UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CLAUDIO ICHIBA

Soluções exatas para a equação de Fokker-Planck não-linear

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes

Maringá
2003

RESUMO

Aqui há um estudo sobre difusão anômala empregando uma equação de Fokker-Planck não-linear. Soluções exatas com dependência temporal e espacial foram encontradas a partir de um *ansatz* gaussiano generalizado baseado na exponencial-q de Tsallis. Isso foi feito nos casos sem força externa, com força externa constante e linear, e com termo de fonte. Também, abordou-se casos não dependentes do tempo (estacionário). As soluções com cauda longa, obtidas via *ansatz* gaussiano generalizado, têm um comportamento assintótico tipo lei de potência que também são soluções exatas. Nesse último contexto, investigou-se uma família de osciladores anarmônicos simétricos que tem como casos particulares o oscilador harmônico e o poço quadrado infinito. Considerou-se, por fim, um *ansatz* que tem como casos particulares o gaussiano generalizado e o tipo lei de potência.

ABSTRACT

A study about the anomalous diffusion employing a non-linear Fokker-Planck equation is developed here. Exact solutions with time and space dependence were found from a generalized gaussian *ansatz* based on Tsallis q-exponential. This was done in cases without external force, with constant and linear external forces, and with a source term. Also, time independent (stationary) solutions were obtained. The solutions with long tail, found via the generalized gaussian *ansatz*, have power laws as asymptotic behavior. These power laws are exact solutions too. In this last context a family of symmetrical anarmonic oscillators, that has as particular cases the harmonic oscillator and the infinite square well, was investigated. An *ansatz* that contains as special cases the power law and generalized gaussian was also considered.

Dedicatória

À minha esposa Sueli e aos meus filhos: Gustavo e Beatriz

Agradecimentos

Agradeço a enorme paciência e dedicação de Rênio dos Santos Mendes na minha orientação, por meio de sua simplicidade e muito bom humor (sua “marca registrada”). Orientação feita com muita competência e com a qual aprendi muito. Lamento apenas a falta de tempo para falarmos sobre outras coisas, além de nosso tema de orientação.

Ao Departamento de Física e à Coordenação do Mestrado por proporcionar a oportunidade do curso. Especialmente a Akiko Nisida pela constante atenção e dedicação a todos os pós-graduandos.

Aos colegas de pós-graduação pelo companheirismo durante essa jornada.

Aos professores do Curso de Mestrado pela colaboração em minha formação.

Em particular, a José Noboru Maki pela inestimável ajuda e companheirismo em todo curso. A nossa troca de conhecimento tornou-me um pouco mais sábio. Anseio por retomarmos nossas discussões filosóficas e trabalharmos brevemente.

Aos meus pais que sempre confiaram em minha persistência e objetivos, tornando os meus sonhos, os seus sonhos, assim como os seus, os meus. A vida toda eles acreditaram e se dedicaram a isso. Uma vez ouvi de uma Juíza a seguinte frase: “Nós somos o que nos ensinaram ser.” Espero fazer o mesmo bem aos meus filhos.

Ao Gustavo e à Beatriz pelo renascimento de minha vida.

À minha esposa Sueli que me apoiou e até me disciplinou com amor e compreensão. Ainda temos muito que fazer e aprender.

Às minhas amigas Cleuza Proetti Yurassek e Marlene dos Santos Bertolini.

A todos que colaboraram para a realização deste trabalho.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A descrição da difusão usual (normal) é bem entendida e rotineiramente usada para prever várias propriedades macroscópicas de conjuntos de partículas [1-5]. Explica, por exemplo, porque algumas gotas de um adoçante dietético adoçam toda uma xícara de café ou porque o aroma de um perfume usado por uma pessoa preenche toda uma sala fechada. Tal processo ocorre espontaneamente, no qual cada elemento de um conjunto que se move realiza uma trajetória aleatória. Isso é resultado das várias colisões com outras partículas que compõem o meio e com as quais estão sendo difundidas.

Podemos tratar, em geral, o movimento de uma única partícula como uma seqüência de pequenas trajetórias, que podem ser consideradas retas entre duas colisões sucessivas. Por sua vez, se a velocidade da partícula, tanto em módulo quanto em direção, mudar com um certo grau de aleatoriedade entre colisões, dizemos que o processo é estocástico [2-5]. Assim, o movimento errático de uma partícula em um meio composto por outras, colidindo com ela, sob o ponto de vista microscópico, pode ser representado em termos probabilísticos. A probabilidade de uma partícula realizar um movimento é representado na forma de uma distribuição de probabilidades. Uma das distribuições mais importantes na física é a distribuição gaussiana [1-5]. Por exemplo, é usada na descrição dos casos citados no parágrafo anterior. Num contexto mais detalhado, o processo estocástico pode ser classificado em markoviano ou não-markoviano. O segundo ocorre quando a probabilidade num instante depende apenas do passo anterior e o primeiro quando há dependência em mais passos anteriores.

Considerando a ausência de forças externas, podemos entender a difusão como o processo pelo qual uma quantidade de partículas flui de regiões de alta concentração para regiões de baixa concentração ocorrendo, portanto, no sentido de diminuir o gradiente de concentração das partículas no meio. Assim, após um tempo suficientemente longo a distribuição tenderá a uniforme. Por sua vez, isso corresponde ao caso no qual a desordem é máxima, ou seja, entropia máxima.

A difusão é um fenômeno fácil de encontrar e, em geral, ocorre quando um sistema se encaminha para o estado de equilíbrio. Logo, é de fundamental importância em processos físicos, químicos e biológicos, entre outros. Isso justifica porque a difusão é largamente estudada nos vários ramos da ciência. Neste mesmo sentido, dedicamos esta dissertação a um estudo sobre difusão.

No próximo capítulo, iremos estudar a difusão usual empregando a Lei de Fick. Logo em seguida, mostraremos que a difusão de partículas também pode ser vista considerando as forças microscópicas e a ação de forças externas. Essas forças microscópicas com boa aproximação apresentam um aspecto de aleatoriedade, logo, empregaremos equações estocásticas usualmente chamadas de equações de Langevin. Usaremos estas equações para obter o comportamento probabilístico na forma de uma equação das probabilidades, a equação de Fokker-Planck, que é uma equação linear. Para esta última, apresentaremos soluções exatas que dependem das coordenadas: temporal e espacial, obtidas preferencialmente a partir de um *ansatz* gaussiano para casos sem força externa, com força externa constante e linear, e com termo de fonte. Também, abordaremos o caso não dependente do tempo (estacionário). Nesse cenário, as equações de difusão e Fokker-Planck têm uma estrutura idêntica. É importante salientar que esta afirmativa não se aplica no caso geral, porém é válida nos casos discutidos neste trabalho. Assim, ao longo desta dissertação usaremos indistintamente os termos “equação de difusão” e “equação de Fokker-Planck”. Além disso, frizamos que os resultados expostos nesse capítulo e nos demais são obtidos analiticamente.

É importante salientar que um dos objetivos deste texto é o de apresentar de forma detalhada as passagens desenvolvidas em nossas análises. Por conseguinte, esperamos que qualquer pessoa com formação básica de cálculo diferencial possa ser capaz de acompanhar com transparência os desenvolvimentos apresentados no decorrer deste trabalho.

Apresentaremos no capítulo 3 uma generalização da equação de Fokker-Planck na forma de uma equação não-linear. Naturalmente, esta equação descreve uma difusão diferente da usual, que é um exemplo de difusão anômala. Ela também é conhecida como equação de difusão em meios porosos e é usada na sua modelagem [6,7]. Tem sido empregada também em difusão de plasmas [8], percolação de gases através de meios porosos [9], filmes líquidos finos espalhando-se sob gravidade [10], dispersão espacial de populações biológicas [11] e alguns fenômenos de auto-organização [12], entre outros. Como no capítulo 2, discutiremos casos sem força externa, com força externa (constante e linear) e com termo de fonte quando as soluções dependerem do tempo e da posição. Em tais situações (não-lineares) o *ansatz* gaussiano não é mais aplicável, porém usaremos como *ansatz* uma generalização dele. Esta generalização se dá através da exponencial-q de Tsallis [13-16], que pode ser obtida por meio da maximização da entropia de Tsallis sujeita a vínculos apropriados [17-19], o que nos leva a uma conexão da equação de Fokker-Planck não-linear com a termoestatística de Tsallis. Uma solução estacionária será também obtida na presença de uma força externa genérica, porém advinda de uma energia potencial.

No capítulo 4, começamos rediscutindo as situações anteriores, porém enfocando uma nova classe de soluções do tipo de lei de potência. Verificaremos, em particular, que as soluções anteriores têm um comportamento assintótico que recaem em algumas destas novas soluções, ou seja, o comportamento de cauda, quando longo, das soluções discutido no capítulo 3 é recuperado com as soluções desse capítulo. No final dele, investigamos uma família de osciladores anarmônicos simétricos que tem como casos particulares o oscilador harmônico e o poço quadrado infinito. No melhor de nosso conhecimento, para essa classe de osciladores não encontramos soluções divulgadas na literatura. Tal fato nos motivou a obter soluções tipo lei de potência, relacionadas a esses osciladores anarmônicos. No final dele, estudamos um *ansatz* mais geral, no qual soluções dos casos o gaussiano generalizado e o tipo lei de potência foram recuperados, neste sentido observa-se que ambos podem ser considerados como casos particulares .

Por fim, no capítulo 5 dispomos nossas conclusões, assim como as observações finais.

Capítulo 2

Difusão usual e equação de Fokker-Planck

No estudo da difusão de partículas deve-se considerar forças microscópicas, bem como a ação de forças externas. Com uma boa aproximação, essas forças microscópicas apresentam um aspecto de aleatoriedade, pois basicamente advém de colisões das partículas que compõem o meio com as que estão sendo difundidas. Logo, é natural numa descrição formal de difusão de partículas se empregar grandezas aleatórias, ou seja, usar equações estocásticas, usualmente chamadas de equações de Langevin [3-5]. Há também outro modo, no qual se observa o comportamento probabilístico das grandezas importantes na forma de uma equação para as probabilidades, a equação de Fokker-Planck [3-5]. Nesse cenário, para descrever a difusão, vamos apresentar inicialmente a equação de difusão na forma fenomenológica, aquela que usa a Lei de Fick. A seguir, vamos obter a equação de Fokker-Planck a partir da equação de Langevin. Também incluiremos a obtenção de soluções exatas da equação de Fokker-Planck para casos sem força externa, com forças externas constante e linear, e com termo de fonte.

2.1 Difusão usual

Do ponto de vista fenomenológico, o procedimento para a construção de um modelo matemático usado na descrição da difusão se dá usualmente através da chamada Lei de Fick. Um tipo de desvio relevante dessa lei (caso anômalo) será discutido em capítulos subseqüentes.

Tomemos ρ como a densidade de uma substância que se difunde e $\bar{J}$ a densidade de corrente (quantidade da substância que atravessa uma unidade de área normal à direção de fluxo, por unidade de tempo). Numa grande variedade de situações, quando não há forças externas, a densidade de corrente é proporcional à diferença de densidade entre regiões próximas, ou seja, tem-se a Lei de Fick:

$$\bar{J} = -D\nabla\rho, \tag{2.1}$$

com $\rho = \rho(\bar{r}, t)$, $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$ e D é chamado coeficiente de difusão. Esse coeficiente (positivo) depende das propriedades do meio, estando relacionado com a rapidez com que a quantidade ρ difunde-se. Tal difusão ocorre das regiões de alta para baixa concentração e, portanto, se dá no sentido contrário ao do gradiente desta (da região de maior densidade para a de menor densidade). Para um meio anisotrópico, D é representado por uma matriz, indicando que a difusão pode se dar diferenciada para cada direção.

Se considerarmos que a difusão de uma substância se dá sem perda ou produção interna em um meio contínuo, teremos a equação de conservação (equação de continuidade)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J} = 0, \tag{2.2}$$

de onde se obtém, junto com a eq. (2.1) e supondo D constante, a equação de difusão

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho. \tag{2.3}$$

Também é digno de nota que, semelhantemente à equação de difusão de massa, vinculada a Lei de Fick, a equação de difusão de calor baseia-se na conservação de energia térmica e na Lei de Newton – Fourier, que é formalmente análoga a Lei de Fick.

Por outro lado, quando houver perda ou produção interna de massa, devido a um sorvedouro ou uma fonte, a equação de continuidade assume a forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J} = \delta, \tag{2.4}$$

onde δ é a densidade da fonte com $\delta > 0$ e $\delta < 0$ associados à criação e absorção de substância, respectivamente. Logo, a conseqüente equação de difusão não-homogênea é dada por

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho + \delta. \tag{2.5}$$

Se supusermos que o sistema está sob a ação de uma força externa, a densidade de corrente conterá a parte devida a lei de Fick (2.1) e um termo proporcional ao produto da força externa $\overline{F}$ pela densidade ρ, isto é,

$$\overline{J} = -D\nabla\rho + \mu\overline{F}\rho\,, \tag{2.6}$$

com μ representando a mobilidade. Neste caso, quando μ for constante, a equação de difusão é descrita por

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho - \mu\nabla\cdot(\overline{F}\rho)\,. \tag{2.7}$$

Observamos também que podemos ter simultaneamente ganho (ou perda) interno e ação de força externa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho - \mu\nabla\cdot(\overline{F}\rho) + \delta\,. \tag{2.8}$$

2.2 Equação de Langevin

Vamos considerar o movimento de partículas de massa *m* imersas em um meio. Dessa forma, a solução completa do sistema macroscópico consistiria em resolver todas as equações microscópicas do sistema. Infelizmente isso não é viável. Portanto, vamos usar a descrição de Paul Langevin (1872-1946) [3-5]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) + R(t) - \eta\frac{dx}{dt}\,, \tag{2.9}$$

onde, numa boa aproximação, o termo $R(t)$ representa a força aleatória resultante das colisões microscópicas da partícula de massa *m* com as moléculas do meio, $F(x)$ representa uma força externa e η, uma constante positiva, é o coeficiente de atrito. Aqui, por simplicidade de notação, estamos considerando o caso unidimensional.

Para os casos em que a massa da partícula é desprezível, a eq. (2.9) resulta em

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \zeta(t)\,, \tag{2.10}$$

onde $f(x) = F(x)/\eta$ e $\zeta(t) = R(t)/\eta$. Quando dizemos que a massa é desprezível, na realidade devemos entender que o termo $m\ d^2x/dt^2$ pode ser desconsiderado em comparação com $\eta\ dx/dt$. Por exemplo, se $x(t) = Ae^{-t/\tau}$, teremos $md^2x/dt^2 = xm/\tau^2$ e $-\eta dx/dt = x\eta/\tau$, daí a condição $|md^2x/dt^2| << |\eta dx/dt|$ implica $m << \eta\tau$.

Em nosso estudo introdutório vamos supor que a aleatoriedade de $\zeta(t)$ implica interações em todas orientações e intensidades, de modo que as variáveis $\zeta(t)$ e $\zeta(t')$ são independentes para $t \neq t'$. Assim, $\zeta(t)$ é nula em média, ou seja, $\langle \zeta(t) \rangle = 0$ com $\langle \zeta(t) \rangle$ representando o valor médio de $\zeta(t)$. Da mesma forma, é necessário observar que $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \langle \zeta(t) \rangle \langle \zeta(t') \rangle = 0$ se $t \neq t'$, pois $\zeta(t)$ e $\zeta(t')$ podem ser consideradas variáveis aleatórias independentes quando se têm tempos distintos. Por outro lado, se $t = t'$ temos um valor pronunciado para $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle$. Tais observações podem ser resumidas em

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \Gamma\delta(t-t') \quad \text{com} \quad \Gamma > 0. \tag{2.11}$$

2.3 Equação de Fokker-Planck

A eq. (2.10), que é um exemplo de equação de Langevin, suplementada pelas propriedades (2.11), é uma equação diferencial de natureza estocástica (aleatória), assim como a eq. (2.9).

A partir da eq. (2.10), podemos encontrar uma equação para a densidade de probabilidade $\rho(x,t,x_0)$ de modo que $\rho(x,t,x_0)dx$ é a probabilidade de encontrar a partícula entre x e $x+dx$ no instante de tempo t, quando esta partícula estava em $x = x_0$ no instante inicial $t = t_0$. Para isso, vamos empregar um procedimento de discretização análogo ao desenvolvido em [5]. Nesse sentido, usaremos

$$dx \to \Delta x = x_{n+1} - x_n \qquad \text{e} \qquad dt \to \Delta t = t_{n+1} - t_n = \tau, \tag{2.12}$$

caracterizando t em intervalos τ e denotando x_n a posição da partícula no instante $t = n\tau$. Portanto, recaímos em

$$\frac{dx}{dt} \to \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}, \tag{2.13}$$

que faz com que a equação de Langevin (2.10) seja aproximada por

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n) + \tau\zeta(n\tau). \tag{2.14}$$

Além disso, $\delta(t-t') \to \delta_{nn'}/\tau$, $\langle \zeta_n \rangle = 0$ e $\langle \zeta_n \zeta_{n'} \rangle = \frac{\Gamma}{\tau}\delta_{nn'}$ com $\zeta_n = \zeta(n\tau))$. Fazendo $\xi_n = \sqrt{\tau/\Gamma}\,\zeta_n$, a eq. (2.14) assume a forma

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n) + \sqrt{\tau\Gamma}\,\xi_n \tag{2.15}$$

com $\langle \xi_n \rangle = 0$ e $\langle \xi_n \xi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$.

