UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

FRANCIELLI APARECIDA ROCHA DE CARLI

A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: UM ESTUDO REALIZADO COM PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DE ENSINO

Maringá
2012

FRANCIELLI APARECIDA ROCHA DE CARLI

A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: UM ESTUDO REALIZADO COM PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Maringá
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

C282a

Carli, Francielli Aparecida Rocha de
A aprendizagem de geometrias não euclidianas : um estudo realizado com professores da rede pública de ensino / Francielli Aparecida Rocha de Carli. -- Maringá, 2012.
145 f. : il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2012.

1. Geometrias não euclidianas. 2. Professores - Formação. 3. Educação matemática. I. Franco, Valdeni Soliani, 1957-, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 21.ed. 516.9
GVS-001599

FRANCIELLI APARECIDA ROCHA DE CARLI

A aprendizagem de geometrias não Euclidianas: um estudo realizado com professores da rede pública de ensino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Franco

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Arlete Brito

Profa. Dra. Arlete de Jesus Brito
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP

R. M. de O. Barros

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 19 de setembro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos:

Em especial à Professora Arlete de Jesus Brito, que ainda sem ser convidada a participar da banca contribuiu com as minhas pesquisas, sempre muito pronta a responder meus e-mails;

Ao Professor Rui Marcos de Oliveira Barros, por me fazer reconstruir todas as minhas análises, reconheço a melhora significativa do meu trabalho final graças as suas sugestões;

Aos professores da Rede Pública do Estado do Paraná, que sempre se veem no meio de uma discussão burocrática e política e ainda assim vejo em muitos o desejo de cumprir o juramento; obrigada por aceitarem participar da pesquisa, espero que em troca esta pesquisa possa contribuir de alguma forma com a formação dos seus alunos;

À Veridiana, amiga de todas as horas, no sentido literal da palavra, seja dia, noite ou madrugada, sempre pronta a me ajudar, me ouvir, e contribuir com significativas sugestões;

Ao PCM e principalmente à coordenação, que nunca me impôs empecilhos quando me vi obrigada a pedir adiamentos quanto à entrega de meu trabalho final.

À Capes, pelo apoio;

Agradeço principalmente ao meu orientador, que durante todo esse tempo sempre foi mais do que um profissional, foi amigo e companheiro... Professor Valdeni, você é maravilhoso como orientador, mas te admiro muito mais como ser humano, obrigada por tudo.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, pois apesar da ciência não ser capaz de provar sua existência, sei que muito de mim seria mais desumano se não fosse minha crença Nele.

Aos meus pais, por tudo o que já fizeram e sei que ainda vão fazer por mim.

Aos meus filhos Cauê e Eduardo, motivo de tudo que faço e principalmente do que deixo de fazer, adiei planos e amei adiá-los para passar mais tempo com vocês.

Ao meu marido, que me apoia e vê em mim um potencial que muitas vezes eu mesma sou incapaz de ver.

RESUMO

No final de 2006, o Governo do Estado do Paraná incluiu nas Diretrizes Curriculares do Estado (DCEs) um novo conteúdo de matemática: Tópicos de Geometrias Não Euclidianas. Projetos desenvolvidos pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), juntamente com os Núcleos Regionais de Ensino (NRE), tiveram como objetivo capacitar professores da Rede Pública de Ensino, por meio de Cursos de Formação Continuada, a compreender e trabalhar tais conteúdos em sala de aula. Tendo em vista a inquietação de alguns professores universitários que ministraram esses cursos, diante das dificuldades apresentadas pelos cursistas e da impressão de que algumas das dificuldades demonstradas pareciam ser reincidentes, apresentando-se nas diferentes turmas, surgiu a intenção, por parte da autora em pesquisar: "Que dificuldades os professores apresentam quando se dispõem a estudar as Geometrias não Euclidianas"? Considerou-se a princípio que as dificuldades permeavam conhecimentos específicos de geometrias não euclidianas; no entanto, com o desenvolver das análises – que tiveram como base norteadora a teoria 'análise de conteúdo' segundo Bardin (1977) – outras dificuldades foram detectadas, as quais se relacionavam ao conhecimento de Geometria Euclidiana. Diante do exposto, este trabalho apresenta as dificuldades relacionadas à Geometria Euclidiana e as Não Euclidianas manifestadas durante um curso de capacitação.

PALAVRAS-CHAVE: Geometrias não euclidianas. Professores. Dificuldades.

ABSTRACT

In the end of 2006, the Government of Parana State included on the State's Curricular Guidelines (DCEs) a new mathematics content: Topics of Non-Euclidean Geometry. Projects developed by the State University of Maringa (UEM) and the Regional Education Centers (NRE) aimed to train teachers of Public Schools to understand and work with these contents in the classroom through Continuing Education Courses. Thinking about the uneasiness of University professors who taught these courses and toward the difficulties presented by the course participants and because some of these difficulties seemed to be recurrent in different classes, the author had the intention to search: "What are the difficulties presented by those teachers when they study the Non-Euclidean Geometries?" At first, it was considered that these difficulties permeate specific knowledge of non- euclidean geometries, however, during the analyzes – which were based on the "Content analysis" theory proposed by Bardin (1977) – other difficulties related to Euclidean Geometry knowledge were detected. According to the information above, this paper presents the difficulties related to Euclidean and Non-Euclidean Geometry shown during a training course.

KEYWORDS: Non-Euclidean Geometries. Teachers. Difficulties.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

DCE – Diretrizes Curriculares Estaduais

Fafiman – Faculdade de Filosofia e Letras de Mandaguari

Fafipa – Faculdade Estadual de Educação Ciências e Letras de Paranavaí

Fafit – Faculdades de Filosofia e Letras de Tupã

Fecilcam – Faculdade Estadual de Ciência e Letras de Campo Mourão

NRE – Núcleo Regional de Ensino

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

SEED – Secretaria de Estado da Educação do Paraná

UEM – Universidade Estadual de Maringá

UEPR – Universidade Estadual do Paraná

Unipar – Universidade Paranaense

Unioeste – Universidade do Oeste Paulista

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O Estado do Paraná tem como parâmetro, no que se refere à educação, um documento intitulado Diretrizes Curriculares para a Educação Pública do Estado do Paraná (DCE), no qual se traçam estratégias que visam a nortear o trabalho do professor, além de relacionar conteúdos básicos que devem ser tomados como ponto de partida para a organização da proposta pedagógica curricular das escolas.

O trabalho de construção de tal documento se iniciou em 2003 e teve sua conclusão em 2008, e foi elaborado, de acordo com a Secretaria de Educação do Estado do Paraná (SEED), de maneira coletiva.

Segundo Caldatto (2011).

> Este processo de elaboração coletiva, ocorrido entre 2003 e 2008, [...], culminou em uma mobilização de todo o sistema de ensino público do estado do Paraná. Os agentes deste processo foram a SEED, os Núcleos Regionais de Educação (NRE), professores da Rede Estadual de ensino, professores especialistas nas áreas discutidas (equipe técnico pedagógica da disciplina), leitores críticos da disciplina e leitores críticos da área pedagógica educacional, sendo estes dois últimos grupos mencionados como compostos por membros de várias instituições de ensino superior do Brasil (CALDATTO, 2011, p. 44).

Talvez uma das mais importantes mudanças na disciplina de matemática trazida pela DCE se refira à introdução de um tópico novo na grande área de geometria (tratado nas DCE como conteúdo estruturante), denominado noções de Geometrias não Euclidianas[1], a qual prevê que no Ensino Fundamental o aluno deva compreender noções de Geometria Projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), Topologia (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e

[1] Há uma discussão sobre a escrita do nome dado às geometrias que não são Euclidianas. Entende-se em geral que Não-Euclidiana (escrita com hífen) se reporta ao nome dado por Gauss para a geometria Hiperbólica e Elíptica. Para as outras geometrias, tem-se usado comumente a nomenclatura não Euclidiana (sem hífen). Este trabalho seguirá tais padrões, sendo assim, no primeiro capítulo, que tratará do resgate da história das geometrias, especificamente das geometrias Hiperbólica e Esférica, será utilizado o nome (com hífen); no entanto, nas demais partes do trabalho em que se consideram diversas outras geometrias utilizar-se-á o termo Geometria não Euclidiana.

fechados) e noção de Geometria dos Fractais, e no Ensino Médio se aprofundem os estudos das noções de Geometrias dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica[2].

Cursos de capacitação continuada passaram a ser oferecidos por algumas Universidades do Estado aos professores da rede pública, concernentes ao conteúdo de Geometrias não Euclidianas.

A Universidade Estadual de Maringá (UEM) ofereceu, em parceria com os Núcleos Regionais de Educação, alguns desses cursos com o objetivo de apresentar aos professores esse “novo” conteúdo e assim auxiliá-los na preparação das aulas e de atividades para aplicação em sala de aula.

A presente pesquisa tem como público pesquisado os participantes de um dos cursos oferecidos pela UEM, que aconteceu no período de 31/08/2010 a 27/09/2010, na cidade de Cianorte, PR, e contou com a presença de 43 (quarenta e três) professores da rede pública de ensino.

O curso, intitulado "Introdução das Geometrias Não Euclidianas", no qual ocorreu a pesquisa de campo, foi ministrado em três dias, com carga horária diária de 8 horas, totalizando 24 horas presenciais. Outros cursos como esse já haviam sido ofertados por professores da UEM, e parecia haver, de acordo com a opinião dos professores que ministravam os cursos, algumas dificuldades que se mostravam reincidentes sempre que algum tópico ou atividade era apresentado.

Diante dos relatos dos professores que ministravam os cursos, e de alguns trabalhos nos quais um dos pontos pesquisados foi a aprendizagem das Geometrias não Euclidianas, realizados com esse mesmo público (SANTOS, 2009 e LOVIS, 2009), percebeu-se que realmente tais dificuldades existiam, por esse motivo desejou-se compreender especificamente quais eram essas dificuldades. Conjecturou-se a princípio que essas dificuldades eram concernentes aos conhecimentos próprios das Geometrias não

[2] Um bom texto para aprofundamento sobre questões burocráticas, históricas e políticas quanto à elaboração das DCEs, especificamente a introdução do tópico Geometrias Não Euclidianas, na disciplina de matemática, consiste em um trabalho de dissertação intitulado "O processo coletivo de elaboração das diretrizes curriculares para a educação básica do Paraná e a inserção das Geometrias não Euclidianas" (CALDATTO, 2011).

Euclidianas, o que de fato se confirmou em nossas pesquisas. Entretanto, as dificuldades não estavam relacionadas apenas a conceitos próprios dessas geometrias, mas residiam também, e em grande parte, a conhecimentos de Geometria Euclidiana – considerados como conteúdo básico para o ensino de matemática – o que de certa forma impedia a elaboração de novos conhecimentos.

Objetivos

Analisar as dificuldades enfrentadas por um grupo de professores de matemática do Estado do Paraná quanto à aprendizagem das Geometrias não Euclidianas.

Objetivos Específicos

- Detectar que dificuldades os professores apresentam quando se propõem a estudar as Geometrias não Euclidianas;

- Classificar as dificuldades quanto aos critérios que as distingam, a fim de, se possível, categorizá-las;

- Analisar as categorias com o fito de compreender quais motivos que possam contribuir para que essas dificuldades se apresentem.

A Organização do Texto

A primeira seção apresenta um resgate histórico das Geometrias não Euclidianas, uma explicação de como é exposta a Geometria no livro "Os Elementos" e a explanação de como ocorreu a negação do quinto postulado. Nela são apresentadas algumas tentativas de demonstrações desse postulado, o que resultou na construção das Geometrias não Euclidianas.

A segunda seção consiste das escolhas metodológicas utilizadas como base norteadora para a pesquisa e análises das dificuldades enfrentadas pelos professores no Curso de Capacitação; a seção traz, ainda, o relato de como ocorreu toda a pesquisa de campo, as características do público pesquisado, a descrição do minicurso oferecido e como ocorreu a classificação destas dificuldades.

A terceira seção traz as análises dos questionários aplicados durante o curso, e para cada questão também traz inferências parciais referentes à análise realizada.

A seção de número quatro trata das relações entre as várias dificuldades que foram detectadas na seção anterior e apresenta as categorias determinadas pelas análises.

A quinta e última seção traz as considerações finais e as conclusões.

SEÇÃO 1

RESGATE HISTÓRICO DAS GEOMETRIAS NÃO - EUCLIDIANAS

Hogben (1956) postula que a geometria grega surge com o principal intuito de construir pirâmides, barcos, torres, entre outros monumentos considerados permanentes. Originária da prática de desenhar na areia – técnica que permitia orientá-los por meio de medições das sombras – a geometria nasce assim, de maneira puramente intuitiva, por meio de observações, desenvolvida para atender a questões práticas.

> A geometria nasceu de problemas colocados pelas relações espaciais (no sentido físico do termo), seu primeiro objetivo foi o estudo da medida das grandezas espaciais (comprimento, áreas, volumes, ângulos), ou seja, a determinação de relações entre os objetos no espaço, expressas sob a forma de relações numéricas (relações de números inteiros). O estatuto da geometria era o de uma ciência natural, o que não significa que seus métodos fossem empíricos, mas que sua racionalidade se apoiava sobre dados empíricos (BKOUCHE apud BRITO, 1995, p. 31).

A geometria passou a ser um conhecimento dedutivo por volta de 600 a 500 a.C. Há divergências entre os autores sobre esse fato. Hogben (1956, p. 122) afirma que Thales (640-549 a.C.) introduziu o método científico, atribuindo a ele a autoria da predição do eclipse ocorrido a 28 de maio de 585 a.C. Aaboe (1984) contesta os feitos atribuídos a Thales; para ele, “muitos dos feitos atribuídos a Thales são exagerados”; e segundo Aaboe, predizer um eclipse solar era “um feito então impossível” (AABOE, 1984, p. 47).

Brito (1995, p. 24) assinala que Szabó contesta a afirmação de que Thales teria sido o responsável pela introdução do método dedutivo e atribui a Pitágoras[3] a transformação da matemática para uma ciência dedutiva.

> Foi este (Pitágoras) que começou a estudar os teoremas da matemática por meio da abstração, independentemente de aspectos concretos (empíricos), e a investigar os princípios (axiomas e definições) da matemática. Aliás, o conjunto de teoremas mais antigo

[3] Não se sabe ao certo as datas de nascimento e morte de Pitágoras, supõe-se que sejam por volta dos anos 586-500 a.C.

> de que temos notícia foi escrito pelos pitagóricos e refere-se aos números pares e ímpares (BRITO, 1995, p. 25).

Mas é incontestável que é por meio de Euclides que a geometria tomou um rumo histórico.

Euclides foi um professor e geômetra que viveu no século III a.C.; pouco se sabe sobre sua vida. O que se tem a respeito dele, em livros de história da matemática, são alguns poucos detalhes, como a suposta afirmação de que foi o criador da famosa escola de matemática de Alexandria[4]. Com certeza, algo realmente palpável deixado por Euclides é um conjunto de livros de Geometria, escritos e organizados com base em uma estrutura lógica que produz a impressão de que cada resultado provém de outro, como se formassem uma corrente estruturada e consistente.

Os *Elementos* de Euclides é a obra científica mais editada do mundo. Eves (2008) pontua que foram feitas mais de 1000 edições. Não se sabe com precisão o número de suas edições impressas, nem mesmo a quantia exata de traduções a qual essa coleção já foi submetida; sabe-se, no entanto, que se trata da obra mais difundida depois da Bíblia.

A coleção é composta por 13 livros ou capítulos. Os livros I e II são supostamente atribuídos à autoria de Pitágoras; o livro III é de Hipócrates; os livros IV, VI, XI e XII foram elaborados por diversos autores atenienses; no livro V, Euclides se remete à obra de Eudóxio (408-355 a.C.). De Eudóxio e também de Pitágoras são os demais capítulos da coleção (SOUZA, 1948). O fato de muitos estudiosos atribuírem a Euclides apenas o trabalho de compilação não desmerece em nada a grandiosidade da sua obra, talvez por nenhum vestígio ter restado de elementos anteriores[5] ao de Euclides este é consagrado com tão grande notabilidade.

---

[4] Afirmação encontrada em Eves, 2008, p. 167.

[5] Boyer afirma que foram escritos pelo menos três Elementos anteriores ao escrito por Euclides, dentre eles um Elemento escrito por Hipócrates de Quios, mas segundo Boyer não haveria vestígios de tais livros, sendo o de Euclides o mais antigo escrito do qual se tem registros (BOYER, 1999, p. 76). Struik (1989) ressalta, no entanto, que há um fragmento completo da obra de Hipócrates de Quios (p. 75) o qual trata em como determinar áreas delimitadas por arcos circulares, também intitulados por "Elementos", o livro de Hipócrates segue um raciocínio axiomático e precede a obra de Euclides em mais de um século.

Por que essa obra se tornou tão fascinante, a ponto de ser estudada por grandes matemáticos e se tornar em muitos países material pedagógico para o ensino da geometria?

Além de questões históricas que permitiram a difusão dos *Elementos* de Euclides, o que resultou em tornar esse material tão utilizado e conhecido, a beleza desse trabalho encontra-se também no fato de que Euclides conseguiu uma feliz seleção de proposições, encadeando-as em uma sequência lógica, na qual cada proposição é demonstrada a partir de resultados anteriores. E todos os resultados são obtidos de algumas poucas suposições iniciais, os chamados postulados.

Alguns termos aparecem na obra de Euclides com o objetivo de "classificar" cada resultado; são eles: axiomas, postulados, proposições e teoremas.

