

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

**SIMULAÇÃO DE UM EXTRATOR INDUSTRIAL DE ÓLEO DE  
SOJA**

Autor: Paulo Eduardo Polon

Orientador: Mauro Antônio da Silva Sá Ravagnani

Dissertação de Mestrado submetido à  
Universidade Estadual de Maringá, como parte  
dos requisitos necessários para a obtenção do  
grau de Mestre em Engenharia Química.

**MARINGÁ  
1997**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

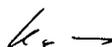
Esta é a versão definitiva da Dissertação de Mestrado submetida por Paulo Eduardo Polon à Comissão Julgadora do Curso de Mestrado em Engenharia Química na data de 09 de setembro de 1997.

Comissão Julgadora:



---

Prof. Dr. Mauro Antonio da Silva Sá Ravagnani  
Orientador



---

Prof. Dr. Roger Josef Zemp  
Membro



---

Prof. Dr. Marcelino Luiz Gimenes  
Membro

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Mauro A. S. S. Ravagnani pela orientação na elaboração do presente trabalho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Aos demais professores e alunos do programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.

Especialmente a minha esposa, Adriana, que com seu amor, apoio e compreensão tornou possível a realização deste trabalho.

## ÍNDICE

<b>1.INTRODUÇÃO.....</b>	<b>01</b>
<b>2.REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>03</b>
<b>3.EXTRAÇÃO DE ÓLEO DE SOJA.....</b>	<b>09</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	10
3.2 PROCESSO DE EXTRAÇÃO DE ÓLEO DE SOJA.....	12
3.2.1 Solvente.....	12
3.2.2 Processo de Extração de Óleo de Soja.....	13
3.2.3 Seção de Extração.....	14
3.3 EXTRATORES COM SOLVENTE PARA SOJA.....	15
3.3.1 Extratores Tipo Giratório ou Leito Fundo.....	15
3.4 MODELO MATEMÁTICO.....	18
<b>4. MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS.....</b>	<b>21</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	22
4.2 NÍVEIS DE FORMULAÇÃO DE MODELOS.....	25
4.3 A TAREFA DO MÉTODO NUMÉRICO.....	27
4.3.1 O Método de Diferenças Finitas - MDF.....	28
4.3.2 Funções de Interpolação no Tempo.....	29
4.3.2.1 Formulação Explícita .....	30
4.3.2.2 Formulação Totalmente Implícita.....	30
4.3.2.3 Formulação Implícita.....	31
4.3.3 Funções de Interpolação Unidimensional no Espaço.....	31
4.3.3.1 Diferenças Centrais (CDS) .....	33
4.3.3.2 <i>Upwind</i> .....	34
4.4 O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS.....	36
4.4.1 Condução Unidimensional Transiente.....	38
<b>5.APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS AO MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO.....</b>	<b>43</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	44
5.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO AO MODELO.....	45

<b>6. PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO.....</b>	<b>48</b>
6.1 INTRODUÇÃO.....	49
6.2 PROGRAMA DESENVOLVIDO.....	50
<b>7. CASOS ESTUDADOS.....</b>	<b>52</b>
7.1 INTRODUÇÃO.....	53
7.2 SITUAÇÃO Nº 1.....	54
7.3 SITUAÇÃO Nº 2.....	59
<b>8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>65</b>
8.1 CONCLUSÕES.....	66
8.2 SUGESTÕES.....	67
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>68</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>pag.</b>
3.1 - Processo de Extração com Solvente.....	14
3.2 - Diagrama Esquemático do Extrator Giratório.....	16
3.3 - Extrator Rotocel.....	17
3.4 - Fase de contato em corrente cruzada.....	18
4.1 - Métodos de Soluções.....	26
4.2 - A Tarefa do Método Numérico.....	27
4.3 - Discretização Unidimensional.....	28
4.4 - Tipos de Conexões nas Formulações Estudadas.....	32
4.5 - Discretização Unidimensional.....	33
4.6 - Balanço de Massa no Volume Finito.....	36
4.7 - Malha para o Problema Unidimensional de Condução.....	38
4.8 - Função de Interpolação no Tempo.....	40
4.9 - Possibilidade de Avanço da Solução no Tempo.....	42
5.1 - Malha para o Problema Unidimensional de Transferência de Massa.....	45
6.1 - Diagrama de Blocos.....	50
7.1 - Perfil de concentração no extrator da COAMO.....	57
7.2 - Perfil de concentração no extrator simulado.....	57
7.3 - Perfil de concentração no extrator (espessura = 0,20 mm).....	60
7.4 - Perfil de concentração no extrator (espessura = 0,30 mm).....	60
7.5 - Perfil de concentração no extrator (vazão de solvente = $1,112 \text{ E}^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ ).....	62
7.6 - Perfil de concentração no extrator (vazão de solvente = $1,668 \text{ E}^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ ).....	62
7.7 - Perfil de concentração no extrator (volume de soja = $11,82 \text{ m}^3$ ).....	64
7.8 - Perfil de concentração no extrator (volume de soja = $9,00 \text{ m}^3$ ).....	64

**LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela</b>	<b>pag.</b>
3.1 - Produção Mundial de Óleo de Soja (1940-80) .....	10
3.2 - Produção Mundial de Soja (1980-81) - Países Maiores Produtores.....	10
3.3 - Especificação das Correntes (% massa) .....	13
7.1 - Dados de operação da COAMO.....	54
7.2 - Comparação da Situação N <sub>0</sub> . 1 com o extrator da COAMO.....	56
7.3 - Balanço de Massa, base 1 hora.....	58
7.4 - Comparação dos resultados para a variação da espessura da soja laminada.....	59
7.5 - Comparação dos resultados para a variação da vazão de solvente.....	61
7.6 - Comparação dos resultados para a variação do volume de soja.....	63

## NOMENCLATURA

$a$	área interfacial
$Ac_p$	coeficiente de $c_p$
$Ac_p^0$	coeficiente de $c_p^0$
$A_e$	coeficiente $T_E$
$A_p$	coeficiente $T_P$
$A_w$	coeficiente $T_w$
$A\omega_p$	coeficiente de $\omega_p$
$B$	largura do extrator
$Bc_p$	coeficiente de $c_p$
$B\omega_p$	coeficiente de $\omega_p$
$B\omega_p^0$	coeficiente de $\omega_p^0$
$c$	concentração na fase líquida
$\bar{c}$	concentração na fase líquida valor adimensional
$\bar{c}_0$	concentração na fase líquida, valor dimensional inicial
$\bar{c}_{in}$	concentração na fase líquida, valor dimensional de entrada
$c^{**}$	concentração na fase líquida, valor dimensional no equilíbrio
$c_p$	capacidade calorífica
$c_P^{\theta^*}$	valor da concentração na fase líquida em um tempo qualquer no ponto P
$c_N^{\theta^*}$	valor da concentração na fase líquida em um tempo qualquer no ponto N
$D$	coeficiente de distribuição
$e$	ponto cardeal leste, nomenclatura usada para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica
$h$	fração de vazios
$H$	comprimento da esteira
$k$	coeficiente de transferência de calor
$K_{oc}$	coeficiente de transferência de massa
$L$	dimensão do extrator na direção do fluxo de líquido
$M_P$	valor da massa dentro do volume elementar no ponto P no nível de tempo no qual se busca a solução

$M_P^0$	valor da massa dentro do volume elementar no ponto P no nível de tempo anterior no qual se busca a solução
$m$	inclinação da curva de equilíbrio
$n$	ponto cardeal norte, nomenclatura usada para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica
$N_{t,c}$	número de unidades de transferência
$O(\Delta x)$	erro de truncamento de ordem $(\Delta x)$
$O(\Delta x)^2$	erro de truncamento de ordem $(\Delta x)^2$
$P_e$	número de Peclet
$R_e$	número de Reynolds
$s$	ponto cardeal sul, nomenclatura usada para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica
$S$	área da seção cruzada da seção empacotada no extrator perpendicular ao fluxo de sólidos
$t$	tempo
$T$	temperatura
$T_E$	valor da temperatura do ponto E no nível de tempo no qual se busca a solução
$T_E^\theta$	valor da temperatura do ponto E no nível de tempo qualquer
$T_P$	valor da temperatura do ponto P no nível de tempo no qual se busca a solução
$T_P^0$	valor da temperatura do ponto P no nível de tempo anterior no qual se busca a solução
$T_P^\theta$	valor da temperatura do ponto P no nível de tempo qualquer
$T_w$	valor da temperatura do ponto W no nível de tempo no qual se busca a solução
$T_w^\theta$	valor da temperatura do ponto W no nível de tempo qualquer
$u$	velocidade na direção y
$v$	velocidade na direção x
$V$	volume da seção empacotada do extrator
$v_b$	velocidade da esteira
$w$	ponto cardeal oeste, nomenclatura usada para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica
$x$	distância da entrada do líquido
$y$	distância da entrada do sólido

$\alpha$ -	difusividade térmica
$\phi$ -	representa uma propriedade qualquer transportada
$\phi_e$ -	representa uma propriedade qualquer transportada, na face leste
$\Phi_E$ -	taxa de fluxo de solvente
$\phi_E$ -	representa uma propriedade qualquer transportada, no ponto E
$\phi_P$ -	representa uma propriedade qualquer transportada, no ponto P
$\phi_w$ -	representa uma propriedade qualquer transportada, na face oeste
$\phi_W$ -	representa uma propriedade qualquer transportada, no ponto W
$\Gamma^\phi$ -	coeficiente de transporte
$\theta'$ -	sobrescrito, para avaliar o fluxo no início, em uma posição qualquer, ou no fim do intervalo de tempo
$\theta$ -	variável de tempo adimensional
$\rho$ -	densidade
$\omega$ -	concentração na fase sólida
$\dot{\omega}$ -	concentração na fase sólida, valor dimensional
$\dot{\omega}_0$ -	concentração na fase sólida, valor dimensional inicial
$\xi$ -	variável de tempo adimensional

## RESUMO

Industrialmente o óleo de soja é produzido por extração com solvente. Embora o processo para obter o óleo de soja seja bem conhecido, a simulação é necessária para projetar e otimizar novas plantas. Neste trabalho analisamos a estratégia de simulação para este processo em extrator contínuo do tipo esteira contracorrente, usando hexano como solvente. O modelo matemático utilizado foi o apresentado por Spaninks e Bruin (1979) para este tipo de extrator, baseado na analogia entre fluxo de contato cruzado e coluna de processo estacionária (leito fixo). As Equações Diferenciais Parciais (EPD) descrevendo a transferência de massa no leito fixo são usadas para representar a extração em cada estágio do extrator. Durante o cálculo as EDP são resolvidas numericamente pelo método dos volumes finitos. Os resultados obtidos permitem uma boa visualização da variação da concentração do óleo nas fases sólida e líquida ao longo do leito. Os resultados foram comparados com um extrator industrial. Avaliou-se também o efeito da alteração de algumas variáveis de processo na extração de óleo de soja. Mostrou-se assim a consistência e aplicabilidade do modelo matemático na simulação do processo de extração de óleo de soja.

## ABSTRACT

Industrially the soybean oil is produced by solvent extraction. Although the process is well known it needs to design and optimization of new plants. In this work it is analyzed the strategy of simulation for this process in the continuous countercurrent extractor, using hexane as solvent. The mathematical model used was presented by Spaninks and Bruin (1979), based in the analogy between crossflow and the fixed bed process column. The Differential Partial Equations (DPE) that describe the mass transfer in the fixed bed was used to represent the extraction in each step of equipment. To solve the DPE the finite method was used. The results obtained allow a good perception of the oil concentration variation in both solid and liquid phase, and it was compared with an industrial extractor. It was availed to the effect of changes in some process variables.

## **1 - INTRODUÇÃO**

O processo de extração de óleo de soja é conhecido a séculos, mas seu maior desenvolvimento deu-se a partir da Segunda Guerra Mundial.

O óleo de soja é extraído principalmente pelo processo de extração com solvente em extratores de percolação, operando continuamente e em contracorrente, como o extrator tipo Rotocel. O solvente mais usado é o hexano.

Apesar do processo de extração de óleo de soja estar bem estabelecido, simulação é necessária para projetar e otimizar novas plantas e melhorar a performance das existentes.

Este trabalho tem por objetivo a partir de um modelo matemático, aplicar o método dos volumes finitos para simular o processo de extração de óleo de soja e comparar os resultados com os de um extrator industrial.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão sobre os principais trabalhos publicados sobre a extração de óleo de soja utilizando solvente, assim como dos principais métodos numéricos utilizados para a resolução dos modelos matemáticos para o processo.

No Capítulo 3 são apresentados alguns conceitos para o entendimento do processo de extração de óleo de soja e o modelo matemático para o processo.

No Capítulo 4 são apresentados alguns conceitos sobre o uso de métodos numéricos e a metodologia para o uso do método dos volumes finitos, que foi o escolhido para a resolução das equações do modelo.

No Capítulo 5 é aplicado o método dos volumes finitos ao modelo matemático.

No Capítulo 6 um programa computacional foi desenvolvido para a resolução do sistema de equações obtido no Capítulo 5.

No Capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos para a simulação de um extrator industrial e o efeito da alteração de algumas variáveis do processo na performance do extrator.

Finalmente no Capítulo 8 apresenta-se as conclusões sobre o trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## **2 - REVISÃO DA LITERATURA**

Neste capítulo apresenta-se uma revisão sobre os principais trabalhos publicados sobre a extração de óleo de soja utilizando solvente, assim como dos principais métodos numéricos utilizados para a resolução dos modelos matemáticos para o processo.

Inicialmente, AMUNDSON (1950) usou o método da Transformada de Laplace para a solução matemática de equações diferenciais parciais que descrevem o problema de adsorção de um soluto por um sólido, obtendo como solução uma integral de uma função de Bessel modificada, que é representada por uma série, cujo resultado é aproximado, além da solução não ser exata tem-se um grande trabalho matemático. Este sistema de equações diferenciais parciais é semelhante ao sistema obtido pelo modelo matemático proposto por SPANINKS e BRUIN (1979) para extração sólido-líquido.

SMITH (1951) descreveu o projeto de um extrator contínuo de percolação operando em contracorrente para substâncias oleoginosas. Vários detalhes do projeto foram apontados, indicando que o extrator pode ser aplicado para um grande número de arranjos de condições de operação. Dados típicos de engenharia sobre a retenção da solução pelos sólidos foram incluídos e suas aplicações para o projeto do extrator são bem indicadas.

KLINKENBERG (1954) apresentou uma revisão de vários métodos para a solução de um sistema de equações que descreve processos importantes em engenharia química, como: transferência de calor em fluxo cruzado em trocadores de calor, aquecimento ou resfriamento de um leito empacotado e transferência de massa em leito empacotado. As soluções apresentadas são em termos de integral da função de Bessel, solução pelo método de equações em diferenças finitas, expansão em séries e aproximação assintótica pela função erro, todas estas métodos de soluções tem como resultado uma série que deve ser truncada e portanto geram soluções aproximadas.

OTHMER e AGARWAL (1955) desenvolveram técnicas simples de laboratório as quais forneciam dados em poucas horas para desenvolver técnicas de cálculos de projeto de plantas de extração. Neste artigo os autores concluíram também que o processo de difusão molecular através da parede da célula, a concentração de óleo na miscela e o uso

do solvente em contracorrente não afetam a extração de óleo das lâminas de soja. A retenção de óleo é inalterada pela concentração de óleo na miscela. A taxa de extração diminui com o aumento da espessura da lâmina. A extração é um problema de dinâmica do fluidos e a taxa de extração é fisicamente e matematicamente definida pela lei de Hagen-Poiseulli que governa o fluxo de fluidos viscosos em capilares.

ACRIVOS (1956) apresentou o esquema numérico conhecido como o método das características, para resolver equações de modelos unidimensionais. O método das características, como descrito neste artigo, possibilita a solução numérica de muitos modelos unidimensionais para transferência de massa e calor, com reação química, e em um leito estacionário. O método das características é uma ferramenta muito útil para resolver problemas importantes na engenharia química.

KRASUK et. al. (1967) estudaram a extração de óleo, de fatias de sementes cortadas em espessura conhecida, pela determinação da quantidade de óleo extraído depois de um tempo de exposição ao solvente. Os autores concluíram que a extração parece ser comandada pela difusão, o coeficiente varia exponencialmente com a concentração. A difusão toma lugar na fase sólida com uma alta energia de ativação em concentração relativamente baixa do óleo no sólido. A taxa de extração é independente da difusividade na fase líquida do óleo na extração com solvente. O elevado conteúdo de água impede a penetração do solvente e a difusão do óleo através do sólido. O modelo proposto empiricamente correlata dados de extração sobre sementes pré-tratadas que precisariam de uma interpretação matemática simples.

HEGGS e CARPENTER (1976) empregaram o método das características para resolver o sistema de equações diferenciais parciais representando um sistema de regenerador de gás e as equações características obtidas foram resolvidas numericamente aplicando o método das diferenças finitas.