Se tomarmos $\rho_n = \rho(x_n, n\tau, x_0)$ como a distribuição de probabilidades da variável x_n e $g_n(k)$ sendo a correspondente função característica (a transformada de Fourier de ρ_n), podemos escrever $g_n(k)$ na forma de um valor esperado:

$$g_n(k) = \left\langle e^{ikx_n} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \rho_n dx_n \ . \qquad (2.16)$$

A partir dessa equação e da (2.15) se tem

$$g_{n+1}(k) = \left\langle e^{ikx_{n+1}} \right\rangle = \left\langle e^{ik[x_n + \tau f(x_n) + \sqrt{\tau\Gamma}\xi_n]} \right\rangle. \qquad (2.17)$$

Devido a eq. (2.17) e a independência estatística dos ξ_n's (médias independentes), vemos que

$$g_{n+1}(k) = \left\langle e^{ik[x_n + \tau f(x_n)]} \right\rangle \left\langle e^{ik\sqrt{\tau\Gamma}\xi_n} \right\rangle. \qquad (2.18)$$

A partir desse resultado, vamos obter a expansão de $g_{n+1}(k)$ em τ, mantendo apenas termos até primeira ordem, pois estamos supondo τ suficientemente pequeno. Para tal, empregamos a expansão $e^x = 1 + x + x^2/2! + ...$, com $x = ikf(x_n)\tau$, para aproximarmos o primeiro termo do lado direito da eq. (2.18):

$$\left\langle e^{ikx_n} e^{ik\tau f(x_n)} \right\rangle \approx \left\langle e^{ikx_n} \right\rangle + ik\tau \left\langle e^{ikx_n} f(x_n) \right\rangle. \qquad (2.19)$$

Analogamente, se $x = ik\sqrt{\tau\,\Gamma}\xi_n$, chegamos a

$$\left\langle e^{ik\sqrt{\tau\Gamma}\xi_n} \right\rangle \approx \left\langle 1 + ik\sqrt{\tau\,\Gamma}\xi_n + \frac{\left(ik\sqrt{\tau\,\Gamma}\xi_n\right)^2}{2!} \right\rangle = \left\langle 1 + ik\sqrt{\tau\,\Gamma}\xi_n - \frac{k^2\tau\,\Gamma\xi_n^2}{2} \right\rangle,$$

onde usando a condição $\left\langle \xi_n \right\rangle = 0$ e $\left\langle \xi_n \xi_{n'} \right\rangle = \delta_{nn'}$, fica

$$\left\langle e^{ik\sqrt{\tau\Gamma}\xi_n} \right\rangle \approx 1 - \frac{1}{2}k^2\tau\,\Gamma \ . \qquad (2.20)$$

Daí, as eqs. (2.19) e (2.20) substituídas na eq. (2.18) levam a

$$g_{n+1}(k) \approx g_n(k) + \tau\left(ik\left\langle e^{ikx_n} f(x_n) \right\rangle - \frac{1}{2}k^2\Gamma g_n(k) \right). \qquad (2.21)$$

Visto que

$$ik\left\langle e^{ikx_n} f(x_n) \right\rangle = ik\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} f(x_n)\rho_n dx_n = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx_n} e^{ikx_n} \right) f(x_n)\rho_n dx_n$$

e após uma integração por partes, temos

$$ik\left\langle e^{ikx_n} f(x_n) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \frac{d}{dx_n}[f(x_n)\rho_n] dx_n \ , \qquad (2.22)$$

onde foi considerado as condições de contorno naturais $\rho(x_n \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. De forma análoga, o termo $-k^2 g_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 e^{ikx_n}}{dx_n^2} \rho_n dx_n$, após uma dupla integração por partes fica

$$-k^2 g_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \frac{d^2 \rho_n}{dx_n^2} dx_n \,. \qquad (2.23)$$

Assim, a eq. (2.21) pode ser reescrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_{n+1}} \rho_{n+1} dx_{n+1} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \rho_n dx_n = -\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \frac{d}{dx_n} [f(x_n)\rho_n] dx_n + \frac{\tau\,\Gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \frac{d^2 \rho_n}{dx_n^2} dx_n \qquad (2.24)$$

ou, ainda, em uma primeira aproximação de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_{n+1}} \rho_{n+1} dx_{n+1} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \rho_{n+1} dx_n$, ficar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_n} \left\{ \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\tau} + \frac{d}{dx_n} [f(x_n)\rho_n] - \frac{\Gamma}{2} \frac{d^2 \rho_n}{dx_n^2} \right\} dx_n = 0 \qquad (2.25)$$

que implica

$$\frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\tau} = \frac{\Gamma}{2} \frac{d^2 \rho_n}{dx_n^2} - \frac{d}{dx_n} [f(x_n)\rho_n] \,. \qquad (2.26)$$

Se tomarmos o limite $\tau \rightarrow 0$ e reescrevermos ρ_n como $\rho(x,t)$ e $f(x_n)$ como $f(x,t)$, obteremos

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} [f(x,t)\rho(x,t)] \,. \qquad (2.27)$$

No caso tridimensional com $D = \Gamma/2$, o desenvolvimento exposto conduzirá a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho - \nabla \cdot (\bar{f} \rho) \,. \qquad (2.28)$$

A eq. (2.27) ou sua versão para o caso tridimensional (2.28) é conhecida como equação de Fokker-Planck. Ela traz a densidade de probabilidades $\rho(x,t)$ como um elemento observável. Dessa forma, a resolução da equação de Fokker-Planck fornece uma distribuição de probabilidades a partir da qual, por integrações, podemos encontrar qualquer média de variáveis macroscópicas. Observamos que esta equação tem a mesma estrutura da equação de difusão usual eq. (2.7). Portanto, utilizaremos indistintamente ambas denominações no decorrer do texto para as eq. (2.7) e (2.28). Por fim, ressaltaremos que a equação de Fokker-Planck não apenas descreve propriedades dinâmicas dependentes do tempo, mas também estacionárias (independentes do tempo, $\partial \rho / \partial t = 0$).

2.4 Soluções da equação de Fokker-Planck

Podemos obter a solução da equação de difusão usando procedimentos convencionais na resolução de equações diferenciais parciais. Nesse caso, um procedimento possível seria considerar *a priori* alguma classe de soluções factíveis. Proporíamos, assim, um tipo de solução (*ansatz*) e obteríamos a sua forma exata para que se verifique a equação. Vamos empregar sistematicamente esse método ao longo desse trabalho. Dessa forma, com o objetivo de justificar e motivar a escolha do *ansatz*, iniciaremos a busca de uma solução usando como base um método conhecido (transformada de Fourier). Como ilustração, apresentaremos a difusão usual, primeiramente sem termos de fonte e de força externa, depois, encontraremos a solução usando o *ansatz*. Em seguida, obteremos a solução com fonte proporcional à densidade. Também, investigaremos a equação de Fokker-Planck usando o *ansatz* nos casos com arraste constante, com arraste linear, e a composição de arraste linear e constante. Esses exemplos, são objetos temáticos de discussão desta dissertação que serão generalizados em capítulos posteriores quando discutirmos difusão anômala.

2.4.1 Forma usual

No estudo que segue e ao longo deste trabalho, consideraremos somente o caso unidimensional. Para nossos objetivos, isso não acarreta perda de generalidade e ajuda simplificar os cálculos e a notação.

Para chegar à solução da equação de difusão (2.3) no caso unidimensional, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, empregaremos a transformada de Fourier:

$$\begin{cases} g(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t) e^{ikx} dx, \\ \rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k,t)\, e^{-ikx} \frac{dk}{2\pi}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Assim, multiplicando a eq. (2.3) por e^{ikx} e integrando em x, tem-se

$$\frac{\partial g(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 g(k,t), \tag{2.30}$$

onde usamos o resultado (2.23).

A solução desta equação é

$$g(k,t) = g(k,0)e^{-Dk^2 t}\,. \tag{2.31}$$

Da condição inicial $\rho(x,0) = \tilde{f}(x)$, obtemos

$$g(k,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,0)e^{ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x)e^{ikx}dx\,. \tag{2.32}$$

Por conseguinte, substituindo a eq. (2.32) na eq. (2.31), teremos

$$g(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x)e^{ikx}e^{-Dk^2 t}dx\,. \tag{2.33}$$

Substituindo a eq. (2.33) na eq. (2.29), somos levados a

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \tilde{f}(x')e^{ikx'}e^{-Dk^2 t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')}e^{-Dk^2 t}$$

que resulta em

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t)\,\tilde{f}(x')dx'\,, \tag{2.34}$$

onde

$$G(x-x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dtk^2 - ik(x-x')}\,\frac{dk}{2\pi}\,. \tag{2.35}$$

Notando que

$$-Dtk^2 - ik(x-x') = -Dt\left[k + \frac{i(x-x')}{2Dt}\right]^2 - \frac{(x-x')^2}{4Dt} \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma y^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \tag{2.36}$$

com $y = k + \dfrac{i(x-x')}{2Dt}$ e $\sigma = Dt$, chegamos a

$$G(x-x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dtk^2 - ik(x-x')}\,\frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{4Dt}(x-x')^2}\,, \tag{2.37}$$

que é a função de Green da equação de difusão (2.3).

Se considerarmos uma condição inicialo tipo fonte puntual, $\tilde{f}(x) = \rho_0 \delta(x-x')$, que representa toda a substância concentrada em $x = x'$ no instante inicial, $\rho(x,t)$ assume a forma da função de Green:

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{(4\pi Dt)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{4Dt}(x-x')^2}\,. \tag{2.38}$$

Igualmente interessante para nossos propósitos é supor uma condição inicial do tipo gaussiana, isto é, $\tilde{f}(x) = \rho'_0 \sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha(x-x')^2}$. Isso nos conduz a

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{4Dt}(x-x'')^2} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha(x'-x'')^2}\, dx''$$

que leva a

$$\rho(x,t)=\frac{\rho'_0}{\left[4\pi D(t+t_0)\right]^{1/2}}e^{\frac{-(x-x')^2}{4D(t+t_0)}} \tag{2.39}$$

com $t_0=1/(4D\alpha)$. Portanto, esse $\rho(x,t)$ é uma solução gaussiana com o tempo transladado em t_0. A integração em x'' pode ser efetuada completando os quadrados, isto é, devemos seguir passos análogos aos apresentados em (2.36) quando tínhamos o objetivo de efetuar a integração em x'.

2.4.2 Solução usando *ansatz*

Passemos a ilustrar o procedimento para encontrar a solução via *ansatz*. Para tanto, proporemos para a eq. (2.3), $\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, uma solução de forma gaussiana dada por

$$\rho(x,t)=\frac{e^{-\beta(t)x^2}}{Z(t)}, \tag{2.40}$$

onde $\beta(t)$ e $Z(t)$ são funções a determinar. Para simplificar a notação e sem perda de generalidade, consideremos x' = 0 (veja eq. (2.38)). Dessa forma, usando o *ansatz* (2.40), verificamos que

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=\rho(x,t)\left(-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}-x^2\frac{d\beta(t)}{dt}\right) \tag{2.41}$$

enquanto

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}=-2\beta(t)x\rho(x,t) \tag{2.42}$$

e daí

$$\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}=\rho(x,t)\left(-2\beta(t)+4\beta(t)^2x^2\right). \tag{2.43}$$

Substituindo as eqs. (2.41) e (2.43) na eq. (2.3) e reagrupando, temos

$$\rho(x,t)\left[\left(-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}+2D\beta(t)\right)-\left(\frac{d\beta(t)}{dt}+4D\beta(t)^2\right)x^2\right]=0. \tag{2.44}$$

Como $\rho(x,t)$ é não nulo e $\{1,\ x^2\}$ forma uma base vetorial com dois vetores linearmente independentes, seus coeficientes devem ser nulos na eq. (2.44). Daí seguem as equações

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta(t)}{dt} = -4D(\beta(t))^2 & (2.45) \\[2ex] \dfrac{1}{Z(t)}\dfrac{dZ(t)}{dt} = \quad 2D\beta(t)\,. & (2.46) \end{cases}$$

Para encontrarmos a solução da eq. (2.45), notemos que ela conduz a

$$\int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \frac{d\beta}{\beta^2} = -\int_0^t 4Ddt \quad \text{que fornece} \quad \frac{1}{\beta(t)} - \frac{1}{\beta(0)} = 4Dt\,.$$

Assim, após resolver para $\beta(t)$, a solução da eq. (2.45) assume a forma

$$\beta(t) = \frac{1}{4D\left(t + \dfrac{1}{4D\beta(0)}\right)} = \frac{1}{4D(t+t_0)}, \tag{2.47}$$

sendo $t_0 = \dfrac{1}{4D\beta_0}$ com $\beta_0 = \beta(0)$.

Quanto a solução da eq. (2.46), observemos que

$$\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} = \quad \frac{d}{dt}\ln Z(t)\,. \tag{2.48}$$

Logo, ao substituir as eqs. (2.48) e (2.47) na eq. (2.46), vem que $\dfrac{d}{dt}\ln Z(t) = \dfrac{1}{2(t+t_0)}$.

Integrando ambos os lados dessa equação, obteremos $\displaystyle\int_0^t \frac{d}{dt}\ln Z(t)dt = \int_0^t \frac{dt}{2(t+t_0)}$ que fornece $\ln Z(t) - \ln Z(0) = \dfrac{1}{2}\left[\ln(t+t_0) - \ln(t_0)\right]$, ou seja,

$$Z(t) = Z(0)\left(\frac{t+t_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.49}$$

Agora, inserindo as eqs (2.47) e (2.49) na eq. (2.40), recaímos em

$$\rho(x,t) = \frac{1}{Z(0)\left(\dfrac{t+t_0}{t_0}\right)^{1/2}} e^{-\left(\frac{x^2}{4D(t+t_0)}\right)}\,. \tag{2.50}$$

Para analisarmos o caso $t_0 = 0$ de modo que $Z(t)$ exista, aplicamos um limite na eq. (2.49). Isso posto, consideraremos o valor de "t" dado e $t_0 \to 0$, de modo que $t_0 << t$. Com essa consideração chegamos a

$$Z(t) = \frac{Z(0)}{t_0^{\frac{1}{2}}}\, t^{\frac{1}{2}}\,. \tag{2.51}$$

Para que o $\lim\limits_{t_0 \to 0} Z(t)$ exista, $Z(0)/t_0^{1/2}$ deve ser um número finito. Definiremos como C esse valor, ou seja, $C = \lim\limits_{t_0 \to 0} Z(t_0)/t_0^{1/2}$, daí

$$Z(t) = Ct^{1/2} \qquad \text{e} \qquad \beta(t) = \frac{1}{4Dt}. \tag{2.52}$$

Logo,

$$\rho(x,t) = \frac{1}{Ct^{1/2}} e^{-\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)}. \tag{2.53}$$

Ademais, usando a condição de normalização $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)dx = \rho_0$ e a integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma x^2)dx = \sqrt{\pi/\sigma}$ com $\sigma = \frac{1}{4Dt}$, obtemos $C = (4\pi D)^{1/2} / \rho_0$. Usando esse valor na eq. (2.53), reobtemos a solução (2.38) com $x' = 0$. Como vimos na subseção (2.4.1), essa solução corresponde a tomarmos como condição inicial $\rho(x,0) = \rho_0 \delta(x)$.

Nesse ponto, já podemos apresentar uma forma muito utilizada para classificar se uma difusão é normal ou anômala. Ela é feita através de

$$\left\langle (x - \langle x \rangle_t)^2 \right\rangle_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle_t)^2 \rho(x,t)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)dx} \tag{2.54}$$

com $\langle x \rangle_t = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x,t)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)dx}$.

Se esse resultado tiver uma dependência linear com o tempo, classificamos a difusão como normal. No presente caso, isso é verificado empregando a eq. (2.53) na eq. (2.54),

$$\left\langle (x - \langle x \rangle_t{}^2 \right\rangle_t = \left\langle x^2 \right\rangle_t = 2Dt. \tag{2.55}$$

Aqui, além da integral gaussiana, empregamos $\int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\sigma x^2)dx = 0$ (integrando ímpar) e $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\sigma x^2)dx = -\frac{d}{d\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma x^2)dx = 1/2\sqrt{\pi}\sigma^{-3/2}$. *Desvios deste comportamento linear no tempo indicam a presença de difusão anômala*, como a que estudaremos no próximo capítulo.

2.4.3. Solução da equação de difusão com fonte

Trataremos agora da solução da equação de difusão com um termo de fonte δ, um sorvedouro, assumindo que esse termo seja proporcional à densidade. Nesse caso, $\delta = -\alpha(t)\rho(x,t)$ com $\alpha(t) > 0$ e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial (f\rho)}{\partial x} - \alpha(t)\rho. \tag{2.56}$$

Se ignorássemos os termos difusivo e de arraste, a eq. (2.56) seria escrita como

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\alpha(t)\tilde{\rho}, \tag{2.57}$$

cuja solução é $\tilde{\rho} = \rho_0 \exp[-\int_0^t \alpha(t')dt']$. Esse resultado sugere que a solução da equação com termo de fonte seja da forma

$$\rho(x,t) = e^{-\int_0^t \alpha(t')dt'}\hat{\rho}(x,t), \tag{2.58}$$

que, substituída na eq. (2.56), conduz a

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial (f\hat{\rho})}{\partial x}. \tag{2.59}$$

Assim, o tratamento da eq. (2.56) fica reduzido a resolvê-la sem o termo de fonte (ou sorvedouro). Por exemplo, se $f = 0$, a solução desta equação está exposta na eq. (2.34). Portanto, ao empregarmos a eq. (2.34) para $\hat{\rho}$ com a condição inicial $\rho(x,0) = \rho_0\delta(x)$, obtemos para a eq. (2.56) com $f = 0$ a solução

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{(4\pi Dt)^{1/2}} e^{-\int_0^t \alpha(t')dt'} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{2.60}$$

2.4.4. Solução com força constante utilizando *ansatz*

Neste caso, abordaremos a equação de difusão para um sistema de partículas sujeitas a uma força (força vezes tempo e por massa) $f = F_0$ com F_0 constante. Daí, a equação de Fokker-Planck com termo de arraste constante em uma dimensão fica

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -F_0\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}. \tag{2.61}$$

Da mesma forma que procedemos para a equação de difusão sem força externa, proporemos uma solução para a eq. (2.61). O *ansatz* escolhido é da forma

$$\rho(x,t)=\frac{e^{-\beta(t)[x-x_c(t)]^2}}{Z(t)}. \tag{2.62}$$

Aqui frisamos a presença de $x_c(t)$ em contraste com o ansatz (2.40). Como verificaremos nesta subseção, este termo simplesmente seria constante na ausência de força externa.

Visando obter $\beta(t)$, $Z(t)$ e $x_c(t)$, notemos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=\rho(x,t)\left[-\dfrac{1}{Z(t)}\dfrac{dZ(t)}{dt}-\left(x-x_c(t)\right)^2\dfrac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\left(x-x_c(t)\right)\dfrac{dx_c(t)}{dt}\right] & (2.63)\\[2ex] \dfrac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}=-2\rho(x,t)\beta(t)(x-x_c(t)) & (2.64)\\[2ex] \dfrac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}=\rho(x,t)\left[4\left(\beta(t)\right)^2\left(x-x_c(t)\right)^2-2\beta(t)\right]. & (2.65)\end{cases}$$

Substituindo as eqs. (2.63), (2.64) e (2.65) na equação de Fokker-Planck (2.61), teremos

$$\rho(x,t)\left[-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}-\left(x-x_c(t)\right)^2\frac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\left(x-x_c(t)\right)\frac{dx_c(t)}{dt}\right]$$
$$+2F_0\rho(x,t)\beta(t)(x-x_c(t))-D\rho(x,t)\left[4\left(\beta(t)\right)^2\left(x-x_c(t)\right)^2-2\beta(t)\right]=0,$$

que após dividida por $\rho(x,t)$ e agrupada em termos de potências de x nos fornece

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{Z(t)}\dfrac{dZ(t)}{dt}-\left(x_c(t)\right)^2\dfrac{d\beta(t)}{dt}-2\beta(t)x_c(t)\dfrac{dx_c(t)}{dt}-4D\left(\beta(t)\right)^2\left(x_c(t)\right)^2+\\ +2F_0\beta(t)x_c(t)+2D\beta(t)\end{array}\right]x^0+\\ &\left[2x_c(t)\frac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-2F_0\beta(t)+8D\left(\beta(t)\right)^2x_c(t)\right]x^1+\\ &\left[-\frac{d\beta(t)}{dt}-4D\left(\beta(t)\right)^2\right]x^2=0.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Como a expressão (2.66) é nula para qualquer valor de x, devemos ter os coeficientes de x^2, x^1 e x^0 nulos, ou seja,

$$-\frac{d\beta(t)}{dt}-4D\left(\beta(t)\right)^2=0 \tag{2.67}$$

$$2x_c(t)\frac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-2F_0\beta(t)+8D\left(\beta(t)\right)^2x_c(t)=0 \tag{2.68}$$

$$\left(\begin{array}{l}-\dfrac{1}{Z(t)}\dfrac{dZ(t)}{dt}-\left(x_c(t)\right)^2\dfrac{d\beta(t)}{dt}-2\beta(t)x_c(t)\dfrac{dx_c(t)}{dt}-4D\left(\beta(t)\right)^2\left(x_c(t)\right)^2\\ +2F_0\beta(t)x_c(t)+2D\beta(t)\end{array}\right)=0. \tag{2.69}$$

A eq. (2.67) é exatamente a eq. (2.45), portanto sua solução já é conhecida, eq. (2.47), $\beta(t)=\frac{1}{4D(t+t_0)}$, onde $t_0=\frac{1}{4D\beta_0}$ e β_0 = $\beta(0)$. Por sua vez, usando a eq. (2.67) na eq. (2.68), verificamos que

$$\frac{dx_c(t)}{dt}=F_0\,, \tag{2.70}$$

cuja solução é

$$x_c(t)=x_c(0)+F_0\,t\,. \tag{2.71}$$

Isto mostra que o centro do pacote gaussiano desloca-se com velocidade igual a F_0. Chamamos ainda a atenção que se não tivéssemos força externa, F_0 = 0, recairíamos num $x_c(t)$ constante, como anunciado no início desta subseção.

Além disso, empregando as eqs. (2.67) e (2.70) na eq. (2.69), constatamos que $\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}=2D\beta(t)$. Portanto, deparamos com a já conhecida eq. (2.46) e sua solução (2.49). De posse de $\beta(t)$, $Z(t)$ e $x_c(t)$, concluímos que

$$\rho(x,t)=\left[\frac{1}{Z(0)\left(\frac{t+t_0}{t_0}\right)}\right]^{1/2} e^{\left\{-\frac{[x-(x_c(0)+F_0t)]^2}{4D(t+t_0)}\right\}}, \tag{2.72}$$

sendo que $Z(0)$, t_0 e $x_c(0)$ devem ser fixados pela forma de $\rho(x,0)$. Em particular, como procedemos no caso de força externa nula (F_0 = 0), verificamos que

$$\rho(x,t)=\frac{1}{Ct^{1/2}}e^{\left\{-\frac{[x-(x_c(0)+F_0t)]^2}{4Dt}\right\}}, \tag{2.73}$$

com $C=\lim_{t_0\to 0} Z(t_0)/t_0^{1/2}$, é a solução que corresponde a t_0 = 0.