Roberto Bonola traz em seu livro uma breve explicação feita por Proclo[6] (410-485), em que tenta distinguir os termos axioma e postulado:

> Em PROCLO estão indicadas três maneiras diferentes de entender a diferença existente entre axiomas e postulados.
> A primeira maneira está relacionada com a diferença existente entre problema e teorema. O postulado difere do axioma, como o problema difere do teorema diz PROCLO. Com, isto se deve entender que o postulado afirma a possibilidade de uma construção.
> A segunda maneira consiste em dizer que o postulado é uma proposição de conteúdo geométrico, enquanto que o axioma é uma proposição comum tanto para a geometria como para a aritmética.
> Finalmente, a terceira forma de compreender a diferença entre as duas palavras referidas por PROCLO, está apoiado na autoridade de Aristóteles (384-322). As palavras axioma e postulado para Aristóteles não parecem serem usadas em sentido exclusivamente matemático. Axioma é o que é verdadeiro por si só, em virtude do significado das palavras que ele contém; postulado é o que, embora não seja um axioma, se admite sem demonstração (BONOLA, 1951, p. 34, tradução nossa).

Atualmente, não se faz mais essa distinção entre axioma e postulado, denomina-se por axioma as proposições admitidas sem demonstração.

[6] Proclo foi filósofo e matemático e um dos comentadores do livro I de Euclides, uma das principais fontes sobre a história dos primeiros tempos da geometria elementar. De acordo com Eves (2008), 'muitas das fontes as quais Proclo teve acesso já não existem mais', fazendo com que seus comentários sejam tão importantes para a história da matemática.

A obra de Euclides não se resume apenas à geometria, ela também envolve a teoria dos números e a álgebra elementar. Trata-se de “uma obra monumental e muito bem estruturada sobre quase toda a Matemática conhecida até aquela época” (ÁVILA, 2010, p.56)

A coletânea foi, durante séculos, considerada uma obra clássica, perfeita e indispensável ao estudo da matemática.

Conforme Júlio Cesar de Mello e Souza, Wieleitner define os *Elementos* como “uma obra puramente teórica, equável, sem aplicações práticas, sem cálculos ou exemplos numéricos” (SOUZA, 1948, p. 10). Todavia, a sequência lógica é tão claramente desenvolvida que fez da geometria um estudo obrigatório dentre as gerações de classes intelectuais do século passado.

> Ele tinha 40 anos antes de descobrir a geometria; o que aconteceu acidentalmente. Estando na Biblioteca de um Cavalheiro, os Elementos de Euclides estavam abertos, exatamente o Teorema 47[7], *Libri I*. Ele leu o teorema. Por Deus, disse (de vez em quando ele praguejava um pouco, para enfatizar suas afirmações) isso é impossível! Assim, ele leu a demonstração do teorema, que o remeteu a uma outra proposição; e ele leu esta Proposição. Esta última o remeteu a uma outra, que ele também leu. *Et sic deinceps* (e assim sucessivamente) de maneira que, no fim, ele estava demonstradamente convicto daquela verdade. Isso o fez apaixonar-se pela Geometria[8] (DAVIS e HERSH, 1985, p. 179).

Essa maneira lógica de organizar o pensamento se tornou tão admirável no meio científico que mesmo outros livros de conteúdos não matemáticos foram escritos seguindo um roteiro em que se admitem alguns resultados, chamados axiomas, e a partir daí obtêm-se vários outros resultados que se originam desses. Alguns exemplos de tais escritos, segundo Ávila (2010), são: *Ethica Ordine Geométrico Demonstrata* (Ética Demonstrada de Maneira Geométrica), no qual Baruch Spinoza estabelece alguns axiomas e desenvolve uma série de proposições, em um encadeamento lógico dedutivo, e o famoso livro de Isaac Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural), escrito no estilo dos *Elementos* de

---

[7] Teorema 47: Em todo o triângulo retângulo, o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual os quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.

[8] A citação acima refere-se à impressão atribuída a Thomas Hobbes, registrada por John Aubrey e publicado em seu livro Vidas Curtas.

Euclides. Seu livro não traz nenhum método nem técnica do cálculo e, consiste em obter resultados baseando-se inicialmente em três postulados que são suas leis do movimento (tratadas no Ensino Médio), acrescidas posteriormente à Lei da Gravitação.

1.1 A Considerada Beleza da Geometria

Além da beleza lógica, a Geometria possuiu durante séculos uma estreita relação com a perfeição. Mesmo não matemáticos viam a geometria e davam a ela um estatuto que estava acima das demais ciências.

A perfeição existente em cada resultado da geometria, aliada à influência da Igreja na época, fez desse conhecimento um sinônimo de que ela retratava bem, algo que fosse divino.

Segundo Platão:

> 1- Conhecemos as verdades da geometria que ainda não aprendemos pela educação ou experiência.
> 2- Este conhecimento é um exemplo das verdades universais, imutáveis que, com efeito, podemos perceber e reconhecer.
> 3- Assim, deve existir um reino de verdade absoluta, a fonte e a base de nosso conhecimento do Bem (DAVIS e HERSH, 1985, p. 367).

A herança de tal pensamento platônico fez com que a comunidade científica reconhecesse por séculos a hegemonia e a “supremacia” da Geometria.

Todos os resultados obtidos não podiam ser contestados, a mera negação de uma proposição ou teorema era facilmente refutada. Havia embutido em cada prova um alicerce resistente incapaz de ser destruído.

Assim, nada poderia dar “errado”. Exceto se houvesse alguma parte da Geometria que não resultasse de proposições lógicas. E havia! De acordo com a sequência organizada por Euclides, havia axiomas e postulados que foram aceitos sem demonstração.

Trata-se de cinco axiomas e cinco postulados considerados “óbvios” e intuitivamente aceitos. São eles:

Axiomas[9]

- Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
- Adicionando iguais a iguais, as somas são iguais.
- Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
- Coisas que coincidem uma a outra são iguais entre si.
- O todo é maior que a parte.

Postulados

- É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
- É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.
- É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- Se uma reta intercepta duas retas, formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Euclides deduziu todas as suas 465 proposições dessas dez afirmações.[10]

Os quatro primeiros postulados são intuitivamente aceitáveis; o quinto postulado, todavia, traz um texto difícil, mais longo que os demais, o que de certa forma pode ter causado uma resistência na sua aceitação como postulado.

> No livro “Elementos de geometria plana e sólida segundo a ordem de Euclides, Príncipe dos geômetras”, o jesuíta Manoel de Campos, referindo-se ao V postulado, escreveu: “A verdade deste axioma não é tão clara que não necessite demonstração; por isso Gemino e Proclo

---

[9] Além destes, Euclides no decorrer de seu texto admite outros axiomas, para uma leitura mais completa a respeito destes axiomas e como foram posteriormente classificados ver o capítulo 1 do livro Geometria Plana e Espacial: Um estudo axiomático de Valdeni Soliani Franco e João Roberto Gerônimo, editado pela Eduem, 2010.

[10] É importante ressaltar que essas não são as únicas afirmações sem demonstrações usadas por Euclides, no entanto, seu trabalho só traz estas dez afirmações como classificadas em axiomas ou postulados, as demais são usadas implicitamente, e foram apresentadas como axiomas por Hilbert, no final do século XIX.

> a excluíram do número dos princípios evidentes” (SOUZA, 1948, p. 20).

A simples exclusão de tal postulado romperia a linearidade formada pelos resultados dos *Elementos*. Não era possível excluí-lo, mas sua verdade não evidente tirava-lhe, de certa forma, a condição de um resultado aceito sem demonstração. Não se questionava a veracidade de tal postulado, mas entendeu-se que por ser ele não trivialmente elaborado, como os demais, seria então uma proposição 'disfarçada'.

Não se sabe com certeza o que Euclides pensava sobre o quinto postulado; alguns autores, no entanto, afirmam que Euclides teria resistido a incluí-lo em suas demonstrações a ponto de que esse postulado só tenha sido utilizado pela primeira vez na vigésima nona proposição.

> “Muitas das primeiras vinte e oitos proposições podem ser demonstradas de forma mais simples se utilizarmos o quinto postulado... Euclides foi o mais longe possível sem empregá-lo, pois também não estava satisfeito com a natureza de “postulado” de tal proposição” (MORENO, e BROMBERG, apud BRITO, 1995, p. 56)
>
> O autor dos “Elementos”, ao elaborar sua obra, teve o cuidado de separar o V postulado dos outros, sugestionado, provavelmente, pela impressão de que o aludido princípio não fosse, realmente, original e indemonstrável (SOUZA, 1948, p. 22).
>
> É interessante observar que Euclides retarda ao máximo a utilização do quinto postulado [...]. Esta é mais uma razão para se suspeitar que o próprio Euclides talvez pensasse que esse postulado pudesse um dia ser demonstrado como teorema (ÁVILA, 2010, p.62).
>
> É claro que o próprio Euclides deve ter considerado o Postulado 5 como pouco evidente. Isto é confirmado pelo fato de que ele retardou o quanto possível o uso deste postulado (CARMO, 1987, p. 26-7).

Há, contudo, outra possibilidade para que Euclides tenha retardado o uso do quinto postulado, essa possibilidade raramente é sugerida na bibliografia encontrada[11] e consiste no fato de que Euclides teria apresentado sua obra, com o uso de um critério de estética formal, no qual cada postulado é utilizado quando não há mais a possibilidade de continuar o trabalho sem ele.

---

[11] Os autores Aaboe (1984) e Berlinghoff e Gouvêa, (2010), admitem a possibilidade sugerida, apesar de não se aterem muito a ela.

Uma das mais fortes razões para que essa possibilidade possa ser considerada se apresenta quando é feita a análise detalhada da estrutura elaborada por Euclides. Como já dito, *Os Elementos* são compostos por 465 proposições, e o quinto postulado é usado pela primeira vez na vigésima nona proposição, o que sugere uma resistência em utilizá-lo; no entanto, ao se examinar as vinte e oito primeiras proposições, percebe-se que há uma regularidade na utilização da ordem dos axiomas propostos. Euclides usou os três primeiros postulados já nas primeiras proposições apresentadas por ele, e até a décima terceira proposição os três primeiros postulados serão utilizados em todas as proposições – salvo a quarta proposição que não se utiliza de nenhum dos axiomas para ser demonstrada – o quarto postulado foi usado pela primeira vez na décima quarta proposição[12]. Seria possível também admitir um retardo na utilização do quarto postulado; essa demora, todavia, não é questionada pelos autores citados.

Uma possibilidade para que o autor dos *Elementos* também tenha retardado o uso do quarto postulado não seja devido ao fato de que ele apresentava algumas “sutilezas” ou porque Euclides teria dúvidas quanto ao seu enunciado: ele só veio a ser utilizado quando não houve mais a possibilidade de demonstração sem sua utilização. Todas as outras demonstrações a partir da décima quarta se utilizam do quarto postulado, direta ou indiretamente.

Da mesma forma, o argumento de que o quinto postulado foi usado por Euclides quando não houve mais a possibilidade de demonstração sem ele é perfeitamente válido. Essa estrutura estética usada por Euclides é própria da lógica. O autor de *Os Elementos* viveu em um tempo no qual a exigência com a forma era incontestável e essa regularidade pode ter sido responsável por parte do sentimento, vivido entre os gregos, de perfeição da Geometria, pois os resultados passaram a não ser encadeados de uma maneira apenas lógica, mas também estética.

Independentemente do motivo que fez com que Euclides tenha destinado a posição de número cinco ao postulado das paralelas – seja por duvidar de sua condição de postulado, seja por uma questão de estética baseada em uma escolha de ordem – o

[12] Em Bongiovanni e Jahn (2010), encontra-se uma tabela que especifica todos os postulados utilizados nas demonstrações das 28 primeiras proposições do livro de Euclides, na qual o leitor poderá verificar as afirmações que se referem a utilização dos postulados feitas neste texto.

enunciado não trivial continuava a sugerir que o tal postulado não fosse apenas um axioma.

> Surgiu, como era natural, uma dúvida perturbadora que por mais de dois mil anos atormentou os geômetras: - "O postulado das paralelas não seria um postulado supérfluo, demonstrável com auxílio dos postulados precedentes?" (SOUZA, 1984, p. 22).

Essa preocupação sobre a não simplicidade do quinto postulado fez com que muitos matemáticos tentassem encontrar um equivalente a ele com o objetivo de posteriormente demonstrar o quinto postulado de Euclides, o que permitiria classificá-lo como uma proposição.

São vários[13] os enunciados que foram escritos com correspondência equivalente ao quinto postulado de Euclides. Dentre eles, destacam-se:

- "A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos", elaborado por Thales;

- "Dada uma reta M, uma perpendicular P e uma oblíqua Q a oblíqua encontra a perpendicular", elaborada por Joseph Bertrand.

Atualmente, a forma mais conhecida e difundida nos livros didáticos sobre o enunciado do quinto postulado é atribuída a John Playfair[14], nomeada de *Postulado das Paralelas*. Seu enunciado prescreve que "Por um ponto P fora de uma reta r não se pode traçar mais do que uma reta paralela à reta r".

O quinto postulado por vezes sugeriu uma demonstração. A primeira tentativa de demonstração aconteceu no século I a.C. e foi realizada pelo filósofo Posidônio. Essas tentativas continuaram sendo realizadas até o início do século XIX.

---

[13] No livro "O Escândalo da Geometria", Júlio Cesar de Melo e Souza traz uma lista com os principais postulados, considerados por geômetras equivalentes ao quinto postulado de Euclides, cuja lista apresenta um total de 12 postulados.

[14] Esse enunciado já era conhecido por Proclo (410-485), no entanto é atribuído a John Playfair por ele ter publicado em um de seus livros em 1795. Esse postulado também pode ser encontrado na literatura como "Postulado de Hilbert".

> Todavia a maior parte das tentativas de demonstração do quinto postulado admitiam fatos que, ou eram equivalentes a ele, ou não podiam ser demonstrados usando unicamente os outros quatro postulados. Grandes nomes da matemática tentaram sem sucesso a demonstração do quinto postulado (FRANCO e GERÔNIMO, 2010, p. 12).

Mesmo diante de novos enunciados, não foi possível demonstrar o quinto postulado com base nos quatro primeiros postulados e nas proposições que resultavam deles.

1.2 Algumas das Últimas Tentativas

Foram inúmeros os esforços e as tentativas para se demonstrar o quinto postulado. A ideia de que seu resultado poderia ser obtido com base nos outros quatro postulados e das proposições que estes últimos eram capazes de "provar", fez desse problema um verdadeiro desafio para os matemáticos de várias épocas.

As últimas tentativas para demonstrar o postulado das paralelas – que serão consideradas – devem-se a Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Hewinrich Lambert (1728-1777) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

As tentativas de demonstrações do quinto postulado até Girolamo Saccheri eram realizadas pelo método direto. Girolamo Saccheri foi o primeiro matemático ocidental[15] a ousar demonstrar o postulado das paralelas por meio da *reductio ad absurdum* (redução por absurdo); antes de morrer, deixou publicado o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides Livre de Todo Ataque), no qual acredita ter demonstrado[16] o quinto postulado.

Negando a hipótese de Euclides, Saccheri pretendia encontrar uma contradição, donde concluiria a veracidade do tão questionado postulado.

---

[15] De acordo com Brito, tentativas feitas por matemáticos árabes já haviam sido publicadas; as demonstrações de Omar Al Khayyam (1038-1048) e Nasir- Eddin (1201-1274) também foram realizadas com base na redução ao absurdo. Para ver a demonstração de Nasir-Eddin, consultar o livro de Roberto Bonola, Geometrias No Euclidianas, p. 26-28.

[16] Para uma leitura mais completa da demonstração de Girolamo Saccheri, ver Bonola, 1951 p. 37- 55.

> Raciocinava-se como segue: se o postulado das paralelas for uma consequência dos quatro outros postulados, então estes quatro primeiros e a negação do postulado das paralelas conduzirão a uma contradição, ou seja, serão inconsistentes (AABOE, 1984, p. 63).

Sua ideia consistia em trabalhar com um quadrilátero[17] ABCD que tem ângulos retos em A e B e os lados AD e BC congruentes. Ao considerar as diagonais AC e BD e usar resultados de congruência (que se encontravam dentre os 28 postulados iniciais de Euclides) demonstrou que, nesse quadrilátero, os ângulos D e C são congruentes. Na Geometria Euclidiana, os ângulos D = C = $90°$. Como sua intenção era usar a redução ao absurdo, supôs três possibilidades para os ângulos C e D:

Figura1- Quadrilátero de Saccheri
Fonte: Autora

1- Os ângulos em C e D são ambos retos.
2- Ambos são ângulos obtusos.
3- Ambos são ângulos agudos.

O que Saccheri pretendia era supor válidas as afirmações (2) e (3) – o que deveria levá-lo a uma contradição – e então por redução ao absurdo concluir que a única afirmação válida seria a de que os ângulos D e C deveriam medir 90 graus.

Na verdade, o que Saccheri conseguiu, ao supor como verdadeiras as afirmações (2) e (3), foi demonstrar vários resultados que não apresentavam contradição, mas que fugiam à "intuição" adquirida com a Geometria Euclidiana. Isso foi o bastante para que ele concluísse que a negação do quinto postulado resultava em absurdos e afirmar então ser verdadeiro o postulado das paralelas. "Saccheri acabou por proclamar que a hipótese

[17] Esse quadrilátero ficou conhecido como *Quadrilátero de Saccheri*.

que fizemos no início (uma das negativas do quinto postulado) é absolutamente falsa por ser *repugnante à natureza da linha reta*" (ÁVILA, 2010, p. 63, grifos nossos).