MILLIGAN (1976) revisou os vários tipos de projetos e equipamentos em uso com o objetivo de apresentar um estudo da prática corrente em extração contínua comentando sobre inovações e aperfeiçoamentos.

REIN (1976) descreveu a aplicação de um modelo matemático previamente desenvolvido e testado para uma planta piloto para um difusor em escala natural do tipo leito em movimento. Este modelo pode ser usado para prever a performance de extração de um difusor como uma função das condições de operação do difusor. As previsões do modelo foram comparadas com a performance da extração real de um difusor em escala natural e uma concordância satisfatória entre teoria e prática foi obtida. Foi mostrado através do uso deste modelo como a extração é influenciada por alterações nas variáveis de processo.

BECKER (1978) resumiu em termos práticos a teoria da extração com solvente. Apresentou também as preparações típicas das sementes e os principais equipamentos para extração com solvente.

SPANINKS e BRUIN - I (1979) apresentaram um modelo matemático para extração sólido-líquido em extratores tipo baterias de difusão, onde o contato em cada coluna é, em essência, uma coluna de processo estacionário. Entretanto, de um ponto de vista global a extração aproxima-se de um processo puramente contracorrente, dependendo da escolha do número de colunas no sistema e do tempo de ciclo. As equações diferenciais descrevendo a transferência de massa, foram resolvidas por método numérico. Os resultados dos cálculos foram apresentados como uma correlação entre o número de unidades de transferência de “fluxo empistonado” e “real”. É mostrado que desvios do escoamento puramente contracorrente são pequenos quando 4 ou mais colunas são usadas sob condições normais de operação.

SPANINKS e BRUIN - II (1979) apresentaram um modelo matemático para extração sólido-líquido em extratores tipo esteira. No extrator tipo esteira o contato entre as fases em cada seção é em corrente cruzada. A simulação deste extrator é baseada na analogia entre fluxo cruzado e coluna de processo estacionário. As equações diferenciais descrevendo a transferência de massa neste tipo de extrator foram resolvidas por método numérico. As concentrações de saída em estado estacionário são calculadas para obter a eficiência da extração. Os resultados dos cálculos são apresentados como uma correlação

entre o número de unidades de transferência de ‘fluxo empistonado’ e o ‘real’. Estes resultados mostram que desvios do escoamento contracorrente puro são pequenos quando 6 ou mais seções são usadas sob condições normais de operação.

SCHWARTZBERG (1980) apresentou o estado da arte da extração sólido-líquido ou lixiviação, mostrando os vários tipos de extratores e processos usados na indústria alimentícia.

FLORES DE HOYOS e SCHWARTZBERG (1982) desenvolveram um método de superposição para prever o rendimento da extração e as concentrações de extrato para extratores tipo esteira e o testaram com sucesso para três estágios de extração. As equações foram baseadas no balanço material do soluto para um leito e na transferência de massa na borda de ataque do extrato que entra no leito para extração em fluxo descendente.

ERICKSON (1983) apresentou dados relativos ao crescimento da produção de óleo de soja, sobre sua dominância nos produtos de óleo comestível, e sobre o grande número de pesquisas publicadas sobre óleo de soja. Abordou também sobre processos alternativos de extração.

MILLIGAN e TANDY (1984) apresentam 5 métodos para avaliar a performance dos extratores do tipo percolação durante a operação real através da determinação do óleo residual que fica retido no farelo extraído. O sucesso da operação deste tipo de extrator está, entretanto, dependente de 2 fatores primários, a habilidade do solvente para extrair o óleo e a habilidade da mistura óleo-solvente, chamada miscela, em drenar através do leito. O objetivo do processo de extração é reduzir o conteúdo de óleo nas lâminas ao menor nível possível com o mínimo uso de solvente.

KARNOFSKY (1986) apresentou um método de cálculo que prevê, através de dados de laboratório, o tempo de retenção e a concentração da miscela em extratores de óleos comerciais. O método é baseado no descobrimento de que a taxa de solução do óleo

determina o tempo de retenção, e que a resistência à difusão do óleo nos contornos das lâminas é relativamente pequeno.

KARNOFSKY (1987), complementando o artigo anterior, introduziu o conceito de gradiente de concentração parabólico na lâmina e de uma difusividade aparente, que é uma propriedade inerente da semente.

ABRAHAM et. al. (1988) desenvolveram um modelo computacional e um procedimento experimental usado para gerar dados necessários ao modelo para o processo de extração de óleo de sementes oleoginosas. Os experimentos são relativamente simples e executados em FORTRAN. O conjunto de equações de equilíbrio e de balanço material são resolvidos por eliminação gaussiana. Os autores citaram também que a curva de equilíbrio para a mistura hexano e óleo tem uma inclinação constante igual a 1, e este comportamento pode ser explicado considerando que em nível molecular há uma força motriz ou potencial, que permite que o óleo se dissolva no solvente.

MANJUMDAR et. al. (1995) desenvolveram um modelo unidimensional para extração de óleo com solvente em leito empacotado de material vegetal. O modelo matemático parte do balanço material para a miscela e para o soluto (óleo) para um elemento de volume do leito empacotado. As relações de equilíbrio entre o óleo residual contido no bagaço e a concentração do óleo na miscela estagnada nos poros do leito de material foram geradas através de experimentos com farelo de arroz e hexano.

MALISKA (1995) apresentou os fundamentos do método dos volumes finitos, no qual as equações aproximadas são obtidas através de balanços de conservação da propriedade envolvida (massa, quantidade de movimento, entalpia, etc) no volume elementar. O autor mostrou os detalhes necessários para o bom entendimento dos procedimentos numéricos, podendo-se concluir que o método dos volumes finitos é relativamente fácil de ser aplicado.

### **3 - EXTRAÇÃO DE ÓLEO DE SOJA**

### 3.1 - INTRODUÇÃO

O óleo de soja é usado a muitos séculos, mas seu maior uso é recente. Na verdade o crescimento tem sido maior nos últimos 40 anos como mostra a Tabela 3.1, conforme Erickson (1983).

Tabela 3.1 - Produção Mundial de Óleo de Soja (1940-80)

Ano	Milhares de Toneladas
1935-39*	934
1945-49*	1.388
1950-54*	1.864
1960	3.864
1970	5.960
1979-80	14.340

\*média anual

A distribuição da produção de soja aproximada no mundo nos anos 80-81 é mostrado na Tabela 3.2, de acordo com Erickson (1983), o maior crescimento foi na América do Norte e do Sul.

Tabela 3.2 - Produção Mundial de Soja (1980-81) - Países Maiores Produtores

	Milhares de Toneladas
Estados Unidos	48.772
Brasil	15.500
República Popular da China	7.880
Argentina	3.500
Canadá	713
Europa	656
União Soviética	525

A soja é diferente de muitas outras sementes oleaginosas no seu conteúdo de óleo que é aproximadamente 20%, enquanto que nas outras pode variar entre 35% a 40%. Entretanto, a porção remanescente é um farelo rico em proteínas. Sua composição aproximada é: 40% proteína, 20% lipídios, 17% celulose, 7% açúcar, 5% fibras, 6% cinzas e 5% umidade, de acordo com Erickson (1983).

O processo de extração com solvente está relacionado à recuperação de óleo (lipídios) e à produção de farelo para uso humano ou animal.

Conforme Milligan (1976), o óleo é uma matéria-prima para muitos produtos comestíveis, como por exemplo, margarina, gorduras vegetais, óleo para salada e cozimento. Com alta concentração de óleo ácido poliinsaturado, óleo de soja contém, lecitina, fitosterols, e tocopherols. Quantidades significantes destes componentes são disponíveis como resultado de grandes volumes de soja processada.

Segundo Becker (1978), depois de passado um terço deste século, extração com solvente de sementes oleoginosas, tornou-se o principal processo para a separação e recuperação do óleo e do farelo de soja.

A extração com solvente foi desenvolvida pelos alemães logo após a Primeira Guerra Mundial. Os dois princípios básicos utilizados foram extração por imersão e percolação. Extração por imersão é completa pelo carregamento e imersão do solvente e miscela através de um sistema de tubo em U. Extração por percolação permite que o solvente e a miscela fluam por gravidade através do leito de sólidos.

## **3.2 - PROCESSO DE EXTRAÇÃO DE ÓLEO DE SOJA**

O processo de extração de óleo está primeiramente relacionado com a recuperação de lipídios das sementes. Métodos comumente usados para extrair óleos vegetais são: prensagem, extração com solvente e combinação destes. O método de extração com solvente é usado para sementes com baixo teor de óleo, como a semente soja, embora existam algumas plantas antigas que usam o processo de prensagem para extração de óleo de soja.

A extração de óleo de soja pode ser conduzida em operações contínuas, batelada e semi-contínuas. A forma contínua é preferida para processos com grande volume de sementes. Este trabalho descreverá o processo de extração de óleo contínua para soja, que usa hexano como solvente.

### **3.2.1- Solvente**

Hexano é o nome comum do solvente usado comercialmente na extração de soja. Ele não é o n-hexano puro mas uma fração de petróleo consistindo primeiramente de uma mistura de hidrocarbonetos com 6 átomos de carbono saturado. A composição do hexano para extração de diferentes fornecedores varia. Tipicamente o maior componente é o n-hexano, o qual pode variar de menos de 50% a mais de 90% por volume. Isohexano e metilciclopentano podem estar presente em quantidades apreciáveis.

Muitos estudos tem sido feitos para encontrar solventes alternativos para extração. Um solvente ideal tem que ter as seguintes características: deve ter fornecimento abundante, baixa toxicidade, não-inflamabilidade, alto poder de solvência, fácil separação do material extraído, desejável ponto de ebulição, baixo calor específico, baixo calor latente de vaporização, e alta estabilidade. Baseado nisto, as principais desvantagens do hexano são a de ser altamente inflamável e dependência do fornecimento de petróleo. Ambos os problemas oferecem desafios contínuos em projetos e operação de plantas. Tem-se formulado precauções bastante meticulosas para evitar riscos de incêndio e explosão. Perdas de solvente tem sido reduzidas significativamente nos últimos 20 anos, atualmente as perdas de hexano não passam de 2 litros por cada tonelada de semente processada.

É interessante notar que em nenhuma alternativa foram encontradas todos os critérios para um solvente ideal, e por este motivo, a substituição do hexano, que agora é usado quase que exclusivamente, será difícil. A extração aquosa, ou o dióxido de carbono supercrítico mostra-se ser economicamente praticável mas podem não se adaptar às plantas existentes, o que implicaria em grandes gastos de capital.

### 3.2.2 - Processo de Extração com solvente

Segundo Gimenes (1989), o processo de extração de óleo compreende várias operações que podem ser agrupadas dentro de blocos de operações para descrever o processo total. O primeiro bloco, chamado preparação das sementes, é onde as sementes são quebradas, laminadas e pré-cozidas para a extração do óleo tornar-se mais fácil. O segundo bloco é o de extração, onde o solvente é colocado em contato com a semente laminada para extração do óleo. O terceiro bloco está relacionado com a recuperação do solvente. Esta recuperação do solvente pode ser subdividida em dois blocos; a recuperação do solvente das laminas extraídas (lex), onde o farelo é obtido, e a recuperação ou separação do solvente da miscela (mistura de óleo e hexano), onde o óleo é obtido. Uma ilustração básica dessas seções pode ser vista na Figura 3.1. Especificações das correntes acerca da Figura 1 são mostradas na Tabela 3.3.

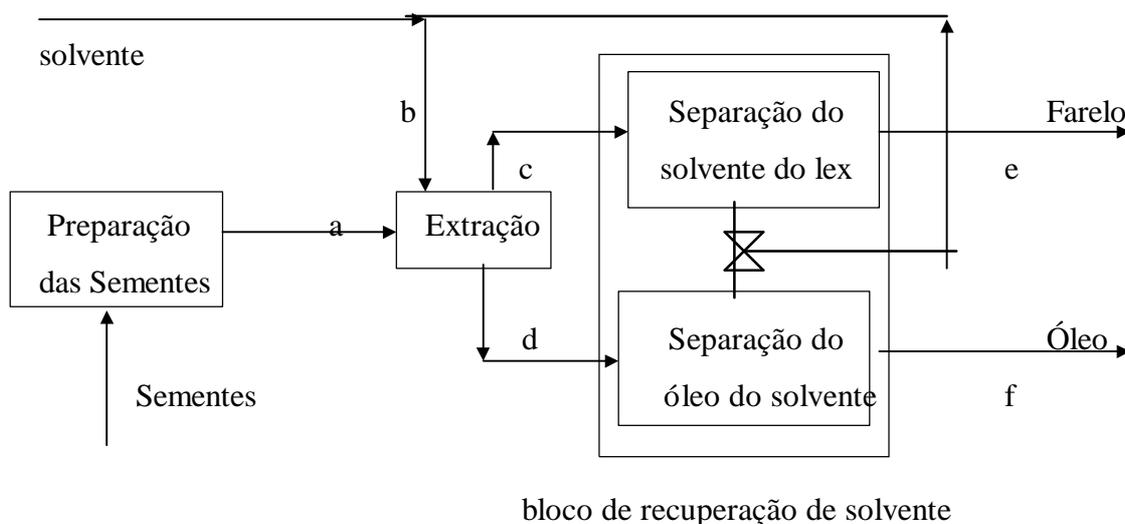


Fig.3.1 - Processo de Extração com solvente.

Tabela 3.3 - Especificação das Correntes ( % peso )

<b>Correntes</b>	<b>óleo</b>	<b>solvente</b>	<b>umidade</b>	<b>farelo</b>
<b>a - Soja</b>	<b>19</b>	<b>---</b>	<b>10</b>	<b>71</b>
<b>b - Solvente</b>	<b>1</b>	<b>98,5</b>	<b>0,5</b>	<b>---</b>
<b>c - Lex</b>	<b>0,4 - 1</b>	<b>25 - 40</b>	<b>10</b>	<b>50 - 70</b>
<b>d - Miscela</b>	<b>25 - 40</b>	<b>73 - 58</b>	<b>2</b>	<b>---</b>
<b>e - Farelo</b>	<b>0,5</b>	<b>---</b>	<b>12</b>	<b>87,5</b>
<b>f - Óleo</b>	<b>99,9</b>	<b>---</b>	<b>0,1</b>	<b>---</b>

O processo de preparação afeta a eficiência da extração e a qualidade do óleo.

A espessura das lâminas é um dos fatores que mais afeta a taxa de extração. A espessura das lâminas está geralmente na faixa de 0,2 mm a 0,5 mm, sendo mais comumente de 0,25 mm a 0,3 mm. O tamanho e a espessura das lâminas são controladas pelo tamanho da soja quebrada e pelo ajuste dos rolos laminadores.

### **3.2.3 Seção de Extração**

A seção de extração é considerada como a parte mais importante de todo o processo de extração. Embora apenas o extrator esteja envolvido, ele deve reduzir a conteúdo de óleo da lâmina extraída em menos de 1% em peso, e preferencialmente a aproximadamente 0,5% em peso para ser economicamente eficiente. O extrator recebe solvente da recuperação e produz a corrente de lâminas extraídas (lex) e a corrente de miscela, que deixa o extrator com a especificação mostrada na Tabela 3.3. Solvente também é adicionado ao processo para compensar perdas.

Dois tipos de equipamentos podem ser encontrados para a operação de extração: extratores de percolação e imersão. o primeiro é o mais comumente usado para extração de óleo de soja por causa de sua adequação para processamento de grandes volumes de sementes. Detalhes sobre tipos e modelos de extratores usados para extração são dadas em (1) (2) (5) (6). Nas melhores plantas contínuas a razão solvente óleo pode ser tão baixa quanto 1:1, em peso, visto que por simples percolação uma extração equivalente

difícilmente poderia ser completa com várias vezes mais solvente (6). para o processo de percolação a miscela que deixa o extrator contém aproximadamente 25% - 40% de óleo.

### **3.3 - EXTRATORES COM SOLVENTE PARA SOJA**

O equipamento extrator tem uma função central na determinação da composição das correntes no processo de extração. Desta forma, um entendimento preciso da operação é importante para que o equipamento extrator seja modelado, assim como todo o processo da planta de extração.

A extração do óleo de soja com solvente é uma operação de difusão na qual o solvente (hexano) seletivo dissolve o componente miscível (óleo) de outra substância. O extrator fornece o meio físico de contato entre solvente e sólido (soja preparada). O contato pode ser efetuado por imersão dos sólidos no solvente, percolação do solvente através de um leito de sólidos, ou combinação dos dois. Embora os primeiros extratores tenham sido do tipo imersão, os últimos desenvolvimentos favorecem a percolação, utilizando um leito composto por lâminas de soja e fluxo contra-corrente de lâminas e miscela. Projetos bem sucedidos tem sido desenvolvidos durante anos pela combinação de teorias e experiência prática, e tem sido consistentemente melhorados.

Para extratores de percolação, muitas variações de projeto/modelo são encontrados. Estes modelos são geralmente similares no princípio de operação, diferindo apenas no desenho mecânico utilizado para conduzir a percolação.