2.4.5 Solução com força linear utilizando *ansatz*

Nesta subseção, encontraremos uma solução para a equação de difusão de um sistema de partículas que estão sob a ação de uma força externa linear $f = -\gamma x$ (força harmônica vezes tempo e por massa), sendo γ constante. Conseqüentemente, a equação de Fokker-Planck correspondente em uma dimensão é

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}(x\rho(x,t))+D\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}. \tag{2.74}$$

Da mesma forma que procedemos para as equações de difusão nos casos anteriores, proporemos uma forma de solução. O *ansatz* escolhido é o (2.62), $\rho(x,t)=\frac{e^{-\beta(t)[x-x_c(t)]^2}}{Z(t)}$. Nesse sentido, já conhecemos as eqs. (2.63), $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, e (2.65), $\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, e para $\frac{\partial(x\rho(x,t))}{\partial x}$ obtemos

$$\frac{\partial(x\rho(x,t))}{\partial x}=\rho(x,t)\left[1-2x\beta(t)(x-x_c(t))\right]. \tag{2.75}$$

Nossa tarefa inicial agora é usar as eqs. (2.63), (2.65) e (2.75) na equação de Fokker-Planck (2.74), daí

$$\rho(x,t)\left[-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}-\left(x-x_c(t)\right)^2\frac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\left(x-x_c(t)\right)\frac{dx_c(t)}{dt}\right]$$
$$-\gamma\,\rho(x,t)\left[1-2x\beta(t)(x-x_c(t))\right]-D\rho(x,t)\left[4\left(\beta(t)\right)^2\left(x-x_c(t)\right)^2-2\beta(t)\right]=0,$$

que agrupada em termos de potências de x nos leva a

$$\left[-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}-\left(x_c(t)\right)^2\frac{d\beta(t)}{dt}-2\beta(t)x_c(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-4D\left(\beta(t)\right)^2\left(x_c(t)\right)^2+2D\beta(t)-\gamma\right]x^0+$$
$$\left[2x_c(t)\frac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-2\gamma x_c(t)\beta(t)+8D\left(\beta(t)\right)^2x_c(t)\right]x^1+$$
$$\left[-\frac{d\beta(t)}{dt}+2\gamma\beta(t)-4D\left(\beta(t)\right)^2\right]x^2=0.$$

Como esta expressão é nula para qualquer valor de x, devemos ter os coeficientes de x^2, x^1 e x^0 nulos. Dessa forma, obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases}-\frac{d\beta(t)}{dt}+2\gamma\beta(t)-4D\left(\beta(t)\right)^2=0, & (2.76)\\[2ex] 2x_c(t)\frac{d\beta(t)}{dt}+2\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-2\gamma x_c(t)\beta(t)+8D\left(\beta(t)\right)^2x_c(t)=0, & (2.77)\\[2ex] \begin{pmatrix}-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}-\left(x_c(t)\right)^2\frac{d\beta(t)}{dt}-2\beta(t)x_c(t)\frac{dx_c(t)}{dt}\\ -4D\left(\beta(t)x_c(t)\right)^2+2D\beta(t)-\gamma\end{pmatrix}=0. & (2.78)\end{cases}$$

Equações do tipo da (2.76), $\frac{d\beta}{dt}=2\gamma\beta-4D\beta^2$ ocorrem comumente em modelos relacionados a crescimento de populações e, em geral, é denominada equação logística [20]. Essa equação quando incorporada num cenário mais amplo, basicamente substituindo β^2 por β^n $\left(\frac{dy}{dx}=-P(x)y+Q(x)y^n\right)$, é conhecida como equação de

Bernoulli [20,21], cuja solução é $y^{1-n}e^{(1-n)\int P dx} = (1-n)\int Q\, e^{(1-n)\int P dx} dx + \tilde{C}$, onde $y = \beta$; $P(x) = -2\gamma$; $Q(x) = -4D$ e $n = 2$. Assim, temos que

$$\frac{1}{\beta(t)}e^{2\gamma t} = 4D\int_0^t e^{2\gamma t}dt + \tilde{C} = 2D\frac{e^{2\gamma t}}{\gamma} - \frac{2D}{\gamma} + \tilde{C} \tag{2.79}$$

que ao tomarmos $t = 0$ nos conduz a

$$\tilde{C} = \frac{1}{\beta_0}, \tag{2.80}$$

onde $\beta_0 = \beta(0)$. Conseqüentemente, com este valor de $\tilde{C}$ na eq.(2.79), vemos que

$$\beta(t) = \frac{1}{2D/\gamma + (\beta_0^{-1} - 2D/\gamma)e^{-2\gamma t}} = \frac{\gamma e^{2\gamma t}}{\gamma\beta_0^{-1} + 2De^{2\gamma t} - 2D}. \tag{2.81}$$

Agora se empregarmos a eq. (2.76) na eq. (2.77), teremos

$$\frac{1}{x_c(t)}\frac{dx_c(t)}{dt} = -\gamma. \tag{2.82}$$

Para acharmos a sua solução, notemos que $\int_{x_c(0)}^{x_c(t)}\frac{dx_c}{x_c} = -\gamma\int_0^t dt$, resultando em $\ln\left(\frac{x_c(t)}{x_c(0)}\right) = -\gamma t$. Logo,

$$x_c(t) = x_0 e^{-\gamma t}, \tag{2.83}$$

com $x_0 = x_c(0)$. Isto mostra que o centro do pacote gaussiano corre exponencialmente para a posição $x = 0$.

Agora se usarmos as eqs. (2.76) e (2.82) na eq. (2.78), verificamos que

$$\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} = 2D\beta(t) - \gamma, \tag{2.84}$$

de onde obtemos

$$\frac{1}{Z(t)}dZ(t) = -\gamma dt + \frac{2D}{2D/\gamma + (\beta_0^{-1} - 2D/\gamma)e^{-2\gamma t}}dt, \tag{2.85}$$

que integrada conduz a

$$\ln\left(\frac{Z(t)}{Z(0)}\right) = -\gamma t + 2D\int_0^t \frac{1}{2D/\gamma + (\beta_0^{-1} - 2D/\gamma)e^{-2\gamma t}}dt. \tag{2.86}$$

Essa integral é do tipo $\int \frac{dy}{p + qe^{ay}} = \frac{y}{p} - \frac{1}{ap}\ln(p + qe^{ay})$, onde $y = t$, $q = \beta_0^{-1} - 2D/\gamma$, $p = 2D/\gamma$ e $a = -2\gamma$. Portanto, $\ln\left(\frac{Z(t)}{Z(0)}\right) = -\gamma t + \left(t\gamma + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2D}{\gamma} + \left(\beta_0^{-1} - \frac{2D}{\gamma}\right)e^{-2\gamma t}\right)\right)$ leva a

$$Z(t) = Z_0\sqrt{\frac{2D\beta_0 - e^{-2\gamma t}(2\beta_0 D - \gamma)}{\gamma}} \tag{2.87}$$

com $Z_0 = Z(0)$.

Assim, a solução procurada da eq. (2.74) é dada por

$$\rho(x,t) = \frac{e^{-\frac{\gamma e^{2\gamma t}}{\gamma\beta_0^{-1}+2De^{2\gamma t}-2D}\left[x-x_0e^{-\gamma(t-t_0)}\right]^2}}{Z_0\sqrt{\frac{2D\beta_0 - e^{-2\gamma t}(2\beta_0 D-\gamma)}{\gamma}}} . \tag{2.88}$$

2.4.6 Solução com força constante e linear utilizando *ansatz*

Agora, podemos seguir o procedimento prévio para encontrar uma solução da equação de Fokker-Planck quando temos a força $f = -\gamma x + F_0$ com γ e F_0 constantes, ou seja,

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \gamma\frac{\partial(x\rho(x,t))}{\partial x} - F_0\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2} . \tag{2.89}$$

Assim como anteriormente, vamos usar o *ansatz* (2.62), $\rho(x,t) = \dfrac{e^{-\beta(t)[x-x_c(t)]^2}}{Z(t)}$, o qual, empregado na eq. (2.89) nos leva a

$$\begin{aligned}
&\rho(x,t)\left[-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} - \left(x-x_c(t)\right)^2\frac{d\beta(t)}{dt} + 2\beta(t)\left(x-x_c(t)\right)\frac{dx_c(t)}{dt}\right] \\
&\quad -\gamma\,\rho(x,t)\left[1-2x\beta(t)(x-x_c(t))\right] - F_0\rho(x,t)2\beta(t)(x-x_c(t)) \\
&\quad - D\rho(x,t)\left[4\left(\beta(t)\right)^2\left(x-x_c(t)\right)^2 - 2\beta(t)\right] = 0,
\end{aligned}$$

que nos conduz, devido as independência linear de x^0, x^1, x^2 (ou alternativamente de $\left(x-x_c(t)\right)^0$, $\left(x-x_c(t)\right)^1$ e $\left(x-x_c(t)\right)^2$), às equações

$$-\frac{d\beta(t)}{dt} + 2\gamma\beta(t) - 4D\left(\beta(t)\right)^2 = 0 , \tag{2.90}$$

$$2x_c(t)\frac{d\beta(t)}{dt} + 2\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt} - 2\gamma x_c(t)\beta(t) - 2F_0\beta(t) + 8D\left(\beta(t)\right)^2 x_c(t) = 0 \text{, e} \tag{2.91}$$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{Z(t)}\dfrac{dZ(t)}{dt} - \left(x_c(t)\right)^2\dfrac{d\beta(t)}{dt} - 2\beta(t)x_c(t)\dfrac{dx_c(t)}{dt} - 4D\left(\beta(t)\right)^2\left(x_c(t)\right)^2 + \\ + 2D\beta(t) - \gamma + 2F_0\beta(t)x_c(t) \end{pmatrix} = 0 . \tag{2.92}$$

A solução da eq. (2.90) já é conhecida, eq. (2.81). Se usarmos a eq. (2.90) na eq. (2.91), verificamos que

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + \gamma x_c(t) = F_0 . \tag{2.93}$$

Além disso, ao empregarmos as eqs. (2.90) e (2.93) na eq. (2.92) somos encaminhados a eq. (2.84), cuja solução é a eq. (2.87).

Para obtermos a solução da eq. (2.93), podemos utilizar a solução da equação linear de 1ª. ordem $\frac{dy}{dx} = -P(x)y + Q(x)$, cuja solução é $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + \tilde{C}$. Em nosso caso, $y = x_c(t)$, $P(x) = \gamma$ e $Q(x) = F_0$. Assim, a solução fica $x_c(t)e^{\int_o^t \gamma dt} = \int_0^t F_0 e^{\int_o^t \gamma dt} dt + \tilde{C}$ que conduz a

$$x_c(t)e^{\gamma t} = F_0 \frac{(e^{\gamma t} - 1)}{\gamma}, \tag{2.94}$$

onde usamos a condição inicial $\tilde{C} = x_c(0) = 0$ e, portanto,

$$x_c(t) = \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right). \tag{2.95}$$

Dessa forma, a solução da eq. (2.89) fica

$$\rho(x,t) = \frac{e^{-\frac{\gamma e^{2\gamma t}}{\gamma\beta_0^{-1} + 2De^{2\gamma t} - 2D}\left[x - \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)\right]^2}}{Z_0\sqrt{\frac{2D\beta_0 - e^{-2\gamma t}(2\beta_0 D - \gamma)}{\gamma}}}. \tag{2.96}$$

Esta solução mostra que o pacote gaussiano terá seu centro localizado em $x_0 = F_0/\gamma$ para um tempo suficientemente longo. Isto está diretamente relacionado com a condição de equilíbrio estático $0 = f = -\gamma x + F_0$, que implica $x = F_0/\gamma$.

2.4.7 Equilíbrio

De acordo com a termodinâmica, em qualquer estado de equilíbrio termodinâmico a entropia deve ser máxima. Esse postulado de maximização está intimamente ligado a uma questão fundamental: a estabilidade térmica da matéria. Formalmente, tal postulado conduz a um princípio variacional que dá origem a vários desdobramentos. Em particular, as probabilidades relativas aos diversos estados de um sistema são tais que maximizam sua entropia.

Nesse contexto, a entropia de Boltzmann-Gibbs,

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i, \tag{2.97}$$

ocupa um papel fundamental na mecânica estatística usual, sendo $\{p_i\}$ o conjunto dessas probabilidades associadas aos W estados acessíveis ao sistema e k_B a constante de Boltzmann. Consideremos a maximização de S em relação ao conjunto $\{p_i\}$ conectada aos vínculos

$$U = \sum_{i=1}^{W} \varepsilon_i p_i \qquad \text{e} \qquad 1 = \sum_{i=1}^{W} p_i \ , \tag{2.98}$$

onde ε_i é o valor particular da energia correspondente ao i-ésimo estado acessível e U a energia média.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, construímos a função auxiliar

$$\Phi = -k_B \sum_{i=1}^{W} p_i \, ln \, p_i + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{W} p_i \right) + \beta \left(U - \sum_{i=1}^{W} \varepsilon_i p_i \right), \tag{2.99}$$

e a extremizamos em relação a p_j, sendo λ e β dois multiplicadores de Lagrange. Dessa forma, segue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} = -k_B \left(\ln p_j + 1 \right) - \lambda - \beta \varepsilon_j = 0 \ , \tag{2.100}$$

que, por sua vez, implica na distribuição de Boltzmann $p_j \propto e^{-\beta \varepsilon_j / k_B}$, que após normalizada é

$$p_j = \frac{e^{-\beta \varepsilon_j / k_B}}{Z} , \tag{2.101}$$

na qual $\beta = 1/T$, sendo T a temperatura, e $Z = \sum_{i=1}^{W} \exp(-\beta \varepsilon_i / k_B)$ a função de partição do sistema.

Seja agora um conjunto de Q partículas de massa m, imersas num meio, suficientemente distantes umas das outras e evoluindo segundo a dinâmica clássica. Nesse caso, a energia do conjunto é, com boa aproximação, a soma das energias das partes, isto é, o *hamiltoniano* do conjunto é dado por $H = \sum_{i=1}^{Q} [\bar{p}_i^2 / (2m) + V(\bar{r}_i)]$, sendo $V(\bar{r}_i)$ a energia potencial relacionada com a força externa sobre a i-ésima partícula. Assim, a distribuição de probabilidade para a posição, $\bar{r}$, de uma partícula, $p(\bar{r})$, é encontrada somando (integrando) Q vezes nos momentos e Q – 1 vezes nos vetores posição, ou seja,

$$p(\bar{r}) \propto e^{-\frac{1}{k_B T} V(\bar{r})} . \tag{2.102}$$

Sendo a difusão inerentemente um processo fora do equilíbrio, espera-se que para tempos suficientemente longos o sistema atinja um estado de equilíbrio termodinâmico com o meio. Nesse estado, as partículas que se difundem e o meio mantêm uma troca balanceada de momentum e energia, sustentando o movimento irregular das partículas. Quando esta situação é atingida, deve existir uma conexão entre os parâmetros que caracterizam o equilíbrio termodinâmico e a dinâmica das partículas.

Pelo exposto, vemos que a eq. (2.102) e a solução da equação de Fokker-Planck estacionária $(\partial\rho/\partial t = 0$, eq. (2.27) com $\bar{f} = \mu\bar{F}$),

$$0 = D\frac{d^2\rho}{dx^2} - \mu\frac{d}{dx}(F\rho) = \frac{d}{dx}\left(D\frac{d\rho}{dx} - \mu F\rho\right), \qquad (2.103)$$

devem coincidir. Supondo que a partícula se encontra numa região limitada do espaço ($\rho(x \to \pm\infty) = 0$) e $F = -\frac{dV}{dx}$, vemos que a eq. (2.103) é reduzida a

$$D\frac{d\rho}{dx} - \mu\left(-\frac{dV}{dx}\right)\rho = 0 \qquad (2.104)$$

e daí

$$\rho(x) \propto e^{-\frac{\mu}{D}V(x)}. \qquad (2.105)$$

Um comparação entre as eqs. (2.102) e (2.105) (no caso unidimensional), supondo-as iguais, conduz a relação de Einstein $\frac{1}{k_B T} = \frac{\mu}{D}$. O trabalho pioneiro nesse tema foi primeiramente feito por Einstein em seu artigo denominado "*Sobre o Movimento de Pequenas Partículas Suspensas em um Líquido Estacionário Causado pela Teoria Molecular-Cinética do Calor*" em 1905.

2.5 Uma visão qualitativa sobre difusão

Nesta seção, teceremos uns poucos comentários gerais sobre difusão, baseados nos resultados obtidos neste capítulo.

Comecemos com a difusão sem a presença de força externa, cuja condição inicial é localizada, por exemplo, em $\rho(x,0) = \rho_0\delta(x)$. Nesse caso, o processo difusivo obedece a eq. (2.38) com x' = 0. Como podemos perceber, a solução (2.38) é da forma gaussiana e apresenta um alargamento proporcional a $t^{1/2}$.

Quando há uma força constante atuando sobre o sistema e ele está inicialmente localizado em x = 0, temos a solução (2.73). A diferença básica do caso sem força externa é o deslocamento do centro do pacote gaussiano com velocidade constante.

Assim, está ocorrendo difusão (alargamento do pacote gaussiano) e deslocamento devido a força externa.

No caso de uma força harmônica, $f = -\gamma x$, continuamos com uma solução gaussiana, eq. (2.88). Depois de um tempo longo, o sistema apresenta um $\rho(x,t)$ com uma forma gaussiana fixa e centrada na origem.

Ao estudarmos a situação em que $f = F_0 - \gamma x$, chegamos a solução (2.96). Para um tempo suficientemente longo há também uma acomodação do pacote gaussiano, porém deslocado perante a origem. Desses exemplos, constatamos que uma solução estacionária ocorre somente quando a força externa é do tipo confinante.

Num cenário que não leva em conta termos de fonte e a partir do discutido nesta seção, podemos apresentar uma tendência geral sobre o processo difusivo. O sistema tende a se espalhar (difundir) e a se deslocar, se a força não for confinante. Se a força for confinante, depois de um certo tempo suficientemente longo, a competição entre as vertentes difusiva e confinante devem se contrabalançar, produzindo uma situação estacionária. Por fim, informamos que o *ansatz* gaussiano não funciona para outros tipos de forças além dos discutidos neste capítulo.

Capítulo 3

Equação de Fokker-Planck não-linear e Difusão anômala

Vimos no capítulo anterior que a difusão usual pode ser descrita por uma equação de Fokker-Planck, da qual obtemos soluções analíticas quando empregamos um *ansatz* gaussiano. Porém, é interessante usarmos uma proposta que generaliza essa equação e, conseqüentemente, esse *ansatz*, além de associar a sistemas que apresentam difusão anômala e poder incorporar outras distribuições espaço-temporais. Nesse contexto, é possível considerarmos uma equação de difusão não-linear e um *ansatz* baseado na exponencial-q de Tsallis, o que nos permite descrever analiticamente uma classe de processos difusivos anômalos. O presente capítulo é dedicado a tal descrição.

3.1 Equação de difusão não-linear

Vamos considerar a equação de difusão não linear

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2 \rho^{\nu}, \qquad (3.1)$$

onde ν é um parâmetro real. Esta equação é uma generalização da equação (usual) difusão (2.3) e é conhecida como equação de difusão em meios porosos [7]. Ela tem sido empregada para modelar difusão em plasmas [8], em meios porosos [9] e em dispersão espacial de populações biológicas [11]. Além disso, essa equação pode ser usada em outras importantes aplicações físicas tais como percolação de gases através de meios porosos ($\nu \geq 2$) [9], filmes líquidos finos, espalhando-se sob gravidade ($\nu = 4$)

[10], alguns fenômenos de auto-organização [12], entre outras. De um ponto de vista formal, citamos ainda a conexão com a termoestatística não-extensiva de Tsallis [13 - 16].