Girolamo Saccheri estava tão convicto que a geometria de Euclides era suficientemente consistente que não se ateve ao que ele descobriu. Em seu livro *Euclides ab omni naevo,* declara: "Certamente ninguém duvida do teor da verdade dessa afirmação, contudo as críticas a Euclides derivam do fato de ele ter qualificado essa afirmação como se o teor dela fosse *facilmente subssumido*" (apud BRITO e MORAES, 1998, p.107, grifos nossos).

Todo o seu trabalho, porém, ficou esquecido por mais de um século, sendo descoberto por Eugênio Beltrami (1835-1900) em 1889; quando isso aconteceu, as geometrias não euclidianas já haviam sido construídas.

Beltrami constatou que não havia falhas no trabalho de Saccheri e que, na verdade, o que ele tinha descoberto era a possibilidade de existência de novas geometrias. "Saccheri estava tão concentrado na ideia de provar a veracidade do quinto postulado, que não percebeu que tinha feito outra coisa não menos importante que seu intento inicial". (ÁVILA, 2010, p.63).

Talvez o primeiro matemático que tenha se convencido de que o quinto postulado era indemonstrável tenha sido G. S. Klügel. De acordo com Bonola (1951), Klügel escreveu uma crítica sobre as principais[18] tentativas de demonstração do quinto postulado, concluindo inclusive que não se deve aceitar o juízo dos sentidos como prova. Encontrou ainda erros em todas as demonstrações e inferiu que o tão duvidoso postulado na verdade era indemonstrável, "é claro que foi só a opinião de Klügel; ele não pôde provar que o quinto postulado não tem demonstração" (TRUDEAU, apud BRITO, 1995, p. 103).

Trinta e três anos depois de Saccheri ter escrito seu trabalho, outro matemático apresenta uma nova investigação sobre o postulado das paralelas. Lambert toma como ponto de partida, assim como Saccheri, um quadrilátero; considera dessa vez três

[18] Segundo Brito (1995), foram analisadas 28 demonstrações, incluída a de Saccheri.

ângulos retos. Seu trabalho intitulado *Die Theorie der Parallellinien*[19] só foi publicado depois de sua morte[20].

Lambert foi mais além que Saccheri; suas hipóteses recaíam sobre o quarto ângulo. Este, segundo Lambert, poderia ser reto, agudo ou obtuso. A primeira hipótese conduzia facilmente ao sistema euclidiano. A segunda hipótese (ângulo agudo) foi analisada e considerada por possível por Lambert que – diferentemente de Saccheri – deduziu que a geometria formada, ao considerar o quarto ângulo como agudo, poderia ser verificada, talvez, em uma esfera de raio imaginário. A hipótese do ângulo obtuso foi eliminada por afirmações não consistentes como as de Saccheri.

Legendre tentou resolver o problema do postulado das paralelas por outra via, atacando a questão pela soma dos ângulos internos de um triângulo. Adrien-Marie Legendre escreveu várias edições de um livro de Geometria, *Éléments de Géometrie,* que substituiu, nas salas de aula, os *Elementos* de Euclides, já que era considerado por muitos mais "didático". Em cada uma das edições, Legendre apresenta uma demonstração para o quinto postulado; em cada nova edição do livro ele corrigia erros da edição anterior. Apesar das várias tentativas, Legendre não conseguiu concluir a demonstração, restando-lhe apenas a certeza da afirmação: "Há pelo menos um triângulo em que a soma dos ângulos é igual a dois retos" (SOUZA, 1948, p. 38).

As várias tentativas de demonstração não puderam comprovar a validade do quinto postulado, mas foi por meio dessas tentativas que se originaram outras geometrias tão consistentes quanto a euclidiana, as chamadas Geometrias Não-Euclidianas[21].

1.3 As Geometrias Não-Euclidiana

No fim do século XVIII, já havia fortes dúvidas de que o postulado das paralelas pudesse ser provado, e assim como Saccheri, o russo Nicokolai Ivanovich Lobatchevski

---

[19] Nesse trabalho Lambert, faz menção aos resultados concluídos por K lügel.

[20] Para um estudo mais aprofundado sobre as conclusões de Lambert, ver Bonola, 1951, p.56-62.

[21] É importante ressaltar que foram as geometrias Hiperbólica e Elíptica que resultaram das tentativas de demonstração do quinto postulado, o que explica o termo usado com hífem.

(1793-1856) e o húngaro János Bolyai (1802-1860) estruturaram vários resultados sem contradições, simplesmente negando a afirmação de Euclides no quinto postulado.

Uma possibilidade para a negação do postulado em questão – e foi isso que fizeram – consiste em afirmar que existe uma reta r e um ponto P fora de r, pelo qual se pode traçar mais de uma paralela a r. Contrariamente à reação de Saccheri, que foi a de "forçar" uma contradição, Lobatchevski e Bolyai afirmaram ter descoberto uma nova geometria, diferente da estruturada por Euclides. É importante ressaltar que os dois trabalhos foram publicados independentemente[22]: o trabalho de Lobatchevski é de 1829 e foi publicado em Kazan[23]; já o de Bolyai foi publicado como um apêndice do livro, escrito pelo pai Wolfang Bolyai, em 1831, em Budapeste[24]. Vale lembrar que o trabalho de Saccheri ainda não havia sido encontrado.

Apesar das descobertas, a comunidade científica relutou em aceitar tais resultados, afinal o que Lobatchevski e Bolyai puderam concluir consistia em alguns resultados que fogem à percepção adquirida pela Geometria Euclidiana, mas não na efetiva construção de uma nova geometria; afinal, quem poderia garantir que no próximo teorema a demonstrar essa nova geometria não entraria em uma contradição interna?

Para uma sociedade que se habituara a "ver" os resultados da Geometria Euclidiana usados por aproximadamente 2000 anos sem aparentes contradições, aceitar uma nova geometria na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo não é cento e oitenta graus e as retas não são representadas pelo ente geométrico imaginado até então, e que foi durante milênios apresentada às gerações anteriores, soava quase como uma heresia.

Apesar das publicações de Lobatchevski e Bolyai serem as primeiras sobre esta tão inusitada e diferente geometria, é possível que Gauss (1777-1855) tenha sido o primeiro a se convencer de que haveria como construir novas geometrias. Em carta datada de 1811 a seu amigo Wolfang Bolyai, pai de Janos, Gauss teria confessado: "sou levado

---

[22] Há controvérsias quanto à independência dos dois trabalhos citados acima, no entanto não se aterá a esses detalhes.

[23] Localizada na atual Rússia.

[24] Localizada na atual Hungria.

muitas vezes a duvidar da verdade da Geometria...” em outra carta anterior a esta (1799) ao mesmo amigo, Gauss escreve[25]:

> “Encontra-se em Brunswick um emigrado chamado Chauvelot, que não é mau geômetra e que pretende ter estabelecido a teoria completa das paralelas; seu trabalho aparecerá em breve, mas não espero encontrar nele nada de aproveitável” (SOUZA, 1948, p. 41).

Gauss estava convicto de que se poderia formular novas geometrias com a negação do quinto postulado, e essa possibilidade trazia uma confusão relacionada à própria existência da geometria. “Quanto a mim, meus trabalhos já estão muito adiantados, no entanto o caminho que tenho encontrado não conduz ao fim a que persigo... esse caminho me põe em dúvida a existência da geometria” – Citação de Gauss – (BONOLA, 1951, p.76, tradução nossa).

Apesar das evidências, Gauss não publicou nada a respeito de suas conclusões, pois temia a confusão que essa teoria poderia causar no meio científico. Pesquisas históricas realizadas com base em alguns documentos[26] escritos por Gauss garantem que suas conclusões são anteriores às de Lobatchevski e Bolyai. “Confrontando várias passagens das cartas de Gauss é possível fixar como ponto de partida de suas meditações o ano de 1792” (BONOLA, 1951, p. 76, tradução nossa).

A resistência por parte de Gauss para publicar seus novos resultados se dava, em grande parte, devido à filosofia de Kant, dominante à época, que considerava a Geometria Euclidiana como a geometria perfeita para descrever o universo. A Teoria Kantiana afirmava que o espaço é uma intuição à qual, necessariamente, segue a Geometria Euclidiana. As pessoas aceitavam a Geometria Euclidiana como “evidente”, já que os resultados eram passíveis de observação. Essa necessidade de compreender e instintivamente perceber os resultados influenciava consideravelmente a aceitação das Geometrias Não-Euclidianas – nome dado por Gauss para se referir a essas novas geometrias que não estavam de acordo com os postulados formulados por Euclides[27] .

---

[25] Essa citação aparece na nota de rodapé do livro referido.

[26] Os documentos analisados que possibilitam tais afirmações são correspondências de Gauss com W. Bolyai, das quais são citados alguns trechos acima, além das de Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus e Bessel.

> Parece que os matemáticos do final do século XVIII e início do século XIX, concebiam a "evidência" no primeiro sentido. Essa concepção foi, sem dúvida, um dos motivos da dificuldade de aceitação das novas geometrias pela comunidade matemática, e também o motivo o qual levou Gauss a não publicar suas descobertas acerca dessas geometrias, pois ele tinha consciência de que a filosofia dominante entre os matemáticos era a Kantiana. Como Gauss havia previsto, quando os matemáticos souberam da invenção das geometrias não-euclidianas, opuseram-se a elas (BRITO, 1995, p.117).

Nesse momento histórico, a matemática passou a sofrer de um mal, uma indefinição da própria identidade. Com efeito, a Geometria Euclidiana foi por muito tempo considerada o ramo da matemática mais perfeitamente estruturado; tanto foi, que muitos outros tentaram estruturar toda a matemática utilizando a mesma estrutura lógica. De repente, apresenta-se uma nova geometria formulada com a mesma estrutura lógica que a euclidiana; ora, se a estrutura lógica é correta, tão correta é então a geometria formulada com base nela, mas a nova geometria não representava a intuição, seus resultados na verdade pareciam fugir de tudo o que aparentemente se demonstrava correto. Qual era o erro? Se essa nova geometria pudesse ser considerada consistente devido a sua estrutura lógica, seus resultados deveriam ser aceitos; mas como aceitar o fato de que um triângulo pudesse ter a soma das medidas dos seus ângulos internos diferente de 180 graus? Por outro lado, não aceitar a consistência dessa geometria significava de certo modo negar a consistência da Geometria Euclidiana.

Os adversários das Geometrias Não-Euclidianas passaram a buscar falhas nesses novos sistemas geométricos, algo que os tornassem inconsistentes. Essa inconsistência se daria a partir do momento em que dois resultados da mesma geometria se contradissessem mutuamente.

> Os opositores, embora tivessem tentado fazê-lo jamais puderam mostrar que as geometrias não euclidianas violavam requisitos de consistência lógica formal. Por outro lado, os sistemas não euclidianos também não se mostravam, positivamente, consistentes. A importante questão de sua consistência permaneceu no ar durante algum tempo (BARKER, 1969, p. 55).

---

[27] O primeiro nome dado por Gauss foi o de Geometria Anti Euclidiana, depois de Astral e finalmente de Não-Euclidiana.

Essas discussões sobre a consistência das Geometrias Não-Euclidianas obrigaram os matemáticos da época a procurarem procedimentos lógicos mais “rigorosos”. Esses questionamentos abalaram até mesmo a Geometria Euclidiana, pois todas as dúvidas impostas às Geometrias Não-Euclidianas poderiam igualmente ser elaboradas para a geometria de Euclides. Quem poderia agora garantir que a Geometria Euclidiana não estava sujeita a contradições, que haveria dois resultados (ainda não observados) que se contradissessem? Afinal, Euclides não teria demonstrado todos os resultados possíveis.

Buscaram-se, então, tentativas de demonstrações nas quais fosse possível afirmar se tais teorias eram consistentes ou não.

Enquanto alguns matemáticos tentavam mostrar que as Geometrias Não-Euclidianas eram inconsistentes, outros matemáticos se propuseram a mostrar a consistência dessas geometrias.

Existem algumas maneiras de provar que um sistema lógico é consistente; uma delas seria encontrar uma interpretação sob o qual todos os axiomas, e consequentemente todos os resultados advindos destes, fossem, definitivamente, verdadeiros.

Outra maneira de provar a consistência de um sistema é o que estabelece a consistência relativa: mostra-se que um sistema é consistente, contanto que outro menos suspeito também o seja. Nesse caso, contudo, cria-se uma dependência entre os dois sistemas analisados, ou seja, o sistema duvidoso será consistente desde que o sistema mais aceito seja consistente; assim, a negação da hipótese só poderá ser considerada se for negada a tese. Ilustrar-se-á tal pressuposto.

Suponha-se que exista um sistema em que não há dúvidas quanto à sua validade, chame-se esse sistema de A. Por outro lado, que seja denominado pela letra B o sistema duvidoso, aquele que se quer determinar se é ou não verdadeiro, no caso em questão, B representa as geometrias não-euclidianas. O método para a verificação de consistência determina que se for possível uma interpretação capaz de tornar verdadeiro o sistema A, haverá também uma interpretação capaz de tornar verdadeiro o sistema em discussão, ou seja, será possível concluir que:

Se A é consistente então B será consistente.

Negar essa proposição, ou seja, insistir que B não é consistente significa inferir da seguinte forma:

$$\sim B \rightarrow \ \sim A$$ [28]

Em outras palavras, afirmar que B não é consistente significa logicamente equivalente a dizer que A também não o é.

E foi esse último método apresentado, utilizado por matemáticos do fim do século XIX para demonstrar que as Geometrias Não-Euclidianas eram consistentes. Eles tomaram nada menos do que a Geometria Euclidiana para ser a proposição A e conseguiram mostrar a relação que as Geometrias Não-Euclidianas devem ser consistentes, caso seja consistente a geometria de Euclides. Essa demonstração repercutiu no âmbito matemático, desestabilizando todo o fundamento da matemática.

Agora o problema residia em mostrar a consistência da Geometria Euclidiana; ora, até o momento, tal geometria não estava sob investigação, até porque seus resultados, como já fora dito, eram instintivamente aceitos. O que aconteceu é que, com o nascimento das novas geometrias, não se podia mais apenas aceitar instintivamente os resultados, fossem eles de qualquer geometria; todas elas, por estarem com seus fundamentos na lógica, deveriam agora ser inspecionadas.

Os matemáticos reconheceram que a percepção não bastava para que os resultados fossem aceitos e se impôs a necessidade de "revisão" dos *Elementos*. Nessa análise minuciosa, foram descobertas falhas na estrutura elaborada por Euclides, dentre as quais as de que algumas demonstrações apoiavam-se na visualização geométrica.

Os matemáticos também perceberam que, na verdade, Euclides utilizava muitos postulados que eram implícitos, que não haviam sido apresentados. Alguns textos foram escritos com o objetivo de reelaborar os *Elementos* e tentar livrá-lo dessas falhas; e alguns matemáticos se destacaram nessa tentativa, dentre eles: Moritz Pasch (1843-

[28] O símbolo ~ é usado com sentido de negação lógica e o símbolo $\rightarrow$ é usado com sentido de conclusão.

1930), Giuseppe Peano (1858-1932) e David Hilbert (1862-1943). Este último escreveu um livro, *Fundamentos da Geometria*, que se tornou um marco para o objetivo proposto. Nesse livro, Hilbert – se apoiando em 20 postulados – descreve toda a Geometria Euclidiana sem apelo à visualização.

Além das questões geométricas, Hilbert tratou em seu livro de outras questões de extrema importância para a época, como a da consistência da geometria. Ele propôs uma relação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Analítica, estabeleceu uma correspondência entre os entes geométricos – plano, reta e círculo – com os entes numéricos da Geometria Analítica. Assim, o problema da consistência da geometria se transformou em um problema da consistência da Teoria de Números.

> Construímos, assim na teoria dos números, um "modelo" da geometria de Euclides, e isso quer dizer que a geometria euclidiana deve ser consistente se for consistente a teoria matemática dos números. (BARKER, 1969, p. 66)

Uma busca para demonstrar esse último fato se iniciou no meio científico matemático. A principal tentativa foi a de estabelecer um número mínimo de considerações e construir toda a teoria de números dessas considerações iniciais; esse ponto de partida seria o conjunto dos números naturais e o processo seria axiomático. As tentativas foram feitas e os fracassos foram expostos, até que em 1931, Kurt Gödel (1906 -1978):

> [...] surpreendeu o mundo matemático com a publicação de um trabalho em que demonstrava que o método axiomático tem inevitáveis limitações, que impedem mesmo a possibilidade de construir um sistema axiomático abrangendo a Aritmética (ÁVILA, 2010, p. 91).

Para exemplificar melhor, para ser considerado consistente, um sistema deve satisfazer três pontos básicos:

- Os postulados não podem se contradizer;
- Devem ser suficientes para provar verdadeira ou falsa todas as proposições formuladas;
- Cada postulado deve ser independente dos demais.

> Gödel prova, que a consistência de qualquer sistema matemático que englobe a Aritmética não pode ser estabelecido pelos princípios lógicos usuais... se uma teoria formal abrangendo a Aritmética for consistente, ela necessariamente será incompleta, o que significa dizer que haverá alguma proposição sobre os inteiros que a teoria será incapaz de decidir ser verdadeira ou falsa (ÁVILA, 2001, p. 9).