#### **3.3.1 Extratores Tipo Giratório ou Leito Fundo**

Estes extratores consistem de uma série de células arranjadas concentricamente, com material contendo óleo. Cada célula é cheia consecutivamente e colocado em contato com a miscela com concentração decrescente, como mostra a Figura 2. A carga fresca de sólidos é conduzida em contato primeiro com a miscela mais concentrada, e o sólido completamente extraído contata com o solvente puro antes da descarga. Dois tipos desses extratores são fabricados. No primeiro tipo as células giram sob jatos de solvente estacionários e tem uma posição fixa de carga e descarga. O Extrator original deste tipo é o Rotocel. No outro as células são fixas e os tubos de encher, bicos de jatos, telas de fundo e painelas coletoras de miscela giram sobre um tronco central.

O tempo de retenção nos extratores giratórios depende da taxa de rotação e da capacidade de cada célula. Um aumento da capacidade é mais economicamente alcançado pelo aumento da profundidade das células em preferência ao diâmetro do extrator. Em extratores de maior capacidade, as profundidade podem ser tão grandes quanto 5 m, sendo por este motivo designado de leito fundo.

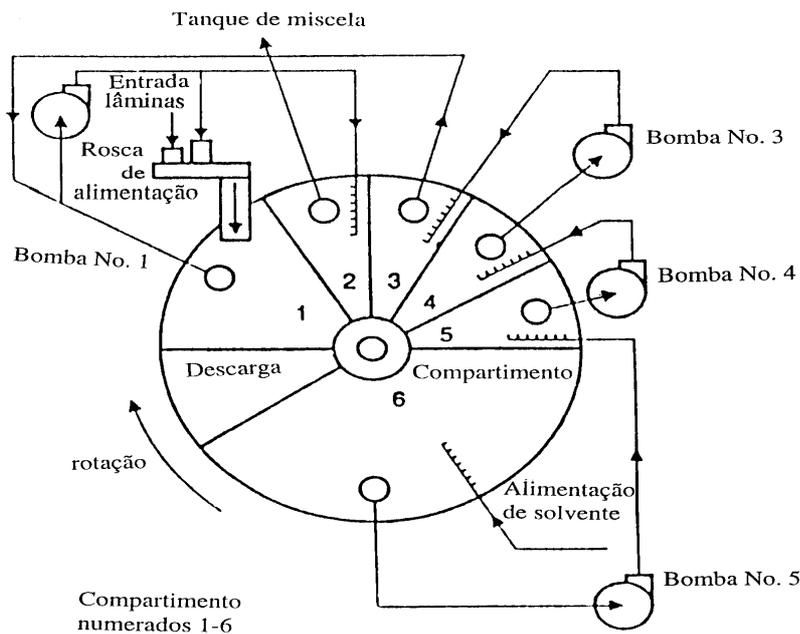


Fig. 3.2 - Diagrama esquemático do extrator giratório.

Descreveremos a seguir o extrator tipo esteira giratório, modelo Rotocel, apresentado na Figura 3.3.

O extrator Rotocel, mostrado na Figura 3.3 consiste de uma série de compartimentos formados por setores cilíndricos que gira em torno de um eixo central. Como as células giram sobre uma trajetória circular dentro do casco, estas células são inundadas com miscela e finalmente com solvente puro (hexano) para a lavagem final. O fundo de cada célula é uma porta articulada perfurada, a qual é suportada por rolos sobre um trilho. A parte mais baixa deste extrator é dividida por paredes verticais dentro do estágio de extração. O líquido drenado da célula é coletado nestes compartimentos e é bombeado pela bomba do estágio na direção oposta à da rotação das células. Na drenagem

final, a porta articulada da célula abre e as lâminas são descarregadas dentro de um compartimento, antes de serem enviadas ao desolventizador.

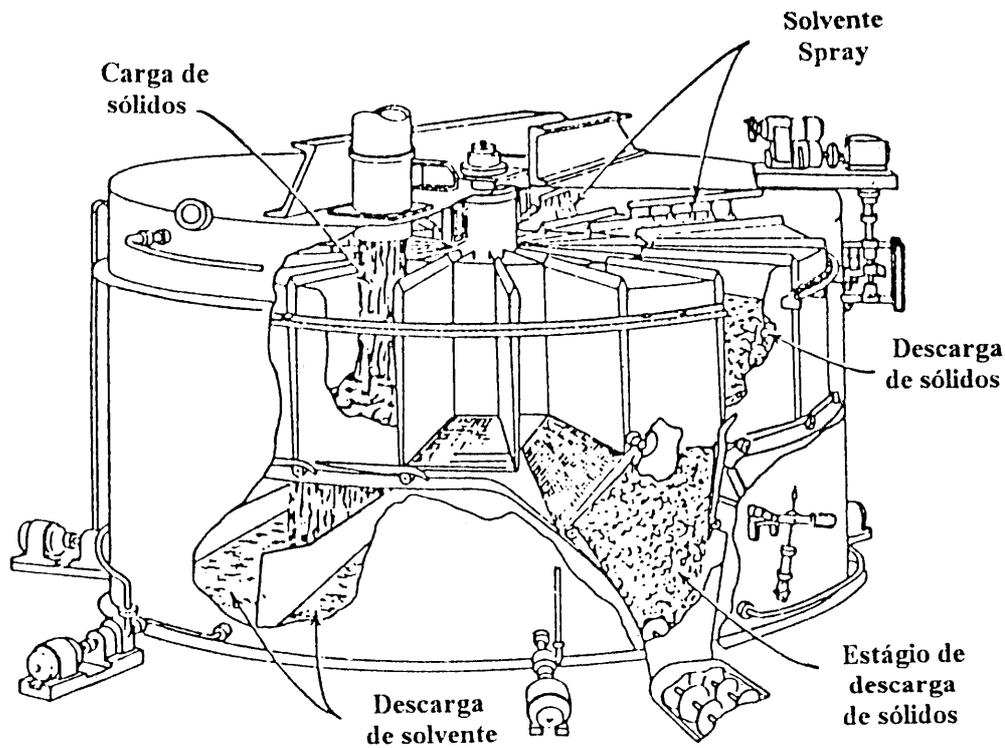


Fig. 3.3 - Extrator Rotocel.

Estes extratores tem diâmetro típico na faixa entre 3,4 m a 11,3 m e altura de 6,4 m a 7,3 m. A profundidade do leito é aproximadamente 1,3 m a 3,0 m, podendo chegar a 5 m. Modelos atuais tem capacidade de 3.000 ton/dia e são geralmente dados como compactos e flexíveis. De acordo com Becker (1978), as vantagens são simplicidade mecânica, tubos de distribuição ajustáveis e auto-limpeza dos sistema de miscela.

### 3.1 - MODELO MATEMÁTICO

Spaninks e Bruin (1979) apresentam um modelo matemático para extrator tipo esteira baseado na analogia entre fluxo de contato cruzado e coluna de processo estacionária (leito fixo). As Equações Diferenciais Parciais (EDP) descrevendo a transferência de massa no leito fixo são usadas para descrever a extração em cada estágio do extrator. As concentrações que deixam cada estágio são calculadas em um ciclo do processo. As EDP possuem solução analítica aproximada, conforme KLINKENBERG (1954) na forma de função erro, mas esta solução é inevitavelmente complicada. AMUNDSON (1949) propôs o uso da transformada de Laplace para a solução das EDP obtendo como solução uma integral de uma função de Bessel modificada.

Como alternativa as EDP podem ser resolvidas numericamente pelo método dos volumes finitos.

A Figura 3.4 representa o escoamento em corrente cruzada em condições de estado estacionário.

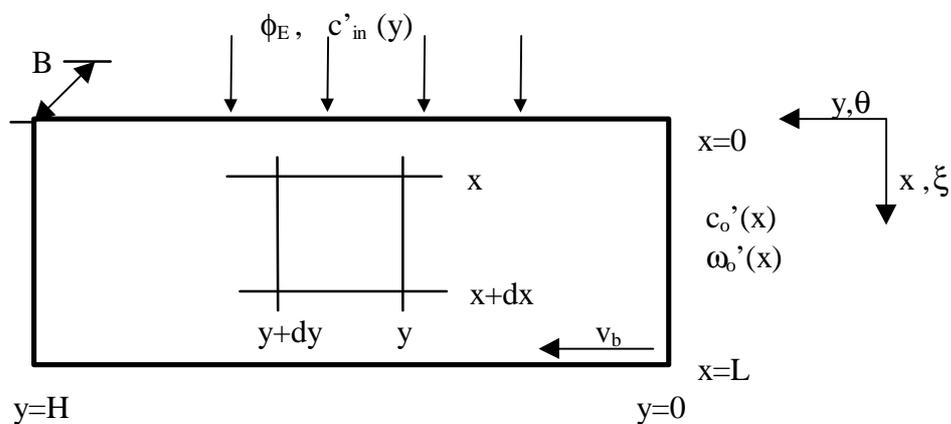


Figura 3.4 - Fase de contato em corrente cruzada.

O modelo apresentado por Spaninks e Bruin (1979) é composto de duas EDP, que são representadas pelas equações (3.1) e (3.2).

$$\frac{F_E}{H} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{v_b S h}{L} \frac{\partial c}{\partial y} = K_{oc} a B (c^* - c) \quad (3.1)$$

$$\frac{v_b S (1-h)}{L} \frac{\partial \omega}{\partial y} = - K_{oc} a B (c^* - c) \quad (3.2)$$

com condições de Contorno:

$$y = 0; \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}); \quad c = c_0(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} = 0; \quad c = c_{in}(\mathbf{y}) \quad (3.4)$$

As equações são adimensionalizadas por introdução das seguintes variáveis:

Concentração da fase líquida:

$$c = \frac{c - c_0}{m w_0 - c_0} \quad (3.5)$$

Concentração da fase sólida:

$$\mathbf{w} = \frac{m \mathbf{w} - c_0}{m w_0 - c_0} \quad (3.6)$$

Número de unidades de transferência:

$$N_{t,c} = \frac{K_{oc} a V}{F_E} \quad (3.7)$$

Coefficiente de distribuição:

$$D = \frac{mh}{(1-h)} \quad (3.8)$$

Distância adimensional da entrada de líquido:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad (3.9)$$

Tempo de residência adimensional dos sólidos no extrator:

$$\mathbf{q} = \frac{(y/v_b) F_E}{Vh} \quad (3.10)$$

As equações podem assim ser rearranjadas para:

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} = N_{t,c} (\mathbf{w} - c) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}} = N_{t,c} D (\mathbf{w} - c) \quad (3.12)$$

com condições de contorno e inicial:

$$\mathbf{q} = 0; \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}); \quad c = c_0(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x} = 0; \quad c = c_{in}(\mathbf{q}) \quad (3.14)$$

O número de unidades de transferência e também a linha de equilíbrio constante são necessárias para o cálculo. Variáveis operacionais e de projeto, como por exemplo

fluxos de sólidos e solvente, área da seção cruzada do extrator (perpendicular ao fluxo de sólidos), velocidade da esteira e outras relacionadas ao tamanho do extrator estão envolvidas.

## **4 - MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS**

## 4.1 - INTRODUÇÃO

O uso de técnicas numéricas para a solução de complexos problemas da engenharia e da física é, hoje, uma realidade, graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Em função dessa disponibilidade computacional, que cresce exponencialmente, o desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos analistas numéricos. A ampla aceitação dos modelos numéricos pela comunidade interessada na solução desses problemas explica-se pela sua grande versatilidade e relativa simplicidade de aplicação.

Em resumo, ficará cada vez mais fácil, tanto no meio acadêmico-científico como no industrial, o uso de técnicas numéricas para solução de problemas de engenharia, uma vez que os custos para aquisição dos equipamentos necessários serão cada vez menores. A seguir, é feita uma avaliação da potencialidade das diversas ferramentas disponíveis para esse fim.

O engenheiro ou projetista incumbido de resolver um determinado problema tem à sua disposição, fundamentalmente, três ferramentas:

1. métodos analíticos;
2. métodos numéricos (experimentação numérica); e
3. experimentação em laboratório.

Os métodos analíticos e os numéricos formam a classe dos métodos teóricos, pois ambos objetivam resolver equações diferenciais. A diferença está apenas na complexidade da equação que cada método pode atacar. Os métodos analíticos têm a desvantagem de serem aplicáveis apenas em problemas cujas hipóteses simplificativas os desviam demasiadamente do fenômeno físico real. Além disso, são aplicados, normalmente a geometrias simples e condições de contorno também simples. Obviamente, as soluções analíticas não devem ser descartadas e uma das suas importantes aplicações é, exatamente, para validar casos limites de modelos numéricos e auxiliar no desenvolvimento de métodos numéricos mais robustos. Uma vantagem significativa é a obtenção da solução em forma fechada, requerendo baixíssimos tempos de computação. Se um método analítico for suficiente para resolver o problema de interesse dentro de níveis de precisão e exigência

necessários, ele deve ser preferido. Uma regra básica que deve ser observada em engenharia é o uso da ferramenta adequada ao tamanho do problema em questão.

Com relação à experimentação em laboratório, sua grande vantagem é o fato de tratar com a configuração real. Ela é, entretanto, de altíssimo custo e muitas vezes não pode ser realizada, por questões de segurança. Na ausência de modelos matemáticos estabelecidos e em geometrias extremamente complexas, muitas vezes é a única alternativa de que o projetista dispõe.

A experimentação numérica (uso de técnicas numéricas), por sua vez, praticamente não apresenta restrições, podendo resolver problemas com complicadas condições de contorno, definidos em geometria arbitrárias e apresentando resultados com uma rapidez fantástica. Os dados obtidos devem ser, entretanto, confiáveis e este é um ponto de extrema importância a ser observado pelo analista.

Existem dois níveis de erros que podem estar presentes na solução numérica quando os resultados são comparados com a realidade de um problema físico. No primeiro nível estão os erros numéricos propriamente ditos, resultado da má solução das equações diferenciais. Para detectá-los, os resultados devem ser comparados com outras soluções, analíticas ou numéricas, verificando-se se a equação diferencial foi corretamente resolvida. Aspectos como precisão da solução e convergência do algoritmo são testados nesta fase, que pode ser chamada de validação numérica. Esse processo atesta a qualidade do modelo numérico. No segundo nível estão os erros, resultado do uso de equações diferenciais que não representam adequadamente o fenômeno. A validação física, portanto, preocupa-se com a fidelidade do modelo matemático para com o problema físico em questão.

Na visão da engenharia este é o ponto que interessa. Logo, a ferramenta numérica é adequada e confiável quando se está de posse de um método numérico que resolva corretamente as equações diferenciais, e de um modelo matemático que, sabidamente, represente com fidelidade o fenômeno físico. É bom lembrar que nada ajuda, do ponto de vista da engenharia, ter um excelente método numérico, se o modelo matemático (isto é, as equações diferenciais escolhidas) não representa o fenômeno que se quer modelar.

A tendência que se observa, portanto, é a realização de experiências em laboratório cada vez mais sofisticadas com o intuito de usar os resultados na corroboração de modelos matemáticos e numéricos, na investigação e entendimento de novos fenômenos que ainda necessitam ser matematicamente modelados, e na avaliação final de um determinado

projeto. O laboratório deixará, certamente, de realizar a tarefa repetitiva, que ficará a cargo do computador. O que deve ser buscado, portanto, é a associação adequada da simulação numérica com selecionadas experiências em laboratório. A união dessas técnicas resultará em um projeto melhor e mais barato. Não há dúvida de que este é o caminho da engenharia moderna, onde a simulação desempenhará, cada vez mais, um papel decisivo nos custos e qualidade do projeto, caminhando lado a lado com a experimentação de laboratório.

É importante salientar que estamos observando, por enquanto em maior escala apenas em países mais desenvolvidos, que as técnicas numéricas não estão presentes apenas na solução de complexos problemas a cargo de institutos de pesquisas e universidades. Elas já fazem parte das ferramentas diárias dos engenheiros em muitas empresas de grande e médio porte.

## 4.2 - NÍVEIS DE FORMULAÇÃO DE MODELOS

A obtenção de qualquer problema físico requer a habilidade da criação do modelo matemático correspondente. O modelo matemático deve ser tal que possa ser resolvido com tempos de computação não-proibitivos e que os resultados obtidos bem representem o fenômeno físico em questão. Obviamente, atingir este objetivo não é uma tarefa fácil. A Fig. 4.1 mostra, de maneira esquemática, a tarefa exigida ao buscar a solução de um problema.

Para a obtenção do sistema de equações, representado na Fig. 4.1 pelo quadro Modelo Matemático, a decisão importante a ser tomada é com relação ao nível no qual os balanços de conservação são realizados. Citando os extremos, os balanços de conservação podem ser feitos tanto em nível molecular, originando uma equação para cada molécula, como sobre volumes de controle, que podem até, em determinadas direções, coincidir com o domínio de solução. Nesses extremos, varia muito a complexidade dos métodos numéricos adequados a cada situação.