Para ilustrar como se obtém a eq. (3.1), vamos considerar um gás ideal fluindo isentropicamente em um meio poroso homogêneo. Como está exposto em [6], o fluxo de pressão é governado:

- pela equação de estado

$$p = p_0 \rho^{\alpha}, \tag{3.2}$$

onde $p = p(\bar{r},t)$ é a pressão, $\rho = \rho(\bar{r},t)$ é a densidade, $\alpha \in [1,\infty)$ e $p_0 \in \Re^+$ são constantes;

- pela conservação de massa em meios porosos

$$\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0, \tag{3.3}$$

onde $\bar{v} = v(\bar{r},t)$ é o vetor velocidade e $\eta \in \Re^+$ é a porosidade do meio;

- pela lei de Darcy:

$$\sigma \bar{v} = -k \nabla p, \tag{3.4}$$

onde $\sigma \in \Re^+$ é a viscosidade do gás e $k \in \Re^+$ é a permeabilidade do meio.

Usando a eq. (3.4) na eq. (3.3) e eliminando *p*, temos

$$\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left[\rho \left(-\frac{kp_0}{\sigma} \nabla \rho^{\alpha} \right) \right] = 0,$$

que leva a

$$\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{kp_0}{\sigma} \alpha \frac{\nabla \rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0$$

ao empregarmos a identidade $\frac{\nabla \rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{\rho \nabla \rho^{\alpha}}{\alpha}$. Assim, obtemos a equação de difusão anômala

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho^{\nu}$$

com $\nu = 1 + \alpha \geq 2$ e $D = \frac{kp_0}{\sigma \eta} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)$.

3.2 Solução da equação de difusão não–linear usando um *ansatz*

De forma análoga à empregada no capítulo 2, utilizaremos um *ansatz*. Além disso, adotaremos uma apresentação semelhante ao do capítulo anterior. Discutiremos inicialmente a difusão sem termo de fonte e força externa. Em seguida, resolveremos a equação de Fokker-Planck não-linear usando *ansatz* para três casos: com arraste constante, linear e com ambos os casos.

No estudo que segue e ao longo deste trabalho vamos, sem haver perda de generalidade para os nossos propósitos, considerar somente o caso unidimensional com uma força externa f (força vezes tempo e por massa). Neste caso, a equação de difusão a ser estudada é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho^\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial (f\rho)}{\partial x}\,. \tag{3.5}$$

Referimos também a essa equação de difusão não linear como equação de Fokker-Planck não linear.

3.2.1 Difusão anômala sem fonte e força externa

Agora ilustraremos o procedimento de encontrar a solução via *ansatz*. Para tanto, estamos propondo uma solução gaussiana generalizada,

$$\rho(x,t) = \frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)}\,, \tag{3.6}$$

para o caso unidimensional sem força externa, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho^\nu}{\partial x^2}$.

Aqui estamos usando uma generalização da função exponencial. De fato, se considerarmos que uma possível definição para a função exponencial é oriunda de $\exp(x) \equiv \lim_{a\to\infty}(1+x/a)^a$ e relaxarmos a operação "$a \to \infty$", deparamos com a generalização da exponencial empregada neste trabalho. Mais precisamente, trocamos o parâmetro real "a" por 1/(1-q), com $q \in \Re$ e daí a generalização da exponencial aqui posta é

$$\exp_q(x) \equiv [1+(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}\,, \tag{3.7}$$

que denominamos de exponencial-q. Ressaltamos que nessa generalização usamos $\exp_q(x) = 0$ se $1 + (1 - q)x < 0$ para garantir que a $\exp_q(x)$ não assuma valores imaginários. Além disso, a partir da definição da exponencial-q, podemos generalizar outras funções. Por exemplo, para a função gaussiana, $\exp(-x^2)$, ficamos com a generalização $\exp_q(-x^2) \equiv [1-(1-q)x^2]^{\frac{1}{1-q}}$, caso em que se enquadra o *ansatz* (3.6). A $\exp(-x^2)$ apresenta um aspecto curioso ao tomarmos valores distintos de q. Se $q > 1$ ela exibe um comportamento de cauda tipo lei de potência, $\exp_q(-x^2) \sim x^{\frac{2}{1-q}}$. Por outro lado se $q < 1$ ela torna-se nula quando $1-(1-q)x^2 \leq 0$.

Usando o *ansatz* (3.6), verificamos que

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{(Z(t))^2}\frac{dZ(t)}{dt} - \frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}}{Z(t)}x^2\frac{d\beta(t)}{dt} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)^{\nu}}{\partial x} = -2\nu\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1}}{(Z(t))^{\nu}}\beta(t)x \tag{3.9}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho(x,t)^{\nu}}{\partial x^2} = {} & 4\nu(\beta(t))^2(\nu-1+q)x^2\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-2}}{(Z(t))^{\nu}} + \\ & -2\nu\beta(t)\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1}}{(Z(t))^{\nu}}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Empregando as eqs. (3.8) e (3.10) na eq. (3.5) com $f = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)} - x^2\frac{d\beta(t)}{dt}\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}}{Z(t)} = \\ & -2D\nu\beta(t)\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1}}{(Z(t))^{\nu}} + 4D\nu(\beta(t))^2(\nu-1+q)x^2\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-2}}{(Z(t))^{\nu}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Reagrupemos os em termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}& \left\{\frac{d\beta(t)}{dt}\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}}{Z(t)} + 4D\nu(\beta(t))^2(\nu-1+q)\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-2}}{(Z(t))^{\nu}}\right\}x^2 \\ & -\left\{-\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)} + 2D\nu\beta(t)\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1}}{(Z(t))^{\nu}}\right\} = 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Quando tratamos o caso com $\nu = 1$, no capítulo anterior, os componentes de base 1 e x^2 eram nulos. Isso possibilitou obtermos as equações diferenciais correspondentes a $Z(t)$ e $\beta(t)$. Para isso ocorrer com a eq. (3.12) os termos entre as duas primeiras chaves não podem ser independentes (o mesmo ocorrendo entre as outras chaves). Nessas condições devem valer as igualdades:

$$\begin{cases} \left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}} = \left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1} \\ \left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1} = \left[1-(1-q)\beta(t)x^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-2}. \end{cases}$$

Por sua vez, essas identidades se verificam somente se $\frac{1}{1-q} = \frac{\nu}{1-q} - 1$ que implica $q = 2 - \nu$. Com isso temos que

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta(t)}{dt} = -4D\nu\left(\beta(t)\right)^2 (Z(t))^{1-\nu} & (3.13) \\ \dfrac{dZ(t)}{dt} = 2D\nu\beta(t)(Z(t))^{2-\nu}. & (3.14) \end{cases}$$

Se multiplicarmos a eq. (3.13) por $Z(t)$ e a eq. (3.14) por $-2\beta(t)$ e igualando os resultados, constatamos que

$$\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\beta(t)}\frac{d\beta(t)}{dt},$$

isto é,

$$\frac{d\ln Z(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d\ln\beta(t)}{dt}.$$

Ao integrarmos essa equação, verificamos que

$$Z(t)(\beta(t))^{\frac{1}{2}} = Z(0)\beta(0)^{\frac{1}{2}} = cte, \tag{3.15}$$

ou seja,

$$Z(t) = Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}}(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.16}$$

onde $Z_0 = Z(0)$ e $\beta_0 = \beta(0)$. Ressaltamos que esse resultado independe do valor de ν. Assim, esse tipo de procedimento pode ser considerado como alternativo para obter o $Z(t)$ da subseção (2.4.2), isto poupa muito trabalho.

Inserindo a eq. (3.16) na eq. (3.13), chegamos a

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -4D\nu(\beta(t))^2\left(Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}}\beta(t)^{-\frac{1}{2}}\right)^{q-1},$$

que conduz a

$$\int_{\beta(0)}^{\beta(t)}\beta^{\frac{q-1}{2}-2}d\beta = -4D\nu(Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}})^{q-1}\int_0^t dt'$$

que leva a

$$\frac{1}{\frac{q-1}{2}-1}\left(\beta(t)^{\frac{q-1}{2}-1}-\beta_0^{\frac{q-1}{2}-1}\right)=-4D\nu(Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}})^{q-1}t.$$

Ao isolarmos $\beta(t)$, com $\nu = 2 - q$, concluímos que

$$\begin{cases} \beta(t)=\beta_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}} & (3.17)\\ Z(t)=Z_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{1}{3-q}}. & (3.18)\end{cases}$$

Assim, a solução da eq. (3.5) (difusão anômala unidimensional sem termo de fonte ou fonte externa), usando o *ansatz* (3.6), é

$$\rho(x,t)=\frac{\left[1-(1-q)\beta_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}}x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{1}{3-q}}}. \tag{3.19}$$

Se tomarmos o limite $q \to 1$ neste $\rho(x,t)$, reobtemos a solução (2.50) após as devidas identificações entre as constantes. Um outro caso especial ocorre quando q $\to$ 3, pois $\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{1}{q-3}} \quad \to \quad e^{2DZ_0^2\beta_0 t}$ e daí

$$\rho(x,t)=\frac{\left[1+2\beta_0 e^{4DZ_0^2\beta_0 t}x^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{Z_0 e^{-2DZ_0^2\beta_0 t}}. \tag{3.20}$$

Portanto, nos demais casos ($q \neq 3$) o comportamento temporal não é exponencial.

Como dissemos anteriormente, no final da subseção (2.4.2), quando $\left\langle (x-\langle x\rangle_t)^2\right\rangle_t$ não é proporcional a t indica a presença de uma difusão anômala. Agora verificaremos isso para a solução (3.19). Primeiramente, notemos que

$$\langle x\rangle_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x,t)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx}=0, \tag{3.21}$$

onde $x\rho(x,t)$ é uma função ímpar em x, pois x é ímpar e $\rho(x,t)$ é par. Porém, devemos enfatizar que as integrais $\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x,t)dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx$ devem existir (serem finitas). Usando tais hipóteses, vemos que

$$\left\langle (x-\langle x\rangle_t)^2\right\rangle_t = \left\langle x^2\right\rangle_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x,t)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx}. \tag{3.22}$$

Também supomos que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x,t)dx$ exista. Visto que $\rho(x,t) \sim |x|^{\frac{2}{1-q}}$ para $|x|$ grande e $q > 1$, essa integral é finita somente se $\int_{\varepsilon}^{\infty} x^2 x^{\frac{2}{1-q}} dx$ existir, sendo ε um número positivo qualquer. Por outro lado, $\int_{\varepsilon}^{\infty} x^2 x^{\frac{2}{1-q}} dx \quad \propto \quad x^{3+\frac{2}{1-q}}\Big|_{\varepsilon}^{\infty}$, mostrando que a finitude de $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x,t)dx$ ocorre quando $x^{3+\frac{2}{1-q}}\Big|_{\varepsilon}^{\infty}$ for finito, ou seja, se $3 + \frac{2}{1-q} < 0$ e daí $q < \frac{5}{3}$.

Usando $q < \frac{5}{3}$ para garantir a existência de $\langle x^2 \rangle_t$ e a uma nova variável de integração w

$$w = \left[|1-q|\beta_0 \left[1 + 2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}} \right]^{\frac{1}{2}} x, \tag{3.23}$$

chegamos a

$$\langle x^2 \rangle_t \propto t^{\frac{2}{3-q}} \tag{3.24}$$

para "*t*" suficientemente longo. Como se pode perceber, a difusão usual é recuperada com q $\rightarrow$ 1. Quando $q \neq 1$ deparamos com uma difusão anômala. Se $q > 1$, ocorre uma superdifusão, pois $\langle x^2 \rangle_t$ cresce com uma potência de "*t*" maior que um. No entanto, um processo subdifusivo acontece quando $q < 1$.

Passemos agora para a verificação da eq. (3.24), para tanto vamos simplificar a notação usando

$$A = |1-q|\beta_0 \left[1 + 2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}}.$$

Logo,

$$\langle x^2 \rangle_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[1 - Sgn(1-q)Ax^2\right]^{\frac{1}{1-q}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - Sgn(1-q)Ax^2\right]^{\frac{1}{1-q}} dx} \tag{3.25}$$

e daí a mudança de variável com $w = \sqrt{A}x$ fornece

$$\langle x^2 \rangle_t = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} w^2 \left[1 - Sgn(1-q)w^2\right]^{\frac{1}{1-q}} dw}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - Sgn(1-q)w^2\right]^{\frac{1}{1-q}} dw} \right) \frac{1}{(1-q)\beta_0 \left[1 + 2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}}} . \tag{3.26}$$

Portanto, para "*t*" longo chegamos a $\langle x^2 \rangle_t \propto t^{\frac{2}{3-q}}$, visto que as integrais em (3.26) não dependem de "*t*".

3.2.2 Solução com força constante

Passemos a abordar a equação de difusão anômala não-linear unidimensional quando $f = F_0$ com F_0 constante:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -F_0 \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho^\nu (x,t)}{\partial x^2} . \tag{3.27}$$

Da mesma forma que procedemos para a equação de difusão sem força externa, proporemos uma forma de solução para a eq. (3.27). Aqui, motivado pelo caso sem força externa, o *ansatz* escolhido é

$$\rho(x,t) = \frac{\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)} \tag{3.28}$$

com $q = 2 - \nu$. A função $x_c(t)$ é introduzida para levar em conta o arraste promovido pela força externa, pois $x_c(t)$ indica a posição do centro do pacote.

Com o objetivo de descobrir as funções $\beta(t)$, $Z(t)$ e $x_c(t)$, devemos usar o *ansatz* (3.28) na eq. (3.27). Para tal, notemos inicialmente que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = & -\frac{1}{(Z(t))^2}\frac{dZ(t)}{dt}\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}} \\ & -\frac{1}{Z(t)}(x-x_c(t))^2\frac{d\beta(t)}{dt}\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1} \\ & +\frac{2}{Z(t)}(x-x_c(t))\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1},\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \rho^\nu(x,t)}{\partial x} = -\frac{2}{(Z(t))^\nu}\nu\beta(t)(x-x_c(t))\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1}, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho^\nu(x,t)}{\partial x^2} = & -\frac{2}{(Z(t))^\nu}\nu\beta(t)\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-1} \\ & +\frac{4}{(Z(t))^\nu}\nu(\nu-1+q)(\beta(t))^2(x-x_c(t))^2\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{\nu}{1-q}-2}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Empregando $q = 2 - \nu$, verificamos que $\frac{\nu}{1-q}-1=\frac{1}{1-q}$ e $\frac{\nu}{1-q}-2=\frac{1}{1-q}-1$, daí

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho^\nu(x,t)}{\partial x^2} = & -\frac{2}{(Z(t))^\nu}\nu\beta(t)\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}} \\ & +\frac{4}{(Z(t))^\nu}\nu(\beta(t))^2(x-x_c(t))^2\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Quando inserirmos as eqs. (3.29), (3.30) com ν = 1 e (3.32) na equação de Fokker-Planck não-linear (3.27) e agruparmos em termos de $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$ e $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$, assim como em termos de potências $(x-x_c(t))$ e $(x-x_c(t))^2$, teremos

$$0=\left[-\frac{1}{(Z(t))^2}\frac{dZ(t)}{dt}+\frac{2D}{(Z(t))^{\nu}}\nu\beta(t)\right]\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}+$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{2}{Z(t)}\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-\frac{2F_0}{Z(t)}\beta(t)\right](x-x_c(t))+\\ \left[-\frac{1}{Z(t)}\frac{d\beta(t)}{dt}-\frac{4D}{(Z(t))^{\nu}}\nu(\beta(t))^2\right](x-x_c(t))^2\end{array}\right\}\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}. \tag{3.33}$$

Usando a independência linear dos vários termos proporcionais a $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$, $(x-x_c(t))\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$ e $(x-x_c(t))^2\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$, vemos que seus coeficientes devem ser nulos independentemente uns dos outros, isto é,

$$-\frac{1}{(Z(t))^2}\frac{dZ(t)}{dt}+\frac{2D}{(Z(t))^{\nu}}\nu\beta(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}=2D(2-q)\beta(t)Z(t)^{q-1}, \tag{3.34}$$

$$\frac{2}{Z(t)}\beta(t)\frac{dx_c(t)}{dt}-\frac{2F_0}{Z(t)}\beta(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dx_c(t)}{dt}=F_0\ , \tag{3.35}$$

$$-\frac{1}{Z(t)}\frac{d\beta(t)}{dt}-\frac{4D}{(Z(t))^{\nu}}\nu(\beta(t))^2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\beta(t)}\frac{d\beta(t)}{dt}=-4D(2-q)\beta(t)Z(t)^{q-1}. \tag{3.36}$$

Podemos observar que a solução da eq. (3.35) não depende do parâmetro "q" e já é conhecida: $x_c(t)=x_c(0)+F_0\,t$, eq. (2.71).

Visto que as eqs. (3.34) e (3.36) não dependem de F_0, elas são respectivamente as (3.14) e (3.13) que correspondem ao caso sem termo de arraste. Logo, a exemplo do caso sem força externa, as soluções são idênticas as eqs. (3.16 – 3.18):

$$Z(t)=Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}}(\beta(t))^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left\{\begin{array}{l}\beta(t)=\beta_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}}\\ Z(t)=Z_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{1}{3-q}},\end{array}\right.$$

com $Z_0 = Z(0)$ e $\beta_0 = \beta(0)$ e $q = 2 - \nu$.

Portanto, a solução da eq. (3.27) (difusão anômala unidimensional com termo de arraste constante), usando o *ansatz* (3.28), é

$$\rho(x,t)=\frac{\left[1-(1-q)\beta_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{2}{q-3}}(x-x_c(0)-F_0\ t)^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0 t\right]^{\frac{1}{3-q}}} \qquad (3.37)$$

com q = 2 - ν.

3.2.3 Solução com força linear

Presentemente, encontraremos uma solução para a equação de difusão não-linear de um sistema de partículas que estão com a presença da força linear F = - γx, sendo γ constante. Nesse caso, a equação de Fokker-Planck não linear correspondente em uma dimensão é

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}(x\rho(x,t))+D\frac{\partial^2\rho^{\nu}(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (3.38)$$

Da mesma forma que procedemos para a equação de difusão do caso anterior, escolhemos o *ansatz* (3.28) para obter uma solução para a eq. (3.38). Como já conhecemos as eqs. (3.29) e (3.32), nos resta a determinação de $\frac{\partial(x\rho(x,t))}{\partial x}$ em que usaremos a eq. (3.30) com $\nu = 1$, de modo que

$$\frac{\partial(x\rho(x,t))}{\partial x}=\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)} + x\left[-\frac{2}{Z(t)}\beta(t)(x-x_c(t))\right]\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}. \qquad (3.39)$$

Assim, ao empregarmos as eqs. (3.29), (3.39) e (3.32) com q = 2 - ν na eq. (3.38) e agruparmos em termos de $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$ e $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$, assim como em termos de $(x-x_c(t))$ e $(x-x_c(t))^2$, depararemos com

$$0=\left[-\frac{dZ(t)}{(Z(t))^2 dt}-\frac{\gamma}{Z(t)}+\frac{2D}{(Z(t))^{\nu}}\nu\beta(t)\right]\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}+$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{2\beta(t)}{Z(t)}\frac{dx_c(t)}{dt}+\frac{2\gamma x_c\beta(t)}{Z(t)}\right](x-x_c(t))+\\ \left[-\frac{d\beta(t)}{Z(t)dt}-\frac{4D\nu(\beta(t))^2}{(Z(t))^{\nu}}+\frac{2\gamma\beta(t)}{Z(t)}\right](x-x_c(t))^2\end{array}\right\}\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}. \tag{3.40}$$

Usando a independência linear dos vários termos proporcionais a $(x-x_c(t))^2\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$, $(x-x_c(t))\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$ e $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$, a eq. (3.40) é nula para qualquer valor de $x-x_c(t)$ se os correspondentes coeficientes forem nulos. Isso fornece

$$\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}=-\gamma+2D(2-q)\beta(t)(Z(t))^{q-1}, \tag{3.41}$$

$$\frac{2\beta(t)}{Z(t)}\frac{dx_c(t)}{dt}+\frac{2\gamma x_c\beta(t)}{Z(t)}=0, \tag{3.42}$$

$$-\frac{1}{Z(t)}\frac{d\beta(t)}{dt}-\frac{4D(2-q)(\beta(t))^2}{(Z(t))^{2-q}}+\frac{2\gamma\beta(t)}{Z(t)}=0. \tag{3.43}$$

A eq. (3.42) é idêntica a eq. (2.82), $\frac{1}{x_c(t)}\frac{dx_c(t)}{dt}=-\gamma$, cuja solução é $x_c(t)=x_0e^{-\gamma t}$ com $x_c(0)=x_0$, eq. (2.83). Logo, verifica-se neste caso que $x_c(t)$ não depende do parâmetro "*q*".