A demonstração de Kurt Gödel não remete à matemática a uma teoria incompleta e infundada, apenas demonstra que o método axiomático formal é incapaz de propor um limite à matemática e fazê-la se ajustar aos moldes impostos. "Deus existe porque certamente a matemática é consistente, e o demônio existe porque somos incapazes de demonstrar essa consistência". A frase dita por Hermann Weyl[29] (1885–1955) expressa a angústia em não se conseguir uma estrutura capaz de tornar a matemática consistente.

É importante salientar que há um erro ao acreditar que as Geometrias Não-Euclidianas "desbancaram" a Euclidiana e determinar que essa ou aquela seja a certa. Não existem geometrias certas ou erradas, cada uma, apoiada sob estruturas diferentes, se adequa a um sistema diferente.

> Em verdade, a geometria euclidiana e a não-euclidiana parecem ser conflitantes somente se acreditarmos em um espaço físico objetivo que obedece a um único conjunto de leis e que ambas as teorias tentam descrever. Se abandonarmos esta crença, então a geometria euclidiana e a não-euclidiana não são mais candidatas rivais para a solução do mesmo problema, mas somente duas teorias matemáticas diferentes (DAVIS e HERSH, 1985, p. 382).

> No espaço, conhecemos triângulos retilíneos dos quais a soma dos ângulos é igual a dois retos; mas conhecemos igualmente triângulos curvilíneos dos quais a soma dos ângulos é menor que dois ângulos retos. A existência de uns não é mais duvidosa que a dos outros. Dar aos lados dos primeiros o nome de retas é adotar a geometria euclidiana; dar aos lados dos últimos o nome de retas é adotar a geometria não euclidiana. Assim, perguntar que geometria convém adotar é perguntar a que linha convém dar o nome de reta... Admito que tenho a ideia intuitiva do lado do triângulo euclidiano, mas tenho igualmente a ideia intuitiva do lado do triângulo não euclidiano. Por que teria eu o direito de aplicar o nome de reta à primeira dessas ideias, e não à segunda? (POINCARÉ, 1995, p.42).

Essa "intuição" comumente aceita – de que a Geometria Não-Euclidiana tornou a Geometria Euclidiana inválida – é vaga e carece ser reavaliada. Compreender esta ou

[29] A frase dita por Weyl foi retirada do livro "Várias Faces da Matemática" de Geraldo Ávila, 2010, p. 9.

aquela geometria dependerá do estudo em que esta ou aquela está inserida. Nesse âmbito, não se pode compará-las, apenas admiti-las como possíveis.

SEÇÃO 2

ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Nesta seção, far-se-á uma apresentação detalhada da escolha metodológica para a pesquisa e para a análise dos dados coletados.

A presente pesquisa tem cunho qualitativo e se apoia em investigações realizadas com professores da Rede Pública de Ensino. Os instrumentos de coletas de dados e a estruturação são baseados em Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004).

O cunho qualitativo se dá devido ao fato de se trabalhar com pessoas, não possuindo, a priori, hipóteses que deverão ser validadas ou refutadas, e ainda o fato de que a constituição das compreensões dá-se não como resultado, mas em uma trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configurados (GARNICA, 2004).

A pesquisa de campo foi realizada em um Curso de Capacitação Continuada intitulado "Introdução às Geometrias Não-Euclidianas" oferecido no período de 31 de agosto de 2010 a 27 de setembro do mesmo ano; tinha como principal objetivo capacitar professores da rede pública de ensino a trabalhar com conteúdos de geometrias não euclidianas. Foi oferecido pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Núcleo Regional de Ensino de Cianorte, PR. Tal curso contou com a participação de 43 (quarenta e três) professores.

O curso foi dividido em três dias, com carga horária diária de 8 horas, totalizando 24 horas presenciais, e tratou desde a construção axiomática da Geometria Euclidiana até tópicos de Geometrias não Euclidianas, em que se trabalharam as geometrias propostas pelas DCE[30]. Ao final da exposição de cada Geometria não Euclidiana era apresentada

[30] De acordo com o documento proposto pelo governo, DCE (Diretrizes Curriculares Estaduais para a Educação Básica), a proposta quanto aos conteúdos de geometrias não euclidianas que deverão ser considerados para o ensino no Estado contemplam para o Ensino Fundamental: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais. Os conteúdos indicados para serem trabalhados no ensino médio em relação ao elemento noções de geometrias não euclidianas são: geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica.

uma série de sugestões de atividades que poderiam ser trabalhadas em sala de aula, com a utilização dos mais diversos materiais (massa de modelar, bexigas, bolas de isopor, cornetas, câmaras de ar, softwares geométricos, entre outros).

2.1 A Coleta de Dados

A coleta de dados se deu pelos seguintes instrumentos de pesquisa: questionários estruturados, gravações em áudio e vídeo, além das anotações feitas pela pesquisadora.

Os questionários consistiram unicamente de questões abertas – se encontram anexos – nas folhas desses questionários os cursistas puderam registrar, mediante a escrita, seus discursos sobre a questão proposta.

Durante o curso, os professores respondiam a questionários, em um total de dois questionários por dia (um no período da manhã e outro no período da tarde), sempre antes do início da exposição pelo professor ministrante. Algumas questões tinham como objetivo a avaliação do conhecimento prévio que o professor trazia de determinado conteúdo, por isso decidiu-se aplicar o questionário antes das atividades que trabalhariam as questões propostas.

É importante salientar que o curso não foi elaborado com a intenção de satisfazer as questões propostas nesta pesquisa, trata-se de um curso que já vinha sendo ofertado pela Universidade Estadual de Maringá para professores da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná. A presente pesquisa utilizou-se de tal curso por ver nele alguns pontos importantes e bastante interessantes, dentre eles, o público-alvo, o conteúdo exposto e a possibilidade de averiguação de algumas questões que permeiam os principais objetivos deste trabalho. Desta forma, algumas atividades realizadas durante o curso não foram consideradas para análise.

2.2 Descrição do Curso Oferecido[31]

[31] Nem todas as atividades apresentadas a seguir resultaram em pontos de discussões e consequentemente de análises para este trabalho. No entanto, optou-se por descrever tais atividades por entender que o tema Geometria Não Euclidiana ainda se trata de um conteúdo desconhecido por muitos, compreendendo assim que as descrições poderão orientar melhor o leitor no que se refere às Geometrias Não Euclidianas.

1º dia – manhã

Iniciou-se com a entrega do questionário 1.

Questionário 1 – dia 31/08/10 - manhã

Nome ou identificação:____

Local: _________________________________

Data de nascimento: _____/_____/_____

Nível de ensino em que trabalha:

( ) Fundamental - Tempo de atuação: ______

( ) Médio - Tempo de atuação: _______

( ) Superior - Tempo de atuação: _______

( ) EJA - Tempo de atuação: _______

Sobre a sua formação:

Faculdade em que se formou:____

Ano em que se formou: _______________

1 – Descreva o que você entende por Geometria Euclidiana.

2 - Antes de serem incluídas as Geometrias Não Euclidianas nas DCE você sabia da sua existência? Se a respostar for sim, descreva quais Geometrias você conhecia ou tinha ouvido falar.

3 – Você conhece alguma diferença entre conceitos ou resultados válidos na Geometria Euclidiana que não são válidos nas Geometrias Não Euclidianas? Mesmo não tendo certeza dessas diferenças, escreva alguns desses conceitos ou resultados.

Após o recolhimento do questionário 1, o professor ministrante fez a apresentação histórica do surgimento da Geometria Euclidiana, discursou sobre os cinco axiomas e os cinco postulados elaborados por Euclides, destacou a importância e discussões acerca do quinto postulado e a busca, expressa pela história da matemática, em tentar demonstrá-lo.

O principal objetivo desse encontro foi mostrar que em algumas geometrias pode se ter a validade ou não dos postulados de Euclides e que a não consideração de pelo menos um dos axiomas descritos por Euclides pode resultar em outra geometria não menos consistente que a Euclidiana.

A fim de alcançar esse objetivo, foram trabalhadas atividades que compreendem conceitos de Geometrias Discretas, como a descrita a seguir.

Sejam P = {a,b,c}, r_1 = {a,b}, r_2 = {a,c} e r_3 = {b,c}. Chame P de plano, r_1 , r_2 e r_3 de retas, e a, b e c de pontos. Mostre que nessa "geometria" vale o 1º postulado dos Elementos de Euclides.

O professor concluiu o encontro com algumas demonstrações para verificar a equivalência entre o quinto postulado e outros postulados ditos equivalentes.

O encontro proporcionou algumas discussões interessantes acerca de paralelismo entre retas e quantidade de pontos em uma reta.

1º dia – tarde

O período da tarde iniciou-se com a entrega do questionário 2.

Questionário 2 – dia 31/08/10 – tarde

Nome ou identificação: ____

1 – Descreva o que você entende por Topologia.

2 – Para você, quais são os primeiros conceitos geométricos que as crianças aprendem?

3 – Você sabe o que significa dimensão de um espaço? Dê exemplos de espaços com diferentes tipos de dimensão.

Após a aplicação do questionário, houve a exposição de propriedades trabalhadas na Topologia; noções de perto/longe, dentro/fora, conexo/desconexo, vizinhança, fronteira, entre outras, foram destacadas como propriedades trabalhadas na Educação Básica e que fazem parte da Topologia.

Nesse encontro, fez-se uso de vários materiais como bexiga, massa de modelar, borracha, com o objetivo de mostrar que as propriedades topológicas são preservadas quando os objetos são submetidos a transformações contínuas.

Também foram realizadas atividades que trabalharam com a orientação de superfícies. Para isso, foi sugerida a confecção com papel de parte de um cilindro e da Faixa de Möbius.

A atividade proposta aos professores consistia em tomar uma folha de papel e colar os lados opostos, assim como está expresso na figura a seguir. Como consequência, a atividade resultaria em uma representação de parte de um cilindro.

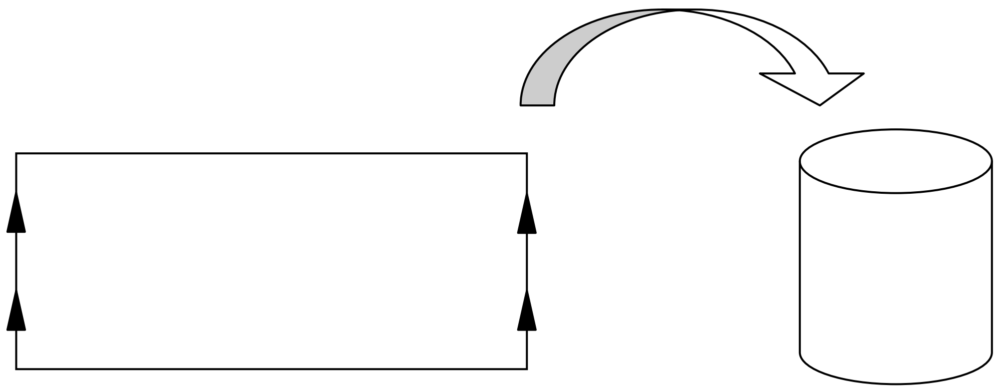


Figura 2: Construção de parte de um cilindro
Fonte: A autora.

Confecção da Faixa de Möbius

Um modelo para a faixa de Möbius pode ser construído ao se fazer uma rotação de 180º graus em um retângulo de papel e identificam-se os lados opostos, como sugere a figura a seguir.

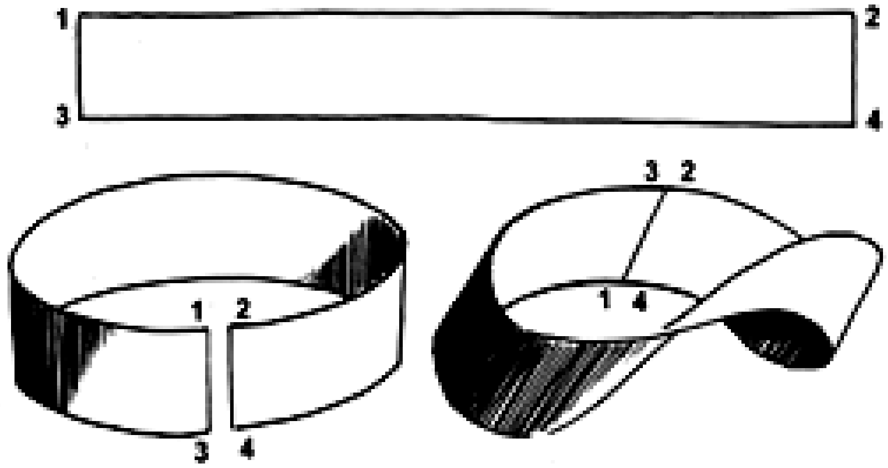


Figura 3: Construção da Faixa de Möbius
Fonte: http://multiplosdearte.wordpress.com/2012/03/08/homenagem-a-lygia-clark/

Pediu-se aos professores que, com o auxílio de uma caneta, marcassem um ponto em ambas as superfícies (cilindro e faixa de Möbius) e o contornassem até chegarem ao ponto inicial. A intenção da atividade foi fazer com que os participantes percebessem que na faixa de Möbius a caneta percorre toda a superfície, não há distinção entre interior e exterior, o que não ocorre no cilindro. Nessa atividade, também foram trabalhadas questões acerca de orientação de superfícies e possibilidades de confecções de novas superfícies mediante recortes feitos no cilindro e na faixa de Möbius.

Outras atividades topológicas foram propostas nesse encontro:

i) Como o problema das pontes de Königsberg (Teoria de Grafos):

O Problema das Pontes de Königsberg No século XVIII, havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel. Os moradores de Köenigsberg (hoje Kaliningrad, cidade da Rússia) se perguntavam se era possível fazer um passeio pela cidade passando exatamente uma vez em cada uma das sete pontes. Você consegue traçar um caminho para tal problema?

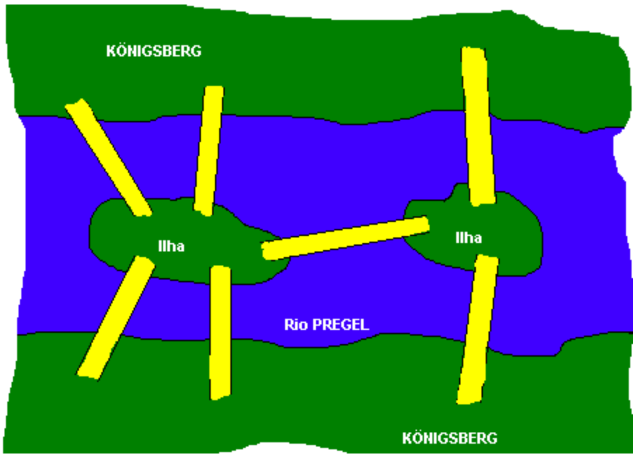


Figura 4: Modelo do Problema da Pontes de Königsberg
Fonte: http://users.prof2000.pt/agnelo/grafos/pontesh.htm

ii) E o problema das quatro cores[32]:

> De acordo com as regras do Jogo das Quatro Cores, em uma de suas primeiras modalidades, o jogador deve pintar uma figura que lhe será apresentada, subdividida em regiões, utilizando somente quatro cores, sem que regiões vizinhas sejam pintadas da mesma cor. Essa modalidade é conhecida como Colorindo Figuras Individualmente (SILVA E ORTEGA apud SANTOS, 2009, p. 43).

“Todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes?".

Outra atividade proposta nesse encontro tratou de questões de dimensão e consistiu em imaginar o mundo de seres planos que viviam em um espaço no qual a forma deveria ser identificada por meio da análise do movimento dos habitantes desse planeta.

Tais atividades foram adaptadas do livro “Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores” de Sampaio (2008), e

[32] O Jogo das Quatro Cores foi criado em 1852, por Francis Guthrie, que percebeu que a maioria dos mapas dos atlas era pintada com quatro cores, respeitando-se o critério de não pintar dois países vizinhos com a mesma cor. Mais tarde, grandes matemáticos como Augustus De Morgan e Arthur Cayley, além de outros inúmeros matemáticos, tentariam demonstrar essa afirmação; no entanto, apesar dos esforços, o que se conseguiu foram resultados parciais de tal demonstração. Em 1976, a demonstração é realizada por via computacional. "O método da demonstração envolve o exame de 1936 configurações redutíveis, cada uma envolvendo, por sua vez, o estudo de até meio milhão de opções lógicas para verificar a redutibilidade" (EVES, 2008, p.689). Ainda de acordo com Eves, foram necessárias mais de mil horas de cálculos computacionais para que se concluísse a demonstração.

tinham por objetivo identificar nos professores a capacidade de interpretação de como podem ser representados alguns espaços tridimensionais, observando-os segundo um ponto de vista bidimensional.

A primeira parte da atividade tinha por enunciado.

Alguns cientistas de um planeta chamado Planolândia, portanto bidimensionais, tais como o Hum Quadrado, o Hum Triângulo e o Hum Círculo, resolveram conhecer melhor o mundo em que viviam. Para isso, organizaram uma expedição científica.

Durante a expedição, os habitantes de Planolândia deixavam por onde passavam uma marca com tinta vermelha. Ao fim da expedição, qual não foi a surpresa dos planolandenses quando, ao olharem para o chão, viram marcado nele o ponto inicial por onde haviam começado a expedição.

Quais são as possíveis formas desse planeta?

Os cursistas sugeriram a esfera, entre outras superfícies, que correspondia corretamente ao que pedia a atividade.