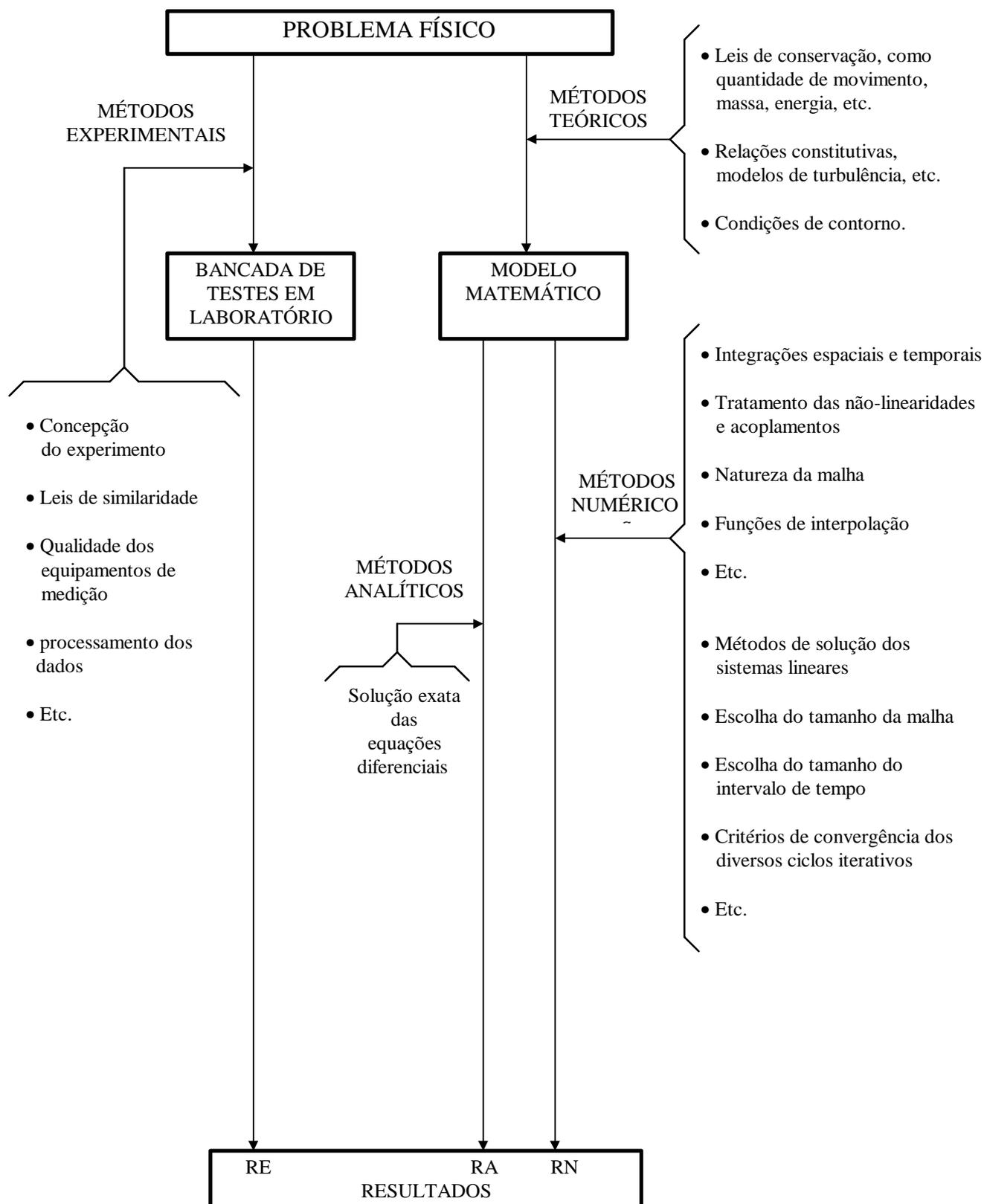


Figura 4.1 - Métodos de Soluções

### 4.3 - A TAREFA DO MÉTODO NUMÉRICO

A tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes na equação por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Um método analítico que tivesse a habilidade de resolver tais equações nos daria a solução em uma forma fechada e seria possível, então, calcular os valores das variáveis dependentes em nível infinitesimal, isto é, para um número infinito de pontos.

Por outro lado, quando decidimos fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, aceitamos ter a solução para um número discreto de pontos, esperando que, quanto maior for este número de pontos, mais próxima da solução exata será a nossa solução aproximada (ou numérica).

A Figura 4.2 exemplifica a tarefa do método numérico, na qual uma equação diferencial escrita em nível infinitesimal e definida para o domínio  $D$  é transformada em um sistema de equações algébricas. Para isto, as derivadas de função existentes na equação diferencial devem ser substituídas pelos valores discretos da função. A maneira de obter essas equações algébricas é o que caracteriza o tipo do método numérico.

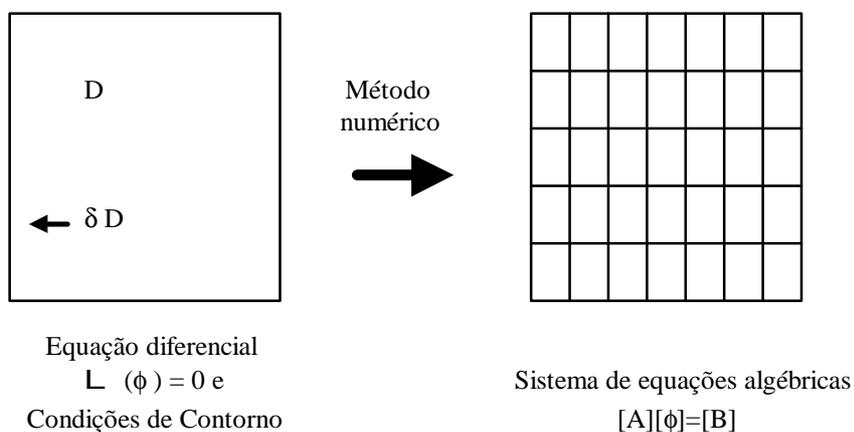


Figura 4.2 - A tarefa do método numérico

Nossa preocupação, neste texto, será apenas com o método dos volumes finitos. Existem, entretanto, algumas considerações que devem ser feitas e que valem para qualquer método. Para tanto, usaremos, inicialmente, o método de diferenças finitas, aproveitando também para apresentar e comentar aspectos desse método, que foi

intensamente usado no passado em problemas de escoamento de fluidos e transferência de calor.

### 4.3.1 - O Método de Diferenças Finitas - MDF

O primeiro passo para a obtenção das equações aproximadas é promover a discretização do domínio de interesse, isto é, dividi-lo em células elementares. Apesar de não ser necessário, é comum no MDF usar discretização estruturada (construída usando um sistema coordenado) através de coordenadas ortogonais, como cartesianas, cilíndricas, esféricas, conforme mostrado na Fig. 4.2 para o caso bidimensional. A Fig. 4.3 mostra uma discretização unidimensional que será usada ao longo deste capítulo.

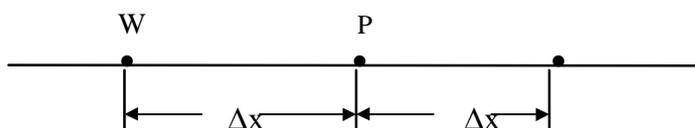


Figura 4.3 - Discretização unidimensional

Considere-se a seguinte equação diferencial do problema de condução transiente unidimensional:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

onde  $T$  é a temperatura,  $t$  o tempo e  $\alpha$  a difusividade térmica.

A tarefa é representar as derivadas espacial e temporal por expressões algébricas. Usando séries de Taylor em torno de  $P$ , os valores da temperatura em  $E$  e  $W$  podem ser calculados por

$$T_E = T_P + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_P \Delta x + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_P \frac{\Delta x^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_P \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \dots \quad (4.2)$$

$$T_W = T_P - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_P \Delta x + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_P \frac{\Delta x^2}{2!} - \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_P \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots - \dots \quad (4.3)$$

Dessas equações podemos encontrar as aproximações numéricas das derivadas parciais. Usando as Eqs. (4.2) e (4.3), encontramos, respectivamente,

$$\left. \frac{\mathcal{I}T}{\mathcal{I}k} \right|_P = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\mathcal{I}T}{\mathcal{I}k} \right|_P = \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.5)$$

que são as aproximações numéricas, para a frente e para trás, da derivada de primeira ordem. Observa-se que erros de truncamento são da ordem de  $\Delta x$ . Somando a Eq. (4.3) com a Eq. (4.2), obtém-se:

$$\left. \frac{\mathcal{I}^2 T}{\mathcal{I}k^2} \right|_P = \frac{T_E + T_W - 2T_P}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \quad (4.6)$$

que é a aproximação numérica para a derivada de segunda ordem em diferenças centrais. Neste caso, o erro de truncamento é da ordem de  $(\Delta x)^2$ . Trabalhando com as expansões da função em série de Taylor, é possível, usando mais termos da série, representar derivadas de qualquer ordem. Logicamente, quanto maior for a ordem da derivada, e de acordo com a ordem desejada para o erro de truncamento, mais pontos serão necessários em torno de P. As aproximações dadas pelas Eqs. (4.4) e (4.6) são suficientes para o nosso exemplo. A seguir, apresenta-se as diferentes funções de interpolação no tempo e no espaço empregadas no método dos volumes finitos.

### 4.3.1 - Funções de Interpolação no Tempo

Considere-se a Eq. (4.1) do problema de difusão de calor transiente que deverá ser aproximada numericamente usando as Eqs. (4.4) a (4.6). A aproximação do termo transiente, de acordo com a Eq. (4.4), onde a variável independente agora é o tempo, é dada por:

$$\left. \frac{\mathcal{I}T}{\mathcal{I}t} \right|_P = \frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.7)$$

onde  $T_P$  e  $T_P^0$  são os valores da temperatura do ponto P no nível de tempo no qual se busca a solução e no anterior, respectivamente. Deve-se lembrar que as temperaturas no nível de tempo anterior são conhecidas em todos os pontos do domínio.

Uma questão importante surge agora com relação ao nível de tempo no qual será avaliado o lado direito da Eq. (4.1). Lembrando que este termo representa os fluxos

difusivos de calor, e que se está avançando a solução de um nível de tempo para outro, deve-se decidir se se avalia esses fluxos no início, no fim ou em uma posição intermediária do intervalo de tempo. Denotando por  $\theta$  a posição, no intervalo de tempo, de avaliação do termo difusivo, tem-se a seguinte aproximação numérica para a Eq. (4.1):

$$\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} = \alpha \frac{T_E^q + T_W^q - 2T_P^q}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

A partir da Eq. (4.8) pode-se gerar todas as funções de interpolação, as quais são discutidas a seguir.

#### 4.3.1.1 - Formulação Explícita

Escolhendo  $\theta = 0$ , tem-se a formulação explícita, onde todas as temperaturas vizinhas a P são avaliadas no instante anterior e, portanto, já são conhecidas. É possível explicitar a incógnita da equação ( $T_P$ ) em função de temperaturas vizinhas, todas conhecidas. Como tem-se uma equação para cada ponto discreto e, em cada uma destas equações, as temperaturas vizinhas são sempre do instante anterior, a formulação explícita dá origem a um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas uma a uma, obtendo-se a temperatura em cada ponto do espaço para o novo nível de tempo. Deve-se enfatizar que, pelo fato de as equações não serem acopladas entre si, não existe a necessidade de resolver uma matriz. Por isso a denominação conjunto e não sistema de equações.

#### 4.3.1.2 - Formulação Totalmente Implícita

Se na Eq. (4.8) o valor de  $\theta$  for feito igual a 1, tem-se a formulação totalmente implícita, com a seguinte equação discretizada:

$$T_P \left( \frac{1}{r} + 2 \right) = T_E + T_W + \frac{T_P^0}{r} \quad (4.9)$$

Essa formulação dá origem a um sistema de equações, uma vez que as equações estão agora acopladas entre si. Na Eq. (4.9), as temperatura  $T_E$  e  $T_W$  estão sendo calculadas no mesmo nível de tempo de  $T_P$ , o que caracteriza o acoplamento. Para essa equação simples em consideração, tal formulação é incondicionalmente estável e o

intervalo de tempo é limitado por precisão. Observe-se que esta formulação é chamada totalmente implícita, porque valores das temperaturas que entram no cálculo do fluxo difusivo são feitos iguais aos valores no fim do intervalo de tempo.

#### 4.3.1.3 - Formulação Implícita

Na formulação implícita, os valores das temperaturas que entram no cálculo do fluxo difusivo são tomados como uma média dos valores dessas temperaturas no começo e no fim do intervalo de tempo. O mais conhecido método nesta classe é o Crank-Nicolson, onde a temperatura é tomada como uma média aritmética entre as temperaturas  $T_P^0$  e  $T_P$ , como:

$$T_P^q = qT_P + (1 - q)T_P^0 \quad (4.10)$$

É importante observar que basta ser  $\theta$  diferente de zero para que as equações fiquem acopladas, caracterizando a implicitude entre as mesmas. É comum na literatura, denominar-se a formulação com  $\theta = 1$  de formulação implícita e não totalmente implícita, como aqui denominada. A razão para isto é que a grande maioria dos métodos usa  $\theta = 1$ , por razões de estabilidade. A Fig. 4.4 ilustra, para os três tipos de formulações, as conexões existentes entre o ponto P e seus vizinhos, no instante de tempo de cálculo e no instante de tempo anterior. A figura mostra que, quando existem conexões no mesmo nível de tempo de cálculo da solução, as equações são acopladas entre si e é necessária a solução de um sistema linear para obter-se os resultados.

#### 4.3.2 - Funções de Interpolação Unidimensionais no Espaço

Nesta seção, far-se-á uma análise dos diversos esquemas que usam diferentes funções de interpolação.

Considere-se o problema unidimensional de convecção/difusão da propriedade  $\phi$ , dado por

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}k}(ruf) = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}k} \left( \Gamma^f \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}k} \right) \quad (4.11)$$

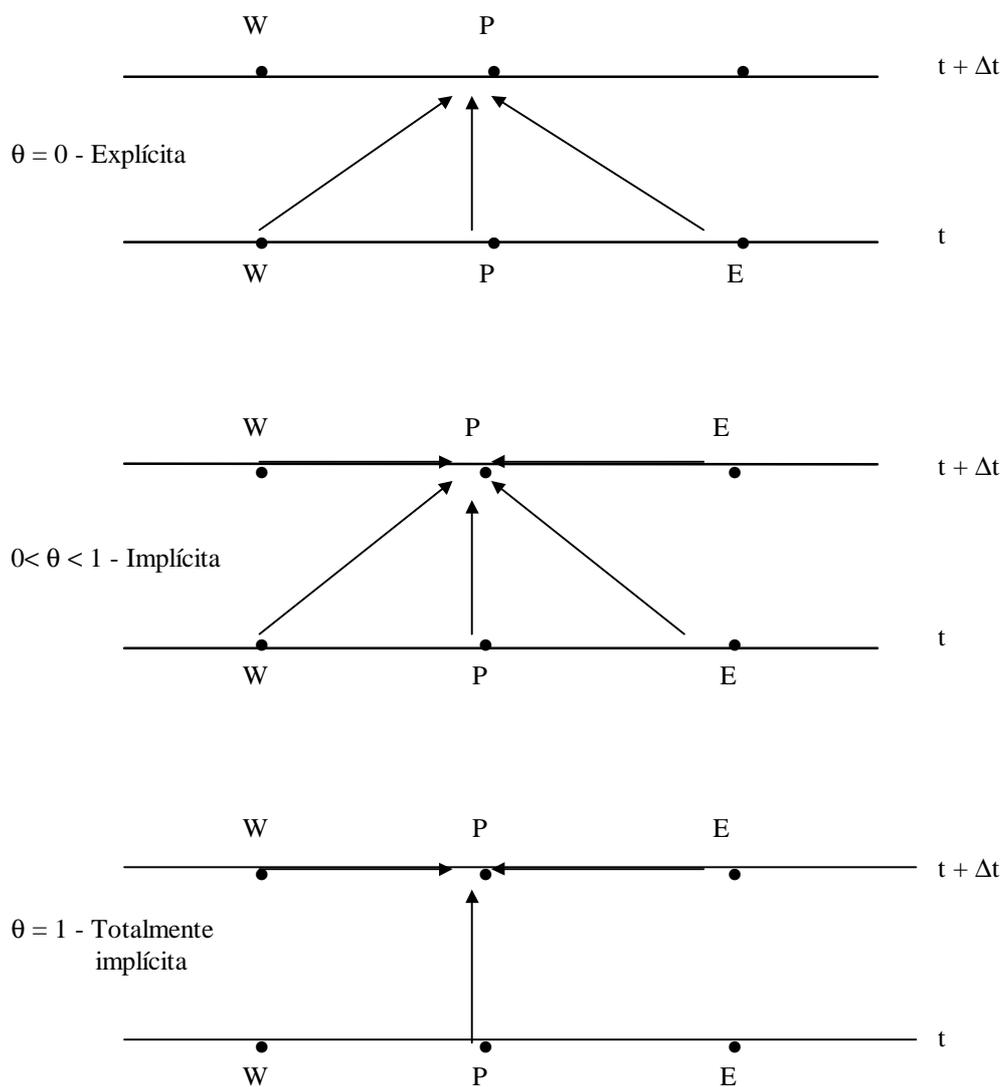


Figura 4.4 - Tipos de conexões na formulações estudadas

onde  $\phi$  representa uma propriedade qualquer transportada e  $\Gamma^\phi$ , o coeficiente de transporte. Integrando-se a Eq. (4.11) sobre o volume elementar mostrado na Fig. 4.5, origina:

$$r_{uf}|_e - r_{ui}|_w = \Gamma^f \frac{\mathcal{J}f}{\mathcal{J}k}|_e - \Gamma^f \frac{\mathcal{J}f}{\mathcal{J}k}|_w \quad (4.12)$$

que após rearranjada, tem a forma:

$$A_p \mathbf{f}_p = A_e \mathbf{f}_E + A_w \mathbf{f}_W \quad (4.13)$$

com os coeficientes dados por:

$$A_P = \frac{2\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.14)$$

$$A_e = -\frac{ru}{2\Delta x} + \frac{\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.15)$$

$$A_w = \frac{ru}{2\Delta x} + \frac{\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.16)$$

onde observa-se que é necessário fornecer as relações entre os pontos nodais (funções de interpolação) para que seja possível calcular o valor da função e de suas derivadas nas interfaces do volume de controle. Diferentes funções de interpolação geram aproximações diferentes, que produzem soluções diferentes para a mesma equação diferencial, enquanto a malha não for refinada. Não existe nenhum exagero em enfatizar e repetir que o estabelecimento da função de interpolação é a parte fundamental na concepção de um método numérico.

