

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
MESTRADO EM ENGENHARIA QUÍMICA

SECAGEM DE GELATINA
"ANÁLISE DO PERFIL DE CONCENTRAÇÃO E
TEMPERATURA NO INTERIOR DO GEL"

Edson Antonio da Silva

Eng. Químico, UEM , 1991

Orientador: Prof. Luiz Henry Monken e Silva

Co-orientador: Prof. Ivo Neitzel

Dissertação de mestrado submetida à
Fundação Universidade Estadual de Maringá,
como parte da obtenção do grau de mestre em
Engenharia Química.

Maringá-Pr
1995

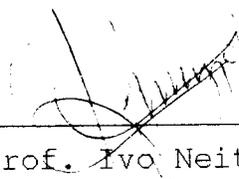
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA

Esta é a versão definitiva da dissertação de Mestrado submetida por Edson Antonio da Silva, à Comissão Julgadora do Curso de Mestrado em Engenharia Química em 07 de dezembro de 1995.

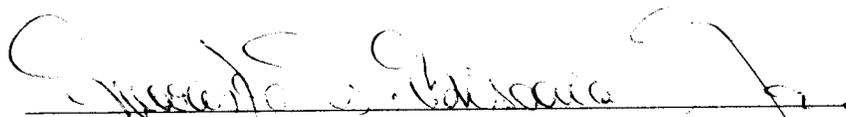
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Luiz Henry Monken e Silva, Dr. Eng.
Orientador



Prof. Ivo Neitzel, D.Sc.
Co-orientador



Prof. Evaristo Chalbaud Biscaia Jr., D.Sc.
Membro



Prof. Valdecir Antoninho Dalpasquale, Ph.D.
Membro

AGRADECIMENTOS

- Aos Professores LUIZ HENRY MONKEN E SILVA e IVO NEITZEL, pela orientação segura e objetiva e pelo apoio recebido durante todo o período de trabalho.
- Aos professores e funcionários do PEQ/UEM pelo incentivo.
- Aos colegas da pós-graduação pelo incentivo.
- Ao CNPQ pela ajuda financeira através do fornecimento da bolsa.
- A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

ÍNDICE.....	I
ÍNDICE DE TABELAS.....	IV
ÍNDICE DE FIGURAS.....	VI
NOTAÇÃO E NOMENCLATURA.....	VIII
RESUMO.....	XI
SUMMARY.....	XIII
I - INTRODUÇÃO.....	01
II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	04
III - MATERIAL E MÉTODOS.....	36
IV - ABORDAGEM NUMÉRICA.....	39
V - MODELAGEM MATEMÁTICA.....	60
VI - RESOLUÇÃO DOS MODELOS.....	70
VII - ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS.....	80
VIII - RESULTADOS.....	84
IX - CONCLUSÕES.....	114
X - RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES.....	116
XI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	118

ÍNDICE

I -	INTRODUÇÃO.....	01
II -	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	04
	2.1 Gelatina	04
	2.1.1 Propriedades físicas e químicas da gelatina.....	05
	a) Solubilidade.....	05
	b) Estabilidade.....	05
	c) Contração de volume.....	06
	d) Rigidez.....	06
	e) Viscosidade.....	07
	2.1.2 Composição química da gelatina.....	08
	2.1.3 Processo de fabricação da gelatina.....	08
	2.1.4 Secagem da gelatina.....	10
	2.2 Secagem.....	12
	2.2.1 Secagem de colóides moleculares.....	15
	2.2.2 Taxa de secagem.....	16
	2.2.3 Mecanismos de movimento da umidade no interior do sólido.....	20
	a) Difusão do líquido.....	20
	b) Capilaridade.....	21
	c) Difusão de vapor.....	22
	d) Pressão.....	23
	2.2.4 Classificação dos Materiais de acordo com o processo de secagem.....	23

2.3	Parâmetros do processo de secagem.....	25
2.4	Elementos de Contorno.....	32
2.4.1	Introdução.....	32
2.4.1	Investigações anteriores.....	34
III -	MATERIAIS E MÉTODOS.....	36
IV -	ABORDAGEM NUMÉRICA.....	39
4.1	Preliminares.....	39
4.2	Solução Fundamental em coordenadas cilíndricas unidimensional.....	42
4.3	Formulação integral para o problema de difusão unidimensional em coordenadas cilíndricas.....	45
4.4	Representação numérica da formulação integral	49
V -	MODELAGEM MATEMÁTICA	60
5.1	Preliminares.....	60
5.2	Modelagem da partícula cilíndrica de gelatina	61
5.3	Modelagem da secagem da gelatina no interior do leite.....	64
VI -	RESOLUÇÃO DOS MODELOS.....	70
6.1	Resolução do modelo de secagem da partícula de gelatina.....	70
6.2	Resolução do modelo de secagem da gelatina no leite fixo.....	75
VII -	ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS.....	80
VIII -	RESULTADOS.....	84
8.1	Resultados da estimação de parâmetros.....	84

8.2 Resultados do ensaio de secagem 01.....	85
8.3 Resultados do ensaio de secagem 02.....	97
8.4 Discussão dos resultados.....	111
IX - CONCLUSÕES.....	114
X - RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES.....	116
XI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	118

ÍNDICE DE TABELAS

II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1	- Consumo de energia para a concentração da gelatina através de meios térmicos (base: Kg vapor / Kg água evaporada).....	11
2.2	- Constantes para o cálculo da pressão de vapor da água.....	32

VIII - RESULTADOS

8.1	- Valores dos parâmetros estimados no ensaio de secagem 01.....	84
8.2	- Valores dos parâmetros estimados no ensaio de secagem 02.....	85
8.3	- Propriedades do leito no ensaio 01.....	85
8.4	- Propriedades das partículas cilíndricas de gelatina no ensaio 01.....	86
8.5	- Condição de alimentação do ar no ensaio 01.....	86
8.6	- Comparação entre a umidade média do leito experimental e do modelo no ensaio 01....	87
8.7	- Comparação entre a temperatura de saída do ar e do modelo no ensaio 01.....	89
8.8	- Propriedades do leito no ensaio 02.....	97
8.9	- Propriedades das partículas cilíndricas de gelatina no ensaio 02.....	97
8.10	- Condição de alimentação do ar no ensaio 02.....	98

8.11	- Comparação entre a umidade média do leito experimental e do modelo no ensaio 02....	100
8.12	- Comparação entre a temperatura de saída do ar e do modelo no ensaio 02.....	102

ÍNDICE DE FIGURAS

II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	
2.1 - Tipos de umidade	14
2.2 - Curva típica da taxa de secagem, condições constantes de secagem	17
III - MATERIAIS E MÉTODOS	
3.1 - Secador batelada.....	35
IV - ANÁLISE NUMÉRICA	
4.1 - Discretização do raio.....	51
V - MODELAGEM MATEMÁTICA	
5.1 - Cilindro de gelatina.....	61
VI - RESOLUÇÃO DOS MODELOS	
6.1 - Discretização do leito de gelatina.....	76
VIII - RESULTADOS	
8.1 - Umidade média do Leito em função do tempo de secagem no ensaio 01.....	88
8.2 - Temperatura de saída do ar em função do tempo de secagem no ensaio 01.....	89
8.3 - Fluxo Molar do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01...	90
8.4 - Concentração do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01...	91
8.5 - Umidade do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01...	92
8.6 - Temperatura do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01...	93

8.7	- Temperatura da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 01.....	94
8.8	- Umidade da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 01...	95
8.9	- Umidade no interior da partícula para a altura $z = 0$ cm no ensaio 01.....	96
8.10	- Umidade média do Leite em função do tempo de secagem no ensaio 02.....	101
8.11	- Temperatura de saída do ar em função do tempo de secagem no ensaio 02.....	103
8.12	- Fluxo Molar do ar em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 02...	104
8.13	- Concentração do ar em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 02...	105
8.14	- Umidade do ar em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 02...	106
8.15	- Temperatura do ar em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 02...	107
8.16	- Temperatura da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 02.....	108
8.17	- Umidade da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leite no ensaio 02...	109
8.18	- Umidade no interior da partícula para a altura $z = 0$ cm no ensaio 02.....	110

NOTAÇÃO E NOMENCLATURA

a	- Área de transferência por unidade de volume do leito
A	- Área de transferência
C	- Concentração do gás
C_{Par}	- Calor específico a pressão constante do ar (molar)
\bar{C}_{pF}	Calor específico a pressão constante do gás (mássico)
\bar{C}_{pL}	- Calor específico a pressão constante da água na fase líquida (mássico)
\bar{C}_{pG}	- Calor específico a pressão constante da gelatina (mássico)
\bar{C}_{pS}	- Calor específico a pressão constante da gelatina seca (mássico)
\bar{C}_{pV}	- Calor específico a pressão constante do vapor da água (mássico)
C_{Var}	- Calor específico a volume constante do ar
d	- Diâmetro da partícula cilíndrica de gelatina
d_E	- Diâmetro da esfera com a mesma área da partícula
D	- Coeficiente de difusão
F	- Velocidade molar
G	- Fluxo mássico do ar
h_c	- coeficiente de transferência de calor convectivo
J_D	- Fator de Colburn para transferência de massa
J_H	- Fator de Colburn para transferência de calor
k_y	Coeficiente de transferência de massa
K	- Coeficiente de transferência de calor por condução da gelatina

K_F	-	Coeficiente de transferência de calor por condução do gás
L	-	Altura do leito
m_s	-	Massa de sólido seco
M_{ar}	-	Peso Molecular do ar
M_w	-	Peso Molecular da água
n_{exp}	-	Número de dados experimentais nos ensaios de secagem
N	-	Taxa de secagem
P_V	-	Pressão do vapor da água
r	-	Eixo do sistema de coordenadas cilíndricas
R	-	Raio da partícula
Re	-	Número de Reynolds
R_g	-	Constante dos gases ideais
S_c	-	Número de Schimit
t	-	tempo
T_{ar}	-	Temperatura do ar
T_{Exp}	-	Temperatura de saída do ar experimental
T_g	-	Temperatura da gelatina
T_p	-	Temperatura da partícula cilíndrica de gelatina
T_s	-	Temperatura do sólido
T_{sar}	-	Temperatura de saída do ar do modelo
u	-	Umidade da partícula (base seca)
X	-	Umidade do leito (base seca)
\bar{X}	-	Umidade média do leito calculada através da resolução do modelo
X_c	-	Umidade crítica (base seca)

X_e	- Umidade de equilíbrio (base seca)
\bar{X}_{Exp}	- Umidade média do leito experimental
Y	- Umidade do ar (molar, base úmida)
\bar{Y}	- Umidade do ar (mássico, base seca)
Y_{sat}	- Umidade de saturação do ar (molar, base úmida)
\bar{Y}_{sat}	- Umidade de saturação do ar (mássico, base seca)
z	- Eixo ordenando paralelo ao escoamento do ar
Z	- Altura da partícula cilíndrica de gelatina
α	- Difusividade térmica
ΔH_s	- Calor de desorção
Δh_0	- Entalpia de vaporização da água 0° C
ε	- Porosidade do Leito
μ_F	- Viscosidade do gás
ρ_s	- Densidade da gelatina seca
ρ_a	- Densidade aparente
ω_T	- Peso da função erro
ω_x	- Peso da função erro
ξ	- Umidade relativa do ar
ψ	- Taxa de secagem por unidade de volume do leito
ψ_p	- Taxa de secagem da partícula de gelatina por unidade de área de evaporação

SECAGEM DE GELATINA
"ANÁLISE DO PERFIL DE CONCENTRAÇÃO E TEMPERATURA
NO INTERIOR DO GEL"

por Edson Antonio da Silva

Orientador: Prof. Dr. Luiz Henry Monken e Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Ivo Neitzel

Departamento de Engenharia Química
Universidade Estadual de Maringá - Pr

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo simular numericamente o processo de secagem da gelatina. Na construção do modelo de secagem em batelada do leito fixo recheado com partículas cilíndricas de gelatina foram realizados balanços de massa, de quantidade de movimento e de energia no leito e nas suas partículas. Na simulação, os modelos de secagem do leito e das partículas cilíndricas são acoplados.

As equações resultantes da modelagem de secagem do leito estão escritas em função da altura do leito e do tempo. A variável altura do leito foi discretizada obtendo desta forma um sistema de equações diferenciais ordinárias que foram resolvidas pelo método de Gear. Para a solução das equações resultantes da modelagem das partículas, utilizou-se a técnica de elementos de contorno, que apresentou elevada precisão, inclusive nos casos em que apareceram elevados gradientes de umidade no interior da gelatina.

Durante a fase inicial de secagem o mecanismo que controla a secagem é a difusão do vapor da água formado na superfície da gelatina até o seio do gás. Após o término desta fase são dois os mecanismos que influenciam na secagem. O primeiro é a difusão da água no interior do gel até a superfície onde ocorre a evaporação e o segundo é a difusão do vapor da água até o seio do gás.

A gelatina utilizada nos experimentos de secagem apresentava geometria cilíndrica com as seguintes dimensões médias: diâmetro 0,3 cm e altura 5,0 cm.

A boa performance dessa modelagem foi constatada pela concordância dos resultados experimentais disponíveis de secagem em condições variáveis de alimentação do ar com os obtidos numericamente.

SECAGEM DE GELATINA
"ANÁLISE DO PERFIL DE CONCENTRAÇÃO E TEMPERATURA
NO INTERIOR DO GEL"

por Edson Antonio da Silva
Orientador: Prof. Dr. Luiz Henry Monken e Silva
Co-orientador: Prof. Dr. Ivo Neitzel

Departamento de Engenharia Química
Universidade Estadual de Maringá - Pr

ABSTRACT

This work has the objective of obtaining a numerical simulation of the process of gelatin drying. The simulation was conducted by coupling the drying of the bed with the drying of its cylindrical particles. Mass, momentum and energy balances were applied for the whole bed and its particles, obtaining thus, the drying model of a fixed bed packed with cylindrical particles of gelatin subject to a batch drying.

The resulting differential equations of this model were written in function of bed depth and time. The variable bed depth was discretized producing a system of ordinary differential equations that was solved by the method of Gear. The solution of the particle equations was obtained with the boundary elements method, which has shown high precision even in the cases where high gradients of humidity appear inside the gelatin.

During the initial drying phase the mechanism that controls drying is the diffusion of water vapour, formed on the surface of the gelatin, up to the main stream. After the end of this phase there are two mechanisms which influence drying. The first is the diffusion of water inside the gel up to its surface where evaporation occurs, and the second is the diffusion of water vapour up to the main stream.

The gelatin used in the drying experiments had cylindrical geometry with the following average dimensions: diameter 0,3 cm and height 5,0 cm.

The good performance of the developed numerical model was evidenced by good agreement with the experimental results available on drying at different conditions of air feed.

I - Introdução

A tecnologia do processo de produção de gelatina teve início por volta de 1920 e atualmente é uma tecnologia dominada. Entre as várias etapas do processo de produção, uma das mais críticas é a de secagem do filamento da gelatina, devido ao elevado consumo de energia e das suas características específicas de secagem que a distingue de outros materiais. Merecem destaque: a tendência da gelatina se liqüefazer durante a etapa inicial de secagem, a formação de uma crosta seca na superfície do filme de gelatina, o comportamento de contração de volume da gelatina durante o processo de secagem e o fato da gelatina não poder ser submetida a temperaturas elevadas, visto que isto pode ocasionar perdas de algumas das suas propriedades.

A maior parte das publicações existentes sobre secagem de gelatina analisam o comportamento da partícula durante o processo de secagem.

O presente trabalho, simula numericamente o processo acoplado de secagem da partícula com a secagem do leite de gelatina.

Para a resolução do modelo de secagem da partícula utilizou-se a técnica de elementos de contorno em virtude de suas vantagens computacionais para a modelagem em questão.

No capítulo 2, deste trabalho são dados enfoques aos seguintes tópicos: gelatina e suas propriedades, secagem, características da secagem da gelatina e uma introdução a técnica de elementos de contorno. No capítulo seguinte é apresentado de forma resumida os equipamentos e metodologias utilizadas nos experimentos de secagem.

No capítulo que trata a abordagem numérica, apresenta-se a metodologia e a formulação da técnica de elementos de contorno para a solução da equação da difusão em coordenadas cilíndricas unidimensional que aparece na modelagem da partícula cilíndrica de gelatina.

No capítulo 5, são apresentados os modelos de secagem da partícula e do leito de gelatina, assim como todas as considerações para a formulação dos modelos. No capítulo seguinte são apresentados os procedimentos para a resolução dos modelos de secagem. Na resolução do modelo de secagem da partícula utiliza-se a técnica de elementos de contorno obtendo-se uma equação algébrica. Para a resolução do modelo de secagem do leito, discretiza-se a altura do leito obtendo-se, desta forma, um sistema de equações diferenciais ordinárias resolvidas pelo método de Gear.

No capítulo 7, alguns parâmetros necessários a solução do modelo de secagem são estimados através da minimização do erro quadrático entre os resultados do modelo e experimental.

Os resultados da simulação numérica da secagem da partícula e do leito utilizando-se dos parâmetros otimizados, constam no capítulo 8 nas formas gráficas e de tabelas. As condições de alimentação do ar empregado nos dois ensaios de secagem, bem como os resultados experimentais da umidade média do leito também são apresentados neste capítulo.

No capítulo 9, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

No último capítulo, apresentam-se sugestões para investigações futuras.

II - Revisão Bibliográfica

2.1 Gelatina

Gelatina é uma substância orgânica nitrogenada, resultante da hidrólise parcial do colágeno. O colágeno é uma proteína fibrosa, abundante no reino animal, que compreende a maior parte das proteínas encontradas nos ossos, tecidos adiposos, pele e couro. O colágeno é quebrado através de uma sucessão de clivagens hidrolíticas, e passa através dos estágios de gelatina e cola, proteoses, peptones, polipeptídeos e finalmente produz unidades individuais de aminoácidos.

Esta série de mudanças na degradação da proteína pode ser comparada com a que ocorre na hidrólise do amido a dextrinas, polissacarídeos e finalmente unidades de glicose.

Gelatina e cola são misturas complexas, resultantes da hidrólise do colágeno e a maior diferença entre estes materiais não são suas propriedades, mas o grau de pureza da mistura. A composição dos aminoácidos resultante da hidrólise total é praticamente a mesma para o colágeno e a cola.

Vários são os fatores que influenciam no processo de fabricação da gelatina, dentre os quais se destacam: pH, temperatura, matéria-prima, tipo de processamento e alterações biológicas e bioquímicas (OTHMER, 1966).

2.1.1 Propriedades físicas e químicas da gelatina

a) Solubilidade

Nas aplicações comerciais (alimentícia, fotográfica e farmacêutica) a gelatina é usada como solução. A gelatina é praticamente insolúvel no álcool, acetona, tetra cloreto de carbono, éter, benzeno, éter de petróleo e na maioria de solventes orgânicos apolares. Mas é solúvel em água, ácido acético, e soluções aquosas de álcoois polidroxí tais como: glicerol, sorbitol e manitol. A viscosidade das soluções aquosas de gelatina aumenta com o aumento de concentração e diminui com a temperatura (OTHMER, 1966).

b) Estabilidade

A gelatina seca armazenada em recipientes hermeticamente fechados à temperatura ambiente conserva-se durante muitos anos . Contudo ela pode ser decomposta a temperatura superiores a 100°C. Para sua completa combustão são necessárias temperaturas superiores a 500°C. Soluções aquosas ou gel de gelatinas são muito suscetíveis a ação de bactérias. A estabilidade é função do pH e eletrólitos e diminui com o aumento da temperatura devido a hidrólise (OTHMER, 1966).

c) Contração de volume

A propriedade de contração de volume depende principalmente do número de ligações cruzadas e da constante de interação do polímero e solvente. Na gelatina acredita-se que as ligações cruzadas envolvem múltiplas interações entre as cadeias fibrosas e isto reduz a contração de volume. A estabilidade destas ligações dependem do pH, temperatura, tempo e dos eletrólitos (OTHMER, 1966).

d) Rigidez

A mais importante propriedade física para determinar o valor comercial da gelatina é a rigidez do gel sob as condições padronizadas. O valor comercial cresce com o aumento da rigidez. Um aparelho utilizado para a medida de rigidez da gelatina é o gelometro de Bloom (O. T, Bloom, 1929, U. S. Patent 1 540 979). O gelometro, em síntese, determina a massa necessária para fazer que um embolo de ponta chata e 0.5 in de diâmetro abaixe a superfície da gelatina de 4 mm. Esta quantidade de massa é denominada de "gramas Bloom" ou simplesmente "Bloom". A gelatina deve ser preparada de forma padronizada. Nas gelatinas comerciais o Bloom varia numa faixa de aproximada entre 80 a 320 g.

Os seguintes fatores afetam o "Bloom" de uma gelatina (excluindo aqui todos os problemas relacionados com a técnica de medida):

- a) teor de umidade: verificou-se que a rigidez de gelatina é aproximadamente igual ao quadrado de concentração de proteínas no gel em teste.
- b) pH : para qualquer tipo de gelatina o "Bloom" decresce para pH < 5 e cresce para pH > 9. Dentro desta faixa a história de produção de gelatina vai definir de que maneira o "Bloom" é alterado. Comercialmente o teste é feito sem nenhuma correção de pH, ou seja, com uma amostra "in natura". A maioria das gelatinas comerciais tem pH na faixa entre 4,5 e 7 (WARD, 1977).

e) Viscosidade

A viscosidade é segunda mais importante propriedade física da gelatina para fins comerciais. Geralmente, em condições de igualdade de outros parâmetros, gelatinas de maior viscosidade obtêm maiores preços.

A viscosidade dinâmica da amostra (η) é expressa em milipoises e cinemática (ν) em centistokes. A viscosidade da gelatina cresce com o aumento da concentração de gelatina (WARD, 1977).

2.1.2 Composição química da gelatina

Gelatina não é uma simples substância química. Os constituintes principais são moléculas polipeptídicas grandes e complexas com a mesma composição do colágeno, abrangendo uma ampla distribuição de peso molecular. A maior parte das gelatinas comerciais contém espécies com peso molecular desde 15.000 até 250.000, com a média entre 50.000 e 70.000.

A gelatina, como seu precursor colágeno, contém cerca de 51% de carbono, 26% de hidrogênio e 25% de oxigênio. Pequenas quantidades de enxofre e fósforo tem sido encontrado na gelatina, contudo não se pode afirmar que estes elementos façam parte da molécula ou estão presentes na forma de impureza (OTHMER, 1966).

2.1.3 Processo de fabricação da gelatina

O objetivo do processo de produção da gelatina é converter matérias contendo colágeno de diferentes graus de insolubilidade em gelatina solúvel e com boas propriedades físico-químicas, tais como: claridade, viscosidade e rigidez (WARD,1977).

Para a fabricação da gelatina são utilizados os carnis (tecidos que ligam a pele animal a carcaça) e os couros crus de grandes animais.