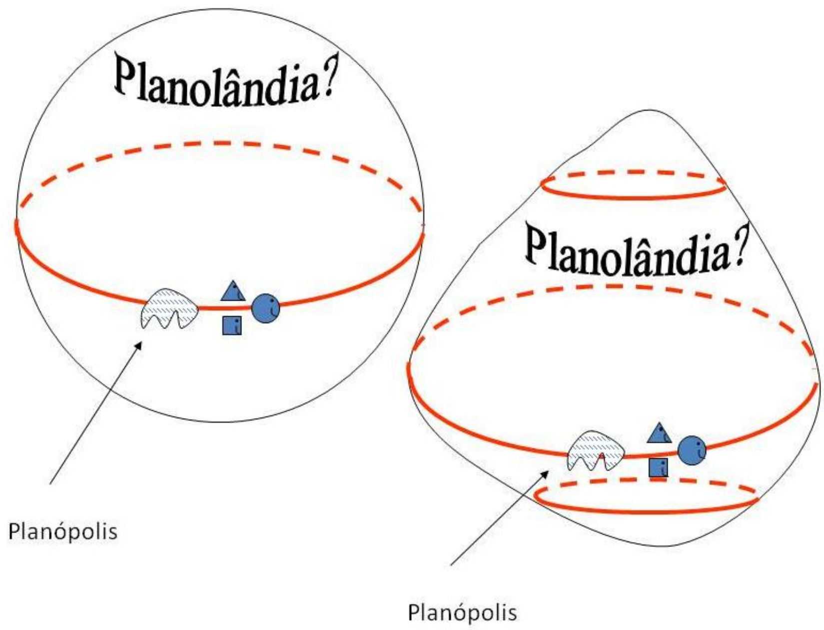


Figura 5: A primeira expedição em Planolândia
Fonte: Curso Geometrias Não Euclidianas.

A segunda parte da atividade, que não foi facilmente compreendida, teve o seguinte enunciado:

Em uma nova expedição científica, os mesmos cientistas resolveram fazer uma nova rota. Ao invés de percorrer o sentido oeste-leste, caminharam no sentido sul-norte. Deixaram agora uma marca verde.

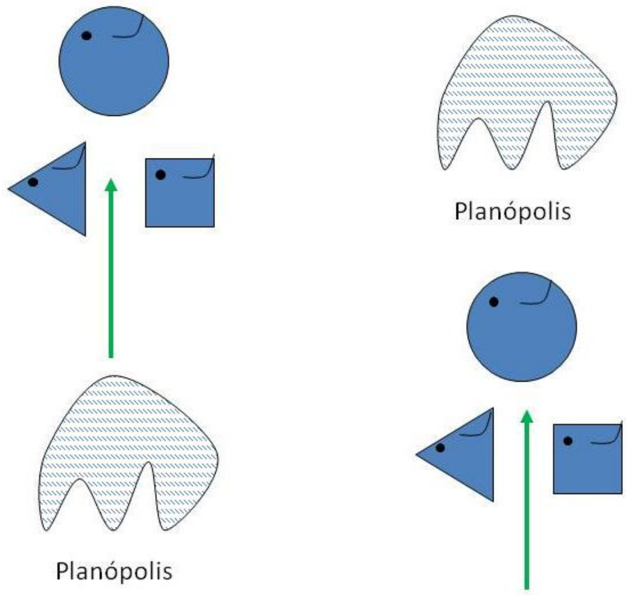


Figura 6: A segunda expedição em Planolândia
Fonte: Curso Geometrias Não Euclidianas.

Após esse retorno, eles observaram que não haviam cruzado a linha vermelha nenhuma vez, ou seja, o único lugar de cruzamento das linhas vermelha e verde foi no início do percurso. E agora? Quais são as possíveis formas desse planeta?

Para essa segunda parte da atividade, o exemplo da esfera não mais satisfaria[33] as condições do problema, uma vez que ao viajarem no sentido leste-oeste os habitantes de Planolândia cruzariam em dois pontos distintos o primeiro caminho percorrido.

[33] Uma possível superfície que satisfaz tal problema é o Toro (superfície que se parece com uma rosquinha), nela é possível percorrer dois caminhos e ter os planolandenses se encontrando apenas no ponto de saída.

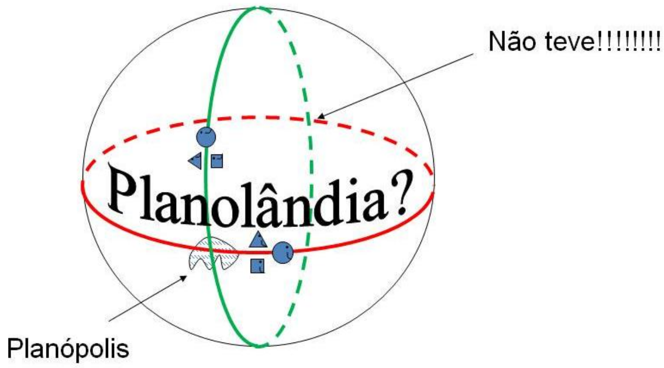


Figura 7: O caso da esfera
Fonte: Curso Geometrias Não Euclidianas.

As discussões que surgiram dessas atividades permitiram analisar algumas das dificuldades apresentadas pelos professores quanto a conceitos de dimensão de um espaço.

2º dia – manhã

Iniciou-se com a entrega do questionário a seguir.

Questionário 3 – dia 20/09/10 - manhã

Nome ou identificação: ____

1 – Após o primeiro encontro do curso, você modificou o seu conceito sobre Geometria Euclidiana? Descreva o que você entende por Geometria Euclidiana.

2 – Foram citados no primeiro encontro alguns postulados de Euclides. Cite os que você se lembra.

3 – A Geometria Espacial e a Geometria Analítica trabalhadas na Educação Básica são geometrias não Euclidianas? Por quê?

4 – Quando estamos em uma estrada reta, temos a impressão de que as laterais da estrada se encontram em um ponto mais distante dos nossos olhos. Um aluno curioso, atento a sua aula na qual você introduzia o conceito de retas paralelas, perguntou se as duas retas paralelas (representadas pelas laterais da estrada) se encontram no infinito. O que você diria a esse aluno e como explicaria isso a ele?

O primeiro período do segundo dia foi destinado ao trabalho com a Geometria Projetiva. O professor apresentou a relação entre a matemática e arte e discursou sobre a utilização de técnicas projetivas usadas por vários artistas.

Nessa parte do curso, levantou-se a discussão sobre a possibilidade de existirem retas paralelas na Geometria Projetiva. Percebeu-se, em especial, que os cursistas ao elaborarem tal ideia da não existência de retas paralelas[34] confundiam frequentemente essa relação com a de que as retas paralelas se encontravam em tal geometria. Essa concepção foi várias vezes afirmada pelos professores participantes, mesmo tendo o professor ministrante enfatizado que na Geometria Projetiva não existiriam retas paralelas.

Foram apresentados, nesse encontro, alguns conceitos como ponto de fuga, linha do horizonte, proporção e perspectiva – tais conceitos são sugeridos pelas DCE para trabalho em sala de aula, no que concerne ao tópico Noções de Geometria Projetiva.

O professor apresentou algumas figuras que deveriam ser desenhadas pelos cursistas, nas quais deveriam ser levados em consideração as proporções. Primeiramente, foram apresentados desenhos de figuras simples bidimensionais e depois figuras mais complexas tridimensionais.

2º dia – tarde

Depois de concluído o trabalho com Geometria Projetiva, desejou-se saber o que realmente os professores teriam compreendido sobre retas paralelas, e com esse intuito foi aplicado o Questionário 4.

Questionário 4 – dia 20/09/10 – Tarde
Nome ou identificação:____
Afinal, as retas paralelas se encontram no infinito? Explique.

[34] É importante salientar que na Geometria Projetiva acrescenta-se um ponto para cada direção de reta, denominado Ponto Impróprio, ou Ponto no Infinito ou ainda, na arte, Ponto de Fuga. Sendo assim, cada feixe de retas paralelas associa-se esse ponto. Dessa forma, nessa geometria, não existem, idealmente, retas paralelas.

Após a aplicação do questionário 4, foram trabalhados alguns conceitos matemáticos da Geometria Projetiva. Com a utilização do software Geogebra, foram apresentados o conceito de dualidade e alguns teoremas da Geometria Projetiva. Nesse momento, não houve a preocupação com a apresentação de demonstrações

Em seguida, foram apresentadas situações-problemas, cujas resoluções utilizaram os resultados apresentados anteriormente.

Um dos problemas propostos foi o seguinte:

Como encontrar o ponto ***I*** de interseção de duas retas ***p*** e ***q***, sendo que no caminho da reta ***p*** existe uma colina?.

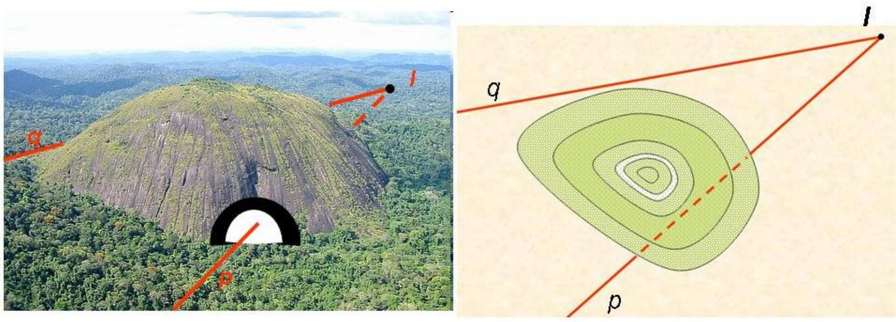


Figura 8: Como encontrar o ponto I?
Fonte: Curso Geometrias Não Euclidianas.

As soluções foram realizadas no software GeoGebra.

3º dia – manhã

Iniciou-se com a entrega do questionário 5.

Questionário 5 – dia 27/09/10 – manhã

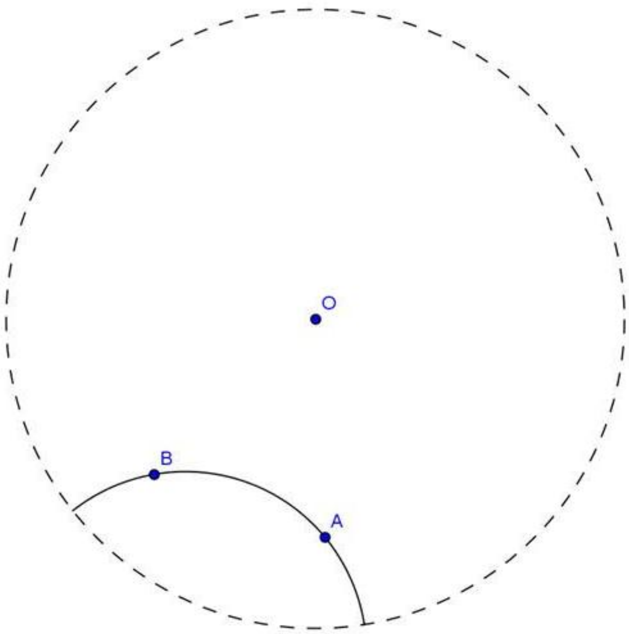
Nome ou identificação: ____

1 – Para que serve os postulados na Geometria Euclidiana?

2 – Cite pelo menos um resultado que diferencie a Geometria Euclidiana da Geometria Projetiva.

3 – O motorista do carro, atrás da seta da figura a seguir recebeu a seguinte instrução: *Para que você chegue ao destino* (bolinha na figura), *basta que você siga reto*. Nesse caso, o que significa seguir reto para você? Comente e faça um esboço de sua resposta.

4 – Em um dos modelos da Geometria Hiperbólica, a reta é representada como o arco que passa pelos pontos A e B da figura a seguir. É possível introduzir uma maneira de calcular a distância entre dois pontos de tal forma que a reta seja infinita. Essa afirmação é aceitável? Por quê?



5 – Em Geometria Espacial, você provavelmente estudou a Geometria da Superfície Esférica. Vivemos em um planeta que é aproximadamente esférico.

a) Desenhe no verso desta folha uma esfera;
b) Desenhe uma reta na sua superfície.

6 – Hoje em dia, muito se fala dos Fractais; escreva o que você já ouviu falar sobre eles.

Após o recolhimento do questionário, o professor fez uma série de demonstrações que tinham como uma das premissas a negação do quinto postulado de Euclides. Admitiu-se como verdade em lugar desse postulado a afirmação "Dada uma reta e um ponto fora dela existem mais de uma reta paralela à reta dada, que passa por este ponto". Foram demonstrados vários resultados que se originavam dessa nova sequência de axiomas e que permitiam construir outra geometria diferente da Euclidiana, que também se sustenta logicamente.

Apresentou-se, então, a Geometria Hiperbólica e alguns modelos matemáticos para planos, como o modelo de Félix Klein e o modelo do Disco de Poincaré. Fez-se uso, nesse momento, dos softwares de Geometrias Dinâmicas Geogebra e Cabri para a realização de construções nessa geometria, como, por exemplo, construções de triângulos, nos quais foi possível a verificação de questões como a da soma interna dos ângulos em um triângulo hiperbólico.

Em seguida, foram distribuídas cornetas e fitas adesivas coloridas e sugeriu-se a seguinte atividade.

Construir com as fitas adesivas triângulos na superfície da corneta e então com o auxílio de um transferidor móvel[35] calcular as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

[35] O transferidor móvel foi construído fazendo uma cópia xérox do transferidor de acrílico no sulfite.

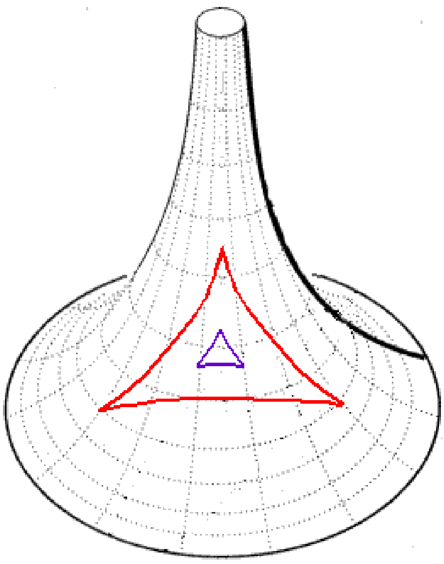


Figura 9: Sugestão de atividade, minicurso Geometrias Não Euclidianas
Fonte: http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm

Trabalhou-se ainda como calcular distância entre dois pontos no plano de Poincaré.

3º dia – tarde

Iniciou-se com a entrega do questionário 6.

Questionário 6 – dia 27/09/10 – final
Nome ou identificação: ____
1 – Terminou o curso. O que ficou?

O último questionário tem um objetivo mais didático; pois se pretendeu fazer uma avaliação do curso oferecido, por esse motivo, tal questionário não será considerado para análise neste trabalho.

Esse último encontro teve como objetivo apresentar e realizar atividades nas geometrias Esférica e Fractal.

O professor docente explicou que na superfície da esfera, as retas são as circunferências máximas, ou seja, aquelas cujo centro coincide com o centro da esfera. Nesse momento foi solicitado aos cursistas que pegassem uma bola de isopor, alfinetes e linha[36].

A primeira atividade consistia em inserir dois alfinetes na bola e com a linha amarrada em cada alfinete, demarcar o menor trajeto entre os dois pontos determinados pelos alfinetes. O objetivo dessa atividade foi fazer com que os cursistas compreendessem a ideia de reta na superfície Esférica.

Também foram instigados a desenhar triângulos nessa superfície, onde os lados do triângulo fossem representados por retas dessa superfície, e realizar o cálculo da soma das medidas dos seus ângulos internos. Puderam, com essa atividade, perceber que nessa superfície a soma dos ângulos internos de um triângulo é superior a 180º.

O professor docente alertou os cursistas de que o planeta Terra possui uma forma muito parecida com a superfície esférica, e que por esse motivo a Geometria Euclidiana é válida localmente, já para grandes distâncias é preciso que se faça uso de outra geometria.

Outra atividade aplicada no curso foi o problema do urso.

Problema do urso

Um urso saiu de sua casa e caminhou 30 km ao sul. Depois, virou a oeste e caminhou por mais 30 km. Então, virou novamente e caminhou por mais 30 km ao norte. Qual não foi sua surpresa quando descobriu que voltara novamente a sua casa.

Questão 1: Esboce o percurso do urso. A que conclusão vocês chegaram?

Questão 2: É possível o urso chegar ao mesmo lugar da partida, conforme o enunciado do problema?

[36] Nos encontros, era entregue uma lista com materiais que seriam necessários para o próximo encontro. Houve também apoio do Núcleo Regional de Ensino, que "lembrava", via e-mail, os professores do material que deveria ser levado ao próximo encontro.

Os professores, depois de um tempo, compreenderam que esse percurso não seria possível no plano euclidiano, e que se a localização inicial do urso for um dos polos em uma superfície esférica, o problema tem solução.

Foram destacadas ainda algumas propriedades dessa geometria, dentre elas:

Duas retas distintas, perpendiculares a uma terceira, se interceptam, o que acarreta afirmar que nessa superfície não há retas paralelas.

Em seguida, iniciou-se o trabalho com Geometria Fractal. Com o auxílio de softwares, o professor exemplificou o que seria um fractal e construiu: a Curva de Peano, a Curva de Koch, e o Triângulo de Sierpinsk. A seguir, descreve-se a construção do fractal, conhecido como Curva de Koch.

Curva de Koch

1. Inicia-se com um segmento de reta;

2. Divida esse segmento em três outros segmentos, de forma que todos eles tenham a mesma medida.

3. O segmento central deverá ser substituído por outros dois segmentos congruentes de modo a formar um triângulo eqüilátero. Apague a base desse triângulo.