Podemos verificar que as eqs. (3.41) e (3.43) conduzem a uma mesma relação entre $Z(t)$ e $\beta(t)$ que as eqs. (3.14) e (3.13), isto é, levam à relação (3.16), $Z(t)=Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}}(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}$ com $Z_0 = Z(0)$ e $\beta_0=\beta(0)$, pois $\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta(t)}\frac{d\beta(t)}{dt}$. Por sua vez, esse $Z(t)$ usado na eq. (3.43) fornece

$$\frac{d\beta(t)}{dt}=-\beta(t)\left[-2\gamma+4D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0^{\frac{q-1}{2}}(\beta(t))^{\frac{3-q}{2}}\right]. \tag{3.44}$$

A eq. (3.44) é uma equação diferencial de Bernoulli e, portanto, podemos empregar sua solução geral dada imediatamente abaixo da eq. (2.78). Entretanto, optamos por resolvê-la diretamente, visto que ela aparece em várias oportunidades nesta dissertação. Notemos agora que a eq. (3.44) conduz a

$$\frac{d\beta}{\beta\left(-2\gamma+4D(2-q)Z_0^{\ q-1}\beta_0^{\frac{q-1}{2}}\beta^{\frac{3-q}{2}}\right)}=-dt \tag{3.45}$$

e daí

$$\int_{\beta_0}^{\beta(t)}\frac{d\beta}{\beta\left(\beta^{\frac{3-q}{2}}-\dfrac{2\gamma}{4D(2-q)Z_0^{\ q-1}\beta_0^{\frac{q-1}{2}}}\right)}=-\int_0^t\left[4D(2-q)Z_0^{\ q-1}\beta_0^{\frac{q-1}{2}}\right]dt\ . \tag{3.46}$$

O lado esquerdo da eq. (3.46) pode ser tratada via frações parciais. De fato, comecemos por notar que

$$\frac{1}{\beta\left(\beta^{\frac{3-q}{2}}+B\right)}=\frac{1}{B}\frac{1}{\beta}-\frac{1}{B}\frac{\beta^{\frac{3-q}{2}-1}}{\left(\beta^{\frac{3-q}{2}}+B\right)}. \tag{3.47}$$

Ao integrarmos ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$\int_{\beta_0}^{\beta(t)}\frac{d\beta}{\beta\left(\beta^{\frac{3-q}{2}}+B\right)}=\frac{1}{B}\int_{\beta_0}^{\beta(t)}\frac{d\beta}{\beta}-\frac{1}{B}\int_{\beta_0}^{\beta(t)}\frac{\beta^{\frac{3-q}{2}-1}}{\left(\beta^{\frac{3-q}{2}}+B\right)}d\beta, \tag{3.48}$$

que resulta em

$$\int_{\beta_0}^{\beta(t)}\frac{d\beta}{\beta\left(\beta^{\frac{3-q}{2}}+B\right)}=\frac{1}{B}\ln\left[\left(\frac{\beta(t)}{\beta_0}\right)\left(\frac{\beta_0^{\frac{3-q}{2}}+B}{(\beta(t))^{\frac{3-q}{2}}+B}\right)^{\frac{2}{3-q}}\right]. \tag{3.49}$$

Usando $B=-\dfrac{2\gamma}{a}$ com $a=4D(2-q)Z_0^{\ q-1}\beta_0^{\frac{q-1}{2}}$, vemos que a eq. (3.46) assume a forma

$$-\int_0^t a dt=\int_{\beta_0}^{\beta(t)}\frac{d\beta}{\beta\left((\beta(t))^{\frac{3-q}{2}}+B\right)}. \tag{3.50}$$

Ao empregarmos o resultado (3.49) na eq. (3.50), constatamos que

$$-aBt=\ln\left[\left(\frac{\beta(t)}{\beta_0}\right)\left(\frac{\beta_0^{\frac{3-q}{2}}+B}{(\beta(t))^{\frac{3-q}{2}}+B}\right)^{\frac{2}{3-q}}\right], \tag{3.51}$$

que é equivalente a

$$\left(\frac{\beta(t)}{\beta_0}\right)\left(\frac{\beta_0^{\frac{3-q}{2}}+B}{(\beta(t))^{\frac{3-q}{2}}+B}\right)^{\frac{2}{3-q}}=e^{-aBt}. \qquad (3.52)$$

A seguir escrevamos a eq. (3.52) como

$$\beta(t)=u\left[(\beta(t))^{\frac{3-q}{2}}+B\right]^{\frac{2}{3-q}}, \qquad (3.53)$$

onde $u=\beta_0 e^{-aBt}/\left(\beta_0^{\frac{3-q}{2}}+B\right)^{\frac{2}{3-q}}$, o que leva a

$$\beta(t)=\left(\frac{B}{u^{-\frac{3-q}{2}}+B}\right)^{\frac{2}{3-q}}, \qquad (3.54)$$

isto é,

$$\beta(t)=\beta_0\left[e^{aBt\left(\frac{3-q}{2}\right)}\left(1+B^{-1}\beta_0^{\frac{3-q}{2}}\right)-B^{-1}\beta_0^{\frac{3-q}{2}}\right]^{-\frac{2}{3-q}}. \qquad (3.55)$$

Por fim, usemos $B^{-1}\beta_0^{\frac{3-q}{2}}=-\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}$ e $aB=-2\gamma$ na eq. (3.55) para concluirmos que a solução da eq. (3.44) é

$$\beta(t)=\beta_0\left\{e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]+\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right\}^{-\frac{2}{3-q}}. \qquad (3.56)$$

A partir daí e visto que $Z(t)=Z_0\beta_0^{\frac{1}{2}}(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}$, eq. (3.16), chegamos a

$$Z(t)=Z_0\left\{e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]+\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right\}^{\frac{1}{3-q}}. \qquad (3.57)$$

De posse desses resultados, para a difusão anômala unidimensional com termo de arraste linear que corresponde a eq. (3.38), uma solução para a eq. (3.38) é

$$\rho(x,t)=\frac{\left\{1-(1-q)\beta_0\left\{\begin{array}{l}e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]\\+\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\end{array}\right\}^{-\frac{2}{3-q}}\left[x-x_0e^{-\gamma t}\right]^2\right\}^{\frac{1}{1-q}}}{Z_0\left\{e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]+\frac{2D(2-q)Z_0^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right\}^{\frac{1}{3-q}}}. \qquad (3.58)$$

3.2.4 Solução com força linear e constante

Nesta seção, consideremos a equação de Fokker-Planck não-linear para difusão anômala, incorporando, de uma forma unificada, todos os comportamentos descritos até agora. Para tanto, adotaremos a força externa $f = -\gamma x + F_0$ com γ e F_0 constantes. Logo, a equação de Fokker-Planck não-linear em questão é

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \gamma\frac{\partial(x\rho(x,t))}{\partial x} - F_0\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2\rho(x,t)^\nu}{\partial x^2}\,. \tag{3.59}$$

A exemplo dos casos anteriores, usaremos o *ansatz* (3.28). Daí, empregamos as eqs. (3.29), (3.39), (3.30) com ν = 1 e (3.31) com q = 2 - ν na eq. (3.59). A seguir, agruparemos em termos de $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$ e $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$, assim como em potências de $(x-x_c(t))$ e $(x-x_c(t))^2$. Tal procedimento, encaminha-nos a

$$\begin{aligned}0 = &\left[-\frac{1}{(Z(t))^2}\frac{dZ(t)}{dt} - \frac{\gamma}{Z(t)} + \frac{2D}{(Z(t))^\nu}\nu\beta(t)\right]\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}} + \\ &\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{2\beta(t)}{Z(t)}\dfrac{dx_c(t)}{dt} + \dfrac{2(\gamma x_c - F_0)\beta(t)}{Z(t)}\right](x-x_c(t)) + \\ \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{Z(t)}\dfrac{d\beta(t)}{dt} \\ -\dfrac{4D\nu(\beta(t))^2}{(Z(t))^\nu} + \dfrac{2\gamma\beta(t)}{Z(t)}\end{array}\right](x-x_c(t))^2\end{array}\right\}\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Usando a independência linear dos vários termos proporcionais a $\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}$, $(x-x_c(t))\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$ e $(x-x_c(t))^2\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}-1}$, a eq. (3.60) será nula para qualquer valor de x se os correspondentes coeficientes forem nulos. Isso fornece as equações

$$\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} = -\gamma + 2D(2-q)\beta(t)Z(t)^{q-1}, \tag{3.61}$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -\gamma x_c + F_0\,, \tag{3.62}$$

$$-\frac{d\beta(t)}{dt} = -2\gamma\beta(t) + 4D(2-q)(\beta(t))^2 Z(t)^{q-1}\,. \tag{3.63}$$

A eq. (3.62) não depende do parâmetro "q" e é idêntica a eq. (2.93), cuja solução é a eq. (2.95), $x_c(t)=\frac{F_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)$ se $x_c(0) = 0$.

Visto que as eqs. (3.61) e (3.63) coincidem com as eqs. (3.41) e (3.43), suas soluções são respectivamente (3.57) e (3.56):

$$Z(t)=Z_0\left\{e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]+\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right\}^{\frac{1}{3-q}}$$

e

$$\beta(t)=\beta_0\left\{e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]+\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right\}^{-\frac{2}{3-q}}.$$

Logo, a solução para a difusão anômala unidimensional com termo de arraste linear e constante, eq. (3.59), tem a forma

$$\rho(x,t)=\frac{\left\{1-(1-q)\beta_0\left\{\begin{array}{l}e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]\\+\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\end{array}\right\}^{-\frac{2}{3-q}}\left[x-\frac{F_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{1-q}}}{Z_0\left\{e^{-(3-q)\gamma t}\left[1-\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right]+\frac{2D(2-q)Z_0{}^{q-1}\beta_0}{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{3-q}}}. \quad (3.64)$$

A partir dessa solução, verificamos que se $q\rightarrow 1$ recuperamos os casos de difusão tratados no capítulo 2. Terminaremos esta subseção fazendo uma observação sobre a relação $Z(t)=Z_0\beta_0{}^{\frac{1}{2}}(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}$, que é largamente empregada nos capítulos 2 e 3.

Seguindo o procedimento empregado nos casos anteriores, podemos verificar que a substituição da eq. (3.61) na (3.63) leva à eq. (3.16), $Z(t)=Z_0\beta_0{}^{\frac{1}{2}}(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}$, com $Z_0 = Z(0)$ e $\beta_0 = \beta(0)$. Aqui ressaltamos que este $Z(t)$, que independe dos valores de γ, F_0 e q, pode ser obtido de uma maneira alternativa. Realmente, tal $Z(t)$ pode ser obtido usando a equação de Fokker-Planck não-linear com uma força genérica:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho(x,t)^{\nu}}{\partial x^2}-\frac{\partial(f(x)\rho(x,t))}{\partial x}. \quad (3.65)$$

Para verificar este fato, observemos primeiramente que

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[D\frac{\partial^2\rho(x,t)^\nu}{\partial x^2}-\frac{\partial(f(x)\rho(x,t))}{\partial x}\right]dx$$

$$=\left(D\frac{\partial\rho(x,t)^\nu}{\partial x}-f(x)\rho(x,t)\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0\,, \qquad (3.66)$$

logo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx=cte'\,, \qquad (3.67)$$

onde supomos que $\rho(x,t)$ e $\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}$ vão a zero quando $x\to\pm\infty$.

A seguir, usando o *ansatz* (3.28) na eq. (3.67), teremos

$$cte=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)(x-x_c(t))^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)}dx\,, \qquad (3.68)$$

ou seja,

$$cte=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[1-(1-q)\beta(t)w^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)}dw\,, \qquad (3.69)$$

onde empregamos $w = x - x_c(t)$. Além disso, se $k=w\sqrt{\beta}$, chegamos a

$$cte=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[1-(1-q)k^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)}\frac{dk}{\sqrt{\beta(t)}}=\frac{1}{Z(t)\beta(t)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-(1-q)k^2\right]^{\frac{1}{1-q}}dk\,. \qquad (3.70)$$

Observando que $\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-(1-q)k^2\right]^{\frac{1}{1-q}}dk$ é uma nova constante, vemos que o resultado (3.70) implica $Z(t)(\beta(t))^{\frac{1}{2}}=cte$, isto é, $Z(t)(\beta(t))^{\frac{1}{2}}=Z(0)\beta(0)^{\frac{1}{2}}$, que é equivalente a eq. (3.16).

3.2.5 Solução com fonte

No capítulo 2 (subseção 2.4.3) analisamos a solução da equação de difusão com termo de fonte (sorvedouro) δ. Agora, estudaremos semelhantemente no contexto da equação da equação de Fokker-Planck não-linear mantendo o termo proporcional à densidade, $\delta=-\alpha(t)\rho(x,t)$ com $\alpha(t) > 0$. Deste modo,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho^\nu}{\partial x^2}-\frac{\partial(f\rho)}{\partial x}-\alpha(t)\rho. \qquad (3.71)$$

Se removermos os termos difusivo e de arraste, a eq. (3.71) fica idêntica a eq. (2.57), $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = -\alpha(t)\tilde{\rho}$, cuja solução é $\tilde{\rho} = \rho_0 \exp[-\int_0^t \alpha(t')dt']$. Isto nos leva a solução da equação com termo de fonte, eq. (2.58),

$$\rho(x,t) = e^{-\int_0^t \alpha(t')dt'}\hat{\rho}(x,t).$$

Com essa mudança, $\hat{\rho}(x,t)$ obedece a equação

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \tilde{D}\frac{\partial^2\hat{\rho}^\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial(f\hat{\rho})}{\partial x} \tag{3.72}$$

com $\tilde{D} = De^{-(1-\nu)\int_0^t \alpha(t')dt'}$. Portanto, a resolução da eq. (3.71) se reduz a encontrar a solução sem termo de fonte, porém com um coeficiente de difusão dependente do tempo. No caso de $f = 0$, teremos uma solução semelhante a eq. (3.19), pois recaímos na equação $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\tau} = \tilde{D}\frac{\partial^2\hat{\rho}^\nu}{\partial x^2}$ que é equivalente a $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\hat{\rho}^\nu}{\partial x^2}$ com $\tau(t) = \int_0^t D(t')dt'$. Logo a eq. (3.19) para $\hat{\rho}$ com a condição inicial $\hat{\rho}(x,0) \propto \delta(x)$, a solução da eq. (3.71) com $f = 0$ fica

$$\rho(x,t) = \left\{ \frac{\left[1-(1-q)\beta_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0\tau(t)\right]^{\frac{2}{q-3}}x^2\right]^{\frac{1}{1-q}}}{Z_0\left[1+2D(q-2)(q-3)Z_0^{q-1}\beta_0\tau(t)\right]^{\frac{1}{3-q}}} \right\} e^{-\int_0^t \alpha(t')dt'}. \tag{3.73}$$

3.2.6 Equilíbrio

Para a equação não-linear de Fokker-Planck, (3.65),

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho(x,t)^\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial(f(x)\rho(x,t))}{\partial x},$$

obter soluções estacionárias $(\partial\rho/\partial t = 0)$ é, em geral, bem mais fácil que o caso não estacionário $(\partial\rho/\partial t \neq 0)$.

De fato, a eq. (3.65) é reduzida a uma equação mais simples:

$$0 = \frac{d}{dx}\left[D\frac{d\rho(x)^\nu}{dx} - f(x)\rho(x)\right], \tag{3.74}$$

ou seja,

$$D\frac{d\rho(x,t)^\nu}{dx} - f(x)\rho(x) = cte. \tag{3.75}$$

Além disso, se tivermos uma situação localizada ($\rho(x \to \pm\infty) = 0$ e $\frac{\partial\rho(x \to \pm\infty)}{\partial x} = 0$) na equação anterior, a constante será nula. Daí, a eq. (3.75) nos leva a

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(x)} \nu D \rho^{\nu-2} d\rho = \int_0^x f(x')dx',$$

isto é,

$$\frac{D\nu}{\nu-1}\left[(\rho(x))^{\nu-1} - \rho(0))^{\nu-1}\right] = \int_0^x f(x')dx'.$$

Portanto,

$$\rho(x) = \rho(0)\left[1 - \left(\frac{\nu-1}{D\nu}\right)\rho(0))^{1-\nu} V(x)\right]^{\frac{1}{\nu-1}}, \qquad (3.76)$$

onde $V(x)$ é a energia potencial $V(x) = -\int_0^x f(x')dx'$.

Cabe ressaltarmos que ao escrevermos $f(x)$ como μF e tomarmos o limite $\nu \to 1$, a eq. (3.76) assume a forma da eq. (2.105).

Por fim, façamos uma última observação. A distribuição (3.76), a exemplo da eq. (2.105), pode ser obtida a partir da maximização de uma entropia. Neste caso, a entropia é a de Tsallis [17-19]:

$$S_q = -k\left(\frac{1 - \sum_{i=1}^{w} p_i^q}{1-q}\right), \qquad (3.77)$$

conectada aos vínculos: $U_q = \sum_{i=1}^{W} \varepsilon_i p_i^{(q)}$ e $1 = \sum_{i=1}^{W} p_i^{(q)}$, onde k é o análogo da constante de Boltzmann e $q = 2 - \nu$. Além disso, se tomarmos o limite $q \to 1$, S_q recai na entropia usual (2.97), pois

$$p_i^q = p_i \exp[(q-1)\ln p_i] \approx p_i[1 + (q-1)\ln p_i] \qquad (3.78)$$

e $\sum_{i=1}^{w} p_i = 1$.

Capítulo 4

Lei de potência e equação de Fokker-Planck não-linear

Vimos no capítulo 3 que um tipo de difusão anômala pôde ser descrita na forma da equação de Fokker-Planck não-linear. Descrevemos analiticamente uma classe de soluções dessa equação via um *ansatz* baseado na exponencial-q de Tsallis.

Neste capítulo, inicialmente apresentaremos uma motivação para usar esse *ansatz*, fazendo um paralelo com a difusão usual. Em seguida, iremos apresentar uma nova classe de soluções à contribuição que julgamos inédita deste trabalho. Essa nova classe de soluções é do tipo lei de potência. Verificamos que todos os casos discutidos no capítulo anterior têm soluções do tipo lei de potências. Além disso, notamos ainda que outras situações (uma classe de osciladores anarmônicos) também apresentam tal tipo de soluções. Também, frizamos que uma solução tipo lei de potência pode ser vista como aquela que traz o comportamento assintótico de algum tipo de solução.

Por fim, consideramos um *ansatz* mais geral que os anteriores, pois ele tem como casos particulares o gaussiano generalizado e o tipo lei de potência.

4.1 Uma motivação para o *ansatz*

Vamos neste momento discutir um pouco sobre o porquê de usar o *ansatz* (3.6). Para tanto, comecemos olhando para uma equação que a exponecial-q satisfaz. Essa equação, que representa um tipo de decaimento não-linear, é

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda u(t)^q \qquad (q \in \Re) \tag{4.1}$$

e conduz a

$$\int_{u(0)}^{u(t)} u^{-q} du = -\int_0^t \lambda dt' . \tag{4.2}$$

Fazendo as integrações, temos

$$\frac{(u(t))^{1-q} - (u(0))^{1-q}}{1-q} = -\lambda t , \tag{4.3}$$

ou seja,

$$(u(t))^{1-q} = (u(0))^{1-q} - (1-q)\lambda t . \tag{4.4}$$

Se considerarmos q genérico, vemos que $u(t)$ deve ser não negativo, caso contrário $u(t)_{1-q}$ teria uma parte imaginária.

Primeiramente suporemos que $u(0)_{1-q} \neq 0$. Nesse caso, a eq. (4.4) implica

$$u(t) = u(0)\left[1-(1-q)\lambda u(0)^{q-1} t\right]^{\frac{1}{1-q}} , \tag{4.5}$$

que é justamente uma exponencial-q, pois $u(t) = u(0)\exp_q(-\lambda u(0)^{q-1} t)$. Em particular, no limite $q \to 1$, a eq. (4.5) reduz a

$$u(t) = u(0)\exp(-\lambda t) \tag{4.6}$$

e a eq. (4.1) assume a forma de uma equação de decaimento usual (linear):

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda u(t) . \tag{4.7}$$

Como deve estar claro, a eq. (4.5) é uma generalização da eq. (4.6). Por outro lado, a equação de decaimento exponencial (4.7) pode ser vista como uma precursora da equação de difusão (2.3),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} ,$$

se aproximarmos $D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ por $-\lambda\rho$ (relembramos que para os nossos objetivos é suficiente restringir a análise ao caso unidimensional). O mesmo podemos dizer da equação de decaimento não exponencial (4.1) em relação à equação não linear de difusão (3.1),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho^\nu}{\partial x^2} ,$$

ao aproximarmos $D\frac{\partial^2 \rho^\nu}{\partial x^2}$ por - $\lambda\rho_q$.