O processo de produção se desenvolve basicamente em três etapas :

a)- Preparação da matéria-prima: as peles usadas para a obtenção de gelatina são, em geral, as imperfeitas e impróprias para a fabricação de couros. Os ossos e peles sofrem, em geral, um pré-tratamento, para facilitar a preparação da gelatina. Usualmente são aquecidos com cal e água, a cerca de 70°C, durante um curto intervalo de tempo. Quando se usam temperaturas mais elevadas, e tempos de aquecimentos mais longos, a gelatina hidrolisa-se e perde algumas de suas propriedades gelificantes. Posteriormente a gelatina é submetida a um tratamento ácido para a dissolução das matérias minerais. O material insolúvel efluente do tratamento ácido, constituído de matéria orgânica que contém o colágeno é submetido a um tratamento com cal em tanques, cujo objetivos são de intumescer o material, remover e eliminar as proteínas solúveis (mucina, e albumina). Quando a molhagem está completa, o material é lavado e tem seu pH ajustado para otimizar a hidratação do colágeno.

b)- Conversão do colágeno purificado em gelatina: nesta etapa ocorre a extração do colágeno que é realizada em um tanque através do contato do material com água quente em meio de pH controlado. Uma série de extrações são necessárias, iniciando-se com temperatura inferiores na faixa entre 40-50°C. Aumenta-se gradualmente a temperatura

com o decorrer do conjunto de extrações, e a última extração ocorre à temperatura de ebulição.

c)- Refino e colocação da gelatina na forma de um sólido seco: a solução de gelatina deve ser submetida a um tratamento de clarificação e ou filtração para eliminar as gorduras e as partículas insolúveis em suspensão. O processo de branqueamento, usualmente realizado com peróxido de hidrogênio, é seguido das operações de filtração e centrifugação. Dependendo da claridade que se deseja, subseqüentes passos de purificação podem ser utilizados. Estes dependem da qualidade da matéria prima, dos produtos químicos utilizados, e das condições gerais dos equipamentos.

São utilizados evaporadores múltiplo efeito para a remoção da água no licor de gelatina. Posteriormente a solução de gelatina passa por uma extrusora, onde é transformada em gel através de resfriamento. A gelatina extrusada apresenta-se na forma de filamentos cilíndricos e é submetida à um processo de secagem para que alcançar a umidade desejada. Os filamentos secos podem então ser moídos a pó para aplicações posteriores (OTHMER, 1966; SHREVE & BRINK, 1980).

2.1.4 Secagem da gelatina

A concentração da gelatina por meios térmicos é usualmente realizada na indústria em duas etapas: a

primeira através de evaporadores múltiplo efeito, e a segunda através de secadores do tipo esteira, onde a gelatina encontra-se na forma de gel. Apenas a título de comparação simplificada apresenta-se na tabela 2.1 o consumo de energia nestas duas etapas:

Tabela 2.1 - Consumo de energia para a concentração da gelatina através de meios térmicos (Base: Kg vapor / Kg água evaporada).

Evaporador simples efeito	110-120 %
Evaporador triplo efeito	30-40 %
Secador esteira	240-350 %

Através destes dados pode-se concluir que a concentração da gelatina deve ser efetuada preferencialmente por meios térmicos através de evaporadores, os limites para isto estão estabelecidos pela transportabilidade do licor concentrado por meio de bombas (ou outro equipamento). Para facilitar o transporte da solução da gelatina torna-se necessário diminuir a viscosidade.

A viscosidade decresce com o aumento de temperatura e concentração da água. Todavia, isto não pode ser tecnicamente explorado, devido ao fato do licor de gelatina ser um fluido termosensível.

A análise de secagem da gelatina em sua forma sólida, indica que poderiam ainda ser consideradas outras

duas alternativas para produzir gelatina seca: a secagem em "spray" e a secagem por rolos aquecidos. A secagem em "spray" é economicamente mais favorável, todavia produz uma gelatina com características indesejáveis, como por exemplo: uma significativa degradação da gelatina; o pó produzido apresenta densidade aparente muito baixa, produzindo grandes volumes para transporte e a área específica da gelatina é muito grande o que é problemático, pois como para a maioria das aplicações a gelatina em pó deve ser novamente reidratada e a grande área superficial provoca uma adsorção irregular da água e a formação de muitos grânulos insolúveis mesmo a quente.

A secagem por rolos aquecidos causa significativa degradação da gelatina, devido ao aquecimento excessivo da gelatina em contato com a superfície do tambor (WARD, 1977).

2.2 Secagem

Compreende-se como secagem, a remoção de umidade de um determinado material, através de sua exposição a um fluxo de gás. A umidade é a quantidade de água presente no material. A remoção de umidade por meios mecânicos, por exemplo centrifugação, bem como a evaporação de um líquido de uma solução através do aumento de temperatura da solução, tecnicamente não são consideradas como processo de secagem.

Nos estudos de processos de secagem, constantemente surgem alguns termos, portanto é conveniente defini-los:

- Umidade base seca: é a umidade contida no sólido ou solução, usualmente descrita em termos mássicos, através da seguinte expressão: massa de água por massa de sólido seco, sendo representada por X .
- Umidade base úmida: é a quantidade de umidade do material como a porcentagem de peso do sólido úmido, na forma de: massa de água por massa de sólido úmido.
- Umidade de equilíbrio: a umidade presente no sólido ou solução exerce uma pressão parcial, cuja intensidade depende da natureza da umidade, natureza do sólido e temperatura. Se o sólido é exposto ao escoamento contínuo de um gás com pressão de vapor fixa, o sólido diminui sua umidade devido a evaporação ou aumenta sua umidade até que a pressão parcial do sólido se iguale a pressão de vapor do gás. Nesta condição o sólido e gás estão em equilíbrio e a umidade contida no sólido é denominada de umidade de equilíbrio (X_e).
- Umidade livre: é a umidade em excesso à umidade de equilíbrio, portanto pode ser obtida fazendo a diferença entre a umidade inicial do sólido e a umidade de equilíbrio ($X - X_e$). Somente a umidade livre pode ser evaporada; a umidade livre do sólido depende da pressão de vapor do gás.

- Umidade não ligada : é a umidade contida no sólido que em equilíbrio com o gás exerce uma pressão de vapor igual a do líquido puro na mesma temperatura.
- Umidade Ligada : é a umidade contida no sólido que em equilíbrio com o gás exerce uma pressão de vapor superior a do líquido puro na mesma temperatura.

As relações entre esses tipos de umidade são mostradas graficamente na figura (2.1) para um sólido com umidade X exposto a um gás com umidade relativa A (TREYBAL, 1980).

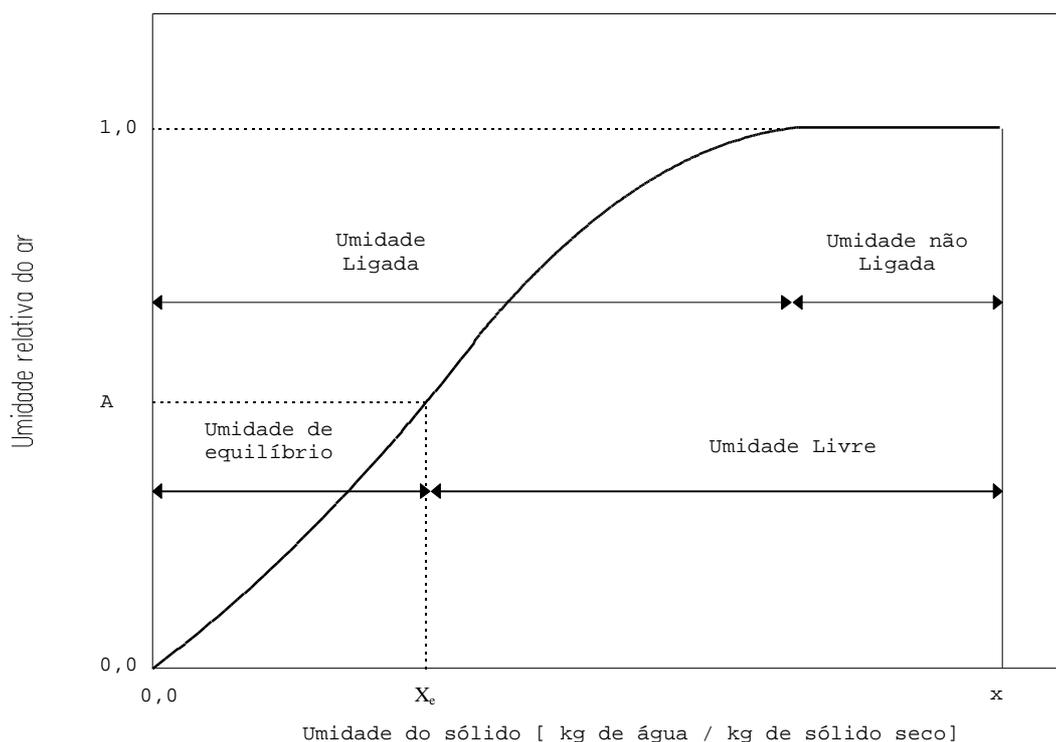


Figura 2.1 - Tipos de umidade (TREYBAL, 1980)

2.2.1 Secagem de colóides moleculares

As substâncias como borracha sintética, pectina, guta-percha, gelatina, albumina, nylon, perlon, buna, polystyrol e poliuretano apresentam um comportamento muito característico durante a secagem. Nestas substâncias a umidade não está fixada apenas por forças físicas (Van der Waal), mas também por outras forças que podem ser agrupadas sob a denominação de mecanismos físico-químicos, dentre os quais se destacam:

- a) Hidratação: as moléculas de solvente são fixadas ao soluto com a formação do calor de hidratação e alteração do volume.
- b) Ligações Osmóticas: o solvente é retido para reduzir a pressão osmótica da solução concentrada no soluto, até alcançar o equilíbrio com o meio externo.
- c) Ligações Estruturais: o solvente é encapsulado pela rede de macromoléculas.

A secagem destes materiais é normalmente acompanhada por uma contração de volume, ao passar do estado viscoso ('LYOSOL') da solução com elevado teor de umidade para o estado visco-elástico ('LYOGEL') com baixo teor de umidade. A redução de volume equivale aproximadamente ao volume do solvente evaporado (até umidades relativamente baixas).

Estas substâncias caracterizam-se (até baixas umidades) pela inexistência de poros gasosos. A movimentação da umidade no interior do sólido ocorre exclusivamente pela difusão do líquido até a superfície, onde ocorre a evaporação (KRISCHER & KAST, 1980).

2.2.2- Taxa de secagem

Para a determinação experimental da taxa de secagem utiliza-se o seguinte procedimento: uma quantidade determinada da amostra de material é colocada em um recipiente isolado termicamente suspenso em uma balança, com ar escoando continuamente através deste recipiente. Em intervalos de tempos tomam-se medidas de peso da amostra, com estes valores pode-se calcular a taxa de secagem através da seguinte expressão:

$$N = - \frac{m_s}{A} \frac{dX}{dt} ; \quad (2.1)$$

onde:

N - massa de água que evapora por unidade de área e unidade de tempo ;

X - umidade base seca ;

t - tempo ;

m_s - massa de sólido seco ;

A - área de transferência de massa.

As formas das curvas de secagem diferem de acordo com a natureza dos sólidos e das condições de secagem. Na

figura 2.2 é apresentada na forma gráfica a taxa de secagem encontrada com maior freqüência. Se a umidade inicial é bastante elevada, a superfície poderá estar coberta com um fino filme de líquido (umidade não ligada). Quando este material é exposto a um fluxo de ar seco, a evaporação ocorre na superfície como se fosse a evaporação do líquido puro. A taxa de secagem durante esta etapa pode ser escrita em termos de um coeficiente de transferência de massa do gás (k_y) e uma diferença de umidade, neste caso, do gás na superfície líquida (Y_{sat}) e no seio do gás (Y), conforme a equação :

$$N = k_y (Y_{sat}(T_s) - Y_{ar}). \quad (2.2)$$

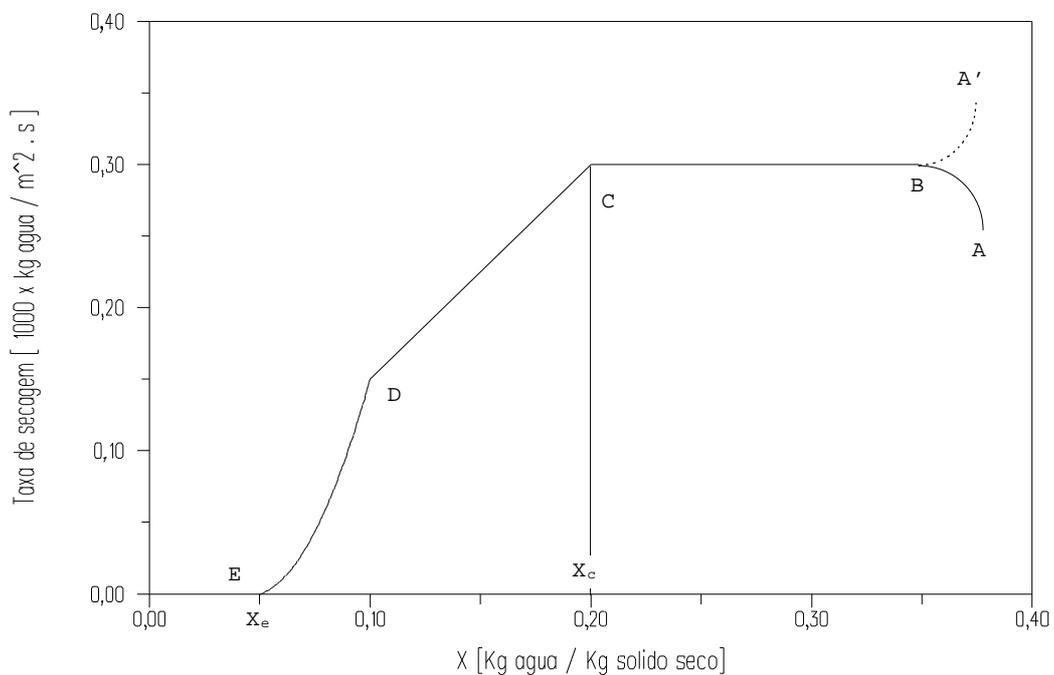


Figura 2.2 - Curva típica da taxa de secagem, condições constantes de secagem (TREYBAL, 1980)

O coeficiente k_y permanece constante se a velocidade do gás e a área de transferência de massa não se modificam durante o processo de secagem.

O termo Y_{sat} é a umidade de saturação da superfície líquida na temperatura do sólido (T_s). Durante a evaporação, o líquido absorve calor latente e a superfície líquida atinge e permanece em equilíbrio térmico, pois o fluxo de calor da superfície para as vizinhanças e desta para a superfície é exatamente igual a taxa de absorção de calor e permanece constante entre os pontos B e C, desde que as condições de secagem permaneçam inalteradas.

No início da etapa de secagem o sólido e a superfície líquida são usualmente resfriadas até atingir a temperatura de saturação. A taxa de secagem aumenta enquanto a temperatura diminui durante o intervalo de secagem AB, como mostra a figura 2.2. Alternativamente, a temperatura de equilíbrio pode ser menor que o valor inicial, dando origem a curva A'B, enquanto o ajuste inicial ocorre como mostra a figura 2.2.

Quando a umidade do sólido alcança o valor X_c (umidade crítica), o filme de umidade na superfície foi reduzido pela evaporação promovida pelo processo de secagem, dando origem a regiões secas na superfície de evaporação. Estas regiões aumentam à medida que o processo de secagem prossegue. Isto origina o primeiro período de redução da taxa de secagem, denominado período de

superfície insaturada de secagem, como representado pelos pontos CD da figura 2.2.

Finalmente o filme líquido sobre a superfície desaparece completamente e a umidade média do sólido corresponde ao ponto D. Para que o processo de secagem prossiga é necessário que ocorra a migração de umidade para as zonas de secagem. Durante esta etapa, o movimento de umidade no interior do sólido é o fenômeno que controla o processo de secagem. Os mecanismos de movimento de umidade no interior do sólido dependem da natureza do sólido, dos gradientes de concentração e temperatura no interior do sólido.

A taxa de secagem diminui com maior velocidade que a etapa anterior, originando o segundo período de redução da taxa de secagem. O segmento de curva DE da figura 2.2 descreve este comportamento. No ponto E o sólido alcança o equilíbrio, a umidade do sólido é a umidade de equilíbrio e o processo de secagem é interrompido.

Durante o segundo período de queda da taxa de secagem a evaporação nem sempre ocorre na superfície do sólido. No caso de materiais porosos a evaporação ocorre no interior dos poros com difusão do vapor.

A forma da curva de secagem representada pela figura 2.2 é genérico, pois existem materiais em que alguma das etapas apresentadas podem estar ausentes, ou ainda, uma única etapa representar o processo total de secagem.

Na ausência de dados experimentais detalhados sobre a secagem, freqüentemente supõe-se uma variação linear nas etapas onde ocorrem a redução da taxa de secagem (N) e da umidade do material (X). Neste caso, pode-se interligar os pontos C e E da figura 2.2, através de um segmento de reta passando por estes dois pontos e a taxa de secagem é representada pela equação,

$$N = k_y (Y_{sat}(T_s) - Y_{ar}) \frac{(X - X_e)}{(X_c - X_e)}. \quad (2.3)$$

2.2.3 Mecanismos de movimento da umidade no interior do sólido

a) Difusão do líquido

A difusão da umidade é resultante do gradiente de concentração do líquido no centro do sólido, onde a concentração é alta e na superfície onde a concentração é baixa. Este método de transporte é limitado para os casos em que a fase sólida é formada à partir de soluções aquosas, como nos casos: da cola e da gelatina e em certos casos em que a umidade ligada está sendo seca, como no caso de secagem das últimas parcelas de umidade de argila, farinha, tecidos, papéis e madeira.

Durante o período de taxa de secagem constante, a concentração da umidade na superfície é reduzida porém no

centro do sólido permanece alta. Materiais que apresentam alta difusividade permitem o movimento da umidade para a superfície mais rapidamente que a vaporização e desta forma a taxa de secagem permanece constante.

Quando aparecem regiões secas na superfície do sólido inicia-se o primeiro período de queda da taxa de secagem. À medida que a secagem prossegue o mecanismo de difusão no interior do sólido controla o processo de secagem. Se esta etapa da secagem é muito rápida, o período da superfície insaturada pode nem aparecer. Neste caso, o período de difusão no interior do sólido inicia-se logo após o término da taxa de secagem constante .

b) Capilaridade

A umidade ligada em sólidos granulares e porosos tais como argila, areia, pigmentos de tintas, entre outros, move-se através do fenômeno de capilaridade e interstícios dos sólidos, envolvendo mecanismo de tensão superficial. A intensidade da capilaridade depende dos pequenos reservatórios de umidade no sólido durante a secagem da superfície. Nestas condições, inicialmente a umidade move-se rapidamente para a superfície devido a capilaridade, mantendo a superfície úmida e portanto a taxa de secagem permanece constante.

A água é deslocada pelo ar que entra no sólido através das poucas aberturas e frestas. A umidade da

superfície é eventualmente retirada dos espaços entre os grânulos e a superfície, a área molhada da superfície diminui, dando origem ao período de secagem da superfície insaturada. Quando os reservatórios das camadas inferiores encontram-se eventualmente secos, a superfície líquida recua dentro dos interstícios. Portanto a evaporação ocorre no interior do sólido na superfície formada pela interface entre o líquido contido nos interstícios e o gás. Esta superfície de evaporação recua gradativamente devido à redução da profundidade do líquido nos interstícios, resultando no segundo período de queda de taxa de secagem. Durante este período a difusão de vapor no interior do sólido ocorre à partir da superfície de evaporação.

c) Difusão do vapor

Se o calor é fornecido a uma superfície do sólido enquanto o processo de secagem ocorre em outra região, a umidade pode evaporar abaixo da superfície do sólido e difundir-se para o exterior. A umidade de partículas de sólidos granulares na qual extraiu-se a principal parte desta umidade através do escoamento do líquido devido a capilaridade, esta também pode ser evaporada em regiões no interior do sólido.

d) Pressão:

Substâncias que sofrem alterações de volume das camadas exteriores do sólido durante o processo de secagem podem impelir a umidade para a superfície (TREYBAL, 1980).

2.2.4 Classificação de Materiais de acordo com o processo de secagem

Os materiais podem ser classificados em duas classes principais de acordo com o seu comportamento durante o processo de secagem. A primeira classe é constituída, por sólidos granulares ou cristalinos em que a umidade está presente nos interstícios entre as partículas ou superfície e o movimento da umidade para esta classe de materiais ocorre como resultado das forças capilares.

O período de taxa constante alonga-se até teores baixos de umidade. Embora o período de taxa decrescente divida-se em duas partes, é comum assumir a variação linear entre a taxa de secagem e o teor de umidade do sólido, geralmente inorgânico. O sólido é pouco afetado pela presença do líquido e não sofre ação do processo de secagem. Por isso, as condições de secagem podem ser escolhidas na base da comodidade e vantagem econômica, com pequena preocupação a respeito dos efeitos das condições da secagem sobre as propriedades dos produtos secos. No caso dos hidratos, as condições de secagem afetam o produto pela

alteração do hidrato que se obtém, mas, fora isto, os materiais não são alterados pelas condições de secagem sobre uma ampla faixa de temperatura e umidade. Exemplos de materiais que pertencem a esta classe são o dióxido de titânio, catalisadores, sulfato de zinco monohidratado e fosfatos de sódio. Nestas substâncias, os teores de umidade no equilíbrio são usualmente muito próximo de zero.

A maioria dos sólidos orgânicos ou é amorfa, ou fibrosa ou gelatinosa e constituem a segunda principal classe de materiais. Estes, retêm a umidade como parte integral da estrutura do sólido, ou então retêm-na no interior de fibras ou de poros delgados internos. Nestas substâncias, o movimento da umidade é lento e presume-se que ocorre pela difusão do líquido através da estrutura do sólido. Por isso, as curvas de secagem das substâncias mostram períodos de taxa constante muito curtos, que terminam em valores elevados do teor crítico de umidade. Pelas mesmas razões, o primeiro período de taxa decrescente é muito reduzido, e a maior parte do processo de secagem é controlada pela difusão do líquido, isto é, a velocidade de secagem é controlada pela velocidade de difusão do líquido através do sólido. A maior parte da secagem ocorre no segundo período de taxa decrescente. Os teores de umidade no equilíbrio são em geral elevados, o que indica ser significativa a quantidade de água que é retida intimamente na estrutura do sólido, ou em poros tão delgados que a sua pressão de vapor é significativamente reduzida. Em virtude

de a água presente fazer parte da estrutura do sólido, estes são afetados pela remoção da umidade. As camadas superficiais tendem a secar mais rapidamente que as do interior. Quando a taxa de secagem for muito elevada, é possível que se estabeleçam diferenças tão grandes no teor de umidade no interior da amostra que podem causar rachaduras ou empenamento. Em outros casos, é possível que se forme um revestimento relativamente impermeável de material parcialmente seco, que inibe o prosseguimento da secagem no interior e pode acentuar a desigualdade de teores de umidade na amostra, com o conseqüente realce da tendência de o sólido deteriorar-se. As condições de realização da secagem desta classe de materiais são críticas e devem ser escolhidas tendo em vista, primordialmente, os efeitos que podem ter sobre a qualidade do produto, a economia do processo ou a comodidade da operação são fatores subordinados. Exemplos desse tipo de material incluem os ovos, os detergentes, as colas, o extrato de café solúvel, cereais, amido, sangue animal e extrato de soja (FOUST & OUTROS,1982).