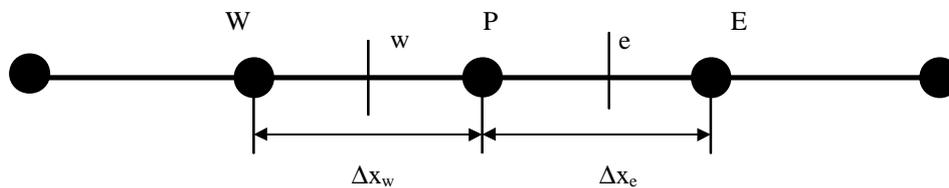


Figura 4.5 - Discretização unidimensional

#### 4.3.2.1 - Diferenças Centrais (CDS)

O esquema CDS usa uma interpolação linear. Considerando que as faces do volume de controle estejam situadas no meio da distância entre os pontos nodais, temos

$$f_e = \frac{f_E + f_P}{2} ; f_w = \frac{f_W + f_P}{2} \quad (4.17)$$

e, conseqüentemente,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_e = \frac{f_E - f_P}{\Delta x_e} ; \left. \frac{df}{dx} \right|_w = \frac{f_P - f_W}{\Delta x_w} \quad (4.18)$$

Com a substituição das Eqs. (4.17) e (4.18) na Eq. (4.12) e considerando o campo de velocidades uniforme, obtemos os coeficientes dados pelas equações:

que sempre apresentam coeficientes negativos, independentemente do sinal da velocidade, quando  $P_e$ , ou  $R_e$  para problemas de transferência de quantidade de movimento, for maior do que 2. Na obtenção da Eqs. (4.14) a (4.16) usamos malhas igualmente espaçadas, apenas por conveniência e não por necessidade.

Portanto, o uso de diferenças centrais na aproximação dos termos convectivos cria, quase sempre, coeficientes negativos, pois é impossível, praticamente, refinar a malha até forçar sua positividade. O uso de coeficientes negativos, associados à natureza do método iterativo usado para a solução do sistema linear, pode impedir totalmente a obtenção da solução. Além disso, a presença de aproximações de alta ordem, como diferenças centrais, nos termos convectivos, quando estes forem dominantes, gera instabilidades, produzindo soluções que apresentam oscilações numéricas em regiões de grandes gradientes.

#### 4.3.2.2 - *Upwind*

Para evitar o aparecimento de coeficientes negativos e as oscilações numéricas, lança-se mão do esquema *upwind*, aproximação de um lado só. Agora, as funções de interpolação têm as seguintes expressões:

$$\mathbf{f}_w = \mathbf{f}_W \quad ; \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_P \quad ; \quad u > 0 \quad (4.19)$$

$$\mathbf{f}_w = \mathbf{f}_P \quad ; \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_E \quad ; \quad u < 0 \quad (4.20)$$

para  $u$  positivo, a aproximação de um lado só deverá ser para trás, resultando na seguinte aproximação numérica para a Eq. (4.11)

$$ru \frac{\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_W}{\Delta x} = \Gamma^f \frac{\mathbf{f}_E + \mathbf{f}_W - 2\mathbf{f}_P}{\Delta x^2} \quad (4.21)$$

originando os seguintes coeficientes:

$$A_P = \frac{2\Gamma^f}{\Delta x} + \frac{ru}{\Delta x} \quad (4.22a)$$

$$A_e = \frac{\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.22b)$$

$$A_w = \frac{ru}{\Delta x} + \frac{\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.22c)$$

que, como a velocidade é positiva, são todos positivos. Para  $u$  negativo, a aproximação da Eq. (4.11) resulta em:

$$ru \frac{f_E - f_P}{\Delta x} = \Gamma^f \frac{f_E + f_W - 2f_P}{\Delta x^2} \quad (4.23)$$

criando os seguintes coeficientes:

$$A_p = \frac{2\Gamma^f}{\Delta x} - \frac{ru}{\Delta x} \quad (4.24a)$$

$$A_e = -\frac{ru}{\Delta x} + \frac{\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.24b)$$

$$A_w = \frac{\Gamma^f}{\Delta x^2} \quad (4.24c)$$

onde se observa novamente que, pelo fato de  $u$  ser negativo, os coeficientes resultam todos positivos.

Observe-se que o termo difusivo continuou sendo aproximado por diferenças centrais. Apenas para reafirmar, o esquema *upwind* tem sua relação direta com o termo parabólico, isto é, o valor da função na interface é igual ao valor da função no volume a montante. O volume a montante muda, logicamente, de acordo com o sentido da velocidade.

#### 4.4 - O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Existem duas maneiras de se obter as equações aproximadas no método dos volumes finitos. A primeira é a realização de balanços da propriedade em questão nos volumes elementares, ou volumes finitos, e a segunda é, partindo-se da equação diferencial na forma conservativa, e integrá-la sobre o volume elementar, no espaço e no tempo. Logicamente, os processos são equivalentes, pois basta lembrar que para deduzir as equações diferenciais é necessário primeiro realizar um balanço em um volume infinitesimal, fazendo-se, em seguida, o processo de limites para obter a equação diferencial. Para ilustrar estes processos, considere-se o volume elementar bidimensional mostrado na Figura 4.6.

O interesse, neste momento é obter a equação diferencial que representa a conservação da massa. O balanço de massa no volume elementar mostrado na figura, para regime permanente, é dado por:

$$\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (4.25)$$

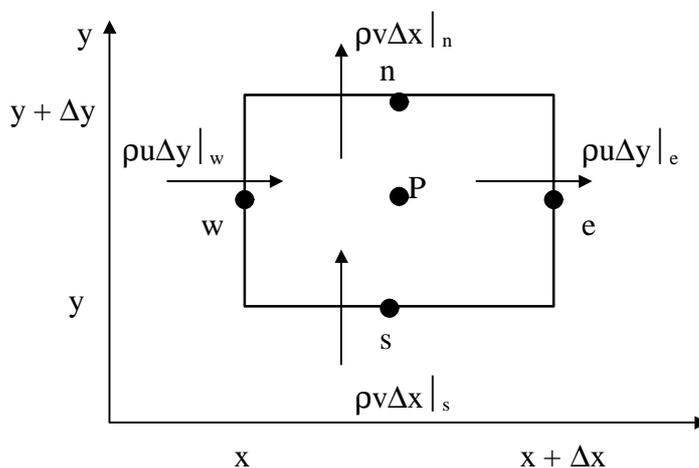


Figura 4.6 - Balanço de massa no volume finito

As letras minúsculas  $e$ ,  $w$ ,  $n$  e  $s$  que aparecem na Figura 4.6 representam, respectivamente, os pontos cardeais leste, oeste, norte e sul e é a nomenclatura usada para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica.

Dividindo a Eq. (4.25) por  $\Delta x \Delta y$ , encontramos

$$\frac{ru|_e - ru|_w}{\Delta x} + \frac{rv|_n - rv|_s}{\Delta y} = 0 \quad (4.26)$$

que, após a aplicação do limite, nos dá a forma diferencial conservativa da equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ru}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rv}) = 0 \quad (4.27)$$

A Eq. (4.27) está na forma conservativa e quer-se agora obter a sua aproximação numérica através da integração da mesma no volume elementar, como é a prática do método dos volumes finitos. Realizando a integração sobre o volume mostrado na Fig.4.6, obtêm-se:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ru}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rv}) dx dy = 0 \quad (4.28)$$

$$\int_s^n [ru|_e - ru|_w] dy + \int_w^e [rv|_n - rv|_s] dx = 0 \quad (4.29)$$

Considerando que o fluxo de massa avaliado no meio da face do volume de controle representa a média da variação na face, pode-se escrever:

$$\mathbf{ru} Dy|_e - \mathbf{ru} Dy|_w + \mathbf{rv} Dx|_n - \mathbf{rv} Dx|_s = 0 \quad (4.30)$$

que é exatamente a Eq.(4.25). É comum na literatura numérica escrever a Eq.(4.29) como:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \quad (4.31)$$

Esta equação, ou a Eq. (4.25), é a equação aproximada que vale para o volume P. Portanto, realizar a integração da forma conservativa da equação diferencial ou fazer o balanço são procedimentos equivalentes. Realizando a integração para todos os volumes elementares, obtém-se o sistema de equações algébricas.

A preferência em se obter as equações aproximadas integrando-se a equação diferencial vem do fato de que nem todos os balanços são fáceis de deduzir como foi o da conservação da massa. Um balanço de quantidade de movimento, por exemplo, requer a identificação e o somatório de todas as tensões atuantes no volume de controle. Para volumes de controle irregulares, não é uma tarefa fácil.

#### 4.4.1 Condução Unidimensional Transiente

Considere-se a equação da condução unidimensional transiente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4.32)$$

A malha empregada é mostrada na Fig. 4.7, onde, nas outras direções, as dimensões são tomadas como unitárias.

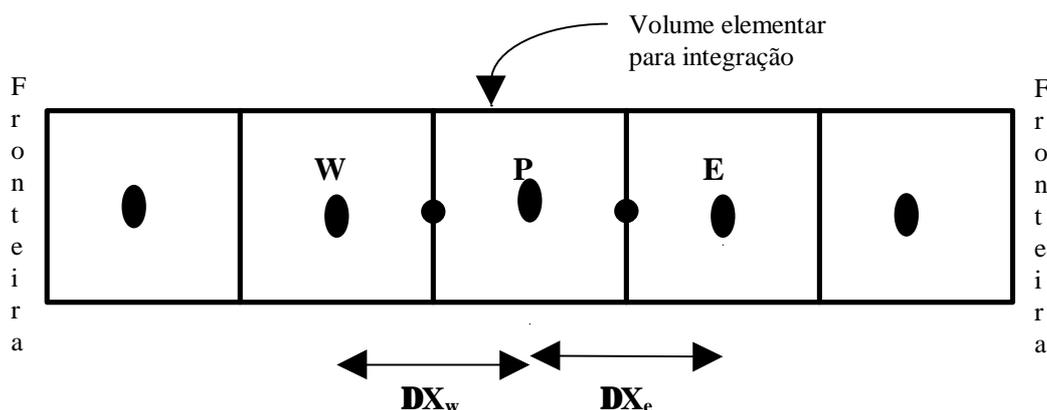


Figura 4.7 - Malha para o problema unidimensional de condução

Observe-se que a malha adotada possui volumes inteiros em todo o domínio. O procedimento aqui adotado é preferido por duas razões: a primeira, porque facilita a generalização do cálculo dos coeficientes se todos os volumes tiverem as mesmas características, e a segunda, por ficar bem mais simples a aplicação das condições de contorno quando sistemas de equações estiverem sendo resolvidos. Finalmente, o uso de volumes inteiros em todo o domínio facilita enormemente o uso de variáveis localizadas, uma prática moderna para o armazenamento das variáveis.

A integração no tempo e no espaço da Eq. (4.32) fornece:

$$\int_0^{\Delta t} \int_W^E \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) dx dt = \int_0^{\Delta t} \int_W^E \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \quad (4.33)$$

e:

$$\int_W^E (\rho T - \rho T^o) dx = \int_0^{\Delta t} \left. \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right|_E - \left. \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right|_W \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (4.34)$$

Empregando a convenção de não usar subscrito para o nível  $t + \Delta t$  e usar o sobrescrito “o” para o tempo anterior, e considerando o integrando como a média representativa dentro do volume, tem-se:

$$M_p T_p - M_p^o T_p^o = \int_{\theta}^{t+\Delta t} \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \dot{\theta} dt \quad (4.35)$$

onde M e M<sup>o</sup> representam a massa dentro do volume elementar nos dois níveis de tempo.

Observe-se, agora, que é necessário decidir como é o comportamento do fluxo de calor nas duas faces do volume elementar ao longo do intervalo de tempo  $\Delta t$  para que a integração possa ser realizada. Dependendo da função escolhida para o comportamento do fluxo no intervalo de tempo, tem-se as formulações totalmente implícita, implícita e explícita. Observe-se, entretanto, que aqui a questão fica mais clara e mais fácil de ser compreendida, uma vez que a integração no tempo mostra a necessidade de uma função que especifique o comportamento da temperatura ao longo do intervalo. Novamente, simboliza-se pelo sobrescrito  $\theta$  a escolha de avaliar o fluxo no início, em uma posição qualquer, ou no fim do intervalo de tempo.

Deve ser lembrado que os valores da temperatura são conhecidos no começo e no fim do intervalo de tempo. Se se decide avaliar o fluxo em uma posição no tempo entre os limites do intervalo, tem-se que especificar uma função que dá a variação da temperatura dentro do intervalo de tempo. Esta é a chamada função de interpolação no tempo. A Eq. (4.35) toma, então, a seguinte forma:

$$M_p T_p - M_p^o T_p^o = \int_{\theta}^{t+\Delta t} \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \dot{\theta} dt \quad (4.36)$$

Deve-se também escolher uma função de interpolação espacial para a temperatura, uma vez que a mesma precisa ter sua derivada avaliada nas interfaces do volume de controle. Para este problema físico, onde se têm apenas efeitos de difusão, é natural escolher uma função linear (por exemplo, diferenças centrais) entre os pontos nodais. Logo, as derivadas nas faces são expressas por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e = \frac{T_E^q - T_P^q}{\Delta x_e} \quad (4.37)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w = \frac{T_P^q - T_W^q}{\Delta x_w} \quad (4.38)$$

Com estas definições a Eq. (4.35) fica:

$$\frac{M_P T_P - M_P^\circ T_P^\circ}{\Delta t} = \frac{k}{c_p} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e \frac{T_E^q - T_P^q}{\Delta x_e} - \frac{k}{c_p} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \frac{T_P^q - T_W^q}{\Delta x_w} \quad (4.39)$$

ou, com mais um rearranjo, a Eq. (4.38) torna-se:

$$\frac{M_P T_P}{\Delta t} = \frac{k}{c_p} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e \frac{T_E^q}{\Delta x_e} + \frac{k}{c_p} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \frac{T_W^q}{\Delta x_w} + \frac{\dot{e}}{\dot{e}} \frac{k}{c_p \Delta x} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e - \frac{k}{c_p \Delta x} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \frac{\dot{u}}{\dot{u}} T_P^q + \frac{M_P^\circ T_P^\circ}{\Delta t} \quad (4.40)$$

É momento, agora, de definir a função de interpolação no tempo. A Fig. 4.8 mostra três funções de interpolação possíveis, que podem ser representadas pela função:

$$T^\theta = \theta T + (1 - \theta) T^0 \quad (4.41)$$

que, por sua vez, dá origem aos três tipos de formulações já discutidas na seção 4.3.1. Convém lembrar que o valor de  $T^\theta$ , obtido pela Eq. (4.41), é o valor representativo da temperatura para todo o intervalo. Outras funções de interpolação são possíveis, como, por exemplo, aquela representada pela linha tracejada na Fig.4.8. São funções que podem ser usadas, caso se deseje usar maiores intervalos de tempo e, concomitantemente, seguir o transiente com mais fidelidade. Seu uso é, entretanto raro.