Notemos agora que a equação de difusão (2.3) admite uma solução gaussiana, $\rho \propto \exp(-\beta x^2)$. Assim, é natural imaginar que uma solução da eq. (3.1) possa incorporar de alguma forma, o aspecto gaussiano que emana da eq. (2.3) e o não exponencial (exponencial-q) oriundo da eq. (4.1). Tal possibilidade seria $\rho \propto \exp_q(-\beta x^2)$, que essencialmente é o nosso *ansatz* (3.6).

Olhando criticamente para a solução (4.5) da eq. (4.1), vemos que ela está apoiada no fato de que $(u(0))^{1-q} \neq 0$, com $u(0) > 0$. No entanto, o que ocorreria se $(u(0))^{1-q}$ fosse nulo? A partir da eq. (4.4), vemos que

$$u(t) = [(q-1)\lambda]^{\frac{1}{1-q}}\, t^{\frac{1}{1-q}} . \tag{4.8}$$

Ademais a condição $u(t) \geq 0$ com $u(t)$ não nulo para algum t implica $(q-1)\lambda > 0$. Para sermos mais concretos, suporemos que $\lambda > 0$, que implica $q > 1$. Além disso, vemos que a solução (4.8) não tem como caso limite a solução (4.6) quando $q \to 1$, apesar da eq. (4.1) ter como limite a eq. (4.7) para $q \to 1$.

Acabamos de ver que o *ansatz* (3.6) pode advir, em última instância, de uma generalização da exponencial. Agora, que *ansatz* devemos empregar para obtermos uma solução da eq. (3.1) que corresponde a solução do tipo potência dada na eq. (4.8)? No presente contexto, é natural tentarmos uma solução do tipo lei de potência, melhor dizendo, como novo *ansatz* empregaremos

$$\rho(x,t) = \beta(t)|x|^{\alpha} , \tag{4.9}$$

sendo α um parâmetro a determinar, assim como a função $\beta(t)$. A função módulo foi introduzida em (4.9) de modo a garantir $\rho(x,t)$ real para x e α arbitrários. Além disso, ela assegura que $\rho(x,t)$ seja par em relação a x.

4.2 Caso sem fonte e força externa

Passemos a empregar o *ansatz* (4.9), $\rho(x,t) = \beta(t)|x|^{\alpha}$. Nesse sentido, comecemos abordando a equação de difusão anômala não-linear em uma dimensão (3.1),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho^{\nu}}{\partial x^2} .$$

Com o objetivo de encontrarmos alguma solução coerente com o *ansatz* em questão, o substituiremos na eq. (3.1). Para tal, observemos que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{d\beta(t)}{dt}|x|^{\alpha}\ , \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial\rho^{\nu}}{\partial x}=\alpha\nu\big(\beta(t)\big)^{\nu}|x|^{\alpha\nu-1}Sgn(x)\,, \tag{4.11}$$

onde $Sgn(x)=\frac{d|x|}{dx}=1$ para $x>0$ e –1 para $x<0$, e

$$\frac{\partial^2\rho^{\nu}}{\partial x^2}=(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu-1)|x|^{\alpha\nu-2}\,. \tag{4.12}$$

Aqui é pertinente salientar que $|x|$ não tem derivada em $x = 0$. Assim, nossa solução é definida em toda reta real salvo em $x = 0$, tanto para o caso desta seção como as seguintes deste capítulo.

Usando as eqs. (4.10) e (4.12) na (3.1), chegamos a

$$\frac{d\beta(t)}{dt}|x|^{\alpha}-D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu-1)|x|^{\alpha\nu-2}=0\,, \tag{4.13}$$

que deve ser analisada levando em conta duas possibilidades:

i) Se considerarmos $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\nu-2}$ linearmente independentes ($\alpha\neq\alpha\nu$ - 2), seus coeficientes deverão ser nulos, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{d\beta(t)}{dt}=0 & \Rightarrow & \beta(t)=\beta(0)=\beta_0=cte, \qquad (4.14)\\ D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu-1)=0 & \Rightarrow & \begin{cases}\alpha=0 \quad \text{ou}\\ \alpha=1/\nu\end{cases} . \qquad (4.15)\end{array}\right.$$

A partir das eqs. (4.14) e (4.15) constatamos que a eq. (3.1) pode ter como soluções

$$\rho(x,t)=\beta_0|x|^{\frac{1}{\nu}} \qquad \text{e} \qquad \rho(x,t)=\beta_0\,. \tag{4.16}$$

Notemos que $\alpha = 0$ automaticamente satisfaz a hipótese $\alpha\neq\alpha\nu$ - 2. Porém, quando $\alpha=1/\nu$, essa hipótese somente é satisfeita se $\nu\neq$ -1 e $\nu\neq 0$. Isso exclui do caso i) $\rho(x,t)=\beta_0|x|^{\frac{1}{\nu}}$ se $\nu=$ -1 ou $\nu=0$.

ii) Por outro lado, se $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\nu-2}$ forem linearmente dependentes ($\alpha=\alpha\nu$-2), somos levados a

$$\frac{d\beta(t)}{dt}-D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu-1)=0 \tag{4.17}$$

e $\alpha=\frac{2}{\nu-1}$. Daí segue que

$$\int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \beta^{-\nu} d\beta = \int_0^t D\alpha\nu(\alpha\nu - 1)dt' ,$$

resultando em

$$\beta(t)^{1-\nu} - \beta_0^{1-\nu} = 2D\nu\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)t , \qquad (4.18)$$

onde $\beta_0 = \beta(0)$.

Podemos observar que a eq. (4.17) com a solução (4.18) é do tipo (4.1) com solução (4.4). Logo, seguindo aquela análise, deparamos com dois tipos de soluções, análogas a (4.5) e (4.8). Uma forma compacta de escrevê-las é

$$\beta(t) = \left[\beta_0^{1-\nu} + 2D\nu\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} , \qquad (4.19)$$

pois no caso de $(\beta(0))^{1-\nu} = 0$ ficamos com a solução

$$\beta(t) = \left[2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} . \qquad (4.20)$$

Assim, também é solução da eq. (3.1)

$$\rho(x,t) = \left[\beta_0^{1-\nu} + 2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} |x|^{\frac{2}{\nu-1}} . \qquad (4.21)$$

Nesta solução, para garantir que $\rho(x,t)$ seja real com ν e t arbitrários e $D > 0$ é necessário que $\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right) > 0$, ou seja, $\nu < -1$ ou $0 < \nu < 1$.

No tocante a parte espacial de $\rho(x,t)$, podemos escrevê-la como

$$|x|^{\frac{2}{\nu-1}} = (x^2)^{\frac{1}{1-q}} , \qquad (4.22)$$

se $q = 2 - \nu$. Quando comparamos este resultado com a solução (3.19), podemos perceber que ele corresponde ao comportamento assintótico de (3.19). Pois

$$\frac{1}{Z(t)}[1-(1-q)\beta(t)x^2]^{\frac{1}{1-q}} \approx \frac{[(q-1)\beta(t)]^{\frac{1}{1-q}}}{Z(t)}(x^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

para $(q-1)\beta(t) > 0$ e $|x|$ suficientemente grande. No que se refere a parte temporal dos dois tipos de ρ's, percebemos que os $\beta(t)$'s são distintos. Assim, a solução (4.21) tem um aspecto dual: ela pode ser considerada tanto uma possível solução da eq. (3.1), quanto o comportamento assintótico da solução (3.19).

4.3 Caso com força externa linear

Vamos agora considerar a equação de difusão anômala não-linear em uma dimensão (3.38),

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(x\rho(x,t)) + D\frac{\partial^2 \rho^{\nu}(x,t)}{\partial x^2},$$

onde uma força linear do tipo harmônica, $f = -\gamma x$, está presente. O *ansatz* escolhido continua sendo o (4.9), $\rho(x,t) = \beta(t)|x|^{\alpha}$. Poderíamos usar $|x - x_c(t)|^{\alpha}$ ao invés de $|x|^{\alpha}$, porém esta análise não ajudaria sensivelmente a enriquecer o espectro de soluções. Nesse mesmo sentido, omitimos o estudo do caso $f = F_0 = cte$.

Seguindo o procedimento anterior, utilizaremos nosso *ansatz* na eq. (3.38). Portanto, usamos a eqs. (4.10),

$$\gamma \frac{\partial (x\rho)}{\partial x} = \gamma(\alpha+1)\beta(t))|x|^{\alpha} \tag{4.23}$$

e a eq. (4.12), para obter

$$\left(\frac{d\beta(t)}{dt} - \gamma(\alpha+1)\beta(t)\right)|x|^{\alpha} - D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu-1)|x|^{\alpha\nu-2} = 0. \tag{4.24}$$

Passemos à análise das possíveis soluções desta equação.

i) Se tomarmos $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\nu-2}$ linearmente independentes ($\alpha \neq \alpha\nu - 2$), seus coeficientes deverão ser nulos:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\beta(t)}{dt} - \gamma(\alpha+1)\beta(t) = 0 & \qquad (4.25) \\ D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu-1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{ou} \\ \alpha = 1/\nu \end{cases} . & \qquad (4.26) \end{array}\right.$$

A solução de (4.25) é

$$\beta(t) = \beta_0 e^{(\alpha+1)\gamma t}, \tag{4.27}$$

com $\beta_0 = \beta(0)$.

Das eqs. (4.26) e (4.27), chegamos a duas possíveis soluções na forma do *ansatz* (4.9):

$$\rho(x,t) = \beta_0 e^{\gamma t} \tag{4.28}$$

e

$$\rho(x,t) = \beta_0 e^{\left(\frac{1}{\nu}+1\right)\gamma t}|x|^{\frac{1}{\nu}}. \tag{4.29}$$

Assim, como no caso sem força externa, chamamos a atenção para o fato de que a última solução só faz sentido quando $\nu \neq -1$ e $\nu \neq 0$.

ii) De outra forma, se supormos $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\nu-2}$ linearmente dependentes ($\alpha = \alpha\nu - 2$), seremos conduzidos a $\alpha = 2/(\nu - 1)$ e

$$\frac{d\beta}{dt} - (\alpha+1)\gamma\beta - D\alpha\nu(\alpha\nu-1)\beta^{\nu} = 0 \,. \tag{4.30}$$

Essa equação, que já nos deparamos em outras oportunidades no decorrer deste trabalho, que é do tipo Bernoulli, tem sua solução dada por

$$\beta(t)^{1-\nu}\, e^{-(1-\nu)(\alpha+1)\gamma t} = \frac{D\alpha\nu(\alpha\nu-1)}{(\alpha+1)\gamma}\left(e^{-(1-\nu)(\alpha+1)\gamma t} - 1\right) + \beta_0^{\,1-\nu} \,, \tag{4.31}$$

com $\beta_0 = \beta(0)$. Assim, a eq. (4.31) com $\alpha = 2/(\nu - 1)$ implica

$$\beta(t) = \left[\beta_0^{\,1-\nu} e^{-(1+\nu)\gamma t} + \frac{2D\nu}{(\nu-1)\gamma}\left(1 - e^{-(1+\nu)\gamma t}\right)\right]^{\frac{1}{1-\nu}} . \tag{4.32}$$

Por outro lado, se $\beta_0^{1-\nu} = 0$, temos

$$\beta(t) = \left[\frac{2D\nu}{(\nu-1)\gamma}\left(1 - e^{-(1+\nu)\gamma t}\right)\right]^{\frac{1}{1-\nu}} . \tag{4.33}$$

Finalmente, ao empregarmos $\alpha = 2/(\nu - 1)$ e as eqs. (4.32) e (4.33) no *ansatz* (4.9) ficamos com

$$\rho(x,t) = \left[\beta_0^{\,1-\nu} e^{-(1+\nu)\gamma t} + \frac{2D\nu}{(\nu-1)\gamma}\left(1 - e^{-(1+\nu)\gamma t}\right)\right]^{\frac{1}{1-\nu}} |x|^{\frac{2}{\nu-1}} \tag{4.34}$$

e

$$\rho(x,t) = \left[\frac{2D\nu}{(\nu-1)\gamma}\left(1 - e^{-(1+\nu)\gamma t}\right)\right]^{\frac{1}{1-\nu}} |x|^{\frac{2}{\nu-1}} . \tag{4.35}$$

Estas duas soluções, a exemplo da eq. (4.21), são proporcionais a $|x|^{\frac{2}{\nu-1}} = (x^2)^{\frac{1}{1-q}}$ quando $q = 2 - \nu$, que é justamente o comportamento assintótico da $\exp_q(-x^2)$ se $q > 1$ ($\nu < 1$). Assim, a exemplo da eq. (4.21) em relação a eq. (3.19), as soluções (4.34) e (4.35) podem ser encaradas como fornecendo o comportamento assintótico da solução encontrada no estudo anterior, eq. (3.58), quando $x_0 = 0$. Isso indica, portanto, que o *ansatz* (4.9) pode fornecer soluções que correspondem ao comportamento assintótico que advém do *ansatz* (3.6).

4.4 Caso com força externa do tipo oscilador anarmônico

Aqui, investigaremos a equação de difusão anômala não-linear quando a força externa $f = -h|x|^{\lambda} x$ está presente, com λ e h constantes. Nesse caso, a equação de Fokker-Planck não-linear a ser investigada é

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = h\frac{\partial (|x|^{\lambda} x\rho^{\mu})}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \rho^{\nu}(x,t)}{\partial x^2}\,. \tag{4.36}$$

Quando permitimos que o parâmetro λ assuma diversos valores, a força externa está relacionada a um oscilador anarmônico simétrico, recaindo no oscilador harmônico se $\lambda = 0$. Ademais, ao tomarmos $\mu = 1$, recuperamos o tipo usual de termo de arraste. Isso posto, a eq. (4.36) é não-linear devido aos termos difusivo, $\partial^2 \rho^{\nu} / \partial x^2$, e de arraste, $\partial (f(x)\rho^{\mu}) / \partial x$, além de estar relacionada a um oscilador também não-linear.

Antes de iniciarmos este trabalho e no melhor de nosso conhecimento, salientamos que não conhecíamos soluções exatas para a eq. (4.36) quando $\lambda \neq 0$. Porém, ao empregarmos o *ansatz* (4.9) nos deparamos com possíveis soluções que passaremos a descrever.

Ao usarmos a nossa proposta de solução, o *ansatz* (4.9), para o termo de força externa da eq. (4.36), vemos que

$$h\frac{\partial (|x|^{\lambda} x\rho^{\mu})}{\partial x} = h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu}|x|^{\alpha\mu+\lambda}\,. \tag{4.37}$$

Dessa forma, empregando as eqs. (4.10), (4.12) e (4.37) na eq. (4.36), teremos

$$\frac{d\beta(t)}{dt}|x|^{\alpha} - h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu}|x|^{\alpha\mu+\lambda} - D\beta(t)^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu - 1)|x|^{\alpha\nu-2} = 0\,. \tag{4.38}$$

A seguir faremos uma análise das possíveis soluções dessa equação.

i) Se considerarmos $|x|^{\alpha}$, $|x|^{\alpha\nu-2}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ linearmente independentes ($\alpha \neq \alpha\nu - 2$, $\alpha \neq \alpha\mu + \lambda$ e $\alpha\nu - 2 \neq \alpha\mu + \lambda$), seus coeficientes deverão ser nulos, isto é ,

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\beta(t)}{dt} = 0 & \Rightarrow & \beta(t) = \beta_0 = cte, \qquad (4.39) \\ \left\{\begin{array}{l} h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu} = 0 \qquad (4.40) \\ D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu - 1) = 0 \qquad (4.41) \end{array}\right. & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} [\alpha = 0 \quad \text{e} \quad \lambda = -1] \ \text{ou} \\ [\alpha = 1/\nu \ \text{ e } \ \mu = -\nu(\lambda + 1)] \end{array}\right. , \end{array}\right.$$

onde estamos usando $h \neq 0$.

No entanto, quando $\alpha = 1/\nu$ e $\mu = -\nu(\lambda + 1)$ implica em $\alpha\nu - 2 = -1$ e $\alpha\mu + \lambda = -1$. Tal resultado é incompatível com $\alpha\nu - 2 \neq \alpha\mu + \lambda$, pois por hipótese $|x|^{\alpha}$, $|x|^{\alpha\nu-2}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ são linearmente independentes. Deparamos, portanto, com apenas uma possível solução:

$$\rho(x,t) = \beta_0\,, \tag{4.42}$$

com $\alpha = 0$ e $\lambda = -1$.

ii) Quando supomos $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\nu-2}$ linearmente dependentes ($\alpha = \alpha\nu - 2$) e independentes de $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ ($\alpha \neq \alpha\mu + \lambda$ e $\alpha\nu - 2 \neq \alpha\mu + \lambda$), obtemos $\alpha = \dfrac{2}{\nu - 1}$ e as condições

$$\begin{cases} h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = (1-\nu)(\lambda + 1)/2 & (4.43) \\ \dfrac{d\beta(t)}{dt} - D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu - 1) = 0 & (4.44) \end{cases}$$

com $h \neq 0$.

A eq. (4.44) é idêntica a eq. (4.17), que leva eq. (4.18),

$$\beta(t)^{1-\nu} - \beta(0)^{1-\nu} = 2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\,.$$

Como já vimos essa equação apresenta a solução (4.19),

$$\beta(t) = \left[\beta_0^{1-\nu} + 2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}},$$

que no caso particular $\beta(0)^{1-\nu} = 0$ recai em

$$\beta(t) = \left[2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}}.$$

Assim, a solução aqui encontrada é a mesma do caso ii) da seção 4.2 na ausência de força externa, ou seja,

$$\rho(x,t) = |x|^{\frac{2}{\nu-1}}\left[\beta_0^{1-\nu} + 2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}}$$

e conseqüentemente

$$\rho(x,t) = |x|^{\frac{2}{\nu-1}}\left[2D\nu\left(\frac{\nu+1}{1-\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\nu}}$$

se $\beta_0^{1-\nu} = 0$. Aqui é necessário que ν < - 1 ou 0 < ν < 1 para que ρ (*x*,*t*) seja real quando *t* for suficientemente longo. Salientamos que o fato da nossa solução corresponder a ausência da força externa (seção 4.2) é uma conseqüência direta da condição (4.43) (a independência linear de $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ com relação a $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\nu-2}$).

iii) Se examinarmos quando $|x|^{\alpha\nu-2}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ são linearmente dependentes ($\alpha\nu$ - 2 = $\alpha\mu$ + λ) e independentes de $|x|^{\alpha}$ ($\alpha \neq \alpha\nu$ - 2 e $\alpha \neq \alpha\mu + \lambda$), constataremos que

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta(t)}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta(t) = \beta_0 = cte, & (4.45) \\ D(\beta(t))^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu - 1) + h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu} = 0\,. & (4.46) \end{cases}$$

Ao utilizarmos a primeira condição, $\beta(t) = \beta_0 = cte$, na eq. (4.46), chegamos a

$$\beta_0^{\nu-\mu} = -\frac{h(\alpha\mu + \lambda + 1)}{D\alpha\nu(\alpha\nu - 1)} = -\frac{h}{D\alpha\nu} \qquad (4.47)$$

se $\alpha\nu$ - 2 = $\alpha\mu + \lambda \neq 1$. Caso $\alpha\nu$ - 1 = 0 não há restrição quanto ao valor de $\beta(0)$.