4. Proceda da mesma forma para cada um dos quatro segmentos que resultaram do passo 3.

A curva de Koch consiste do limite para o qual tende essa construção ao se repetir indefinidamente os passos citados para cada segmento.

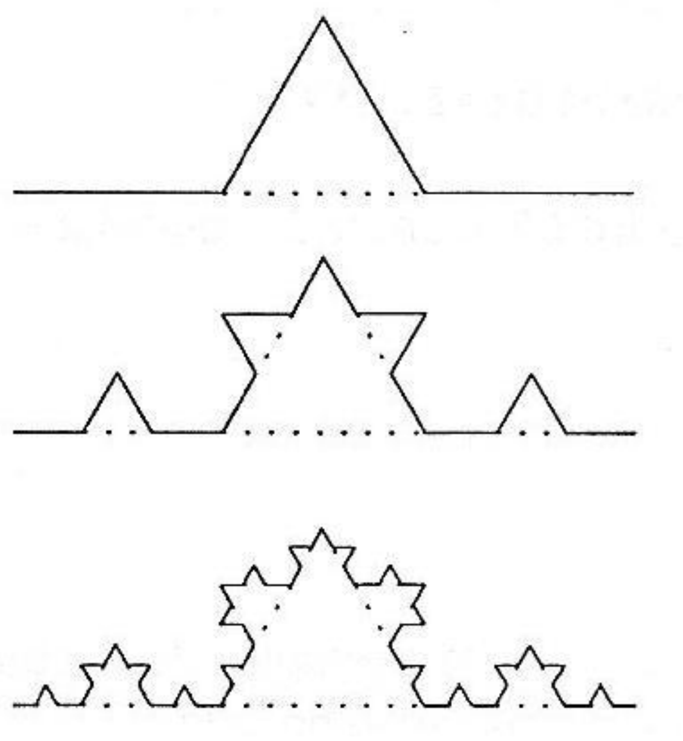


Figura 10: Curva de Koch
Fonte: http://fractais-mat-unisc.blogspot.com.br/2010/01/curva-de-koch.html

O processo acima pode ser feito em um triangulo equilátero e resultará então em uma figura denominada Floco de Neve de Koch. Veja a figura abaixo

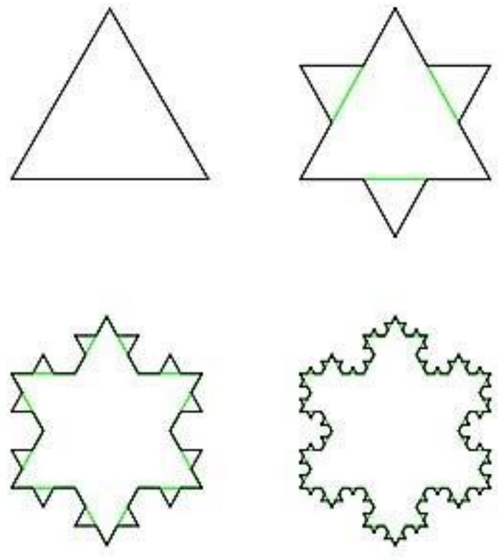


Figura 11: Floco de Neve de Koch
Fonte: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=444

Discutiu-se ainda a medida do perímetro de alguns dos fractais construídos e a vantagem que se tem em estudar a parte de um fractal, já que a parte se assemelha ao todo.

No encerramento do curso, foi proposta a construção de um fractal por meio de recortes e dobraduras em papel sulfite, atividade conhecida como Cartão Fractal.

2.3 Os questionários

Os questionários recebiam uma identificação do cursista, que não precisava ser necessariamente o nome, já que isto poderia inibir o entrevistado, o que não era o objetivo.

Para a organização do material, buscou-se organizar os questionários de maneira que todos os questionários de um mesmo cursista fossem reunidos em um único grupo, denominado 'bloco'.

Foi feita uma seleção para definir os blocos que seriam analisados. A escolha se deu mediante o critério de sua completude, ou seja, foram analisados os blocos que tinham “todos” os questionários de um determinado professor participante da pesquisa.

O fato de os questionários serem aplicados sempre antes do início das atividades resultou em se ter alguns blocos incompletos, pois o atraso do professor acarretava a não-entrega do questionário correspondente ao período.

Outro problema que foi enfrentado quanto à organização e montagem dos blocos se deu devido ao fato de que alguns cursistas não inseriram nenhuma identificação nos questionários, o que tornou impossível a sua classificação.

Os blocos que não estavam completos foram retirados da análise, restando um total de 27 (vinte e sete) blocos para os quais serão descritos, nas próximas seções, as conclusões obtidas.

Além dos questionários, foram realizadas filmagens[37] durante a apresentação do curso, que servirão também como base para análise da pesquisa.

O vídeo não será considerado como a fonte mais expressiva desta pesquisa, mas contém declarações de dúvidas quanto ao conhecimento geométrico, portanto terá suas partes consideradas fundamentais transcritas e analisadas.

Seguindo as orientações de Bauer e Aarts (2008), não serão misturadas as análises dos textos escritos (questionários) e as análises das transcrições das filmagens. Sempre que houver alguma interseção entre os resultados das análises, a autora inferirá, deixando evidente tal interseção.

2.4 Caracterização dos Sujeitos da Pesquisa

Os professores apresentaram uma grande divergência quanto à idade e ano de formação.

Uma semelhança detectada entre os sujeitos da pesquisa se refere ao campo de atuação: dos professores pesquisados, a maioria trabalhou ou trabalha com o Ensino Fundamental.

O gráfico abaixo expressa a formação dos sujeitos da pesquisa.

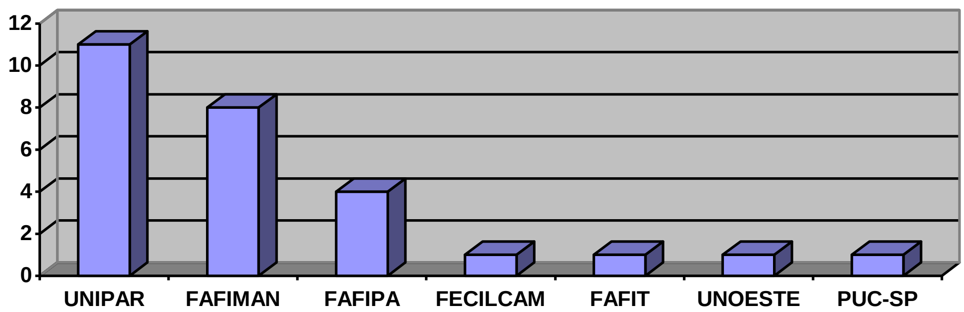


Gráfico 1: Formação Acadêmica
Fonte: Dados da Pesquisa.

[37] As filmagens foram autorizadas pelos participantes da pesquisa, e para sua utilização a autora seguirá normas de ética quanto sua exposição.

A análise do gráfico que caracteriza a formação dos professores mostra um número expressivo de professores formados na Unipar (Universidade Paranaense), e Fafiman (Faculdade de Filosofia e Letras de Mandaguari). Ainda dentre os entrevistados, encontram-se professores formados na Fafipa (Faculdade Estadual de Educação Ciências e Letras de Paranavaí), Fecilcam[38] (Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão), Fafit (Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Tupã), Unoeste (Universidade do Oeste Paulista) e PUC-SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Com relação ao ano de formação, obteve-se um índice maior de professores formados no período de 2000 a 2004, como mostra o gráfico 2.

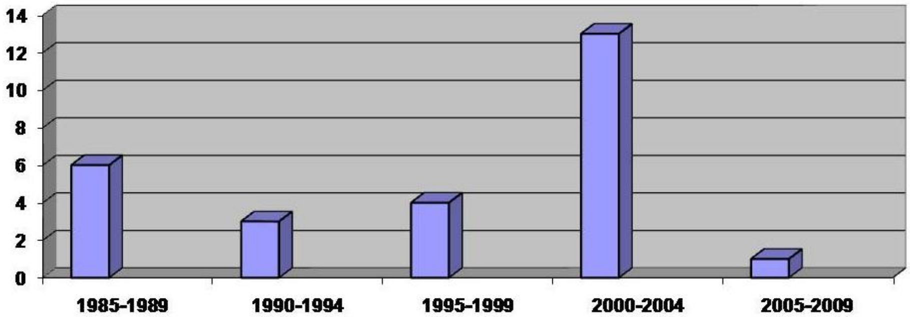


Gráfico 2 : Ano de Formação
Fonte: Dados da Pesquisa.

Quanto à atuação dos professores, foram considerados quatro níveis de ensino, a saber: Ensino Fundamental, Médio, Superior e EJA (Educação de Jovens e Adultos). Os professores responderam de acordo com suas experiências ao longo dos anos, podendo haver interseções nas respostas.

A seguir, apresenta-se o gráfico com base nos dados coletados.

---

[38] As faculdades Fecilcam e Fafipa passaram a fazer parte, a partir de 2011, de uma unificação das chamadas "faculdades isoladas", recebendo nova denominação UEPR (Universidade Estadual do Paraná). Todavia, as antigas nomenclaturas foram mantidas, uma vez que os professores participantes da pesquisa assim as denominaram.

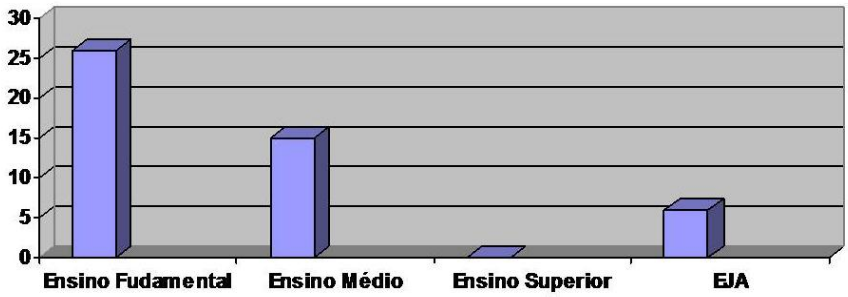


Gráfico 3 : Atuação Profissional
Fonte: Dados da Pesquisa.

A maioria dos professores já atuou ou ainda atua no Ensino Fundamental; em contraste, nenhum dos professores participantes da pesquisa atuou ou atua no Ensino Superior.

2.5 Análise dos Dados Coletados

> Uma análise textual qualitativa, voltada à produção de compreensões aprofundadas e criativas, requer um envolvimento intenso com as informações do *corpus*[39] da análise. Exige uma impregnação aprofundada com os elementos do processo analítico. Somente essa impregnação intensa possibilita uma leitura válida e pertinente dos documentos analisados (MORAES, 2003, p. 196).

Quanto ao método de tratamento dos dados, a pesquisa usa como metodologia a análise de conteúdo, tendo como referência Bardin (1977).

Segundo Moraes:

> Essa metodologia de pesquisa faz parte de uma busca teórica e prática [...] constitui-se em bem mais do que uma simples técnica de análise de dados, representando uma abordagem metodológica com características e possibilidades próprias (MORAES, 1999, p. 9).

Bardin define a análise de conteúdo como:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis indefinidas) destas mensagens (BARDIN, 1977, p. 33).

[39] Entende-se por *corpus* o conjunto de documentos que será analisado na pesquisa.

Trata-se de uma metodologia na qual as mensagens obscuras, mensagem com duplo sentido e a omissão são analisadas e podem ser interpretadas. Por trás do discurso aparente, geralmente simbólico e polissêmico, esconde-se um sentido que convém desvendar (BARDIN, 1977).

Essa metodologia se organiza em três passos, a saber:

- Pré-análise: consiste basicamente na organização do material.
- Exploração do material: são consideradas nesse passo três etapas; a escolha das unidades de contagem, a seleção das regras de contagem e a escolha de categorias.
- Tratamento dos resultados: inferência e interpretação.

2.5.1 A Pré-Analise

Em posse dos dados da coleta da pesquisa, iniciou-se então o primeiro passo determinado por Bardin.

Para a organização do material, efetuaram-se as transcrições das filmagens[40] e buscou-se organizar os questionários de forma que todos os questionários de um mesmo professor fossem reunidos em um único grupo, denominado bloco. Assim, de cada professor resultou um total de 6 (seis) questionários.

Os blocos foram nominados aleatoriamente, recebendo o nome de Professor 1, Professor 2 e sucessivamente. Nas transcrições dos questionários P1, sempre se referirá ao questionário do Professor 1.

Para as transcrições das filmagens, determinaram-se alguns padrões que indicarão na transcrição de quem é a fala; assim, MS representará o professor Ministrante do Curso, já as siglas P1, P2, e assim sucessivamente, indicarão os professores que participam das discussões e que contribuem para detectar a dificuldade em questão. Sempre se tomará o cuidado de, em cada diálogo, representar o mesmo professor pela mesma sigla adotada,

[40] Foram transcritas as partes consideradas relevantes para a pesquisa.

ressaltando, contudo, que a nomenclatura P1 não necessariamente representa o Professor 1 (nomenclatura adotada na análise dos questionários), e nem mesmo que o P1 de um determinado diálogo represente o P1 de outro. Adotar-se-á também a nomenclatura VS para indicar que vários professores responderam a mesma questão ao mesmo tempo.

Várias vezes durante as transcrições, apesar de se ter o registro de áudio de algumas falas, não se tem o registro em vídeo pelo fato de que a sala onde foi ministrado o curso ter o espaço físico grande, o que fez com que a filmadora nem sempre pudesse captar todas as imagens. Nesses casos, é possível transcrever as falas sem, no entanto, poder identificar o dono da mesma; nesse caso denotar-se-á apenas pela letra P.

As reticências (...) significarão falas que não contribuem para a análise da dificuldade em questão, podendo denotar falas que não foram possíveis de serem transcritas ou conversas entre os cursistas.

Em algumas ocasiões, houve a intervenção da pesquisadora, e tais intervenções serão denotadas por PS.

Para caracterizar as questões de cada questionário, será dada uma notação especial, na qual será usado um par ordenado; o primeiro termo fará referência ao número do questionário e o segundo termo ao número da questão: assim (2,4) se refere ao questionário dois e a pergunta quatro desse questionário.

Com o material organizado, passou-se ao segundo passo, à “exploração”.

2.5.2 A Exploração do Material

a) A escolha das unidades de contagem

Com um total de 162 questionários e algumas horas de filmagem, obteve-se um *Corpus* considerável para análise das questões da pesquisa. Foram obtidas várias unidades de contagem que serão consideradas para conclusão das análises; tais unidades serão apresentadas no decorrer do trabalho.

b) Seleção das regras de contagem

Para cada questão dos questionários será feita uma leitura flutuante e a apresentação das unidades de significação, daí então apresentar-se-ão as categorias.

Terão relevância para o estudo em questão:

A ausência de respostas, que serão analisadas e podem significar bloqueios ou falta de conhecimento no assunto.

A frequência de unidades de registros, entendendo por unidade de registro a unidade de significação a codificar, de acordo com Bardin (1977).

A co-ocorrência, que é a presença simultânea de duas ou mais unidades de registros, e poderá significar relação entre essas unidades.

c) A escolha de categorias

Com o decorrer do curso, leituras dos questionários e transcrições percebeu-se que as dificuldades sempre estavam relacionadas a dois fatores distintos. Essas dificuldades foram classificadas como segue:

- Falta de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana, o que impediu uma evolução mais efetiva dos conteúdos que deveriam ser explorados no curso.

- Dificuldades em aceitar resultados das Geometrias não Euclidianas, principalmente aqueles que contradizem a geometria de Euclides.

A respeito dessas duas categorias, foi possível distingui-las a partir de um estudo das dificuldades mais recorrentes apresentadas pelos professores. Esse estudo se deu da seguinte forma: análise dos questionários e das filmagens, em que se destacaram as dúvidas mais frequentes que surgiram no decorrer do curso, classificação das dificuldades em grupos de semelhanças, distinção das categorias que se originaram dos grupos de semelhanças.

2.5.3 Tratamento dos Resultados: Inferência e Interpretação

Cada questão e suas respectivas unidades de análises serão seguidas por uma subseção intitulada inferências parciais. Essas inferências terão embasamento na análise das unidades da questão discutida. Ao fim de todas as questões há uma seção denominada "Categorização das Dificuldades" na qual se estabelecem as relações entre as várias inferências parciais das questões analisadas e a classificação gerada por essas análises.

SEÇÃO 3

ANÁLISES DOS QUESTIONÁRIOS

3.1 Questionário 1

(1,1) Descreva o que você entende por Geometria Euclidiana

A geometria ensinada na escola.

P2 Acho que entendo o básico e necessário para ensinar meus alunos
P8 Geometria Euclidiana é toda geometria que trabalhamos no ensino fundamental e médio.
P9 A Geometria Euclidiana é a geometria que se trabalha no dia a dia da escola
P11 Usada em sala de aula
P16 É a geometria que trabalhamos desde os anos iniciais
P17 É a geometria ...ensinada até então no ensino fundamental
P25 É um conteúdo importante, principalmente para séries iniciais do ensino fundamental.

Insegurança ao descreverem sobre Geometria Euclidiana

P2 Acho que entendo o básico e necessário para ensinar meus alunos
P3 Desconheço o assunto para descrever sobre o mesmo
P6 Não sei vim buscar
P8 Geometria Euclidiana é toda geometria que trabalhamos no ensino fundamental e médio. "Pelo menos é o que eu acho".
P12 Não tenho certeza
P13 Eu acho que a Geometria Euclidiana...
P14 Não tenho certeza então prefiro não estar falando sobre a mesma.
P23 Apesar de gostar do conteúdo de Geometria, ainda faço confusão ao diferenciá-las.