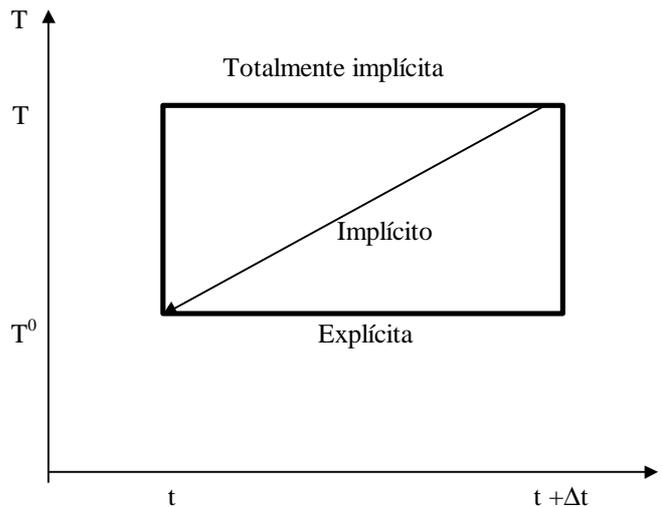


Figura 4.8 - Função de interpolação no tempo

A Eq.(4.40) para a formulação explícita tem a seguinte forma:

$$A_p T_p = A_e T_E^0 + A_w T_W^0 + (A_p^0 - A_e - A_w) T_p^0 \quad (4.42)$$

onde:

$$A_p = \frac{M_p}{\Delta t}; \quad A_p^0 = \frac{M_p^0}{\Delta t} \quad (4.43)$$

$$A_e = \frac{k}{c_p \Delta x} \Big|_e \quad (4.44)$$

$$A_w = \frac{k}{c_p \Delta x} \Big|_w \quad (4.45)$$

e  $M_p = \rho_p \Delta x$  e  $M_p^0 = \rho_p^0 \Delta x$ :

A Eq. (4.40) para a formulação totalmente implícita ( $\theta=1$ ) tem a forma (lembrando que para  $\theta=1$  não se usa o sobrescrito):

$$A_p T_p = A_e T_E + A_w T_W^0 + A_p^0 T_p^0 \quad (4.46)$$

onde:

$$A_p = \frac{M_p}{\Delta t} + A_e + A_w \quad (4.47)$$

e  $A_e$  e  $A_w$  têm as mesmas expressões anteriores.

Como o último termo do lado direito da Eq. (4.46) é conhecido, resulta no sistema linear que deve ser resolvido para se obter a distribuição de temperatura para aquele nível de tempo:

$$A_p T_p = A_e T_E + A_w T_W + B \quad (4.48)$$

Quando o transiente real está sendo resolvido e um processo iterativo for usado para resolver o sistema linear dado pela Eq. (4.48), o termo  $T_p^0$  não deve mudar enquanto o campo de temperaturas para aquele intervalo de tempo não tiver convergido (dentro da tolerância especificada, logicamente). Quando um transiente distorcido está sendo resolvido, o interesse é só na solução de regime permanente e, conseqüentemente, não tem sentido resolver o sistema linear com precisão para aquele nível de tempo, pois não se tem interesse na exatidão da solução para intervalos de tempo. O que é feito é iterar-se, algumas vezes, ou mesmo uma só vez, no sistema linear e mudar o valor de  $T_p^0$ , avançando mais rapidamente do tempo. Fica evidente, com isto, que cada vez que o  $T_p^0$  muda, se avança mais um intervalo de tempo. Também ficou claro que não tem sentido

usar um método direto para resolver o sistema linear, em cada nível de tempo, se o interesse for só a solução de regime permanente.

Outra forma de obter a solução de regime permanente é saltar de uma só vez para um nível de tempo bastante grande. Basta fazer na Eq. (4.46)  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Assim procedendo, a Eq. (4.46) resulta em:

$$A_P T_P = A_e T_E + A_w T_W \quad (4.49)$$

onde:

$$A_P = A_e + A_W \quad (4.50)$$

o termo  $T_P^0$  desaparece, o que é lógico, uma vez que, se a solução é de regime permanente, eventos acontecidos em tempos anteriores não interessam mais. A afirmação de que a solução de regime permanente não depende da solução ao longo do transiente pode parecer estranha. Basta lembrar, então, que para a solução de regime permanente só interessam as condições de contorno e não mais as condições iniciais. A Fig. 4.9 mostra as possibilidades de avanço da solução no tempo.

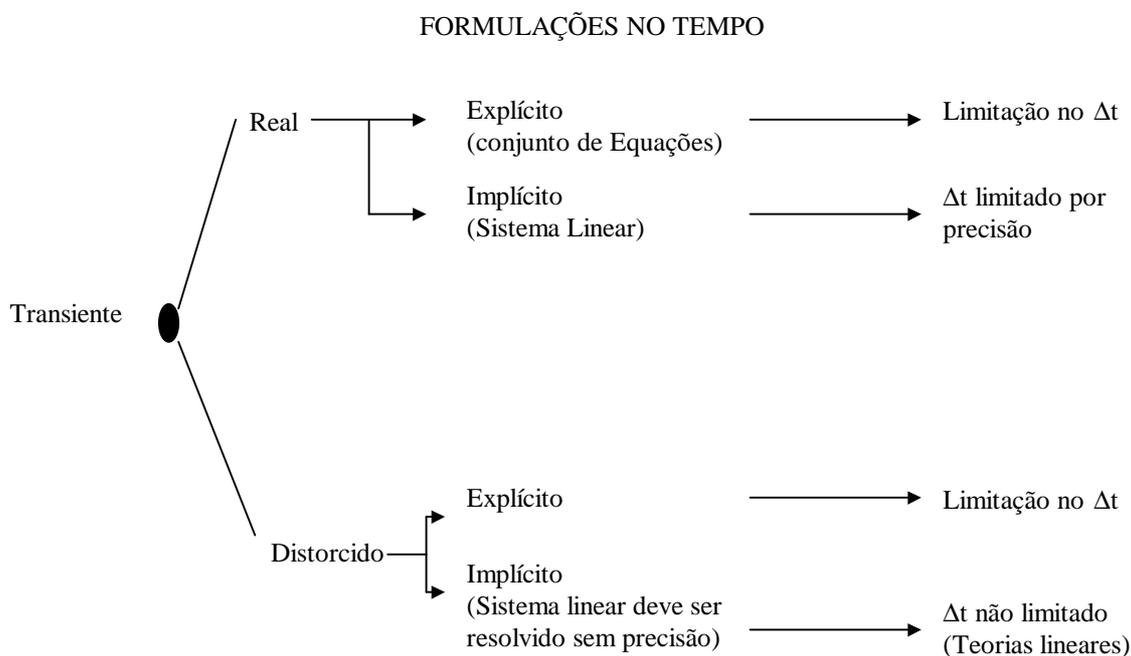


Figura 4.9 - Possibilidades de avanço da solução no tempo.

**5 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS AO MODELO  
MATEMÁTICO PROPOSTO**

## **5.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo apresenta-se a aplicação do Método do Volumes Finitos, descrito no Capítulo 4, ao Modelo Matemático proposto no Capítulo 3.

Com este procedimento obtém-se um sistema de equações discretizadas. Para a resolução deste sistema, um programa computacional foi desenvolvido e será apresentado no Capítulo 6.

## 5.2 - APLICAÇÃO DO MÉTODO AO MODELO

Na aplicação do Método dos Volumes finitos ao Modelo Matemático proposto partimos das equações ( 3.11 ) e ( 3.12 ).

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = N_{t,c} (w - c) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - N_{t,c} D (w - c) \quad (3.12)$$

E empregando-se a malha mostrada na Figura 5.1, considera-se o problema de forma unidimensional. Isto porque as concentrações nas duas outras direções são constantes, uma vez que se supõe que o fluxo é empistonado, havendo variação da concentração somente no sentido do escoamento do fluido.

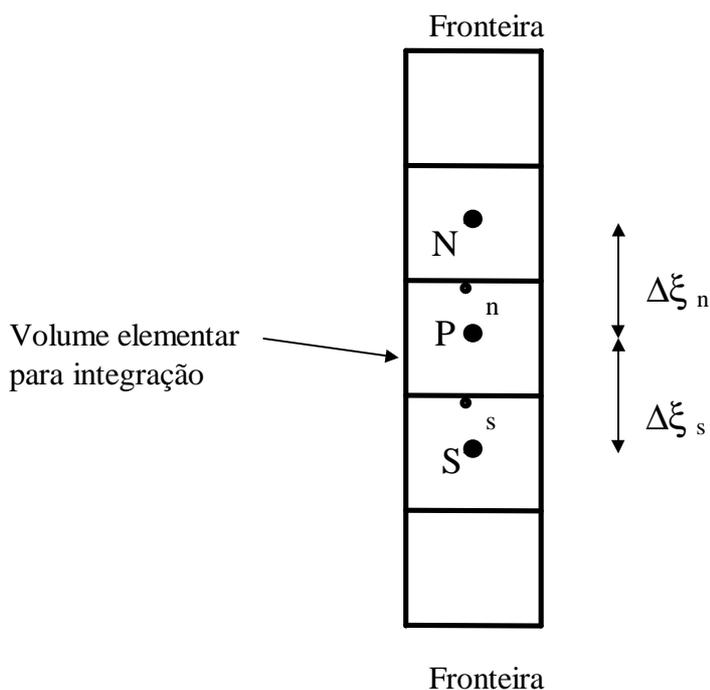


Figura 5.1 - Malha para o problema unidimensional de transferência de massa.

A integração no tempo e no espaço da Eq. (3.11) fornece:

$$\int_{\xi}^{q+\Delta q} \int_{\xi}^s \frac{\partial c}{\partial t} dx dq + \int_{\xi}^{q+\Delta q} \int_{\xi}^s \frac{\partial c}{\partial x} dx dq = N_{t,c} \int_{\xi}^{q+\Delta q} \int_{\xi}^s (w - c) dx dq \quad (5.1)$$

e:

$$\hat{\Phi}_\theta^s (c - c^0) dx + \hat{\Phi}_\theta^{q+Dq} (c|_s - c|_n) dq = N_{t,c} \hat{\Phi}_\theta^s (w^{q'} - c^{q'}) Dq dx \quad (5.2)$$

$$(c - c^0) Dx + (c|_s^{q'} - c|_n^{q'}) Dq = N_{t,c} (w_P^{q'} - c_P^{q'}) Dq Dx \quad (5.3)$$

e da Eq. (3.12) fornece:

$$\hat{\Phi}_\theta^{q+Dq} \hat{\Phi}_\theta^s \frac{q}{|q|} (w) dx dq = - N_{t,c} D \hat{\Phi}_\theta^{q+Dq} \hat{\Phi}_\theta^s (w - c) dx dq \quad (5.4)$$

e:

$$\hat{\Phi}_\theta^s (w - w^0) dx = - N_{t,c} D \hat{\Phi}_\theta^s (w^{q'} - c^{q'}) dx Dq \quad (5.5)$$

$$(w_P - w_P^0) Dx = - N_{t,c} D (w_P^{q'} - c_P^{q'}) Dx Dq \quad (5.6)$$

Agora, deve-se escolher uma função de interpolação espacial para a concentração, uma vez que a mesma precisa ser avaliada nas interfaces do volume de controle. Para este problema o esquema escolhido é o *upwind*, aproximação de um lado só. Neste esquema, o valor da função na interface é igual ao valor da função no volume a montante, onde as funções de interpolação tem as seguintes expressões:

$$c_n = c_N \quad (5.7)$$

$$c_s = c_P \quad (5.8)$$

substituindo as expressões (5.7) e (5.8) na Eq. (5.3), obtém-se:

$$(c_P - c_P^0) Dx + (c_P^{q'} - c_N^{q'}) Dq = (N_{t,c} w_P^{q'} - N_{t,c} c_P^{q'}) Dq Dx \quad (5.9)$$

dividindo-se a Eq. (5.9) por  $\Delta\theta$  obtém-se:

$$(c_P - c_P^0) \frac{Dx}{Dq} + (c_P^{q'} - c_N^{q'}) = (N_{t,c} w_P^{q'} - N_{t,c} c_P^{q'}) Dx \quad (5.10)$$

Nesta etapa, deve-se decidir também como é o comportamento do fluxo de massa nas duas faces do volume elementar ao longo do intervalo de tempo  $\Delta\theta$  para que a integração possa ser realizada. Escolhe-se a função de interpolação totalmente implícita, que dará origem a um sistema de equações, uma vez que as equações tornar-se-ão acopladas entre si. Fazendo na Eq. (4.17)  $\theta'=1$ , tem-se as seguintes expressões:

$$C_P^{\theta'} = C_P \quad (5.11)$$

$$C_N^{\theta'} = C_N \quad (5.12)$$

$$W_P^{\theta'} = W_P \quad (5.13)$$

que aplicadas à Eq. (5.10) fornece:

$$(\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_P^0) \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{D}\mathbf{q}} + (\mathbf{c}_P - \mathbf{c}_N) = (\mathbf{N}_{t,c} \mathbf{w}_P - \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{c}_P) \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (5.14)$$

e na Eq. (5.6):

$$(\mathbf{w}_P - \mathbf{w}_P^0) \mathbf{D}\mathbf{x} = - \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}(\mathbf{w}_P - \mathbf{c}_P) \mathbf{D}\mathbf{x} \mathbf{D}\mathbf{q} \quad (5.15)$$

dividindo-se a Eq. (5.15) por  $\Delta\theta$ :

$$(\mathbf{w}_P - \mathbf{w}_P^0) \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{D}\mathbf{q}} = - \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}(\mathbf{w}_P - \mathbf{c}_P) \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (5.16)$$

Rearranjando as Eq (5.14) e (5.16) obteremos:

$$- \mathbf{c}_P \frac{\mathbf{a}\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{e}\mathbf{D}\mathbf{q}} + 1 + \mathbf{D}\mathbf{x} \mathbf{N}_{t,c} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} - \mathbf{c}_P^0 \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{D}\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N + \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{x} \mathbf{w}_P = 0 \quad (5.17)$$

$$\mathbf{c}_P (\mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{x}) - \mathbf{w}_P \frac{\mathbf{a}\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{e}\mathbf{D}\mathbf{q}} + \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{x} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} + \mathbf{w}_P^0 \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{D}\mathbf{q}} = 0 \quad (5.18)$$

Agora fazendo:

$$\mathbf{A}_{c_P} = - \frac{\mathbf{a}\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{e}\mathbf{D}\mathbf{q}} + 1 + \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{x} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}$$

$$\mathbf{A}_{c_P^0} = - \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{D}\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{A}_{c_N} = 1$$

$$\mathbf{A}_{w_P} = \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{B}_{c_P} = \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{B}_{w_P} = - \frac{\mathbf{a}\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{e}\mathbf{D}\mathbf{q}} + \mathbf{N}_{t,c} \mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{x} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}$$

$$\mathbf{B}_{w_P^0} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{D}\mathbf{q}}$$

obtem-se:

$$\mathbf{A}_{c_P} \mathbf{c}_P + \mathbf{A}_{c_P^0} \mathbf{c}_P^0 + \mathbf{A}_{c_N} \mathbf{c}_N + \mathbf{A}_{w_P} \mathbf{w}_P = 0 \quad (5.19)$$

$$\mathbf{B}_{c_P} \mathbf{c}_P + \mathbf{B}_{w_P^0} \mathbf{w}_P^0 + \mathbf{B}_{w_P} \mathbf{w}_P = 0 \quad (5.20)$$

Com as equações (5.19) e (5.20) o sistema de equações é obtido, que será resolvido no capítulo seguinte, com a ajuda de um programa computacional desenvolvido para este fim.

## **6 - PROGRAMA COMPUTACIONAL DESARROLLADO**

## **6.1 - INTRODUÇÃO**

A partir do sistema de equações obtido no Capítulo 5, foi desenvolvido um programa computacional visando obter o perfil de concentração nas fases sólida e líquida do processo de extração de óleo de soja.

O programa foi desenvolvido em linguagem FORTRAN 90, para Windows 95.

Neste capítulo o diagrama de blocos referente ao programa desenvolvido será apresentado.

## 6.2 - PROGRAMA DESENVOLVIDO

Programa tem por finalidade, a partir dos dados de entrada, obter o perfil de concentração das fases sólida e líquida existentes no extrator de óleo de soja. O diagrama de blocos referente a este programa é apresentado na Figura 6.1.