2.3 Parâmetros do processo de secagem

As propriedades físicas do ar, água e gelatina na fase sólida, necessárias para a solução do modelo de secagem deste trabalho são apresentadas neste tópico.

a) Coefficiente de Difusão

GEHRMAN & KAST (1979), nos seus experimentos de secagem determinaram o coeficiente de difusão da água no gel, para a concentração de gelatina próximo de zero a temperatura de 20°C, o valor obtido foi:

$$D = 2.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{h} . \quad (2.4)$$

b) Condutividade térmica da gelatina

GEHRMAN & KAST (1980), nos seus experimentos de secagem, consideraram que o valor do coeficiente de transferência de calor por condução na gelatina é igual ao da água na fase líquida. Neste caso para a temperatura de 20°C tem-se,

$$K = 2160 \text{ J} / \text{m} \text{ } ^\circ\text{K h} . \quad (2.5)$$

c) Capacidade calorífica da gelatina

SKURATOV & SHKITOV (1946) , realizaram uma série de experimentos e determinaram a capacidade calorífica da gelatina fotográfica a temperatura de 20°C, e encontram a seguinte correlação:

$$\bar{C}_{Pg} = \bar{C}_{Ps} + X\bar{C}_{Pl} , \quad (2.6)$$

onde:

\bar{C}_{Pg} - Calor específico da gelatina úmida [J/kg gelatina seca °K];

\bar{C}_{Ps} - Calor específico da gelatina seca [J/kg gelatina seca °K];

\bar{C}_{Pl} - Calor específico da água na fase líquida [J/kg água °K];

X - Umidade da gelatina [Kg água / Kg gelatina seca].

e

$$\bar{C}_{Ps} = 1192 \quad [\text{ J / kg gelatina seca } \text{ }^\circ\text{K}] ;$$

$$\bar{C}_{Pl} = 4000 \quad [\text{ J / kg água } \text{ }^\circ\text{K}] ;$$

d) Capacidade calorífica do ar

Os valores das capacidades caloríficas à pressão constante (C_{par}) e à volume constante (C_{var}) do ar, na temperatura de 300°K são:

$$C_{par} = 29220,0 \quad \text{ J / kgmol } \text{ }^\circ\text{K} , \quad (2.7)$$

$$C_{var} = 20890,0 \quad \text{ J / kgmol } \text{ }^\circ\text{K} . \quad (2.8)$$

e) Calor de Desorção

Devido a ausência de informações à respeito do calor de desorção do sistema água-gelatina, considerou-se

para o valor deste parâmetro o mesmo valor do calor de vaporização da água. Neste caso tem-se,

$$\Delta H_s = \Delta h_0 + (\bar{C}_{P_v} - \bar{C}_{P_l})T \quad , \quad (2.9)$$

onde:

ΔH_s Calor de desorção do sistema água-gelatina
(J / kg °K);

Δh_0 Energia de vaporização da água na temperatura 0°C;

\bar{C}_{P_v} Capacidade calorífica a pressão constante do vapor da água na temperatura 300°K;

\bar{C}_{P_l} Capacidade calorífica a pressão constante da água na fase líquida na temperatura de 300°K;

T Temperatura [°K];

e

$$\Delta h_0 = 2,162 \times 10^6 \text{ J / kg ;}$$

$$\bar{C}_{P_l} = 4000,0 \text{ J / kg °K ;}$$

$$\bar{C}_{P_v} = 2000,0 \text{ J / kg °K .}$$

f) Umidade crítica

Krischer & Kast (1978) determinaram o seguinte valor para a umidade crítica da gelatina:

$$X_c = 1,80 \text{ [kg de água / kg sólido seco]}. \quad (2.10)$$

g) Umidade de equilíbrio

GREGG & SING (1967), determinaram a isoterma de desorção utilizando o modelo BRUNAUER, EMMETT & TELLER (BET) equação 2.11, para o sistema água-gelatina à temperatura de 20°C e encontraram os seguintes resultados:

$$\frac{\xi}{X_e(1 - \xi)} = \frac{1}{X_{mx}C} + \frac{C - 1}{X_{mx}C} \xi , \quad (2.11)$$

onde:

X_e - Umidade da gelatina [kg água por kg sólido seco];

x - Umidade relativa do ar [kgmol água no ar / kgmol água saturada];

e

$$X_{mx} = 0,095;$$

$$C = 31,93.$$

h) Coeficiente de Transferência de Massa e de Calor

TREYBAL (1980), apresentou a seguinte correlação para o cálculo do coeficiente de transferência de calor convectivo, para o escoamento do gás através de um leito fixo recheado com partículas:

$$h_c = J_H \bar{C}_{pF} G \left(\frac{\bar{C}_{pF} \mu_F}{k_F} \right)^{-2/3} . \quad (2.12)$$

Onde o fator de Colburn para transferência de calor J_H é definido através da seguinte correlação:

$$J_H = \frac{2.06}{\varepsilon} \left(\frac{d_E G}{\mu_F} \right)^{-0.51}, \quad (2.13)$$

onde:

h_c - Coeficiente de transferência de calor convectivo [J / m² °K h];

\bar{C}_{pF} - Capacidade calorífica a pressão constante do gás [J / Kg °K];

G - Fluxo mássico do gás [Kg de ar seco / m² h];

μ_F - Viscosidade do gás [kg / m h];

K_F - Condutividade térmica do gás [J / m °K h];

e - Porosidade do leito;

d_E - Diâmetro da esfera com a mesma área da partícula [m].

Para o leito fixo recheado com partículas cilíndricas assume-se usualmente a igualdade entre os fatores de Colburn para a transferência de calor, J_H , e de massa, J_D , (BIRD & OUTROS, 1960). Logo, pode-se calcular o coeficiente de transferência de massa através da seguinte equação:

$$k_y = \frac{J_D G}{Sc^{2/3}}, \quad (2.13)$$

onde:

K_y - Coeficiente de transferência de massa [kg água / m² h ΔY];

G - Fluxo mássico do gás [Kg de ar seco / m² h];

Sc - Número de Schimit do ar.

i) Umidade de saturação do ar

A umidade de saturação do ar pode ser calculada através da equação,

$$Y_{sat} = \frac{P_v(T)}{P_{ar}} \quad (2.14)$$

BROOKER, BAKKER-ARKEMA & HALL (1974) determinaram a seguinte correlação para o cálculo da pressão do vapor da água:

$$P_v(T) = v_8 \exp \left[\frac{((v_5 T + v_4) T + v_3 T + v_2 T + v_1)}{(v_6 - v_7 T T)} \right]; \quad (2.15)$$

onde:

P_v Pressão do vapor da água [Pascal];

P_{ar} Pressão do ar [Pascal];

T Temperatura [°K];

v_i Constantes.

Os valores das constantes (v_i) para o cálculo da pressão de vapor da água são apresentadas na tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Constantes para o cálculo da pressão de vapor da água.

Constantes	Valores
v_1	$-0,27405525836142 \times 10^5$
v_2	$0,97541293739211 \times 10^2$
v_3	$-0,14624400445250$
v_4	$0,12557531896232 \times 10^{-3}$
v_5	$-0,48501710326334 \times 10^{-7}$
v_6	$0,43490289777732 \times 10^1$
v_7	$0,39381071412760 \times 10^{-2}$
v_8	$0,22105857005904 \times 10^8$

2.4 Elementos de contorno

2.4.1 Introdução

Em geral, os problemas da engenharia e da física são formulados matematicamente através de um sistema de equações diferenciais ou integrais.

Para solucionar esses problemas, as técnicas de contorno usam formulações integrais ou representações integrais de alguma de suas variáveis. Essas representações satisfazem **a priori** os sistemas de equações diferenciais que descrevem os problemas e contém distribuições incógnitas, que são determinadas para que as variáveis

presentes nas representações satisfaçam as condições de contorno (SILVA, 1988).

Quando as representações integrais contêm distribuições auxiliares, a formulação é denominada **indireta**; se as distribuições são relacionadas com as variáveis do problema, a formulação é chamada **direta** (BREBBIA, 1978).

As representações integrais usadas nas formulações indiretas são obtidas através dos potenciais de camadas simples e duplas (KELLOG, 1954). As expressões desses potenciais envolvem, respectivamente, uma solução fundamental do operador diferencial do problema e a derivada dessa solução segundo a direção do vetor normal.

As formulações diretas são obtidas por meio de uma relação de reciprocidade entre o estado real, incógnito, e um estado auxiliar, escolhido para conduzir a representação integral que envolva quantidades diretamente relacionadas com a do problema que se deseja solucionar (CRUZE, 1968).

Freqüentemente, em elementos de contorno, escolhe-se como estado auxiliar o proveniente da solução fundamental do operador adjunto associado ao problema em análise (TREVES, 1975). Substituindo esta solução na relação inicial obtém-se uma representação integral da solução em pontos do domínio de definição do problema. Em seguida, esta representação é levada ao contorno, através da aplicação da terceira identidade de Green, Betti ou

teoremas similares (SILVA, 1988 ; BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984).

A formulação do método de elementos de contorno, envolve o cálculo de integrais singulares e não-singulares. A integração analítica somente é possível para os elementos e soluções fundamentais mais simples. Em geral, as integrações são realizadas numericamente.

As integrais não-singulares são geralmente calculadas através de regras de integração convencionais. A escolha do método para o cálculo das integrais singulares depende do tipo de singularidade envolvido (SILVA, 1988).

Neste trabalho a técnica de elementos de contorno é utilizada para a solução da equação da difusão em coordenadas cilíndricas unidimensional (função do raio). Para a construção da formulação integral foi utilizado o método direto.

2.4.2 Investigações anteriores

Nesta seção, mencionam-se apenas os trabalhos diretamente relacionados com os procedimentos e metodologias da técnica de elementos de contorno utilizados na solução da equação da difusão em coordenadas cilíndricas.

No estudo da equação da difusão em coordenadas cilíndricas unidimensional (função do raio) BREBBIA, TELLES & WROBEL (1984) empregaram a formulação de elementos de

contorno em coordenadas cartesianas bidimensionais. Para a aplicação desta formulação apenas um quarto do domínio foi considerado devido a condição de simetria. O contorno desta região foi discretizado utilizando-se elementos lineares.

Os mesmos autores apresentaram a formulação e a metodologia para a solução do problema axisimétrico da equação da difusão em coordenadas cilíndricas bidimensionais (função do raio e da altura) utilizando a técnica de elementos de contorno no mesmo sistema de coordenadas do problema original.

CHUANG & SZEKELY (1972) desenvolveram a formulação e a metodologia para a solução dos problemas de fusão e solidificação (fronteira móvel) para o sistema de coordenadas cilíndricas unidimensional utilizando a técnica de elementos de contorno no mesmo sistema de coordenadas do problema original.

III - MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo, são apresentados de forma resumida os equipamentos e as metodologias empregados nos ensaios de secagem cujos resultados foram utilizados neste trabalho para avaliar a performance do modelo e para a estimação de alguns parâmetros.

a) Gelatina

A gelatina utilizada foi fornecida e caracterizada pela LEINER DO BRASIL (NEITZEL¹, 1987). A coleta da gelatina na fábrica para os ensaios de secagem ocorreu logo após a saída da extrusora onde a gelatina encontrava-se na forma de filamentos cilíndricos, isto é, antes da entrada da primeira câmara de secagem do secador esteira.

b) Secador Batelada

O secador utilizado apresentava geometria cilíndrica, com as seguintes dimensões: diâmetro = 21,5 cm e altura = 21,5 cm.

Para evitar perdas de calor o secador era revestido por uma camada de isopor. O fundo do secador é constituído por uma grade para possibilitar o escoamento do ar, conforme representado na figura 3.1.

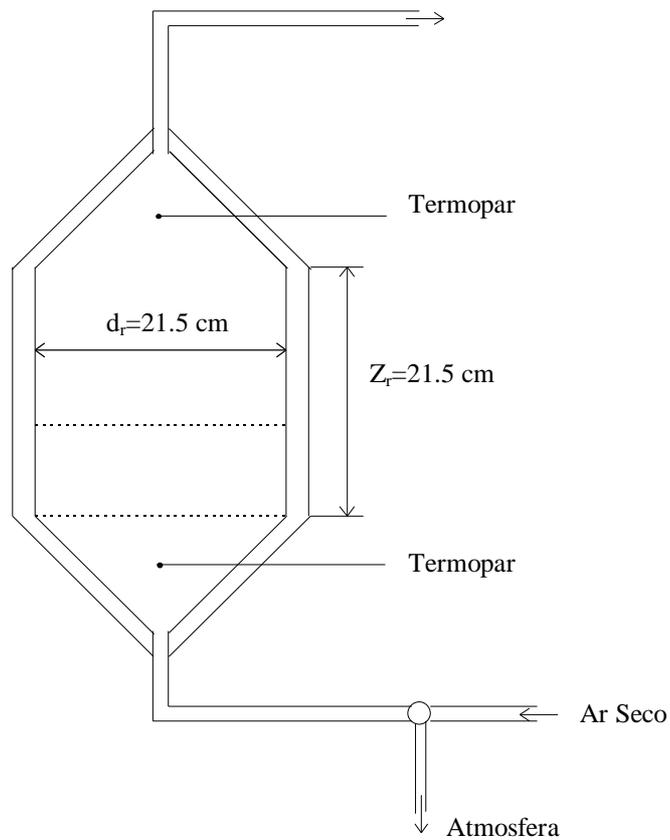


FIGURA 3.1 - Secador batelada

c) Ensaio de secagem

Os ensaios de secagem foram conduzidos da seguinte forma: os filamentos cilíndricos de gelatina com temperaturas e umidades conhecidas eram depositadas no interior do secador batelada. Ar com propriedades conhecidas era injetado continuamente e em intervalos de tempo tomava-se medidas de peso da amostra e temperatura de saída do ar.

O perfil de temperatura utilizado na alimentação do ar visava simular o comportamento das câmaras de secagem do secador esteira, utilizados na indústria LEINER DO BRASIL. As condições de alimentação do ar são distintas em cada câmara de secagem, desta forma as propriedades do ar (temperatura, concentração, fluxo molar e umidade) injetados no secador batelada permaneciam inalteradas durante um determinado intervalo de tempo visando simular a secagem da gelatina em uma determinada câmara do secador esteira. Após decorrido o tempo de exposição do gel em uma determinada câmara de secagem, as condições de alimentação do ar no secador batelada eram alteradas visando simular a passagem da gelatina para uma nova câmara de secagem. Os resultados dos ensaios de secagem foram reportados por Neitzel² (1987).

IV - ABORDAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo, em primeiro lugar encontra-se a solução fundamental do operador adjunto ao operador da difusão, em coordenadas cilíndricas unidimensional. Em seguida estabelece-se uma formulação integral para o problema da difusão, com base na técnica de reciprocidade. No item 4.4 descreve-se o tratamento numérico adotado para a solução do modelo de difusão cilíndrica unidimensional, com indicação dos esquemas de marcha no tempo e das técnicas empregadas para o cálculo das integrais presentes na formulação.

4.1 Preliminares

A técnica de elementos de contorno consiste primeiro na transformação da equação diferencial que descreve o comportamento do processo em uma determinada região (domínio) em uma equação integral que relaciona somente valores das variáveis do problema no contorno. Em seguida, usa-se os procedimentos de interpolação de elementos finitos e uma técnica de resíduos ponderados para obter a solução numérica da citada equação integral. Se valores de incógnitas em pontos internos forem requeridos, estes podem ser calculados posteriormente através dos valores das variáveis no contorno.

Ao se levar as variáveis para o contorno do domínio do problema, a sua dimensão que antes era (n) passa ser $(n-1)$. Em particular, para o problema em análise, em vista das considerações feitas, na modelagem matemática sua dimensão era, $n=2$. Ao se adotar a formulação integral de contorno, n passou a ser 1 (um) e aproveitando a simetria radial, a dimensão do problema passou a ser zero, ou seja, o contorno ficou reduzido a um único ponto.

No processo de secagem de gelatina verifica-se que sob determinadas condições de alimentação do ar, podem aparecer gradientes acentuados de umidade no interior do gel. Para solução numérica deste tipo de problema o método de elementos de contorno mostrou-se mais eficiente do que os métodos de domínio (BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984).

De fato, quando se utiliza uma técnica de elementos finitos para a solução de equações diferenciais parciais em função do tempo e do espaço, geralmente apenas o espaço é discretizado utilizando-se funções de interpolação de Lagrange ou Hermite e isto conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias em função do tempo, onde o número de equações a serem resolvidas, no caso, é igual ao número de pontos nodais resultantes da discretização do domínio espacial.

Por sua vez, quando se utiliza uma técnica de diferenças finitas para a solução de equação diferenciais parciais em função do tempo e do espaço, uma malha de pontos é estabelecida em toda a região de interesse e as

derivadas são aproximadas através de diferenças finitas que são comumente obtidas através do uso da expansão da série de Taylor. O número de equações resultantes a serem resolvidas na técnica de diferenças finitas, também é igual ao número de pontos nodais da malha de discretização.

Portanto, o número de equações resultantes tanto da aplicação do método de elementos finitos como de diferenças finitas dependem fortemente do grau de refino da malha de discretização.

Nos problemas em que há gradientes elevados nas variáveis incógnitas uma das maneiras de captar essas variações é justamente com o refino da malha o que aumenta muito a dimensão dos sistemas discretizados.

Desta forma, neste trabalho optou-se por um método de contorno principalmente por sua capacidade em alcançar elevada precisão mesmo nos casos em que existem gradientes acentuados e por fornecerem diretamente as incógnitas primitivas e suas derivadas com precisões de mesma ordem, no caso concentração e fluxo. Tal qualidade deste método deve-se ao fato de se trabalhar com uma representação análoga a uma de resíduo ponderado, que usa como estado auxiliar (funções de ponderação) uma solução fundamental do operador adjunto ao operador do próprio problema que se deseja resolver. Como consequência disso, nas aplicações, as dimensões dos sistemas discretizados que resultam da técnica de elementos de contorno são menores que as resultantes da aplicação dos métodos de domínio mas

a precisão é mantida e em geral aumentada (BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984), (SILVA, 1988).

4.2 Solução Fundamental em coordenadas cilíndricas unidimensional.

Considere a equação da difusão:

$$\nabla^2 u - k \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{em } \Omega \text{ (domínio)}. \quad (4.1)$$

O operador adjunto ao operador de difusão, é:

$$L^*(.) = \nabla^2(.) + k \frac{\partial (.)}{\partial t} = 0 \quad \text{em } \Omega \text{ (domínio)}. \quad (4.2)$$

Agora considere a resposta G , de um sistema descrito por L^* em que seja aplicado uma fonte pontual atuando no ponto γ , pertencente ao domínio e no tempo t_F , isto é, G satisfaz a equação:

$$\nabla^2 G + k \frac{\partial G}{\partial t} = \delta(\gamma, \eta) \delta(t_F, t) ; \quad (4.3)$$

onde:

\mathbf{d} - é a distribuição de Dirac ;

γ e η - são pontos de W ;

$t \geq t_F$.

A função G , solução da equação diferencial 4.3 é denominada de solução fundamental do operador $L^*(.)$.

No sistema de coordenadas cartesianas, a citada solução fundamental fica sendo (BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984):

$$G = \frac{1}{(4\pi k(t_F - t))^{d/2}} \exp\left[\frac{-\omega^2}{4k(t_F - t)}\right] ; \quad (4.4)$$

onde:

ω - é a distância do ponto γ ao ponto η ;

d - é a dimensão espacial do problema.

Entre as propriedades dessa solução fundamental destaca-se a seguinte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u(\xi, t_{F-\varepsilon}) G(\xi, \eta, t_{F-\varepsilon}, t) d\Omega_{\eta} = u(\xi, t_F) , \quad (4.5)$$

que será empregada mais adiante.

À partir da equação 4.4, fazendo $d=2$, obtém-se:

$$G(\xi, \eta, t, t_F) = \frac{1}{4\pi k\tau} \exp\left(\frac{-\omega^2}{4k\tau}\right) , \quad (4.6)$$

onde:

$$\tau = t_F - t ;$$

$$\gamma \equiv (x, y) ;$$

$$\eta \equiv (x', y') ;$$

$$\omega^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 .$$

A equação 4.6 é denominada solução fundamental do operador adjunto da equação da difusão bidimensional em coordenadas cartesianas.

Escrevendo as coordenadas dos pontos γ e η em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$x = r \cos \alpha ; \quad (4.7)$$

$$y = r \sin \alpha ; \quad (4.8)$$

$$x' = \xi \cos \beta ; \quad (4.9)$$

$$y' = \xi \operatorname{sen} \beta . \quad (4.10)$$

Substituindo as equações 4.7-4.10 na equação 4.6, resulta:

$$G(\xi, r, \beta, \alpha, t_F, t) = \frac{1}{4\pi k\tau} \exp\left(\frac{-r^2 - \xi^2 + 2r\xi[\cos(\alpha - \beta)]}{4k\tau}\right) . \quad (4.11)$$

Integrando a equação 4.11 em relação a variável α no intervalo de 0 a 2π , vem:

$$G(\xi, r, t_F, t) = \int_0^{2\pi} G(\xi, r, \alpha, \beta, t_F, t) d\alpha = \frac{1}{4\pi k\tau} \exp\left(\frac{-r^2 - \xi^2}{4k\tau}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{r\xi \cos(\alpha - \beta)}{2k\tau}\right) d\alpha . \quad (4.12)$$

A variável β foi retirada do argumento da função G que aparece no primeiro termo da equação 4.12, visto que o resultado desta integral independe do valor da citada variável.

Mas, segundo ABRAMOWITZ & STEGUN (1965):

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\pm z \cos(\theta)) d\theta , \quad (4.13)$$

onde:

$I_0(z)$ é a função de Bessel modificada de ordem zero.

Levando a equação 4.13 em 4.12, obtém-se:

$$G(\xi, r, t_F, t) = \frac{1}{2k\tau} \exp\left(\frac{-r^2 - \xi^2}{4k\tau}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2k\tau}\right) . \quad (4.14)$$

A derivada da função G em relação a variável r , fica sendo:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(\xi, r, t_F, t) = \frac{1}{(2k\tau)^2} \exp\left(\frac{-r^2 - \xi^2}{4k\tau}\right) \left[r I_0\left(\frac{r\xi}{2k\tau}\right) - \xi I_1\left(\frac{r\xi}{2k\tau}\right) \right] , \quad (4.15)$$

onde:

$I_1(z)$ é a função de Bessel modificada de primeira ordem.

A equação 4.14 é denominada de solução fundamental para o operador adjunto da equação da difusão em coordenadas cilíndricas unidimensional (CHUANG, 1972).