Cálculos.

P1 A geometria que calcula
P8 Geometria Euclidiana é toda geometria que trabalhamos no ensino fundamental e médio. Onde ensinamos: área, perímetro, formas geométricas...
P9 fórmulas, planos, retas, área volume. etc.
P16 as relações métricas
P25 A Geometria Euclidiana estuda as formas geométricas, medidas de áreas e volume

Área do conhecimento que trata de entes geométricos como ponto, reta, plano, e de relações entre esses entes

P4 retas, planos e espaço
P11 ponto, reta, plano
P15 É a geometria que faz estudo de retas, pontos, planos.
P16 trabalha os entes geométricos ponto, reta, plano, etc...
P24 É o estudo das formas geométricas planas e espaciais desde os entes mais elementares: ponto, reta, plano e as relações existentes entre elas.
P27 Na Geometria Euclidiana estuda-se basicamente as retas, pontos em um determinado plano, ressaltando postulados defendido por Euclides na Antiga Grécia

Geometria usada no dia a dia

P7 ... é a geometria que busca relacionar as formas com os meios que nos cerca
P11 A geometria usada no dia a dia...
P25 É um conteúdo importante, principalmente para séries iniciais do ensino fundamental, pois está presente no nosso dia-a-dia.

Geometria trabalhada na terceira dimensão

P1: A geometria que calcula (desenha) os sólidos em terceira dimensão.

P11: Geometria Espacial: Infinito.

P13: ...se refere à Geometria Analítica e Espacial.

P21: Geometria em terceira dimensão. Exemplo (x,y,z).

P22: São as geometrias que trabalho no gráfico (ordenada, abscissa e eixo z) onde trabalho a terceira dimensão.

P26: É o estudo de figuras geométricas, sólidos geométricos.

Inferências Parciais, questão (1,1)

Antes de iniciar as analises, é preciso especificar o que se considera como geometria Euclidiana, entendendo-a como a geometria construída por Euclides em sua obra *Elementos*, a qual se utilizou de catorze afirmações iniciais denominadas axiomas e postulados, diferenciando os termos de acordo com o teor de cada afirmação. Ressalto ainda que nessa obra alguns elementos não são construídos de uma maneira formal, como a linha filosófica Formalista exigia. Desta forma, Hilbert (???) re-escreve os *Elementos* de uma maneira formal, por meio de axiomas e conceitos primitivos, axiomatizando muitos dos conceitos que haviam anteriormente sido apenas definidos por Euclides como o conceito de ponto, reta e plano.

Qualquer geometria que não utiliza um ou mais desses postulados de Euclides é denominada de Geometria não Euclidiana.

Ao analisar as respostas, percebe-se um grande número de relatos que indicam insegurança quanto a definir o que seria Geometria Euclidiana.

Merecem destaque as respostas classificadas nas categorias “A Geometria ensinada na escola” e “Insegurança”. Pode-se inferir que os fragmentos colocados nessas duas categorias (15 no total) mostram a ligação entre os vestígios do ensino da Geometria escolar e a insegurança trazida por essas poucas lembranças. Outro fator que pode colaborar com a ligação entre essas duas unidades de contagem se trata da geometria ensinada na graduação e o sentimento de despreparo do professor frente ao ensino desse conteúdo.

O fato de haver apenas três fragmentos de discurso classificados na categoria “Geometria usada no dia-a-dia" salienta a inferência de que os professores parecem não fazer relação do cotidiano com os conteúdos de geometria; talvez os conteúdos (ou a falta deles) apresentados em sala de aula durante o trabalho conduzido pelos professores de matemática possam ser citados como contribuintes para tal distanciamento da geometria do dia-a-dia dos entrevistados.

Com base nas respostas, infere-se que a maneira com que a geometria foi ensinada para esse grupo de entrevistados não foi suficientemente significativa para eles.

Segundo Barbosa (1997), a geometria pode ser entendida como um jogo, de onde se parte com “um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas” (BARBOSA, 1997, p. 11). Não foge a essa “definição” a Geometria Euclidiana, com o único cuidado de compreender as regras básicas como sendo os postulados de Euclides.

Os fragmentos classificados na categoria “Área do conhecimento” permitem inferir que para esses seis entrevistados a geometria que eles estudaram talvez possa ser vista apenas como o tal “jogo” descrito por Barbosa (1997). Provavelmente, os entrevistados cujos fragmentos de discurso estão classificados como “Área de conhecimento” se lembrem de que os tópicos de geometria ministrados pelos seus professores de matemática continham relações entre objetos do mundo geométrico que não apresentavam significação para suas vivências do dia-a-dia.

De acordo com Barros, Franco e Gerônimo (2010), a Geometria Euclidiana é um conjunto de conclusões lógicas obtidas de certo conjunto de axiomas iniciais.

Dentre as respostas obtidas para a questão (1,1), encontrou-se uma única resposta que faz uma associação entre Geometria Euclidiana e sistema axiomático. A resposta foi dada pelo professor 27:

P27- "Na Geometria Euclidiana estuda-se basicamente as retas, pontos em um determinado plano, ressaltando postulados defendido por Euclides na Antiga Grécia".

Apesar de o professor cometer um pequeno equívoco ao apresentar ponto vinculado estritamente ao conceito de plano, uma característica especial na resposta dada está no fato que a palavra postulado é citada, diferentemente do que acontece com as outras 26 (vinte e seis) respostas, o que permite inferir que o professor em questão, mesmo sem elaborar consistentemente a resposta, compreende haver uma relação estabelecida entre os postulados de Euclides e a geometria estruturada por ele.

Nas demais respostas, não foi verificado, o uso de termos que permitem inferir ser a Geometria de Euclides, advinda de conclusões lógicas, como sugerem os autores citados. Todavia, há um grupo de respostas que admitem a possibilidade de ser a Geometria Euclidiana obtida a partir de "construções" ou relações de entes geométricos denominados pelo *professor 24* como *"entes mais elementares".*

Outra interessante análise que pode ser feita com base nos dados coletados da questão (1,1) se refere às respostas dadas pelo grupo, ao qual caracterizou *Geometria trabalhada na terceira dimensão*. São dois os pontos a serem considerados na análise desse grupo: a insistência em admitir que a Geometria Euclidiana é desenvolvida na terceira dimensão, sem menção aos outros espaços onde ela (a geometria) pode ser trabalhada, e o uso de termos analíticos (abscissa, eixos, x,y,z) para expressar o espaço tridimensional.

As respostas dadas fazem forte menção ao uso do espaço tridimensional para o desenvolvimento da Geometria Euclidiana, seja por meio explícito do termo "tridimensional", ou por meio do uso do termo "Geometria Espacial". Em ambos os casos, a inferência que pode ser feita é a de que os professores compreendem a Geometria Euclidiana como sendo em muitos casos unicamente a desenvolvida na terceira dimensão; além dessa inferência, há ainda outra que pode ser considerada, a de que os professores compreendem o espaço em que vivem como Euclidiano e por esse motivo consideram o espaço tridimensional como Euclidiano, sem menção de outros espaços.

De acordo com Veloso (2008),

> Eu diria que toda a gente está de acordo que a ida para a escola deveria constituir para as crianças uma abertura a amplos horizontes e novos mundos, inacessíveis nos ambientes familiares habituais. No entanto, no caso da geometria, uma tradição persistente limita as experiências dos jovens, durante muitos anos — porventura todo o ensino básico, e portanto, toda a vida para quase todos — a meia dúzia de figuras planas e a meia dúzia dos chamados "sólidos geométricos" (VELOSO, 2008, p. 18).

Pode-se perceber que não há uma compreensão de que a geometria por ser estabelecida a partir de axiomas, que pode ser usada em espaços de diferentes dimensões, desde que nesse espaço seja possível a validação dos postulados em questão.

Outra característica que ficou evidente ao ser analisado tal grupo se refere ao uso de termos algébricos na explicação do que seria espaço tridimensional, o que fortalece a hipótese de que a Geometria Analítica, por vezes, é utilizada para explicação ou compreensão do que são os entes geométricos. Pelo fato do uso de termos algébricos terem sido identificados também em outras situações, será feita uma análise específica sobre tal uso em outra subseção[41].

Uma forte representação feita pelos professores à geometria de Euclides se refere à associação da Geometria Euclidiana com cálculos de área, volume e perímetro.

Pavanello e Andrade (2002) afirmam que o trabalho com as figuras geométricas e com suas medidas, principalmente as áreas e perímetros, são algumas das poucas noções trabalhadas na escola básica.

Nesse sentido, é possível concluir que como os conteúdos que envolvem métrica são alguns dos poucos ministrados na área de geometria, os professores atribuem a tais conteúdos todo o teor geométrico.

[41] A subseção 4.3.3 tratará do uso de termos algébricos para representação de entes geométricos.

(1,2) Antes de serem incluídas as Geometrias Não Euclidianas nas DCE você sabia da sua existência? Se a resposta for sim, descreva quais geometrias você conhecia ou já tinha ouvido falar.

Afirmam saber da existência:

> *P1 Sim, na faculdade nós vimos vários tipos de geometria.*
> *P3 Sim. Não conhecia mas já tinha ouvido sobre o assunto.*
> *P4 Sim...*
> *P5 Sim...*
> *P6 Sim...*
> *P12 Sim. Durante a faculdade tive contato com as Geometrias não Euclidianas.*
> *P13 Sim...*
> *P16 Ouvi falar pela primeira vez sobre outras Geometrias no PDE*[42] *– UEM em 2007 e também no NRE Itinerante*[43] *no ano passado.*
> *P17 Não tinha conhecimento pelo nome, mas conhecia algumas coisas*
> *P18 Já conhecia da faculdade, mas não lembro.*
> *P21 Já sabia que existia porque a professora na faculdade comentou sobre as Geometrias não Euclidianas, mas nunca aprofundamos nos conteúdos*
> *P22 Já conhecia mas não conseguia separá-las*
> *P25- Sim...*

Afirmam não saber da existência:

> *P2 – P7 – P8 – P9 – P11- P14 – P15 – P23- P26- P27 Não*

---

[42] O PDE é uma política pública de Estado regulamentado pela Lei Complementar nº 130 , de 14 de julho de 2010, que estabelece o diálogo entre os professores do Ensino Superior e os da educação básica através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense.

[43] O NRE Itinerante é um curso de capacitação continuada oferecido pelo Estado e organizado pelos Núcleos Regionais de Ensino aos professores da rede pública do estado; tal curso é oferecido todos os anos com carga horária de 16 h.

P24 Não, para mim as Geometrias não Euclidianas são bastante desconhecida...

Os únicos exemplos de Geometria não Euclidiana apresentados foram:

P 16 Geometria Hiperbólica, Esférica, Topologia, Projetiva, etc.
P 24 ...tive um breve contato com a Geometria Projetiva.
P 25 ... Geometria Projetiva

Inferências Parciais, questão (1,2)

Onze professores alegam não conhecer as Geometrias não Euclidianas, o que vem ao encontro de outras pesquisas (SANTOS, 2009; KALEFF, 2007; LOVIS, 2009) que também apontam a falta de conhecimento do professor no que concerne às Geometrias não Euclidianas.

Note que dos 13 (treze) professores (P1, P3, P4, P5, P6, P12, P13, P16, P17, P18, P21, P22 e P25) que afirmam saber da existência das Geometrias não Euclidianas apenas 2 (dois) (P16 e P25) dão exemplos de tais geometrias. Os demais fragmentos são bem concisos, o que permite inferir que tal conhecimento é muito superficial.

Kaleff, em sua pesquisa realizada com professores, detectou que "aproximadamente 34% declaram '*não saber o que sejam Geometrias Não-Euclidianas'* ou que *"desconhecem outra geometria além da Euclidiana"* (KALEFF, 2007, p. 91).

Os dados desta pesquisa mostram que a situação do grupo de entrevistados não é muito diferente do trabalhado por Kaleff (2007).

(1,3) Você conhece alguma diferença entre os conceitos ou resultados válidos na Geometria Euclidiana que não são válidos nas Geometrias Não-Euclidianas? Mesmo se não tiver certeza dessas diferenças, escreva alguns desses conceitos ou resultados.

Afirmam não saber nenhuma diferença:

P1 Não

P2 Não conheço

P3 Não conheço

P7 Não

P8 Não conheço

P9 Não tenho ideia

P14 Não, prefiro não opinar

P15 Não conheço. Tenho muitas dúvidas

P22 Não

P23 Como não conheço o assunto, tenho muitas dúvidas. Por isso estou aqui, com muita ansiedade

P24 Não

P26 Não

P27 Não

Não responderam:

P5, P6, P10, P11, P19, P25, não responderam a questão entregando o questionário sem essa resposta.

Outras respostas:

P4 Planos geométricos tridimensional, retas, planos e espaço.

P12 Não tenho certeza, mas toda geometria euclidiana é estudada a partir da segunda dimensão.

P13 Eu acho que a geometria euclidiana se refere a Geometria Analítica e espacial.

P16 É a geometria que trabalhamos desde os anos iniciais-que estuda as propriedades das figuras planas (polígonos e não- polígonos) das espaciais (poliedros e corpos redondos), as relações métricas, trabalha os entes geométricos ponto, reta, plano, etc...

P17 É a Geometria que vai até a terceira dimensão ensinada até então no ensino fundamental.

P18 Geometria que trata dos objetos e formas.

Inferências Parciais, questão (1,3):

De acordo com a teoria sobre Análise de Conteúdo, a ausência, o silêncio e a demora em responder podem de certa forma caracterizar falta de conhecimento ou bloqueios. Infere-se que os seis professores P5, P6, P10, P11, P19 e P25 que optaram por deixar a questão em branco apresentam dificuldades em responder à pergunta, essa inferência se confirma ao perceber que 13 professores declaram explicitamente não conhecer diferenças que distingam as geometrias. As respostas de P4, P12, P13, P16, P17, P18 e P21, que apresentaram algum exemplo de diferença entre as geometrias, não puderam ser classificadas em grupos, uma vez que não convergiam para nenhum tipo de unidade de contagem.

A tarde do primeiro dia foi destinada ao trabalho com Topologia, e por esse motivo julgou-se interessante investigar o que os professores conheciam do assunto: com base nisto, elaborou-se o questionário 2.

3.2 Questionário 2

(2,1) Descreva o que você entende por Topologia.

Dúvidas quanto ao que é Topologia:

P3- Não lembro o suficiente para descrever. Desconheço o assunto para descrever sobre o mesmo
P8 - Nada
P10 - Não sei...
P14 - Não lembro...
P20 - Não conheço suficiente.
P24 - Já ouvi esse termo, mas não tenho conhecimento.
P26 - Não sei.

Relação com topografia:

P1 - Ciência que estuda os níveis

P4 - É a ciência que entende a geometria- geo- terra, metria- medida da terra...

P5 - Ciências que estuda a Topologia. A terra e suas formas.

P12 - Ciência que estuda e analisa níveis de solo,

P13 - Que estuda a forma geométrica da terra

P14 - ... tem à ver com algum estudo da terra.

P22 - ...O profissional vai fazer as medições para cortar um terreno

Algum tipo de grandeza ou medida:

P6 - Estudo das dimensões.

P9 - Estuda as medidas...

P10 - ... acredito que é medir.

P12 - ...cálculos de distâncias, entre outros

P15 - Consiste na forma de estudar as formas de medir um determinado espaço.

P17 - É o estudo das medidas

P22 - Ciência de estudo dos tópicos da matemática... medições .

P23 - É uma forma de fazer medições num determinado espaço.

P25 - Estudo de medidas

P27 – Topologia, diferentes formas de fazer medições...

Respostas que trazem alguma propriedade ou definição do que significa Topologia:

P2 - Entendo que seja um estudo de uma Geometria não Euclidiana onde alguns conceitos estudados na Geometria Euclidiana são deixados de lado.

P7 - Topologia estuda as figuras geométricas em suas deformações, sendo chamada também de geometria elástica. Considerando que uma forma geométrica pode ser transformada em outra. Ex: Uma esfera feita *com massa de modelar pode ser transformada em sua deformação em um cubo.*

P16 - Geometria que estuda as propriedades das figuras (superfícies) que não se alteram após transformações. EX: Pontos interiores e exteriores. Geometria elástica

Inferências Parciais, questão (2,1):

É possível perceber, a partir das análises das unidades de contagem, que a grande maioria dos professores desconhece a Topologia. Dos professores que arriscaram dar alguma ideia do que seja Topologia, muitos se remetem aos conceitos usados em topografia, como é possível perceber nas respostas de P1, P4, P5, P12, P13, P14 e P22, identificados no grupo 'Relação com topografia'.

O segundo grupo, denominado 'Algum tipo de grandeza ou medida', no qual se enquadraram 10 fragmentos de respostas, não faz uma relação coerente com o estudo topológico, uma vez que medidas não se referem às preocupações da Topologia.

É possível inferir que os professores em geral desconhecem o assunto ou têm concepções erradas sobre o que se refere à Topologia. Apenas três professores (P2, P7, P16) apresentam coerência em suas respostas.

(2,2) Para você, quais são os primeiros conceitos geométricos que as crianças aprendem?

Conhecimento e distinção de figuras geométricas planas (quadrado, círculo...), e espaciais (esfera e cubo):

P2 - Aprendem a identificar os sólidos na Geometria Espacial e a partir daí as figuras geométricas planas

P3 - As crianças aprendem os conceitos de formas geométricas mais comuns, como quadrado, círculo, triângulo, retângulo e outras.