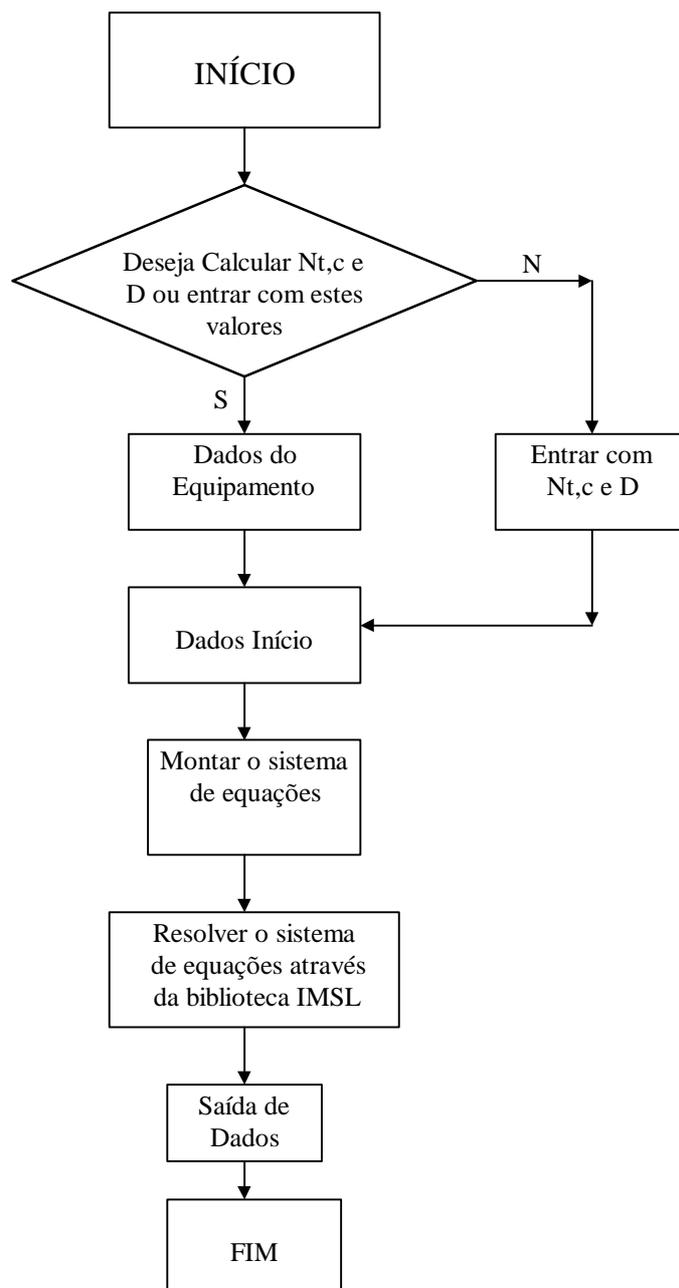


Figura 6.1 - Diagrama de blocos

Inicialmente pode-se definir se se deseja entrar com os dados do equipamento, do solvente, da soja laminada e da extração para o cálculo do número de unidades de transferência ( $N_{t,c}$ ) através da Eq. (3.7) e o coeficiente de distribuição (D) pela Eq. (3.8) ou entrar com os valores de  $N_{t,c}$  e D. Em seguida, entra-se com o número de seções de extração, que neste caso equivale ao número de distribuidores de solvente/miscela. No programa considera-se também que as seções de extração tem o mesmo tempo de percolação de líquido na fase sólida, o número de discretização em cada seção de extração, que é o número de pontos da malha unidimensional apresentada na Fig. 5.1 e as condições de contorno com valores adimensionais.

No próximo passo, o programa gera o sistema de equações em forma de matrizes do tipo  $AX=B$ , onde A é a matriz dos coeficientes do sistema linear, X o vetor solução do sistema linear e B o vetor que contém o lado direito do sistema linear, para a extração em contracorrente. A resolução do sistema é feita através da utilização de uma ferramenta especial. Trata-se da *Microsoft IMSL Math Library*, que consiste de duas bibliotecas separadas, mas coordenadas. Estas bibliotecas possuem fácil acesso pelo usuário e estão organizadas em *MATH/LIBRARY*, que pode ser aplicada para funções matemáticas e especiais e *STAT/LIBRARY*, para problemas de estatística. A mesma interface para o usuário é encontrada em muitas versões de *hardware* que vai da faixa do computador pessoal ao supercomputador. Neste caso utilizou-se na *MATH/LIBRARY* uma rotina, a *LSLRG* que resolve sistema de equações lineares, obtendo assim os resultados das concentrações nas fases sólida e líquida em valores adimensionais.

O programa neste momento solicita a entrada de valores das condições de contorno em valores dimensionais e a inclinação da curva de equilíbrio óleo/solvente.

Monta-se novamente com o uso das Eq. (3.5) e Eq. (3.6) outro sistema de equações que é resolvido igual ao primeiro e obtem-se agora as concentrações em porcentagem de massa, que é o resultado final do programa.

## **7 - CASO ESTUDADO**

## 7.1 - INTRODUÇÃO

O programa computacional desenvolvido para a resolução do sistema de equações diferenciais parciais gerado pela aplicação do Método dos Volumes Finitos ao modelo proposto por SPANINKS e BRUIN (1979), pode ser utilizado de duas maneiras.

A primeira é comparar os resultados experimentais com os obtidos pelo programa. A segunda é simular uma extração qualquer, com o objetivo de prever o comportamento do equipamento para diferentes condições de operação.

Neste trabalho, foram estudados duas situações.

Na primeira situação foi feita a comparação dos resultados obtidos pela aplicação do programa, com os fornecidos pela COAMO.

Na segunda situação fez-se um estudo alterando algumas variáveis do processo, como por exemplo a espessura da soja laminada, a vazão de solvente e o volume de soja laminada na seção de extração. Isto foi feito para verificar a influência destas variáveis no processo de extração.

A seguir, apresenta-se as duas situações estudadas.

## 7.2 - SITUAÇÃO Nº 1:

Esta situação tem por finalidade mostrar a aplicação do programa desenvolvido na obtenção de valores de concentração do óleo de soja nas fases sólida e líquida. Os dados utilizados são dados de operação real da planta industrial da COAMO (Cooperativa Agrícola Mouraoense), situada na cidade de Campo Mourão, na região norte do estado do Paraná. Estes dados encontram-se tabelados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Dados de operação da COAMO.

Dados do Equipamento	
Área da seção transversal de 1 seção de extração, (m <sup>2</sup> )	3,94
Volume da seção empacotada de 1 seção de extração, (m <sup>3</sup> )	10,24
Dados do solvente (hexano)	
Densidade, (Kg/m <sup>3</sup> )	662,00
viscosidade, (Kg/m.s)	3,50E <sup>-4</sup>
Taxa de fluxo, (m <sup>3</sup> /s)	1,39E <sup>-2</sup>
Dados da soja laminada	
Diâmetro equivalente, (m)	1,88E <sup>-2</sup>
Espessura, (m)	2,50E <sup>-4</sup>
Fração de vazios	0,44
Dados da extração	
Difusividade molecular, (m <sup>2</sup> /s)	8,30E <sup>-11</sup>
Inclinação da curva de equilíbrio	1,00
Dados iniciais	
Número de seções de extração	5
Número de discretizações em cada seção	10
Dados das condições de contorno	
Concentração inicial da fase sólida adimensional	1,00
Concentração inicial da fase líquida adimensional	0,00
Concentração inicial da fase sólida dimensional (% massa)	19,00
Concentração inicial da fase líquida dimensional (% massa)	0,00

O extrator da COAMO é um extrator do tipo Rotocel, conforme apresentado no Capítulo 3, e opera continuamente em fluxo de contato cruzado e em contracorrente, possuindo 18 compartimentos e 5 bombas de circulação de solvente, com capacidade de produção de 1.000 ton./dia. Com relação aos dados referentes às concentrações, conhece-se na fase sólida apenas os valores inicial e final, uma vez que o extrator opera hermeticamente fechado para evitar vazamento do solvente. Na fase líquida conhece-se os valores de amostras de miscela retirada de cada uma das cinco bombas de circulação e do solvente puro na entrada.

O extrator opera em escoamento contracorrente, sendo que o solvente puro e a soja laminada são alimentados nas extremidades opostas do extrator. O solvente ( miscela ) é distribuído de uma seção para outra através de bombas de circulação. A soja laminada, por sua vez, é distribuída por uma esteira giratória. Desta forma, tem-se o solvente puro extraindo o óleo da soja laminada com menor conteúdo de óleo e a soja laminada com maior conteúdo de óleo recebendo a miscela com maior porcentagem de óleo.

Através dos dados de entrada fornecidos ao programa, obtém-se os seguintes valores de 4,6284 para o número de unidades de transferência  $Nt_c$  e 0,7857 para o coeficiente de distribuição  $D$ . Com estes valores, o perfil de concentração é obtido para o óleo nas fases sólida e líquida.

Os valores obtidos pelo programa computacional são comparados aos dados de operação do extrator da COAMO e são apresentados na Tabela 7.2.

Os resultados podem ser melhor visualizados nas Figuras 7.1 e 7.2.

Analisando a Figura 7.1, observa-se uma extração suave nas seções 1, 2 e 3, seguida de uma extração mais brusca na seção 4 e uma extração suave novamente na seção 5. Isto se dá porque nas seções 1, 2 e 3 tem-se uma miscela pouco concentrada em contato com a soja laminada com pouco conteúdo de óleo. Isto quer dizer que se tem um óleo de difícil acesso para a miscela, pois encontra-se nas regiões mais internas do sólido.

Na seção 4 tem-se uma miscela pouco concentrada em óleo ainda em contato com uma soja laminada com alto conteúdo de óleo. Este óleo se encontra em grande parte na superfície das lâminas, e é de fácil acesso para a miscela, que, por estar pouco concentrada, tem um grande potencial de extração. Tem-se, portanto, uma extração bastante favorável.

Tabela 7.2 - Comparação dos resultados da Situação N 1 com o extrator da COAMO

SEÇÃO DE EXTRAÇÃO INÍCIO	COAMO		SIMULAÇÃO	
	CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)		CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)	
	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA
INÍCIO	0,00		0,00	
1	0,91	1,00	1,27	1,97
2	1,55		5,11	5,79
3	3,50		10,72	11,22
4	20,66		15,57	15,95
5	24,13		18,11	18,39
INÍCIO		19,00		19,00

Na seção 5 tem-se uma miscela muito concentrada em óleo extraído uma soja laminada com uma alta porcentagem de óleo. Como a miscela está muito concentrada, a extração, é novamente suave.

Na Figura 7.2 tem-se uma curva com um comportamento suave, pois os valores obtidos na simulação vêm de um sistema de equações lineares e também porque o modelo não leva em conta o fato de o óleo na superfície das lâminas ser extraído mais facilmente do que o óleo que se encontra nas regiões mais internas do sólido.

As diferenças de concentração final na fase líquida e sólida entre o real e o simulado, devem-se pelo fato de que o modelo utilizado não considera a retenção de solvente na soja laminada e considera constante a fração de vazios que é variável de uma seção de extração para outra do extrator.

No entanto, os resultados obtidos podem ser considerados muito bons, uma vez que a diferença entre os dados reais de operação e estes resultados encontra-se numa faixa muito pequena de erro, o que mostra a eficácia do programa desenvolvido, assim como a consistência do modelo proposto e do método numérico escolhido para a sua resolução.

### PERFIL DE CONCENTRAÇÃO - COAMO

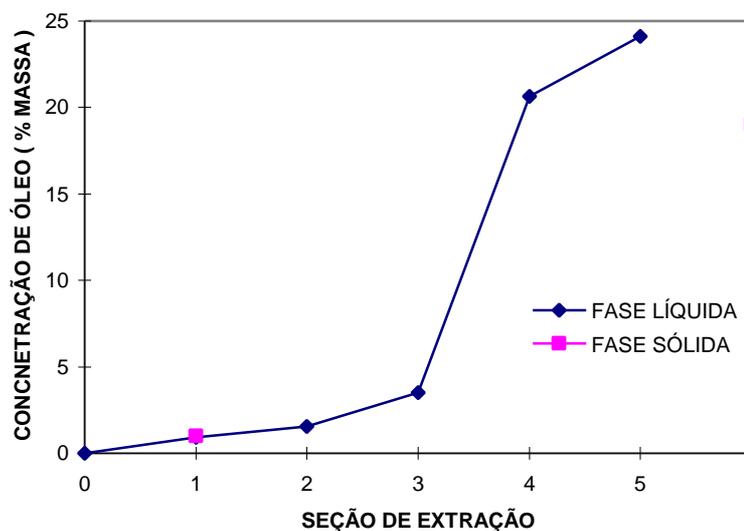


Figura 7.1 - Perfil de concentração no extrator COAMO.

### PERFIL DE CONCENTRAÇÃO - SIMULADO

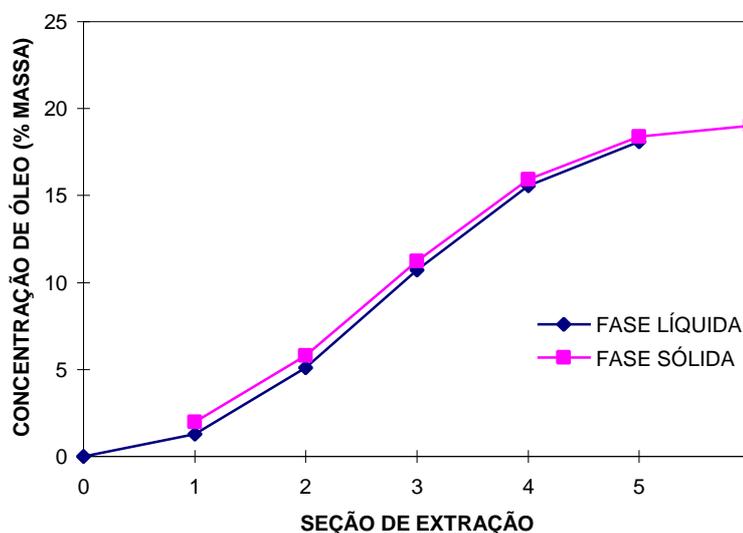


Figura 7.2 - Perfil de concentração simulado.

Isto pode ser verificado através de um balanço de massa no extrator. Este balanço tem como base uma hora de operação do extrator. Na entrada tem-se 33.126,48 Kg de solvente puro na fase líquida e 41.656,32 Kg de soja laminada. Esta soja contém 19,00% em massa de óleo, isto é, 7.914,70 Kg. Na saída, considerando que todo o solvente que entra, sai na fase líquida, tem-se 81,89% de solvente e 18,11% de óleo, o que equivale a

7.325,93 Kg. Na fase sólida restam 1,97% de óleo, que representa 678,07 Kg. Fazendo um cálculo do erro percentual no óleo tem-se:

$$\text{Erro\%} = \frac{|M_i - M_f|}{M_i} 100\%$$

$$\text{Erro\%} = \frac{|7.914,70 - 8.004,00|}{7.914,70} 100\% = 1,13\%$$

Estes cálculos estão apresentados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 - Balanço de Massa no extrator para 1 hora de operação.

ENTRADA		SAÍDA	
FASE LÍQUIDA		FASE LÍQUIDA	
Solvente - 100%	33.126,48 Kg	Solvente - 81,89%	33.126,93 Kg
Óleo - 0 %	0,00 Kg	óleo - 18,11%	7.325,93 Kg
FASE SÓLIDA		FASE SÓLIDA	
Óleo - 19%	7.914,70 Kg	Óleo - 1,97%	678,07 Kg
Erro % = 1,13%			

A consideração de que todo solvente que entra sai na fase líquida corresponde ao modelo adotado, mas sabe-se de antemão que não corresponde à verdade, uma vez que existe um equipamento no processo chamado dessolventizador-tostador, que tem exatamente a finalidade de recuperar o solvente retido na massa sólida. Isto explica a diferença entre os dados reais de operação e o perfil de concentração obtido por simulação. Para levar em consideração este fato, ter-se-ia que adotar um modelo mais complicado, que levasse em conta este fato.

### 7.3 SITUAÇÃO Nº 2

Esta situação tem por finalidade demonstrar a aplicação do programa desenvolvido no estudo da influência de algumas variáveis de processo na extração de óleo de soja.

Para este estudo fez-se mudanças em três variáveis de processo, como a espessura da soja laminada, a vazão de solvente e o volume de soja na seção de extração, que podem ser modificadas com algumas alterações na planta de extração.

Neste caso os resultados foram obtidos da mesma maneira do caso anterior, fixando os dados de operação da COAMO como parâmetro e alterando-se os valores das variáveis, e comparando por fim os resultados.

Na Tabela 7.4 os resultados da variação da espessura da soja laminada são apresentados.

Tabela 7.4- Comparação dos resultados para a variação da espessura da soja laminada.

SEÇÃO DE EXTRAÇÃO INÍCIO	ESPESSURA = 2,0 E-4 m		ESPESSURA = 3,0 E-4 m	
	CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)		CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)	
	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA
INÍCIO	0,00		0,00	
1	1,30	1,80	1,25	2,14
2	5,26	5,59	4,97	5,97
3	11,02	11,12	10,47	11,31
4	15,85	15,96	15,32	15,95
5	18,25	18,41	17,98	18,37
INÍCIO		19,00		19,00

Estes resultados são melhor visualizados pelo perfil de concentração no extrator apresentados nas Figuras 7.3 e 7.4. Analisando estas Figuras pode-se concluir como previsto por OTHMER e AGARWAL (1955) que a diminuição da espessura da soja laminada melhora a extração. Isto deve-se ao fato que a diminuição da espessura aumenta

a área interfacial e portanto pela Eq (3.7) aumenta-se o número de unidades de transferência  $N_{t,c}$ .