Essa última relação, quando empregamos $\alpha = \dfrac{2+\lambda}{\nu-\mu}$, assume a forma

$$\beta_0^{\nu-\mu} = \frac{h(\mu-\nu)}{D(2+\lambda)\nu}\,. \qquad (4.48)$$

Em geral, $\beta_0 > 0$, caso contrário $\beta_0^{\nu-\mu}$ não seria real para ν e μ arbitrários. Tal condição impõe uma interdependência entre os parâmetros em (4.48), de modo que a solução, eq.(4.9), possa ser escrita como

$$\rho(x,t) = \left(\frac{h(\mu-\nu)}{D(2+\lambda)\nu}\right)^{\frac{1}{\nu-\mu}} |x|^{\frac{2+\lambda}{\nu-\mu}}\,. \qquad (4.49)$$

Nessa solução os parâmetros devem ainda ser tais que as condições $\alpha \neq \alpha\nu$ - 2 e $\alpha \neq \alpha\mu + \lambda$ sejam satisfeitas.

iv) No entanto, se considerarmos $|x|^{\alpha}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ linearmente dependentes ($\alpha = \alpha\mu + \lambda$) e independentes de $|x|^{\alpha\nu-2}$ ($\alpha \neq \alpha\nu - 2$ e $\alpha\mu + \lambda \neq \alpha\nu - 2$), verificamos que

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta(t)}{dt} - h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu} = 0 & \qquad (4.50) \\ D\beta^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu - 1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{ou} \\ \alpha = 1/\nu. \end{cases} & \qquad (4.51) \end{cases}$$

Da eq. (4.50) obtemos, quando $\beta_0^{1-\mu} \geq 0$ ($\beta_0 = \beta(0)$) e $\mu \neq 1$,

$$\beta(t) = \left[\beta_0^{1-\mu} + (1-\mu)h(\lambda + 1 + \alpha\mu)t\right]^{\frac{1}{1-\mu}} \qquad (4.52)$$

e em particular se $\mu = 1$

$$\beta(t) = \beta_0 e^{h(\alpha+\lambda+1)t}. \qquad (4.53)$$

Por sua vez, a condição $\alpha = \alpha\mu + \lambda$ conjuntamente com (4.51) conduzem a $\alpha = \lambda = 0$ ou $\alpha = 1/\nu$ com $\mu = 1 - \lambda\nu$.

Esses resultados devidamente combinados fornecem as soluções:

a) No caso $\alpha = \lambda = 0$, segue que

$$\begin{cases} \rho(x,t) = \left[\beta_0^{1-\mu} + (1-\mu)ht\right]^{\frac{1}{1-\mu}} & \text{se } \mu \neq 1, \qquad (4.54) \\ \rho(x,t) = \beta_0 e^{ht}, & \text{se } \mu = 1 \qquad (4.55) \end{cases}$$

b) No caso $\alpha = 1/\nu$ com $\mu = 1 - \lambda\nu$ e $\nu \neq -1$, vê-se que

$$\begin{cases} \rho(x,t) = \left[\beta_0^{1-\mu} + (1-\mu)h\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)t\right]^{\frac{1}{1-\mu}} |x|^{\frac{1}{\nu}} & \text{se } \mu \neq 1, \qquad (4.56) \\ \rho(x,t) = \beta_0 e^{h\left(1+\frac{1}{\nu}\right)t} |x|^{\frac{1}{\nu}}, & \text{se } \mu = 1. \qquad (4.57) \end{cases}$$

Na possibilidade b), a condição $\nu \neq -1$ surge porque $\alpha \neq \alpha\nu - 2$.

v) Por fim, quando $|x|^{\alpha}$, $|x|^{\alpha\nu-2}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ forem linearmente dependentes, teremos

$$\frac{d\beta(t)}{dt} - h(\alpha\mu + \lambda + 1)\beta(t)^{\mu} - D\beta(t)^{\nu}\alpha\nu(\alpha\nu - 1) = 0 \qquad (4.58)$$

e

$$\alpha = \alpha\mu + \lambda = \alpha\nu - 2. \qquad (4.59)$$

Da eq. (4.59) verificamos que $\alpha = \dfrac{2}{\nu - 1}$ e $\mu = \dfrac{2 + \lambda(1-\nu)}{2}$. Assim, a eq. (4.58) pode ser escrita como

$$\frac{d\beta(t)}{dt} - h\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)\beta(t)^{\frac{2+\lambda(1-\nu)}{2}} - D\left[\frac{2\nu(\nu+1)}{(\nu-1)^2}\right]\beta(t)^{\nu} = 0. \qquad (4.60)$$

Se μ = ν, verificamos que $\lambda = -2$ e a eq. (4.60) fica simplificada, conduzindo a

$$\frac{d\beta(t)}{dt} - \left[h + \frac{2D\nu}{\nu-1}\right]\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)\beta(t)^{\nu} = 0, \qquad (4.61)$$

que leva a

$$\beta(t)^{1-\nu} - \beta(0)^{1-\nu} = \left[-h + \frac{2D\nu}{1-\nu}\right](\nu+1)\, t. \qquad (4.62)$$

Essa equação é análoga à eq. (4.18) e fornece

$$\beta(t) = \left[\beta(0)^{1-\nu} + \left(-h + \frac{2D\nu}{1-\nu}\right)(\nu+1)\, t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} \qquad (4.63)$$

que é reduzida a

$$\beta(t) = \left[\left(-h + \frac{2D\nu}{1-\nu}\right)(\nu+1)\, t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} \qquad (4.64)$$

no caso de $\beta(0)^{1-\nu}$ = 0, com $\nu \neq 1$. Conseqüentemente, a partir da eq. (4.9) obtemos

$$\begin{cases} \rho(x,t) = |x|^{\frac{2}{\nu-1}}\left[\beta(0)^{1-\nu} + \left(-h + \dfrac{2D\nu}{1-\nu}\right)(\nu+1)\, t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} & (4.65) \\ \rho(x,t) = |x|^{\frac{2}{\nu-1}}\left[\left(-h + \dfrac{2D\nu}{1-\nu}\right)(\nu+1)\, t\right]^{\frac{1}{1-\nu}} \text{ se } \beta(0)^{\nu-1} = 0. & (4.66) \end{cases}$$

Outro caso que ocorre simplificação da eq. (4.60) é quando $\dfrac{2 + \lambda(1-\nu)}{2} = 1$, implicando λ = 0 se $\nu \neq 1$, que corresponde ao caso do oscilador harmônico. O caso $\nu = 1$ é incompatível com $\alpha = \alpha\nu - 2$.

No caso geral, podemos escrever a eq. (4.60) como

$$\int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \frac{d\beta}{h\left(\dfrac{1+\nu}{\nu-1}\right)\beta^{\frac{2+\lambda(1-\nu)}{2}} + D\left[\dfrac{2\nu(1+\nu)}{(\nu-1)^2}\right]\beta^{\nu}} = \int_0^t dt. \qquad (4.67)$$

Geralmente, se conseguirmos calcular a integral em β, não teremos êxito em obter uma forma explícita para $\beta(t)$. Por exemplo se $\frac{2+\lambda(1-\nu)}{2}=2$ e $\nu=3$, a eq. (4.67) fornece

$$\left.\frac{1}{h\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)\beta(t)}+\frac{D\left[\frac{2\nu(\nu+1)}{(\nu-1)^2}\right]\ln\beta(t)-D\left[\frac{2\nu(\nu+1)}{(\nu-1)^2}\right]\ln\left\{-h\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)-D\left[\frac{2\nu(\nu+1)}{(\nu-1)^2}\right]\beta(t)\right\}}{\left[h\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)\right]^2}\right|_{\beta(0)}^{\beta(t)}=t, \tag{4.68}$$

mostrando que $\beta(t)$ é obtida apenas como uma função implícita de t. Num caso mais geral em que $\nu > 1$ e $\mu > 1$, consegue-se apenas escrever uma relação entre t e $\beta(t)$ que envolve função hipergeométrica. Nessa situação, pode-se mostrar que $\beta(t)$ apresenta dois regimes característicos que seguem duas leis de potência [22,23].

4.5 Caso estacionário

No final do capítulo 3 (subseção 3.2.6) estudamos as soluções estacionárias quando $\rho\,(x,t) \to 0$ com $x \to \pm\infty$. Nesse caso, verificamos que a equação não-linear de Fokker-Planck ficava reduzida a

$$D\frac{d\rho^{\nu}(x)}{dx}-f(x)\rho(x)=0, \tag{4.69}$$

que é a eq. (3.75) com a *cte* nula. A solução obtida para essa equação foi

$$\rho(x)=\rho(0)\left[1-\left(\frac{\nu-1}{D\nu}\right)\rho(0)^{1-\nu}V(x)\right]^{\frac{1}{\nu-1}} \tag{4.70}$$

com

$$V(x)=-\int_0^x f(x')dx'. \tag{4.71}$$

Se considerarmos o caso no qual a força de arraste aparece na equação não-linear de Fokker-Planck, por meio do termo $-\frac{\partial f(x)\rho(x)^{\mu}}{\partial x}$, a equação correspondente a eq. (4.69) será

$$D\frac{d\rho^{\nu}(x)}{dx} - f(x)\rho(x)^{\mu} = 0\,. \qquad (4.72)$$

A sua solução é exatamente da forma da eq. (4.70). De fato, ao empregarmos $R = \rho^{\mu}$ a eq. (4.72) assume a forma da eq. (4.69), porém com ρ substituído por R e ν por $\frac{\nu}{\mu}$, pois $\rho^{\nu} = R^{\frac{\nu}{\mu}}$. Conseqüentemente, temos

$$R(x) = R(0)\left[1 - \left(\frac{\frac{\nu}{\mu} - 1}{D\frac{\nu}{\mu}}\right) R(0)^{1-\frac{\nu}{\mu}} V(x)\right]^{\frac{1}{\frac{\nu}{\mu}-1}} \qquad (4.73)$$

e, portanto,

$$\rho(x) = \rho(0)\left[1 - \left(\frac{\nu - \mu}{D\nu}\right)\rho(0)^{\mu-\nu} V(x)\right]^{\frac{1}{\nu-\mu}}. \qquad (4.74)$$

Se $f(x) = -h|x|^{\lambda} x$, concluímos que $V(x) = \frac{h|x|^{\lambda+2}}{\lambda+2}$ e daí

$$\rho(x) = \rho(0)\left[1 - \left(\frac{\nu - \mu}{D\nu}\right)\rho(0)^{\mu-\nu} \frac{h|x|^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right]^{\frac{1}{\nu-\mu}}. \qquad (4.75)$$

Quando $\nu < \mu$ e $D\nu > 0$ a eq. (4.75) possui um comportamento assintótico tipo lei de potência que é

$$\rho(x) \sim \left(\frac{\mu - \nu}{D\nu}\right)\left(\frac{h}{\lambda+2}\right)|x|^{\frac{\lambda+2}{\nu-\mu}}. \qquad (4.76)$$

Por outro lado, se empregássemos um *ansatz* para chegar a essa situação, ele seria da forma

$$\rho(x) = A|x|^{\alpha}, \qquad (4.77)$$

onde A e α são constantes. Por sua vez, $\rho(x)$ substituído na eq. (4.72), fornece

$$DA^{\nu}\alpha\nu|x|^{\alpha\nu-1} Sgn(x) + hA^{\mu}|x|^{\alpha\mu+\lambda} x = 0$$

que leva a

$$DA^{\nu}\alpha\nu|x|^{\alpha\nu-2}+hA^{\mu}|x|^{\alpha\mu+\lambda}=0\,. \qquad (4.78)$$

As possíveis soluções dessa equação dividem-se em dois grupos.

i) Quando $|x|^{\alpha\nu-2}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ são linearmente independentes ($\alpha\nu$ - 2$\neq\alpha\mu$ + λ), vemos que

$$\begin{cases} DA^{\nu}\alpha\nu=0 & (4.79) \\ hA^{\mu}=0 \quad\Rightarrow\quad A^{\mu}=0\,. & (4.80) \end{cases}$$

Isso mostra que este caso fornece apenas uma solução trivial, $\rho(x)=0$.

ii) Se $|x|^{\alpha\nu-2}$ e $|x|^{\alpha\mu+\lambda}$ são linearmente dependentes ($\alpha\nu$ - 2=$\alpha\mu$ + λ), verificamos que

$$DA^{\nu}\alpha\nu+hA^{\mu}=0\,. \qquad (4.81)$$

Portanto, $\alpha=\dfrac{2+\lambda}{\nu-\mu}$ e

$$A^{\nu-\mu}=-\frac{h}{\alpha\nu D}=\frac{h(\mu-\nu)}{D(2+\lambda)\nu}\,. \qquad (4.82)$$

Esses resultados inseridos no *ansatz* (4.77) dão

$$\rho(x)=\left(\frac{h(\mu-\nu)}{D(2+\lambda)\nu}\right)^{\frac{1}{\nu-\mu}}|x|^{\frac{2+\lambda}{\nu-\mu}}\,. \qquad (4.83)$$

Como podemos perceber, esse resultado coincide com o comportamento assintótico (4.76).

Apesar de não conhecermos a expressão exata para $\rho(x,t)$ quando $f(x)=-h|x|^{\lambda}x$, conhecemos seu comportamento assintótico no caso estacionário: eq. (4.83). Assim, uma comparação com os resultados oriundos da seção (4.4) mostra que a única daquelas soluções que fornece o comportamento assintótico correspondente ao caso estacionário é a do item iii).

4.6 Um ansatz mais geral

Encerraremos este capítulo considerando um outro tipo de *ansatz*, que contém o gaussiano generalizado e o tipo lei de potência como casos particulares. Esse *ansatz* é

$$\rho(x,t)=\frac{1}{\Phi(t)}P\left(\frac{x}{\Phi(t)}\right). \qquad (4.84)$$

Nesse caso, $\Phi(t)$ e $P(y)$ com $y=\frac{x}{\Phi(t)}$ são funções a determinar. Se $P(y)\propto \exp_q(-y^2)$ ou $P(y)\propto |y|^{\alpha}$, recaímos em situações anteriores. Além disso, se $\Phi(t\to\infty)=cte$, chegamos a uma solução estacionária. Notemos que $\Phi(t)$ corresponde a $Z(t)$ no *ansatz* (3.6).

Agora vamos substituir o *ansatz* (4.84) na equação de Fokker-Planck não-linear

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho^{\nu}}{\partial x^2}-\frac{\partial(f\rho^{\mu})}{\partial x} \qquad (4.85)$$

com $f(x)=-h|x|^{\lambda}x$.

Para tal, usemos $y=\frac{x}{\Phi(t)}$ e observemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}&=-\left[P(y)+y\frac{dP(y)}{dy}\right]\frac{1}{\Phi(t)^2}\frac{d\Phi(t)}{dt}\\ &=-\frac{d(yP(y))}{dy}\frac{1}{\Phi(t)^2}\frac{d\Phi(t)}{dt}, \end{aligned} \qquad (4.86)$$

$$\frac{\partial\rho(x,t)^{\nu}}{\partial x}=\frac{1}{\Phi(t)^{\nu+1}}\frac{dP(y)^{\nu}}{dy}, \qquad (4.87)$$

$$\frac{\partial^2\rho(x,t)^{\nu}}{\partial x^2}=\frac{1}{\Phi(t)^{\nu+2}}\frac{d^2P(y)^{\nu}}{dy^2}, \qquad (4.88)$$

$$\frac{\partial(f(x)\rho(x,t)^{\mu})}{\partial x}=-\frac{1}{\Phi(t)^{\mu-\lambda}}\frac{d}{dy}(h|y|^{\lambda}yP(y)^{\mu}). \qquad (4.89)$$

Esses resultados substituídos na eq. (4.85) conduzem a

$$\frac{d(yP(y))}{dy}\Phi(t)^{-2}\frac{d\Phi(t)}{dt}+D\frac{d^2P(y)^{\nu}}{dy^2}\Phi(t)^{-(2+\nu)}+h\frac{d(|y|^{\lambda}yP(y)^{\mu})}{dy}\Phi(t)^{\lambda-\mu}=0. \qquad (4.90)$$

Como já dissemos, se considerarmos $P(y) \propto |y|^{\alpha}$, recuperamos o *ansatz* (4.9) e a partir disso podemos refazer toda a análise da seção anterior. No que segue, enfocaremos possíveis soluções de (4.90) via separação de variáveis.

4.6.1 Caso sem fonte e força externa

Passemos a investigar alguns casos particulares da eq. (4.90). Quando h = 0, verificamos que a equação anterior corresponde a ausência de força externa, isto é,

$$\frac{d(yP(y))}{dy}\frac{d\Phi(t)}{dt} + D\frac{d^2P(y)^{\nu}}{dy^2}\Phi(t)^{-\nu} = 0\,, \tag{4.91}$$

que pode ser escrita como

$$\Phi(t)^{\nu}\frac{d\Phi(t)}{dt} = -D\frac{d^2P(y)^{\nu}}{dy^2}\bigg/\frac{d(y(P(y))}{dy}\,. \tag{4.92}$$

Devido a esta separação de variáveis, notamos que

$$\Phi(t)^{\nu}\frac{d\Phi(t)}{dt} = k \qquad (k = cte) \tag{4.93}$$

e

$$D\frac{d^2P(y)^{\nu}}{dy^2} = -k\frac{d(y(P(y))}{dy}\,. \tag{4.94}$$

A eq. (4.93) nos fornece

$$\frac{\Phi(t)^{1+\nu} - \Phi(0)^{1+\nu}}{1+\nu} = kt \tag{4.95}$$

e daí

$$\Phi(t) = \left(\Phi(0)^{1+\nu} + kt(1+\nu)\right)^{\frac{1}{1+\nu}}\,. \tag{4.96}$$

Por sua vez, a eq. (4.94) na forma

$$\frac{d}{dy}\left(D\frac{dP(y)^{\nu}}{dy} + kyP(y)\right) = 0 \tag{4.97}$$

leva a

$$D\frac{dP(y)^{\nu}}{dy} = -kyP(y) + k_1 \tag{4.98}$$

com k_1 sendo outra constante de integração. Se k_1 = 0, temos

$$\frac{dP(y)^{\nu}}{dy} = -\frac{k}{D} yP(y), \tag{4.99}$$

e usando $R(t) = P(t)^{\nu}$ vemos que

$$\frac{R(y)^{1-\frac{1}{\nu}} - R(0)^{1-\frac{1}{\nu}}}{1 - 1/\nu} = -\frac{k}{D} y^2, \tag{4.100}$$

ou seja,

$$P(y) = \left[P(0)^{\nu-1} - \left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \frac{k}{D} y^2 \right]^{\frac{1}{\nu-1}}. \tag{4.101}$$

Na solução (4.101) podemos supor $P(0)^{\nu-1} \neq 0$ ou $P(0)^{\nu-1} = 0$. A primeira possibilidade fornece a gaussiana-q (com $q = 2 - \nu$)

$$P(y) = P(0) \left[1 - \left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \frac{k}{D} P(0)^{1-\nu} y^2 \right]^{\frac{1}{\nu-1}} \tag{4.102}$$

e no limite $\nu \to 1$, obtemos a gaussiana $P(y) = P(0) e^{-\frac{k}{D} y^2}$. Essas funções poderão ser normalizadas somente se $\left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \frac{k}{D} > 0 \ (< 0)$ e $\nu < 1 \, (> 1)$, que assumiremos. Isso recuperou o *ansatz* (3.6). Ademais, enfatizamos que as constantes $P(0)$ e k devem ser ajustadas a partir das condições iniciais. Por sua vez, a segunda possibilidade ($P(0)^{\nu-1} = 0$) implica

$$P(y) = P(0) \left[-\left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \frac{k}{D} \right]^{\frac{1}{\nu-1}} |y|^{\frac{2}{\nu-1}}, \tag{4.103}$$

que resgata o *ansatz* (4.9). Não deve haver dúvidas que o uso das soluções (4.96), (4.102) e (4.103) conduzem, após redefinições de constantes, às soluções (3.19) e (4.21).

