos à seguinte questão: Seria apenas um fator de escala ou algo que age mais profundamente causando um distúrbio na forma da distribuição de probabilidade e alterando a presença de correlações?

Utilizamos blocos muito longos (1001 tarefas) e obtivemos o tempo entre eventos, *Tempo de Reação* (T) de tarefa a tarefa, como uma abordagem alternativa para a vasta literatura de blocos curtos de tarefa [19, 20, 22, 26, 27, 28]. Frequentemente, empre-



gamos métodos típicos em física estatística de sistemas complexos para analisar os dados. Mais precisamente, focamos na distribuição e na tendência permanente (ou efeito de memória) na série temporal de  $T$  e na série da sua primeira diferença. O comportamento persistente na série temporal é caracterizado pelo método *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA), empregado por Peng e coautores [37] em seu estudo sobre as sequências de DNA e que é tratado com mais detalhes no [Apêndice B](#). Esse método tem sido aplicado no estudo de muitos contextos como sincronização e processo de coordenação no movimento humano [38], na atividade em redes sociais [39], na música [40], no jogo de xadrez [41, 42] e nos dados do mercado financeiro [43, 44, 45].

Na próxima seção, faremos a apresentação dos métodos utilizados para a obtenção dos dados, além do perfil dos participantes que realizaram a atividade.

## 1.2 DADOS

Os dados são de uma atividade psicomotora realizada por participantes usando a estrutura representada na [Figura 1.1](#). Um total de 14 pessoas adultas e saudáveis (8 homens e 6 mulheres) com idade entre 21 e 38 anos (média de  $25,9 \pm 1,4$  anos) participaram dessa atividade. Todos os participantes eram destros, tinham acuidade visual normal ou corrigida e não tiveram treino preliminar.

Eles se sentaram diante da estrutura segurando um recipiente com 1001 lentilhões<sup>1</sup> sobre suas pernas. Os lentilhões têm forma simétrica, como mostra o detalhe da [Figura 1.1](#). Cinco recipientes plásticos foram dispostos sobre a mesa em uma sequência pré-definida de cores. Então, os participantes foram orientados a separar os lentilhões seguindo essa sequência. Cada pessoa deveria depositar os lentilhões um por vez dentro do recipiente com sua respectiva cor. Isso deveria ser feito da forma mais rápida e precisa possível. Os participantes executaram dois blocos dessas atividades em dias diferentes. Cada bloco consistia em 1001 tarefas e o único *feedback* fornecido aos participantes foi o tempo gasto na execução do bloco inteiro.

---

<sup>1</sup> A palavra 'lentilhões' aqui empregada se refere a contas de acrílico com formato oval e achatado usado como pedraria em artesanato. Os lentilhões recebem esse nome devido ao seu formato e tamanho, numa alusão à leguminosa. Contas com a mesma forma, mas menores são chamadas de lentilhas.

É válido salientar que o exercício empregou uma sequência sem repetição de cores para evitar a indução de qualquer tendência devido à proporção das cores. Além disso, um número grande de recipientes tornaria desigual o tempo necessário que cada participante levaria para alcançar cada um deles, por isso, optamos pelo uso de apenas cinco cores e cinco recipientes.

Os dados coletados foram o som produzido por cada lentilhão ao ser depositado em seu próprio recipiente, o qual foi gravado por um microfone padrão na frequência de 44,1 kHz e depois convertido em dados numéricos. A partir do som capturado, foi identificado o intervalo de tempo  $T$  entre duas colocações sucessivas de lentilhões, e a sequência desses intervalos de tempo formou uma série temporal para cada bloco.

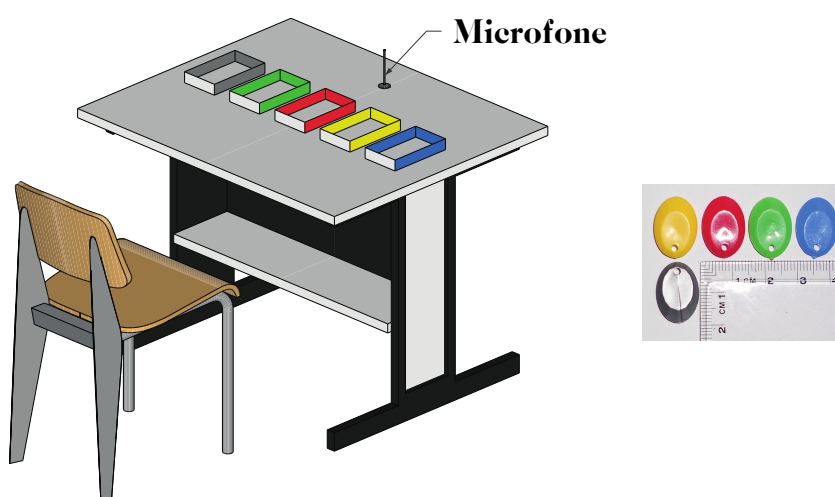


Figura 1.1: **Esquema utilizado na atividade psicomotora.** No detalhe, à direita, uma foto ilustrando as dimensões dos lentilhões e as cinco cores usadas na atividade.

Na seção a seguir, descreveremos quantitativamente os dados utilizados, sua análise e os resultados encontrados.

### 1.3 ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Inicialmente, analisamos o tempo  $T$ . Uma vez que a atividade envolve o fator de treinamento, é importante comparar as séries temporais dos dois blocos de cada participante, representando a série temporal dos  $T$ 's de cada turno como  $T_1$  e  $T_2$  respectivamente.

Dividimos esta seção em três subseções em que abordaremos a determinação da escala da aptidão na execução da atividade, apresentação preliminar dos dados e o estudo dos padrões universais e do efeito de memória.

### 1.3.1 Determinando a escala da aptidão

A [Figura 1.2](#) ilustra o tempo de reação de um participante específico<sup>2</sup>. Como o tempo de reação tem grandes flutuações, aplicamos uma técnica de média móvel [46] para suavizar a curva e facilitar a visualização do tempo de reação nos dois blocos. Assim, cada ponto da [Figura 1.2](#) não representa o tempo entre a colocação de um lentilhão e o anterior, mas sim a média sobre 100 desses tempos. Note que a curva azul, correspondente a  $T_1$  (o tempo de reação no primeiro bloco), está sempre acima da curva vermelha, a qual corresponde a  $T_2$  (o tempo de reação do segundo bloco). Em outras palavras, o tempo médio de reação se torna menor com a prática. Naturalmente, picos e vales ocorrem frequentemente em uma sequência muito longa de tarefas e podemos associá-los a alterações aleatórias e/ou fatores como fadiga [47], perda momentânea de atenção [48] e ao próprio processo de escolha de cada conta [49]. No contexto das séries temporais, a presença de tais picos e vales pode ser vista como uma indicação de processo não estacionário.

Como destacamos anteriormente, quando comparamos os dois blocos de atividades, os participantes seguiram a tendência de gastar menos tempo no segundo bloco, conforme ilustra a [Figura 1.3](#), que mostra  $\mu = \langle T \rangle$ , a média aritmética do tempo em segundos gastos para cada conta, e as barras de erro que correspondem ao *bootstrap*<sup>3</sup> de 99% no intervalo de confiança<sup>4</sup>. A curva azul (círculos) é uma medida de  $\mu$  calculada de  $T_1$  para todos os participantes, e a curva vermelha (quadrados) é uma medida de  $\mu$  calculada de  $T_2$  para todos os participantes. Observamos que 86% dos participantes gastaram menos tempo no segundo turno. Além disso, 67% deles tiveram uma redução relativa de mais de 10%. É evidente, pela barra de erro, que

<sup>2</sup> Os gráficos da média móvel de  $T$  para todos os participantes pode ser visto no [Apêndice C](#).

<sup>3</sup> O *bootstrap* é uma técnica de reamostragem reconhecida por prover intervalos de confiança para variáveis mesmo quando as flutuações têm perfil não gaussiano [50] - para mais detalhes veja [Apêndice A](#).

<sup>4</sup> O intervalo de confiança significa que o intervalo avaliado corresponde a um dado nível de confiança da medida [51].

pelo menos 79% dos participantes melhoraram sua habilidade apesar de qualquer tendência de erro em estimá-la.

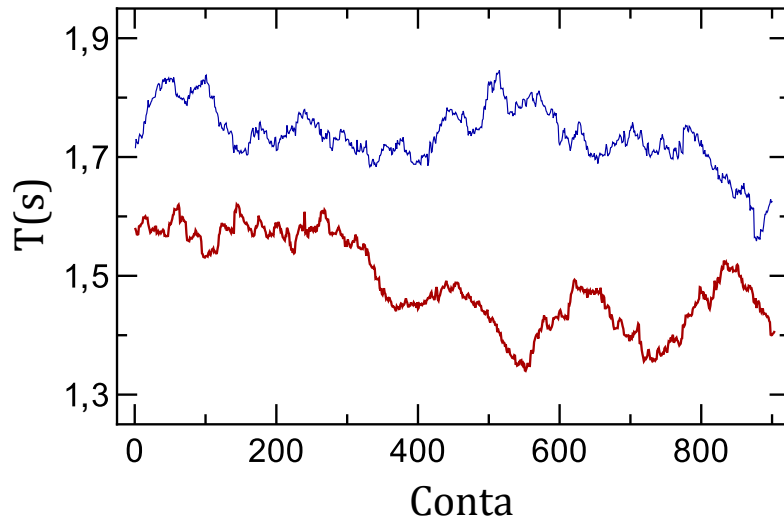


Figura 1.2: Média móvel de  $T$  de um participante específico no primeiro (curva superior; azul) e no segundo bloco (curva inferior; vermelha) usando janelas móveis de tamanho 100.

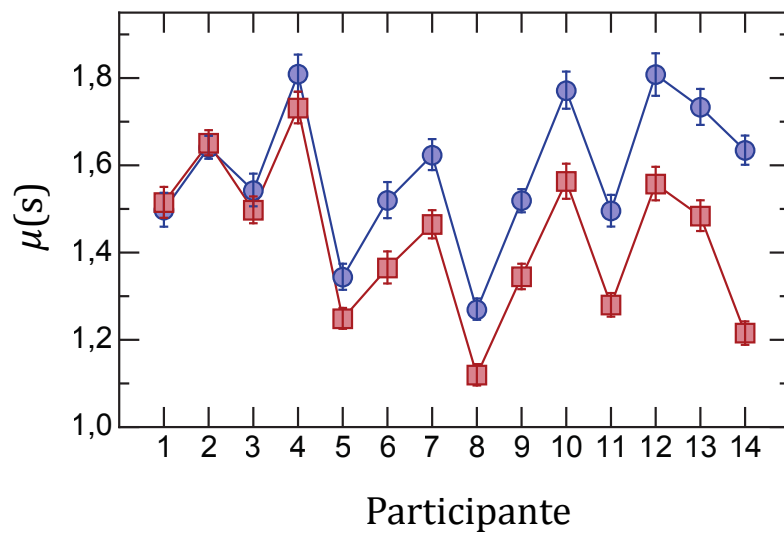


Figura 1.3: A média de  $T$ ,  $\mu$ , de cada pessoa no primeiro (círculos azuis) e no segundo bloco (quadrados vermelhos), indicando uma redução no tempo médio. Os participantes foram ordenados seguindo a diferença crescente de  $\mu_1 - \mu_2$ , e as barras de erro correspondem ao *bootstrap* de 99% no intervalo de confiança.

Outra quantidade relacionada com a aprendizagem motora é o desvio padrão  $\sigma$  da série temporal dos  $T$ 's. Essa quantidade provém uma medida de quanto a série temporal se dispersa, o que é muito apropriado para analisar curvas de aprendizagem como uma medida de habilidade/precisão. Sabe-se que um pequeno desvio padrão indica que os dados tendem a estar muito próximos do valor médio e, também, uns dos outros; enquanto um desvio padrão grande revela que os dados estão muito dispersos em comparação com o valor médio e, também, com o valor entre eles. Embora haja uma tendência sistemática de decaimento de 86% dos participantes, as barras de erro não nos permitem chegar a resultados conclusivos para a maioria dos participantes.

Uma extensão natural para os resultados previamente mostrados é investigar em qual proporção o treino influencia não apenas as quantidades  $\mu$  e  $\sigma$ , mas também a sua proporção (ou seja, a razão  $\sigma/\mu$ ), que é a *variabilidade relativa*. De fato, encontramos que a variabilidade segue um padrão universal para cada participante na forma:

$$\frac{\sigma}{\mu} = \text{constante.} \quad (1.1)$$

É evidente que a variabilidade é adimensional. Ademais, em média, dentro do intervalo de confiança, ela é constante para cada participante, independentemente do turno da atividade.

A [Figura 1.4](#) ilustra uma comparação entre o primeiro e o segundo turno de cada participante, além de seus respectivos valores médios com o *bootstrap* de 99% no intervalo de confiança. É notável que as médias colapsam em praticamente todo o intervalo de confiança. Em particular, um  $T$ -teste<sup>5</sup> indica que a hipótese nula de as curvas serem iguais poderia não ser rejeitada a um nível de confiança de 99% ( $p$ -valor 0,77). O resultado é consistente com a literatura para algumas atividades, como contagem não verbal em humanos [52] e experimentos de cognição numérica em indígenas [53]. Além de apontar na direção de um mecanismo universal, esse cenário revela que o fator de aprendizagem também pode ser visto como um fator de escala na série temporal do tempo de reação. Uma preocupação nesse ponto, não obstante, é distinguir se a reescala do processo de aprendizagem perturba profundamente as

---

<sup>5</sup> O  $T$ -teste realiza um teste de hipótese nula, em que uma hipótese padrão é testada contra um conjunto de dados, e o teste mostra se a hipótese é compatível com ele ou não [51].

características da série temporal, por exemplo, se ela altera a forma das distribuições do tempo de reação ou mesmo se introduz diferentes padrões de correlação.

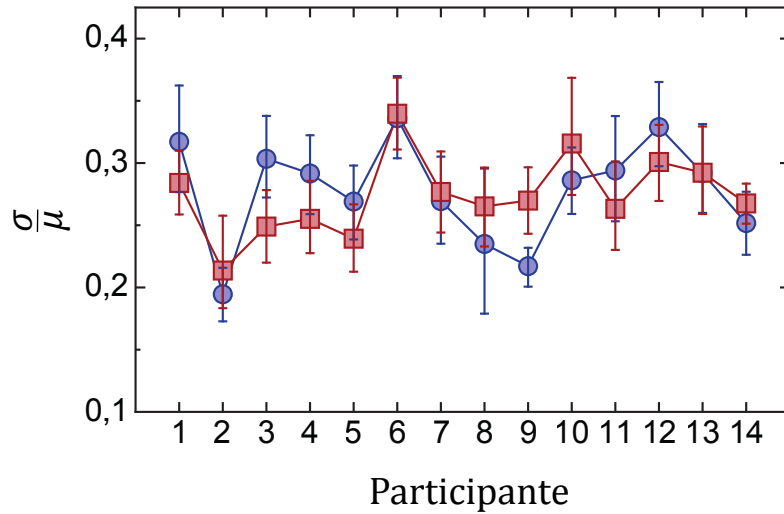


Figura 1.4: A razão do desvio padrão  $\sigma$  e da média de  $T$ ,  $\mu$ , de cada participante no primeiro (círculos azuis) e no segundo bloco (quadrados vermelhos) mostram que a taxa é constante para cada participante quando a barra de erro é levada em consideração. Os participantes foram ordenados seguindo a diferença crescente de  $\mu_1 - \mu_2$ , e as barras de erro correspondem a 99% no intervalo de confiança.

### 1.3.2 Padrões universais

Além da variabilidade (Equação 1.1), outros padrões podem ser identificados a partir do nosso experimento com os lentilhões.

A série temporal dos  $T$ 's é sempre composta por valores positivos cujas distribuições são assimétricas e com um pico positivo evidente por volta de  $\mu$ . A distribuição de  $T_1$  e  $T_2$  de um participante específico está ilustrada na Figura 1.5. Curvas similares podem ser encontradas na literatura e são tipicamente ajustadas com uma convolução de uma distribuição exponencial com uma distribuição Gaussiana [54, 55] (veja Apêndice A). Essa abordagem é intuitivamente plausível, já que representa um mistura de uma curva de aprendizagem com flutuações aleatórias. Contudo, essa família de curvas parece não ser suficientemente universal para ajustar todos os nossos dados. É válido notar que todas as curvas empíricas são bem distintas, mesmo quando

comparamos os dois blocos de um mesmo participante, como pode ser visto na [Figura 1.5](#). Um teste estatístico, como o Cramér-von Mises<sup>6</sup>, corrobora essa suposição com um nível de confiança de 99% para 98% das combinações. Apesar desses resultados quantitativos, qualitativamente, a forma das distribuições parecem universais.

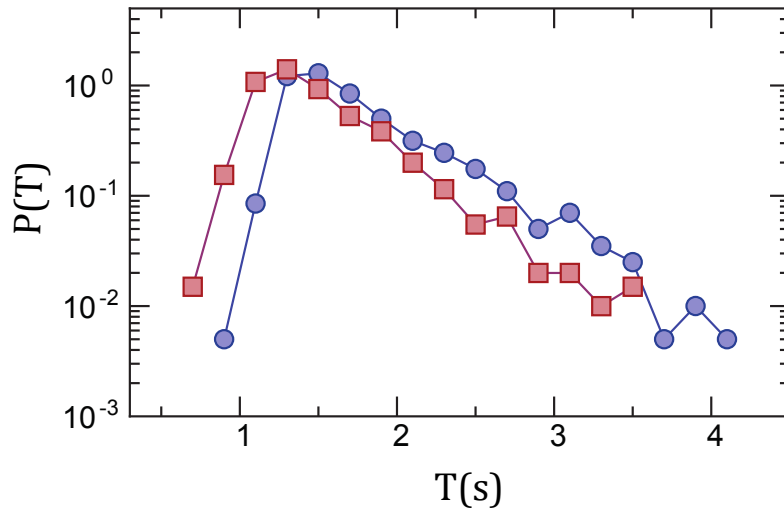


Figura 1.5: **Distribuições de  $T_1$  e  $T_2$  de um participante** no primeiro (círculos azuis) e segundo bloco (quadrados vermelhos) apresentados em escala mono-log.

Depois de reescalar os dados por múltiplos de suas médias, mais de 80% das curvas interparticipantes parecem não pertencer à mesma distribuição. Em contraste, quando comparadas as duas distribuições do mesmo participante, pelo menos 50% das curvas parecem obedecer a mesma distribuição (veja [Figura 1.5](#) e [Figura 1.6](#)). Nesse sentido, uma conclusão direta é que cada participante possui sua própria distribuição, cujos parâmetros são mais sensíveis à aprendizagem e parecem estar relacionados com o tempo médio de reação.

Vamos considerar, em contraste com a literatura, a série das primeiras diferenças de  $T$ , definida como

$$\Delta T(t) = T(t) - T(t - 1). \quad (1.2)$$

Uma ilustração desse tipo de dado pode ser vista na [Figura 1.7](#). Para esse exemplo, a distribuição da primeira diferença de um participante é apresentada na [Figura 1.8](#).

<sup>6</sup> O teste Cramér-von Mises é uma ferramenta conveniente para julgar o quão apropriado é um ajuste de uma função de distribuição à distribuição ajustada [56]. Tipicamente, ele é usado para comparar uma distribuição empírica com uma distribuição de probabilidade teórica.

Para uma melhor abordagem para a região estável, foram descartados o intervalo de tempo correspondente às primeiras 100 contas e aquele correspondente às 100 últimas. É evidente que a distribuição de  $\Delta T_1$  é mais larga que a de  $\Delta T_2$ , o que pode ser visto como outra manifestação do estado da aprendizagem. Em adição, ambos manifestam uma distribuição de Laplace

$$\mathcal{L}(x; \mu, \beta) = \frac{\exp(-|x - \mu|/\beta)}{2\beta}. \quad (1.3)$$

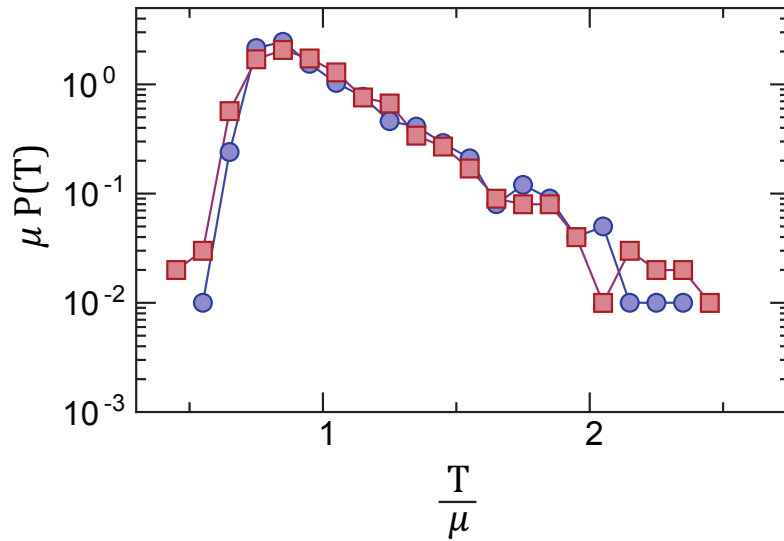


Figura 1.6: **Colapso das distribuições de  $T_1/\mu_1$  e  $T_2/\mu_2$  de um participante** no primeiro (círculos azuis) e segundo bloco (quadrados vermelhos) apresentado em escala mono-log, sugerindo uma universalidade. Neste gráfico, a probabilidade é multiplicada por  $\mu$  devido a mudança de escala.

A [Equação 1.3](#) é centrada em  $\mu$  e com um parâmetro de escala  $\beta$ . Os melhores parâmetros de ajuste são obtidos pelo método da máxima verossimilhança<sup>7</sup> (veja [Apêndice A](#)), e o teste Cramér-von Mises indica que a hipótese da distribuição de Laplace não pode ser rejeitada com um nível de confiança de 99% (o  $p$ -valor está dentro do intervalo  $[0,11, 0,98]$ ).

Os dois parâmetros de cada distribuição de Laplace são diferentes (veja [Figura 1.9](#) e [Figura 1.10](#)). Particularmente, a escala dos parâmetros  $\beta$  está conectada com os padrões de aprendizagem identificados na [Figura 1.3](#). Em outras palavras, todas as

<sup>7</sup> O ajuste da máxima verossimilhança é um método para estimar os parâmetros de um modelo estatístico ao ser aplicado a um conjunto de dados [51].



distribuições tendem a ser mais largas no primeiro turno de cada participante. É interessante notar que o pico das distribuições é simetricamente centralizado em torno de zero, como pode ser visto no gráfico de espalhamento de  $\mu_2$  versus  $\mu_1$  na [Figura 1.9](#). Por outro lado, um gráfico de espalhamento da largura das distribuições para cada participante (veja [Figura 1.10](#)) revela uma lei de crescimento para o parâmetro de escala:

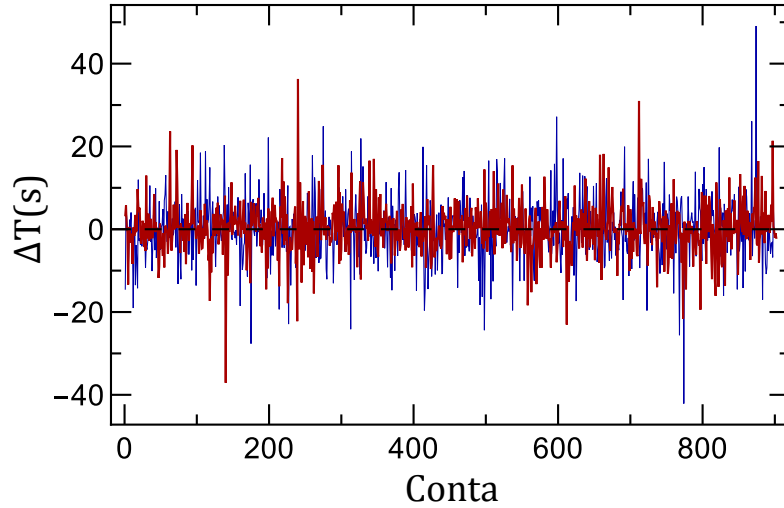


Figura 1.7: **Média móvel de  $\Delta T$  para um participante** no primeiro (curva azul) e segundo bloco (curva vermelha). Ambas as curvas oscilam em torno de  $\Delta T = 0$ , marcado pela linha tracejada.

$$\beta_2 = a + b \beta_1, \quad (1.4)$$

em que o intercepto  $a = 0,09 \pm 0,04$  é dado em segundos e a inclinação  $b = 0,70 \pm 0,11$  é adimensional. Esse resultado sugere que, além de serem sempre simétricas, as flutuações de cada  $\Delta T$  depois de uma prática muito longa reduzem linearmente e dependem do seu valor inicial.

As distribuições de Laplace podem ser reduzidas para uma distribuição independente de qualquer parâmetro livre ao normalizarmos os dados como

$$\tilde{\Delta T} = \frac{\Delta T - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}, \quad (1.5)$$

em que  $\bar{\mu}$  é a média de  $\Delta T$  e  $\bar{\sigma}$  é seu desvio padrão. Usando essa construção padronizada, todas as séries temporais  $\tilde{\Delta T}$  apresentam média zero e exibem um desvio

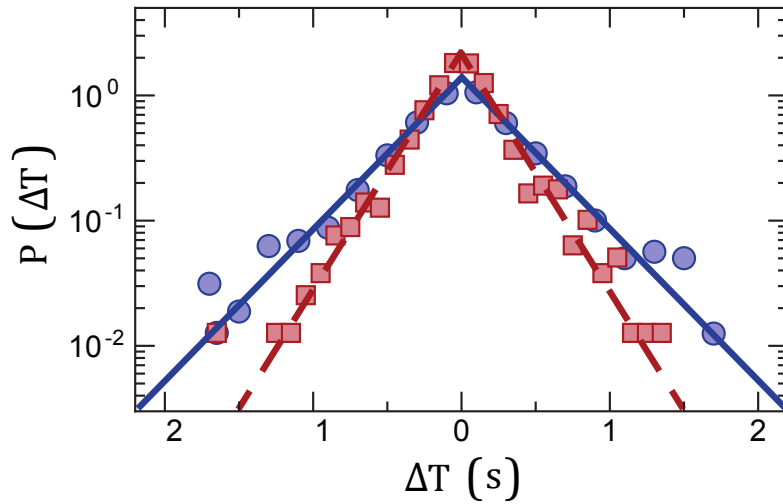


Figura 1.8: **Distribuição de  $\Delta T$  para um participante** no primeiro (círculos azuis) e segundo bloco (quadrados vermelhos) apresentado em escala oono-log, em que a linha contínua (tracejada) refere-se à correspondente distribuição de Laplace com  $\mu = 0$  e  $\beta = 0,36$  ( $\beta = 0,23$ ).

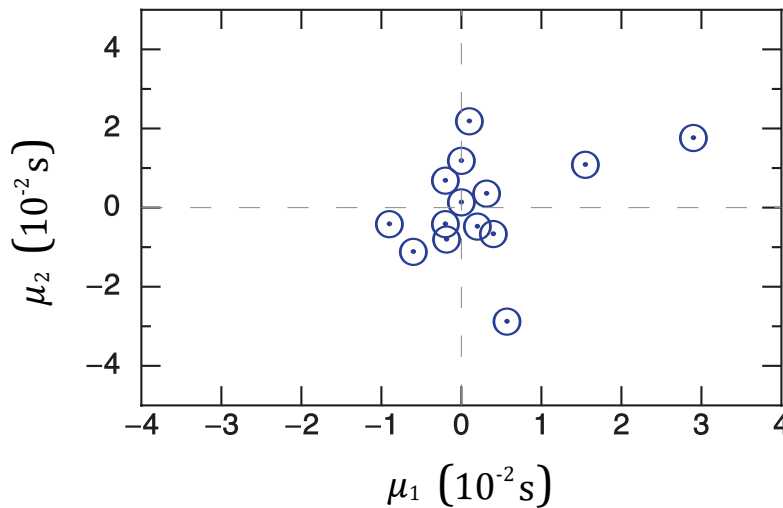


Figura 1.9: **Gráfico de espalhamento ilustrando o parâmetro  $\mu$  da distribuição de Laplace de  $\Delta T_2$  como função dos parâmetros de  $\Delta T_1$ .**

padrão unitário. A função densidade de probabilidade para todos os participantes está ilustrada na [Figura 1.11](#) em comparação com uma distribuição de Laplace com a forma

$$\mathcal{L}(0, \sqrt{2}) = \frac{\exp(-|x|/\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}. \tag{1.6}$$

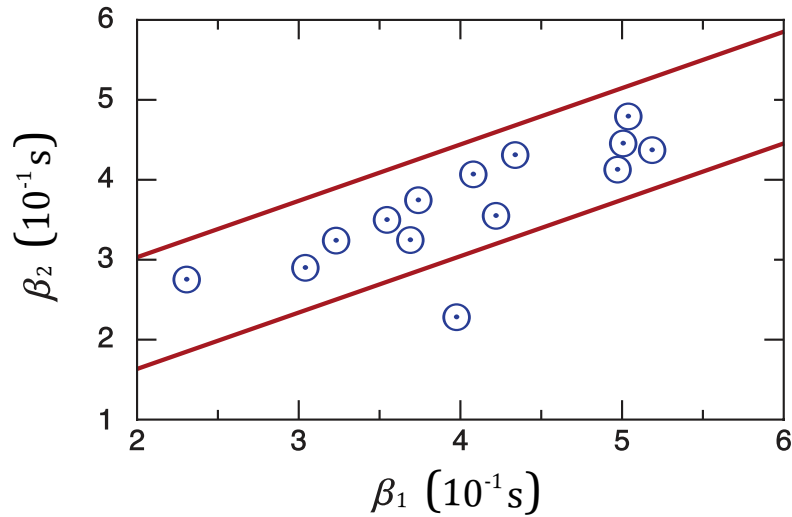


Figura 1.10: Gráfico de espalhamento ilustrando o parâmetro  $\beta$  da distribuição de Laplace de  $\Delta T_2$  como função dos parâmetros de  $\Delta T_1$ , as linhas vermelhas indicam a lei de crescimento para o parâmetro de escala, cuja inclinação é  $b = 0,70 \pm 0,11$ .

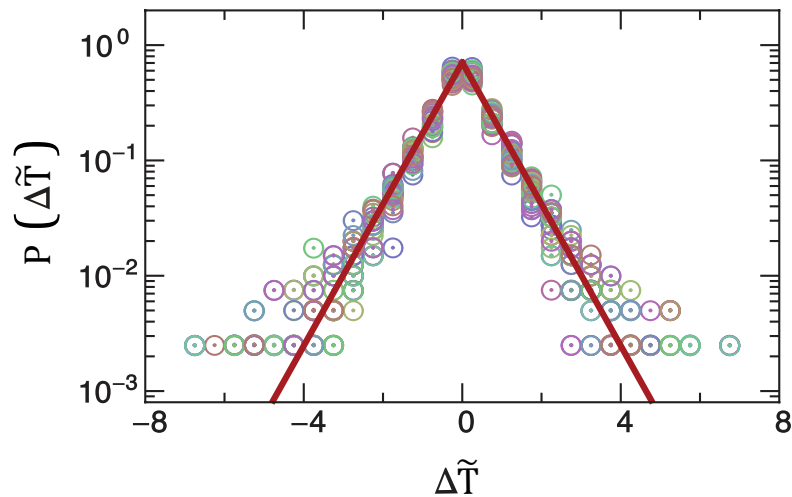


Figura 1.11: Colapso das distribuições da densidade de probabilidade dos incrementos normalizados ( $\Delta \tilde{T}$ ) nos intervalos de tempo  $\Delta T_1$  e  $\Delta T_2$  mostrados em escala mono-log, sugerindo uma universalidade. A linha contínua é a [Equação 1.6](#).

É notável que todas as curvas colapsam, expondo a presença de um comportamento universal que também pode ser encontrado, por exemplo, nas distribuições de tempo de leitura [33] e na diferença de julgamento [54].

### 1.3.3 Efeito de memória

Em relação às distribuições de probabilidade, já citamos anteriormente que o efeito de aprendizagem se comporta como um fator de escala sobre a série temporal. Agora, atacamos outro aspecto sobre como o treinamento altera a estrutura posicional dos termos da série temporal. Para tal, investigamos a série temporal de cada participante à procura da presença de comportamento correlacionado ou não, quantificando esses achados via uma análise fractal. Esse tipo de análise quantifica o efeito de memória presente na dinâmica de uma série temporal  $u(t)$ , a qual tem sido empregada extensivamente na literatura para investigar persistência via expoente de Hurst ( $h$ ), mesmo em uma série não estacionária [57, 58].

Tipicamente, uma série temporal que exhibe correlação é caracterizada pelo comportamento tipo lei de potência

$$F(s) \propto s^h, \quad (1.7)$$

em que  $F$  é a equação de flutuação,  $h$  é um expoente que geralmente provém o valor do expoente de Hurst e  $s$ , nesse caso, é o tamanho das janelas utilizadas no método do DFA para retirar a tendência local da série. O valor numérico de  $h$  quantifica a presença de autocorrelação da série temporal. A correlação é de longo alcance com persistência quando  $h > 0,5$ , e a série exhibe anti persistência de longo alcance quando  $0 < h < 0,5$ . Além disso, se  $h = 0,5$ , a série temporal não possui memória ou tem apenas correlação de curto alcance.

O resultado obtido por meio do método do DFA-2<sup>8</sup> sobre a série temporal do tempo de reação para um participante é dado na [Figura 1.12](#), em que há uma comparação do primeiro com o segundo turno do experimento. Todos os resultados registraram um valor em torno de  $h = 0,5$ , indicando que não há correlação temporal. Além disso, não há diferença significativa no expoente de Hurst quando comparamos o primeiro com o segundo turno de cada participante, conforme podemos ver na [Figura 1.13](#). Tem sido mostrado na literatura que a escala escolhida para ajustar a lei de potência pode perturbar os resultados numéricos [59]. Usamos o intervalo

---

<sup>8</sup> O número  $v$  que segue o DFA- $v$  é o grau do polinômio usado no ajuste, que é a ordem do DFA. Uma apresentação do DFA é feita no [Apêndice B](#).