4.3 Formulação integral para o problema de difusão unidimensional em coordenadas cilíndricas.

Escrevendo a equação 4.1 em coordenadas cilíndricas unidimensional, tem-se:

$$L(u) = \frac{k}{r} (ru_r)_r - u_t = 0 . \quad (4.16)$$

Seja L^* o operador adjunto do operador L em 4.16 e v uma função tal que:

$$L^*(v) = \frac{k}{r} (rv_r)_r + v_t = 0 . \quad (4.17)$$

Multiplicando a equação 4.16 por v e a equação 4.17 por u e subtraindo uma da outra, obtém-se:

$$vL(u) - uL^*(v) = v \left[\frac{k}{r} (ru_r)_r - u_t \right] - u \left[\frac{k}{r} (rv_r)_r + v_t \right] . \quad (4.18)$$

Mas,

$$\frac{k}{r} \left[v(ru_r)_r - u(rv_r)_r \right] = \frac{k}{r} \left[v(ru_r) - u(rv_r) \right]_r \quad (4.19)$$

e

$$(vu_t + v_tu) = (uv)_t . \quad (4.20)$$

Então substituindo as equações 4.19-4.20 em 4.18,

vem:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{k}{r} [v(ru_r) - u(rv_r)]_r - (uv)_t = 0 . \quad (4.21)$$

Integrando a equação 4.21 sobre um círculo de raio R e no intervalo de tempo t_0 a t_F , obtém-se:

$$\int_{t_0}^{t_F} \int_0^R \left[\frac{k}{r} [v(ru_r) - u(rv_r)]_r - (uv)_t \right] r dr dt = 0 . \quad (4.22)$$

Rearranjando e simplificando os termos da equação 4.22, chega-se a:

$$k \int_{t_0}^{t_F} \int_0^R [v(ru_r) - u(rv_r)]_r dr dt = \int_0^R \int_{t_0}^{t_F} (uv)_t r dt dr . \quad (4.23)$$

Integrando em relação a r o termo do lado esquerdo da equação 4.23 e em relação a t o termo do lado direito, vem:

$$k \int_{t_0}^{t_F} [v(ru_r) - u(rv_r)]_{r=R} dt = \int_0^R [(uv)]_{t=t_0}^{t=t_F} r dr . \quad (4.24)$$

Na equação 4.24, escolhe-se v como sendo a solução fundamental $G(\mathbf{x}, r, t_F, t)$ isto é,

$$v = G(\xi, r, t_F, t) ; \quad (4.25)$$

faz-se:

$$u = u(r, t) ; \quad (4.26)$$

e denomina-se:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = q(R, t) , \quad (4.27)$$

sendo:

r - o ponto de cálculo;

ξ - o ponto de aplicação da fonte;

t_F - o tempo final;

t_0 - o instante inicial.

Isto permite escrever a equação 4.24 na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & k \int_{t_0}^{t_F} \left[G(\xi, R, t_F, t) q(R, t) - u(R, t) \frac{\partial G}{\partial r} (\xi, R, t_F, t) \right]_{r=R} R dt \\
 & = \int_0^R \left[(u(R, t) G(\xi, R, t_F, t)) \right]_{t=t_0}^{t=t_F} r dr .
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

As integrais contidas na equação 4.28 apresentam singularidades devido à natureza da função G e de sua derivada, conforme é possível notar nas equações 4.14 e 4.15.

Para investigar a singularidade da integral do lado direito da equação 4.28 no instante de tempo $t=t_F$, subtrai-se uma pequena quantidade arbitrária ε no tempo t_F e toma-se o limite quando ε tende a zero. Empregando a propriedade da solução fundamental representada pela equação 4.5 na equação 4.28 e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t_F) + kR \int_{t_0}^{t_F} u(R, t) \frac{\partial G}{\partial r} (\xi, R, t_F, t) dt = \\
 kR \int_{t_0}^{t_F} q(R, t) G(\xi, R, t_F, t) dt + \\
 \int_0^R u(r, t_0) G(\xi, r, t_F, t_0) r dr .
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

A equação 4.29 é válida para qualquer ponto ξ do domínio e é a formulação integral para o problema em

questão. Para se obter a equação integral no contorno, leva-se o ponto ξ para o contorno ($\xi=R$). Quando o ponto de colocação pertence ao contorno, verifica-se que a função $\partial G/\partial r$ apresenta singularidade forte quando ξ aproxima-se do contorno, produzindo o seguinte resultado (BREBBIA, WROBEL, 1981):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(R, t_F) + kR \int_{t_0}^{t_F} u(R, t) \frac{\partial G}{\partial r} (R, R, t_F, t) dt = \\ kR \int_{t_0}^{t_F} q(R, t) G(R, R, t_F, t) dt + \\ \int_0^R u(r, t_0) G(R, r, t_F, t_0) r dr . \end{aligned} \quad (4.30)$$

A mudança do valor do coeficiente que aparece multiplicando o termo $u(R, t_F)$ na equação 4.30 em relação a 4.29, refere-se a contribuição da singularidade no cálculo da integral no contorno que aparece no lado esquerdo da equação, quando ξ aproxima-se de R (contorno). A contribuição da singularidade no cálculo da primeira integral do lado direito é nula. A integral de domínio do lado direito da equação 4.30 não apresenta singularidade.

A equação 4.30 é a formulação de contorno obtida à partir da formulação integral do problema de difusão cilíndrica unidimensional apresentada na equação 4.29.

À partir das equações 4.29 e 4.30 pode-se escrever a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
c(\xi)u(\xi, t_F) + kR \int_{t_0}^{t_F} u(R, t) \frac{\partial G}{\partial r}(\xi, R, t_F, t) dt = \\
kR \int_{t_0}^{t_F} q(R, t) G(\xi, R, t_F, t) dt + \\
\int_0^R u(r, t_0) G(\xi, r, t_F, t_0) r dr ,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

onde:

$$\begin{aligned}
c(\xi) &= \frac{1}{2} , & \text{quando } \xi \in \Gamma \text{ suave, no caso } \xi=R ; \\
c(\xi) &= 1 , & \text{quando } \xi \in \Omega .
\end{aligned}$$

A equação 4.31 é a formulação integral da técnica de elementos de contorno, para o problema de difusão cilíndrica unidimensional, independentemente se o ponto ξ pertence ao domínio ou ao contorno.

4.4 Representação numérica da formulação integral.

Para solução numérica da equação 4.31, adotou-se o esquema de marcha passo a passo no tempo em virtude deste esquema usar menor capacidade de armazenamento das variáveis de cálculo, uma vez que se armazena somente os valores das variáveis dependentes no instante anterior. Além disso, como utilizou-se passo constante no tempo, as integrais são avaliadas uma única vez.

No procedimento de marcha passo a passo, cada passo de tempo é tratado como um novo problema. Portanto no final de cada passo, valores da variável u são calculados em um número suficiente de pontos internos para serem

usados como pseudo valores iniciais para o próximo passo de avanço no tempo.

As variáveis presentes na equação 4.31, $u(R, t)$ e $q(R, t)$, foram aproximadas por meio de funções de interpolação lineares no tempo, ou seja:

$$u(R, t) = u(R, t_{F-1})\phi_1(t) + u(R, t_F)\phi_2(t) ; \quad (4.32)$$

$$q(R, t) = q(R, t_{F-1})\phi_1(t) + q(R, t_F)\phi_2(t) ; \quad (4.33)$$

para $t_{F-1} \leq t < t_F$;

onde:

$$\phi_1(t) = \frac{(t_F - t)}{h} \quad ; \quad \phi_2(t) = \frac{(t - t_{F-1})}{h} \quad \text{e} \quad h = t_F - t_{F-1} .$$

Substituindo as equações 4.32 e 4.33 em 4.31 e alterando o limite inferior de integração de t_0 para t_{F-1} , resulta:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi, t_F) + u(R, t_F) kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_2(t) \frac{\partial G}{\partial r}(\xi, R, t_F, t) dt + \\ u(R, t_{F-1}) kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_1(t) \frac{\partial G}{\partial r}(\xi, R, t_F, t) dt = \\ q(R, t_F) kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_2(t) G(\xi, R, t_F, t) dt + \\ q(R, t_{F-1}) kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_1(t) G(\xi, R, t_F, t) dt + \\ \int_0^R u(r, t_{F-1}) G(\xi, r, t_F, t_{F-1}) r dr . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Define-se agora,

$$G^1 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_1 G(\xi, R, t_F, t) dt ; \quad (4.35)$$

$$G^2 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_2 G(\xi, R, t_F, t) dt ; \quad (4.36)$$

$$H^1 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_1 \frac{\partial G}{\partial r} (\xi, R, t_F, t) dt ; \quad (4.37)$$

$$H^2 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial r} (\xi, R, t_F, t) dt . \quad (4.38)$$

Substituindo as equações 4.35-4.38 em 4.34, obtém-se:

$$c(\xi)u(\xi, t_F) + H^2u(R, t_F) + H^1u(R, t_{F-1}) = G^2q(R, t_F) + G^2q(R, t_{F-1}) + \int_0^R u(r, t_{F-1}) G(\xi, r, t_F, t_{F-1}) r dr . \quad (4.39)$$

A variável $u(r, t)$ no domínio foi aproximada utilizando funções de interpolação quadráticas no raio. O número de elementos E , é igual a 5, conforme representado na figura 4.1.

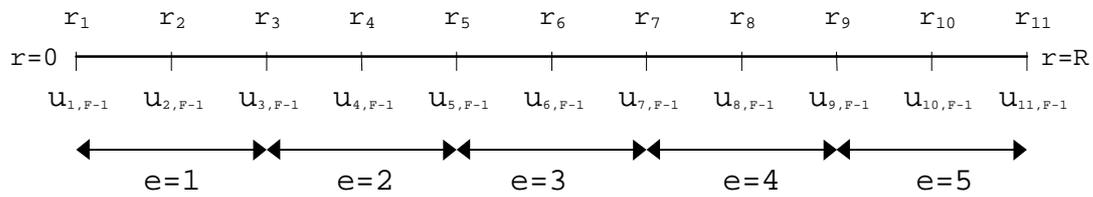


FIGURA 4.1 - Discretização do raio

Assim, pode-se escrever a seguinte equação:

$$u(r, t_{F-1}) = \sum_{e=1}^E [\eta_1^{(e)} u_{i,F-1} + \eta_2^{(e)} u_{i+1,F-1} + \eta_3^{(e)} u_{i+2,F-1}] ; \quad (4.40)$$

onde:

$$i=2(e-1)+1 ;$$

$$\Delta r = \frac{R}{2E - 1} ;$$

$$r_i = (i - 1)\Delta r ;$$

$$u_{i,F-1} = u(r_i, t_{F-1}) ;$$

$$\eta_1^{(e)}(r) = \varphi(r)^{(e)} \left[\frac{r_{i+1}r_{i+2}}{\Delta_i} - \frac{(r_{i+1} + r_{i+2})}{\Delta_i} r + \frac{r^2}{\Delta_i} \right] ;$$

$$\eta_2^{(e)}(r) = \varphi(r)^{(e)} \left[\frac{r_i r_{i+2}}{\Delta_{i+1}} - \frac{(r_{i+2} + r_i)}{\Delta_{i+1}} r + \frac{r^2}{\Delta_{i+1}} \right] ;$$

$$\eta_3^{(e)}(r) = \varphi(r)^{(e)} \left[\frac{r_{i+1}r_i}{\Delta_{i+2}} - \frac{(r_i + r_{i+1})}{\Delta_{i+2}} r + \frac{r^2}{\Delta_{i+2}} \right] ;$$

$$\varphi(r)^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < r_i \text{ ou } r > r_{i+2} ; \\ 1 & \text{se } r_i \leq r \leq r_{i+2} ; \end{cases}$$

$$\Delta_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+2} - r_i} ;$$

$$\Delta_{i+1} = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+2} - r_{i+1}} ;$$

$$\Delta_{i+2} = \frac{r_{i+2} - r_{i+1}}{r_{i+2} - r_i} .$$

Substituindo a equação 4.40 em 4.39, obtém-se:

$$c(\xi)u(\xi, t_F) + H^2u(R, t_F) + H^1u(R, t_{F-1}) = G^2q(R, t_F) + G^2q(R, t_{F-1}) + \quad (4.41)$$

$$\sum_{e=1}^E \int_0^R [\eta_1^{(e)}, \eta_2^{(e)}, \eta_3^{(e)}] G(\xi, r, t_F, t_{F-1}) \begin{bmatrix} u_{i,F-1} \\ u_{i+1,F-1} \\ u_{i+2,F-1} \end{bmatrix} r dr .$$

Definindo:

$$B = \sum_{e=1}^E \int_0^R [\eta_1^{(e)}, \eta_2^{(e)}, \eta_3^{(e)}] G(\xi, r, t_F, t_{F-1}) \begin{bmatrix} u_{i,F-1} \\ u_{i+1,F-1} \\ u_{i+2,F-1} \end{bmatrix} r dr , \quad (4.42)$$

e substituindo a equação 4.41 em 4.40, vem:

$$c(\xi)u(\xi, t_F) + H^1u(R, t_{F-1}) + H^2u(R, t_F) = \tag{4.43}$$

$$G^1q(R, t_{F-1}) + G^2q(R, t_F) + B .$$

A equação 4.43 é a representação numérica da equação 4.31 usando a técnica de elementos de contorno, onde foram usadas funções de interpolação lineares no tempo, funções quadráticas no domínio e o esquema de marcha no tempo é passo a passo. Os valores dos coeficientes da equação 4.42 são função do ponto de aplicação (ξ).

As funções de Bessel modificada de ordem zero (I_0) e de primeira ordem (I_1) que aparecem nas equações 4.35-4.38 e 4.42, foram calculadas através das seguintes expressões (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1965):

a) Para $x \leq 3,75$, tem-se:

$$I_0(x) = \sum_{i=0}^6 a_i z^{2i} ; \tag{4.44}$$

$$I_1(x) = x \sum_{i=0}^6 b_i z^{2i} . \tag{4.45}$$

b) Para $x > 3,75$, tem-se:

$$I_0(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}} \sum_{i=0}^8 a_i / z^i ; \tag{4.46}$$

$$I_1(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}} \sum_{i=0}^8 b_i / z^i . \tag{4.47}$$

Sendo $z = x / 3,75$.

As integrais no contorno que aparecem nas equações 4.35-4.38, para $\xi \neq R$, podem ser avaliadas numericamente utilizando-se fórmulas Gaussianas de quadratura numérica. A integral no domínio definida pela equação 4.41, independente do ponto de aplicação ξ , pode ser calculada numericamente.

Contudo, quando $\xi=R$ e t se aproxima de t_F , as integrais no contorno apresentam singularidades e precisam de tratamento especial. Para isto o intervalo de integração foi dividido em duas partes de acordo com a definição das funções de Bessel $I_0(x)$ e $I_1(x)$, conforme apresentadas pelas equações 4.44-4.47.

Quando $\xi=R$ e o argumento (x) das funções de Bessel é inferior a 3,75 durante o intervalo de integração, as integrais no contorno que aparecem nas equações 4.35-4.38 podem ser calculadas numericamente, utilizando-se as equações 4.44 e 4.45 para o cálculo das funções de Bessel, uma vez que a singularidade está fora do intervalo de integração. A singularidade ocorre quando t se aproxima do instante t_F , neste caso o argumento da função de Bessel cresce infinitamente.

Quando $\xi=R$ e o argumento (x) das funções de Bessel é superior a 3,75 durante o intervalo de integração, as referidas integrais mencionadas no parágrafo anterior podem ser calculadas com o auxílio das equações 4.46 e 4.47 que permitem o cálculo das funções de

Bessel, contudo verifica-se que neste caso estas integrais apresentam singularidade e então, é conveniente avaliar estas integrais analiticamente se possível ou utilizar técnicas especiais de integração que considerem a singularidade.

Em função disso, o intervalo de integração das equações 4.35-4.38, quando $\xi=R$ foi dividido em duas partes, de acordo com o valor do argumento das funções de Bessel.

Seja (x) o argumento das funções de Bessel nas equações 4.14 e 4.15 quando $\xi=R$ e $r=R$. Assim, pode-se escrever:

$$x = \frac{R^2}{2k\tau} \quad . \quad (4.48)$$

Seja ainda τ_m o valor da variável τ quando o argumento x das funções de Bessel for igual a 3,75. Fazendo $x = 3,75$ na equação 4.48, resulta:

$$\tau_m = \frac{R^2}{7,5k} \quad . \quad (4.49)$$

Definindo:

$$t_m = t_{F-1} + t_m \quad , \quad (4.50)$$

tem-se que t_m é o valor da variável t quando o argumento das funções de Bessel é igual a 3,75.

As integrais no contorno, $\xi=R$, definidas pelas equações 4.35-4.38 serão desmembradas em duas parcelas em função do valor do argumento das funções de Bessel, da seguinte forma:

$$G^1 = G_1^1 + G_2^1 \quad ; \quad (4.51)$$

$$G^2 = G_1^2 + G_2^2 \quad ; \quad (4.52)$$

$$H^1 = H_1^1 + H_2^1 \quad ; \quad (4.53)$$

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 \quad . \quad (4.54)$$

Os termos G_1^1 , G_1^2 , H_1^1 e H_1^2 referem-se aos valores das integrais do contorno para $\xi=R$ no intervalo onde o argumento (x) das funções de Bessel é inferior a 3,75. Partindo das equações 4.35-4.38 e 4.50 pode-se escrever que:

$$G_1^1 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_m} \phi_1 G(\xi, R, t_F, t) dt \quad ; \quad (4.55)$$

$$G_1^2 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_m} \phi_2 G(\xi, R, t_F, t) dt \quad ; \quad (4.56)$$

$$H_1^1 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_m} \phi_1 \frac{\partial G}{\partial x} (\xi, R, t_F, t) dt \quad ; \quad (4.57)$$

$$H_1^2 = kR \int_{t_{F-1}}^{t_m} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial x} (\xi, R, t_F, t) dt \quad . \quad (4.58)$$

Como: $t = t_F - t$ e $t_{F-1} \leq t < t_F$, então, para $t=t_F$ tem-se que $t = 0$ e para $t=t_{F-1}$ tem-se que $t = h$.

Portanto $0 \leq t \leq h$. Logo se $t_m > h$ (t_m é o valor da variável t quando $x=3,75$), significa que o argumento (x) das funções de Bessel modificada durante todo o intervalo de integração é superior a 3,75. Neste caso :

$$t_m = 0 \quad ; \quad (4.59)$$

$$G_1^1 = 0 ; \quad (4.60)$$

$$G_1^2 = 0 ; \quad (4.61)$$

$$H_1^1 = 0 ; \quad (4.62)$$

$$H_1^2 = 0 . \quad (4.63)$$

Os termos G_2^1 , G_2^2 , H_2^1 e H_2^2 referem-se aos valores das integrais do contorno para $\xi=R$ no intervalo onde o argumento (x) da função de Bessel é superior a 3,75. Partindo das equações 4.35-4.38 e 4.50 pode-se escrever:

$$G_2^1 = kR \int_{t_m}^{t_F} \phi_1 G(\xi, R, t_F, t) dt ; \quad (4.64)$$

$$G_2^2 = kR \int_{t_m}^{t_F} \phi_2 G(\xi, R, t_F, t) dt ; \quad (4.65)$$

$$H_2^1 = kR \int_{t_m}^{t_F} \phi_1 \frac{\partial G}{\partial r} (\xi, R, t_F, t) dt ; \quad (4.66)$$

$$H_2^2 = kR \int_{t_m}^{t_F} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial r} (\xi, R, t_F, t) dt . \quad (4.67)$$

Levando em consideração as equações 4.14 e 4.15 e fazendo: $r=R$ e $\xi=R$ (contorno), obtém-se:

$$G = \frac{1}{2k\tau} \exp\left(\frac{-R^2}{2k\tau}\right) I_0\left(\frac{R^2}{2k\tau}\right) ; \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{R}{(2k\tau)^2} \exp\left(\frac{-R^2}{2k\tau}\right) \left[I_1\left(\frac{R^2}{2k\tau}\right) - I_0\left(\frac{R^2}{2k\tau}\right) \right] . \quad (4.69)$$

Nas equações 4.64-4.67 o argumento (x) das funções de Bessel é superior a 3,75, neste caso $I_0(x)$ e

$I_1(x)$ podem ser calculadas a partir das equações 4.46 e 4.47, respectivamente.

Substituindo a equação 4.46 em 4.68 e as equações 4.46 e 4.47 em 4.61, obtém-se respectivamente:

$$G = \frac{1}{R(2k\tau)^{1/2}} \sum_{i=0}^8 a_i \left(\frac{7,5k}{R^2} \right)^i \tau^i . \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{(2k\tau)^{3/2}} \sum_{i=1}^8 (b_i - a_i) \left(\frac{7,5k}{R^2} \right)^i \tau^i . \quad (4.71)$$

Substituindo a equação 4.70 em 4.64 e 4.65 e integrando-se analiticamente, chega-se aos seguintes resultados:

$$G_2^1 = \frac{1}{h} \left(\frac{k}{2} \right)^{1/2} \sum_{i=0}^8 a_i \left(\frac{7,5k}{R^2} \right)^i \frac{\tau_m^{i+3/2}}{i + 3 / 2} ; \quad (4.72)$$

$$G_2^2 = \left(\frac{k}{2} \right)^{1/2} \sum_{i=0}^8 a_i \left(\frac{7,5k}{R^2} \right)^i \frac{\tau_m^{i+1/2}}{i + 1 / 2} - G_2^1 . \quad (4.73)$$

Por sua vez, substituindo a equação 4.71 em 4.66 e 4.67 e integrando-se analiticamente tem-se:

$$H_2^1 = \frac{R}{2h(2K)^{1/2}} \sum_{i=1}^8 (b_i - a_i) \left(\frac{7,5k}{R^2} \right)^i \frac{\tau_m^{i+1/2}}{i + 1 / 2} ; \quad (4.74)$$

$$H_2^2 = \frac{R}{2(2k)^{1/2}} \sum_{i=1}^8 (b_i - a_i) \left(\frac{7,5k}{R^2} \right)^i \frac{\tau_m^{i-1/2}}{i - 1 / 2} - H_2^1 . \quad (4.75)$$

Para a solução da formulação integral 4.43 da equação da difusão cilíndrica unidimensional (função do

raio), basta colocá-la em $x=R$ e em conjunto com a condição de contorno, resolver este sistema de duas equações. Todos os coeficientes que aparecem na equação 4.43 foram definidos neste item.

Contudo, quando a condição de contorno for definida através de uma equação implícita na forma:

$$aq(R,t) = bu(R,t) + c ; \quad (4.76)$$

onde: a , b e c são constantes, pode-se substituir a equação 4.76 em 4.43, resultando em uma única equação linear no contorno.

V - MODELAGEM MATEMÁTICA

5.1 Preliminares

Neste trabalho a secagem da gelatina é dividida em duas fases. Durante a primeira fase devido ao alto teor de umidade no sólido, o processo de secagem é controlado pela resistência à transferência de massa do vapor da água formado na superfície do sólido até o seio do gás. Durante esta etapa a secagem ocorre como se o material estivesse coberto com uma película de água, portanto o gradiente de concentração no interior da partícula é nulo.

A segunda fase de secagem inicia-se quando a umidade da gelatina atinge o valor da umidade crítica. Durante esta etapa o processo é controlado pela difusão da água no interior do gel. Como a evaporação ocorre somente na superfície da gelatina, conforme discutido no item 2.2.2, para determinar a quantidade de água que evaporou durante um determinado intervalo de tempo é necessário o conhecimento do valor da umidade na superfície da partícula. Nesta fase são dois os mecanismos que influenciam a secagem da gelatina. O primeiro é a difusão da água no interior do gel até a superfície onde ocorre a evaporação e o segundo é a difusão do vapor da água até o seio do gás.

As dimensões médias das partículas cilíndricas de gelatina utilizadas nos ensaios de secagem são: diâmetro, $d = 3,00 \text{ mm}$ e altura, $Z = 5,00 \text{ cm}$, conforme ilustrado na figura 5.1.