4.6.2 Caso com força externa linear

Se $\lambda = 0$, $\mu = 1$ e $h = \gamma$, trata-se de um oscilador harmônico como na eq. (3.38). Isso faz com que a eq. (4.90) seja

$$\frac{d(yP(y))}{dy} \left(\Phi(t)^{-1} \frac{d\Phi(t)}{dt} + \gamma \right) + D \frac{d^2 P(y)^{\nu}}{dy^2} \Phi(t)^{-(1+\nu)} = 0, \tag{4.104}$$

que pode ser apresentada como

$$\Phi(t)^{1+\nu}\left(\Phi(t)^{-1}\frac{d\Phi(t)}{dt}+\gamma\right)=-D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2}\Bigg/\frac{d(y(P(y))}{dy}\ . \qquad (4.105)$$

Essa separação de variáveis mostra que

$$\Phi(t)^{1+\nu}\left(\Phi(t)^{-1}\frac{d\Phi(t)}{dt}+\gamma\right)=k \qquad (k = cte) \qquad (4.106)$$

e

$$D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2}=-k\frac{d(y(P(y))}{dy}\ . \qquad (4.107)$$

A eq. (4.107) é simplesmente a eq. (4.94) e por isso nomeamos as constantes em (4.93) e (4.106) com o mesmo símbolo. Assim, a dependência em y $\left(y=\frac{x}{\Phi(t)}\right)$ é a mesma tanto no caso sem força externa, quanto com força linear. Portanto, reobtemos o *ansatz* gaussiano-q e o tipo de lei de potência quando $\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{k}{D}>0\ \ (<0)$ e $\nu<1\,(>1)$. Em constraste, a eq. (4.106) é diferente da eq. (4.93) e é justamente isso que distingue o caso sem força externa do caso com força externa linear. Deve ficar claro que esta afirmação se aplica quando estamos investigando situações que o centro da distribuição $\rho(x,t)$ ocorre em $x = 0$, por exemplo, como no *ansatz* (3.28) com $x_c(t) = 0$. Passemos agora à eq. (4.106),

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}=-\gamma\Phi(t)+k\Phi(t)^{-\nu}, \qquad (4.108)$$

que é do tipo Bernoulli e que já tratamos várias vezes neste trabalho. Sua solução é

$$\Phi(t)=\Phi(0)\left[\frac{k}{\gamma}\Phi(0)^{-(\nu-1)}+(1-\frac{k}{\gamma}\Phi(0)^{-(\nu-1)})e^{-(\nu-1)\gamma t}\right]^{\frac{1}{\nu+1}}. \qquad (4.109)$$

Essa solução, juntamente com $P(y)$ (eqs. (4.102) e (4.103)), o *ansatz* (4.84), e redefinições convenientes das constantes ($P(0)$, $\Phi(0)$ e k) conduzem às soluções (3.58) com $x_0 = 0$ e (4.34).

4.6.3 Caso com força externa do tipo oscilador anarmônico

Agora dediquemos à situação geral, a eq. (4.90). Para esta equação não conseguimos fazer uma separação de variáveis. Como vimos, a partir dos dois exemplos anteriores, uma separação de variáveis é possível se conseguirmos efetivamente colocar a eq. (4.90) na forma de dois termos e não na forma de três como ela é. Consideremos situações particulares nas quais conseguimos agrupar a eq. (4.90) em dois termos.

i) Primeiro, isto é possível no caso estacionário, $\Phi(t \to \infty) = \Phi_0 = cte$. Daí, a eq. (4.90) resume-se a

$$D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2}\Phi_0^{-(2+\nu)} + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy}\Phi_0^{\lambda-\mu} = 0 \quad . \tag{4.110}$$

Ao integrarmos uma vez esta equação, obtemos

$$D\frac{dP(y)^\nu}{dy} + \Phi_0^{\lambda-\mu+\nu+2}h|y|^\lambda yP(y)^\mu = k_3 \tag{4.111}$$

com k_3 = *cte*. Se k_3 = 0, a eq. (4.111) fica com a mesma forma da eq. (4.72) quando $f(x) = -h|x|^\lambda x$. Portanto, a partir da solução da eq. (4.111), após uma redefinição de constantes, chega-se a (4.75) e (4.83).

ii) Uma outra maneira de reagrupar a eq. (4.90) em dois termos é supor que $\Phi(t)^{-(2+\nu)} = \Phi(t)^{\lambda-\mu}$, ou seja, - (2 + ν) = λ - μ que implica

$$\mu = 2 + \nu + \lambda \quad . \tag{4.112}$$

Dessa forma, verificamos que

$$\frac{d(yP(y))}{dy}\Phi(t)^{-2}\frac{d\Phi(t)}{dt} + \left[D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2} + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy}\right]\Phi(t)^{-(2+\nu)} = 0 \tag{4.113}$$

e daí

$$\Phi(t)^\nu\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\left[D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2} + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy}\right]\Bigg/\frac{d(yP(y))}{dy} \; . \tag{4.114}$$

Com essa separação de variáveis, a eq. (4.114) é desdobrada nas equações

$$\Phi(t)^\nu\frac{d\Phi(t)}{dt} = k \qquad (k = cte) \tag{4.115}$$

e

$$D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2} + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy} = -k\frac{d(yP(y))}{dy} \; . \tag{4.116}$$

A eq. (4.115) é exatamente a (4.93), cuja solução é a eq. (4.96), que é a dependência temporal do caso sem força externa. Por outro lado, a eq. (4.116) pode ser escrita, após uma integração, como

$$\frac{dP(y)^{\nu}}{dy} = -\frac{k}{D} yP(y)^{\nu} - \frac{h}{D}|y|^{\lambda} yP(y)^{\mu} + k_4 \tag{4.117}$$

com $k_4 = cte$. Se $k_4 = 0$ e $R(y) = P(y)^{\nu}$, a eq. (4.117) é uma equação de Bernoulli:

$$\frac{dR(y)}{dy} = -\frac{k}{D} yR(y) - \frac{h}{D}|y|^{\lambda} yR(y)^{\frac{\mu}{\nu}} . \tag{4.118}$$

Cuja solução pode ser obtida de

$$R(y)^{1-n} e^{(1-n)\int_0^y W(y')dy'} = (1-n)\int_0^y Q(\tilde{y}) e^{(1-n)\int_0^{\tilde{y}} W(y')dy'} d\tilde{y} + R(0)^{1-n} \tag{4.119}$$

com $n = \frac{\mu}{\nu}$, $W(y) = \frac{k}{D} y$ e $Q(y) = -\frac{h}{D}|y|^{\lambda} y$, isto é,

$$R(y) = \left\{ \left[R(0)^{1-\frac{\mu}{\nu}} - \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) \frac{h}{D} \int_0^y |\tilde{y}|^{\lambda} \tilde{y}\, e^{\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\frac{k}{2D}\tilde{y}^2} d\tilde{y} \right] e^{\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\frac{k}{2D} y^2} \right\}^{\frac{1}{1-\frac{\mu}{\nu}}} \tag{4.120}$$

e

$$P(y) = \left\{ \left[P(0)^{\nu-\mu} - \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) \frac{h}{D} \int_0^y \tilde{y}^{\lambda+1} \tilde{y}\, e^{\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\frac{k}{2D}\tilde{y}^2} d\tilde{y} \right] e^{\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\frac{k}{2D} y^2} \right\}^{\frac{1}{\nu-\mu}} . \tag{4.121}$$

A integral em (4.121) pode ser calculada exatamente se λ for par, por exemplo, empregando $z = \tilde{y}^2$ como nova variável de integração. Num caso geral, λ não par, essa integral em termos de z conduzirá a uma função especial, essencialmente uma função gama incompleta. Ressaltamos que a solução (4.121) é diferente de qualquer uma daquelas que obtivemos anteriormente.

iii) Façamos agora

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \xi\, \Phi(t)^{-\nu} \qquad (\xi = cte) \tag{4.122}$$

e com isso a eq. (4.90) fica reduzida a

$$\left[\frac{d(yP(y))}{dy} \xi + D \frac{d^2 P(y)^{\nu}}{dy^2} \right] \Phi(t)^{-(2+\nu)} + h \frac{d(|y|^{\lambda} yP(y)^{\mu})}{dy} \Phi(t)^{\lambda-\mu} = 0 . \tag{4.123}$$

Conseqüentemente, chegamos a uma separação de variáveis:

$$\frac{\Phi(t)^{\lambda-\mu}}{\Phi(t)^{-(2+\nu)}} = -\left[\frac{d(yP(y))}{dy} \xi + D \frac{d^2 P(y)^{\nu}}{dy^2} \right] \Bigg/ \left[h \frac{d(|y|^{\lambda} yP(y)^{\mu})}{dy} \right] . \tag{4.124}$$

Portanto,

$$\frac{\Phi(t)^{\lambda-\mu}}{\Phi(t)^{-(2+\nu)}} = k_5 \qquad (k_5 = cte) \qquad (4.125)$$

e

$$\frac{d(yP(y))}{dy}\xi + D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2} = -k_5 h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy}. \qquad (4.126)$$

Se $\lambda-\mu \neq -(2+\nu)$, concluímos que $\Phi(t)$ é constante, logo recai-se em $\frac{d\Phi}{dt}=0$ e a eq. (4.122) leva a $\Phi=0$ se $\xi \neq 0$ e $\nu \neq 0$. Se $\xi = 0$, temos o caso estacionário discutido no penúltimo ítem.

iv) Resta-nos analisar a possibilidade relacionada a hipótese

$$\Phi(t)^{-2}\frac{d\Phi(t)}{dt} = \zeta\ \Phi(t)^{\lambda-\mu} \qquad (\zeta = cte), \qquad (4.127)$$

que leva a eq (4.90) a

$$\left[\frac{d(yP(y))}{dy}\zeta + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy}\right]\Phi(t)^{\lambda-\mu} + D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2}\Phi(t)^{-(2+\nu)} = 0, \qquad (4.128)$$

ou seja,

$$\frac{\Phi(t)^{-(2+\nu)}}{\Phi(t)^{\lambda-\mu}} = -\left[\frac{d(yP(y))}{dy}\zeta + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy}\right]\Bigg/ D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2}. \qquad (4.129)$$

Isto nos mostra que

$$\frac{\Phi(t)^{-(2+\nu)}}{\Phi(t)^{\lambda-\mu}} = k_6 \qquad (k_6 = cte), \qquad (4.130)$$

e

$$\frac{d(yP(y))}{dy}\zeta + h\frac{d(|y|^\lambda yP(y)^\mu)}{dy} = -k_6 D\frac{d^2P(y)^\nu}{dy^2}. \qquad (4.131)$$

A eq. (4.130) revela que $\Phi(t)$ é constante se $-(2+\nu) \neq \lambda - \mu$. Nessa situação, a eq. (4.127) com $\zeta \neq 0$ e $\lambda - \mu + 2 > 0$ faz com que $\Phi(t) = 0$. Por outro lado, se $\zeta = 0$, $\Phi(t)$ poderá ser uma constante não nula e somos levados novamente ao caso estacionário. Por fim, se $-(2+\nu) = \lambda - \mu$, vemos que $k_6 = 1$ e $\mu = \nu + \lambda + 2$, além disso, as eqs. (4.127) e (4.131) ficam reduzidas as eqs. (4.115) e (4.116), respectivamente, ao usar $\zeta = k$.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho apresentamos algumas soluções exatas da equação de difusão em meios porosos: na ausência de força externa, na presença de força externa constante, linear e combinação delas, com a presença de termo de fonte (sorvedouro) quando a solução é dependente do tempo e da coordenada espacial. Também, para uma força genérica independente do tempo analisamos a solução estacionária. Além de meios porosos e outros contextos, a equação de difusão anômala tem sido relacionada à mecânica não extensiva de Tsallis. Motivados por essa última aplicação e o paralelo com a mecânica estatística usual (extensiva), a equação de difusão em questão é denominada, muitas vezes, por equação de Fokker-Planck não-linear e foi a mais empregada no decorrer de nossa discussão.

Antes de passarmos para as conclusões obtidas em nosso estudo, vamos ressaltar alguns aspectos que nortearam a estrutura da apresentação deste escrito. Visando fazer uma exposição que facilitasse a leitura desta produção, esforçamos por realizar uma apresentação auto-contida e detalhada. Isso provavelmente adveio da carência que tivemos de encontrar textos neste estilo envolvendo o tema aqui discutido. Nesse sentido, espera-se que a presente contribuição possa servir de uma leitura inicial para o estudo de soluções exatas de equações empregadas na discussão de difusão anômala. Este texto começa pela apresentação da difusão usual e suas correspondentes equações, passando para a obtenção de soluções exatas nos casos anunciados no início do parágrafo anterior, com ênfase no uso de um *ansatz* gaussiano. A seguir, discutimos brevemente a difusão anômala (caracterizada aqui pelo comportamento não linear no tempo do segundo momento da posição) relacionada à equação de Fokker-Planck não-linear. Neste caso, as soluções via um *ansatz* gaussiano generalizado baseado na exponencial-q de Tsallis soluções foram conseguidas. Ainda nesse contexto, obtivemos soluções exatas tipo lei de potência, incluindo nesta análise uma situação cuja força externa é devido a uma família de osciladores anarmônicos simétricos em relação à origem das coordenadas. Essa classe de osciladores tem como casos particulares o oscilador harmônico (força linear) e o poço quadrado infinito.

A abordagem que antecedeu ao estudo de soluções do tipo lei potência para a equação de Fokker-Planck não-linear foi uma revisão de situações já divulgadas na literatura, em particular, as soluções correspondentes à gaussiana generalizada [13,14]. No nosso entendimento e devido a originalidade, julgamos que esse aspecto de revisão não ocorreu no tocante às soluções exatas tipo lei de potência, das quais tiramos nossas principais conclusões. Algumas dessas soluções podem ser vistas como o comportamento assintótico das que foram obtidas via o *ansatz* gaussiano generalizado. Portanto, há um aspecto dual nelas: o de solução exata e o de comportamento assintótico de uma solução exata. Nesse mesmo sentido, quando usamos como base uma equação de decaimento não-linear, verificamos que a escolha do *ansatz* se desdobra em duas possibilidades que, de partida, são intimamente interconectadas: o *ansatz* gaussiano generalizado e o tipo lei de potência. As demais soluções tipo lei de potência variam desde constante no tempo e na posição, não dependente do tempo, e com dependência mista no tempo e na posição. Quanto à dependência temporal, ela surgiu na forma de constante, lei de potência, exponencial, exponencial-q de Tsallis, comportamento logístico, logístico estendido (equação de Bernoulli) e ainda uma generalização da equação de Bernoulli. Mais precisamente, quando estudamos o caso sem força externa (e sem termo de fonte), a dependência temporal se manifestou de duas maneiras: constante e tipo exponencial-q (incluindo lei de potência). Para o oscilador harmônico, a parte temporal pode ser do tipo exponencial e solução da equação de Bernoulli. No que se refere à família de osciladores anarmônicos, surgiram todas as possibilidades apresentadas acima de dependência temporal, pois essa classe tem as situações anteriores como casos particulares. A dependência temporal que contém uma generalização da equação de Bernoulli, em geral, não pode ser explicitada, pois em determinados casos envolveria a inversão de funções hipergométricas para explicitar a dependência temporal [22,23]. Quando exploramos apenas as situações estacionárias, uma solução exata pode ser obtida diretamente em termos da energia potencial. Por sua vez, o uso de um *ansatz* tipo lei de potência conduziu consistentemente ao comportamento assintótico da solução exata. Encerramos as investigações do capítulo anterior empregando um *ansatz* suficientemente geral de forma a conter os outros dois discutidos neste trabalho como casos particulares. Portanto, em tal situação, revisitamos os casos anteriores e, conseqüentemente, as equações com as quais tratamos foram basicamente do tipo Bernoulli. Com isso, encontramos apenas uma situação que difere das obtidas previamente.

Agora, destacaremos possíveis vertentes para dar continuidade à investigação desenvolvida neste trabalho. A primeira delas é tentar obter soluções na forma de uma série assintótica, que tomaria a solução tipo lei de potência como o termo dominante da série. Isso faria com que pudéssemos, num estágio preliminar, recuperar soluções como as obtidas através do *ansatz* gaussiano generalizado e posteriormente, chegar a soluções para situações não triviais como as que envolvem osciladores anarmônicos. A segunda vertente seria investigar outras equações diferenciais relacionadas à difusão anômala, tentando obter soluções tipo lei de potência. Essas equações [24-28] podem ser não-lineares e com derivadas fracionárias. Por fim, o objetivo maior seria incorporar essas possibilidades para investigar equações empregadas na descrição da difusão anômala via séries assintóticas.

Referências Bibliográficas

[1] C. Tsallis. *As Distribuições de Lévy*. Revista Brasileira de Ensino de Física, **22**:156, (2000).

[2] S. K. Ma. *Statistical Mechanics.* World Scientific, Singapore, 1985.

[3] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, New York, 1984.

[4] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*, second edition. John Wiley & Sons Inc, New York, 1997.

[5] T. Tomé e M. J. Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, São Paulo, 2001.

[6] D. G. Aronson. *The Porous Medium Equation*. *In: Nonlinear Diffusion Problem, Lecture Notes in Mathematics*, **1224**:1, (1986).

[7] H. Spohn. *Surface Dynamics Below the Roughening Transition*. J. Phys. (France) I, **3**:69, (1993).

[8] J. G. Berryman. *Evolution of a Stable Profile for a Class of Nonlinear Diffusion Equations With Fixed Boundaries*. J. Math. Phys., **18**:2108, (1997).

[9] M. Muskat. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media.* McGraw-Hill, New York, 1937.

[10] J. Buckmaster. *Viscous Sheets Advancing Over Dry Beds*. J. Fluid Mech., **81**:735, (1977).

[11] M. E. Gurtin and R. C. Mac Camy. *On the Diffusion of Biological Populations.* Math. Biosciences, **33**:35, (1977).

[12] J. M. Carlson, E. R. Grannan, C. Singh and G. H. Swindle. *Fluctuations in Self-organizing Systems.* Phys. Rev. E, **48**:688, (1993).

[13] A. R. Plastino and A. Plastino. *Non-equilibrium Thermodinamics and Anomalous Diffusion.* J. Phys. A, **29**:4321, (1996).

[14] C. Tsallis and D. J. Bukman. *Anomalous Diffusion in the Presence of External Forces: Exact Time-dependent Solutions and Their Thermostatistical Basis*. Phys. Rev. E, **54**:R2197, (1996).

[15] L. Borland. *Microscopic Dynamics of the Nonlinear Fokker-Planck Equation: A Phenomenological Model*. Phys. Rev. E, **57**:6634, (1998).

[16] L. Borland, F. Pennini, A. R. Plastino and A. Plastino. *The Nonlinear Fokker-Planck Equations with State-dependent Diffusion – A Nonextensive Maximum Entropy Approach*. Eur. Phys. J. B, **12**:285, (1999).

[17] C. Tsallis. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. J. Stat. Phys., **52**:479, (1988).

[18] E. M. F. Curado and C. Tsallis. *Generalized statistical-mechanics – connection with thermodynamics*. J. Phys. A, **24**:L69, (1991). Corrigenda: **24**:3187 (1991) and **25**:1019 (1992).

[19] C. Tsallis, R. S. Mendes, and A. R. Plastino. *The role of constraints within generalized nonextensive statistics*. Physica A, **261**:534, (1998).

[20] W. E. Boyce e R. C. Di Prima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Editora Guanabara Koogan S. A., Rio de Janeiro, 1994.
[21] M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schaum. McGRAW-HILL. São Paulo, 1973.
[22] C. Tsallis, G. Bemski, and R. S. Mendes. *Is re-association in folded proteins a case of nonextensivity?*. Physics Letters A, **93**:257, (1999).
[23] S. Picoli Jr., R. S. Mendes and L. C. Malacarne, *q-exponencial, Weibull, and q-Weibull distributions: and empirical analysis*. Physica A, **678**:324, (2003).
[24] L. C. Malacarne, R. S. Mendes, I. T. Pedron, and E. K. Lenzi. *Nonlinear equation for anomalous diffusion: Unified power-low and stretched exponential exact solution*. Phys. Rev. E, **63**:030101(R), (2001).
[25] I. T. Pedron, R. S. Mendes, L. C. Malacarne, and E. K. Lenzi. *Nonlinear anomalous diffusion equation and fractal dimension: Exact generalized gaussian solution*. Phys. Rev. E, **65**:41108, (2002).
[26] L. C. Malacarne, R. S. Mendes, I. T. Pedron, and E. K. Lenzi. N-dimensional nonlinear Fokker-Planck equation with time-dependent coe-cients. Phys. Rev. E, **65**:52101, (2002).
[27] E. K. Lenzi, R. S. Mendes, L. C. Malacarne, and I. T. Pedron. *Anomalous diffusion, nonlinear fractional Fokker-Planck equation and solutions*. Physica A, **319**:245, (2003).
[28] I. T. Pedron. *Estudos em Difusãso Anômala.* Tese de doutorado. Departamento de Física. Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2003.