[6, 192] na escala logarítmica para todos os ajustes, e um algoritmo [60] corrobora nossas aproximações para  $h$  e o perfil geral das flutuações.

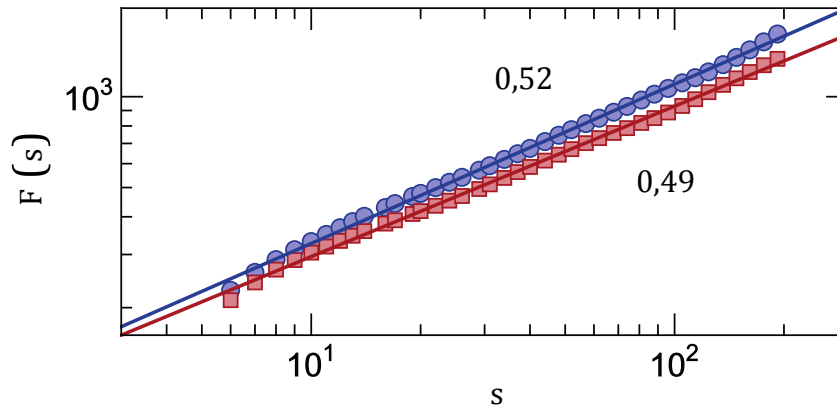


Figura 1.12: Gráfico log-log da função de flutuação da Equação 1.7 para um participante específico do primeiro (círculos azuis) e segundo turno (quadrados vermelhos) da atividade.

Um outro tipo de análise se baseia nos intervalos de retorno  $\tau$  (Apêndice B). Ao considerarmos esses tempos para cada participante, verificamos que eles, basicamente, seguem uma distribuição exponencial, exemplificando um dos nossos casos na Figura 1.14. A partir do que discutimos no Apêndice B, tal resultado simplesmente reforça o expoente de Hurst igual a meio encontrado via DFA.

Aplicando o método do DFA na série temporal de  $\Delta T$ , encontramos o resultado crítico  $h \simeq 0$ . Este resultado é consistente com vários exemplos na literatura, em que o método do DFA tem sido usado para investigar correlação na magnitude e sinal da primeira diferença da série temporal [61, 62, 63, 64, 65]. Nesse cenário, escrevemos a primeira diferença do tempo de reação de cada participante como

$$\Delta T = \text{abs}(\Delta T) \text{sign}(\Delta T), \quad (1.8)$$

gerando duas componentes: (i) a série temporal do valor absoluto,  $\text{abs}(\Delta T)$ ; (ii) a série temporal dos sinais,  $\text{sign}(\Delta T)$ , composta pelos elementos  $-1$  se  $\Delta T < 0$ , o se  $\Delta T = 0$  e  $1$  se  $\Delta T > 0$ .

O resultado obtido por meio do método do DFA-2 sobre a série temporal  $\text{abs}(\Delta T)$  e  $\text{sign}(\Delta T)$  é mostrado na Figura 1.15. Novamente, não há diferença notável entre o primeiro e o segundo turno de cada participante. Dados obtidos da natureza, por

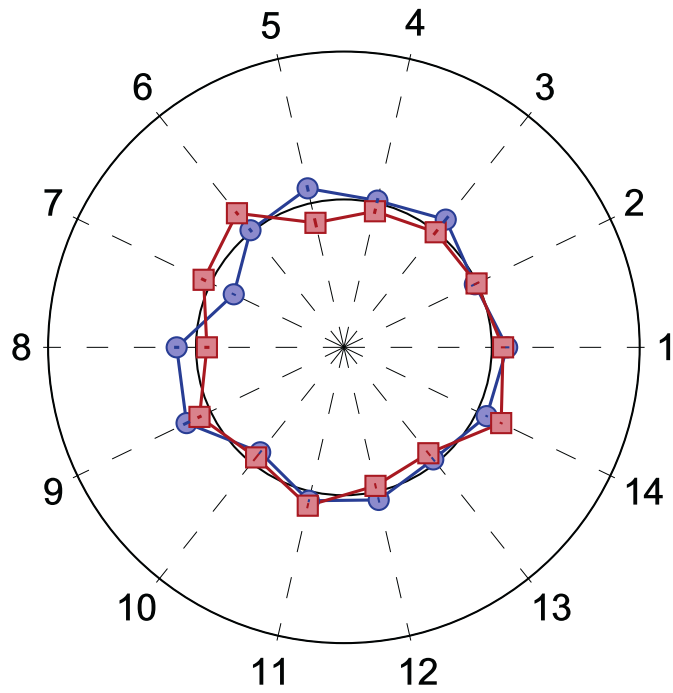


Figura 1.13: **Expoente de Hurst  $h$  das séries dos  $T$ 's de cada participante** no primeiro (círculos azuis) e segundo turno (quadrados vermelhos) da atividade, explicitando a ausência de persistência e diferenças entre os dois turnos. A barra de erro corresponde ao intervalo de confiança de 99% para o valor de  $h$  e é representada pelas marcas no centro dos círculos azuis e quadrados vermelhos; o círculo externo corresponde a  $h = 1$ ; o círculo interno é referente a  $h = 0,5$ ; e o centro do círculo a  $h = 0$ .

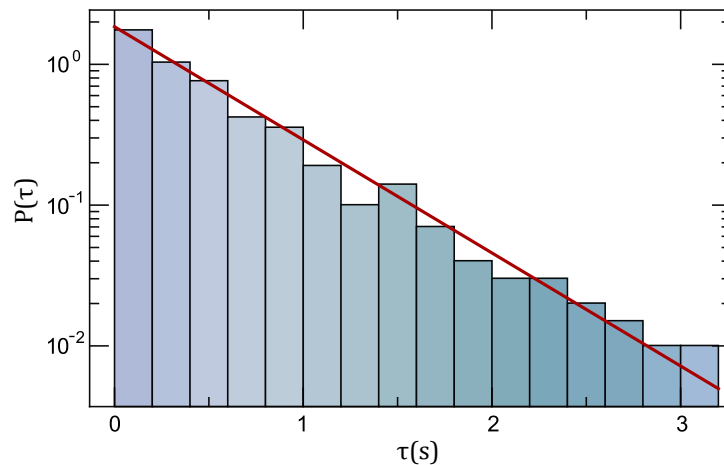


Figura 1.14: **Histograma da PDF do intervalo de retorno  $\tau$**  de um dos participantes em escala log-normal. A linha contínua vermelha é um comparativo de uma distribuição exponencial.

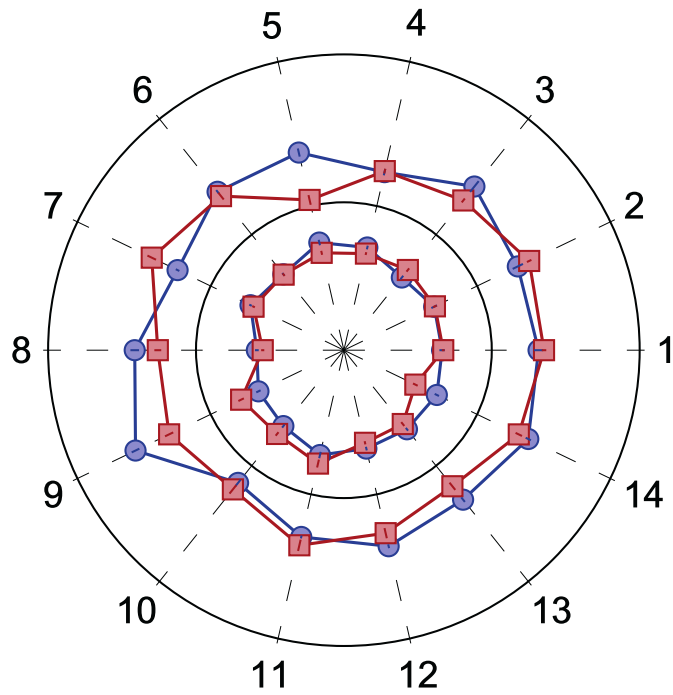


Figura 1.15: **Expoente de Hurst  $h$  das magnitudes e sinais dos incrementos  $\Delta T$** , indicando que não há diferença significativa entre os turnos, mas, na magnitude (sinal), exibem comportamento persistente (anti persistente). O expoente de Hurst  $h$  das magnitudes está representado dentro do círculo interno, e dos sinais entre o círculo interno e o externo. A barra de erro corresponde ao intervalo de confiança de 99% para o valor de  $h$  e é representada pelas marcas no centro dos círculos azuis e quadrados vermelhos; o intervalo do círculo externo corresponde a  $h = 1$ ; do círculo interno é referente a  $h = 0,5$ ; e o centro do círculo a  $h = 0$ .

sua vez, têm a tendência de apresentar persistência no valor absoluto e anti persistência no sinal. Exemplos disso são o estudo dos batimentos cardíacos [61, 64] e a investigação de terremotos [65]. Em um cenário mais amplo, isso indica que nossos dados estão mais próximos de outras situações da natureza. Contudo, todos os participantes exibiram o mesmo comportamento persistente ou anti persistente. Em um contexto geral, esses resultados acerca do expoente de Hurst indicam outra característica universal e individual que não é afetada pelo treinamento.

#### 1.4 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Neste capítulo, analisamos estatisticamente o comportamento da aprendizagem de uma atividade psicomotora caracterizada por blocos muito longos de tarefas sem

pausas. Em geral, a aprendizagem psicomotora está conectada com habilidade física, isto é, relaciona funções cognitivas com movimentos físicos direcionados a atingir um objetivo [66]. Na atividade que analisamos, as funções cognitivas estão associadas ao processo de tomada de decisão de seguir a sequência de cores e, então, buscar pelo respectivo lentilhão no conjunto dentro do recipiente inicial. Por outro lado, há o movimento físico compreendido em selecionar o lentilhão certo (devido à sequência de cores) e depositá-lo no recipiente apropriado. Durante a análise, identificamos quantitativamente medidas do perfil da aptidão usando o tempo de reação entre as tarefas na aprendizagem da prática. Nesse caso, a aprendizagem psicomotora poderia estar ligada à eficiência psicomotora medida por meio do perfil do tempo de reação.

Em resumo, mostramos, na [Figura 1.2](#) e na [Figura 1.3](#), que o tempo médio gasto com cada lentilhão é significativamente menor no segundo turno da atividade para 79% dos participantes, o que pode ser associado uma melhora na eficiência deles na execução da atividade proposta. Esse resultado é consistente com a análise de outras atividades, tais como tarefas alfanuméricas [27] e coordenação bimanual [16, 17, 18, 38]. Conseqüentemente, esses resultados levam a um aumento global na velocidade efetiva, interpretada como lentilhões por segundo. A [Figura 1.4](#) ilustra que a prática não apenas reduz o intervalo de tempo para completar a tarefa, mas também mostra que a variabilidade, desvio padrão dividido pela média, mostrou-se constante para cada indivíduo.

Identificamos que o tempo de reação segue uma distribuição unimodal cujos parâmetros variam de acordo com características intrínsecas dos participantes e seu nível de treinamento. Também, encontramos que a primeira diferença na série temporal tem forma simétrica que segue a distribuição de Laplace. Como esperado, sem usar o procedimento de normalização usado na [Equação 1.5](#), as distribuições de Laplace características para a primeira diferença do tempo de reação de cada participante têm diferentes parâmetros de escala, além de serem centradas nas vizinhanças de zero. O efeito de aprendizagem identificado na [Figura 1.2](#), na [Figura 1.3](#) e na [Figura 1.4](#) governam a cauda da distribuição. Em outras palavras, a aprendizagem característica tende a reduzir a largura da distribuição. Encontramos que a largura das distribuições de Laplace estão indistinguívelmente conectadas à prática muito prolongada.



Na segunda parte dos resultados, analisamos o perfil da correlação na série temporal do tempo de reação ( $T$ ) e sua primeira diferença ( $\Delta T$ ). Obtivemos que a série temporal de  $T$  não exibe efeito de memória. Em contraste, a série temporal  $\Delta T$  apresenta duas propriedades: (i) seu valor absoluto é persistente; (ii) seu sinal é antipersistente. Resultados similares para a série temporal do valor absoluto e do sinal também foram encontrados, por exemplo, nos incrementos entre intervalos de tempo de sucessivos batimentos cardíacos [61] e na conexão entre o padrão de terremotos com emissão acústica em folhas de papel plástico amassadas [65]. Em nossos resultados, também é notável que, em todos os casos, não houve diferença relevante entre o primeiro e o segundo turno da atividade de cada participante. É interessante notar que o efeito de aprendizagem devido à prática não introduz qualquer tipo de persistência na série temporal do tempo de reação.

É importante observar que nosso objetivo principal, quando olhamos para uma longa sequência de tarefas sem pausas, era investigar as propriedades da aprendizagem; em particular, as relacionadas à correlações, as quais podem ser modificadas ou mascaradas quando os dados são organizados em blocos menores de tarefas. Nosso estudo focou no comportamento local de uma atividade muito prolongada, e não no comportamento global, no sentido de observar o efeito da aprendizagem visto com a repetição dos blocos de uma atividade típica, como apertar botões [67, 68]. Como uma consequência, a curva de aprendizagem tradicional, que é extensivamente explorada na literatura [69, 70], não pôde ser identificada. No entanto, a aprendizagem psicomotora devido à atividade se torna evidente quando consideramos o decréscimo na média do tempo de reação de diferentes blocos e as respectivas flutuações em torno de seu valor médio. Outra evidência notável foi encontrada na largura da distribuição de Laplace, cujo valor foi encontrado sendo menor depois da prática. Em contraste com o desvio padrão e o valor médio, os padrões da variabilidade, a família das distribuições de probabilidade e a persistência medida com o expoente de Hurst, são universais, isto é, eles não dependem do treinamento. Assim, a prática pode ser associada a um fator de escala na série temporal.

A epidemia de dengue é um mal negligenciado na nossa sociedade, que faz parte de um grupo de doenças infecciosas crônicas, que ocorrem principalmente em áreas rurais e urbanas pobres de países menos favorecidos. Trata-se da doença viral via vetor predominante que afeta humanos [71]. Neste cenário, estimativas revelam que as epidemias de dengue têm crescido de forma alarmante e colocando em risco quase metade da população humana. Neste capítulo, investigamos padrões estatísticos sobre a propagação espacial das epidemias de dengue no Brasil, incluindo sua evolução temporal e correlação espacial. Também, quantificamos a dependência de novos casos com as populações de cidades e com os vínculos geográficos. Além disso, investigamos as similaridades em novos casos de dengue entre pares de cidades. Ainda, consideramos este último aspecto via um modelo inspirado em crescimento de superfície.

## 2.1 INTRODUÇÃO

Em um cenário mais amplo, a busca por um melhor entendimento no contexto biológico é um desafio estimulante e frequentemente presente em uma pauta multidisciplinar. Exemplos de tais investigações incluem o estudo de sinais fisiológicos [72, 73], mortalidade de animais depois de acidentes [74], dinâmica de população [75, 76, 77] e propagação de doenças [78, 79]. Geralmente, o objetivo de tais investigações é examinar dados almejando expor padrões ou leis que governem a dinâmica desses sistemas. Essa abordagem empírica também tem sido muito útil para prover base

para comparar e testar o crescente número de modelos matemáticos<sup>1</sup> desenvolvidos nesses campos [84, 85, 86].

Epidemias de dengue causam um impacto negativo em nossa sociedade. Juntamente com a dengue hemorrágica, ela é a doença disseminada via vetor que mais afeta humanos [71], os quais são os maiores hospedeiros e multiplicadores do vírus [87]. O impacto da dengue é especialmente preocupante em regiões com clima tropical e subtropical [88, 89, 90, 91], o que corresponde às áreas mais populosas do planeta. Estimativas revelam que a epidemia de dengue tem crescido cerca de trintas vezes no decorrer dos últimos cinquenta anos; em adição, por volta de 100 milhões de novas infecções ocorrem anualmente em mais de cem países endêmicos, colocando em risco de infecção mais de 40% da população do globo, o que significa aproximadamente 2,5 bilhões de pessoas [92]. As regiões críticas são especialmente importantes. Na literatura, temos várias investigações de epidemias de dengue no Brasil, o maior país tropical. Exemplos incluem modelos tipo SIR (Susceptível - Infectado - Recuperado) [93, 94], modelo para vacina custo-eficiência [95] e padrões da circulação da dengue [96, 97].

Dedicamos este capítulo para investigar a dinâmica espaço-temporal dos casos de dengue no Brasil. Devido à sua dimensão continental e à existência de dados disponíveis, o Brasil pode ser considerado como uma fonte adequada de dados para investigar padrões espaciais e temporais da ocorrência de dengue. De modo geral, investigamos os casos de dengue em si, sua relação com a população e sua conexão com a localização geográfica das cidades brasileiras. Uma primeira parte deste estudo sobre dengue foi desenvolvido por Antonio [13]. Esses primeiros estudos são revisados na [Subseção 2.3.1](#) e na [Subseção 2.3.2](#). A seguir, apresentamos nossas investigações sobre a epidemia de dengue no Brasil, analisando correlações espaciais ([Subseção 2.3.3](#), [Subseção 2.3.4](#) e [Subseção 2.3.5](#)). Nossa abordagem consiste em expor

---

<sup>1</sup> No modelo matemático mais simples sobre dinâmica de doenças infecciosas, os hospedeiros são classificados em três categorias: Susceptíveis (S), Infectados (I) e Recuperados (R) [80]. Em particular, o modelo SIR (Susceptível - Infectado - Recuperado) e o modelo SIS (Susceptível - Infectado - Susceptível) são usados para duas situações extremas: a primeira para o caso de se assumir que, ao se recuperar da doença, o indivíduo passa a ser imune; e a segunda quando não há tal imunidade que proteja o indivíduo recuperado. Modelos mais realistas estão situados em algum lugar entre esses dois extremos e, para representar mecanismos biológicos específicos, diferentes famílias de modelos podem ser construídas [80, 81, 82, 83].

padrões estatísticos e em modelar as constatações dentro de uma base reprodutivista.

Na próxima seção, apresentamos as bases de dados utilizadas neste capítulo.

## 2.2 DADOS

Fizemos um estudo da base de dados em que os registros dos casos de dengue foram obtidos diretamente do DATASUS [98]. A base de dados do Sistema Único de Saúde (SUS) nacional que está disponível gratuitamente *online* e é mantida pelo Portal da Saúde do Ministério da Saúde brasileiro. Em geral, analisamos os dados de aproximadamente de seis milhões de casos diagnosticados no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2012, somando 5069 cidades brasileiras que reportaram pelo menos um caso nesse período, ou seja, 91% do total. Também estão disponíveis *online* gratuitamente, os dados relacionados ao tamanho da população em cada cidade brasileira foram obtidos da base de dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [99], o qual realiza o censo nacional a cada 10 anos. Para os anos que não há registros do IBGE, empregamos dados da população das cidades projetados para esse período [100].

Na Seção 2.3, expomos os resultados encontrados na análise dos dados apresentados nesta seção e discutimos a extensão daqueles.

## 2.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Especificamente, analisamos a quantidade  $z_{i,t}$ , definida como número de casos de dengue diagnosticados na cidade  $i$  durante o ano  $t$ . Partindo dessa definição, nossas análises estão divididas em três subseções: primeiro, realizamos um estudo sobre o perfil dos casos de dengue registrados por ano; depois, fazemos um estudo comparativo entre o número de casos de dengue e a população da região atingida; finalmente, desenvolvemos uma análise da correlação espacial dos casos de dengue *per capita* entre pares de cidades.

### 2.3.1 Perfil dos casos de dengue por ano

É esperado que o número de casos de dengue em uma região esteja conectado com a concentração de vetores e com a distribuição dos indivíduos já infectados. Muitos fatores como as variáveis meteorológicas também possuem um papel central no número de novos casos em uma região específica [101, 102, 103, 104]. Um perfil geral no número de casos de dengue por  $10^3$  pessoas durante o ano de 2001 está representado na [Figura 2.1](#). Podemos observar nela que o extremo nordeste (região representada em vermelho e amarelo) é a área mais afetada, sendo seguida de perto pela região sudeste (em amarelo).

Uma vez que as epidemias de dengue afetam principalmente a região tropical do globo, é razoável investigar a conexão entre o número de casos de dengue com as coordenadas geográficas. A [Figura 2.2](#) revela como o número médio de casos de dengue por milhão de pessoas (em escala logarítmica) está correlacionado com as coordenadas geográficas das cidades. Os intervalos foram escolhidos por meio do procedimento de Wand<sup>2</sup>. Encontramos que os valores médios de  $z_{i,t}$  flutuam sistematicamente sem uma clara dependência da longitude das cidades. Contudo, outro padrão emerge de  $z_{i,t}$  para diferentes latitudes: (i) um crescimento quase linear partindo de baixas longitudes até média latitude  $\sim -20^\circ$ ; (ii) um nível aproximadamente estável partindo de média latitude até próximo à linha do Equador, onde há um rápido decréscimo. Fica evidente na [Figura 2.3](#) que, novamente, as distribuições dos resíduos ( $\xi_{lon}$  e  $\xi_{lat}$ )<sup>3</sup> são não Gaussianas, apesar de lembrarem uma, e são diferentes entre si.

No nível das cidades, um intrigante padrão emerge: uma distribuição anual de  $z_{i,t}$  segue uma lei de potência para valores grandes ( $z_{i,t} \gtrsim 10^2$ ). A [Figura 2.4](#) ilustra as distribuições de  $z_{i,t}$  entre as cidades para os anos estabelecidos (t variando de 2001 a 2012) em comparação com a lei de potência na forma (veja [Apêndice A](#))

<sup>2</sup> O procedimento de Wand é um método para escolher as janelas de um histograma (veja [Apêndice A](#)).

<sup>3</sup> O resíduo  $\xi$  é a diferença entre o valor  $z_{i,t}$  e o seu valor médio.

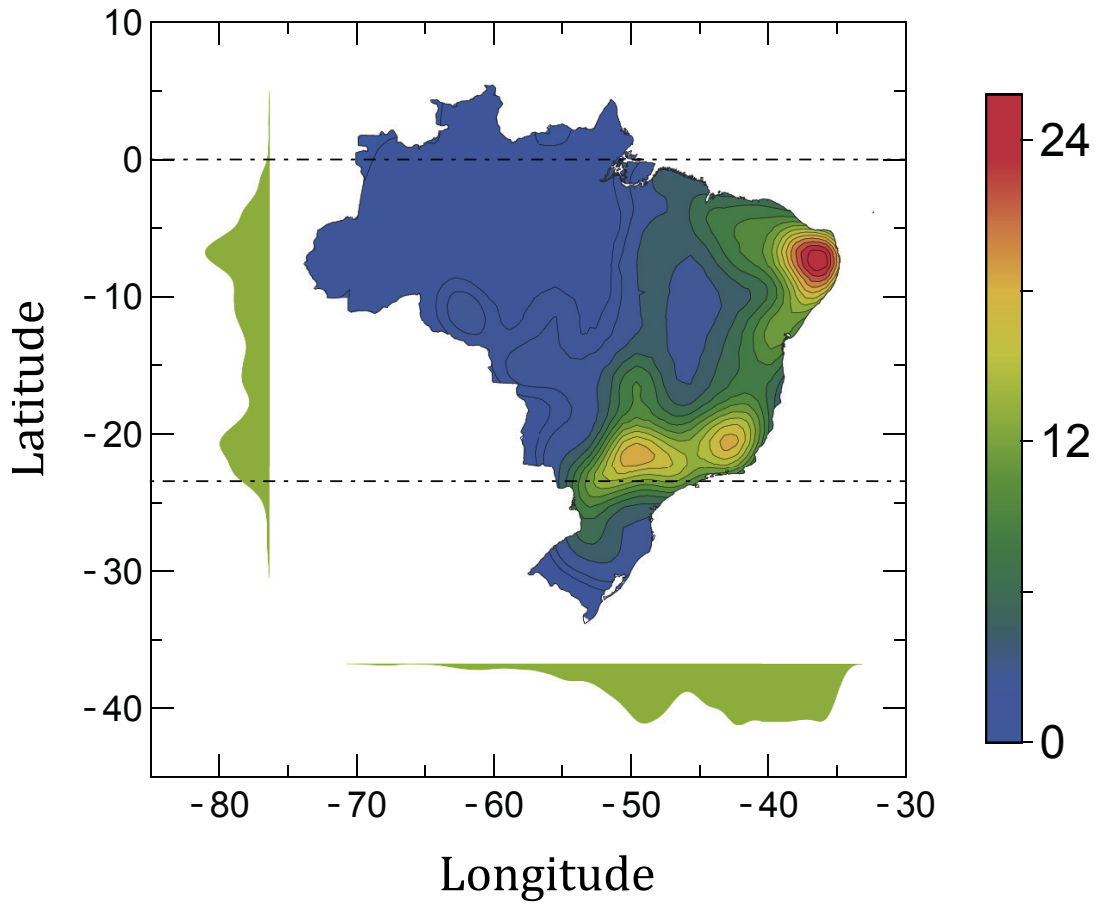


Figura 2.1: **Distribuição espacial dos casos de dengue.** Número médio de casos de dengue por grupo de  $10^3$  pessoas em 2001. No eixo horizontal (vertical) há um histograma em escala natural mostrando a distribuição espacial dos casos de dengue na longitude (latitude). As linhas pontilhadas correspondem à linha do Equador e ao Trópico de Capricórnio.

$$P(z_{i,t}) \propto z_{i,t}^{-\gamma}, \quad (2.1)$$

com  $\gamma = \langle \gamma_t \rangle = 1,81 \pm 0,03$  (intervalo de confiança de 99%). Esse valor foi obtido como uma média aritmética para o ajuste da máxima verossimilhança da lei de potência anual  $\langle \gamma_t \rangle$ , mostrada na [Figura 2.5](#). Todas as leis de potência são robustas por cerca de três décadas, e o teste estatístico Cramér-von Mises corrobora que elas não podem ser rejeitadas com uma confiança de 99%. Em particular, considerando as barras de erros para o *bootstrap* do intervalo de confiança de 99%, o expoente  $\gamma_t$  anual permanece sistematicamente constante durante todo o período.

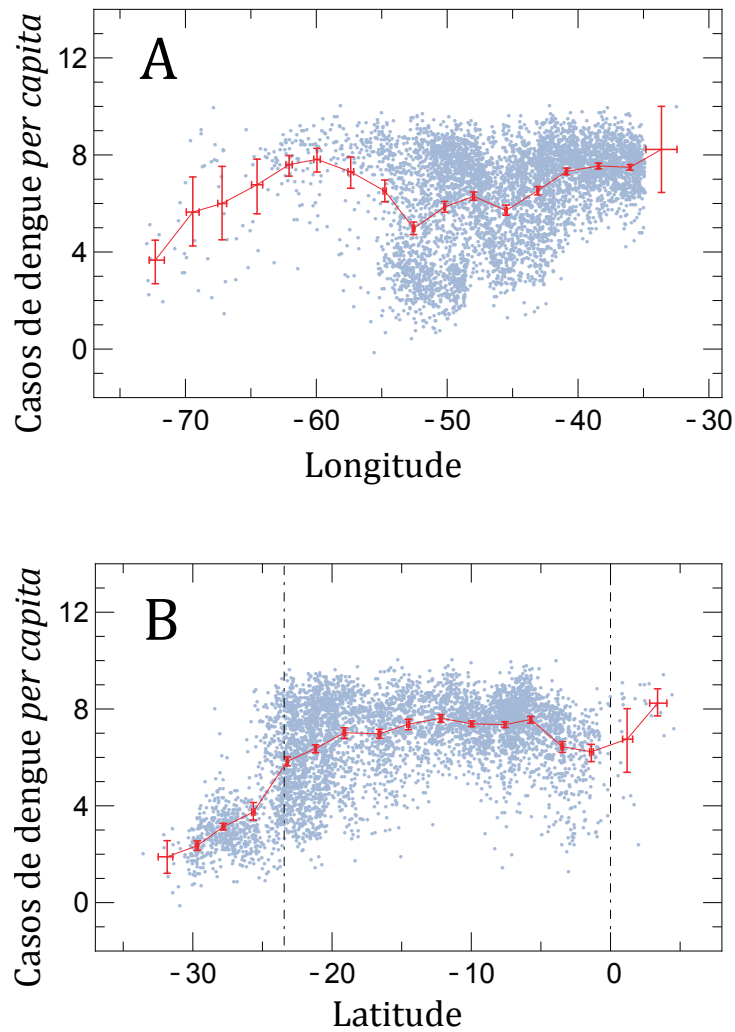


Figura 2.2: **Dependência dos casos de dengue das coordenadas geográficas das cidades.** O logaritmo do número de casos *per capita* como uma função das (A) Longitudes e (B) Latitudes. Cada ponto azul representa o número de casos de dengue em uma cidade. As marcas vermelhas são janelas de valores médios (25 janelas igualmente espaçadas) e as barras de erro correspondem ao *bootstrapped* de 99% no intervalo de confiança para essas médias. A linha contínua é uma interpolação de primeira ordem da média dos dados. As linhas pontilhadas em (B) correspondem ao trópico de Capricórnio e à linha do Equador. Os intervalos foram escolhidos por meio do procedimento de Wand.

### 2.3.2 Casos de dengue versus população

Como citamos, o número de novos indivíduos infectados *per capita* (ilustrado na Figura 2.2) depende de muitos aspectos e não espera que isso seja constante em diferentes cidades. Usando os dados da população brasileira, identificamos como

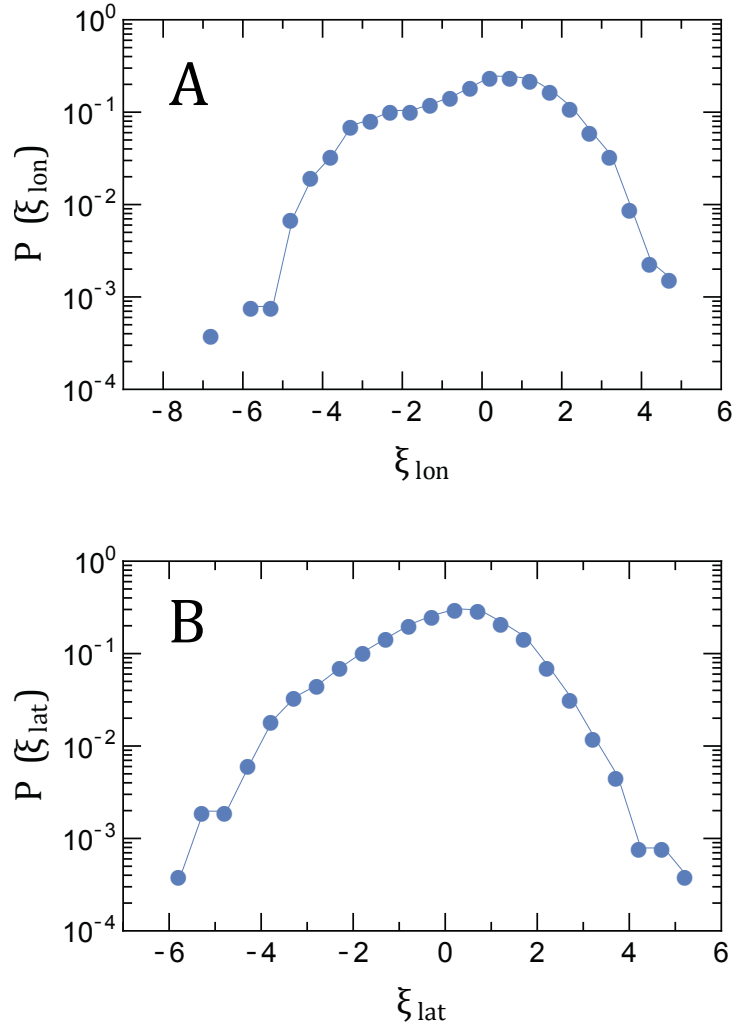


Figura 2.3: Distribuição em escala log-linear dos resíduos próximos da tendência média descrita pela curva de interpolação, em que (A) se refere às longitudes e (B) às latitudes.

$z_{i,t}$  escala com o tamanho da população  $p_{i,t}$  na cidade  $i$  no ano  $t$ . Como mostra a Figura 2.6A, a curva obtida é bem descrita por uma lei de escala do tipo<sup>4</sup>

$$z_{i,t} \propto p_{i,t}^{\delta}. \quad (2.2)$$

Um ajuste linear para as janelas de valores médios fornecem o valor do expoente  $\delta = 1,05 \pm 0,10$  (intervalo de confiança de 99%;  $R^2 = 0,981$ ). Particularmente, o resultado  $\delta \simeq 1$  indica que o comportamento médio de  $z_{i,t}$  escala linearmente com a população na região afetada.

<sup>4</sup> A equação da alometria (Equação 2.2), proposta por Huxley [105], tem sido usada por biólogos para relacionar o tamanho do corpo dos animais com sua forma, anatomia e fisiologia [106].



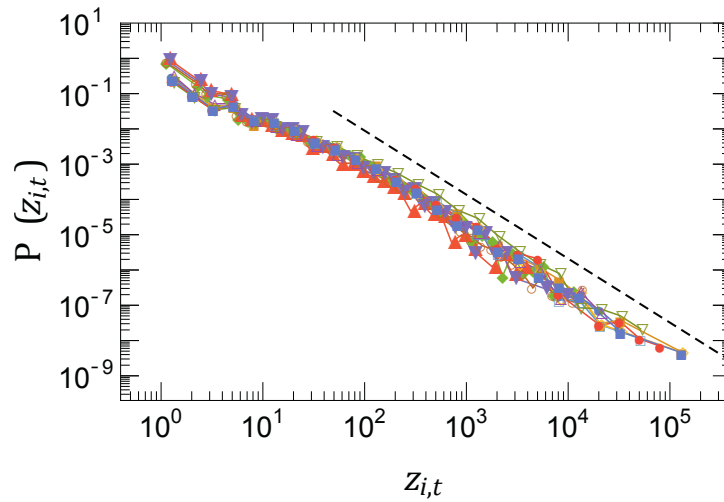


Figura 2.4: **Incidência de dengue nas cidades. Função Densidade de Probabilidade  $P(z_{i,t})$  para o número total de casos de dengue por ano.** A linha tracejada é uma lei de potência com expoente 1,81 e serve de guia para a lei de comportamento das caudas, abrangendo cerca de três décadas.