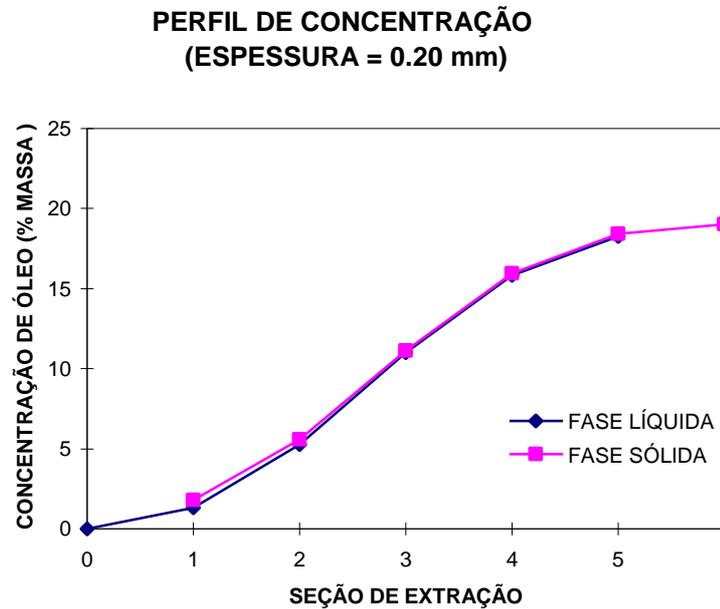


Figura 7.3- Perfil de concentração no extrator (espessura = 0,20 mm).

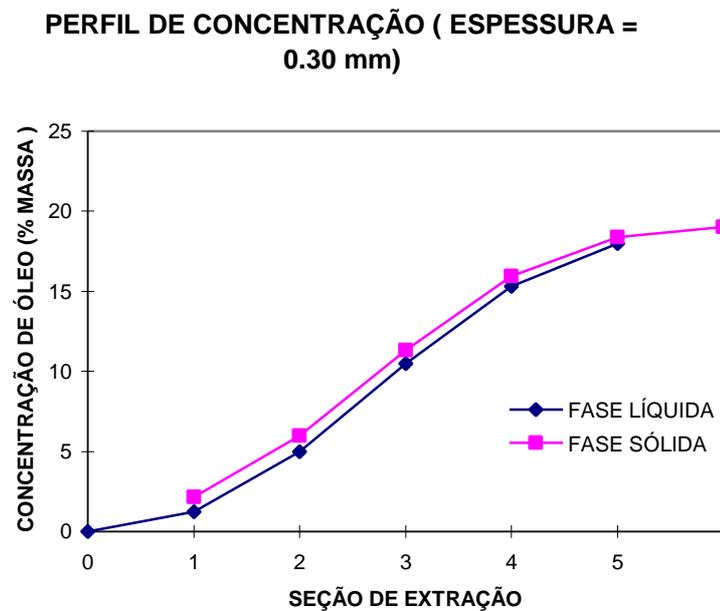


Figura 7.4- Perfil de concentração no extrator (espessura = 0,30 mm).

Na Tabela 7.5 apresenta-se os resultados para a variação da vazão de solvente.

Tabela 7.5 - Comparação dos resultados para a variação da vazão de solvente.

SEÇÃO DE EXTRAÇÃO INÍCIO	VAZÃO = 1,112 E-2 m <sup>3</sup> /s		VAZÃO = 1,668 E-2 m <sup>3</sup> /s	
	CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)		CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)	
	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA
	0,0		0,00	
1	1,30	1,77	1,24	2,18
2	5,29	5,56	4,94	6,02
3	10,07	11,11	10,41	11,34
4	15,89	15,96	15,26	15,95
5	18,27	18,41	17,94	18,37
INÍCIO		19,00		19,00

Para o caso da variação da vazão de solvente obtemos o perfil de concentração representado nas Figuras 7.5 e 7.6. Analisando estas Figuras observa-se que a diminuição da vazão de solvente melhora o perfil de concentração para este modelo matemático utilizado, isto porque a diminuição da vazão de solvente aumenta o valor do  $N_{t,c}$  fazendo com que ocorra uma melhora na extração. Se o  $N_{t,c}$  fosse mantido constante e a vazão de solvente fosse reduzida a extração seria menos eficiente.

**PERFIL DE CONCENTRAÇÃO**  
**( VAZÃO DE SOLVENTE = 1.112 E-2 m<sup>3</sup>/s )**

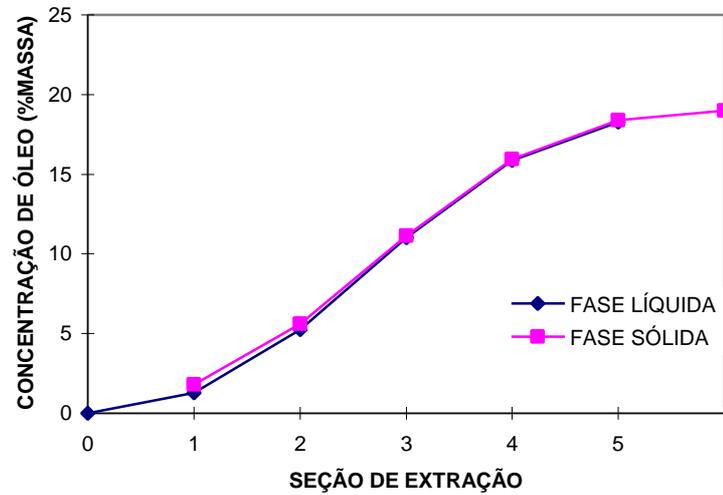


Figura 7.5 - Perfil de concentração no extrator  
 (vazão de solvente = 1,112 E-2 m<sup>3</sup>/s)

**PERFIL DE CONCENTRAÇÃO**  
**( VAZÃO DE SOLVENTE = 1.668E-2 m<sup>3</sup>/s )**

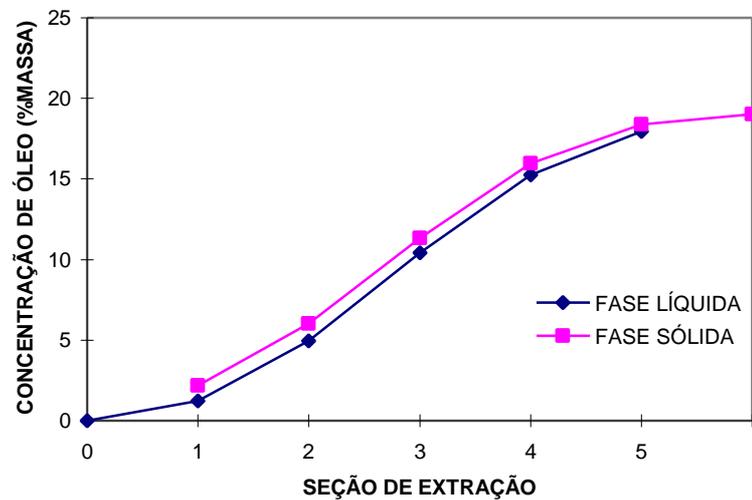


Figura 7.6 - Perfil de concentração no extrator  
 (vazão de solvente = 1,668E-2 m<sup>3</sup>/s)

E, finalmente apresenta-se na Tabela 7.6 os resultados para a variação do volume de soja na seção de extração.

Tabela 7.6 - Comparação dos resultados para a variação do volume de soja.

SEÇÃO DE EXTRAÇÃO INÍCIO	VOLUME DE SOJA = 11,82 m <sup>3</sup>		VOLUME DE SOJA = 9,00 m <sup>3</sup>	
	CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)		CONCENTRAÇÃO DE ÓLEO (% MASSA)	
	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA	FASE LÍQUIDA	FASE SÓLIDA
	0,00		0,00	
1	1,29	1,83	1,25	2,12
2	5,23	5,63	4,98	5,96
3	10,96	11,14	10,49	11,30
4	15,79	15,95	15,34	15,95
5	18,22	18,40	17,99	18,37
INÍCIO		19,00		19,00

Para a alteração no volume de soja na seção de extração obtém-se o perfil de concentração representados pelas Figuras 7.7 e 7.8. Analisando estas Figuras observa-se que o aumento do volume de soja melhora o perfil de concentração para este modelo matemático utilizado.

Estes resultados concordam com o esperado, pois aumentando-se o valor do número de unidades de transferência ( $N_{t,c}$ ), melhora-se a extração.

**PERFIL DE CONCENTRAÇÃO  
(VOLUME DE SOJA = 11.82 m<sup>3</sup>)**

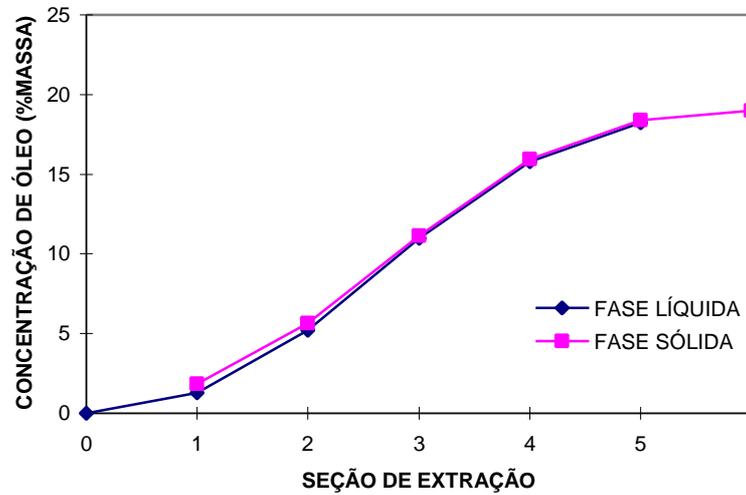


Figura 7.7- Perfil de concentração no extrator  
(volume de soja = 11,82 m<sup>3</sup>)

**PERFIL DE CONCENTRAÇÃO  
(VOLUME DE SOJA = 9.0 m<sup>3</sup>)**

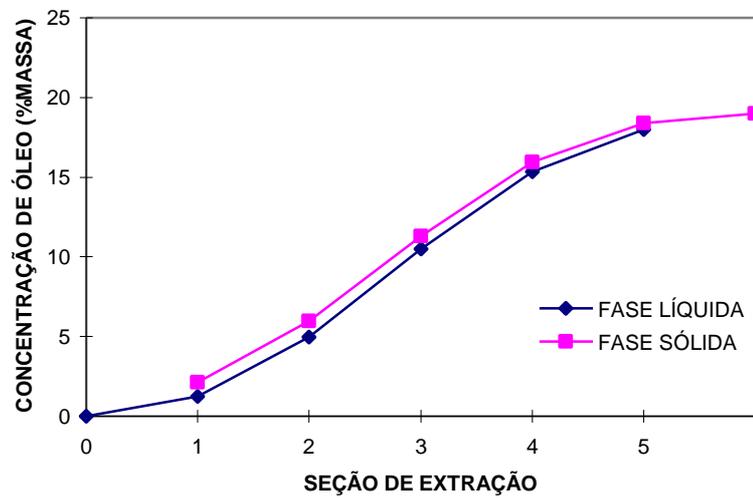


Figura 7.8- Perfil de concentração no extrator  
(volume de soja = 9,00 m<sup>3</sup>)

## **8 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

## 8.1 - CONCLUSÕES

Através da análise dos resultados obtidos pode-se chegar a algumas conclusões. A primeira é em relação ao modelo escolhido para representar a extração de óleo de soja. A escolha foi acertada, pois o modelo representa muito bem o processo, com pode ser observado através das simulações realizadas. No entanto, existem alguns desvios entre a extração real e a simulada. Isto porque, apesar de uma boa representação da extração real, o modelo não leva em conta o fato do óleo na superfície das lâminas ser extraído mais facilmente do que o óleo que se encontra nas regiões mais internas do sólido, isto é, o fluxo de fluidos viscosos em capilares e também não considera a retenção de solvente na soja laminada.

Na verificação da influência da alteração das condições de operação do processo de extração, o modelo também mostrou-se muito bom.

Com relação ao método numérico utilizado, conclui-se que o método dos volumes finitos é relativamente fácil de ser aplicado, se comparado a outros métodos existentes na literatura. Além disso, a boa resolução do modelo pode ser comprovada pelo balanço de massa, que apresenta um erro percentual de 1,13 %. Este valor encontra-se dentro dos limites toleráveis na utilização de métodos numéricos. Embora este modelo possua solução analítica aproximada, conforme KLINKENBERG (1954) na forma de função erro, mas esta solução é inevitavelmente complicada, outra solução foi proposta por AMUNDSON (1950) que usou a transformada de Laplace para a solução das EPD obtendo como solução uma integral de uma função de Bessel modificada, esta solução é também uma solução aproximada e extremamente complicada, além das enormes dificuldades matemáticas para resolver o sistema.

## 8.2 - SUGESTÕES

Este trabalho não teve a pretensão de esgotar todas as questões relacionadas à simulação do processo de extração de óleo de soja. Objetivou-se analisar o uso de um modelo matemático e um método numérico para obter a simulação do processo de extração do óleo de soja, para o extrator do tipo Rotocel.

Desta forma sugere-se para futuros trabalhos o desenvolvimento de um novo modelo matemático para o processo de extração que leve em consideração o efeito da capilaridade das lâminas de soja, assim como a retenção de solvente na fase sólida, que podem aproximar ainda mais o modelo do processo real.

Uma outra sugestão é simular outros tipos de extratores contínuos, outros sistemas com óleos e solventes diferentes e também outros processos de extração sólido-líquido.

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS**

- ABRAHAM, G., HRON SR., R. J. e KOLTUN, S. P. "Modeling the Solvent Extraction of Oilseeds", JAOCS, vol. 65, pp 129, January, 1988.
- ACRIVOS, A. "Method of Characteristics Technique", Ind. Engng. Chem., vol.48 pg. 703 , 1956
- AMUNDSON, N. R. "Mathematics of Adsorption in Beds. II", Ibid, 54, pg.812, 1950.
- BECKER, W. "Solvent Extraction of Soybeans" JAOCS, , vol. 55, , pg. 754, November, 1978.
- DWIVEDI, P. N. e UPADHYAY, S. N. "Particle-Fluid Mass Transfer in Fixed and Fluidized Beds", Ind. Eng. Chem., Process Des. Dev., vol. 16, n<sup>o</sup>2, pg. 157, 1977.
- ERICKSON, D. R. "Soybeans Oil: Update on Number One", JAOCS, vol. 60, pg 351, February, 1983.
- FLORES DE HOYOS, S. I. & SCHWARTZBERG, H. G. "Modeling of Counter-Current, Crossflow, Solid-Liquid Extractors and Experimental Verification", Food Tech., , vol. 36, Feb 1982.
- GIMENES, M. L. "Assesment Report for PhD. Course", University of Leeds, Leeds - UK.
- HEGGS, P. J. e CARPENTER, K. J. "The Effect of Fluid Hold-up on the Effectiveness of Contraflow Regenerators", Trans. Instn. Chem. Engrs., vol. 54, 1976.
- KARNOFSKY, G. "Design of Oilseed Extractor I. Oil Extraction", JAOCS, vol. 63, pg. 1011, august, 1986.
- KARNOFSKY, G. "Design of Oilseed Extractor I. Oil Extraction (Supplement)", JAOCS, vol. 64, pg. 1533, november, 1987.
- KLINKENBERG, A . "Heat Transfer in Cross-Flow Heat Exchangers and Packed Beds", Ind. Engng. Chem., vol.46, n<sup>o</sup> 11, pg 2285, november, 1954.
- KRASUK, J. H., LOMBARDI, J. L. e OSTROVSKY, C. D."Diffusion Extraction of Oil-Containing Materials", I & EC Process Design and Developmet, vol 6 n<sup>o</sup> 2 pg. 187, april, 1967.
- MALISKA, C. R. "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1995.
- MANJUMDAR, G. C., SAMANTA, A. N. e SENGUPTA, S. P. "Modeling Solvent Extraction of Vegetable Oil in a Packed Bed", JAOCS, vol. 72, n<sup>o</sup> 9, pg. 971, 1995.

- MILLIGAN, E. D. "Survey of Current Solvent Extraction Equipment", JAOCS, vol. 53, june, 1976.
- MILLIGAN, E. D. e TANDY, D. C. "Field Evaluation of Extraction Performance", JAOCS, vol.61, n° 8, pg. 1383, august, 1984.
- OTHMER, D. F. and AGARWAL, J. C. "Extraction of Soybean, theory and mechanism", Chem. Eng. Progress, vol 51, pp 372, august 1955.
- REIN, W. P. "Extraction Performance of a Diffuser Using a Mathematical Model", The Sugar J. pg. 15 - 22, December, 1976.
- SCHWARTZBERG, H. G. "Continuous Counter-Current Extraction in the Food Industry", Chem. Eng. Progress, pg. 67, april,1980.
- SCHWARTZBERG, H. G. e CHAO, R. Y. "Solute Diffusivities in Leaching Processes", Food Technology, pg.73, february, 1982.
- SPANINKS, J. A. M. & BRUIN, S. "Mathematical Simulation of the Performance of the Solid Liquid Extractors - I", Chem. Eng. Science, vol. 34, pg 199, 1979.
- SPANINKS, J. A. M. & BRUIN, S. "Mathematical Simulation of the Performance of the Solid Liquid Extractors - II ", Chem. Eng. Science, vol. 34, pg 207, 1979.
- SMITH, C.T. "A New Continuous Solvent Extractor for Oleaginous Substances", Journal of American Oil Chemistry Societ , june 1951.