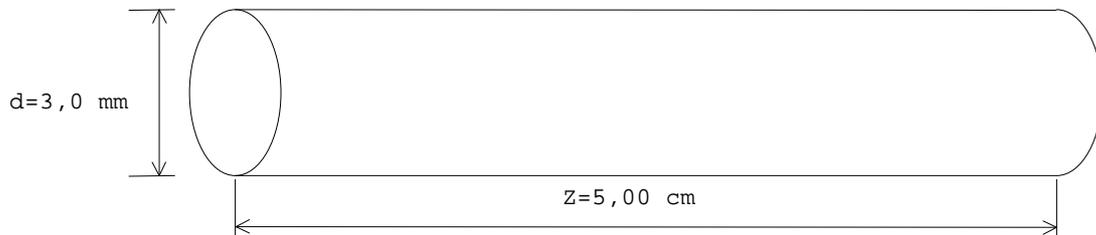


FIGURA 5.1 - Cilindro de gelatina

5.2 Modelagem de secagem da partícula cilíndrica de gelatina.

Para a formulação matemática do modelo de secagem da partícula, considerou-se que o ar circula unidirecionalmente na direção paralela à direção transversal do filamento de gelatina e adicionalmente:

- face à falta de informação, o coeficiente de difusão da água dentro do gel é constante;
- a umidade de equilíbrio é função apenas da umidade relativa do gás e do material (gelatina) usado;
- a força motriz para o processo de difusão da água no interior do gel é proveniente exclusivamente do gradiente de concentração da água no gel;
- a transferência de calor por condução predomina sobre o processo de transferência de energia devido à migração da água no interior da partícula;

- o volume da partícula permanece constante;
- a evaporação da água ocorre somente na superfície da gelatina, conforme discutido em 2.2.1;
- a evaporação ocorre somente na área lateral, pois esta é aproximadamente cerca de 30 vezes maior que a superfície transversal;
- o calor de desorção do sistema água-gelatina é igual ao calor de vaporização da água.

Desta forma pode ser obtido o seguinte conjunto de equações:

a)- Balanço de massa na partícula cilíndrica de gelatina.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rD \frac{\partial u}{\partial r} \right) . \quad (5.1)$$

- *Condição Inicial:*

$$u(0, r) = X_c . \quad (5.2)$$

- *Condição de contorno:*

$$\frac{\partial u}{\partial r}(t, R) = \frac{-\Psi_p}{\rho_s D} . \quad (5.3)$$

b)- Balanço de energia na partícula cilíndrica de gelatina.

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\alpha \frac{\partial T_p}{\partial r} \right) . \quad (5.4)$$

- *Condição Inicial:*

$$T_p(0, r) = T_{p0} . \quad (5.5)$$

- Condição de contorno:

$$\frac{\partial T_p}{\partial r}(t, R) = \frac{h_c(T_{ar} - T_p)}{\rho_s \alpha} - \frac{\Psi_p}{\rho_s \alpha} \Delta H_s \quad . \quad (5.6)$$

Na equação 5.6, Ψ_p representa a taxa secagem da partícula de gelatina por área de evaporação (kg água / m² h), cuja a origem desta expressão é discutida no item 2.2.2 e adota-se a seguinte expressão:

$$\Psi_p = k_y \left(\bar{Y}_{sat}(T_p(t, R)) - \bar{Y}_{ar} \right) \frac{(u(t, R) - X_e)}{(X_c - X_e)} \quad . \quad (5.7)$$

Para a conversão das unidades da umidade do ar de (kgmol água / kgmol ar úmido) para (kg água / kg ar seco), usa-se a equação:

$$\bar{Y} = \frac{M_w Y}{M_{ar}(1 - Y)} \quad . \quad (5.8)$$

Nas equações 5.1-5.8, tem-se:

D - Coeficiente de difusão mássica (m² / h);

h_c - Coeficiente de transferência de calor convectivo (J / m² °K h);

k_y - Coeficiente de transferência de massa (kg água / $\Delta \bar{Y}$ m² h);

M_{ar} - Peso molecular do ar (kg / kgmol);

M_w - Peso molecular da água (kg / kgmol);

r - Eixo do sistema de coordenadas cilíndricas (m);

R - Raio da partícula (m);

t - tempo (h);

T_{ar} - Temperatura do ar (°K);

- T_p - Temperatura da partícula (°K);
 u - Umidade da partícula (kg água / kg gelatina seca);
 X_e Umidade de equilíbrio (kg água / kg gelatina seca);
 X_c Umidade crítica (kg água / kg gelatina seca), cuja expressão é definida pela equação 2.9;
 Y - Umidade do ar (kgmol água / kgmol ar úmido);
 \bar{Y} - Umidade do ar (kg água / kg ar seco);
 \bar{Y}_{sat} - Umidade de saturação do ar (kg de água / kg do ar seco);
 a - Difusividade térmica (m² / h);
 DH_s - Calor de desorção (J / Kg água);
 r_s - Densidade da gelatina seca (kg / m³).

Os termos X_c , X_e , \bar{Y}_{sat} e DH_s são calculados através de expressões definidas pelas seguintes equações 2.10, 2.11, 2.14 e 2.9, respectivamente.

5.3 Modelagem da secagem da gelatina no interior do leite.

Para a descrição matemática do fenômeno de secagem do leite considera-se que o ar seco circula unidirecionalmente através do leite fixo formado pelos filamentos cilíndricos de gelatina depositados no interior do secador, e toma-se como referências trabalhos

realizados por MEDEIROS & MASSARANI (1982), NEITZEL² (1987) e NEITZEL³ (1987).

Considerações para a obtenção do modelo:

- o ar comporta-se como gás ideal, nas condições de modelagem;
- escoamento do ar é empistonado ("Plug-flow") e suas propriedades variam apenas na direção de escoamento do gás;
- o processo é adiabático, pois o secador utilizado nos ensaios de secagem está isolado termicamente;
- a capacidade calorífica da gelatina é função apenas do teor de umidade presente no filme;
- os processos convectivos predominam sobre os difusivos nos fenômenos de transferência de massa e de calor na direção de escoamento do gás;
- o leito é formado por camadas dos filamentos cilíndricos de gelatina;
- o volume do leito é constante;

Com bases nestas considerações pode ser obtido o seguinte conjunto de equações:

a)- Balanço de quantidade de movimento no gás.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - 2 \frac{F}{C} \frac{\partial F}{\partial z} + \left(\frac{F}{C} \right)^2 \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{R_g C}{M_{ar}} \frac{\partial T_{ar}}{\partial z} - \frac{R_g T_{ar}}{M_{ar}} \frac{\partial C}{\partial z} \quad (5.9)$$

b)- Balanço de massa no gás.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\Psi}{M_w \epsilon} - \frac{\partial F}{\partial z} \quad (5.10)$$

c)- Balanço de massa do componente água no gás.

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\Psi}{M_w \varepsilon} \frac{(1 - Y)}{C} - \frac{F}{C} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (5.11)$$

d)- Balanço de energia no gás.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ar}}{\partial t} = & \frac{1}{C_{Var} C} \left(\frac{\Psi}{\varepsilon} \Delta H_s - \frac{h_c a}{\varepsilon} (T_g - T_{ar}) \right) - \\ & \frac{1}{C_{Var} C} \left(F C_{Par} \frac{\partial T_{ar}}{\partial z} + R_g T_{ar} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

e)- Balanço de energia na gelatina.

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = \frac{1}{\rho_a (\bar{C}_{Ps} + X \bar{C}_{Pl})} \left(\frac{h_c a}{\varepsilon} (T_{ar} - T_g) - \Psi \Delta H_s \right) \quad (5.13)$$

f)- Balanço de massa na gelatina.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = - \frac{\Psi}{\rho_a} \quad (5.14)$$

O termo Ψ é a função que representa a taxa de secagem por unidade de volume do leite (kg água evaporada/hora x metro cúbico) , sendo definida de maneira distinta de acordo com o mecanismo que controla a taxa de secagem, conforme discutido nos itens 2.2.2 e 5.1. Em função disto pode-se definir a seguinte expressão para a taxa de secagem de acordo com as etapas de secagem:

- Durante a primeira fase do processo de secagem:

$$\Psi = k_y a (\bar{Y}_{sat}(T_g) - \bar{Y}) \quad (5.15)$$

- Durante a segunda fase de secagem:

$$\Psi = k_y a (\bar{Y}_{sat}(T_p(t, R)) - \bar{Y}) \frac{(u(t, R) - X_e)}{(X_c - X_e)} \quad (5.16)$$

Nas equações 5.9-5.16, tem-se:

- a - Área de transferência por unidade de volume do leito
(m^2/m^3);
- C - Concentração do gás ($\text{kgmol ar} / \text{m}^3$);
- C_{Par} - Calor específico a pressão constante [molar]
($\text{J} / \text{kgmol } ^\circ\text{K}$);
- \bar{C}_{Pl} - Calor específico a pressão constante da água na
fase líquida [mássico] ($\text{J} / \text{kg } ^\circ\text{K}$);
- \bar{C}_{Ps} - Calor específico a pressão constante da gelatina
seca [mássico] ($\text{J} / \text{kg } ^\circ\text{K}$);
- C_{Var} - Calor específico a volume constante do ar ($\text{J} /$
 $\text{kgmol } ^\circ\text{K}$);
- F - Velocidade molar ($\text{kgmol ar} / \text{m}^2 \text{ h}$);
- h_c - coeficiente de transferência de calor convectivo
($\text{J} / \text{m}^2 \text{ h } ^\circ\text{K}$);
- k_y - Coeficiente de transferência de massa` ($\text{kg água} /$
 $\Delta\bar{Y} \text{ m}^2 \text{ h}$);
- M_{ar} - Peso Molecular do ar (kg / kgmol);
- M_w - Peso Molecular da água (kg / kgmol);
- t - tempo (h);
- T_{ar} - Temperatura do ar ($^\circ\text{K}$);
- T_g - Temperatura da gelatina ($^\circ\text{K}$);
- T_p - Temperatura da partícula de gelatina ($^\circ\text{K}$);
- X - Umidade da partícula ($\text{kg água} / \text{kg gelatina seca}$);
- X_c - Umidade crítica ($\text{kg água} / \text{kg gelatina seca}$);

- X_e - Umidade de equilíbrio (kg água / kg gelatina seca);
 Y - Umidade do ar (kgmol água / kgmol ar úmido);
 \bar{Y} - Umidade do ar (kgmol água / kgmol ar seco);
 \bar{Y}_{sat} - Umidade de saturação do ar (kgmol água / kgmol ar seco);
 z - Eixo ordenando paralelo ao escoamento do ar (m);
 ϵ - Porosidade do Leito;
 ρ_a - Densidade aparente (kg / m³);
 ΔH_s - Calor de desorção da gelatina (J/kg gelatina seca);
 ψ - Taxa de secagem por unidade de volume do leito (kg água / m³ h).

Os termos X_c , X_e , \bar{Y}_{sat} e ΔH_s são calculados através de expressões definidas pelas seguintes equações 2.10, 2.11, 2.14 e 2.9, respectivamente.

Condições iniciais :

$$C = C_0; \quad (5.17)$$

$$Y = Y_0; \quad (5.18)$$

$$T_{ar} = T_{ar_0}; \quad (5.19)$$

$$F = F_0; \quad (5.20)$$

$$T_s = T_{s_0}; \quad (5.21)$$

$$X = X_0. \quad (5.22)$$

Condições de Alimentação do ar (z = 0)

$$C = C_0; \quad (5.23)$$

$$Y = Y_0; \quad (5.24)$$

$$T_{ar} = T_{ar_0}; \quad (5.25)$$

$$F = F_0. \quad (5.26)$$

Pode-se observar através da equação 5.16 que para a determinação da taxa de secagem durante a segunda fase, são necessários conhecer a umidade $u(R,t)$ e a temperatura $T_p(t,R)$ da partícula cilíndrica de gelatina na superfície ($r=R$). Desta forma o sistema de equações 5.1-5.8 (partícula) e 5.9-5.26 (leito) deve ser resolvido simultaneamente.

VI - RESOLUÇÃO DOS MODELOS

6.1 Resolução do modelo de secagem da partícula de gelatina

Para investigar o perfil de temperatura e de umidade no interior do gel, inicialmente a equação da difusão que descreve os fenômenos de transferência de massa e calor foi resolvida isoladamente utilizando a técnica de elementos de contorno, isto é, no problema de transferência de massa descrito pela equação 5.1 considerou-se a partícula isotérmica e no problema de transferência de calor descrito pela equação 5.4 considerou-se como nulo o gradiente de concentração de umidade no interior da partícula.

Através dos resultados obtidos da solução destas duas equações, verificou-se que quando a partícula cilíndrica é submetida a um gradiente de temperatura de 20°C o equilíbrio térmico é rapidamente estabelecido (cerca de 0,02 horas) quando comparado com o fenômeno de transferência de massa (cerca de 1,60 horas). Estes resultados podem ser explicados face à diferença da ordem de grandeza entre os coeficientes de difusão mássica e térmica da gelatina. O coeficiente de difusão térmica é cerca de 1000 vezes superior ao coeficiente de difusão mássica. Portanto a energia migra numa velocidade muito superior à umidade. Em função disto, neste trabalho assume-se como nulo o gradiente de temperatura no interior da

partícula, isto é, a temperatura da partícula de gelatina é função somente do tempo, motivo pelo qual neste item usa-se somente a formulação integral da equação 5.1 referente ao fenômeno de transferência de massa, que é a equação da difusão cuja abordagem numérica foi realizada no capítulo IV deste trabalho.

Para a resolução numérica da equação da difusão, considerou-se que a umidade do ar (Y_{ar}) e a temperatura da partícula de gelatina (T_p) permanecem constantes a cada passo de avanço de tempo. Com base nestas considerações, pode-se escrever a seguinte equação à partir da condição de contorno equação 5.3:

$$q = \mathbf{b}(X - X_e) \quad ; \quad (6.1)$$

onde \mathbf{b} é uma constante calculada por:

$$\beta = \frac{k_y (\bar{Y}_{sat}(T_p) - \bar{Y})}{\rho_s D (X_c - X_e)} \quad . \quad (6.2)$$

Substituindo a equação 6.2 em 4.43, obtém-se:

$$c(\xi)u(\xi, t_F) + H^1 u(R, t_{F-1}) + (H^2 + \beta G^2) u(R, t_F) = G^1 q(R, t_{F-1}) + \beta G^2 X_e + B \quad (6.3)$$

Quando $\xi=R$, tem-se que $c(\xi)=1/2$, portanto a equação 6.3 fica sendo:

$$\left(H^2 + \beta G^2 + \frac{1}{2} \right) u(R, t_F) = G^1 q(R, t_{F-1}) + \beta G^2 X_e + B - H^1 u(R, t_{F-1}) \quad . \quad (6.4)$$

Obtém-se, desta forma, uma única equação linear, cuja incógnita é o valor da umidade na superfície da

gelatina $u(R,t)$ e que após sua solução permite calcular o gradiente de umidade na superfície da gelatina a partir da equação 6.1.

Valores da umidade no interior da partícula são necessários para calcular a integral de domínio B , usada no próximo passo de avanço no tempo. Quando $\xi \in \Omega$ (domínio), tem-se que $c(\xi)=1$, que substituindo na equação 6.3, fornece:

$$u(\xi, t_F) = G^1 q(R, t_{F-1}) + \beta G^2 X_e + B - H^1 u(R, t_{F-1}) - (H^2 + \beta G^2) u(R, t_F) . \quad (6.5)$$

A equação 6.5 permite o cálculo dos valores da umidade no interior da gelatina, desde que os valores da umidade e do fluxo no contorno ($r = R$) sejam conhecidos.

O valor do passo de avanço no tempo quando se utiliza a técnica de elementos de contorno deve ser selecionado adequadamente. Valores de passo muito pequenos podem ocasionar problemas de instabilidade numérica, em função dos resultados do cálculo das integrais que se tornam muito pequenos. Grandes valores do passo não são capazes de captar adequadamente as alterações dos valores das variáveis incógnitas.

A seleção do passo de avanço no tempo a ser empregado na técnica de elementos de contorno foi feita, baseando-se em considerações físicas da secagem. Para isto, tomou-se a umidade média da partícula cilíndrica de gelatina que pode ser determinada de duas formas:

a)- através de um balanço de massa, tem-se:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Variação de peso} \\ \text{da partícula} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Quantidade de água} \\ \text{que evaporou} \end{array} \right];$$

isto é;

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{Dp_s}{m_s} q(R, t) . \quad (6.6)$$

Substituindo a equação 4.33 em 6.6 e integrando em relação a t , no intervalo de tempo t_{F-1} a t_F , tem-se:

$$\bar{u}(t_F) = \bar{u}(t_{F-1}) + \frac{Dp_s}{m_s} q(R, t_{F-1}) \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_1 dt + \frac{Dp_s}{m_s} q(R, t_F) \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi_2 dt . \quad (6.7)$$

b)- através da definição de valor médio:

$$\bar{u}(t_F) = \frac{\int_0^R u(r, t_F) r dr}{\int_0^R r dr} . \quad (6.8)$$

Nas equações 6.6-6.8 tem-se:

D - Coeficiente de difusão do sistema água-gelatina (m^2/h);

m_s - Massa da partícula de gelatina seca (kg);

t - Tempo (h);

$q(R, t)$ - Gradiente de concentração da água na superfície da gelatina (kg água/kg gelatina seca m);

r - Eixo radial do sistema de coordenadas cilíndricas (m);

R - Raio da partícula (m);

t - Tempo (h);

$\bar{u}(t_F)$ - Umidade média da partícula no instante de tempo t_F (kg água/kg gelatina seca);

- $\bar{u}(t_{F-1})$ - Umidade média da partícula no instante de tempo t_{F-1} (kg água/kg gelatina seca);
- ρ_s - Densidade da gelatina seca (kg/m³).

O valor do passo de avanço no tempo h adotado na técnica de elementos de contorno, influencia no cálculo da umidade média da partícula definida através das equações 6.6 e 6.8. Em função disso, adotou-se para passo de avanço no tempo, $h=0.02$ horas, pois para este valor de h as equações 6.6 e 6.8 fornecem resultados muito semelhantes.

Quando as condições de alimentação do ar são alteradas bruscamente, as propriedades do ar e da gelatina no interior do leito também se modificam sensivelmente durante um determinado intervalo de tempo. Portanto, a consideração da temperatura da gelatina e da umidade do ar permanecerem constantes durante o intervalo de tempo h não é apropriada. Em vista disto, quando há alterações nas condições de alimentação do ar um determinado instante de tempo (t_a), adotou-se a seguinte estratégia: inicialmente resolve-se a equação da difusão utilizando o mesmo valor do passo de avanço no tempo (h). Em seguida o conjunto de equações da modelagem do leito são resolvidas utilizando o passo de avanço no tempo h_g .

Onde:

h_g - é intervalo de tempo em que se deseja a solução das equações diferenciais ordinárias do leito, que foi escolhido como sendo, $h_g = 0.0001$ horas.

Os valores da umidade no interior da partícula são interpolados no tempo e com os novos valores da umidade do ar e da temperatura da gelatina o modelo de secagem da partícula é novamente resolvido. Este procedimento é repetido até que o instante de tempo (t) alcance o valor de ($t_a + h$), pois decorrido o intervalo de tempo h após o momento da mudança das condições de alimentação do ar utilizado na secagem, verifica-se que a temperatura da gelatina e a umidade do ar se alteram menos significativamente em relação ao tempo. A partir daí, assume-se que estas variáveis permanecem constantes durante o intervalo de avanço de tempo h empregado na técnica de elementos de contorno.

6.2 Resolução do modelo de secagem da gelatina no leito fixo

O conjunto de equações diferenciais 5.9-5.14 foram discretizadas na variável z (altura do leito), por meio de diferenças finitas para trás, transformando o conjunto de seis equações diferenciais parciais em um sistema de $(6n)$ equações diferenciais ordinárias, onde n é o número de células de discretização. No caso em particular, utilizou-se $n=7$, conforme ilustrado na figura 6.1.



FIGURA 6.1 - Discretização do leito de gelatina.

As condições de alimentação do ar utilizado nos ensaios de secagem eram alteradas somente após decorridos longos intervalos de tempo, visando simular as condições de secagem da gelatina dentro das câmaras do secador esteira. Portanto as condições de contorno do ar ($z=0$) podem ser escritas na seguinte forma:

para $i=1$, tem-se:

$$\frac{dF_0}{dt} = 0 ; \quad (6.9)$$

$$\frac{dC_0}{dt} = 0 ; \quad (6.10)$$

$$\frac{dY_0}{dt} = 0 ; \quad (6.11)$$

$$\frac{dT_{ar0}}{dt} = 0 . \quad (6.12)$$

Para a determinação das equações que se referem as variáveis do leito de gelatina (temperatura e umidade)

na entrada do secador ($z=0$), basta fazer $i=1$ e substituir nas equações 6.17e 6.18

O sistema de equações discretizadas, para $i=2,n$, fica sendo :

$$\frac{dF_i}{dt} = - 2 \frac{F_i}{C_i} \frac{(F_i - F_{i-1})}{\Delta z} + \left(\frac{F_i}{C_i} \right)^2 \frac{(C_i - C_{i-1})}{\Delta z} - \frac{R_g C_i}{M_{ar}} \frac{(T_{ar_i} - T_{ar_{i-1}})}{\Delta z} - \frac{R_g T_{ar_i}}{M_{ar}} \frac{(C_i - C_{i-1})}{\Delta z} ; \quad (6.13)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\Psi_i}{M_w \varepsilon} - \frac{(F_i - F_{i-1})}{\Delta z} ; \quad (6.14)$$

$$\frac{dY_i}{dt} = \frac{\Psi_i}{M_w \varepsilon} \frac{(1 - Y_i)}{C_i} - \frac{F_i}{C_i} \frac{(F_i - F_{i-1})}{\Delta z} ; \quad (6.15)$$

$$\frac{dT_{ar_i}}{dt} = \frac{\Psi_i}{\varepsilon C_{Var} C_i} \Delta H_s - \frac{ha}{\varepsilon C_{Var} C_i} (T_{g_i} - T_{ar_i}) - \frac{F_i C_{Par}}{C_{Var} C_i} \frac{(T_{ar_i} - T_{ar_{i-1}})}{\Delta z} - \frac{R_g T_{ar_i}}{C_{Var} C_i} \frac{(F_i - F_{i-1})}{\Delta z} ; \quad (6.16)$$

$$\frac{dT_{g_i}}{dt} = \frac{1}{\rho_a (\bar{C}_{Ps} + X \bar{C}_{Pl})} \left(\frac{ha}{\varepsilon} (T_{ar_i} - T_{g_i}) - \Psi_i \Delta H_s \right) ; \quad (6.17)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = - \frac{\Psi_i}{\rho_a} ; \quad (6.18)$$

onde:

$$\Psi = ky a (\bar{Y}_{sat}(T_s) - \bar{Y}_{ar}) , \quad X \geq X_c ; \quad (6.19)$$

$$\Psi = kya (\bar{Y}_{sat}(T_s) - \bar{Y}_{ar}) \frac{(u(t, R) - X_e)}{(X_c - X_e)} , \quad X < X_c . \quad (6.20)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias 6.9-6.18 e a equação da taxa de secagem foram resolvidas

através do método Gear com passo variável e Jacobiano calculado numericamente. Este método é estável mesmo quando os autovalores associados as equações diferenciais apresentam ordem de grandezas bastante distintas. A subrotina IVPAG pertencente a biblioteca IMSL foi utilizada para a resolução deste problema. O valor inicial de passo no tempo, h_a , utilizado no método de Gear foi de: $h_g = 0.00001$ horas.