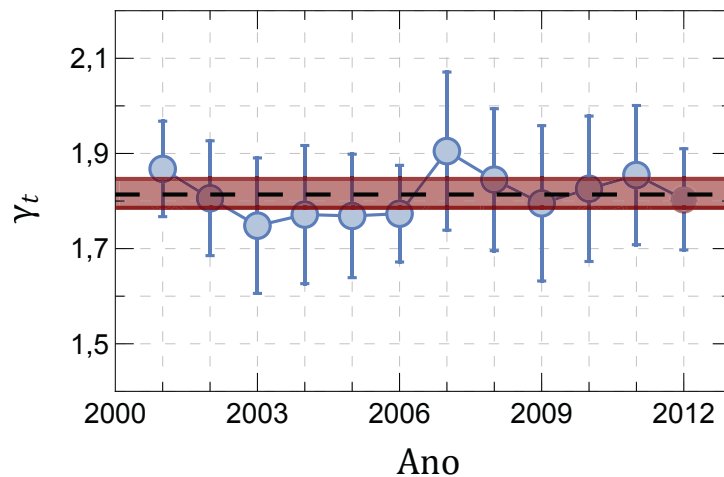


Figura 2.5: **Incidência de dengue nas cidades. Evolução temporal do expoente  $\gamma_t$  da lei de potência para o período de 2001 a 2012.** A linha preta tracejada é o valor médio  $\gamma = \langle \gamma_t \rangle = 1,81$  e o respectivo *bootstrap* com intervalo de confiança é de 99%. Esses resultados indicam um valor aproximadamente constante para  $\gamma$ .

Essa lei de escala isométrica está de acordo com a lei obtida para as taxas de mortalidade por influenza e pneumonia em cidades nos Estados Unidos por volta de 1918 [107]. A lei linear indica que a dengue é fortemente dependente do local, diferentemente do comportamento super linear, o qual é normalmente encontrado na literatura para epidemias com apelo social [79] e também para muitos contextos sociais com indicadores urbanos [108, 109]. Observando a [Figura 2.6B](#), encontramos

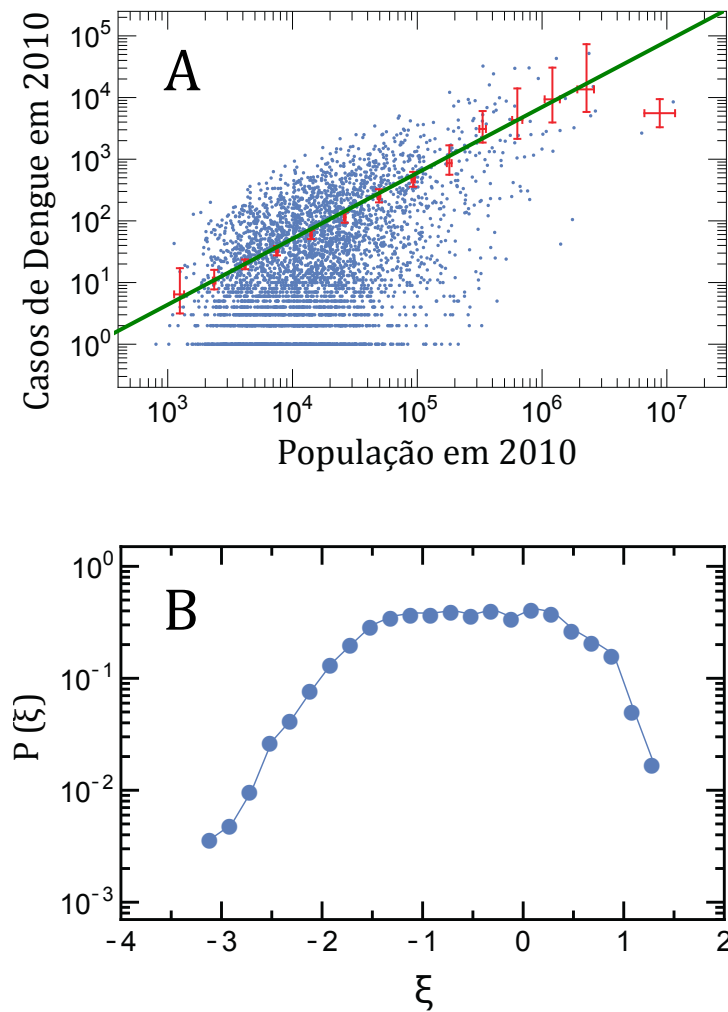


Figura 2.6: **Alometria entre os casos de dengue e a população; distribuição dos resíduos.**(A)

Alometria entre os casos de dengue e a população. Cada ponto azul representa o número de casos de dengue em 2010 em uma cidade específica versus a população que reside nesta cidade. As marcas vermelhas são valores médios nas janelas (24 janelas logaritmicamente escolhidas via o procedimento de Wand) e as barras de erro são do *bootstrap* de 99% no intervalo de confiança. A linha verde contínua é um ajuste para os valores médios nas janelas. A curva é uma lei de potência com expoente  $\delta = 1,05 \pm 0,10$  (99% no intervalo de confiança;  $R^2 = 0,981$ ). (B) Distribuição em escala log-linear dos resíduos próximos da tendência média descrita pela curva de interpolação.

que as distribuições dos resíduos  $\xi$  são não Gaussianas, mas, em uma primeira aproximação, assemelham-se a uma Gaussiana.

### 2.3.3 Correlação espacial dos casos de dengue per capita

Outro ponto intrigante a investigar é a existência de “memória” espacial em  $z_{i,t}$ . Para investigar esse aspecto, avaliamos a função de (auto) correlação espacial de  $z_{i,t}$  entre pares de cidades que estão separadas por  $r$  quilômetros de distância. O comportamento persistente de alguns indicadores pode ser originado pela distribuição natural da população das cidades.

Almejando remover esse efeito e considerando que  $\delta \simeq 1$ , usamos a quantidade  $\phi_{i,t} = z_{i,t}/p_{i,t}$ , ou seja, o número de casos de dengue na cidade  $i$  no ano  $t$  dividido pela respectiva população. Especificamente, calculamos

$$C(r) = \frac{\langle [\phi_{i,t} - \mu(r)][\phi_{j,t} - \mu(r)] \rangle_{|r_{i,j}=r}}{\sigma(r)^2}, \quad (2.3)$$

em que  $\mu(r)$  representa o valor médio,  $\sigma(r)$  denota o desvio padrão da quantidade  $\phi_{i,t}$  das cidades separadas por  $r$  quilômetros e  $\langle \dots \rangle_{|r_{i,j}=r}$  representa a média aritmética sobre as cidades cuja distância  $r_{i,j}$  é igual a  $r$ . Considerando intervalos de  $r$  espaçados logaritmicamente para avaliar a [Equação 2.3](#), a [Figura 2.7](#) mostra a evolução temporal da correlação espacial  $C(r)$  em escala log-log para o número médio de casos de dengue entre as cidades. É notável um rápido decaimento da função de correlação. Além disso, esse comportamento pode ser distinguido de um ruído branco entre duas e três décadas.

Olhando para a média aritmética anual do número de casos de dengue *per capita* por cidade, ou seja, substituindo  $\phi_{i,t}$  por  $\langle \phi_i \rangle = \sum_t \phi_{i,t}/12$  na [Equação 2.3](#), identificamos que  $C(r)$  segue uma lei de potência com um truncamento exponencial. De modo geral, a curva que obtemos é bem descrita por

$$C(r) = c_0 r^{-\theta} e^{-r/\lambda}, \quad (2.4)$$

como mostra a [Figura 2.8](#).

Esse tipo de curva é um típico resultado de comportamento de grandezas físicas nas vizinhanças de pontos críticos [110]. Em nosso caso, um ajuste não linear dos dados (veja a linha contínua vermelha na [Figura 2.8](#)) leva a  $c_0 = 2,43 \pm 0,64$ ,  $\theta = 0,33 \pm 0,09$  e  $\lambda = 377 \pm 172$ , cujos erros representam 99% do intervalo de confiança. Com base no teste Cramér-von Mises, esses valores não podem ser rejeitados a um nível

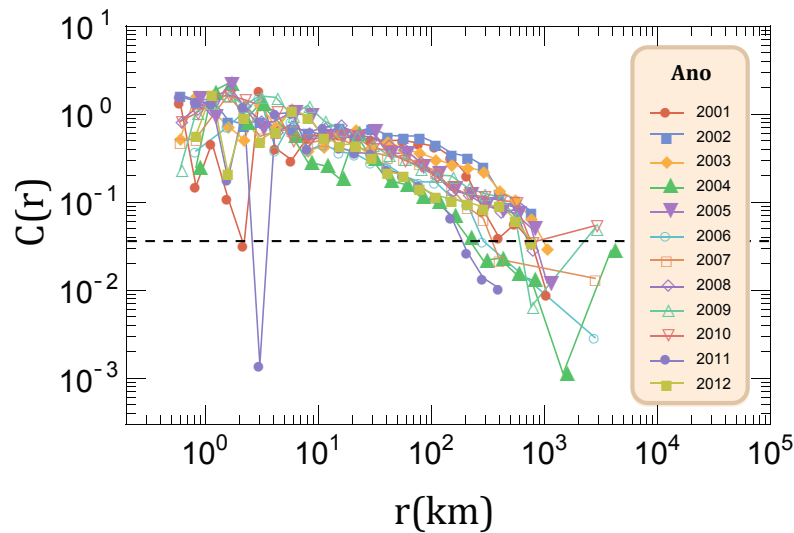


Figura 2.7: **Decaimento da correlação espacial dos casos de dengue.** Evolução temporal desde 2001 até 2012 da correlação espacial mostrada em escala log-log para o número anual de casos de dengue *per capita* entre as cidades brasileiras. A linha preta tracejada é uma guia para distinguir o ruído branco com um intervalo de confiança de 99%.

de confiança de 99% ( $p$ -valor 0,571). Confirmando nossos resultados, a correlação espacial presente nos dados é destruída e pode não ser distinguida do ruído aleatório ao simplesmente embaralhar os dados, como é ilustrado pela linha verde contínua (dados embaralhado) e a linha preta tracejada (limiar do ruído branco) na [Figura 2.8](#).

A componente exponencial da correlação espacial é evidente pela qualidade do ajuste apresentado na [Figura 2.8](#). O comprimento da correlação,  $\lambda = 380$  Km, representa uma distância característica entre cidades na qual a intensidade do número de casos de dengue persiste. Assim, em uma primeira aproximação, o número de casos de dengue em cidades de estados que não têm fronteiras em comum não estão correlacionados. De uma maneira geral, um parâmetro como  $\lambda$  está tipicamente conectado à finitude dos dados empíricos, dependendo sublinearmente do tamanho do sistema [111].

A [Figura 2.9](#) evidencia um expoente crítico,  $\theta = 0,33$ , do decaimento da lei de potência. No estudo de sistemas complexos, uma função de correlação decaindo como uma lei de potência pode ser encontrada, por exemplo, no estudo de textos literários [112]. Desse modo, concluímos que o número médio de casos de dengue *per capita* tem correlação de longo alcance com o respectivo espaço, já que a função de correlação  $C(r)$  decai como uma potência multiplicada por um fator exponencial,

sendo este devido à finitude do sistema. Reforçando esse resultado, se embaralharmos a taxa média de dengue entre as cidades, além de destruir a correlação espacial, esse processo muda drasticamente o perfil das distribuições dos resíduos mostrados na [Figura 2.3A](#) e [Figura 2.3B](#). Especificamente, ambas as distribuições dos resíduos, tanto para a latitude quanto para a longitude, tornam-se aproximadamente iguais, simplesmente refletindo a distribuição espacial das cidades brasileiras.

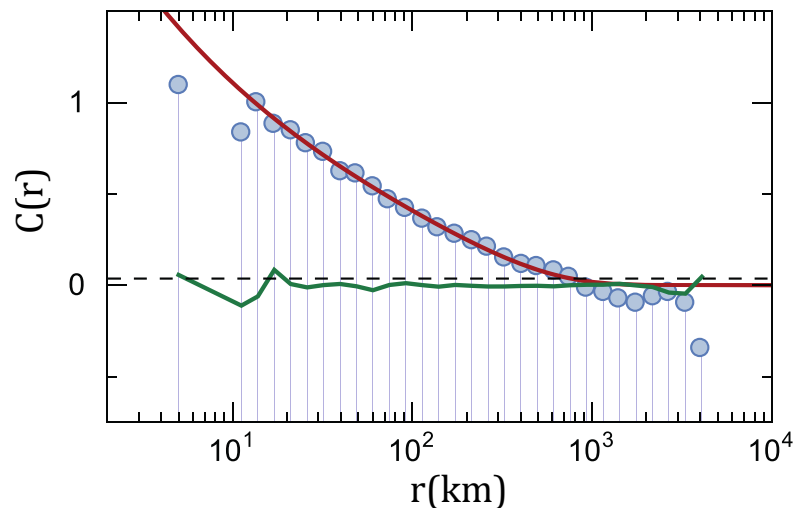


Figura 2.8: **Correlação espacial mostrada em escala log-linear para o número total de casos de dengue nas cidades brasileiras entre 2001 e 2012.** A linha vermelha contínua é um ajuste não linear da [Equação 2.4](#) para os dados, cujo parâmetros encontrados são  $c_0 = 2,43 \pm 0,64$ ,  $\theta = 0,33 \pm 0,09$  e  $\lambda = 377 \pm 172$ , em que o erro representa 99% no intervalo de confiança. A linha preta tracejada é uma guia para se distinguir do ruído branco com um nível de confiança de 99%, enquanto a linha contínua verde é o resultado da função de correlação calculada depois de embaralhar as posições das cidades, evidenciando a falta de correlação espacial dos dados embaralhados.

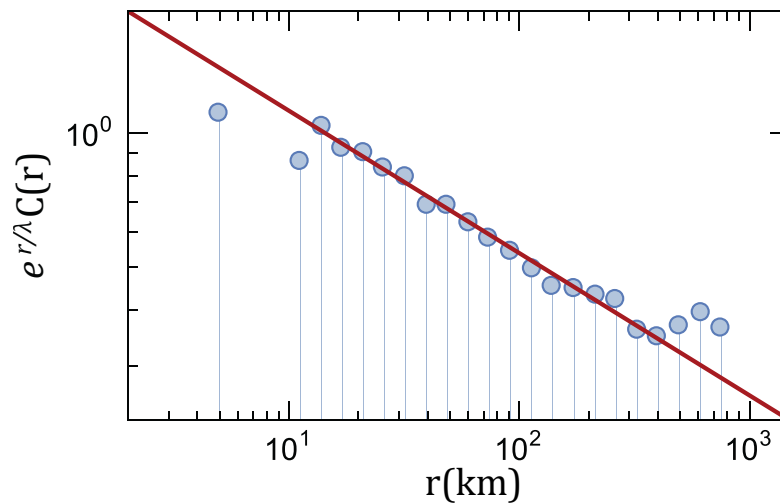


Figura 2.9:  $C(r)$  **multiplicado por uma exponencial**. Gráfico em escala log-log, evidenciando a componente da lei de potência da correlação espacial por meio dos dados rescalados multiplicados por uma exponencial.

#### 2.3.4 Modelagem da correlação espacial

Recentemente, a equação de Edwards-Wilkinson<sup>5</sup> [113] foi usada para modelar um decaimento logarítmico para a correlação espacial [115, 41]. Apesar dessa equação ter sido proposta para investigar o crescimento de interfaces [113, 116], ela admite um processo difusivo que, por exemplo, começa na origem e cresce radialmente misturado com um ruído aleatório  $\eta$ .

Infelizmente, essa descrição não é próxima o suficiente para descrever o espalhamento de uma epidemia como a dengue, no que se refere à correlação espacial. Uma razão evidente são as características de mundo pequeno devido a longas viagens de pessoas infectadas. Nesse sentido, é comum generalizar a equação de Edwards-Wilkinson substituindo o movimento Browniano por um outro com grandes saltos. Isso ocorre, por exemplo, quando, em vez de usarmos o  $\nabla^2\phi$ , empregamos uma derivada fracionária  $\nabla^\alpha\phi$ . De fato, uma derivada usual como  $\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t)$  envolve a vi-

<sup>5</sup> A equação de Edwards-Wilkinson é escrita como  $\partial\phi/\partial t = \nu\nabla^2\phi + \eta$ , em que  $\phi(\mathbf{r}, t)$  é a altura da superfície na posição  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$ ,  $\nu$  é a tensão da superfície e  $\eta$  é a contribuição estocástica para as flutuações da superfície [113, 114]. Nessa equação,  $\partial\phi/\partial t = \nu\nabla^2\phi$  pode ser vista como um efeito difusivo usual (Browniano). E, por sua vez,  $\eta$  é um efeito aleatório sobre o processo difusivo.

zinhança imediata de  $\mathbf{r}$  e uma derivada fracionária  $\nabla^\alpha \phi(\mathbf{r}, t)$ , em geral, não é restrita às vizinhanças imediatas de  $\mathbf{r}$ . Nesse caso, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = \nu \nabla^\alpha \phi(\mathbf{r}, t) + \eta(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

em vez da equação de Edwards-Wilkinson. Aqui,  $\phi(\mathbf{r}, t)$  representa o número médio de casos de dengue *per capita* em uma cidade localizada pelo vetor posição  $\mathbf{r}$ ,  $\nu$  é uma constante e  $\eta(\mathbf{r}, t)$  é um ruído branco:

$$\langle \eta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0 \quad (2.6)$$

e

$$\langle \eta(\mathbf{r}', t') \eta(\mathbf{r}, t) \rangle = \Gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (2.7)$$

Em vez de tentarmos fazer um raciocínio detalhado para modelarmos a expressão concreta que  $\nabla^\alpha f$  deve assumir na presente discussão, iremos nos restringir a um dos tipos de derivadas fracionárias<sup>6</sup> mais conhecidas. Mais precisamente, vamos supor que  $\nabla^\alpha$  é um operador fracionário de Riesz, atuando no papel de um Laplaciano generalizado, definido via a transformada de Fourier

$$\mathcal{F} \{ \nabla^\alpha f(\mathbf{r}) \} = -k^\alpha \tilde{f}(\mathbf{k}), \quad (2.8)$$

em que  $k = |\mathbf{k}|$  [117, 118]. Geralmente, o intervalo  $0 < \alpha \leq 2$  é usado quando se deseja assegurar o sentido difusivo para  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . Além disso, o limite  $\alpha = 2$  corresponde ao Laplaciano usual, conduzindo novamente à equação de Edwards-Wilkinson. No caso determinístico, isto é, quando  $\eta(\mathbf{r}, t) = 0$ , a solução da [Equação 2.5](#) no espaço infinito pode ser obtida analiticamente fazendo uso das funções de Lèvy [119]. A presença dessas funções evidencia a compleição de grandes saltos comparado com o caso usual ( $\alpha = 2$ ). Eles estão mais presentes à medida que  $\alpha$  diminui. Deve ser ressaltado, ainda, que, para sistemas infinitos, a [Equação 2.5](#) conduz à função de correlação na forma

$$C(\mathbf{r}) \propto r^{-(d-\alpha)}, \quad (2.9)$$

em que  $d$  representa a dimensão espacial do sistema analisado [120, 121]. Em particular, nosso sistema epidêmico ( $d = 2$ ) conduz a  $\alpha \simeq 1,67$ , pois  $d - \alpha = \theta$  e  $\theta =$

---

<sup>6</sup> Derivadas fracionárias, em geral, são não locais, ou seja, não são restritas às vizinhanças imediatas do argumento da função que está sendo derivada, em contraste com as derivadas usuais.

o,33. Naturalmente, mesmo quando sabemos que há presença de correlação de longo alcance, um valor de corte eventualmente emergirá, levando a um corte típico como o presente na [Figura 2.8](#). Como citado, outros exemplos de um corte similar que dependem da finitude do sistema podem ser encontrados na literatura, tal como no estudo do predomínio de obesidade [111].

### 2.3.5 Função de correlação espacial

Nesta seção, obteremos a [Equação 2.9](#), isto é, calcularemos a função de correlação espacial  $\langle \phi(\mathbf{r}, t)\phi(\mathbf{r}', t) \rangle$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Vamos começar resolvendo a [Equação 2.5](#) empregando a transformada de Fourier<sup>7</sup>:

$$\int \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nu \nabla^\alpha - \eta \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^d \mathbf{r}}{(2\pi)^{d/2}} = \frac{d\tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)}{dt} + \nu k^\alpha \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) - \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t), \quad (2.10)$$

em que foram usadas  $\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = \frac{d\tilde{\phi}}{dt}$  e  $\mathcal{F} \{ \nabla^\alpha \phi \} = -k^\alpha \tilde{\phi}$  ([Equação 2.8](#)). Assim, em termos da transformada de Fourier, a [Equação 2.5](#) é escrita como

$$\frac{d\tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)}{dt} = -\nu k^\alpha \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) + \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t), \quad (2.11)$$

cujas soluções são

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) e^{-\nu k^\alpha t} + e^{-\nu k^\alpha t} \int_0^t e^{\nu k^\alpha t'} \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t') dt', \quad (2.12)$$

em que  $\tilde{\phi}_0(\mathbf{k})$  corresponde a  $\tilde{\phi}_0(\mathbf{k}, t)$  com  $t = 0$ .

A [Equação 2.6](#) e a [Equação 2.7](#), sobre o ruído estocástico, implicam

$$\langle \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t) \rangle = 0 \quad (2.13)$$

e

$$\langle \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t) \tilde{\eta}(\mathbf{k}', t') \rangle = \Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(t + t'). \quad (2.14)$$

<sup>7</sup> A transformada de Fourier e sua inversa empregadas aqui são  $\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r} / (2\pi)^{d/2}$  e  $f(\mathbf{r}) = \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{k} / (2\pi)^{d/2}$ , em que  $d$  representa a dimensão do espaço.



Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t) \tilde{\eta}(\mathbf{k}', t') \rangle &= \\
&= \left\langle \int \eta(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^d\mathbf{r}}{(2\pi)^{d/2}} \int \eta(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \frac{d^d\mathbf{r}'}{(2\pi)^{d/2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \iint \langle \eta(\mathbf{r}, t) \eta(\mathbf{r}', t') \rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} d^d\mathbf{r} d^d\mathbf{r}' \\
&= \frac{\Gamma}{(2\pi)^d} \delta(t - t') \int e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^d\mathbf{r} \\
&= \Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(t + t'),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

em que usamos a [Equação 2.7](#),  $\int f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^d\mathbf{r}' = f(\mathbf{r})$  e  $\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^d\mathbf{r} = (2\pi)^d \delta(\mathbf{q})$  com  $\mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{k}'$ .

Usando a expressão para  $\tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)$  ([Equação 2.12](#)) e  $\langle \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t) \rangle = 0$  ([Equação 2.13](#)), verificamos que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) \tilde{\phi}(\mathbf{k}', t) \rangle &= \\
&= \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}') e^{-\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} + \\
&+ e^{-\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{\nu(k'^\alpha t' + k^\alpha t'')} \langle \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t') \tilde{\eta}(\mathbf{k}', t'') \rangle.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Após empregarmos a [Equação 2.14](#), o último termo da [Equação 2.16](#) se reduz a

$$\Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{\nu(k'^\alpha t' + k^\alpha t'')} \delta(t' - t''). \tag{2.17}$$

Essa equação, após a integração com a  $\delta(t' - t'')$ , é reduzida à integração de uma exponencial. Portanto, obtemos

$$\int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{\nu(k'^\alpha t' + k^\alpha t'')} \delta(t' - t'') = \frac{e^{\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} - 1}{\nu(k^\alpha + k'^\alpha)}. \tag{2.18}$$

Consequentemente, usando a [Equação 2.17](#) e a [Equação 2.18](#) na [Equação 2.16](#), temos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) \tilde{\phi}(\mathbf{k}', t) \rangle &= \\
&= \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}') e^{-\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} + \\
&+ \Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} \frac{e^{\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} - 1}{\nu(k^\alpha + k'^\alpha)} \\
&= \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) \tilde{\phi}_0(\mathbf{k}') e^{-\nu(k^\alpha + k'^\alpha)t} - \frac{\Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{2\nu k^\alpha} e^{-2\nu k^\alpha t} + \frac{\Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{2\nu k'^\alpha t},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

pois  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') f(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ .

O regime não transiente de nossa análise corresponde a  $t \rightarrow \infty$ . Nesse limite, a [Equação 2.19](#) pode ser reescrita como

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) \tilde{\phi}(\mathbf{k}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\Gamma \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{2\nu k^\alpha}. \quad (2.20)$$

Usando a transformada inversa de Fourier e, a seguir, a [Equação 2.20](#), verificamos que

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \iint \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) \tilde{\phi}(\mathbf{k}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')} d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' \\ &= \frac{\Gamma}{2\nu} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{1}{k^\alpha} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^d \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Agora, poderíamos focar o no cálculo exato dessa última integral, entretanto, para os nossos objetivos, é suficiente identificar o seu comportamento em termos de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Para tal, basta considerarmos uma simples análise dimensional. Primeiramente, notando que a integral final na [Equação 2.21](#) é uma função escalar do agrupamento  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , podemos escrever essa integral como uma função de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ . A seguir, notando que  $[k] = [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]^{-1}$  e  $[d^d \mathbf{k}] = [k]^{d-\alpha}$ , verificamos que  $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \propto |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-(d-\alpha)}$ . Assim, concluímos que

$$\langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} \propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-\alpha}}. \quad (2.22)$$

Cabe notarmos que, quando  $d = \alpha$ , espera-se a presença de um comportamento logarítmico, isto é,  $\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

De um ponto de vista mais formal, observamos que

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \\ &= \nabla^\alpha \left[ \frac{\Gamma}{2\nu} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{1}{k^\alpha} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^d \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\nu} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{1}{k^\alpha} \nabla^\alpha e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^d \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A partir da definição da derivada de Riesz, tem-se

$$\nabla^\alpha e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = -k^\alpha e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (2.24)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \\ &= -\frac{\Gamma}{2\nu} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^d \mathbf{k} \\ &= -\frac{\Gamma}{2\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para termos uma visão comparativa desse último resultado, façamos uma analogia com a eletrostática. Uma equação básica da eletrostática é a equação de Poisson:  $\nabla^2 V = -b\rho$ , em que  $V$  é o potencial elétrico devido a uma distribuição de carga  $\rho$  e  $b$  é uma constante positiva que depende do sistema de unidades empregado. Para uma carga pontual localizada em  $\mathbf{r}'$ ,  $\rho(\mathbf{r}) \propto \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  e  $V(\mathbf{r})$  é o potencial elétrico correspondente. Por exemplo, em três dimensões ( $d = 3$ ),  $V(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  e em duas dimensões  $V(\mathbf{r}) \propto \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Nesse cenário, uma generalização da equação de Poisson, considerando derivadas fracionárias, poderia ser  $\nabla^\alpha V = -b\rho$ . E, portanto, se  $\rho \propto \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ,  $V(\mathbf{r})$  seria o potencial elétrico de uma carga pontual localizada em  $\mathbf{r}'$ . Com essas observações em mente, concluímos que  $\langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty}$  seria o análogo desse potencial elétrico de uma carga pontual correspondente a uma equação de Poisson generalizada em um espaço  $d$ -dimensional.

Como deve estar claro, toda a dinâmica estocástica que investigamos ocorre em um espaço  $d$ -dimensional. Se essa dinâmica estivesse restrita a uma região finita do espaço, os nossos resultados, naturalmente, seriam modificados. Por exemplo, na função de correlação espacial  $\langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty}$ , não faria sentido considerar  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  fora da região do espaço onde evolui o sistema. Em casos como esse, poderíamos supor que as correlações diminuíssem rapidamente. Por outro lado, quando  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  correspondem a posições longe das bordas do sistema, em uma primeira aproximação, espera-se que a correlação espacial seja igual a do caso sem restrições. Uma interpolação para esses comportamentos poderia ser  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-(d-\alpha)} e^{-\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  em vez de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-(d-\alpha)}$  para a função de correlação espacial, em que  $\lambda$  é uma constante positiva.

## 2.4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, mostramos que, espacialmente, em pequenas escalas, ou seja, em nível de cidades, a distribuição dos casos de dengue tem um comportamento robusto tipo lei de potência, conforme verificamos a partir dos dados correspondentes a doze anos. Esse comportamento apresentou um expoente médio negativo  $\alpha \simeq 1,81$ , como ilustrado na [Figura 2.4](#) e na [Figura 2.5](#). Esse tipo de comportamento tem um padrão distinto: a lei de potência decai mais lentamente do que em regimes exponenciais e ela é típica de fenômenos críticos naturais. Com a finalidade de comparar a distribuição dos casos de dengue no Brasil, analisamos como ela escala com a população da

região onde eles estão centrados. Em relação à população das cidades, a [Figura 2.6](#) ilustra a lei isométrica entre o número de casos de dengue e a população das cidades.

Na [Figura 2.2](#), caracterizamos as epidemias de dengue sobre todas as cidades brasileiras considerando sua localização geográfica. A dependência dos casos de dengue da longitude das cidades também foi caracterizada, mas não podemos obter uma clara tendência nos valores médios para uma grande extensão restrita pela longitude. A dependência dos casos de dengue com a latitude das cidades conduz a duas regiões distintas: um crescimento quase linear até o trópico de Capricórnio e uma região quase estável entre o trópico de Capricórnio e a linha do Equador. A distribuição das flutuações próximas da tendência média (resíduos) é não Gaussiana e fortemente conectada com a distribuição de habitantes das cidades.

Também, investigamos a correlação espacial dos casos de dengue entre pares de cidades ([Figura 2.7](#), [Figura 2.8](#) e [Figura 2.9](#)). Nossos resultados mostram que a função de correlação em termos das distâncias entre pares de cidades decai como uma lei de potência multiplicada por um fator exponencial. O truncamento presente na função de correlação, o fator exponencial, é usualmente relacionado à finitude do sistema. Do ponto de vista teórico, o espalhamento da dengue pode ser visto como algum tipo de processo difusivo. Nessa direção, modelamos a lei de potência, por sua vez, como uma manifestação de um processo difusivo generalizado. Nesse modelo, incorporamos difusão de longo alcance, que tem como motivação a grande mobilidade dos seres humanos, via a derivada fracionária de Riesz. Além disso, um ruído branco que incorpora contribuições de fatores aleatórios como os oriundos de possíveis imprevisibilidades climáticas foi incorporado ao modelo.

Neste capítulo, investigamos as séries temporais compostas pelo período de mandato de sucessivos líderes políticos e religiosos de diversos países. Iniciamos o capítulo com uma breve discussão sobre uma amostra do vasto campo de estudos qualitativos em lideranças e seguimos com nossa abordagem quantitativa. Analisamos o tempo médio característico em cargo, como ele variou ao longo dos mandatos e as diferenças entre os tipos de lideranças e a sua variabilidade. Estudamos, também, as distribuições dessas séries temporais, observando que elas apresentam um comportamento tipo lei de potência com cauda exponencial. E, finalmente, aplicamos o método do DFA para avaliarmos se há presença de correlação de longo alcance nas séries das sucessões de lideranças.

### 3.1 INTRODUÇÃO

Liderança é um fenômeno natural em humanos e em muitas espécies de animais. Podemos dizer que a liderança precede a emergência da humanidade [122]. Estudos publicados no início da década de 1950 já discutiam o surgimento da liderança em espécies de animais, sendo que todos os vertebrados que vivem em grupos exibem organização social e contam com a presença de um líder [123, 124, 125]. Machos com posições altas na hierarquia têm maior liberdade para consumir a caça do que os outros membros do grupo e tendem a ter acesso mais fácil às fêmeas. Em alguns casos, o alto *status* também envolve o dever de guardar e proteger o grupo [122].

Em humanos, a relação dos pais com seus filhos, que atravessa as linhas culturais, exhibe o arquétipo de liderança. Além disso, o padrão de comportamento que é considerado como aceitável em líderes difere de tempos em tempos e de uma cultura para outra [122]. Estudos antropológicos em grupos primitivos, como na Austrália, em Fiji, na Nova Guiné e no Congo, concluíram que a liderança ocorre entre todas as pessoas independentemente da cultura e do espaço não importando, por exemplo, se

estão em um vilarejo isolado na Índia, se são nômades da Eurásia ou se são pescadores na Polinésia [126]. De um ponto de vista antropológico mais recente, estudos concluíram que, mesmo quando uma sociedade não tem chefes institucionalizados, regras ou eleições oficiais, sempre há líderes que iniciam ações e desempenham papel central na decisão do grupo [127]. Não há conhecimento de sociedades que não tenha um líder em algum aspecto da sua vida social, embora ocorra a falta de um líder global que tome e imponha decisões [122].

Há uma vasta área de estudo sobre liderança, que tem sido tradicionalmente conceituada como uma habilidade de nível individual. Um bom exemplo disso pode ser encontrado na teoria transformacional da liderança, a qual propõe que líderes transformacionais tratem o comportamento relativo nas dimensões do carisma, do estímulo intelectual e das considerações individualizadas [128, 129]. Uma amostra do estudo sobre o carisma é o nível de aprovação do presidente dos Estados Unidos da América, o qual tende a iniciar alto e decair ao longo do mandato, o chamado efeito “lua de mel/ressaca”. Moderado pelo carisma, o efeito no tempo da aprovação persiste mesmo quando indicadores militares e econômicos são incluídos, e tais líderes carismáticos têm melhor manutenção da sua taxa de aprovação no tempo [130, 131]. Outra abordagem de estudo é a análise historiométrica de líderes, que examina múltiplos líderes notáveis, o que requer a translação de informações históricas qualitativas em índices quantitativos de diferenças individuais entre líderes [132].

Entre uma longa lista de assuntos discutidos sobre o tema, podemos citar as diferenças e as similaridades entre tipos de chefes executivos, como o parlamentar (primeiro-ministro britânico) e o presidencial (presidente estadunidense), que possuem pontos-chaves similares, incluindo ser o chefe diplomático e o principal político eleito por voto e que precisa manter uma alta taxa de aprovação. Ambos são frequentemente tão reativos quanto proativos, respondem a problemas, exercem e dividem o poder, delegam autoridade e negociam com todo tipo de obstáculo político e econômico. Entre seus pontos divergentes, podemos citar: o presidente está locado em uma federação, é constitucionalmente limitado, eleito por eleições diretas, separado e independente da legislatura, não é o líder de seu próprio partido e chefe de um executivo personalizado, enquanto que o primeiro-ministro está locado em um estado unitário e não é constitucionalmente limitado, é eleito por eleições indiretas, não é independente do legislativo, é o líder de seu partido e chefe de um colegiado

executivo [133]. A vida após a “morte política” de primeiros-ministros britânicos, considerando que esses líderes podem ser removidos de suas funções por uma variedade de métodos (morte, eleições externas, derrota interna, resignação voluntária ou forçada), sugere que os meios de remoção do cargo podem moldar suas vidas após o exercício, com efeito positivo ou negativo [134, 135].

A relação entre a sobrevivência política do líder com a ocorrência de desastres naturais e, conseqüentemente, vítimas fatais, em países com gestão de baixa e alta qualidade. Em sistemas de grande coalizão, como democracias, a ocorrência de desastres naturais tem pequeno efeito nos protestos da população e na sobrevivência do líder se o número de vítimas fatais não for grande, em contraste, para líderes de pequenas coalizões, a ocorrência de desastres naturais aumenta os protestos populares e reduzem a estabilidade, mas o nível de fatalidade tem pequeno efeito. A antecipação desses potenciais efeitos políticos tem importância na razão de mais pessoas morrerem em desastres em sistemas de pequenas coalizões do que em sistemas de grandes coalizões [136].

O crescimento da participação feminina no parlamento de vários países tem sido comparado a diversos fatores institucionais, como costumes, regulamentação da profissão, tamanho da diferença entre gêneros no poder político, viabilidade econômica do país, acesso à eletricidade e à internet, liberdade política e variáveis culturais [137]. Outros fatores que podem afetar a conquista da liderança política em mulheres que se tornaram presidentes ou primeiras ministras de seus respectivos estados, podem ser o impacto da ordem de nascimento entre os irmãos, gênero dos irmãos e a dinâmica pai-filha, em uma comparação entre os dados das 41 mulheres que atingiram esses cargos entre 1960 e 2000 [138].

Neste capítulo, propomos uma abordagem diferente da que comumente é feita em ciências políticas, pois iremos analisar quantitativamente o tempo em que diversos líderes mundiais, políticos e religiosos, estiveram em seus respectivos cargos. Esse tempo pode variar conforme o tipo de liderança e por outros fatores externos. Para tanto, faremos um estudo longitudinal da série temporal formada pelas sucessões desses líderes, com o objetivo de encontrar possíveis padrões nesse cenário, não nos atendo às causas do término da liderança ou à qualidade dela.

### 3.2 DADOS

Utilizamos dados de lideranças de 57 países, compreendendo reis, imperadores<sup>1</sup>, presidentes, primeiros-ministros e os líderes religiosos do Butão e da Igreja Católica. Construímos uma série temporal com o tempo de duração em dias do período em que cada líder ocupou sua colocação seguindo sua linha de sucessão. Limitamos os dados a apenas 57 países ao eliminarmos as linhas de sucessão com menos de 40 líderes, por se tratarem de séries muito curtas para o tipo de análise em que estamos interessados. Os dados têm resolução diária para a maioria dos líderes e foram obtidos por meio de várias fontes, como *sites* oficiais [141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153] e livros [154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161].

A lista dos países com o tipo de liderança, comprimento da série temporal e seu intervalo de tempo pode ser vista na [Tabela 3.1](#), e a [Figura 3.1](#) mostra um esquema comparando os períodos da vigência desse tipo de liderança.

### 3.3 ANÁLISE DOS DADOS

Analizamos a longevidade da gestão dos líderes de diversos países a partir da soma dos dias em que o título foi ocupado por cada indivíduo na linha de sucessão. Esse período pode variar por diversas razões, seja por fim de mandato, morte, resignação voluntária ou forçada [135]. O tempo de mandato, no caso de líderes eleitos por votos costuma ser limitado por novos processos eleitorais na maioria das coalisões, como democracias, de modo que há um sentido em se esperar que o tempo da gestão desse

---

<sup>1</sup> Imperador é o soberano de um império, que é definido como “um grupo extensivo de estados ou países sob uma única autoridade”, enquanto que um reino é “uma comunidade organizada chefiada por um rei”[139]. O Japão, apesar de ser um país territorialmente pequeno, é considerado um império. Sua forma de organização política, em que clãs governavam regiões sob o poder central do imperador, vem desde a Antiguidade, embora o poder tenha se fragmentado em alguns períodos da história. A Restauração Meiji (1868) consolidou o estado centralizado no imperador, mas, depois da Segunda Guerra Mundial, este se tornou apenas um símbolo sem poder político [140].



Tabela 3.1: Líderes mundiais.

PAÍS	TIPO DE LIDERANÇA	SUCESSÕES	PERÍODO
Andorra Francesa	Copríncipe	56	1278 - hoje
Albânia	Primeiro-Ministro	47	1912 - hoje
Argentina	Presidente	53	1854 - hoje
Bélgica	Primeiro-Ministro	68	1831 - hoje
Bolívia	Presidente	90	1825 - hoje
Bósnia e Herzegovina	Presidente	44	1943 - hoje
Bulgária	Primeiro-Ministro	65	1879 - hoje
Butão	Líder religioso	65	1650 - hoje
Camboja	Rei	127	1 - hoje
Camboja	Primeiro-Ministro	62	1945 - hoje
Chile	Presidente	78	1810 - hoje
Colômbia	Presidente	98	1886 - hoje
Costa Rica	Presidente	50	1847 - hoje
Dinamarca	Rei	57	990 - hoje
Dinamarca	Primeiro-Ministro	66	1699 - hoje
Egito	Primeiro-Ministro	88	1878 - hoje
El Salvador	Presidente	70	1841 - hoje
Equador	Presidente	93	1830 - hoje
Espanha	Primeiro-Ministro	223	1705 - hoje
Estados Unidos da América	Presidente	44	1789 - hoje
Finlândia	Primeiro-Ministro	63	1917 - hoje
França	Imperador	76	428 - 1870
França	Primeiro-Ministro	188	1589 - hoje
Guatemala	Presidente	47	1839 - hoje
Grécia	Primeiro-Ministro	192	1822 - hoje
Haiti	Presidente	66	1791 - hoje
Honduras	Presidente	74	1839 - hoje
Hungria	Primeiro-Ministro	76	1848 - hoje
Inglaterra	Rei	74	927 - hoje
Inglaterra	Primeiro-Ministro	75	1721 - hoje

Continua na próxima página

Tabela 3.1 (Continuação)

PAÍS	TIPO DE LIDERANÇA	SUCESSÕES	PERÍODO
Iran	Primeiro-Ministro	79	1906 - hoje
Iraque	Primeiro-Ministro	76	1920 - hoje
Itália	Primeiro-Ministro	83	1861 - hoje
Japão	Imperador	132	660 a.C. - hoje
Japão	Primeiro-Ministro	77	1885 - hoje
Jordânia	Primeiro-Ministro	74	1921 - hoje
Líbano	Primeiro-Ministro	71	1926 - hoje
México	Presidente	112	1821 - hoje
Nepal	Primeiro-Ministro	67	1799 - hoje
Nicarágua	Presidente	55	1854 - hoje
Noruega	Primeiro-Ministro	61	1814 - hoje
Nova Zelândia	Primeiro-Ministro	52	1856 - hoje
Panamá	Presidente	50	1904 - hoje
Paraguai	Presidente	64	1811 - hoje
Peru	Presidente	97	1821 - hoje
Peru	Primeiro-Ministro	178	1856 - hoje
Polônia	Primeiro-Ministro	85	1807 - hoje
Portugal	Primeiro-Ministro	142	1834 - hoje
República Dominicana	Presidente	88	1844 - hoje
Romênia	Primeiro-Ministro	95	1862 - hoje
Sérvia	Primeiro-Ministro	101	1805 - hoje
Síria	Primeiro-Ministro	72	1920 - hoje
Suécia	Rei	81	970 - hoje
Ucrânia	Primeiro-Ministro	54	1917 - hoje
Uruguai	Presidente	81	1830 - hoje
Vaticano	Papa	293	64 - hoje
Venezuela	Presidente	66	1811 - hoje

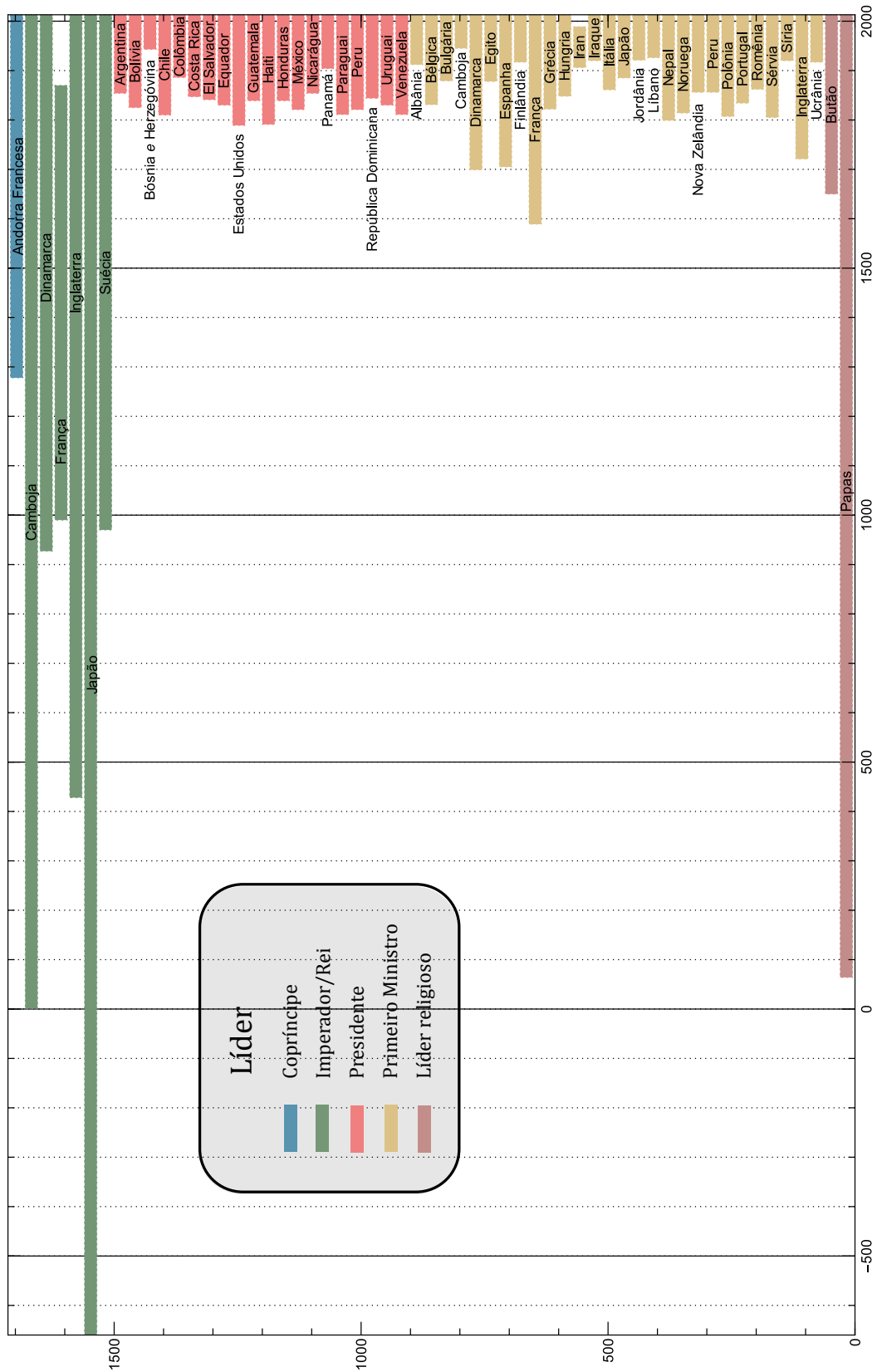


Figura 3.1: Esquema comparando o período dos diversos tipos de lideranças estudados neste trabalho ao longo da história.

tipo de líder seja menos aleatório que em casos nos quais o líder deixa suas funções apenas em caso de morte, abdicação ou destituição.

Na próxima subseção, iniciamos nossas análises investigando o comportamento médio dessas sucessões de mandatos.

### 3.3.1 *Tempo de vida médio de mandato*

Aplicamos uma média móvel [46] em todas as séries temporais a fim de suavizar a curva e facilitar a visualização do seu comportamento. Na Figura 3.2, podemos ver quatro exemplos dessa técnica aplicada em escala mono-log para o líder religioso do Butão, que também é o chefe de estado (Figura 3.2A), para o primeiro-ministro da França (Figura 3.2B), para o Imperador do Japão (Figura 3.2C) e para o presidente do México (Figura 3.2D).

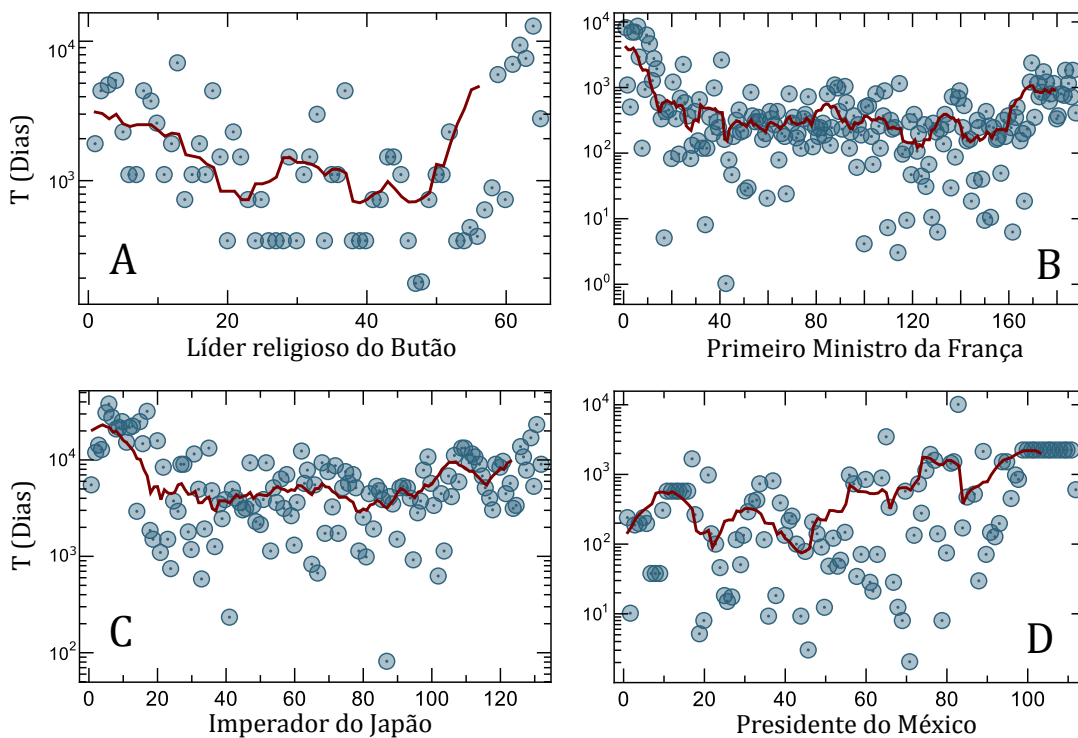


Figura 3.2: Média móvel de  $T$  em escala mono-log mostrando quatro exemplos de crescimento no tempo médio, nos últimos anos, dos quatro tipos de lideranças que estudamos neste trabalho. Círculos azuis são dados empíricos e a linha contínua vermelha é a média móvel do: (A) líder religioso do Butão, (B) Primeiro-Ministro da França, (C) Imperador do Japão e (D) Presidente do México.

Observamos que o tempo de mandato dos líderes tem aumentado nos últimos anos em 56% dos casos, tem se estabilizado em 37% deles e está em declínio em 7%. A queda do tempo médio em governo, na verdade, reflete a sua instabilidade: o imperador da França é um dos poucos exemplos de função já extinta que estudamos (Figura 3.3A); o Haiti é o país com menor índice de desenvolvimento humano nas Américas, e a violência política marcou sua história levando a um governo instável (Figura 3.3B); o Iraque é outro exemplo de país que vem enfrentando violência política ao longo dos anos, além de guerras civis (Figura 3.3C); e o Camboja (Figura 3.3D), que enfrentou a colonização francesa no século XIX, foi devastada por guerras civis com países vizinhos e ocupações.

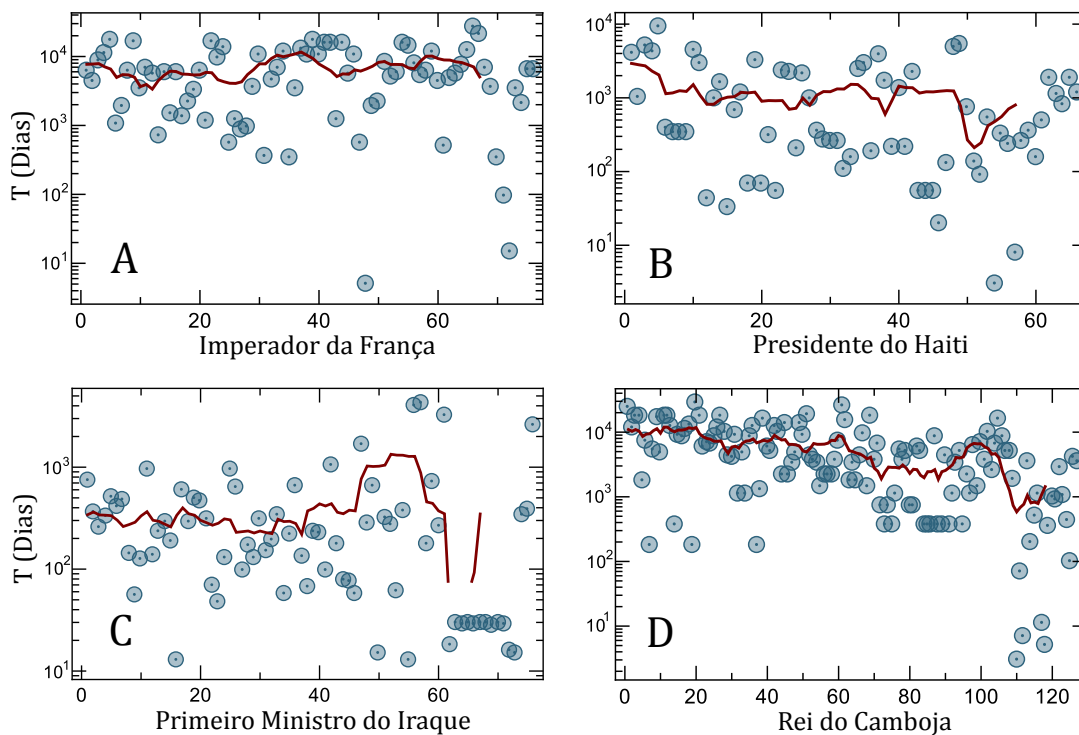


Figura 3.3: Média móvel de  $T$  em escala mono-log mostrando as quatro lideranças com tempo médio em declínio que estudamos neste trabalho. Círculos azuis são dados empíricos e a linha contínua vermelha é a média móvel do: (A) Imperador da França, (B) Presidente do Haiti, (C) Primeiro-Ministro do Iraque e (D) Rei do Camboja.

A média,  $\mu = \langle T \rangle$ , do tempo  $T$  em que cada líder ocupou seu respectivo cargo pode ser vista na Figura 3.4. Como era esperado, líderes como rei e imperador têm maior tempo médio se comparados a presidentes e primeiros-ministros, mas líderes

religiosos não seguem o mesmo perfil. O copríncipe francês de Andorra<sup>2</sup>, um caso especial entre os líderes que estudamos, é um exemplo em que a liderança se tornou um misto de império e democracia, por isso  $\mu$  ainda se aproxima dos valores observados entre imperadores e reis.

A seguir, investigamos se a variabilidade (Equação 1.1), que aplicamos a uma atividade psicomotora no Capítulo 1 e que comumente é usada no estudo de cognição [52, 53], também poderia ser aplicada a esse tipo de dado. O resultado pode ser visto na Figura 3.5. Vale lembrar que a variabilidade é adimensional. Nesse caso, encontramos que a variabilidade,  $\mu/\sigma$ , é aproximadamente constante para a maioria das lideranças estudadas, considerando as barras de erro, sendo os primeiros-ministros os que tiveram o valor com a maior discrepância dos demais. Reis, imperadores, líderes religiosos e o copríncipe de Andorra têm variabilidade constante.

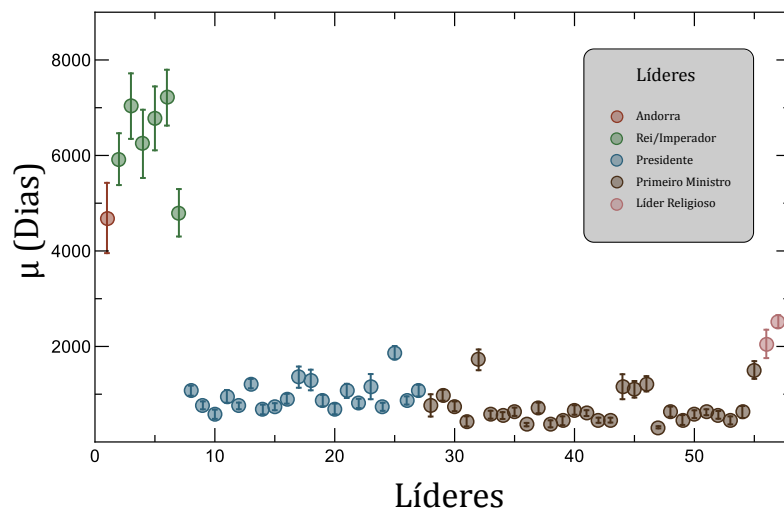


Figura 3.4: **Tempo médio  $\mu$ , em dias, de ocupação da liderança dos 57 países analisados.** A barra de erro corresponde ao *bootstrap* de 95% do intervalo de confiança.

2 Os copríncipes de Andorra representam a chefia do estado independente do Principado de Andorra, sendo essa representação dividida igualmente entre o Bispo de Urgel e o Presidente da República Francesa. Neste trabalho, nos atemos apenas aos copríncipes franceses.

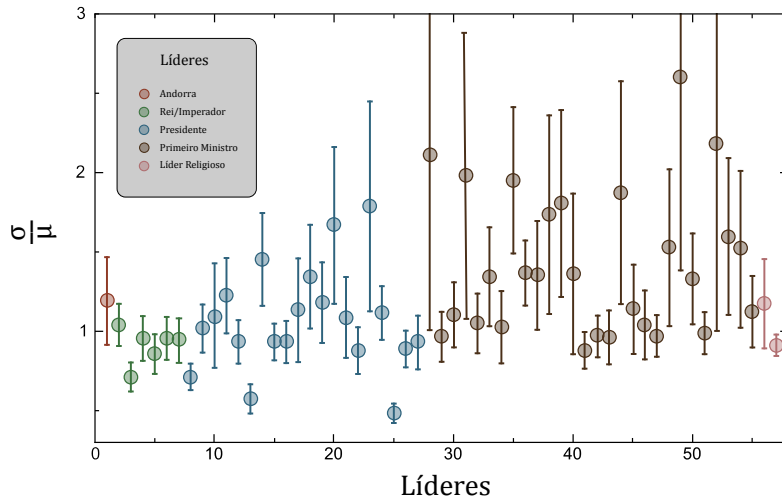


Figura 3.5: A razão do desvio padrão e da média de  $T$  para todas as lideranças. As barras de erros correspondem ao *bootstrap* de 95% do intervalo de confiança.

### 3.3.2 Distribuição de probabilidade

Nesta subseção, analisamos a de distribuição de probabilidade da série temporal  $T$  das lideranças. A função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) dos dados normalizados em escala log-log pode ser vista na Figura 3.6. O histograma foi construído tomando janelas log-espaciaadas. Curvas similares podem ser encontradas na literatura no estudo da longevidade de outros tipos de carreiras, como no beisebol profissional [162] e em publicações científicas [163]. A função densidade de probabilidade das lideranças parece obedecer a uma lei de potência<sup>3</sup> livre de escala,  $P(\tilde{T}) \sim \tilde{T}^{-\alpha}$ , sobre boa parte dos nossos dados (quase três décadas), com a cauda seguindo um decaimento que lembra uma exponencial, que pode representar um efeito da finitude da longevidade humana [163].

Também, podemos ajustar a curva como um todo usando uma composição de uma lei de potência e uma distribuição exponencial (Figura 3.7). Para tal, usamos a distribuição de Weibull [163]

$$P(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \quad (3.1)$$

<sup>3</sup> A distribuição tipo lei de potência pode ser vista no Apêndice A.

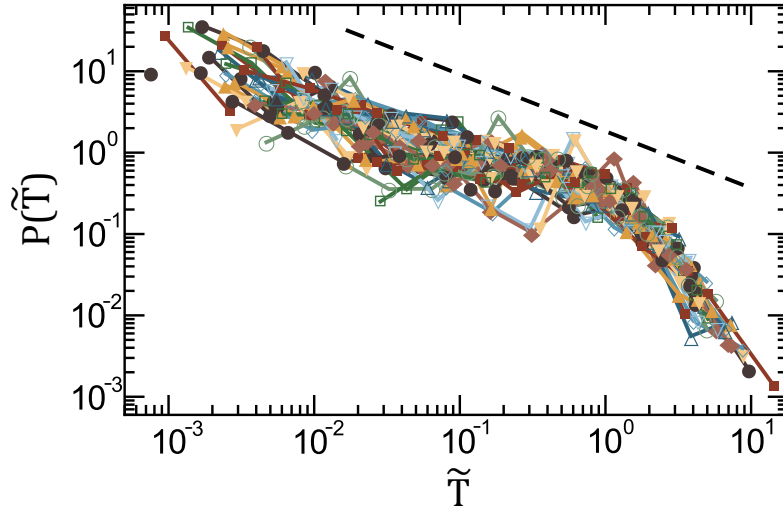


Figura 3.6: PDF das lideranças em escala log-log, usando a variável normalizada  $\tilde{T} = \frac{T}{\mu}$ . A reta tracejada é uma lei de potência com expoente  $\alpha = 0,7$ .

para  $x \geq 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\alpha > 0$ . Como estamos trabalhando com variável normalizada, temos  $\langle \tilde{T} \rangle = 1$ . Por outro lado,

$$\langle \tilde{T} \rangle = \int_0^{\infty} \tilde{T} P(\tilde{T}; \alpha, \beta) d\tilde{T} = \beta \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (3.2)$$

em que  $\Gamma(x)$  é a função gama de Euler. Assim, esse último resultado com  $\langle \tilde{T} \rangle = 1$  conduz a  $\frac{1}{\beta} = \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$  e, portanto, a [Equação 3.1](#) toma a forma

$$P(\tilde{T}; \alpha) = \alpha \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{\alpha} \tilde{T}^{-(1-\alpha)} e^{-\tilde{T}^{\alpha} \Gamma(1+1/\alpha)^{\alpha}}. \quad (3.3)$$

O método usado no ajuste é o do mínimo quadrado, e a hipótese nula de que os dados são distribuídos de acordo com a Weibull não é rejeitada com um nível de confiança de 95% baseado no teste estatístico Cramér-von Mises.

Esses resultados mostram que a lei universal que descreve o processo de carreiras no meio esportivo e acadêmico [[162](#), [163](#)] também podem delinear as linhas de sucessões de lideranças de várias partes do mundo, incluindo líderes religiosos e governantes em diversos tipos de regime de mandato, como primeiros-ministros, presidentes, reis e imperadores.

Analogamente ao [Capítulo 1](#), também analisamos a PDF da série das primeiras diferenças de  $T$ , dada por  $\Delta T$  ([Equação 1.2](#)). Assim como no caso da atividade psicomotora, observamos que essas PDFs podem ser ajustadas por uma distribuição de Laplace ([Equação 1.3](#)), porém, enquanto no caso anterior tínhamos séries com



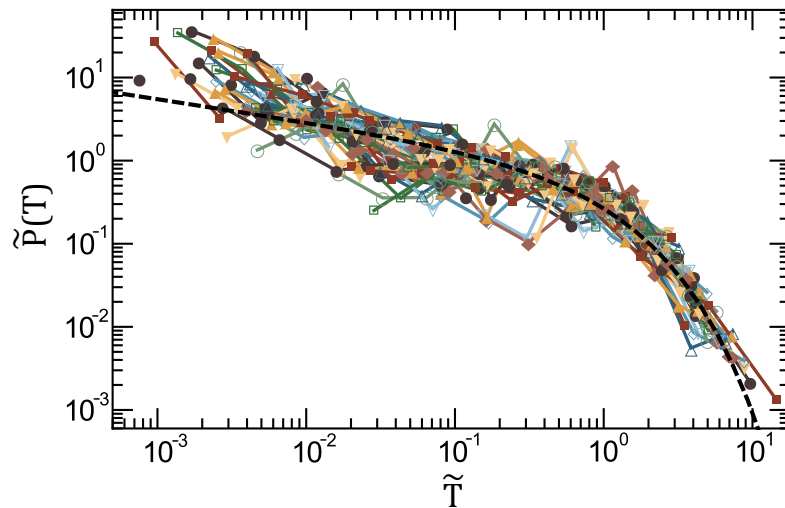


Figura 3.7: PDF das lideranças em escala log-log. A curva tracejada é a distribuição de Weibull (Equação 3.3) com  $\alpha = 0,7$ , ajustada usando o método do mínimo quadrado.

1000 dados, no caso das lideranças mundiais a série temporal é mais curta (entre 44 e 293, como pode ser visto na Tabela 3.1), e por isso, na Figura 3.8A, mostramos apenas duas das séries mais longas (Papas e Primeiro-Ministros da Espanha), e na Figura 3.8B, o colapso das distribuições da densidade de probabilidade dos incrementos normalizados ( $\Delta\tilde{T}$ , Equação 1.5) dos cinco líderes com o maior número de sucessões: Primeiro-Ministro da Espanha, Primeiro-Ministro da França, Primeiro-Ministro da Grécia, Primeiro-Ministro do Peru e o Papa. O resultado visualizado na Figura 3.8B, mesmo que grosseiramente, aponta para a existência universalidade também nesse contexto.

Na próxima seção, também investigamos se existe algum tipo de correlação de longo alcance nas séries temporais do tempo de mandato das lideranças.

### 3.3.3 (Auto)correlação na sucessão de lideranças

Como já citamos, vários fatores podem influenciar o término de uma liderança [134, 135]. Nesta seção, investigamos se as séries temporais das sucessões de líderes apresentam correlação de longo alcance. Seriam restritas a algum tipo de liderança em específico?

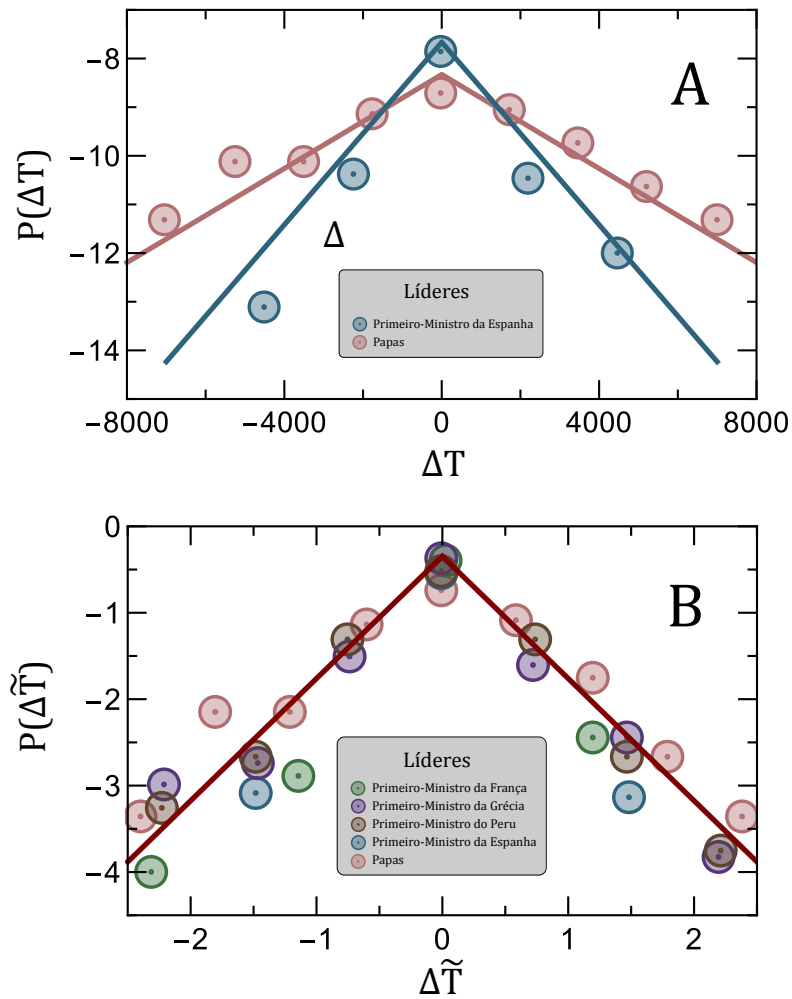


Figura 3.8: PDF das primeiras diferenças das lideranças em escala mono-log. (A) Distribuição de  $\Delta T$  para os Primeiros-Ministros da Espanha (Papás) em azul (rosa) apresentado em escala mono-log, em que a linha contínua azul (rosa) refere-se a correspondente distribuição de Laplace com  $\mu = 0$  e  $\beta = 0,15$  ( $\beta = 0,29$ ); (B) Colapso das distribuições da densidade de probabilidade dos incrementos normalizados ( $\Delta \tilde{T}$ ) nos intervalos de tempo  $\Delta T$  mostrados em escala mono-log, apontando na direção de uma universalidade, a linha contínua é dada pela [Equação 1.6](#).