A forma de solução empregada para solução do modelo depende da fase de secagem:

a)- Primeira fase de secagem.

Durante a primeira fase de secagem, verifica-se a inexistência de gradientes de umidade no interior da partícula. O término desta fase ocorre quando $X_c > X$ conforme discutido no item 2.2.2. O conjunto de equações 6.9-6.18 e a equação 6.19 que define a taxa de secagem durante esta etapa são resolvidos através do método de Gear.

b)- Segunda fase de secagem.

Durante esta fase, verifica-se a formação de gradientes de concentração de umidade no interior da partícula. A equação 6.20 é quem define a taxa de secagem durante esta etapa e tem início quando $X < X_c$. Contudo para determinar a taxa de secagem nesta fase (equação 6.20) é necessário conhecer a umidade na superfície da partícula cilíndrica $u(R,t)$. Portanto o modelo de secagem da

partícula deve ser resolvido simultaneamente com o modelo de secagem do leite.

Assim, o sistema de equações 6.9-6.18 e 6.20 (modelagem do leite) é resolvido utilizando o método de Gear, simultaneamente com a equação da difusão 5.1 (modelagem do filamento cilíndrico de gelatina) que é resolvida por meio da técnica de elementos de contorno.

VII - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

O procedimento de estimação de parâmetros tem por finalidade ajustar os parâmetros de maior influência na resolução do modelo matemático do processo de secagem . As formas das funções para o cálculo dos coeficientes de transferência de massa (k_y) e de calor convectivo (h_c) e também a exatidão dos valores numéricos dos parâmetros envolvidos nestas duas funções é vital para o sucesso da simulação (MEDEIROS & MASSARANI, 1982). Desta forma, estes dois coeficientes foram encontrados via processo de otimização. Além destes coeficientes, face à ausência de informações o coeficiente de difusão mássica da água na gelatina, teve seu valor determinado através deste mesmo procedimento.

Portanto os parâmetros:

$q_1 = k_y$ - Coeficiente de transferência de massa;

$q_2 = h_c$ - Coeficiente de transferência de calor convectivo;

$q_3 = D$ - Coeficiente de difusão mássica;

tiveram seus valores estimados através da minimização de um erro global quadrático (eq. 7.1), definido como: a soma dos quadrados das diferenças entre os valores experimentais da umidade média do leito e temperatura de saída do ar e os obtidos pela resolução do modelo utilizando o conjunto de valores $\underline{\theta}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ multiplicado por seus pesos correspondentes.

$$E(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} \omega_X [\bar{X}_{Exp}(t_i) - \bar{X}(t_i, \underline{\theta})]^2 + \omega_T [T_{Exp}(t_i) - T_{sar}(t_i, \underline{\theta})]^2, \quad (7.1)$$

onde:

$E(\underline{\theta})$ - função erro ;

$n \text{ exp}$ - número de dados experimentais nos ensaios de secagem;

t_i - tempo do ensaio i ;

T_{Exp} - temperatura de saída do ar experimental;

T_{sar} - temperatura de saída do ar obtida através da resolução do modelo utilizando o conjunto de parâmetros $\underline{\theta}$.

\bar{X}_{Exp} - umidade média experimental do leito ;

\bar{X} - umidade média do leito calculada através da resolução do modelo utilizando o conjunto de parâmetros $\underline{\theta}$;

ω_X - peso da função erro referente a variável umidade média do leito;

ω_T - peso da função erro referente a variável temperatura de saída do leito;

A variável \bar{X} que aparece na equação 7.1 é calculada através de seu valor médio:

$$\bar{X} = \frac{1}{L} \int_0^L X(z) dz, \quad (7.2)$$

sendo a integral calculada através da regra de Simpson composta, ou seja:

$$\int_0^L X(z) dz = \frac{h}{3} \left[X(0) + X(L) + 4 \sum_{i=1}^{2n-1} X(z_{2i}) + 2 \sum_{j=2}^{2n-1} X(z_{2j}) \right]; \quad (7.3)$$

onde:

$$h = \frac{L}{2n - 1};$$

$$z_i = ih;$$

L - altura do leito;

n - número de células de discretização da altura do leito.

Os valores dos pesos da função erro foram atribuídos para refletir a maior importância atribuída à umidade média do leito em relação a temperatura do ar efluente. Para ω_x , tomou-se o valor unitário e para ω_T foram atribuídos valores na faixa entre 0 e 0.001. Nesta faixa, os resultados dos parâmetros encontrados à partir da minimização da função erro quadrático (equação 7.1) não se alteram significativamente. Quando se utiliza valores para ω_T superiores a 0.001, verifica-se que os resultados da umidade média do leito obtidos pelo modelos não conseguem acompanhar o formato da curva de secagem experimental.

Para minimizar a equação 7.1 utilizou-se a subrotina UMGF da biblioteca IMSL. Esta subrotina se baseia numa versão do algoritmo do gradiente conjugado na forma descrita por Powell (1977).

Os valores dos coeficientes de transferência de massa (k_y), de transferência de calor convectivo (h_c) e de

difusão mássica (D), obtidos são apresentados no item 8.1, do próximo capítulo e cujos valores foram utilizados na simulação numérica dos ensaios de secagem.

VIII - RESULTADOS

Foram utilizadas duas baterias de testes experimentais usando dados publicados por Neitzel²(1987).

8.1 Resultados da estimação de parâmetros

Os resultados dos valores dos parâmetros estimados (coeficientes: de transferência de massa(k_y) e de calor convectivo(h_c) e de difusão mássica(D)) para ambos os ensaios de secagem são apresentados nas tabelas 8.1 e 8.2, cujos valores foram obtidos através da minimização da função erro quadrático (equação 7.1).

Os valores previstos destes parâmetros apresentados nas tabelas 8.1 e 8.2, foram calculados à partir da literatura utilizando-se das equações: 2.13, 2.12 e 2.4, respectivamente.

TABELA 8.1 - Valores dos parâmetros estimados para o ensaio de secagem 01.

Parâmetros	Unidades	Equação	Valor previsto	Valor estimado
k_y	Kg / (m ² h ΔY)	2.13	490,7	57.9
h_c	J/(m ² h °K)	2.12	443700,0	436800,0
D	(m ² / h)	2.4	2,50x10 ⁻⁷	2.60x10 ⁻⁷

TABELA 8.2 - Valores dos parâmetros estimados para o ensaio de secagem 02.

Parâmetros	Unidades	Equação	Valor previsto	Valor estimado
k_y	Kg / (m ² h ΔY)	2.13	474,3	40,7
h_c	J/(m ² h °K)	2.12	429500,0	371900,0
D	(m ² / h)	2.4	2,50x10 ⁻⁷	8.50x10 ⁻⁷

8.2 Resultados do ensaio de secagem 01

As propriedades do leito, das partículas cilíndricas do recheio do leito e da condição de alimentação do ar utilizadas no ensaio de secagem 01 são apresentadas nas tabelas 8.3, 8.4 e 8.5.

TABELA 8.3 - Propriedades do leito no ensaio 01.

Porosidade do leito	=	0,72
Área de transferência	=	380,0 m ² /m ³
Temperatura	=	295,16 K°
Peso inicial	=	729,7 gramas
Umidade inicial	=	2,596 kg de água / kg sólido seco
Altura do leito	=	5,00 cm

TABELA 8.4 - Propriedades das partículas cilíndricas de gelatina no ensaio 01.

Diâmetro do cilindro	=	3,00	mm
Altura do cilindro	=	50,0	mm
Densidade da gelatina seca	=	392,0	Kg / m ³

TABELA 8.5 - Condição de alimentação do ar no ensaio 01.

tempo [min.]	Concentração do ar [kgmol / m ³]	Fluxo molar do ar [kgmol / m ² h]	Temperatura do ar [K°]	Umidade do ar [kgmol água/ kgmol ar]
0,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
4,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
8,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
12,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
16,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
18,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
20,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
24,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
28,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
32,0	0,03899	278,4	298,16	0,005733
36,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082
40,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082
44,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082
48,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082
52,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082
56,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082
60,0	0,03885	277,4	299,25	0,006082

Os modelos de secagem do leite e da partícula (equações:5.1-5.26) foram resolvidos simultaneamente, utilizando os valores das propriedades da partícula e do leite e as condições de alimentação do ar anteriormente apresentadas.

Os valores dos coeficientes de transferência de massa e de calor convectivo e de difusão mássica utilizados

na simulação numérica foram obtidos através do procedimento de estimação de parâmetros, cujos valores estão apresentados nas tabela 8.1.

Os resultados desta simulação são apresentados nos gráficos 8.1 a 8.9 e nas tabelas 8.6 e 8.7.

Na tabela 8.6 são apresentados os valores da umidade média obtidas por meio dos ensaios experimentais de secagem (Neitzel², 1987) e através da presente simulação numérica.

TABELA 8.6 - Comparação entre a umidade média do leito experimental e do modelo no ensaio 01.

tempo [min.]	Umidade do leito experimental (base seca)	Umidade do leito modelo (base seca)
0,0	2,560	2,560
4,0	2,346	2,442
8,0	2,223	2,289
12,0	2,103	2,137
16,0	1,980	1,985
20,0	1,861	1,837
24,0	1,760	1,718
28,0	1,658	1,628
32,0	1,540	1,551
36,0	1,457	1,483
40,0	1,417	1,420
44,0	1,392	1,361
48,0	1,321	1,308
52,0	1,284	1,258
56,0	1,211	1,212
60,0	1,137	1,168

Estes mesmos resultados em forma gráfica são apresentados na figura 8.1.

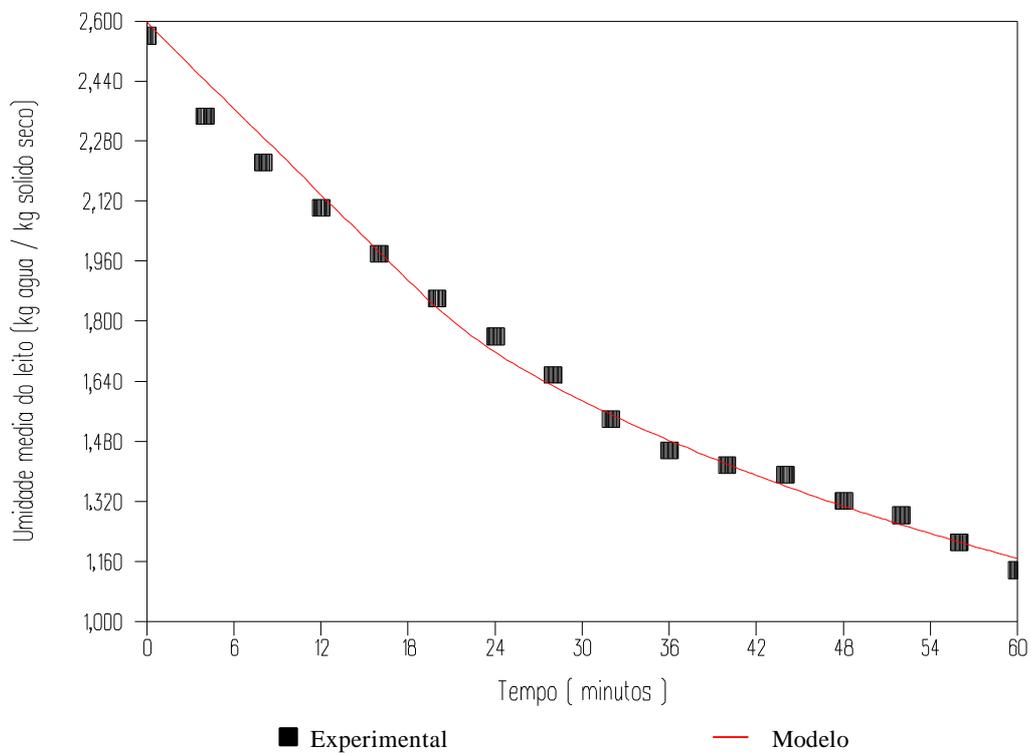


FIGURA 8.1 - Umidade média do leito em função do tempo de secagem no ensaio 01.

Na tabela 8.7 são apresentados os valores da temperatura de saída do ar obtidas por meio dos ensaios experimentais de secagem e através da presente simulação numérica.

TABELA 8.7 - Comparação entre a temperatura de saída do ar experimental e do modelo no ensaio 01.

tempo [min.]	temperatura de saída do ar [K°] experimental	temperatura de saída do ar [K°] modelo
0,0	298,16	298,00
4,0	288,00	294,89
8,0	288,00	294,89
12,0	288,00	294,89
16,0	288,00	294,89
20,0	288,63	295,04
24,0	289,25	295,69
28,0	289,25	296,24
32,0	289,88	296,49
36,0	289,88	296,68
40,0	289,88	297,84
44,0	291,75	297,97
48,0	291,75	298,07
52,0	291,75	298,15
56,0	291,75	298,23
60,0	292,38	298,29

Estes mesmos resultados em forma gráfica estão representados na figura 8.2.

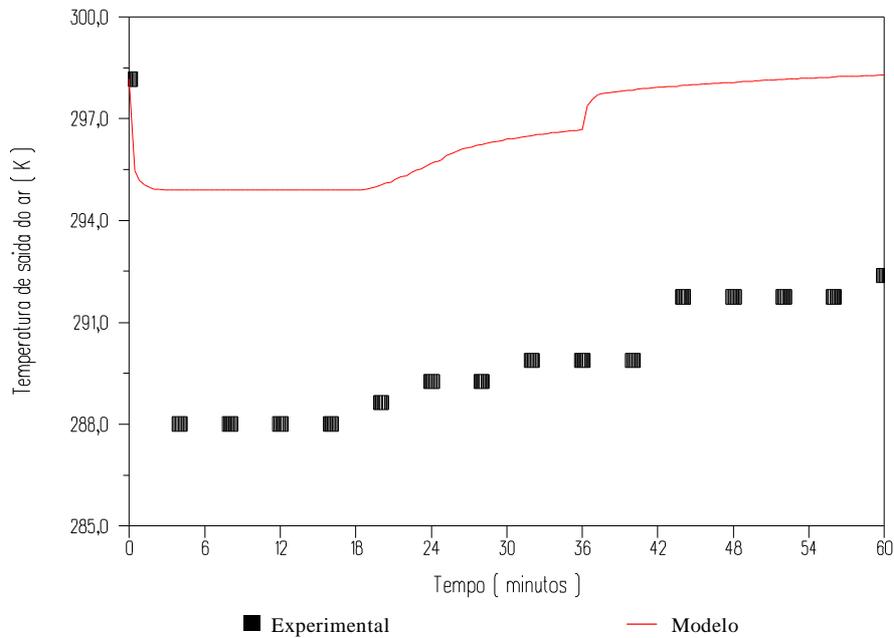


FIGURA 8.2 - Temperatura de saída do ar em função do tempo de secagem no ensaio 01.

Na figura 8.3 estão apresentados graficamente os resultados da simulação numérica referentes ao fluxo molar do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

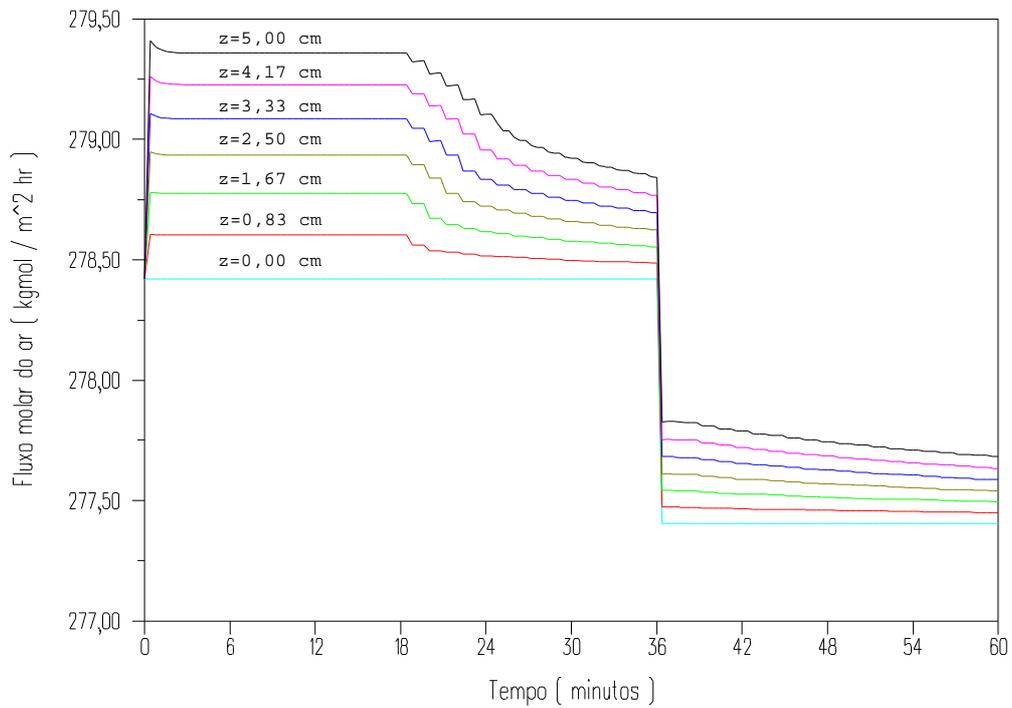


FIGURA 8.3 - Fluxo Molar do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01.

Na figura 8.4 estão apresentados graficamente os resultados da simulação numérica referentes a concentração molar do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

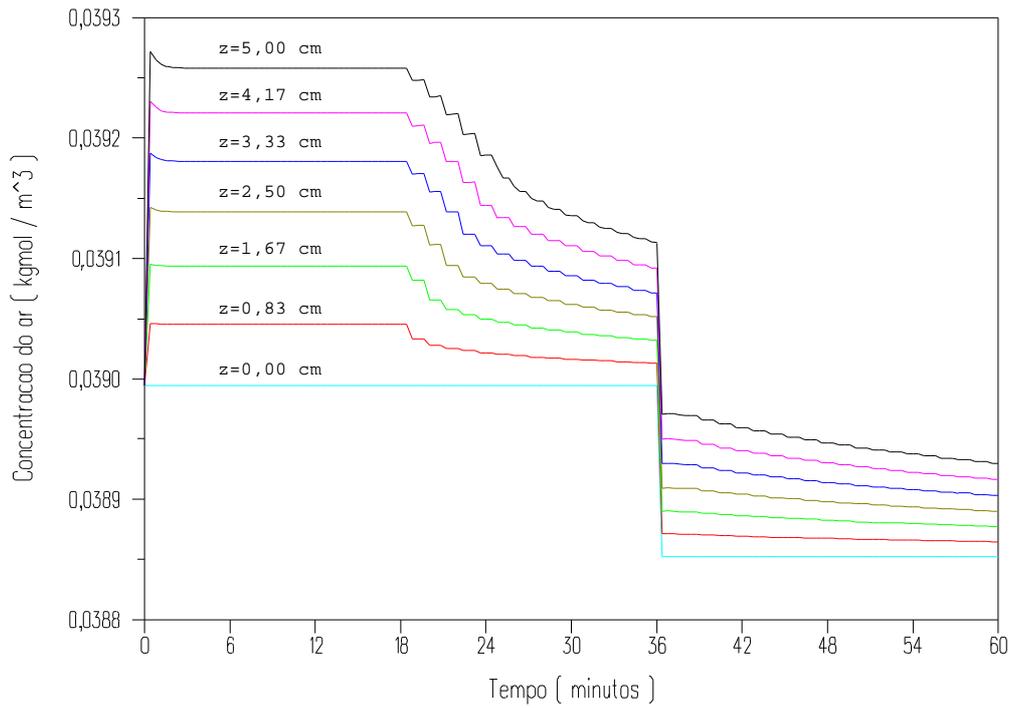


FIGURA 8.4 - Concentração do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01.

Na figura 8.5 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a umidade do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

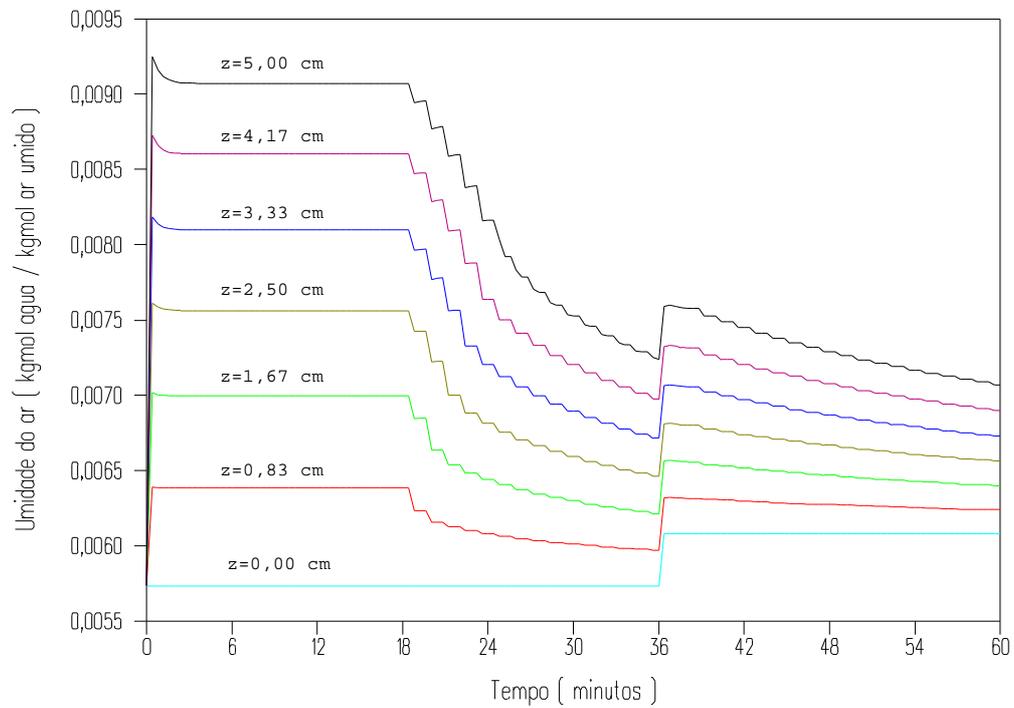


FIGURA 8.5 - Umidade do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01.

Na figura 8.6 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a temperatura do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

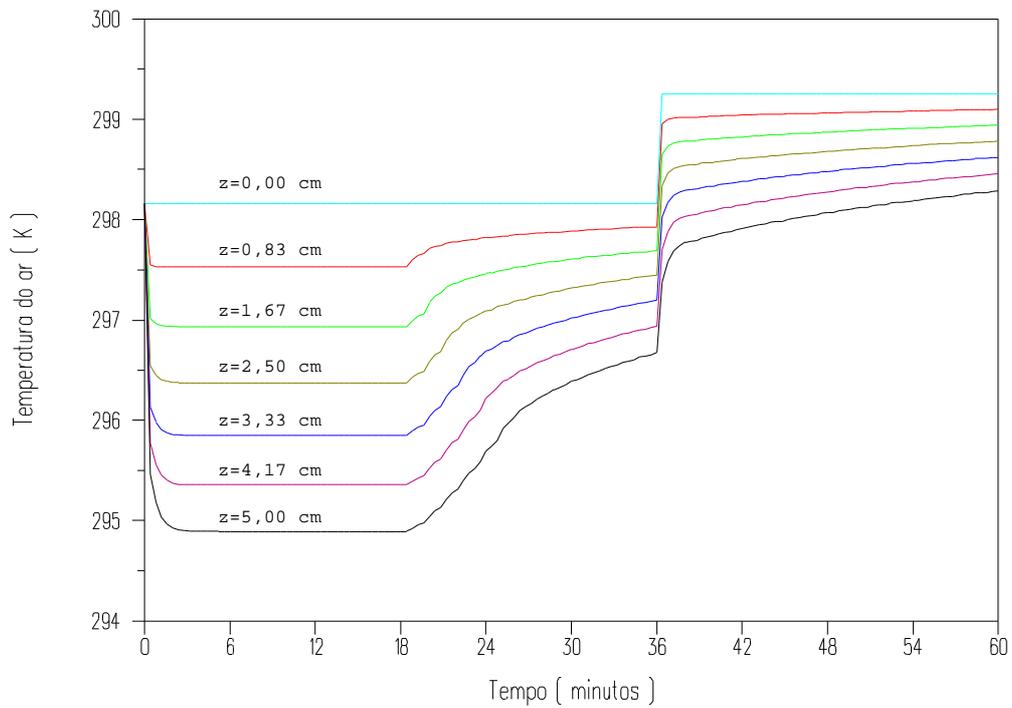


FIGURA 8.6 - Temperatura do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01.

Na figura 8.7 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a temperatura da gelatina para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

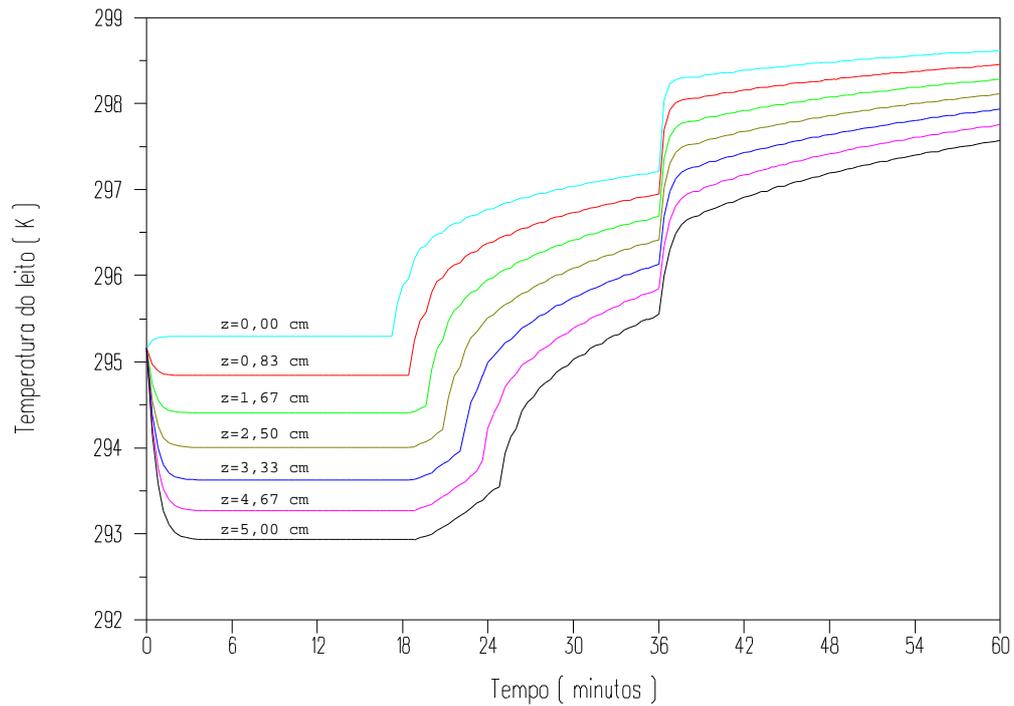


FIGURA 8.7 - Temperatura da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01.

Na figura 8.8 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a umidade da gelatina para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

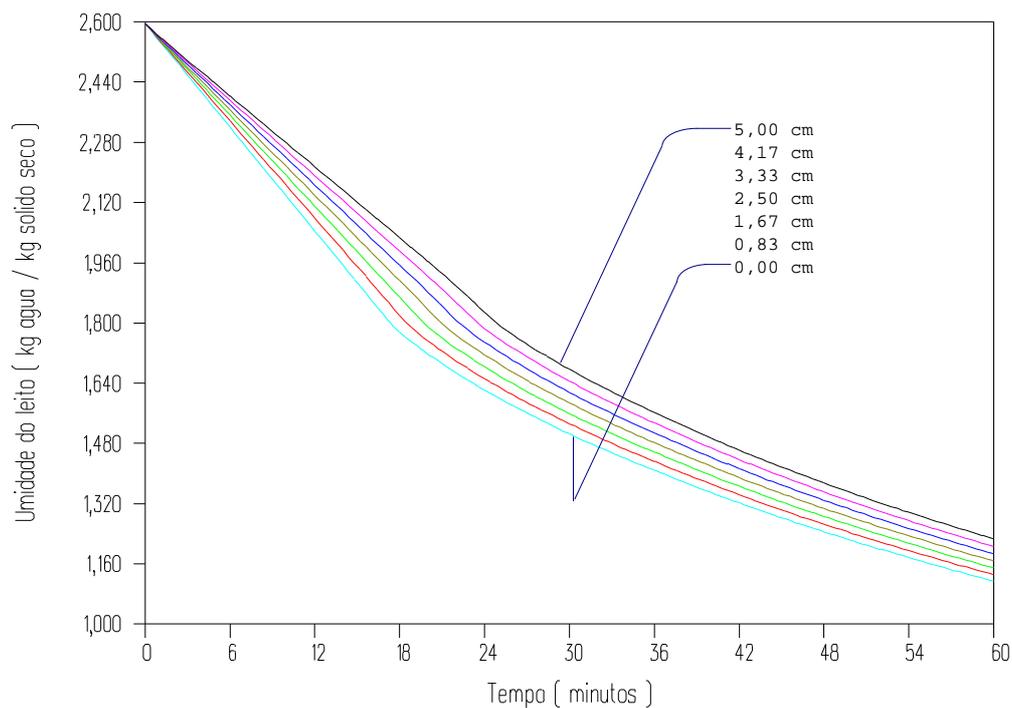


FIGURA 8.8 - Umidade da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 01.

Na figura 8.9 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes ao perfil de umidade no interior da partícula cilíndrica de gelatina na entrada do secador ($z=0$ cm).

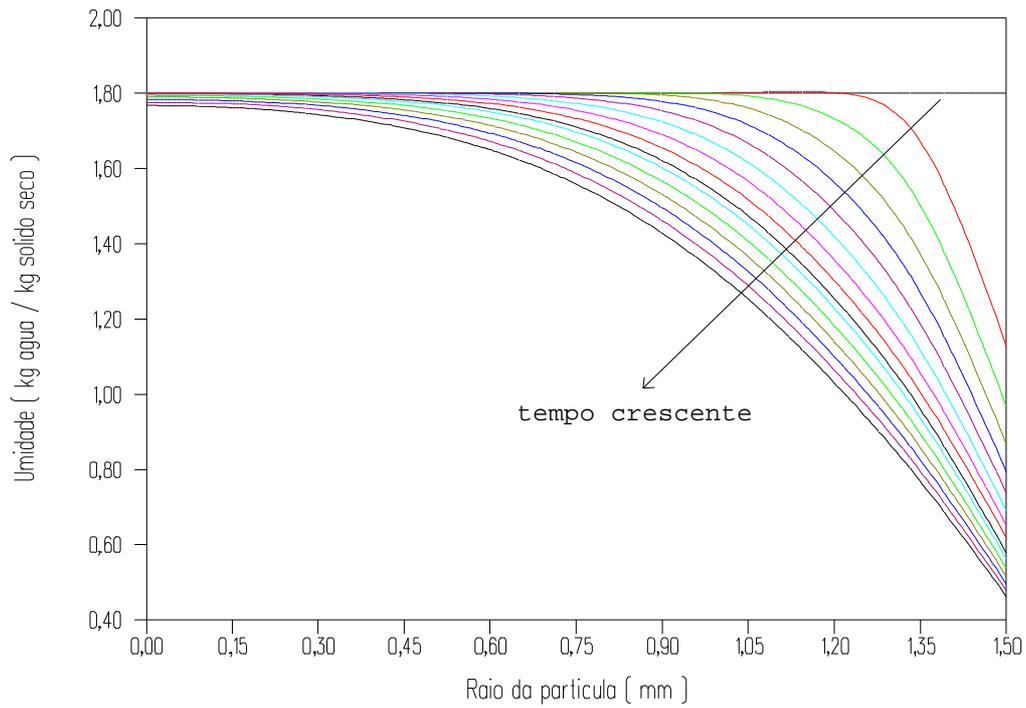


FIGURA 8.9 - Umidade no interior da partícula na altura $z = 0$ cm no ensaio 01.

8.3 Resultados do ensaio de secagem 02

As propriedades do leito, das partículas cilíndricas do recheio do leito e da condição de alimentação do ar utilizadas no ensaio de secagem são apresentadas nas tabelas 8.8, 8.9 e 8.10.

TABELA 8.8 - Propriedades do leito do ensaio 02.

Porosidade do leito	=	0,72
Área de transferência	=	380,0 m ² /m ³
Temperatura	=	291,16 K°
Peso inicial	=	1005,6 gramas
Umidade Inicial	=	2,779 kg de água / kg sólido seco
Altura do leito	=	7,00 cm

TABELA 8.9 - Propriedades das partículas cilíndricas de gelatina no ensaio 02.

Diâmetro do cilindro	=	3,00	mm
Altura do cilindro	=	50,0	mm
Densidade da gelatina seca	=	392.0	Kg / m ³

TABELA 8.10 - Condição de alimentação do ar no ensaio 02.

tempo [min.]	Concentração do ar [kgmol/m ³]	Fluxo molar do ar [kgmol / m ² h]	Temperatura do ar [K°]	Umidade do ar [kgmol água/ kgmol ar]
0,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
4,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
8,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
12,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
16,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
18,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
20,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
24,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
28,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
32,0	0,03966	257,0	293,16	0,004232
36,0	0,03760	243,6	309,25	0,017170
40,0	0,03707	240,2	313,63	0,023470
44,0	0,03775	244,6	308,00	0,017580
48,0	0,03767	244,1	308,63	0,018200
52,0	0,03775	244,6	308,00	0,017580
56,0	0,03744	242,6	310,50	0,014210
60,0	0,03744	242,6	310,50	0,014210
64,0	0,03671	237,9	316,75	0,014380
68,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
72,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
76,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
80,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
84,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
88,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
92,0	0,03656	236,9	318,00	0,010620
96,0	0,03579	231,9	324,88	0,008055
100,0	0,03551	230,1	327,38	0,008469
104,0	0,03531	228,8	329,25	0,009261
108,0	0,03531	228,8	329,25	0,009261
112,0	0,03545	229,7	328,00	0,006624
116,0	0,03545	229,7	328,00	0,006624
120,0	0,03545	229,7	328,00	0,006624
124,0	0,03478	225,4	334,25	0,007583
128,0	0,03491	226,2	333,00	0,007158
132,0	0,03491	226,2	333,00	0,007158
136,0	0,03491	226,2	333,00	0,007158
140,0	0,03491	226,2	333,00	0,007158
144,0	0,03491	226,2	333,00	0,007158

Os modelos de secagem do leite e da partícula (equações:5.1-5.26) foram resolvidos simultaneamente, utilizando os valores das propriedades da partícula e do leite e as condições de alimentação do ar anteriormente apresentadas.

Os valores dos coeficientes de transferência de massa e de calor convectivo e de difusão mássica utilizados na simulação numérica foram obtidos através do procedimento de estimação de parâmetros, cujos valores estão apresentados nas tabela 8.2.

Os resultados desta simulação são apresentados nos gráficos 8.10 a 8.18 e nas tabelas 8.11 e 8.12.

Na tabela 8.11 são apresentados os valores da umidade média obtidas por meio dos ensaios experimentais de secagem (Neitzel², 1987) e através da presente simulação numérica.

TABELA 8.11 - Comparação entre a umidade média do leite experimental e do modelo no ensaio 02.

tempo [min.]	Umidade do leite experimental (base seca)	Umidade do leite modelo (base seca)
0,0	2,779	2,779
4,0	2,670	2,693
8,0	2,589	2,608
12,0	2,510	2,524
16,0	2,428	2,439
20,0	2,350	2,355
24,0	2,259	2,270
28,0	2,184	2,186
32,0	2,110	2,101
36,0	2,048	2,016
40,0	1,921	1,891
44,0	1,782	1,750
48,0	1,652	1,645
52,0	1,549	1,555
56,0	1,457	1,473
60,0	1,361	1,382
64,0	1,263	1,296
68,0	1,170	1,196
72,0	1,085	1,097
76,0	1,001	1,008
80,0	0,928	0,928
84,0	0,850	0,855
88,0	0,784	0,789
92,0	0,728	0,728
96,0	0,661	0,673
100,0	0,609	0,610
104,0	0,555	0,552
108,0	0,493	0,499
112,0	0,461	0,453
116,0	0,418	0,413
120,0	0,384	0,376
124,0	0,343	0,344
128,0	0,300	0,310
132,0	0,279	0,283
136,0	0,258	0,258
140,0	0,243	0,236
144,0	0,208	0,216

Estes mesmos resultados em forma gráfica são apresentados na figura 8.10.

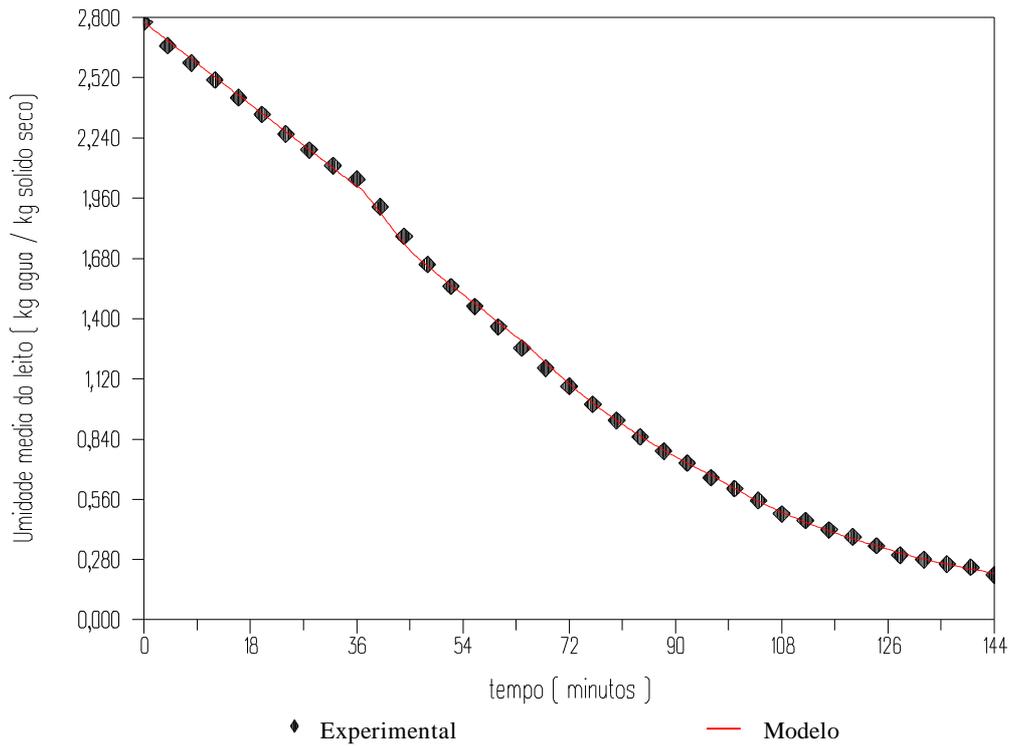


Figura 8.10 - Umidade média do leite em função do tempo de secagem no ensaio 02.

Na tabela 8.12 são apresentados os valores da temperatura de saída do ar obtidas por meio dos ensaios experimentais de secagem e através da presente simulação numérica.

TABELA 8.12 - Comparação entre a temperatura de saída do ar experimental e a do modelo para o ensaio 02.

tempo [min.]	temperatura de saída do ar [K°] experimental	temperatura de saída do ar [K°] modelo
0,0	293,16	293,16
4,0	286,75	290,41
8,0	286,75	290,40
12,0	286,75	290,40
16,0	286,75	290,40
20,0	286,75	290,40
24,0	286,75	290,40
28,0	286,75	290,40
32,0	286,75	290,40
36,0	291,75	290,40
40,0	294,88	304,29
44,0	294,88	308,60
48,0	294,88	304,53
52,0	294,88	305,51
56,0	294,88	305,17
60,0	298,00	307,26
64,0	304,25	307,52
68,0	306,75	313,13
72,0	307,38	314,50
76,0	310,50	314,88
80,0	311,75	315,18
84,0	311,75	315,43
88,0	311,75	315,66
92,0	311,75	315,87
96,0	318,00	316,04
100,0	319,88	322,63
104,0	319,88	325,31
108,0	319,88	327,37
112,0	319,88	327,62
116,0	319,88	326,54
120,0	319,88	326,70
124,0	329,25	326,84
128,0	329,25	333,07
132,0	329,25	331,99
136,0	329,25	322,11
140,0	329,25	332,21
144,0	329,25	332,29

Os resultados da tabela 8.12 estão representados na forma gráfica na figura 8.11.

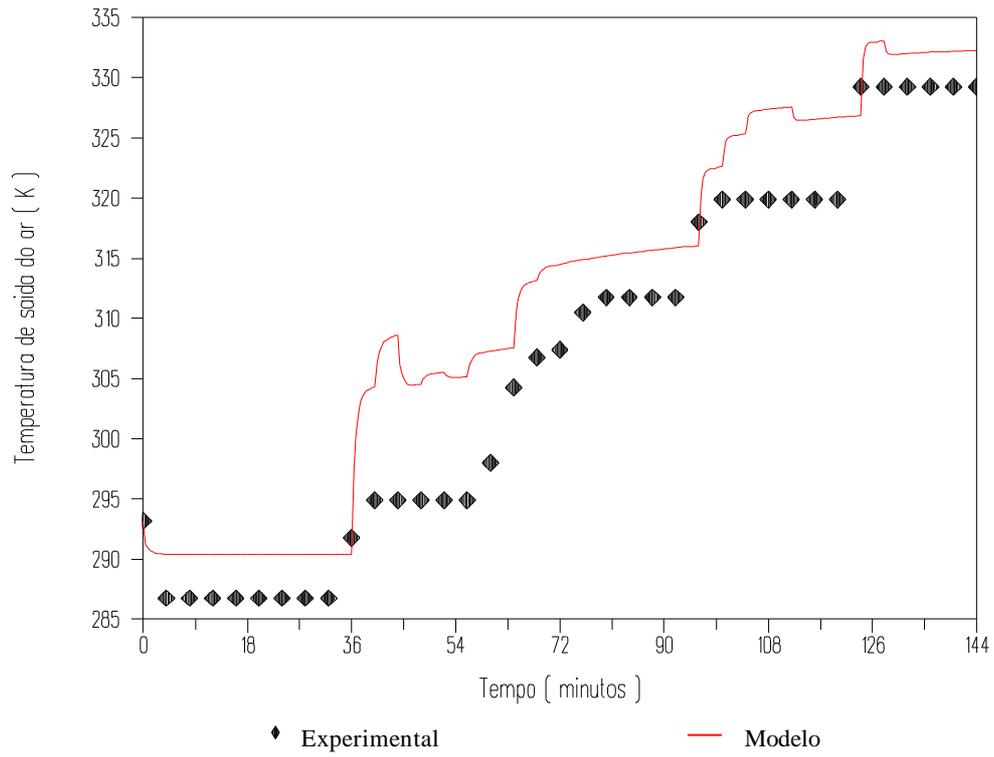


FIGURA 8.11 - Temperatura de saída do ar em função do tempo de secagem no ensaio 02.

Na figura 8.12 estão apresentados graficamente os resultados da simulação numérica referentes ao fluxo molar do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

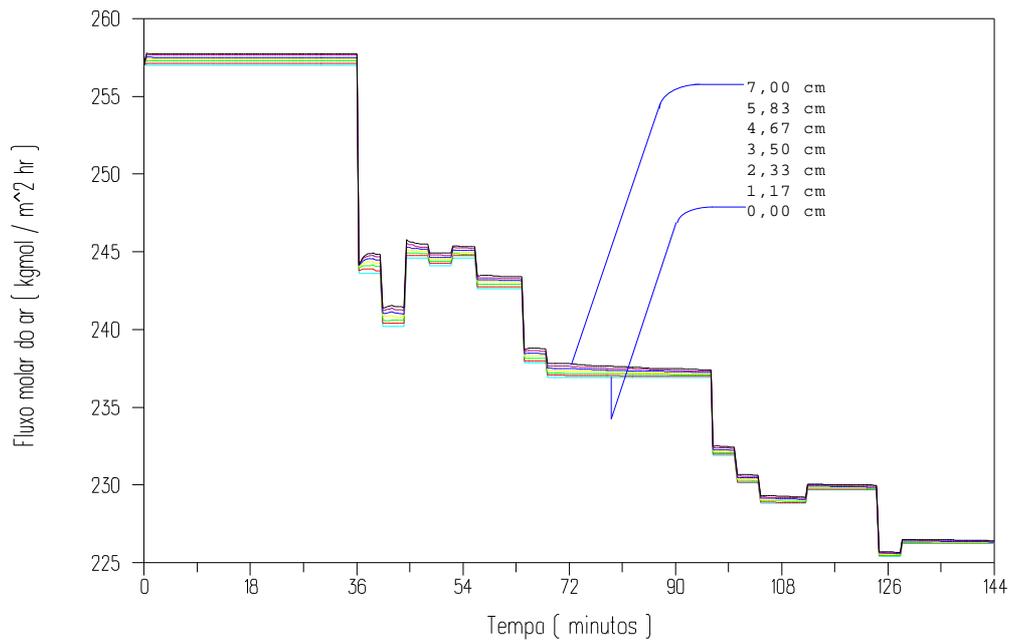


FIGURA 8.12 - Fluxo Molar do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 02.

Na figura 8.13 estão apresentados graficamente os resultados da simulação numérica referentes a concentração molar do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

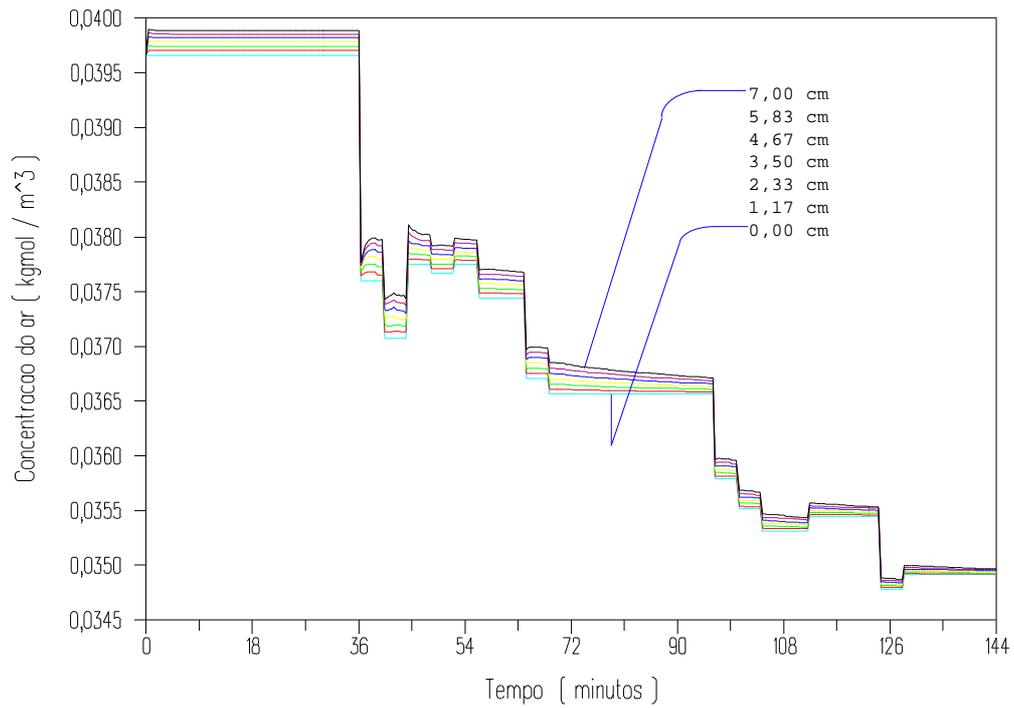


FIGURA 8.13 - Concentração do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 02.