Para essa análise, tal como fizemos no [Capítulo 1](#), empregamos o método do DFA, que pode ser visto com algum detalhe no [Apêndice B](#). Como está exposto nesse apêndice, o método do DFA é um tipo de análise fractal que quantifica o efeito de memória em uma série de dados por meio do expoente de Hurst ( $h$ ). É importante lembrar que uma série que exhibe correlação tem a assinatura do comportamento tipo lei de potência para a função de flutuação, isto é,

$$F(s) \propto s^h, \quad (3.4)$$

e os possíveis valores assumidos por  $h$  indicam a existência de correlação de longo alcance ( $h > 0,5$ ), anticorrelação ( $0 < h < 0,5$ ) ou, ainda, se a série não é autocorrelacionada ou possui correlação de curto alcance ( $h = 0,5$ ).

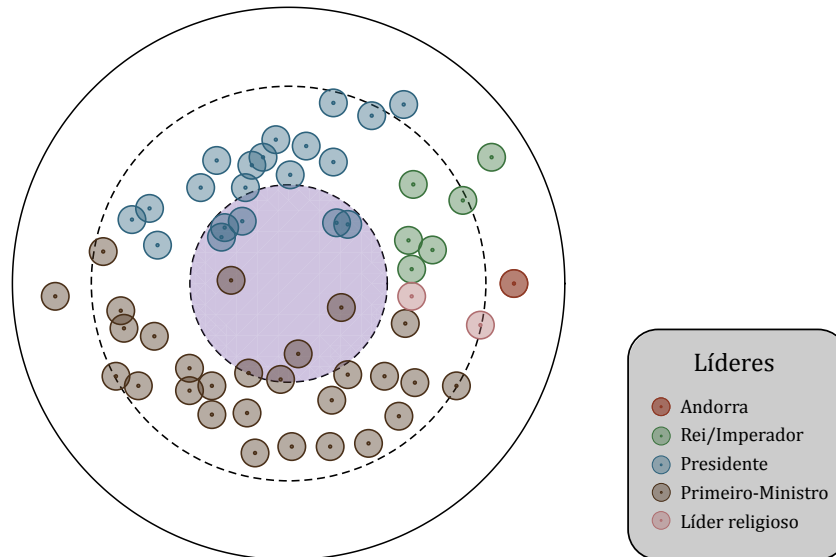


Figura 3.9: **Expoente de Hurst  $h$  obtido via DFA para o tempo de mandato de líderes.** As linhas tracejadas representam, de dentro para fora, ao expoente  $h = 0,5$  e 1. A região em roxo corresponde aos expoentes em que a série não apresenta comportamento correlacionado.

Os resultados do método do DFA aplicado aos dados das lideranças podem ser vistos na [Figura 3.9](#). Dessa figura, vemos que 81% das lideranças apresentam expoente  $h > 0,5$ . Apenas três lideranças (5%) apresentaram  $h \sim 0,5$ : o presidente de Honduras, o primeiro-ministro da Itália e o primeiro-ministro do Líbano. E outras oito lideranças (14%) tiveram o expoente  $h < 0,5$ : o presidente da Argentina, o presidente da Bolívia, o presidente da Nicarágua, o presidente do Paraguai, o presidente do Peru, o primeiro-ministro da Bélgica, o primeiro-ministro da Nova Zelândia e o primeiro-ministro da Inglaterra.

Como nossas séries são relativamente curtas, com comprimento entre 44 (presidentes da Bósnia e Herzegovina e EUA) e 293 (Papas) eventos, testamos os dados que apresentaram um valor relevante para o expoente  $h$ , embaralhando as séries mil vezes e aplicando o DFA nas séries embaralhadas. Observamos que 33% das lideranças apresentaram menos de 2% dos valores do expoente  $h$  das séries embaralhadas dentro do intervalo de confiança de 99% da série original. Em outras palavras, ave-

riguamos se, ao embaralharmos as séries originais, o expoente seria  $h \sim 0,5$ , mas, devido ao comprimento das séries, esses valores poderiam sofrer flutuações, então, desejamos investigar o quanto essas oscilações poderiam se aproximar do valor do expoente encontrado para a série original, de forma que usamos o seu intervalo de confiança para medir o quanto esses valores poderiam estar próximos. Nesse caso, menos de 2% do valor de  $h$  para as séries embaralhadas se aproximaram do valor do expoente para a série original. Enquanto 32% (27% com  $h > 0,5$  e 7% com  $h < 0,5$ ) apresentaram entre 2% e 20%, e 30% (23% com  $h > 0,5$  e 7% com  $h < 0,5$ ) exibiram mais de 20%. Essas informações estão resumidas na [Tabela 3.2](#). Então, podemos afirmar que pelo menos um terço dos países analisados apresentam persistência em sua série de sucessão, mesmo contando com séries curtas.

Como um dos nossos objetivos era verificar a presença ou não de correlações nas séries do tempo de mandato de líderes ([Figura 3.9](#)), não investigamos correlações em séries derivadas, por exemplo, nas séries de módulos e sinais.

### 3.4 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, examinamos 57 séries temporais das sucessões de líderes mundiais, sendo eles reis, imperadores, presidentes, primeiros-ministros ou líderes religiosos. Nossa proposta era analisar quantitativamente o tempo em que essas lideranças exerceram suas funções e buscar possíveis padrões nessas séries. Buscamos encontrar, ainda, alguma similaridade intrínseca mesmo diferindo em vários aspectos, como o modo pelo qual esse papel de liderança foi alcançado ou os motivos pelos quais ele foi deixado, já que vários fatores podem contribuir para a sobrevivência ou a morte política de um líder.

Primeiramente, investigamos as séries temporais aplicando médias móveis e observamos que o tempo médio em função tem aumentado em 56% dos casos estudados. Alguns desses exemplos podem ser vistos na [Figura 3.2](#). Outros 37% parecem ter alcançado uma certa estabilidade, enquanto apenas 7% mostraram estar em declínio. Esta pode ser uma característica em que o respectivo país enfrenta instabilidade, violência política e até mesmo guerras ([Figura 3.3](#)). Depois, comparamos o tempo médio de mandato para cada liderança e averiguamos que presidentes e primeiros-

Tabela 3.2: Expoente de Hurst.

$h$	$< 0,5$	$\sim 0,5$	$> 0,5$
			Andorra Francesa (Copríncipe)
			Bósnia e Hezergóvina (Presidente)
			Bulgária (Primeiro-Ministro)
			Butão (Líder religioso)
			Chile (Presidente)
			Dinamarca (Primeiro-Ministro)
			Espanha (Primeiro-Ministro)
			Finlândia (Primeiro-Ministro)
$< 2\%$			França (Imperador)
			França (Primeiro-Ministro)
			Grécia (Primeiro-Ministro)
			Japão (Imperador)
			Jordânia (Primeiro-Ministro)
			Polônia (Primeiro-Ministro)
			Romênia (Primeiro-Ministro)
			Síria (Primeiro-Ministro)
			Uruguai (Presidente)
			Vaticano (Papas)
	Bélgica (Primeiro-Ministro)		Albânia (Primeiro-Ministro)
	Bolívia (Presidente)		Camboja (Rei)
	Inglaterra (Primeiro-Ministro)		Costa Rica (Presidente)
	Nova Zelândia (Primeiro-Ministro)		Egito (Primeiro-Ministro)
			El Salvador (Presidente)
			Estados Unidos (Presidente)
$> 2\%$			Hungria (Primeiro-Ministro)
$< 20\%$			Iraque (Primeiro-Ministro)
			Japão (Primeiro-Ministro)
			Nepal (Primeiro-Ministro)
			Noruega (Primeiro-Ministro)
			México (Presidente)
			Peru (Primeiro-Ministro)
			República Donimicana (Presidente)
			Suécia (Rei)
	Argentina (Presidente)	Equador (Presidente)	Camboja (Primeiro-Ministro)
	Nicarágua (Presidente)	Honduras (Presidente)	Colômbia (Presidente)
	Paraguai (Presidente)	Itália (Primeiro-Ministro)	Dinamarca (Rei)
	Peru (Presidente)	Líbano (Primeiro-Ministro)	Guatemala (Presidente)
$> 20\%$		Portugal (Primeiro-Ministro)	Haiti (Presidente)
			Inglaterra (Rei)
			Iran (Primeiro-Ministro)
			Sérvia (Primeiro-Ministro)
			Ucrânia (Primeiro-Ministro)
			Venezuela (Presidente)

ministros apresentam um valor médio menor que reis, imperadores e líderes políticos como seria esperado. Por outro lado, o tempo médio em que os líderes religiosos do Butão e da Igreja Católica exerceram suas colocações está mais próximo da média dos tempos dos presidentes e primeiros-ministros, sendo um pouco superior, mas ainda inferior aos dos reis, dos imperadores e ao copríncipe de Andorra.

Examinamos a distribuição de probabilidade dessa série temporal e observamos que ela apresenta uma queda seguida de uma cauda com decaimento mais acentuado, e a ajustamos usando duas diferentes curvas. Primeiro, empregamos uma lei de potência para a qual encontramos o expoente  $\alpha = 0,7$  (Figura 3.6), sendo que este parâmetro é encontrado na literatura para a distribuição da longevidade das carreiras no beisebol profissional como  $\alpha = 1$  [162]. A seguir, usamos uma distribuição de Weibull, que é uma composição de uma lei de potência com uma distribuição tipo exponencial, a fim de descrever o comportamento da curva incluindo sua cauda, que apresenta um decaimento tipo exponencial que pode ser devido à finitude do tempo de vida humano; e encontramos  $\alpha = 0,7$  (Figura 3.7), valor que está de acordo com o encontrado na literatura para a longevidade de carreiras na Academia, no beisebol, no basquetebol e no futebol profissional [163]. Observamos que a função densidade de probabilidade das primeiras diferenças de  $T$  ( $\Delta T$ ) podem ser ajustadas pela distribuição de Laplace (Figura 3.8A) e que os incrementos normalizados ( $\Delta \tilde{T}$ ) colapsam sob os mesmos parâmetros da distribuição (Figura 3.8B). Porém, as sucessões dos líderes mundiais são curtas para os padrões estatísticos que estamos interessados, por isso, mostramos na Figura 3.8, apenas algumas das séries mais longas.

Na última parte da nossa análise, investigamos a existência de persistência nas séries de lideranças via o método DFA. Vimos que 81% dessas séries apresentam comportamento persistente, expoente de Hurst maior que meio. Apenas 5% das séries temporais apresentaram expoente  $h \sim 0,5$ . E 14% delas correspondem a  $h < 0,5$ . Livre de possíveis flutuações causadas pelo comprimento relativamente curto das séries de dados, podemos afirmar que pelo menos 33% das lideranças mostraram ser persistentes. Outros 48% também apresentaram comportamento persistente e, em alguns casos (14%) anti-persistente. Mas, devido às flutuações dos valores encontrados para o expoente  $h$  ao embaralharmos a série original, não podemos afirmar a existência dessa correlação.

Em suma, nosso objetivo nesse capítulo foi estudar quantitativamente uma classe de dados que possui uma vasta literatura de análise qualitativa de casos pontuais [128, 129, 138, 133, 130, 134, 135, 131, 137, 132, 136], mas sem cobrir longitudinalmente as sucessões de lideranças. Observamos que o tempo médio das lideranças exercendo suas funções tem aumentado ou estabilizado na maioria dos casos; verificamos que, de modo geral, a longevidade desses líderes em cargo é similar à observada para outros tipos de carreira, como a acadêmica e a esportiva; e, finalmente, encontramos um comportamento persistente na maioria dessas séries temporais.

## CONCLUSÕES

---

Nesta tese, foram estudados três diferentes cenários de sistemas complexos: uma atividade psicomotora, epidemias de dengue no Brasil e o tempo em exercício de lideranças mundiais.

No [Capítulo 1](#), analisamos estatisticamente a resposta da aprendizagem de uma atividade psicomotora caracterizada por blocos de tarefas muito longos e sem pausas. De modo geral, podemos dizer que a aprendizagem psicomotora está vinculada com a habilidade física, relacionando funções cognitivas com movimentos físicos direcionados a atingir um objetivo [66]. Na atividade que analisamos, as funções cognitivas estão associadas ao processo de tomada de decisão de seguir a sequência de cores e, então, buscar pela respectiva conta no conjunto de contas dentro do recipiente inicial. Por outro lado, há o movimento físico compreendido em selecionar a conta correspondente à sequência de cores e depositá-la no recipiente apropriado. Durante a análise, identificamos quantitativamente medidas do perfil da aptidão usando o tempo de reação entre as tarefas na aprendizagem da prática. Nesse caso, a aprendizagem psicomotora poderia estar ligada à eficiência psicomotora medida por meio do perfil do tempo de reação.

Em suma, mostramos que o tempo médio gasto com cada conta é significativamente menor no segundo turno da atividade, em comparação ao primeiro turno para 79% dos participantes, fato este que pode estar relacionado a uma melhora na eficiência dos participantes na execução da atividade em questão. A prática reduz o intervalo de tempo para completar a tarefa e a variabilidade, desvio padrão dividido pela média, revelou-se constante para cada indivíduo. Identificamos que o tempo de reação segue uma distribuição unimodal, cujos parâmetros variam de acordo com características intrínsecas dos participantes e seu nível de treinamento.

A série temporal das primeiras diferenças tem forma simétrica que satisfaz a distribuição de Laplace, sendo que cada participante tem diferentes parâmetros de escala. Além das distribuições serem centradas nas vizinhanças de zero, a aprendizagem característica tende a reduzir a largura delas, que está indistinguívelmente conec-



tada à prática muito prolongada. A seguir, analisamos o perfil da correlação na série temporal do tempo de reação ( $T$ ) e sua primeira diferença ( $\Delta T$ ). Obtivemos que a série temporal de  $T$  não exhibe efeito de memória. Em contraste, a série temporal  $\Delta T$  apresenta duas propriedades: (i) seu valor absoluto é persistente; (ii) seu sinal é antipersistente. É interessante notar que o efeito de aprendizagem devido à prática não introduz persistência na série temporal do tempo de reação.

Vale salientar que nosso objetivo principal, quando olhamos para um longa sequência de tarefas sem pausas, era investigar as propriedades da aprendizagem; em particular, as relacionadas a correlações, que podem ser modificadas ou mascaradas quando os dados são organizados em blocos menores de tarefas. Nosso estudo focou no comportamento local de uma atividade muito prolongada, e não no comportamento global, no sentido de observar o efeito da aprendizagem visto com a repetição dos blocos de uma atividade típica, como apertar botões [67, 68]. Por conseguinte, a curva de aprendizagem tradicional, que é extensivamente explorada na literatura [69, 70], não pôde ser identificada. No entanto, a aprendizagem psicomotora devido à atividade se torna evidente quando consideramos o decréscimo na média do tempo de reação de diferentes blocos e as respectivas flutuações em torno de seu valor médio.

Outra evidência notável foi encontrada na largura da distribuição de Laplace, cujo valor foi menor depois da prática. Em contraste com o desvio padrão e o valor médio, os padrões da variabilidade, a família das distribuições de probabilidade e a persistência medida com o expoente de Hurst são universais, isto é, eles não dependem do treinamento. Assim, nossos resultados são consistentes com um cenário em que a prática pode ser associada com um fator de escala na série temporal.

No [Capítulo 2](#), mostramos que, em pequenas escalas espaciais, ou seja, em nível de cidades, a distribuição dos casos de dengue tem um comportamento robusto tipo lei de potência em toda a extensão dos dados (doze anos) com um expoente médio negativo, cujo módulo é  $\alpha \simeq 1,81$ . O surgimento do comportamento tipo lei de potência tem um padrão distinto: a lei de potência decai mais lentamente do que regimes exponenciais e é típica de fenômenos críticos naturais.

Com a finalidade de comparar a distribuição dos casos de dengue no Brasil, analisamos como essa distribuição escala com a população da região onde os casos estão centrados. Caracterizamos as epidemias de dengue sobre todas as cidades brasilei-

ras consideradas pela sua localização geográfica. A dependência dos casos de dengue com a longitude das cidades também foi assinalada e não foi possível obter uma clara tendência nos valores médios para uma grande extensão restrita pela longitude. A dependência dos casos de dengue com a latitude das cidades conduz a duas regiões distintas: um crescimento quase linear até o trópico de Capricórnio e uma região quase estável entre o trópico de Capricórnio e a linha do Equador.

A distribuição das flutuações próximas da tendência média (resíduos) é não Gaussiana e fortemente conectada com a distribuição de habitantes das cidades. Também, investigamos a correlação espacial dos casos de dengue entre pares de cidades. Nossos resultados mostram que a função de correlação em termos das distâncias entre cada par de cidades decai como uma lei de potência vezes um fator exponencial. Esse truncamento é usualmente relacionado à finitude do sistema. A lei de potência, por sua vez, foi modelada como uma manifestação de um processo difusivo generalizado. Nesse modelo, incorporamos difusão de longo alcance via a derivada fracionária de Riesz, que tem como uma das motivações a grande mobilidade dos seres humanos. Além disso, há um ruído branco na distribuição que incorpora contribuições de fatores aleatórios como os oriundos de possíveis imprevisibilidades climáticas.

No [Capítulo 3](#), examinamos 57 séries temporais das sucessões de líderes mundiais, sendo eles reis, imperadores, presidentes, primeiros-ministros ou líderes religiosos. Nossa proposta era analisar quantitativamente o tempo em que essas lideranças exerceram suas funções e buscar possíveis padrões nessas séries. Buscamos encontrar, ainda, alguma similaridade intrínseca mesmo diferindo em vários aspectos, como o modo pelo qual esse papel de liderança foi alcançado ou os motivos pelos quais ele foi deixado, já que vários fatores podem contribuir para a sobrevivência ou a morte política de um líder.

Primeiramente, investigamos as séries temporais aplicando médias móveis, e observamos que o tempo médio em função tem aumentado em 56% dos casos estudados. Outros 37% parecem ter alcançado uma certa estabilidade, enquanto apenas 7% mostraram estar em declínio. Esta pode ser uma característica em que o respectivo país enfrenta instabilidade, violência política e até mesmo guerras. Depois, comparamos o tempo médio de mandato para cada liderança e averiguamos que presidentes e primeiros-ministros apresentam um valor médio menor que reis e imperadores, como seria esperado. Por outro lado, o tempo médio em que os líderes religiosos do

Butão e da Igreja Católica exerceram suas colocações está mais próximo da média dos presidentes e primeiros-ministros, sendo um pouco superior, mas ainda inferior aos dos reis, dos imperadores e ao do copríncipe de Andorra.

Examinamos a distribuição de probabilidade dessa série temporal e observamos que ela apresenta uma redução seguida de uma cauda com um decaimento mais acentuado, e a ajustamos usando duas diferentes curvas. Primeiro, empregamos uma lei de potência para a qual encontramos o expoente negativo com módulo  $\alpha = 0,7$ , sendo que o correspondente expoente encontrado na literatura para a distribuição da longevidade das carreiras no beisebol profissional é  $\alpha = 1$  [162]. A seguir, usamos uma distribuição de Weibull, a fim de descrever o comportamento da curva incluindo sua cauda, que apresenta um decaimento tipo exponencial devido à finitude do tempo de vida humano; e encontramos o resultado que está de acordo com os obtidos na literatura para a longevidade de carreiras na Academia, no beisebol, no basquetebol e no futebol profissional [163]. E assim como nos dados da atividades psicomotora estudada no [Capítulo 1](#), a distribuição de probabilidade das primeiras diferenças de alguns das séries temporais dos líderes mundiais podem ser ajustadas por uma distribuição de Laplace.

Na última parte da nossa análise, investigamos a existência de persistência nas séries de lideranças via o método DFA. Livre de possíveis flutuações causadas pelo comprimento relativamente curto das séries de dados, podemos afirmar que pelo menos 33% das lideranças mostraram ser persistentes,  $h > 0,5$ . Outros 48% também apresentaram comportamento persistente e, em alguns casos (14%), antipersistente. Em suma, nosso objetivo nesse capítulo foi estudar quantitativamente uma classe de dados que possui uma vasta literatura de análise qualitativa de casos pontuais.

Observamos que o tempo médio das lideranças exercendo suas funções tem aumentado ou estabilizado na maioria dos casos; verificamos que, de modo geral, a longevidade desses líderes em cargo é similar à observada para outros tipos de carreira, como a acadêmica e a esportiva; e, finalmente, encontramos um comportamento persistente nessas séries temporais.

Parte II

APÊNDICE

A probabilidade de algo ocorrer é a quantificação da chance de observar um resultado particular diante de um único evento. O próprio evento pode ser o resultado de um único experimento ou um único dado coletado por um experimento sem repetição. Se quantificamos a probabilidade de um experimento no qual ocorrem repetições, então, podemos fazer previsões dos seus resultados futuros. Não podemos prever o resultado desse experimento com certeza, no entanto, há um nível de confiança para nossas previsões, que incorporam a incerteza do nosso conhecimento prévio e as limitações do experimento. [51].

Neste apêndice, introduzimos alguns conceitos de probabilidade, função densidade de probabilidade, valor médio, desvio padrão, histograma e *bootstrap*.

#### A.1 REGRAS ELEMENTARES

Se considerarmos um conjunto de dados  $\Omega = \{x \mid x_i\}$  que contém todos os possíveis eventos elementares  $x_i$ , podemos definir a probabilidade,  $P(x_i)$ , de obter um certo resultado ou evento. Escrevemos algumas características relevantes de  $P(x_i)$ :

1. A probabilidade de qualquer  $x_i$  ocorrer é não negativa:  $P(x_i) \geq 0$  para todo  $i$ ;
2. A probabilidade de qualquer  $x_i$  ocorrer tem limite superior unitário;  $P(x_i) = 1$  corresponde a um evento  $x_i$  como o resultado certo de uma medida;
3. Dados dois eventos excludentes  $x_i$  e  $x_j$ , a probabilidade para um ou outro ocorrer é obtida por

$$P(x_i \text{ ou } x_j) = P(x_i) + P(x_j); \quad (\text{A.1})$$

4. A probabilidade de todos os eventos possíveis excludentes em  $\Omega$  ocorrerem é

$$P(\Omega) = \sum_i P(x_i) = 1; \quad (\text{A.2})$$

5. Dados dois eventos independentes  $x_i$  e  $x_j$ , a probabilidade de ambos ocorrerem é obtida por

$$P(x_i \text{ e } x_j) = P(x_i) \cdot P(x_j). \quad (\text{A.3})$$

## A.2 FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

A função densidade de probabilidade geralmente referida pela sigla da expressão em inglês *probability density function* (PDF), pode ser vista como uma distribuição em que a área total é unitária. O valor da PDF está relacionada com a probabilidade de algo ocorrer na vizinhança de um ponto no espaço paramétrico.

Se considerarmos o caso simples de uma PDF unidimensional que descreve uma distribuição uniforme de alguma variável  $x$  entre os valores  $-1$  e  $+1$ , então a PDF  $f(x)$  é simplesmente uma linha reta com gradiente zero. A função em si é dada por  $f(x) = \frac{1}{A}$ , em que  $A$  é a constante de normalização determinada por  $A = \int_{-1}^1 dx = 2$ . Então, nesse exemplo, a PDF é dada por  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

Se o conjunto de dados é descrito por uma PDF, podemos usá-la para saber se temos maior probabilidade de encontrar um valor nas vizinhanças de  $x = x_1$  que nas vizinhanças de  $x = x_2$ . Por exemplo, se considerarmos a PDF uniforme discutida acima, é igualmente provável encontrar um valor nas vizinhanças de qualquer ponto entre os valores máximo e mínimo de  $x$ . De forma mais geral, uma PDF pode ser descrita por alguma função  $f(x)$  não negativa, em que  $\int_a^b f(x) dx = 1$  e  $a$  e  $b$  representam os limites do domínio válido da função. A probabilidade de obter um resultado entre  $x$  e  $x + dx$  é  $f(x)dx$  [51].

## A.3 VALORES MÉDIOS E DESVIO PADRÃO

Seja  $u$  uma variável aleatória que pode assumir  $N$  valores discretos, tal que  $u_i$  ocorra com probabilidade  $P_i = P(u_i)$ . O valor médio ou o valor esperado da variável  $u$  é definido por

$$\langle u \rangle = \sum_{i=1}^N u_i P(u_i). \quad (\text{A.4})$$

Se  $f(u)$  for uma função de  $u$ , o valor esperado de  $f(u)$  será dado por

$$\langle f(u) \rangle = \sum_{i=1}^N f(u_i)P(u_i). \quad (\text{A.5})$$

Segue dessa definição que

1.  $\langle f(u) + g(u) \rangle = \langle f(u) \rangle + \langle g(u) \rangle$  e
2.  $\langle cf(u) \rangle = c\langle f(u) \rangle$ ,

em que  $c$  é uma constante e  $f$  e  $g$  são funções de  $u$ .

O desvio da média é definido por  $\Delta u = u - \langle u \rangle$ . É claro que  $\langle \Delta u \rangle = \langle (u - \langle u \rangle) \rangle = 0$ , ou seja, o valor médio do desvio da média é de muito pouca utilidade. Em vez disso, usaremos o desvio quadrático que é dado por  $(\Delta u)^2 = (u - \langle u \rangle)^2$ .

A dispersão é o valor médio do desvio quadrático dada por

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2. \quad (\text{A.6})$$

Temos que  $\langle (\Delta u)^2 \rangle \geq 0$ , ou seja,  $\langle u^2 \rangle \geq \langle u \rangle^2$ . A dispersão, muitas vezes, é chamada de variância<sup>1</sup> e a raiz quadrada da dispersão é o conhecido desvio padrão,  $\sigma_u = \sqrt{\langle (\Delta u)^2 \rangle}$ . A comparação entre o desvio padrão e o valor médio é muito importante, pois fornece uma ideia da largura da distribuição de probabilidade, ou seja, indica se a distribuição é muito fina e centrada no valor médio ou muito espalhada, com grandes flutuações de valores em torno da média. Finalmente, podemos definir o momento em relação à média de ordem  $n$ ,

$$\langle (\Delta u)^n \rangle = \langle (u - \langle u \rangle)^n \rangle, \quad (\text{A.7})$$

que também poderá ser de utilidade. Se os momentos são finitos, sempre é possível reconstruir uma distribuição de probabilidades. No entanto, em muitos casos de interesse, para um número grande de eventos, basta um conhecimento dos dois primeiros momentos,  $\langle u^2 \rangle$  e  $\langle u \rangle$  [3].

Para alguma PDF denotada por  $P(x)$  que descreva uma distribuição contínua, também podemos calcular o valor esperado de alguma quantidade como uma integral

---

<sup>1</sup> A variância quantifica o espalhamento ou dispersão dos dados ao redor do valor médio.

sobre ela multiplicada pela PDF. Por exemplo, o valor esperado<sup>2</sup> da variável  $x$ , distribuída de acordo com a PDF  $P(x)$  no domínio  $-\infty < x < +\infty$ , é

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx. \quad (\text{A.8})$$

Se substituirmos a variável  $x$  na [Equação A.8](#) por uma expressão mais complexa, podemos calcular o valor esperado de outras quantidades [51]. Por exemplo, o valor médio de  $(\Delta x)^2 = (x - \langle x \rangle)^2$  é dado por

$$\sigma_x^2 = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 P(x) dx. \quad (\text{A.9})$$

#### A.4 ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES

Nas subseções a seguir, apresentamos, de forma sucinta, as distribuições usadas neste trabalho.

##### A.4.1 Distribuição exponencial

A distribuição exponencial é definida como

$$P(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (\text{A.10})$$

em que  $\langle x \rangle = \frac{1}{\lambda}$ . Na [Figura A.1](#), podemos ver distribuições exponenciais com  $\lambda = 0,5$ , 1 e 2. A [Equação A.10](#) expressa a densidade de probabilidade para valores positivos e reais de  $x$ ; para valores negativos, a densidade de probabilidade é igual a zero.

##### A.4.2 Distribuição de Laplace

A densidade de probabilidade da distribuição de Laplace é definida por

$$P(x; \mu, \beta) = \frac{1}{2\beta} e^{-|x-\mu|/\beta}, \quad (\text{A.11})$$

---

<sup>2</sup> Uma maneira de quantificar um valor característico é tomando a média aritmética (ou valor médio,  $\langle x \rangle$ ) das medidas individuais.



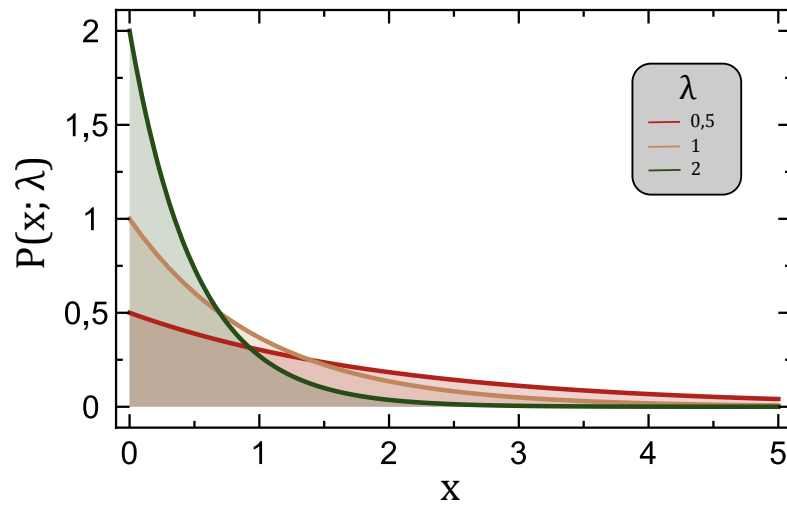


Figura A.1: Distribuições exponenciais com  $\lambda = 0,5, 1$  e  $2$ .

em que  $\mu$  é o valor médio e  $\beta$  é um parâmetro de escala, sendo  $\sqrt{2}\beta$  o desvio padrão e  $2\beta^2$  a variância. O parâmetro  $\mu$  pode assumir qualquer valor real e  $\beta$  qualquer número real positivo. A distribuição de Laplace representa a distribuição das diferenças entre duas variáveis aleatórias independentes com distribuições exponenciais idênticas. A Figura A.2 mostra uma distribuição de Laplace com  $\mu = 0$  e  $\beta = 0,5, 1$  e  $2$ .

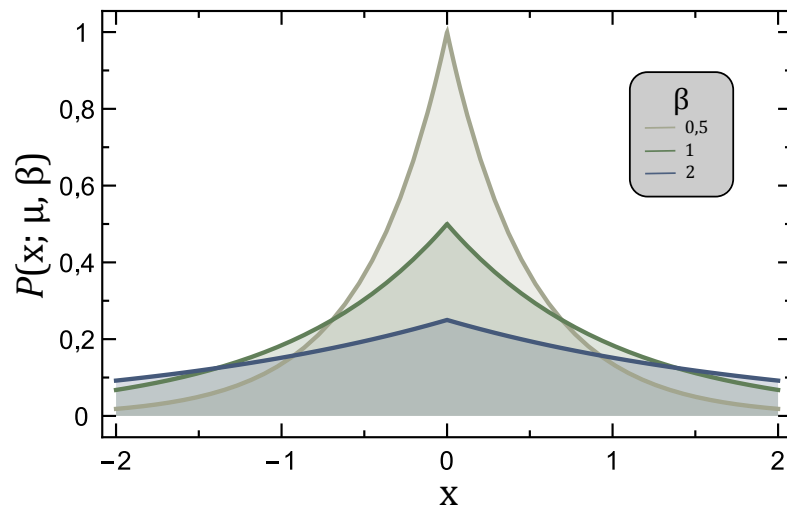


Figura A.2: Distribuições de Laplace com  $\mu = 0$  e  $\beta = 0,5, 1$  e  $2$ .

### A.4.3 Distribuição Gaussiana

A distribuição Gaussiana<sup>3</sup>, também conhecida como distribuição normal, como uma função de alguma variável  $x$ , é dada por

$$P(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (\text{A.12})$$

em que a integral de  $-\infty$  a  $+\infty$  é igual a um. A [Figura A.3](#) ilustra distribuições Gaussianas com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 0,75, 1$  e  $2$ . Na distribuição Gaussiana,  $\mu$  (o valor médio) pode ser qualquer número real; e  $\sigma$  (o desvio padrão) pode ser qualquer número real positivo.

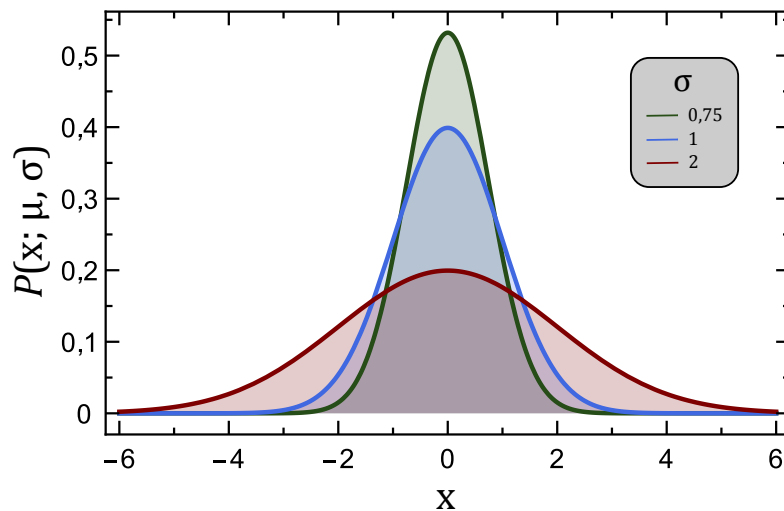


Figura A.3: Distribuições Gaussianas com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 0,75, 1$  e  $2$ .

### A.4.4 Distribuição ex-Gaussiana

Distribuições de probabilidade podem ser obtidas a partir de outras. Um exemplo é quando uma distribuição  $P$  é descrita por uma convolução de duas outras,  $P_1$  e  $P_2$ . Para entender como isso pode ocorrer, suponha o intervalo de  $0$  a  $x$  passando por  $x'$ . O primeiro trecho, de  $0$  a  $x'$ , corresponde a um passo obedecendo a PDF  $P_1$ . O segundo

<sup>3</sup> Para variáveis que seguem uma distribuição Gaussiana, podemos esperar que: 31,7% das medidas desviem do valor médio por mais de  $1\sigma$ ; 4,5% das medidas desviem por mais de  $2\sigma$ ; e 0,3% das medidas desviem por mais de  $3\sigma$  [51].

trecho, de  $x'$  a  $x$ , é ditado pela PDF  $P_2$ . Desse modo, escrevemos a função densidade de probabilidade para as duas distribuições como  $P_1(x')$  e  $P_2(x - x')$  respectivamente. Supondo que  $P_1(x')$  e  $P_2(x - x')$  não dependem uma da outra, a probabilidade total será o produto das duas funções. Considerando ainda que  $x'$  pode estar em qualquer ponto, a probabilidade correspondente ao produto  $P_1(x')P_2(x - x')$  deve ser excludente de outra com outro  $x'$ . Como a probabilidade de ocorrer quaisquer um dos eventos excludentes é a soma desses, devemos somar sobre todos os  $x'$ s. Assim, temos a convolução

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x')P_2(x - x')dx'. \tag{A.13}$$

Para ilustrar o uso da [Equação A.13](#), vamos supor que  $P_1$  é uma distribuição Gaussiana, [Equação A.12](#), e  $P_2$  é uma distribuição exponencial, [Equação A.10](#). Obtemos, portanto,

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x'-\mu)^2/2\sigma^2} \lambda e^{-\lambda(x-x')} dx'. \tag{A.14}$$

No limite superior de integração, usamos  $x$  em vez de  $\infty$ , pois, na distribuição exponencial,  $P_2(x - x') = 0$  se  $x - x' < 0$ . Se empregarmos a variável  $y = \frac{x'}{\sigma} - (\frac{\mu}{\sigma} + \lambda\sigma)$  em vez de  $x'$  na [Equação A.14](#), chegamos a

$$P(x; \lambda, \mu, \sigma) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda[x - (\mu - \sigma^2/2)]} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma} - \lambda\sigma} e^{-y^2/2} dy. \tag{A.15}$$

Alternativamente, essa PDF pode ser reescrita como

$$P(x; \lambda, \mu, \sigma) = \lambda e^{-\lambda[x - (\mu - \sigma^2/2)]} \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma} - \lambda\sigma\right), \tag{A.16}$$

em que

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] \tag{A.17}$$

é a distribuição acumulada de uma distribuição normal com média nula e desvio padrão unitário e

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy \tag{A.18}$$

é a função erro.

Por ter sido obtida a partir de distribuições exponencial e Gaussiana, a PDF acima, a [Equação A.15](#) ou a [Equação A.16](#) é usualmente conhecida como distribuição ex-Gaussiana [54, 55]. Assim, se depender dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ , a ex-Gaussiana é uma PDF que lembra uma exponencial com flutuações Gaussianas.

## A.4.5 Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull<sup>4</sup> é uma distribuição de probabilidade contínua dada pela equação,

$$P(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, \quad (\text{A.19})$$

para  $x > 0$ , e zero para  $x < 0$ .  $\alpha$  é um parâmetro de forma,  $\beta$  é um parâmetro de escala, e ambos devem ser números reais positivos. Seu valor médio é dado por  $\beta\Gamma(1 + 1/\alpha)$ . A Figura A.4 ilustra distribuições de Weibull com  $\beta = 2$  e  $\alpha = 0,5, 2$  e  $4$ .

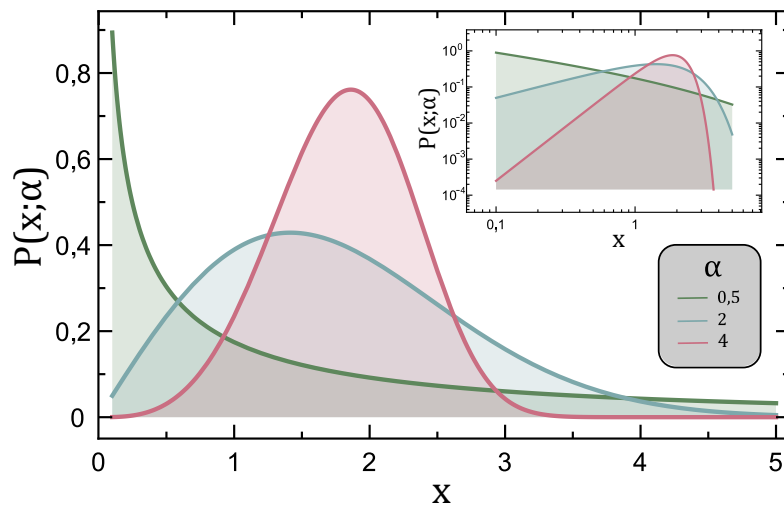


Figura A.4: Distribuições de Weibull em escala normal com  $\beta = 2$  e  $\alpha = 0,5, 2$  e  $4$ . No detalhe, as mesmas distribuições em escala log-log.

## A.4.6 Distribuição tipo lei de potência

Uma distribuição tipo lei de potência é usualmente escrita como

$$P(x) \propto x^{-\alpha} \quad (\text{A.20})$$

com  $x_0 \leq x \leq \infty$  e  $\alpha > 1$ . Comumente, essa distribuição é usada para descrever o comportamento assintótico de uma distribuição de probabilidade quando  $x > x_0$ .

<sup>4</sup> A distribuição de Weibull recebe esse nome em referência ao cientista, engenheiro e matemático suíço Ernst Hjalmar Waloddi Weibull, que a descreveu em detalhes em 1951[164].

Um dos atributos da lei de potência é sua invariância de escala. Dada uma relação  $f(x) = ax^\alpha$ , ao escalarmos o argumento  $x$  por um fator constante  $c$ , apenas fazemos com que a função se torne proporcional a ela mesma, ou seja,

$$f(cx) = a(cx)^\alpha = c^\alpha f(x) \propto f(x). \quad (\text{A.21})$$

Notamos, ainda, que a [Equação A.20](#) produz uma relação linear quando o logaritmo é tomado, o que pode ser visto na [Figura A.5](#).

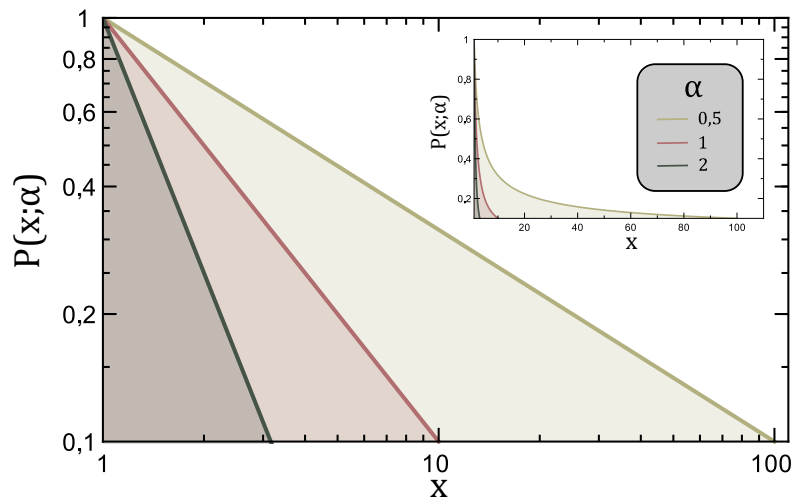


Figura A.5: **Distribuições tipo lei de potência em escala log-log para  $\alpha = 0,5, 1$  e  $2$ .** No detalhe, as mesmas distribuições em escala normal.

## A.5 HISTOGRAMAS

Freqüentemente, é muito conveniente descrever os dados de modo sucinto, seja em uma representação visual ou por meio de uma breve descrição quantitativa. Dado um conjunto de dados, é bastante construtivo quando eles são dispostos em um histograma, que é uma representação gráfica em que os dados são dispostos em janelas discretas. Geralmente, a contagem de eventos dentro de cada janela é mostrada no eixo vertical e o valor de cada janela no eixo horizontal. A [Figura A.6](#) mostra histogramas para o mesmo conjunto de dados, mas janelas de diferentes tamanhos. A vantagem em construir um histograma em vez de uma tabela é que podemos rapidamente obter uma impressão da forma dos dados como uma função das diferentes

janelas, assim como uma quantidade relativa de cada janela. O uso de histogramas se torna mais evidente quando consideramos problemas complexos.

A “integral” do histograma que contém um certo número de janelas  $l$ , dado um número de entradas (ou eventos)  $N$ , é

$$A = \sum_{i=1}^l y_i w_i \Delta x_i, \quad (\text{A.22})$$

em que  $y_i$  é o número de entradas,  $w_i$  é o peso da entrada e  $\Delta x_i$  é a largura da  $i$ -ésima janela. Desse modo, a soma sobre  $y_i$  é  $N$ . Frequentemente, o peso de cada evento é o mesmo e, em tais circunstâncias, a [Equação A.22](#) pode ser simplificada de acordo com o caso.

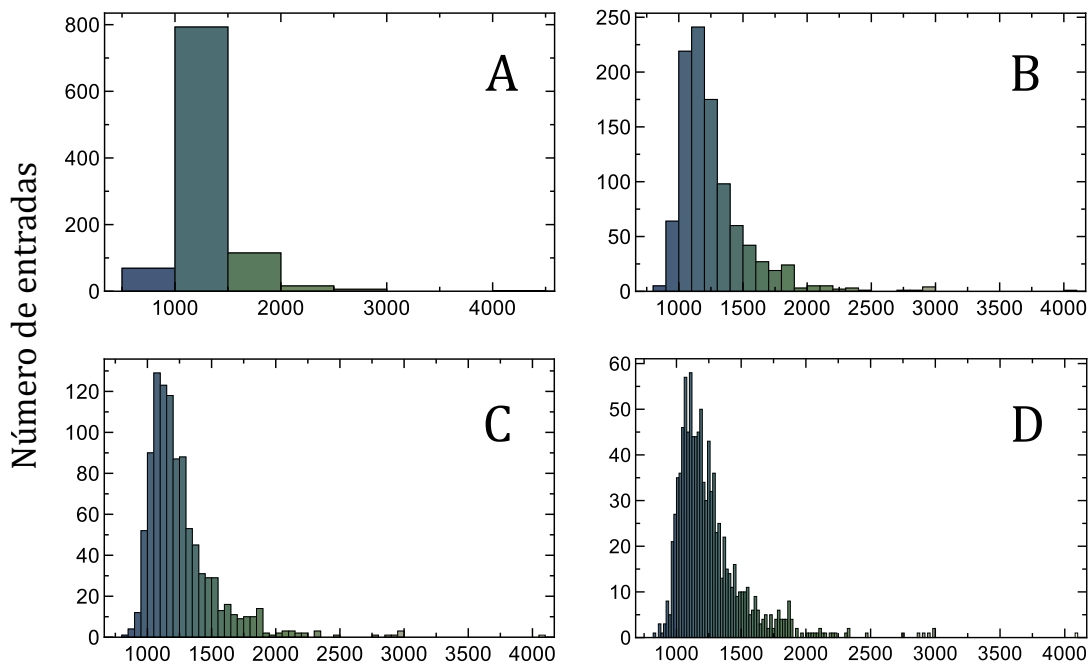


Figura A.6: Exemplos de histogramas para o mesmo conjunto de dados usando diferentes números de janelas: (A) 10 janelas; (B) 40 janelas; (C) 80 janelas; e (D) 150 janelas.

Como histogramas são exemplos de distribuições discretas, variáveis que são contínuas estão, assim, discretizadas. Nesse processo, pode-se haver perda de informação, assim, é necessário que haja um consenso entre a largura das janelas e o número de entradas em uma dada janela. De fato, a largura de todas as janelas não precisa ser constante quando tentamos encontrar um balanço entre a largura e quantidade de entradas em cada janela [51].

### A.5.1 Procedimento de Wand

Um importante parâmetro que precisa ser especificado quando construímos um histograma é a largura da janela usada. Essa é simplesmente o comprimento dos subintervalos dos dados no qual o histograma é fundamentado. Não é muito difícil ver que a escolha da largura das janelas tem um enorme efeito na aparência do histograma resultante. A escolha de janelas muito pequenas resultam em um histograma com muitas pontas proeminentes e com um bloco separado para cada entrada. Uma janela muito grande resulta em um histograma com um único bloco. Janelas de tamanhos intermediários levam a uma variedade de formas de histogramas entre esses dois extremos.

Há diversos métodos para escolher o tamanho dessas janelas. Neste trabalho, usamos o procedimento de Wand [165], em que, partindo de uma amostra de valores reais e aleatórios dada por  $u_1, \dots, u_N$  com densidade  $f$ , o histograma de  $f(x)$  é construído com base em uma partição de janelas  $l_j$  de largura  $h$  dada por

$$\hat{f}(x; h) = \frac{\text{número de } u_i\text{'s em } l_i}{Nh}, \quad (\text{A.23})$$

em que  $x \in l_i$  e  $N$  é o número total de dados na amostra. O tamanho das janelas é otimizado de modo que minimize a seguinte função

$$\text{MISE}\{\hat{f}(\cdot; h)\} = E \int_{-\infty}^{+\infty} \{\hat{f}(x; h) - f(x)\}^2 dx, \quad (\text{A.24})$$

sendo MISE o erro quadrado integrado médio (*mean integrated squared error*). Se considerarmos o histograma como uma estimativa de uma densidade suave e avaliarmos a sua efetividade pelo MISE (Equação A.24), então, assintoticamente, a escolha otimizada para a largura da janela é da ordem de  $N^{-1/3}$  [165].

A Figura A.7 mostra um histograma construído usando o procedimento de Wand com o mesmo grupo de dados da Figura A.6, e a Figura A.8 mostra outros métodos usando o mesmo grupo de dados. O método de Wand tem uma boa performance na construção de histogramas com larga extensão de densidades e uma variedade de tamanho de amostras [166].

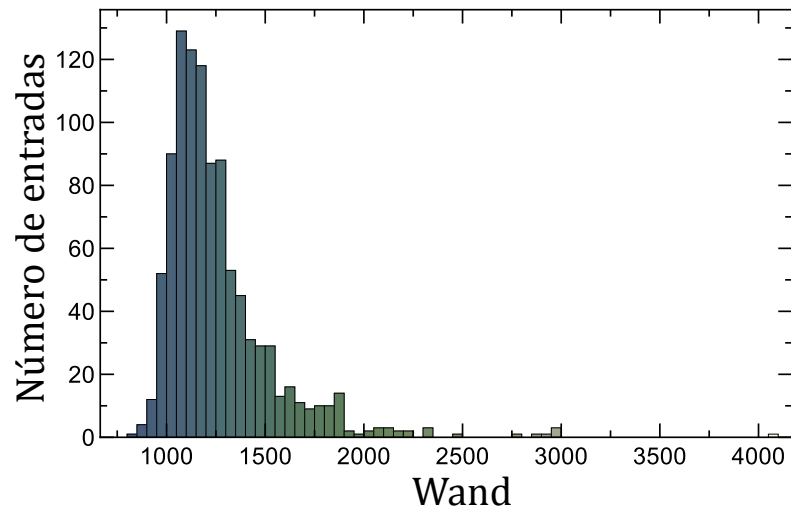


Figura A.7: Exemplo de histograma construído usando o procedimento de Wand.

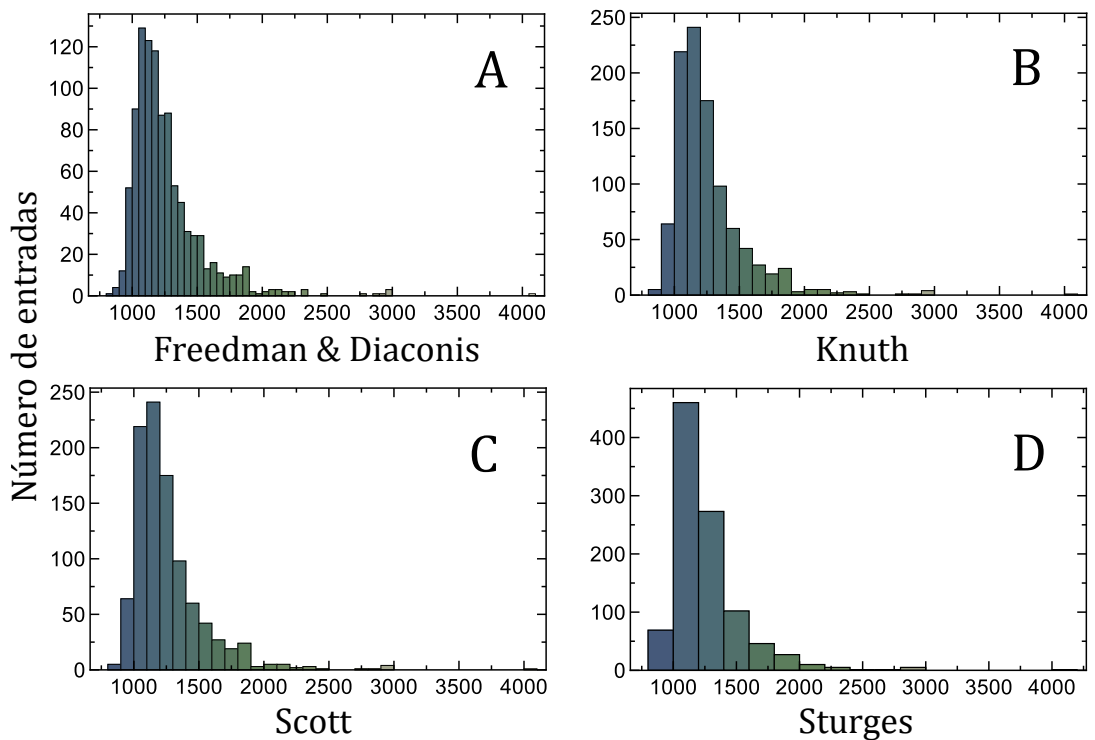


Figura A.8: Exemplos de histogramas construídos usando diferentes procedimentos: (A) Freedman & Diaconis [167]; (B) Knuth; (C) Scott [168]; e (D) Sturges.

## A.6 MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Quando se tem um conjunto de dados, um anseio é obter uma distribuição de probabilidade relacionada a eles. Uma possibilidade para tal, como já vimos, é o uso de histogramas. Por outro lado, se tivermos candidatos para a distribuição de probabi-



lidade, como um procedimento estatístico, o método da máxima verossimilhança é bastante empregado para obter uma PDF que se ajusta aos dados [169].

O método da máxima verossimilhança é um procedimento para estimar os parâmetros de um modelo estatístico. Supondo que cada um dos dados  $x_i$  são aleatórios e advêm de uma PDF  $P(x; \bar{\theta})$ ,

$$L(\bar{\theta}) = P(x_1; \bar{\theta})P(x_2; \bar{\theta}) \dots P(x_n; \bar{\theta}) \quad (\text{A.25})$$

é a densidade de probabilidade de obter  $\bar{\theta}$  partindo do conjunto de dados  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , em que  $\bar{\theta}$  representa os parâmetros do modelo. A máxima verossimilhança é obtida quando  $L(\bar{\theta})$ , como função de  $\bar{\theta}$ , é máxima. O  $\bar{\theta}$  corresponde a  $L(\bar{\theta})$  máxima e é conhecido como o estimador de máxima verossimilhança para o modelo  $P(x; \bar{\theta})$ .  $L(\bar{\theta})$ , por sua vez, é usualmente chamada de função de máxima verossimilhança.

Como ilustração desse método, vamos considerar o modelo em que

$$P(x; \beta) = \frac{1}{2\beta} e^{-|x|/\beta}, \quad (\text{A.26})$$

uma distribuição de Laplace com  $\alpha = 0$ , Equação A.11. Usando o conjunto de dados  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , temos

$$\ln L(\beta) = -n \ln(2\beta) - \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\beta} \quad (\text{A.27})$$

e, portanto, uma condição necessária para  $L(\beta)$  máxima é  $\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta} = 0$ . Essa condição conduz a

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (\text{A.28})$$

que é o estimador de máxima verossimilhança do nosso exemplo.

## A.7 BOOTSTRAP

O *bootstrap* é uma abordagem alternativa para encontrar intervalos de confiança e quantidades similares diretamente dos dados. Em vez de assumir informações sobre a distribuição de valores e, então, empregar argumentos teóricos, o *bootstrap*<sup>5</sup> se volta

---

<sup>5</sup> A palavra *bootstrap*, que em uma tradução livre significa “alça de botina”, vem da frase “*To lift himself up by his bootstraps*” (erguer a si mesmo pelas alças da botina). Isso se refere a algo que é absurdo e impossível. Por mais que tente, uma pessoa não pode se erguer no ar puxando partes de sua botina. Uma referência ao método de “criar” novas amostras adicionais partindo de uma série original[170].

à ideia original: e se pudéssemos ter amostras adicionais da população estudada? Esse método provém uma simples forma para obter o intervalo de confiança mesmo em situações em que resultados teóricos não são disponíveis.

Podemos criar amostras adicionais por amostragem em substituição à série original. Para cada uma dessas amostras “sintéticas”, podemos calcular a média, além de outras quantidades, e usar esse conjunto de valores para determinar uma medida do espalhamento dessa distribuição por meio de qualquer método padrão. O *bootstrap* não é um método para obter a melhor estimativa da própria quantidade original, para isso, é necessário obter uma grande amostra fazendo amostras adicionais da população original.

Para que o *bootstrap* funcione em um determinado conjunto de dados, é necessário que duas condições sejam satisfeitas:

1. A amostra original precisa prover uma boa representação de toda população;
2. A quantidade estimada precisa depender “suavemente” dos dados.

A primeira condição requer que a amostra original seja suficientemente grande e relativamente limpa, ou seja, não apresentar grandes oscilações em seus valores ou outras anomalias. Se a amostra for muito pequena, então, a série original estimada pela quantidade em questão (a média, por exemplo), não será muito boa. O *bootstrap*, de certa forma, piora esse problema, porque os dados têm grandes chances de serem usados repetidamente nas amostras “sintéticas”. A amostra precisa ser relativamente limpa: resultados imensamente discrepantes, por exemplo, podem ser um problema. A menos que o tamanho da amostra seja muito grande, os resultados tem uma chance significativa de serem reutilizados na amostra do *bootstrap*, distorcendo os resultados.

A segunda condição sugere que o método não funciona muito bem para quantidades que dependem criticamente de apenas uns poucos pontos dos dados. Por exemplo, podemos desejar estimar o valor máximo de alguma distribuição, mas tal estimativa depende criticamente do maior valor observado, que é um único ponto. Para esse tipo de aplicação, o *bootstrap* não é apropriado.

O número de amostras a serem consideradas vai depender do tamanho da amostra original. Se os pontos na amostra original são poucos, então, criar muitas amostras do *bootstrap* irá gerar a mesma amostra “sintética” várias vezes. Entretanto, se a amostra original for razoavelmente grande, isso não será um problema, uma vez que

o número de amostras do *bootstrap* cresce muito rápido com o número de dados da amostra original, de modo que será altamente improvável que a mesma amostra seja gerada mais que uma vez, mesmo ao gerarmos milhares de amostras.

O argumento a seguir nos ajudará a desenvolver uma noção da ordem de magnitude que isso envolve. O problema de escolher o dado  $n$  para substituir o  $n$ -ésimo dado original é equivalente a designar  $n$  elementos para  $n$  células. Esse é um problema clássico da teoria de ocupação, mostrar que existem

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \quad (\text{A.29})$$

modos de fazer essa escolha. Esse número cresce extremamente rápido: para  $n = 5$ , ele é 126; para  $n = 10$ , temos 92378; as para  $n = 20$ , esse número já ultrapassa  $10^{10}$  [169].

Para tornar a ideia do método mais clara, vamos discutir um exemplo: suponha que temos uma quantidade limitada de dados, da qual desejamos obter estimativas da estatística para a população. A distribuição de amostragem para essas estimativas podem ser aproximadas por meio da elaboração de novas amostras a partir dos dados originais e, em seguida, as estatísticas de cada amostra podem ser calculadas.

Começando com um conjunto de dados. Por exemplo,

{0,19, 7,43, 4,52, 6,72, 6,87, 7,98, 7,83, 1,19, 3,86, 7,49,  
4,40, 8,48, 2,94, 7,39, 8,82, 6,09, 3,15, 8,12, 9,45, 2,24}.

Podemos construir outra amostra partindo desse conjunto escolhendo aleatoriamente elementos dentro dele, se escolhermos a mesma quantidade que o comprimento desse conjunto, teremos uma nova amostra do mesmo tamanho da série original:

{9,45, 0,19, 8,48, 7,83, 8,12, 6,87, 7,98, 3,86, 7,98, 6,72,  
6,87, 7,43, 7,83, 8,12, 3,15, 7,83, 7,83, 6,72, 2,94, 8,82}.

Assumindo que a amostra original representa uma população maior da qual ela teve origem, temos que os valores reamostrados poderiam se comportar como uma amostra da população original e, assim, estatísticas desses valores poderiam simular estatísticas da própria população.

Agora, calculamos a assimetria (*skewness*)<sup>6</sup> da amostra  $(-0,56)$  e da reamostragem  $(-1,49)$ . Podemos construir novas amostras muitas vezes e calcular a assimetria de cada uma delas e, desse modo, aproximar o valor da assimetria da amostra. Os valores calculados para 1000 dessas reamostragens são apresentados na [Figura A.9](#). Dessa figura, vemos que a assimetria média ocorre próximo a  $-0,5$ .

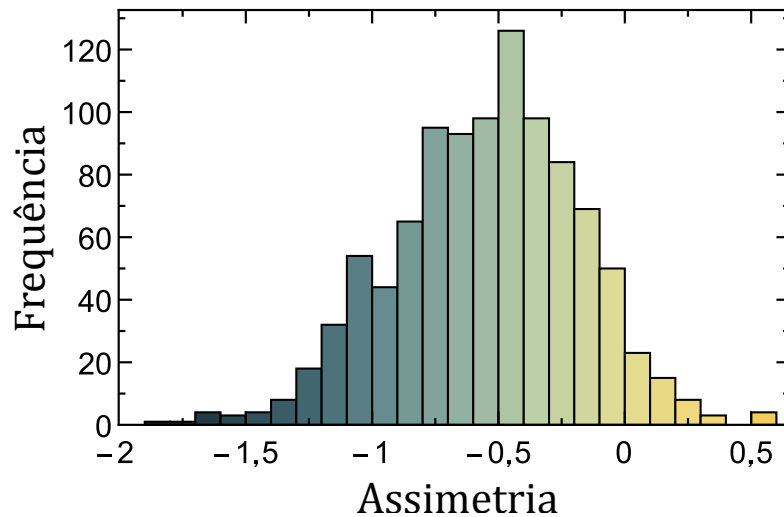


Figura A.9: **Histograma da distribuição da *skewness***, valores para 1000 reamostragens.

Do mesmo que a *skewness* outros resultados mais complicados podem ser obtidos através do *bootstrap*, como no exemplo que encerramos essa seção.

<sup>6</sup> Em inglês, *skewness*, mede a assimetria em uma lista ou distribuição. Uma assimetria positiva indica uma distribuição com calda longa à direita, enquanto uma assimetria negativa indica que há calda longa à esquerda [171].

Ter o conhecimento de correlações em um conjunto de dados é potencialmente útil, por exemplo, isso pode indicar uma relação preditiva e vir a ser explorada na prática. Neste apêndice, introduzimos a função de (auto)correlação e o método aqui empregado para detectá-la, o DFA.

### B.1 FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

Vamos considerar a série temporal  $\{u(1), u(2), \dots, u(n)\}$ , em que os índices dizem respeito a uma sequência ordenada e equidistante temporalmente. Em algumas aplicações, o índice  $i$  pode não corresponder a uma medida de tempo. Estamos interessados na correlação dos valores  $u(i)$  e  $u(i + s)$  para diferentes intervalos de tempo, isto é, correlação sobre diferentes escalas de tempo  $s$ .

Para a discussão que segue, redefinimos os dados subtraindo-os do valor médio:

$$\overline{u(i)} \equiv u(i) - \langle u \rangle, \quad (\text{B.1})$$

em que

$$\langle u \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N u(i). \quad (\text{B.2})$$

Quantitativamente, correlações entre os valores de  $x$  separados por  $s$  passos são definidas pela função de (auto)correlação:

$$\begin{aligned} C(s) &= \left\langle \overline{u(i)} \overline{u(i+s)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} \overline{u(i)} \overline{u(i+s)}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Se os  $u(i)$  não são correlacionados,  $C(s)$  é zero para  $s > 0$ , pois  $\left\langle \overline{u(i)} \overline{u(i+s)} \right\rangle = \langle \overline{u(i)} \rangle \langle \overline{u(i+s)} \rangle$  e  $\langle \overline{u(i)} \rangle = 0$ . Correlações de curto alcance de  $x_i$  são descritas por  $C(s)$ , declinando tipicamente como uma exponencial,

$$C(s) \sim e^{-s/s_x}, \quad (\text{B.4})$$

com um tempo característico de decaimento  $s_x$ . Para as correlações típicas de longo alcance,  $C(s)$  cai como uma lei de potência:

$$C(s) \propto s^{-\gamma}, \quad (\text{B.5})$$

com um expoente  $0 < \gamma < 1$ . Um cálculo direto de  $C(s)$  geralmente não é apropriado, devido ao ruído intrínseco aos dados coletados  $u(i)$  e devido a tendências subjacentes de origem desconhecida. Por exemplo, a média  $\langle u \rangle$  pode ser diferente entre a primeira e a segunda metade dos dados se eles tiverem forte correlação de longo alcance. Isso faz a definição de  $C(s)$ , [Equação B.3](#), problemática. Desse modo, é mais conveniente determinar o expoente de correlação  $\gamma$  por outro procedimento que minimize fontes de incertezas.

Frequentemente, dados experimentais são afetados por fatores não estacionários. Tais tendências precisam ser bem distinguidas das flutuações intrínsecas do sistema para encontrarmos o comportamento correto da escala das flutuações. Essa não é uma tarefa tão simples, já que, subtraindo algum tipo de média móvel com um certo comprimento, podemos introduzir artificialmente uma escala de tempo nos dados e, assim, destruir uma possível escala de tempo sobre intervalos maiores. A análise de reescala de intervalo de Hurst e outros métodos não estacionários funcionam bem se a série de dados é longa e não envolve tendências. Muito frequentemente, não sabemos os motivos da presença de tendências subjacentes em dados coletados e também podemos não saber a escala dessas tendências subjacentes, o que pode ser ainda pior.

O DFA é um método bem conhecido para determinar o comportamento da escala de dados com ruídos na presença de tendências, mesmo sem o conhecimento de sua origem ou forma [172], e para determinar a presença de correlação de longo alcance.

## B.2 DETRENDED FLUCTUATION ANALYSIS

O método do DFA (sigla do seu nome em inglês *Detrended Fluctuation Analysis*) foi considerado por Peng e coautores em 1994 como uma ferramenta no estudo da longa

cadeia de nucleotídeos que forma o DNA<sup>1</sup> [37]. Nesse trabalho, para analisar os padrões que surgem nessas longas cadeias pelas ligações dos dois tipos de nucleotídeos, as purinas e as pirimidinas, a série foi construída seguindo essa sequência como um caminhante aleatório unidimensional, sendo o valor de  $u(i)$  atribuído de acordo com o tipo de nucleotídeo:

$$u(i) = \begin{cases} -1, & \text{um passo a baixo, se for uma purina;} \\ 1, & \text{um passo a cima, se for uma pirimidina.} \end{cases}$$

É interessante notar que diferentemente da maior parte das aplicações encontradas na literatura, esses dados não se referem a uma série temporal.

O método utiliza o conceito da análise de correlação de longo alcance para correlação tipo lei de potência, removendo possíveis tendências locais, além de identificar a escala característica da série, por meio de um *crossover*, caso esta não seja correlacionada.

### B.2.1 A construção do método

Dada uma série de dados, como uma série temporal ou uma série de deslocamentos, conforme mostra a [Figura B.1A](#), e sendo os elementos dessa série  $u(i)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , podemos escrever a série dos acumulados descontando o valor médio. Os acumulados desses elementos são expressos por

$$y(i) \equiv \sum_{j=1}^i [u(j) - \langle u \rangle] \tag{B.6}$$

e, portanto, a sequência de dados acumulados tem comprimento  $n$ .

Para determinar se essa série de dados possui correlação de longo alcance usando o método do DFA, o primeiro passo é dividir a série em  $l = n/s$  janelas não sobrepostas, de modo que em cada janela contenha  $l$  elementos. Para simplificar a nossa explicação do DFA, vamos supor que  $s$  é inteiro. A seguir, é determinada a tendência local dentro de cada uma das janelas, ajustando cada uma delas com um polinômio

---

<sup>1</sup> No artigo de Peng e coautores [37], o DFA é aplicado nas séries dos genomas das células-*T* humanas, do bacteriófago  $\lambda$  e da bactéria *Escherichia Coli K12*, sendo essa última o primeiro genoma totalmente decodificado, cujos resultados foram publicados em 1997 [173].

de grau  $\tilde{\nu}$ . Na [Figura B.1B](#) e na [Figura B.1C](#), pode ser vista a série acumulada com janelas em dois tamanhos diferentes, contendo  $l = 100$  e  $l = 200$  termos respectivamente. O grau do polinômio usado nesse ajuste é chamado de ordem do DFA, ou seja, se for usado um polinômio de grau  $\tilde{\nu} = 1$ , o DFA será DFA-1, se  $\tilde{\nu} = 2$ , DFA-2, e assim por diante. Feito o ajuste, a série acumulada  $y(i)$  será subtraída de sua tendência local  $y_{\tilde{\nu}}(i)$ :

$$y_s(i) = y(i) - y_{\tilde{\nu}}(i), \quad (\text{B.7})$$

definindo a série sem “tendência” local (veja [Figura B.1D](#)),  $y_s(i)$ .