Na figura 8.14 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a umidade do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

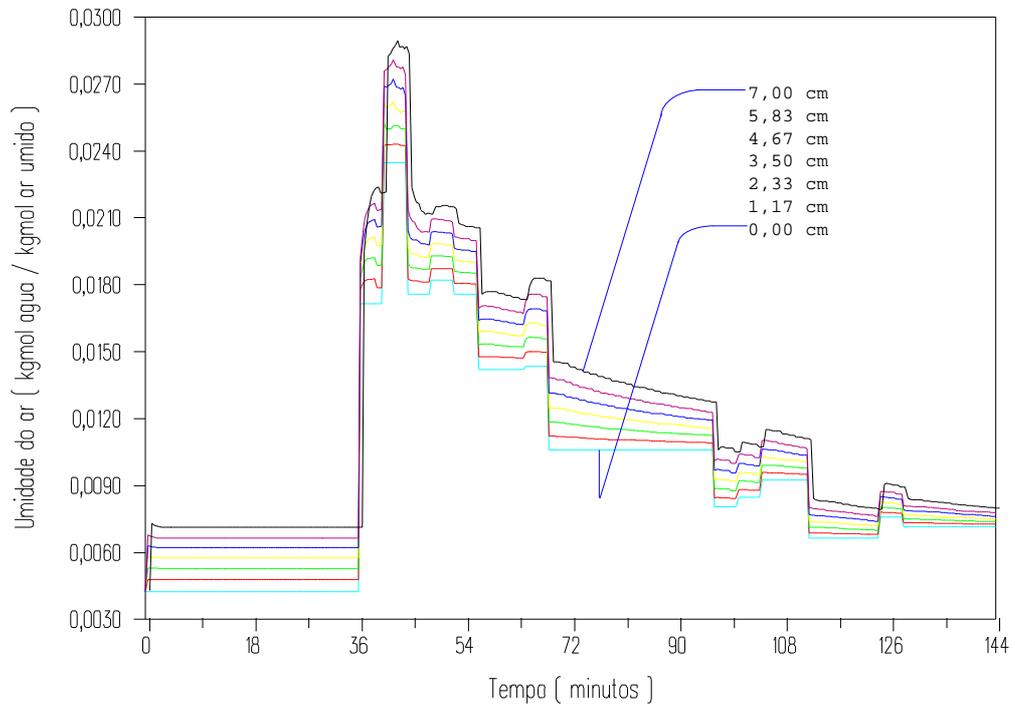


FIGURA 8.14 - Umidade do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 02.

Na figura 8.15 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a temperatura do ar para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

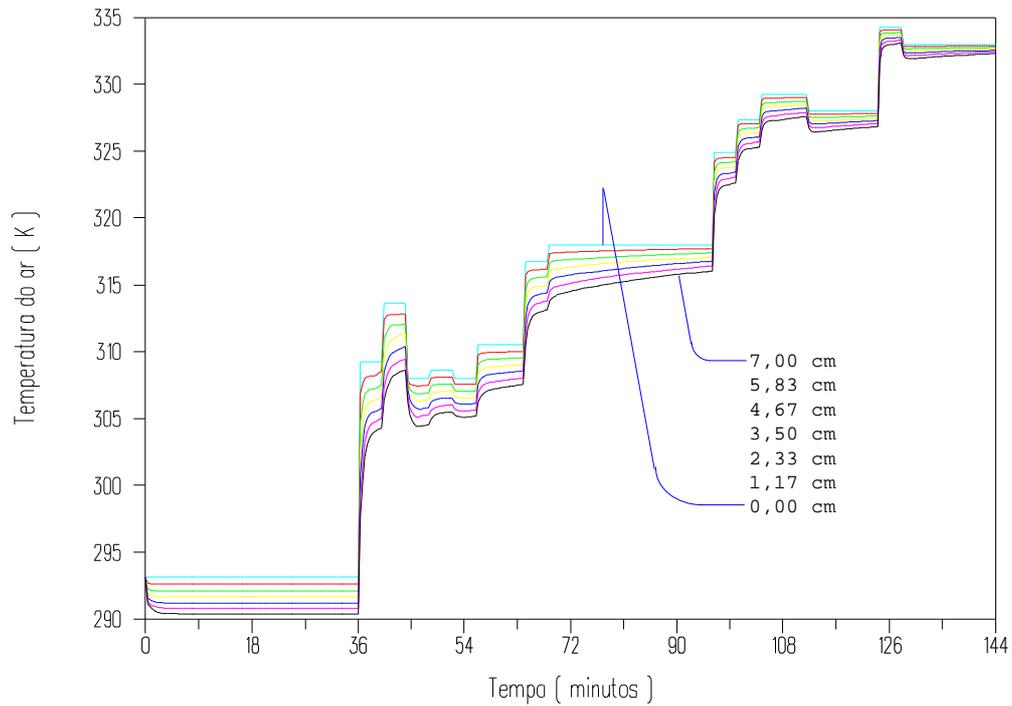


FIGURA 8.15 - Temperatura do ar em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 02.

Na figura 8.16 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a temperatura da gelatina para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

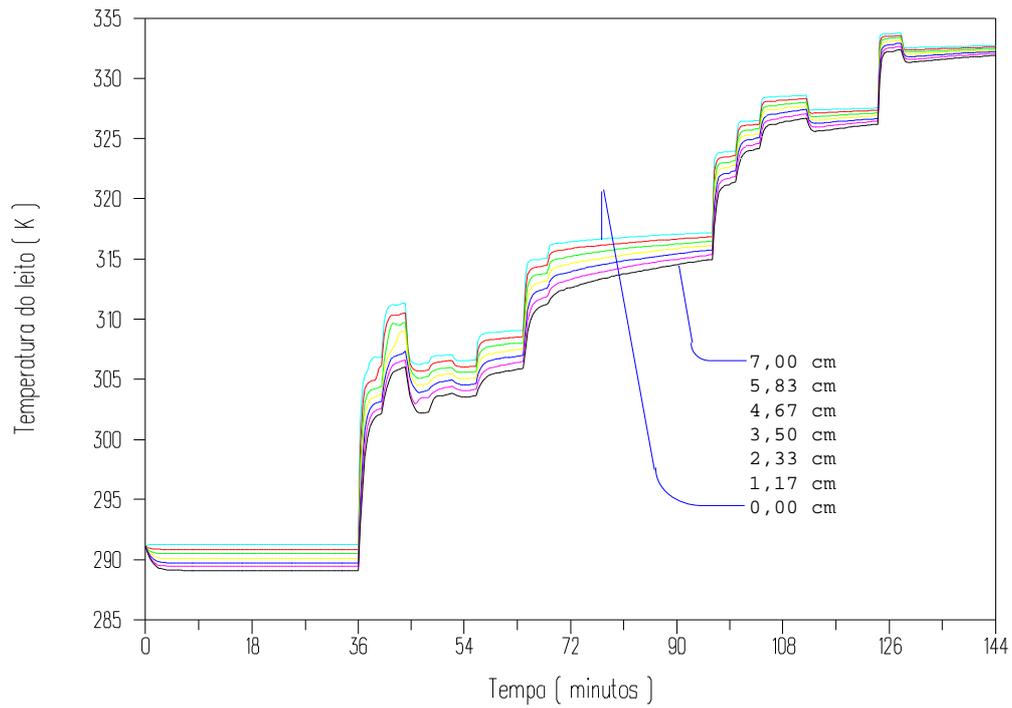


FIGURA 8.16 - Temperatura da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 02.

Na figura 8.17 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes a umidade da gelatina para diferentes alturas do leito em função do tempo de secagem.

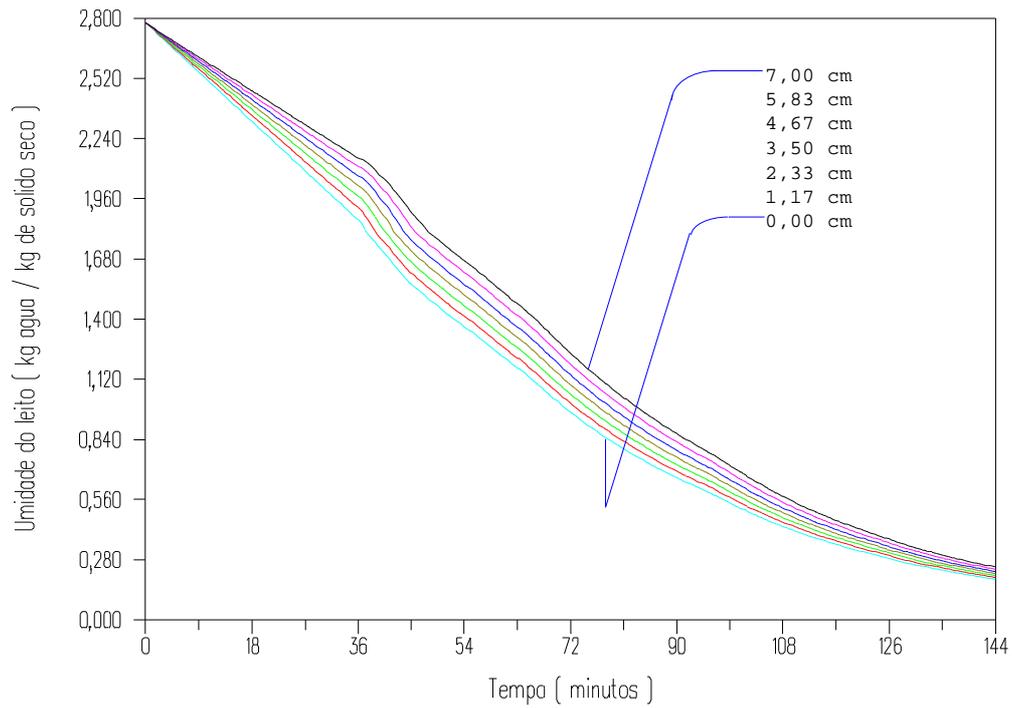


FIGURA 8.17 - Umidade da gelatina em função do tempo de secagem e altura do leito no ensaio 02.

Na figura 8.18 estão apresentados graficamente os resultados da simulação referentes ao perfil de umidade no interior da partícula cilíndrica de gelatina na entrada do secador ($z=0$ cm).

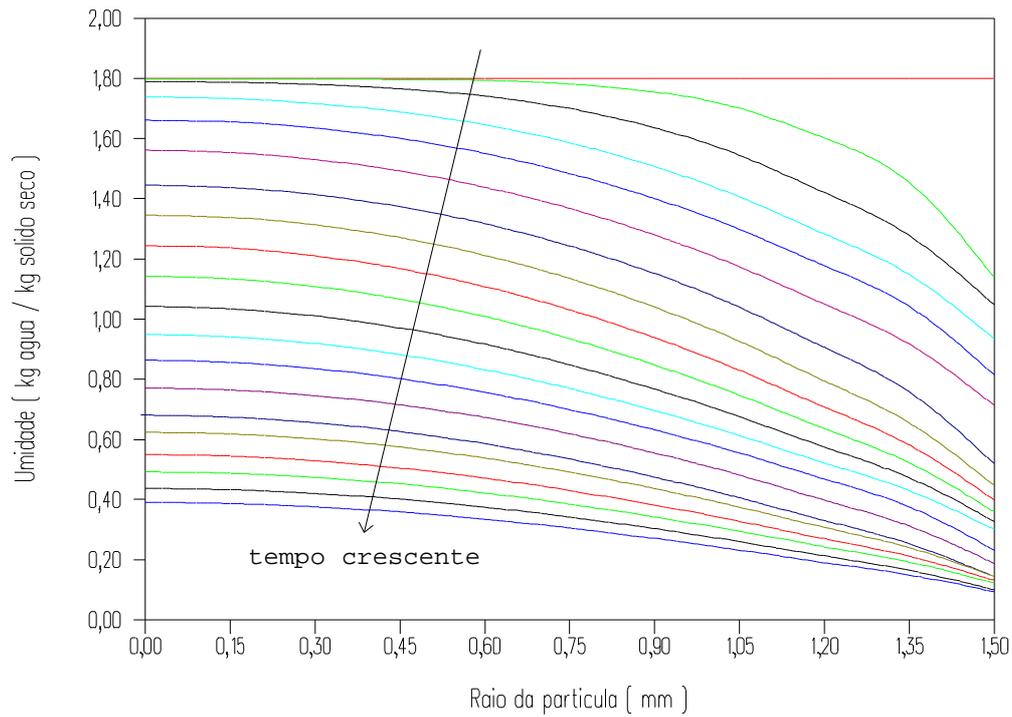


FIGURA 8.18 - Umidade no interior da partícula na altura $z = 0$ cm no ensaio 02.

8.4 Discussão dos resultados

Os resultados obtidos através da simulação quando confrontados com os dados experimentais dos ensaios de secagem 01 e 02 mostram uma boa concordância para umidade média do leite. Entretanto isto não foi verificado para a temperatura de saída do ar. Todavia, tem-se considerar que os valores da temperatura de saída do ar determinados experimentalmente, conforme discutido por Neitzel³ (1987), apresentam possíveis erros experimentais em função do "by passing" do ar causado pela contração da gelatina; este fenômeno foi verificado principalmente nas regiões próxima à parede do secador.

Outro fator importante a ser considerado nos resultados da temperatura da saída do ar está no fato de que neste trabalho, face à ausência de informações, admitiu-se que o calor de desorção do sistema água-gelatina é igual ao calor de evaporação da água, sendo sabido que esta propriedade da gelatina decresce com o aumento do teor de umidade.

Outro aspecto importante a ser considerado no modelo está no fato de considerar a condutividade térmica da gelatina constante e igual ao valor da água na fase líquida. Através da solução da equação da difusão utilizando este valor de condutividade térmica, os resultados mostraram que o equilíbrio térmico é rapidamente estabelecido e portanto pode-se assumir como nulo os

gradientes de temperatura no interior do gel. Contudo, dados preliminares da condutividade térmica da gelatina em função da umidade determinados por Sousa (1995), indicam valores muito pequenos de condutividade para baixo teores de umidade no gel, favorecendo a formação de gradientes de temperatura no interior do gel.

Os resultados obtidos relacionados com as variáveis do ar e da gelatina por meio da simulação numérica são consistentes qualitativamente com o fenômeno físico.

A umidade do ar aumenta na direção do seu fluxo, isto é ao longo da altura do leito, pois a água evaporada acumula-se no ar à medida que este escoar no interior do leito e isto pode ser observado nas figuras 8.5 e 8.14.

A temperatura do ar decresce na direção do seu fluxo (altura do leito), pois o ar fornece energia para promover a evaporação da água na superfície do gel e isto pode ser observado nas figuras 8.6 e 8.15.

A temperatura da gelatina decresce na direção do fluxo do ar (altura do leito), pois o ar que entra em contato com a gelatina nas camadas mais inferiores encontra-se à temperaturas mais elevadas do que nas camadas superiores e isto pode ser observado nas figuras 8.7 e 8.16.

A umidade da gelatina aumenta na direção do fluxo do ar (altura do leito), pois o ar que entra em contato nas

camadas inferiores apresenta umidade inferior ao das camadas superiores, oferecendo menor resistência à transferência de massa e isto pode ser observado nas figuras 8.8 e 8.17.

Dependendo das condições de alimentação do ar podem ocorrer elevados gradientes de concentração da água líquida no interior da gelatina, conforme verificou-se através da simulação do ensaio de secagem 01, ilustrado na figura 8.9.

A discrepância entre os valores do coeficiente de difusão determinados pela estimação de parâmetros nos ensaios 01 e 02, deve-se ao fato que no ensaio de secagem 02, a temperatura de alimentação do ar é superior ao do ensaio 01, pois o coeficiente de difusão em geral é uma função crescente com a temperatura.

IX - CONCLUSÕES

O modelo de secagem apresentado neste trabalho mostrou-se eficiente para a descrição do fenômeno de secagem da gelatina. Contudo, deve-se ressaltar que a qualidade dos resultados da simulação dependem da confiabilidade dos valores das propriedades da gelatina empregados na solução do modelo.

A confiabilidade dos valores encontrados através do procedimento de estimação de parâmetros discutidos no capítulo VII (coeficientes: de transferência de calor convectivo, de transferência de massa e de difusão mássica) depende do modelo e dos parâmetros utilizados na sua solução. Portanto, se alguma das propriedades da gelatina necessárias para a solução do modelo tiver seu valor corrigido, em função de uma caracterização mais apropriada através de medidas experimentais ou literatura, torna-se necessário repetir o procedimento de estimação de parâmetros.

O método de elementos de contorno quando empregado para a solução da equação da difusão unidimensional que aparece na modelagem da secagem da partícula de gelatina cilíndrica, mostrou-se uma técnica eficiente para a solução deste problema e proporcionando ainda vantagens numéricas e computacionais, entre as quais destacam-se: a precisão alcançada inclusive na presença de elevados gradientes de umidade no interior da gelatina, sem

necessidade do emprego de técnica de refino da malha ou adaptabilidade; baixo esforço computacional em virtude desta técnica reduzir a dimensão do problema, que para a modelagem em análise ficou reduzido a um único ponto em vista da simetria do problema e por não aumentar o número de equações diferenciais (por transformar o problema diretamente para uma equação algébrica).

X - RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES

Com a realização deste trabalho de modelagem e simulação não se buscou explorar todos os aspectos da secagem da gelatina, conforme pode se observar nas considerações e simplificações realizadas na modelagem, restando ainda um grande campo a ser explorado. Desta forma sugere-se alguns trabalhos que complementariam tanto qualitativamente como quantitativamente a análise fenomenológica objeto deste trabalho:

- a construção de um modelo que considere a contração do volume da gelatina durante o processo de secagem. Para isto é necessário a realização de testes experimentais para a determinação da porosidade do leito e da área de transferência em função da umidade média do leito;
- a caracterização mais apropriada através de medidas experimentais das propriedades físicas da gelatina utilizada nos ensaios de secagem, na quais destacam-se: o coeficiente de difusão, o calor de desorção do sistema água-gelatina e as curvas de equilíbrio;
- um estudo da condutividade térmica da gelatina em função da umidade do gel e construção de um modelo de secagem que considere a formação de gradientes de temperatura no interior do gel, pois a intensidade destes gradientes depende dos valores da condutividade térmica;

- testar o modelo apresentado na secagem industrial do filme de gelatina no secador esteira, observando que algumas alterações devem ser realizadas, pois o fluxo de ar neste equipamento é contracorrente.

XI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M. ; Stegun I. A. Handbook of Mathematical functions. New York, Dover, 1965.
- Bird, Byron R. ; Stewart, Warren E. ; Lighfoot, Edwin N. Transport Phenomena. , New York , Wiley International Edition, 1960.
- Brooker, D. W.; Bakker-Arkema, F. W.; Hall, C. W. Drying Cereals Grains, Westport, The AVI Pub. Co. Inc., 1974.
- Brebbia, C. A. A The boundary element method for engeineers. London, Pentech Press, 1978.
- Brebbia, C. A. ; Wrobel, L. C. A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction. **Int. J. Heat Mass Transfer** **24:**, 843-850, 1981.
- Brebbia, C. A. ; Telles, J. C. F. ; Wrobel, L. C. Boundary Element Techniques. Berlim , Springer Verlag , 1984.
- Chuang, Y. K. ; Szekely, J. The use of Greens funcitons for solving melting of solidification problems in the cylindrical coordinate system. **Int. J. Heat Mass Transfer** **15:**, 1171-1174, 1972.
- Crank, J. The Mathematics of Diffusion. New York, Clarendon Oxford Press, 1975.
- Cruze, T. A.; Rizzo, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, **Int. J. Math. Anal. Appl.** **V.22**, 244-259, 1968.

- Foust, Alan. S. & Outros Princípios de Operações Unitárias.
Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1982.
- Gehrmann, V. D. ; Kast, W. Drying of Gels, **Proc. Int. Symp. Drying**, 1st 1979, 239-246, Edited By Mujumdar, A. S. , Sci. Press: Princeton,N. J.
- Gehrmann, V. D. ; Kast, W. Trocknung von Gelen am Beispiel dünner, ebener Gelatineschichten. **VDI:391**, 590-615, 1980.
- Greg, S. J. ; Sing, K. S. W. Adsorption, Surface Area and Porosity. London, New York, Academic Press, 1967.
- IMSL, Math.lib, Version 2.00, 1991.
- Kellog, O. D. Potential theory. New York, Donver Publications, 1954.
- Krischer, O.; Kast, W. Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik. Band I Dritte Auflage, Springer Verlag, 1978.
- Medeiros, J. L.; Massarani, G. Secagem de Bagaço de Cana - III.São Carlos, Anais do X ENEMP, 1982.
- Neitzel¹, I. Secagem de gelatina. Relatório Interno, (DEQ/ Univ. Est. de Maringá, 1987).
- Neitzel², I. Secagem de gelatina VOL.1. Relatório Interno, (DEQ/ Univ. Est. de Maringá, 1987).
- Neitzel³, I. Secagem de gelatina VOL.2. Relatório Interno, (DEQ/ Univ. Est. de Maringá, 1987).
- Othmer, Kirk Encyclopedia of Chemical Technology. New York, John Wiley & Sons, v(10) 1967.

- Powell, M. J. D. Restart procedures for the conjugate gradient method, **Mathematical Programming** 12, 1977.
- Ratti, C. ; Mujundar, A. S. Fixed-Bed batch drying of shrinking particles with time varying drying air conditions. **Drying Technology** 11(6), 1311-1335, 1993.
- Silva, L. H. M. Novas Formulações Integrais para problemas de mecânica. Florianópolis, 1988, (Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina).
- Souza, L. H. C. D. Secagem de gelatina com condutividade térmica variável. Relatório Interno, (DEQ/ Univ. Est. de Maringá, 1995).
- Skuratov, S. M. ; Shkitov, M. S. Spcific heat of water bound by high polymeric substances. **Physical Chemistry** 53(7), 627-629, 1946.
- Tijonov, A. N. ; Samarsky, A. A Equaciones de la fisica Matematica. Moscow, Editorial Mir, 1972.
- Treybal, Robert E. Mass-transfer operations. New York, McGraw Hill, 1980.
- Ward, A. G.; Courts, A. The Science and Techonology of Gelatin. London, Academic Press, 1977.