O próximo passo é calcular a variância sobre  $y_l(i)$  para cada janela e calcular a média dessas variâncias sobre todas as janelas de tamanho  $l$ , denotada por  $F_s$ ,

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(i) - y_{\tilde{\nu}}(i))^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_s^2(i). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A seguir, definimos a função de flutuação,

$$\tilde{F}(s) = [F_s(y)]^{1/2}. \quad (\text{B.9})$$

Geralmente, a variância cresce junto com o tamanho das janelas e, dessa dependência, originam-se as propriedades de escala da flutuação. Se a função  $\tilde{F}(s)$  apresenta um comportamento tipo lei de potência, sendo ela relacionada com o expoente de escala  $h$ , tem-se

$$\tilde{F}(s) \sim s^h. \quad (\text{B.10})$$

Se há apenas correlação de curto alcance ou se não houver correlação, a série analisada deve possuir propriedades estatísticas de um caminhante aleatório,  $\tilde{F}(s) \sim s^{1/2}$ ; entretanto, se houver correlação de longo alcance, ou seja, não houver comprimento característico de escala,  $\tilde{F}(s) \sim s^h$  com  $h \neq \frac{1}{2}$ . O valor de  $h$  ainda pode determinar se a série é correlacionada (persistente), se  $h > 1/2$ , ou se ela é anticorrelacionada (anti persistente), se  $h < 1/2$ .

A [Figura B.2](#) mostra o resultado do DFA aplicado à série de dados da [Figura B.1](#) e à mesma série embaralhada. Se houver correlação de longo alcance, esta será destruída ao reorganizar os dados aleatoriamente. E, como esperado, o valor do expoente para essa curva é  $h = 0,5$ , enquanto que, na curva superior em azul da [Figura B.2](#), o expoente  $h = 0,59$ , mostrando que a série é correlacionada.



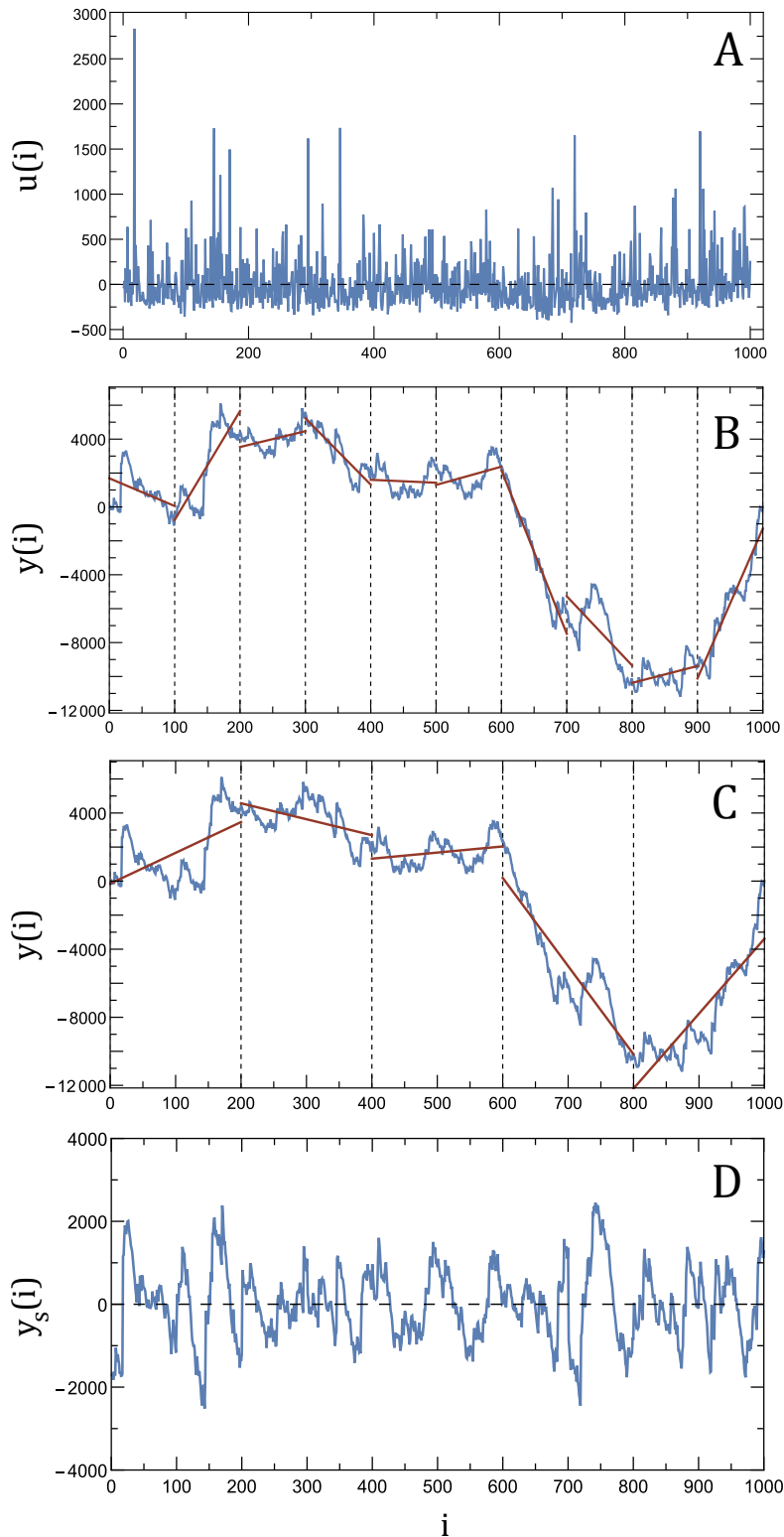


Figura B.1: Série de dados com  $n = 1000$ , ilustrando os procedimentos envolvidos no DFA.

(A) Série  $u(i)$  descontando a média  $\langle u \rangle$ ; para a série acumulada  $y(i)$ , tendências são identificadas com ajuste linear ( $\tilde{\nu} = 1$ ). (B) Janelas de  $l = 100$  e (C)  $l = 200$ , que estão marcadas pelas linhas tracejadas; as retas vermelhas são os ajustes feitos dentro de cada janela por mínimos quadrados. (D) A série das diferenças dada pela [Equação B.7](#), usando  $l = 100$ .

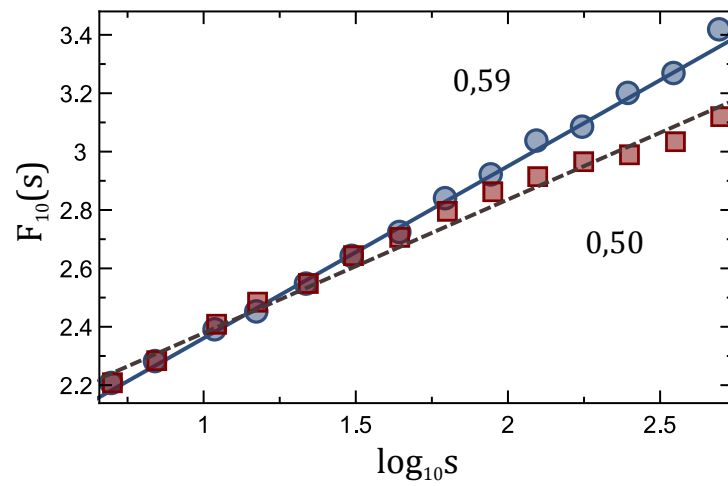


Figura B.2: O DFA para uma série de dados correlacionados com expoente  $h = 0,59$  (círculos azuis) e para a mesma série embaralhada e, portanto, sem correlação de longo alcance, e expoente  $h = 0,50$  (quadrados vermelhos).

## GRÁFICOS

Neste apêndice, apresentamos os gráficos de cada caso estudado no [Capítulo 1](#) e no [Capítulo 3](#).

C.1 GRÁFICOS DO [CAPÍTULO 1](#): ATIVIDADE PSICOMOTORA

A [Figura C.1](#) e a [Figura C.2](#), ilustram o tempo de reação de cada participante, como a [Figura 1.2](#).

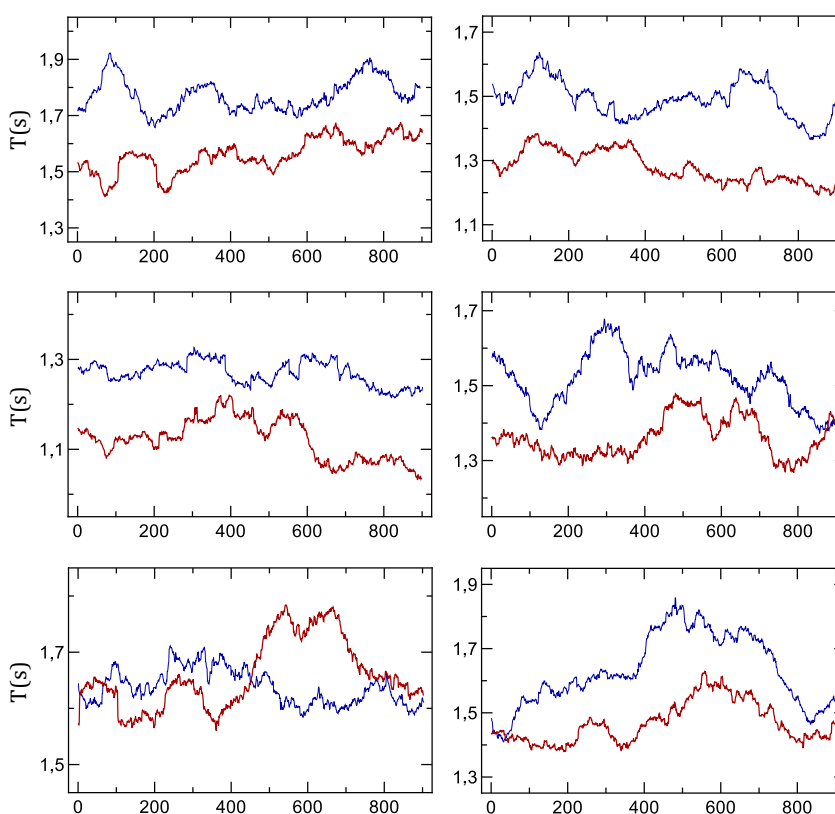


Figura C.1: Média móvel de  $T$  de cada participante no primeiro (curva superior; azul) e no segundo bloco (curva inferior; vermelha) usando janelas móveis de tamanho 100.

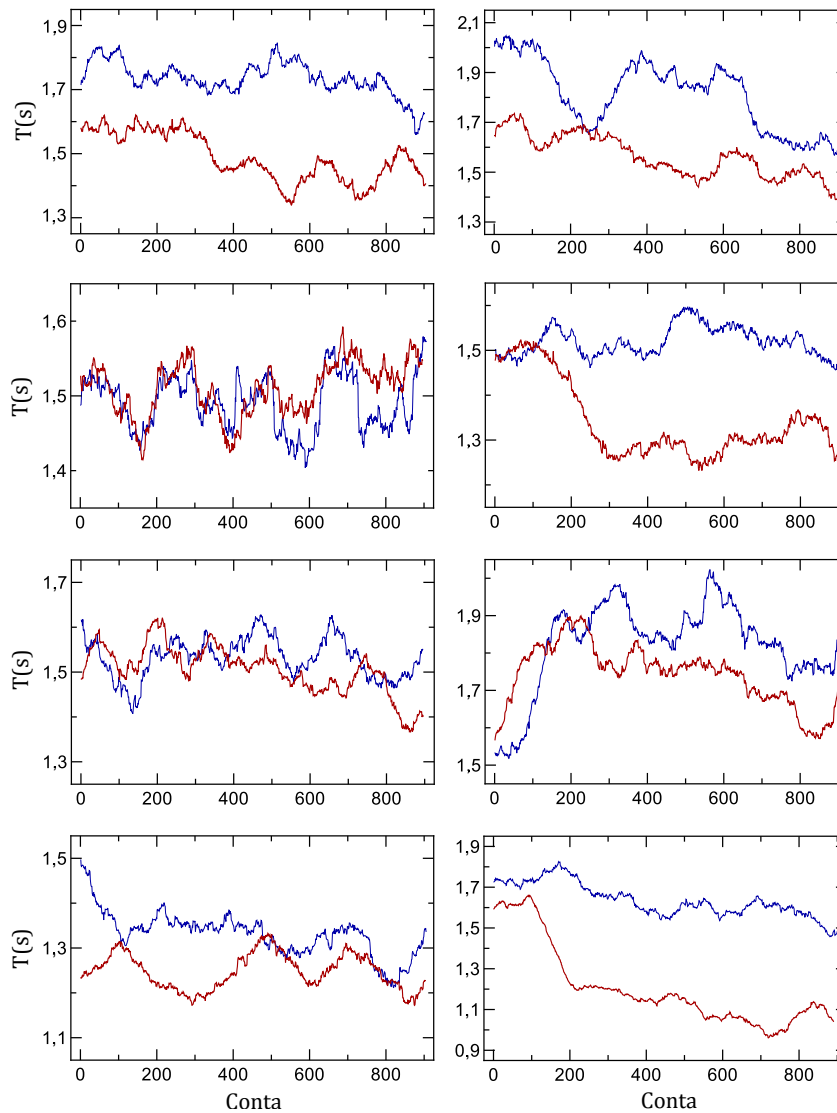


Figura C.2: Média móvel de  $T$  de cada participante no primeiro (curva superior; azul) e no segundo bloco (curva inferior; vermelha) usando janelas móveis de tamanho 100.

A [Figura C.3](#), a [Figura C.4](#) e a [Figura C.5](#), ilustram a distribuição do tempo de reação de cada participante como a [Figura 1.5](#), na coluna esquerda, e o colapso da razão das distribuições do tempo de reação pela média como na [Figura 1.6](#), na coluna direita.

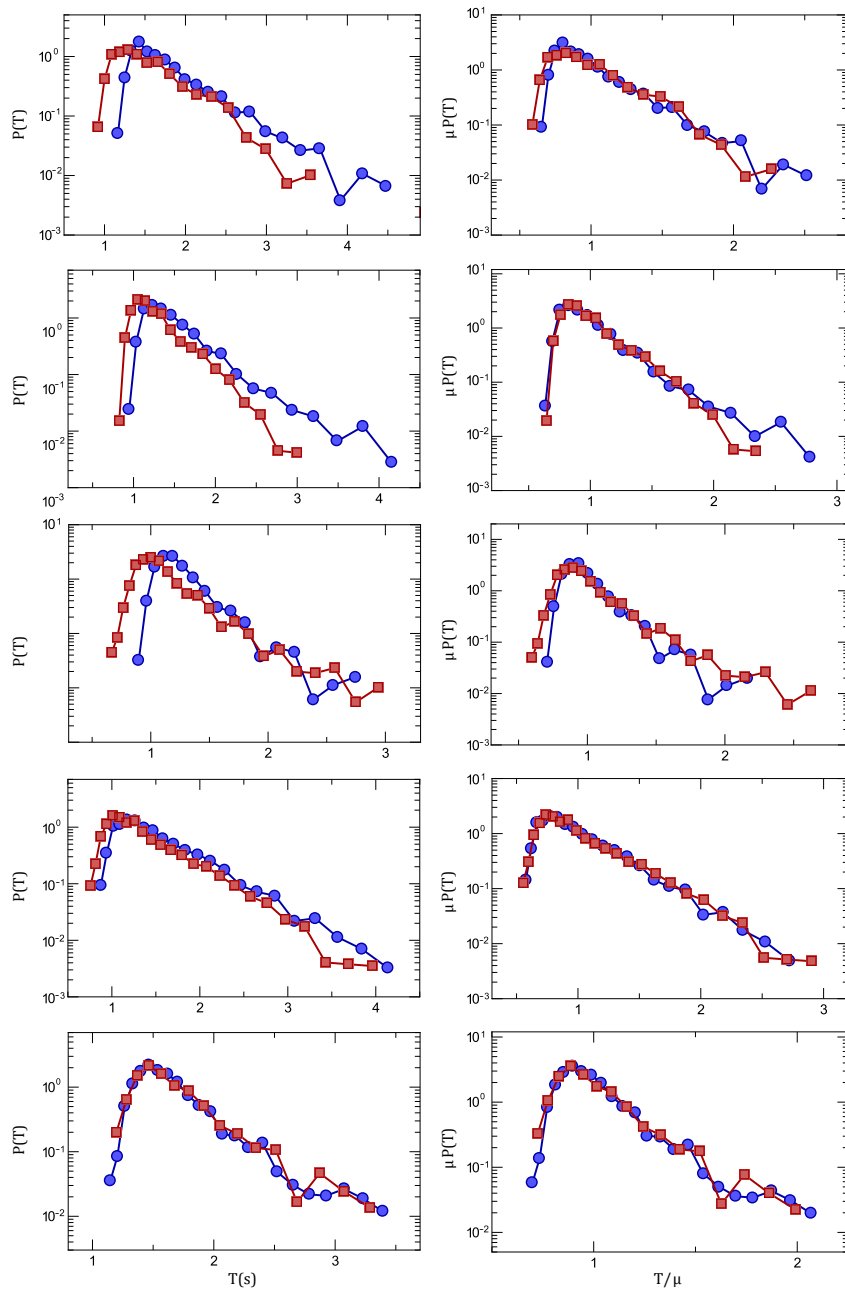


Figura C.3: **Comparação das distribuições** de  $T_1$  e  $T_2$ , na primeira coluna, com o colapso das distribuições de  $T_1/\mu_1$  e  $T_2/\mu_2$ , na segunda coluna, de um participante no primeiro (círculos azuis) e segundo bloco (quadrados vermelhos) apresentado em escala mono-log, sugerindo uma universalidade. Nos gráficos da segunda coluna, a probabilidade é multiplicada por  $\mu$  devido a mudança de escala.

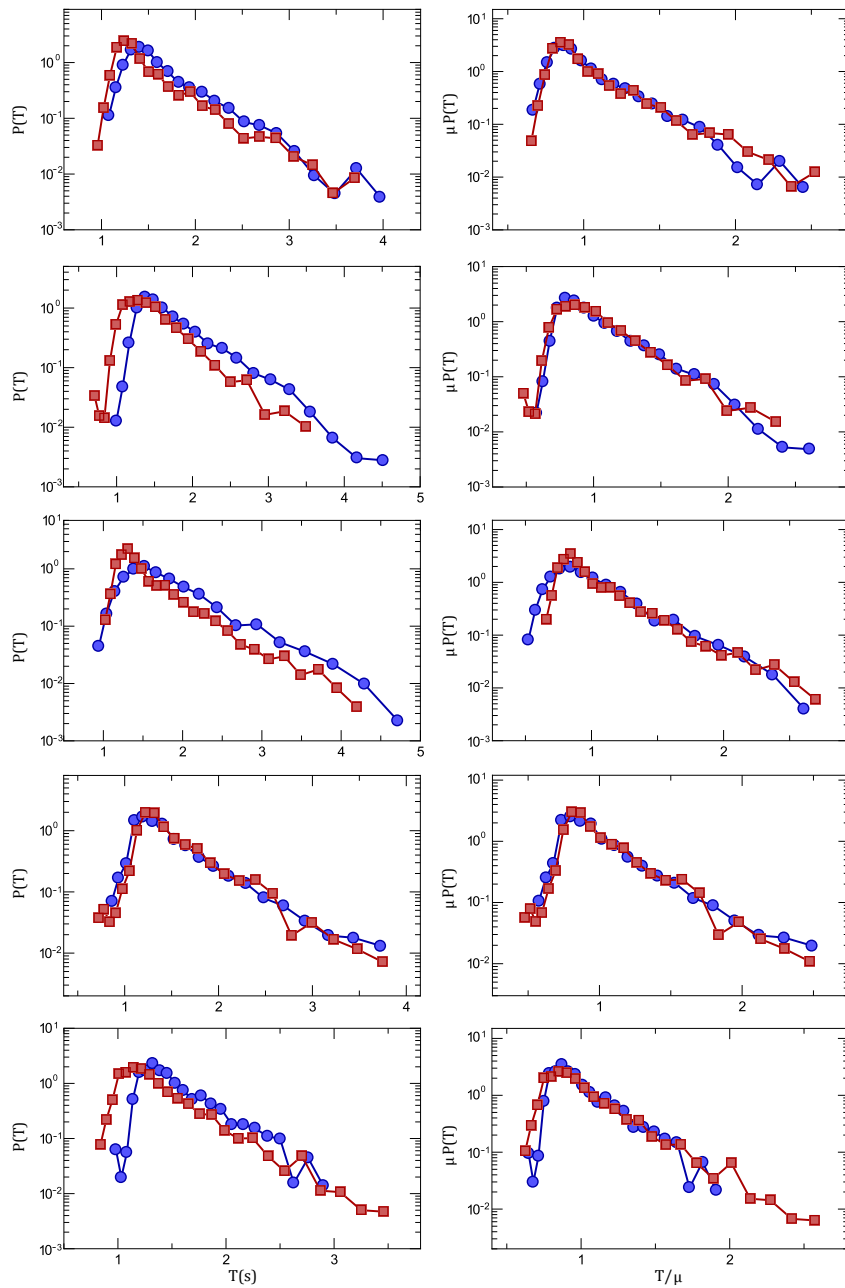


Figura C.4: **Comparação das distribuições** de  $T_1$  e  $T_2$ , na primeira coluna, com o colapso das distribuições de  $T_1/\mu_1$  e  $T_2/\mu_2$ , na segunda coluna, de um participante no primeiro (círculos azuis) e segundo bloco (quadrados vermelhos) apresentado em escala mono-log, sugerindo uma universalidade. Nos gráficos da segunda coluna, a probabilidade é multiplicada por  $\mu$  devido a mudança de escala.

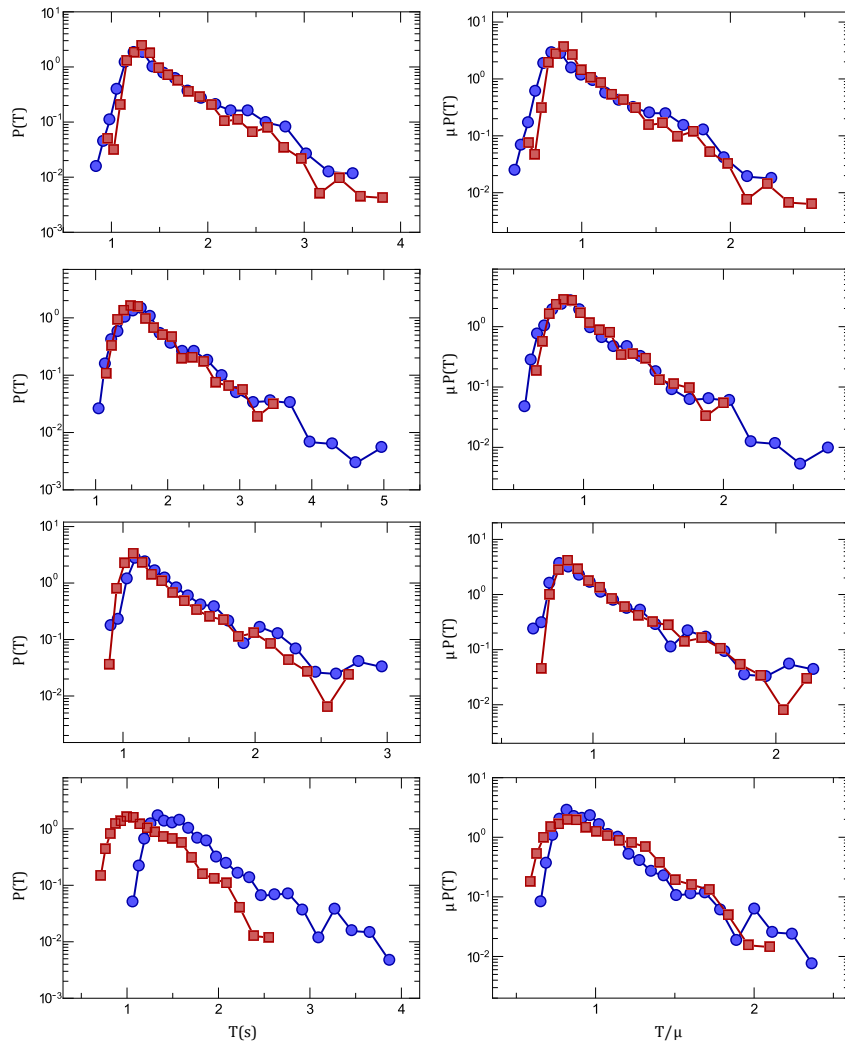


Figura C.5: **Comparação das distribuições** de  $T_1$  e  $T_2$ , na primeira coluna, com o colapso das distribuições de  $T_1/\mu_1$  e  $T_2/\mu_2$ , na segunda coluna, de um participante no primeiro (círculos azuis) e segundo bloco (quadrados vermelhos) apresentado em escala mono-log, sugerindo uma universalidade. Nos gráficos da segunda coluna, a probabilidade é multiplicada por  $\mu$  devido a mudança de escala.

## C.2 GRÁFICOS DO CAPÍTULO 3: LÍDERES MUNDIAIS

Os gráficos da [Figura C.6](#) à [Figura C.8](#), mostram os dados de cada liderança com sua respectiva média móvel, como a [Figura 3.2](#) e a [Figura 3.3](#).

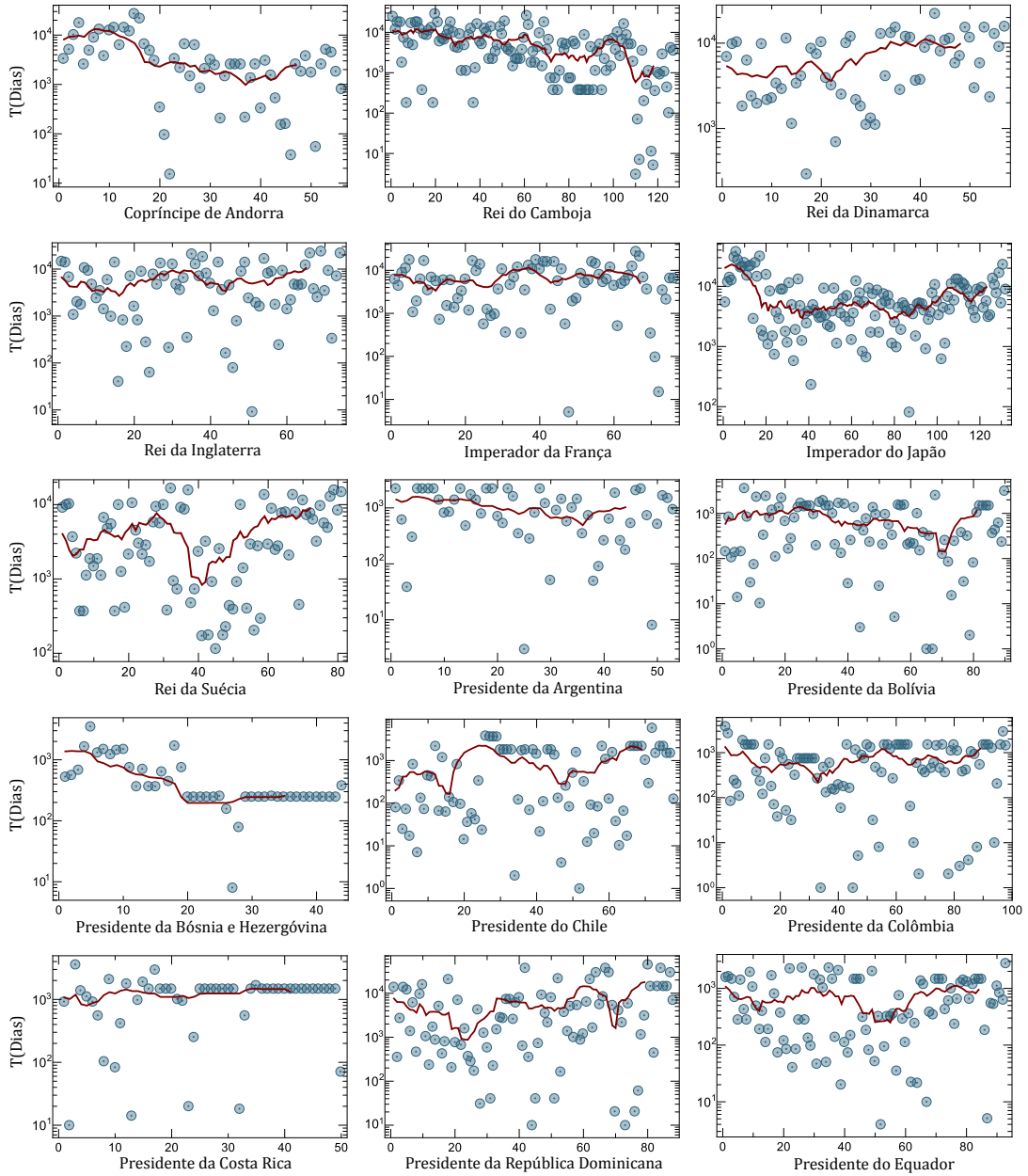


Figura C.6: Média móvel de  $T$  em escala log-normal das lideranças. Círculos azuis são dados empíricos e a linha contínua vermelha é a média móvel.



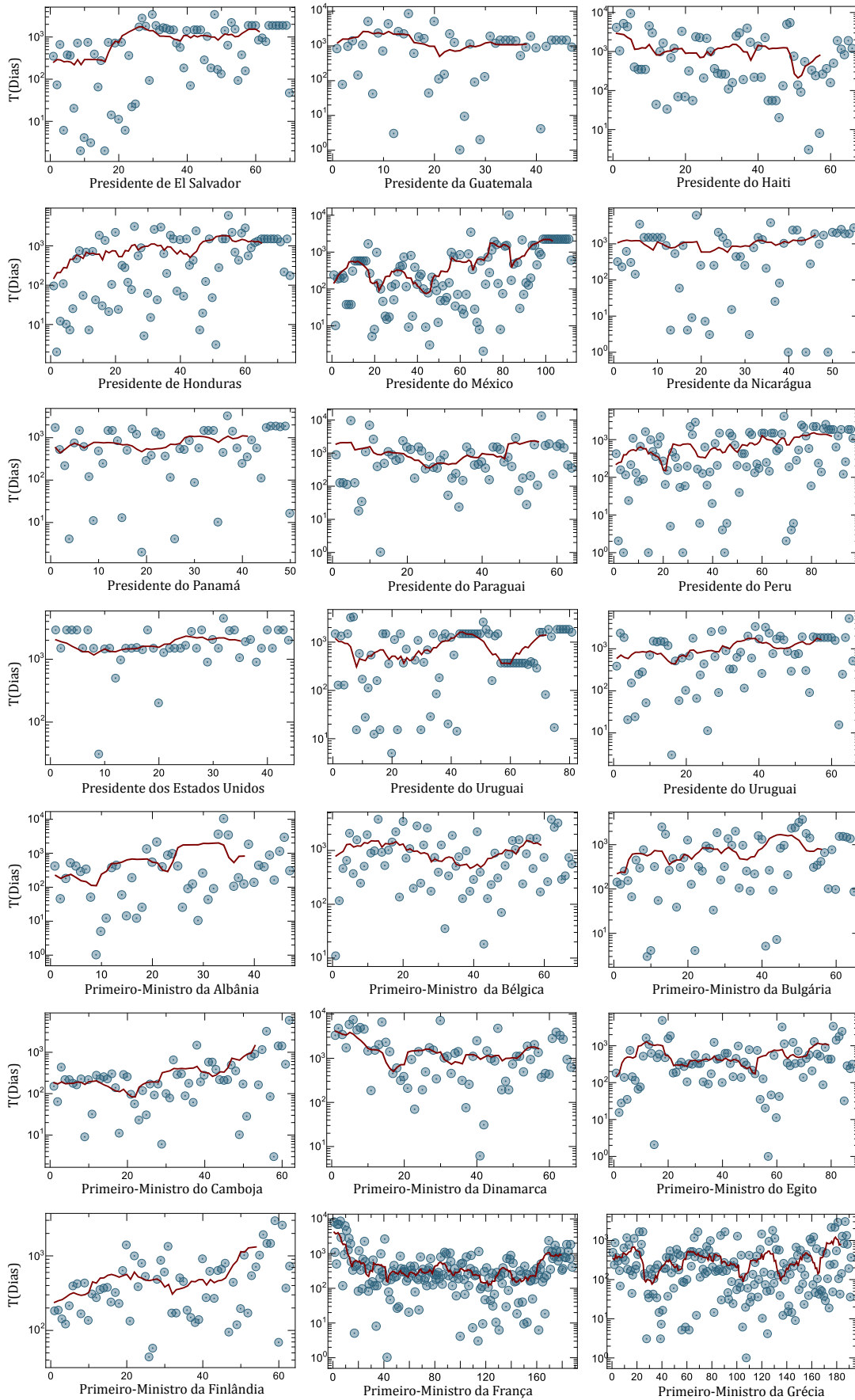


Figura C.7: Média móvel de  $T$  em escala log-normal das lideranças. Círculos azuis são dados empíricos e a linha contínua vermelha é a média móvel.

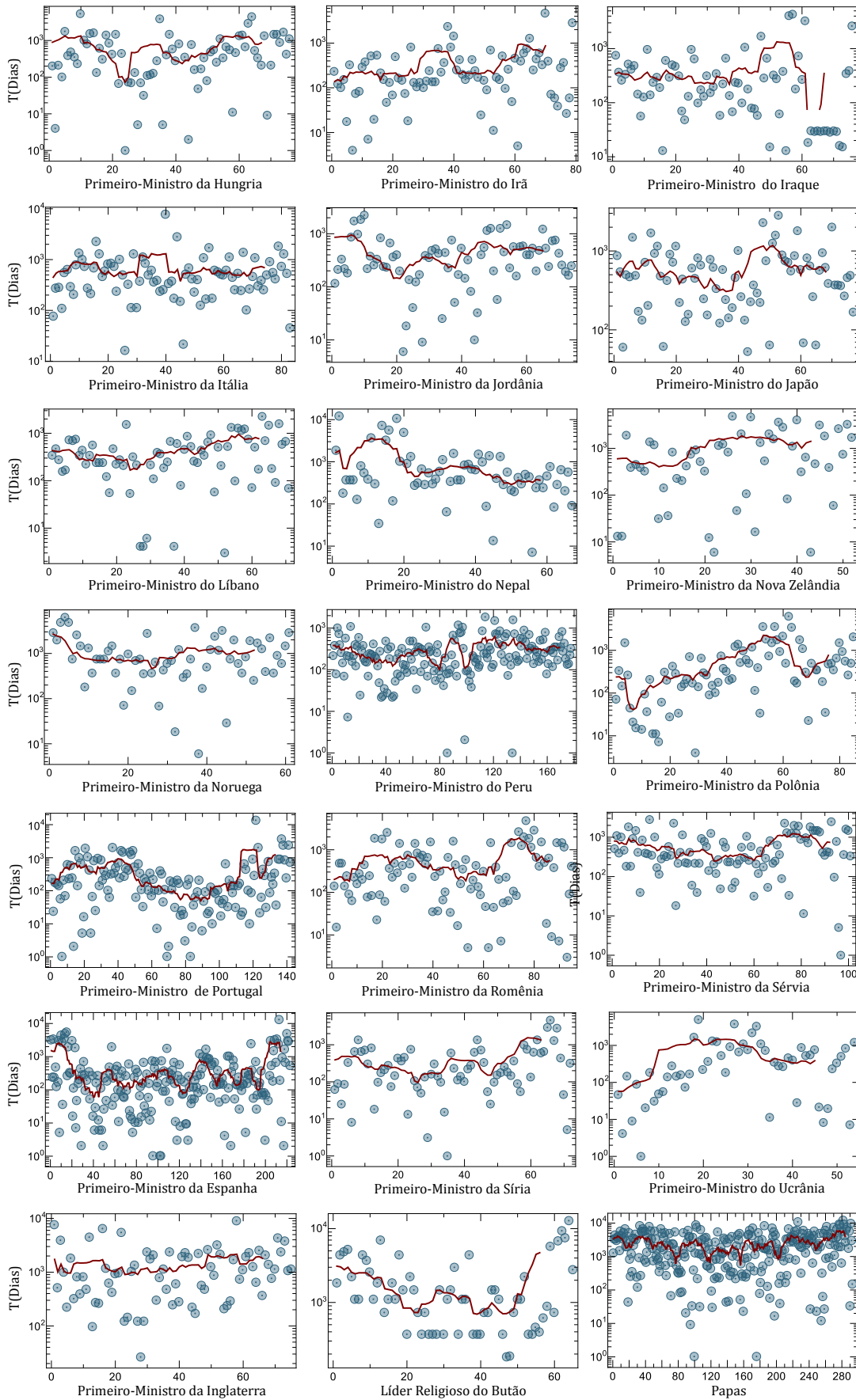


Figura C.8: Média móvel de  $T$  em escala log-normal das lideranças. Círculos azuis são dados empíricos e a linha contínua vermelha é a média móvel.

## REFERÊNCIAS

---

- [1] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [2] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. Wiley-VCH, New York, 2009.
- [3] S. R. A. Salinas. *Introdução à Física Estatística*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- [4] M. Kardar. *Statistical Physics of Particles*. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [5] M. Kardar. *Statistical Physics of Fields*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [6] M. Le Bellac, F. Mortessagne, e G. G. Batrouni. *Equilibrium and Non-equilibrium Statistical Thermodynamics*. Cambridge University Press, New York, 2004.
- [7] P. L. Krapivsky, S. Redner, e E. Ben-Naim. *A Kinetic View of Statistical Physics*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [8] J. M. Thijssen. *Computational Physics*. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [9] N. Boccara. *Modeling Complex Systems*. Springer, New York, 2010.
- [10] R. B. Northrop. *Introduction to Complexity and Complex Systems*. CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [11] S. Picoli. *Física Estatística dos Sistemas Complexos: Aplicações Interdisciplinares*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2007.
- [12] H. V. Ribeiro. *Identificação e Modelagem de Padrões em Sistemas Complexos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.

- [13] F. J. Antonio. *Sistemas Complexos: Desastre, Loteria e Epidemias*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- [14] M. C. Mantovani. *Física Estatística Aplicada a Processos Eleitorais*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- [15] A. S. Itami, F. J. Antonio, e R. S. Mendes. Very prolonged practice in block of trials: scaling of fitness, universality and persistence. *Physica A*, 424:82–89, 2015.
- [16] E. R. F. W. Crossman. A theory of the acquisition of speed skill. *Ergonomics*, 2(2):153–166, 1959.
- [17] D. A. Rosenbaum, R. A. Carlson, e R. O. Gilmore. Acquisition on intellectual and perceptual-motor skills. *Annual Review of Psychology*, 52(1):453–470, 2001.
- [18] L. Shmuelof, J. W. Krakauer, e P. Mazzoni. How is a motor skill learned? Change and invariance at the levels of task success and trajectory control. *Journal of Neurophysiology*, 108(2):578–594, 2012.
- [19] J. B. Shea e R. L. Morgan. Contextual interference effects on the acquisition, retention, and transfer of a motor skill. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 5(2):179–187, 1979.
- [20] G. D. Logan. Shapes of reaction-time distributions and shapes of learning curves: A test of the instance theory of automaticity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 18(5):883–914, 1992.
- [21] A. Newell e P. S. Rosenbloom. The soar papers. Em P. S. Rosenbloom, J. E. Laird, and A. Newell, editores, *Cognitive skills and their acquisition*, volume 1, chapter Mechanisms of Skill Acquisition and the Law of Practice, 81–135. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1993.
- [22] G. Dutilh, J. Vandekerckhove, F. Tuerlinckx, e E.-J. Wagenmakers. A diffusion model decomposition of the practice effect. *Psychonomic Bulletin & Review*, 16(6):1026–1036, 2009.

- [23] D. Nourrit, D. Delignières, e N. Caillou. On discontinuities in motor learning: a longitudinal study of complex skill acquisition on a ski-simulator. *Journal of Motor Behavior*, 35(2):152–170, 2003.
- [24] D. Nourrit-Lucas, G. Zelic, T. Deschamps, M. Hilpron, e D. Delignières. Persistent coordination patterns in a complex task after 10 years delay. *Human Movement Science*, 32(6):1365–1378, 2013.
- [25] G. S. Snoddy. Learning and stability: a psychophysiological analysis of a case of motor learning with clinical applications. *Journal of Applied Psychology*, 10(1): 1–36, 1926.
- [26] R. Seibel. Discrimination reaction time for a 1023-alternative task. *Journal of Experimental Psychology*, 66(3):215–226, 1963.
- [27] T. C. Rickard. Bending the power law: a CMPL theory of strategy shifts and the automatization of cognitive skills. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126(3):288–311, 1997.
- [28] D. L. Strayer e A. F. Kramer. Aging and skill acquisition: learning-performance distinctions. *Psychology and Aging*, 9(4):589–605, 1994.
- [29] P. Rabbitt e N. Banerji. How does very prolonged practice improve decision speed? *Journal of Experimental Psychology: General*, 118(4):338–345, 1989.
- [30] P. M. Fitts. The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of movement. *Journal of Experimental Psychology: General*, 121(3): 262–269, 1992.
- [31] J. L. Cabrera e J. G. Milton. Human stick balancing: tuning Lévy flights to improve balance control. *Chaos*, 14(3):691–698, 2004.
- [32] Y.-C. Hung e A. M. Gordon. Motor learning of a bimanual task in children with unilateral cerebral palsy. *Research in Developmental Disabilities*, 34(6):1891–1896, 2013.
- [33] S. Wallot, G. Hollis, e M. van Rooij. Connected text reading and differences in text reading fluency in adult readers. *PLoS ONE*, 8(8):e71914, 2013.

- [34] K. M. Newell, Y.-T. Liu, e G. Mayer-Kress. Times scales in motor learning and development. *Psychological Review*, 108(1):57–82, 2001.
- [35] S. R. Chaiken, P. C. Kyllonen, e W. C. Tirre. Organization and components of psychomotor ability. *Cognitive Psychology*, 40(3):198–226, 2000.
- [36] S. Brown e A. Heathcote. Averaging learning curves across and within participants. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, 35(1):11–21, 2003.
- [37] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, e A. L. Goldberger. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2):1685–1689, 1994.
- [38] D. Delignières e V. Marmelat. Strong anticipation and long-range cross-correlation: application of detrended cross-correlation analysis to human behavioral data. *Physica A*, 394:47–60, 2014.
- [39] D. Rybski, S. V. Buldyrev, S. Havlin, F. Liljeros, e H. A. Makse. Communication activity in a social network: relation between long-term correlations and inter-event clustering. *Scientific Reports*, 2:560, 2012.
- [40] L. Telesca e M. Lovallo. Analysis of temporal fluctuations in Bach’s sinfonias. *Physica A*, 391(11):3247–3256, 2012.
- [41] H. V. Ribeiro, R. S. Mendes, E. K. Lenzi, M. Castillo-Mussot, e L. A. N. Amaral. Move-by-move dynamics of the advantage in chess matches reveals population-level learning of the game. *PLoS ONE*, 8(1):e54165, 2013.
- [42] A. L. Schaigorodsky, J. I. Perotti, e O. V. Billoni. Memory and long-range correlations in chess games. *Physica A*, 394:304–311, 2014.
- [43] E. Abounoori, M. Shahrazi, e S. Rasekhi. An investigation of Forex market efficiency based on detrended fluctuation analysis: a case study for Iran. *Physica A*, 391(11):3170–3179, 2012.
- [44] H. Wang, L. Xiang, e R. B. Pandey. A multifractal detrended fluctuation analysis (MDFA) of the chinese growth enterprise market (GEM). *Physica A*, 391(12):3496–3502, 2012.

- [45] G. Cao, J. Cao, L. Xu, e L. Y. He. Detrended cross-correlation analysis approach for assessing asymmetric multifractal detrended cross-correlations and their application to the chinese financial market. *Physica A*, 393:460–469, 2014.
- [46] N. Vandewalle, M. Ausloos, e Ph. Boveroux. The moving averages demystified. *Physica A*, 269(1):170–176, 1999.
- [47] M. M. Lorist, D. Kernell, T. F. Meijman, e I. Zijdwind. Motor fatigue and cognitive task performance in humans. *The Journal of Physiology*, 545(1):313–319, 2002.
- [48] H. van Duinen, M. M. Lorist, e I. Zijdwind. The effect of caffeine on cognitive task performance and motor fatigue. *Psychopharmacology*, 180(3):539–547, 2005.
- [49] H. F. Credidio, E. N. Teixeira, S. D. S. Reis, A. A. Moreira, e J. S. Andrade Jr. Statistical patterns of visual search for hidden objects. *Scientific Reports*, 2:920, 2012.
- [50] D. V. Hinkley, e A. C. Davison. *Bootstrap Methods and their Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [51] A. Bevan. *Statistical Data Analysis for the Physical Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [52] J. Whalen, C. R. Gallistel, e R. Gelman. Nonverbal counting in humans: the psychophysics of number representation. *Psychological Science*, 10(2):130–137, 1999.
- [53] P. Gordon. Numerical cognition without words: evidence from Amazonia. *Science*, 306(5695):496–499, 2004.
- [54] J. Myerson, S. Robertson, e S. Hale. Aging and intraindividual variability in performance: analyses of response time distributions. *Journal of Experimental Analysis of Behavior*, 88(3):319–337, 2007.
- [55] D. Matzke e E.-J. Wagenmakers. Psychological interpretation of the ex-Gaussian and shifted Wald parameters: a diffusion model analysis. *Psychonomic Bulletin & Review*, 16(5):798–817, 2009.

- [56] D. A. Darling. The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises test. *Annals of Mathematical Statistics*, 28(4):185–207, 1957.
- [57] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, S. Havlin, F. Sciortino, M. Simons, e H. E. Stanley. Long-range correlations in nucleotide sequences. *Nature*, 356(6365):168–170, 1992.
- [58] Q. Zhang, Y. Zhou, V. P. Singh, e Y. D. Chen. Comparison of detrending methods for fluctuation analysis in hydrology. *Journal of Hydrology*, 400(1–2):121–132, 2011.
- [59] D. Grech e Z. Mazur. On the scaling ranges of detrended fluctuation analysis for long-term memory correlated short series of data. *Physica A*, 392(10):185–207, 2013.
- [60] D. Gulich e L. Zunino. A criterion for the determination of optimal scaling ranges in DFA and MF-DFA. *Physica A*, 397:185–207, 2014.
- [61] J. Kantelhardt, Y. Ashkenazy, P. Ivanov, A. Bunde, S. Havlin, T. Penzel, J.-H. Peter, e H. Stanley. Characterization of sleep stages by correlations in the magnitude and sign of heartbeat increments. *Physical Review E*, 65(5):051908, 2002.
- [62] Y. Ashkenazy, S. Havlin, P. Ch. Ivanov, C.-K. Peng, V. Schulte-Frohlinde, e H. E. Stanley. Magnitude and sign scaling in power-law correlated time series. *Physica A*, 323:19–41, 2003.
- [63] L. Xu, P. Ivanov, K. Hu, Z. Chen, A. Carbone, e H. Stanley. Quantifying signals with power-law correlations: a comparative study of detrended fluctuation analysis and detrended moving average techniques. *Physical Review E*, 71(5):051101, 2005.
- [64] E. Rodriguez, J. C. Echeverria, e J. Alvarez-Ramirez. Detrended fluctuation analysis of heart intrabeat dynamics. *Physica A*, 384(2):429–438, 2007.
- [65] R. S. Mendes, L. C. Malacarne, R. P. B. Santos, H. V. Ribeiro, e S. Picoli. Earthquake-like patterns of acoustic emission in crumpled plastic sheets. *Europhysics Letters*, 92(2):29001, 2010.



- [66] J. Łapszo e J. Kołodziejczyk. Psychomotor efficiency profiles of the members of the senior and junior Polish national table-tennis team. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 1(1):65–70, 1999.
- [67] M. Franěk, J. Mates, T. Radil, K. Beck, e E. Pöppel. Finger tapping in musicians and nonmusicians. *International Journal of Psychophysiology*, 11(3):277–279, 1991.
- [68] H. Yoshinaga, S. Miyazima, e S. Mitake. Fluctuation of biological rhythm in finger tapping. *Physica A*, 280(3–4):582–586, 2000.
- [69] A. Newell, P. S. Rosenbloom, e J. R. Anderson. Mechanisms of skill acquisition and the law of practice. Em *Cognitive skills and their acquisition*, 1–55. Erlsbaum, Hillsdale, 1981.
- [70] A. Heathcote, S. Brown, e D. J. K. Mewhort. The power law repealed: the case for an exponential law of practice. *Psychonomic Bulletin & Review*, 7(2):185–207, 2000.
- [71] T. M. Ross. Dengue virus. *Clinics Laboratory Medicine*, 30(1):149–160, 2010.
- [72] P. Ch. Ivanov, Z. Chen, K. Hu, e H. E. Stanley. Multiscale aspects of cardiac control. *Physica A*, 344(3–4):685–704, 2004.
- [73] R. Bartsch, J. W. Kantelhardt, T. Penzel, e S. Havlin. Experimental evidence for phase synchronization transitions in the human cardiorespiratory system. *Physical Review Letters*, 98(5):054102, 2007.
- [74] F. J. Antonio, R. S. Mendes, e S. M. Thomaz. Identifying and modeling patterns of tetrapod vertebrate mortality rates in the Gulf of Mexico oil spill. *Aquatic Toxicology*, 105(1–2):177–179, 2011.
- [75] B. T. Milne. Motivation and benefits of complex systems approaches in ecology. *Ecosystems*, 1(5):449–456, 1998.
- [76] K. Yamasaki, K. Matia, S. V. Buldyrev, D. Fu, F. Pammolli, M. Riccaboni, e H. E. Stanley. Preferential attachment and growth dynamics in complex systems. *Physical Review E*, 74(3):035103, 2006.
- [77] A. S. Martinez, R. S. González, e A. L. Espíndola. Generalized exponential function and discrete growth models. *Physica A*, 388(14):2922–2930, 2009.

- [78] S. Picoli Jr., J. J. V. Teixeira, H. V. Ribeiro, L. C. Malacarne, R. P. B. Santos, e R. S. Mendes. Spreading patterns of the Influenza A (H1N1) pandemic. *PLoS ONE*, 6(3):e17823, 2011.
- [79] F. J. Antonio, S. Picoli, J. J. V. Teixeira, e R. S. Mendes. Growth patterns and scaling laws governing AIDS epidemic in Brazilian cities. *PLoS ONE*, 9(10): e111015, 2014.
- [80] Y. Muroya, H. Li, e T. Kuniya. Complete global analysis of an SIRS epidemic model with graded cure and incomplete recovery rates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 410(2):719–732, 2014.
- [81] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, e J. A. J. Metz. On the definition and the computation of there production number  $r_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of Mathematical Biology*, 28(4):365–382, 1991.
- [82] L. J. White e G. F. Medley. Microparasite population dynamics and continuous immunity. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 265(1409):1977–1983, 1998.
- [83] M. G. M. Gomes, L. J. White, e G. F. Medley. Infection, reinfection and vaccination under sub-optimal immune protection: epidemiological perspectives. *Journal of Theoretical Biology*, 228(4):539–549, 2004.
- [84] D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, e B. T. Grenfell. A simple model for complex dynamical transitions in epidemics. *Science*, 287(5453):667–670, 2000.
- [85] B. F. Finkenstädt e B. T. Grenfell. Time series modelling of childhood diseases: a dynamical systems approach. *Applied Statistics-Journal of the Royal Statistical Series C*, 49(2):187–205, 2000.
- [86] L. E. C. Rocha e V. D. Blondel. Bursts of vertex activation and epidemics in evolving networks. *PLoS Computational Biology*, 9(3):e1002974, 2013.
- [87] WHO | dengue and severe dengue. Disponível em: <<http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs117/en/>>. Acesso em: ago. 2014.

- [88] D. A. T. Cummings, R. A. Irizarry, N. E. Huang, T. P. Endy, A. Nisalak, K. Ungchusak, e D. S. Burke. Travelling waves in the occurrence of dengue haemorrhagic fever in Thailand. *Nature*, 427(6972):344–347, 2004.
- [89] A. Guzman e R. E. Istúriz. Update on the global spread of dengue. *International Journal of Antimicrobial Agents*, 36, S1:S40, 2010.
- [90] M. Gharbi, P. Quenel, J. Gustave, S. Cassadou, L. Girdary G. La Ruche, e L. Marama. Time series analysis of dengue incidence in Guadeloupe, French West Indies: forecasting models using climate variables as predictors. *BMC Infectious Diseases*, 11:166, 2011.
- [91] W. Hu, A. Clement, G. Williams, e S. Tong. Spatial analysis of notified dengue fever infections. *Epidemiology & Infection*, 139:391–399, 2011.
- [92] WHO | dengue. Disponível em: <<http://www.who.int/denguecontrol/en/>>. Acesso em: ago. 2013.
- [93] S. T. R. Pinho, C. P. Ferreira, L. Esteva, F. R. Barreto, V. C. Morato e Silva, e M. G. L. Teixeira. Modelling the dynamics of dengue real epidemics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 368(1933):5679–5693, 2010.
- [94] G. P. Silveira e L. C. Barros. Numerical methods integrated with fuzzy logic and stochastic method for solving PDEs: an application to dengue. *Fuzzy Sets and Systems*, 225(0):39–57, 2013.
- [95] D. P. Durham, M. L. N. Mbah, J. Medlock, P. M. Luz, L. A. Meyers, A. D. Paltiel, e A. P. Galvani. Dengue dynamics and vaccine cost-effectiveness in Brazil. *Vaccine*, 3(37):3957–3961, 2013.
- [96] S. K. Dickin e C. J. Schuster-Wallace. Assessing changing vulnerability to dengue in northeastern Brazil using a water-associated disease index approach. *Global Environmental Change*, 29(0):155–164, 2014.
- [97] M. Nogueira, T. Colombo, D. Vedovello, A. Mondini, B. Drumond, e E. Favaro. Dengue virus surveillance in a medium size city in Brazil reveals a complex pattern of serotypes and strains circulation. *International Journal of Infectious Diseases*, 21, Supplement 1(0):20, 2014.

- [98] DATASUS. Disponível em: <<http://dtr2004.saude.gov.br/sinanweb/index.php>>. Acesso em: ago. 2014.
- [99] IBGE. Disponível em: <<ftp://ftp.ibge.gov.br/Censos>>. Acesso em: ago. 2014.
- [100] IBGE. Disponível em: <[ftp://ftp.ibge.gov.br/Estimativas\\_de\\_Populacao](ftp://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao)>. Acesso em: ago. 2014.
- [101] J. A. Patz, P. R. Epstein, T. A. Burke, e J. M. Balbus. Global climate change and emerging infectious diseases. *The Journal of American Medical Association*, 275(3):217–223, 1996.
- [102] Y.-H. Hsieh e C. W. S. Chen. Turning points, reproduction number, and impact of climatological events for multi-wave dengue outbreaks. *Tropical Medicine & International Health*, 14(6):628–38, 2009.
- [103] C.-S. Shang, C.-T. Fang, C.-M. Liu, T.-H. Wen, K.-H. Tsai, e C.-C. King. The role of imported cases and favorable meteorological conditions in the onset of dengue epidemics. *PLoS Neglected Tropical Diseases*, 4(8):e775, 2010.
- [104] Y. L. Hii, H. Zhu, N. Ng, L. C. Ng, e J. Rocklöv. Forecast of dengue incidence using temperature and rainfall. *PLoS Neglected Tropical Diseases*, 6(11):e1908, 2012.
- [105] J. S. Huxley. *Problems of Relative Growth*. Methuen & Co. Ltd., London, 1932.
- [106] P. Jolicoeur. The multivariate generalization of the allometry equation. *Biometrics*, 19(3):497–499, 1963.
- [107] R. Acuna-Soto, C. Viboud, e G. Chowell. Influenza and pneumonia mortality in 66 large cities in the United States in years surrounding the 1918 pandemic. *PLoS ONE*, 6(8):e23467, 2011.
- [108] L. M. A. Bettencourt, J. Lobo, D. Helbing, C. Kühnert, e G. B. West. Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104(17):7301–7306, 2007.

- [109] L. G. A. Alves, H. V. Ribeiro, E. K. Lenzi, e R. S. Mendes. Distance to the scaling law: A useful approach for unveiling relationships between crime and urban metrics. *PLoS ONE*, 8(8):e69580, 2013.
- [110] M. Fratini, N. Poccia, A. Ricci, G. Campi, M. Burghammer, G. Aeppli, e A. Bianconi. Scale-free structural organization of oxygen interstitials in  $\text{La}_2\text{CuO}_{4+y}$ . *Nature*, 466(7308):841–844, 2010.
- [111] L. K. Gallos, P. Barttfeld, S. Havlin, M. Sigman, e H. A. Makse. Collective behavior in the spatial spreading of obesity. *Scientific Reports*, 2:454, 2012.
- [112] E. G. Altmann, G. Cristadoro, e M. D. Esposti. On the origin of long-range correlations in texts. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 109(29):11582–11587, 2012.
- [113] S. F. Edwards e D. R. Wilkinson. The surface statistics of a granular aggregate. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical*, 381(1780):17–31, 1982.
- [114] S. Pal e D. P. Landau. The Edwards-Wilkinson model revisited: large-scale simulations of dynamic scaling in  $2+1$  dimensions. *Physica A*, 267(3-4):406–413, 1999.
- [115] C. Borghesi, J.-C. Raynal, e J.-P. Bouchaud. Election turnout statistics in many countries: similarities, differences, and a diffusive field model for decision-making. *PLoS ONE*, 7(5):e36289, 2012.
- [116] A. Chame e F. D. A. A. Reis. Scaling of local interface width of statistical growth models. *Surface Science*, 553(1-3):145–154, 2004.
- [117] A. Compte. Stochastic foundations of fractional dynamics. *Physical Review E*, 53(4):4191–4193, 1996.
- [118] C. Anteneodo, J. C. Dias, e R. S. Mendes. Long-time behavior of spreading solutions of Schrödinger and diffusion equations. *Physical Review E*, 73(5):051105, 2006.
- [119] R. Metzler e J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physical Reports*, 339(1):1–77, 2000.

- [120] T. Nattermann e L.-H. Tang. Kinetic surface roughening. I. The Kardar-Parisi-Zhang equation in the weak-coupling regime. *Physical Review A*, 45(10):7156–7161, 1992.
- [121] A. A. Masoudi, M. Khorrami, M. Stastna, e M. Kohandel. Dynamics of radial fractional growing surfaces. *Europhysics Letters*, 100(1):16004, 2012.
- [122] B. M. Bass. Understanding the dynamics of power and influence in organizations. Em Robert P. Vecchio, editor, *Leadership*. University of Notre Dame Press, Notre Dame, 2007.
- [123] W. C. Allee. Social biology of subhuman groups. *Sociometry*, (8):21–29, 1945.
- [124] W. C. Allee, A. E. Emerson, O. Park, T. Park, e K. P. Schmidt. *Principles of animal ecology*. Saunders, Philadelphia, 1949.
- [125] W. C. Allee. *Cooperation among animals, with human implications*. Schuman, New York, 1951.
- [126] H. L. Smith e L. M. Krueger. *A brief summary of literature on leadership*. Indiana University, School of Education Bulletin, Bloomington, 1933.
- [127] H. S. Lewis. Leaders and followers: some anthropological perspectives. Em *Addison-Wesley Module in Anthropology No. 50*. Addison-Wesley, Indiana, 1974.
- [128] B. M. Bass. *Leadership and performance beyond expectations*. Free Press, New York, 1985.
- [129] D. V. Day. Leadership development: a review in context. *The Leadership Quarterly*, 4(11):581–613, 2001.
- [130] R. C. Eichenberg, R. J. Stoll, e M. Lebo. War president: the approval ratings of George W. Bush. *Journal of Conflict Resolution*, 50(6):783–808, 2006.
- [131] J. W. Beck, A. E. Carr, e P. T. Walmsley. What have you done for me lately? Charisma attenuates the decline in U.S. presidential approval over time. *The Leadership Quarterly*, 23(5):934–942, 2012.
- [132] G. S. Ligon, D. J. Harris, e S. T. Hunter. Quantifying leader lives: what historiometric approaches can tell us. *The Leadership Quarterly*, 23(6):1104–1133, 2012.

- [133] R. Heffernan. Why the prime minister cannot be a president: comparing institutional imperatives in Britain and America. *Parliamentary Affairs*, 58(1):53–70, 2005.
- [134] K. Theakstone. *After Number 10: Former Prime Minister in British Politics*. Palgrave Macmillan, Basingstoke, 2010.
- [135] M. Bennister. Is there life after political death? *Parliamentary Affairs*, 64(4): 800–804, 2011.
- [136] A. Q. Flores e A. Smith. Leader survival and natural disaster. *British Journal of Political Science*, 43(4):821–843, 2013.
- [137] A. Bullough, K. G. Kroeck, W. Newburry, S. K. Kundu, e K. B. Lowe. Women’s political leadership participation around the world: an institutional analysis. *The Leadership Quarterly*, 23(3):398–411, 2012.
- [138] B. S. Steinberg. The making of female presidents and prime ministers: the impact of birth order, sex os siblings, and father-daughter dynamics. *Political Psychology*, 22(1):89–110, 2001.
- [139] *DK Illustrated Oxford Dictionary*. Dorling Kindersley Limited and Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [140] *Mini Enciclopédia do Japão*. Comissão Executiva do Intercâmbio Cultural Brasil-Japão, Japan Foundation, 2011.
- [141] Asi es Colombia. Disponível em: <<http://web.presidencia.gov.co/asiescolombia/presidentes/01.htm>>. Acesso em: jul. 2013.
- [142] Presidentes de El Salvador. Disponível em: <<http://www.presidencia.gob.sv/index.php/presidencia/historia/presidentes-de-el-salvador.html#>>. Acesso em: jul. 2013.
- [143] the WHITE HOUSE - the Presidents. Disponível em: <<http://www.whitehouse.gov/about/presidents>>. Acesso em: jul. 2013.
- [144] The Monarchy in Denmark. Disponível em: <<http://kongehuset.dk/english/the-monarchy-in-denmark/The-Royal-Lineage>>. Acesso em: jul. 2013.

- [145] The official website of The British Monarchy. Disponível em: <<http://www.royal.gov.uk/HistoryoftheMonarchy/HistoryoftheMonarchy.aspx>>. Acesso em: jul. 2013.
- [146] Swedish Royal Court - Kings and Queens of Sweden - a thousand year succession. Disponível em: <<http://www.kungahuset.se/royalcourt/monarchy/themonarchyinsweden/themonarchsofsweden.4.396160511584257f2180005932.html>>. Acesso em: jul. 2013.
- [147] Prime Minister of Belgium. Disponível em: <<http://premier.fgov.be/en/predecessors>>. Acesso em: jul. 2013.
- [148] Prime Minister of Belgium. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Prime\\_Minister\\_of\\_Belgium](http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_Minister_of_Belgium)>. Acesso em: jul. 2013.
- [149] A Santa Sé. Disponível em: <[www.vatican.va/holy\\_father\\_po.htm](http://www.vatican.va/holy_father_po.htm)>. Acesso em: ago. 2013.
- [150] Coprínceps Francesos. Disponível em: <[http://www.coprince-fr.ad/index.php?option=com\\_content&view=article&id=25&Itemid=17&lang=ca](http://www.coprince-fr.ad/index.php?option=com_content&view=article&id=25&Itemid=17&lang=ca)>. Acesso em: nov. 2014.
- [151] The prime minister's office - prime ministers since 1848. Disponível em: <[www.stm.dk/\\_p\\_11448.html](http://www.stm.dk/_p_11448.html)>. Acesso em: nov. 2014.
- [152] Prime minister of Japan and his cabinet. Disponível em: <[http://japan.kantei.go.jp/archives\\_e.html](http://japan.kantei.go.jp/archives_e.html)>. Acesso em: nov. 2014.
- [153] Governo de Portugal. Disponível em: <<http://www.portugal.gov.pt/pt/o-governo/arquivo-historico/chefes-de-governo/chefes-de-estado.aspx>>. Acesso em: nov. 2014.
- [154] *Enciclopedia Cattolica*, volume IX. Città del Vaticano, 1954.
- [155] R. Levene. Independência e organização constitucional. Em *História das Américas*, volume VII. W. M. Jackson, Inc., São Paulo, 1959.
- [156] R. Levene. Independência e organização constitucional. Em *História das Américas*, volume V. W. M. Jackson, Inc., São Paulo, 1959.



- [157] K. Kodama. *Nihonshikobyakka (Tennou)*. Tokyo-Do Shuppan, Tokyo, 1999.
- [158] L. Bethell e T. Anna. Da independência a 1870. Em *História da América Latina*, volume III. Editora da Universidade Estadual de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [159] L. Bethell. De 1870 a 1930. Em *História da América Latina*, volume IV. Editora da Universidade Estadual de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [160] L. Bethell. De 1870 a 1930. Im *História da América Latina*, volume V. Editora da Universidade Estadual de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [161] L. Bethell. A América Latina após 1930. Em *História da América Latina*, volume VI. Editora da Universidade Estadual de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [162] A. M. Petersen, W.-S. Jung, e H. E. Stanley. On the distribution of career longevity and the evolution of home-run prowess in professional baseball. *Europhysics Letters*, 83(1):50010, 2008.
- [163] A. M. Petersen, W.-S. Jung, J.-S. Yang, e H. E. Stanley. Quantitative and empirical demonstration of the matthew effect in a study of career longevity. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 108(1):18–23, 2011.
- [164] Weibull distribution. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution)>. Acesso em: jul. 2015.
- [165] M. P. Wand. Data-based choice of histogram bin width. *The American Statistician*, 51(1):59–64, 1997.
- [166] L. Davies, U. Gather, D. Nordman, e H. Weinert. A comparison of automatic histogram constructions. *ESAIM: Probability and Statistics*, 13:181–196, 2009.
- [167] D. Freedman e P. Diaconis. On the histogram as a density estimator:  $l_2$  theory. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57(4):453–476, 1981.
- [168] D. W. Scott. On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 66(3):605–610, 1979.
- [169] P. K. Janert. *Data Analysis with Open Source Tools*. O'Reilly, Sebastopol, 2011.

- [170] About Education. Disponível em: <<http://statistics.about.com/od/Applications/a/What-Is-Bootstrapping.htm>>. Acesso em: jul. 2015.
- [171] Wolfram Mathematica. Disponível em: <<https://reference.wolfram.com/language/howto/PerformABootstrapAnalysis.html>>. Acesso em: jul. 2015.
- [172] J. W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H. H. A. Rêgo, S. Havlin, e A. Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 295(3-4):441–454, 2001.
- [173] F. R. Blattner, G. Plunkett III, C. Bloch, N. Perna, V. Burland, M. Riley, J. Collado-Vides, J. Glasner, C. Rode, G. Mayhew, J. Gregor, N. Davis, H. Kirkpatrick, M. Goeden, D. Rose, B. Mau, e Y. Shao. The complete genome sequence of *Escherichia coli* K-12. *Science*, 277(5331):1453–1462, 1997.