P4 - A reta o círculo, o quadrado, retângulo, e triangulo, ou esfera, cubo etc

P5 - ... diferentes formatos das figuras.

P6 - Formas geométricas

P7 - A criança, desde sua primeira vivência, antes da escola, tem um contato, com objetos sólidos de diferentes formatos, a partir daí começa a estabelecer relações entre os formatos geométricos dos sólidos, e as figuras planas geométricas.

P8 - As formas geométricas: Círculo, retângulo, quadrado. A reta, o ponto

P9 - ...ideia intuitiva das formas... .

P10 - ...Acredito que os brinquedos em si já apresentam formas geométricas

P12 - ...formas básicas.

P13 - Bola- A esfera, o círculo.

P14 - Nos brinquedos as formas geométricas...

P15 - Os conceitos de formas geométricas (quadrado, retângulo, círculo e triângulo)...

P16 - Acredito que seja o conceito de formas geométricas planas, círculo, retângulo, triangulo, quadrado, etc.

P17 - ...figuras básicas.

P18 - Acredito que elas iniciam pela geometria espacial (sólido geométricos), ou seja, o todo, e em seguida estudam as formas geométricas planas, vendo os elementos fundamentais da geometria.

P19 - Elas aprendem as figuras geométricas plana, não plana, espaciais ...

P20 - ...diferenciar formas geométricas.

P21 - Formas geométricas...

P23 - As formas geométricas

P24 - Os primeiros conceitos geométricos que as crianças aprendem são as formas geométricas planas: quadrado, círculo, triangulo, retângulo, porém, sem propriedades.

P26 - As crianças aprendem primeiramente os conceitos de figuras planas.

> *P27 - Noções de ‘coisas’ que nos dão ideia de ponto plano e reta, e, objetos que lembram figuras geométricas planas.*

Noções de perto longe, grande pequeno, noções de lateralidade:

> *P1 - Noções sobre espaço, lateralidade, espessura, retas*
> *P9 - Deve-se trabalhar de forma que primeiramente se construa a idéia de espaço, ..., lateralidade, medida (grande, pequeno), espessura, plano, não plano.*
> *P10 - ... noção de tamanho (maior/menor), espaço (cabe/não cabe).*
> *P11 - Os primeiros são de espaço, forma, locomoção, objeto.*
> *P14 - ...bola pequena, grande...*
> *P17 - Comparação entre medida, semelhança, tais como: grande e pequeno, longe e perto...*
> *P20 - ... noção de distância, tamanho, etc.*

Inferências Parciais, questão (2,2):

Para essa questão, foi possível dividir as respostas dos participantes da pesquisa em apenas duas unidades de contagem, a saber, ‘conhecimento e diferenciação de figuras planas e espaciais’, e ‘noções de espaço’ que incluem conhecimento do tipo perto e longe, direito e esquerdo, grande e pequeno, etc.

É interessante observar que nenhum dos três professores, *P2, P7* e *P16,* que deram respostas coerentes à questão (2,1) citou que esses conceitos são os primeiros apreendidos pelas crianças. É possível inferir que os professores P2, P7 e P16 associam a Topologia somente a conteúdos ministrados em ambientes escolares, não fazendo relação dos conhecimentos topológicos com a vivência experimentada pelos alunos.

(2,3) Você sabe o que significa dimensão de um espaço? Dê exemplos de espaços com diferentes tipos de dimensões.

Para essa questão, dividiram-se as análises em duas partes; a primeira, que trata da parte (a) da questão e consiste em analisar quais conceitos foram apresentados para o termo dimensão, e outra parte (b), que trata de exemplos de espaços com diferentes dimensões.

(2,3a) Você sabe o que significa dimensão de um espaço?

Espaço ocupado por algo ou por alguém:

P10 - Algo que ocupa lugar no espaço é a dimensão.

P13 - É o tamanho o espaço que o objeto ocupa.

P14 - Espaço em que estamos ocupando

Medida:

P2 - É qualquer objeto que apresenta uma medida

P3 - Penso que dimensão são as medidas

P5 - Dimensão de espaço depende de delimitação que se faz

P6 - Sim. (medidas)

P8 - Seria o tamanho...

P9 – Medida...

P12 - É as "medidas" que o caracterizam

P13 - É o tamanho

P15 - Significa o tamanho, a medida do espaço

P16 - Dimensão é aquilo que podemos medir.

P22 - Dimensão: tamanho...

P24 - Quando falamos em dimensão, pensamos em algo que se pode medir...

P25 - Sim, os diversos tipos de medidas.

P26 - É a medida de um espaço delimitado

Inferências Parciais (2,3a):

Quanto ao primeiro grupo de respostas da pergunta (2,3a) e que possuem como característica principal o conceito de dimensão como *o espaço ocupado por algo ou alguém*, infere-se que tais professores não possuem o conceito claro do que seja dimensão de um espaço, isso porque o espaço ocupado pelo objeto não pode ser considerado para a identificação da dimensão do mesmo. Note-se, por exemplo, que a reta, o plano e o ponto não ocupam lugar algum e cada um dos exemplos citados possui dimensões diferentes.

É preciso ressaltar que o termo dimensão não pode ser definido facilmente, além de que, por se tratar de um termo usado também por não matemáticos, sua compreensão pode sofrer influência do senso comum.

No dicionário Michaelis, o termo dimensão pode significar: 1º Extensão em qualquer sentido; tamanho, medida, volume. 2º *Álg.* Grau de potência ou de uma equação em álgebra. 3º *Geom.* Cada uma das três extensões (comprimento, largura e altura) que se consideram na geometria de Euclides. Atualmente, têm-se formulado outras geometrias, de quatro e mais dimensões.

Matematicamente, a definição de dimensão pode ser considerada com ênfases diferentes, dependendo do contexto em que ela está inserida. Assim, na Álgebra Linear tal definição será dada por meio do conceito de dependência e independência linear de um conjunto de vetores (HOFFMAN e KUNZE, 1979); já na Análise ela será considerada como o produto cartesiano de pontos onde as coordenadas serão definidas a partir de uma referência pré-determinada (LIMA, 2000).

Apesar da definição formal necessitar de conceitos específicos de subáreas, a noção intuitiva e não formal da dimensão de um espaço pode ser descrita como o número de coordenadas necessárias para se localizar um objeto nesse espaço.

Essa forma de compreender o termo dimensão[44] permite classificar várias superfícies quanto à sua dimensão.

---

[44] O tema "dimensão" já foi inclusive palco de uma história narrativa, tendo por objetivo caracterizar os habitantes de uma cidade chamada Planolândia, como "inferiores" a outros habitantes do mesmo espaço por possuir uma quantidade menor de lados; o livro retrata uma sátira contra o papel da mulher, que é apresentada como uma figura sem lados, e a natureza da fé (ABOTT, 2002). Escrito por Edwin Abott em 1884 – cuja edição teve várias reimpressões – e intitulado sugestivamente por Planolândia, o narrador, um quadrado que discorre sobre seu mundo e sobre os habitantes dele, é apresentado à terceira dimensão. Mesmo sem poder ver os habitantes daquele planeta, mas podendo entendê-los pelas "sombras" que provocavam em Planolândia, o quadrado passa a admitir a possibilidade de dimensões maiores, quarta, quinta e sexta.

A grande parte dos pesquisados (P2, P3, P5, P6, P8, P9, P12, P13, P15, P16, P22, P24, P25 e P26) associa dimensão com medidas. De certa forma, esses conceitos são associados. Para Caraça (1951), a ideia de medir está intrinsecamente ligada ao conceito de comparar, assim, seria impossível comparar dimensões de espaços sem haver uma maneira de medi-los. O erro conceitual, porém, está ligado à própria ideia de medida, pois esta não precisa significativamente estar associada a dados numéricos. Assim, quando o professor afirma[45]...

> *P24: Quando falamos em dimensão, pensamos em algo que se pode medir[...]*

Não há um erro conceitual em sua resposta; mas, quando a associação dessa medida está relacionada com dados numéricos, comete-se aí o erro que levanta essa discussão.

> *P24: Quando falamos em dimensão, pensamos em algo que se pode medir. Assim, num retângulo, temos as dimensões da largura, comprimento, área, diagonal, etc. Num cubo temos as dimensões: arestas, área da superfície lateral, volume, etc.*

Os termos largura e comprimento, ditos pelo professor 24, são usados no sentido da medida numérica, seja esta em qualquer unidade, e não no sentido dos possíveis lados do objeto geométrico; essa inferência é possível ao continuar a análise da resposta. Esse professor admite como outras medidas a área, a diagonal, e para elementos tridimensionais o cubo: são admitidos ainda o volume, as medidas das arestas, entre outras medidas.

O que se pretende esclarecer é que a medida, no sentido mais amplo da palavra, não remete ao erro conceitual; esse erro acontece quando a intenção de medir está associada a obter um número, e inferir daí que números diferentes resultam em espaços com dimensões diferentes.

[45] A afirmação do professor 24 é dada como resposta à questão (2,3).

A segunda parte da questão, que consiste em dar exemplos de espaços com diferentes tipos de dimensões, possibilitou inferir sobre algumas das concepções que os professores têm de dimensão.

(2,3b) Dê exemplos de espaços com diferentes tipos de dimensões.

Diferentes dimensões associadas a diferentes unidades de medidas:

P4 - área, hectare, alqueire.
P6 - braça, polegada, múltiplos do metro, hectare, alqueire, litros, massa.

Objetos com áreas ou volumes diferentes foram usados como exemplos de objetos com diferentes dimensões:

P2 - caixa de sapato, caixa de fósforo.
P4 - ...Sala de aula, quarto e sala do lar.
P5 - ... uma folha de papel, o pátio de uma escola,
P9 - ...folha de papel e prancha de madeira.
P21 - (o professor desenhou diferentes polígonos com medidas diferentes)
P22 - ...campo de futebol, a sala da minha casa.
P23 - Dimensão: tamanho, área.
P25 - medida de um terreno, distância entre duas cidades, espessura de uma folha sulfite...
P26 - Medida de uma lousa, de uma caixa, de uma bola
P27 - folha do caderno em relação a sala de aula, folha do caderno em relação ao pátio da escola e ou cidade onde mora.

Exemplos de espaços limitados e ilimitados foram dados na intenção de representar espaços com diferentes dimensões:

P5 - uma folha de papel... e o universo.

> *P8 - O sistema solar. A dimensão do sistema solar é infinito.*
>
> *P11: É possível medir o espaço? É possível limitar o espaço para medir?*
>
> *P15: Significa o tamanho, a medida do espaço. Ex: lua, mar, floresta.*
>
> *P 20: Sala de aula e Universo, dimensões bem diferentes.*
>
> *P23: Exemplo: O sistema solar.*
>
> *P25: [...] distância entre duas cidades, espessura de uma folha sulfite.*

Inferências Parciais (2,3b);

Para os professores P4 e P6, a dimensão está relacionada à unidade de medida estabelecida; ou seja, para eles, admitir unidades de medidas diferentes significa obter dimensões diferentes.

Há um grupo considerável de professores (P2, P4, P5, P9, P21, P22, P23, P25, P26 e P27) que sugerem exemplos de espaços com diferentes dimensões simplesmente por terem medidas (tamanhos) distintas. Os professores citados confundiram a dimensão de um espaço com as medidas do objeto em um espaço. Para eles, um objeto com medidas grandes tem dimensões grandes, analogamente para os objetos com medidas pequena.

Há ainda uma terceira unidade de análise considerada no primeiro grupo, o qual se refere ao termo *infinito* ou ao sentido atribuído a essa palavra, usado em algumas respostas. Exemplos às vezes considerados no sentido de “muito grande”, outras vezes no sentido de “muito pequeno” trata as diferentes dimensões de espaços dependendo da grandeza ou pequenez a que se refere. As respostas dadas pelos professores (P5, P8, P11, P15, P20, P23 e P25) destacam essa unidade de análise. Novamente, aqui há o engano ao confundir a medida do objeto com a dimensão de um espaço.

Observe, por exemplo, a resposta dada por P8:

> *P8: [...] A dimensão do sistema solar é infinito.*

Nas respostas, as palavras como sistema solar e universo remetem sempre à ideia de infinito. Em outros casos, é subtendida à ideia de "muito grande" ou "muito pequeno"[46], como é o caso dos exemplos mar[47], floresta, espessura de uma folha sulfite – note que o professor está sempre pensando em objetos e não no espaço em questão.

O que se deve esclarecer é que em um espaço de dimensão 1 pode-se ter um objeto de medida pequena ou grande. Por exemplo, em uma reta, pode-se ter um segmento de comprimento tão pequeno quanto se queira, e também segmentos tão grandes quanto se queira. Se se pesar em semirretas, por exemplo, tem-se um objeto de comprimento infinito em um espaço unidimensional (a reta). É claro que todos esses objetos considerados da reta são unidimensionais, pois estabelecido um sistema de coordenadas na reta, basta uma coordenada para cada ponto desses objetos para se obter tais subconjuntos.

3.3 Questionário 3

(3,4) Quando estamos em uma estrada reta, temos a impressão que as laterais da estrada se encontram em um ponto mais distante dos nossos olhos. Um aluno curioso, atento a sua aula na qual você introduzia o conceito de retas paralelas, perguntou se as duas retas paralelas (representadas pelas laterais da estrada) se encontram no infinito. O que você diria a esse aluno e como explicaria isso a ele?

Retas paralelas não se encontram:

> *P1 - Não se encontrarão, pois são paralelas*
> *P4 - Se são paralelas, não se encontram, conserva sempre a mesma distancia*
> *P6 - Não. Elas mantém distância entre si*

[46] Apesar dos termos muito grande e muito pequeno dependerem do referencial de comparação, os exemplos sugerem que tal inferência possa ser feita.

[47] Não fica claro, na resposta de P15, qual é especificamente o exemplo que ele adotou ao usar as palavras mar e floresta, podendo ficar subtendido que é uma árvore, uma pedra, um arbusto, ou outro elemento da floresta ou do mar; no entanto ao iniciar sua resposta, o professor faz referência à palavra tamanho, permitindo acreditar que o que fica subtendido é que ele deseja se referir ao tamanho do mar e ao tamanho da floresta, e que adotando como referencial pode significar "muito grande", como foi inferido na análise.

P9 - Eu diria que se as retas são paralelas elas não se encontram no infinito, pois elas mantém entre si sempre a mesma distancia.
P12 - Diria que na verdade elas não se encontram
P13 - Porque são paralelas elas nunca se encontram no infinito
P14 - Que não encontra no infinito pois são paralelas.
P15 - ... na Geometria Euclidiana as retas não vão se encontrar...
P16 - ... se continuássemos o caminho perceberíamos a mesma distancia entre elas, ou seja, não se encontram.
P21 - Não as retas para serem paralelas tem que manter a mesma distancia
P 25 - Diria que retas paralelas nunca se encontram,
P27 - Diria se ele continuar nesse caminho vai perceber que elas continuaram sendo paralelas

Atribuem o fato a questões de óptica:

P11 - Diria que é apenas uma ilusão de óptica.
P12 - ...é só uma visão projetiva de algo que não "vemos realmente" devido a forma da terra.
P16 - Diria que é uma ilusão de ótica

Retas paralelas podem se encontrar:

P5 - Que duas retas paralelas podem se encontrar em algum ponto no infinito,
P14 - ...na Geometria não Euclidiana, elas se encontram.
P15 - Vai depender da geometria que se está trabalhando, ...na Não-Euclidiana vão se encontrar.
P17 - Diria que é possível ocorrer esse fato e demonstraria através de perspectiva.
P23 - Na Geometria não Euclidiana as retas se encontram no infinito.

Não responderam ou afirmaram não saber responder:

P2, P18, P19, P26 - Não respondeu a questão deixando-a em branco

P20 - Não sei responder e pediria ao meu aluno um tempo para pesquisar e responder depois.

Inferências Parciais, questão (3,4):

Doze professores são enfáticos ao afirmarem que retas paralelas não se encontram. Analisando as respostas desse grupo, percebe-se que 5 (cinco) justificam que as retas paralelas não se encontram, já que mantêm a mesma distância entre si, enquanto 7 (sete) não trazem em suas respostas nenhum tipo de justificativa.

Outro grupo de respostas atribui o fato a questões de óptica, mesmo esse grupo não sendo categórico ao afirmar que elas não se encontram, é possível inferir que para tais professores parece claro esse fato, uma vez que tentam encontrar uma explicação que justifique a dúvida do aluno.

Para os professores desses dois grupos (P1, P4, P6, P9, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P21, P25, P27), o que se percebe é que há uma compreensão de que as retas desenhadas no asfalto nunca se encontraram.

O terceiro grupo de respostas, identificados por afirmarem que em alguns casos as retas paralelas podem se encontrar, justifica tais afirmações, declarando que na Geometria não Euclidiana esse fato seria possível. É possível perceber que esses professores entendem que na Geometria Euclidiana as retas não se encontram, mas acreditam ser possível esse fato quando se trata da Geometria não Euclidiana. Há duas hipóteses que podem ser sugeridas: a primeira consiste no fato de que os professores acreditam que podem existir definições diferentes do mesmo objeto, uma para a Geometria não Euclidiana e outra para a Geometria Euclidiana, assim, seria possível concluir que na Geometria não Euclidiana a definição de retas paralelas seria distinta daquela da Geometria Euclidiana. Outra hipótese é que os professores, ao declararem que retas paralelas se encontram, não estabelecem uma relação lógica por não compreenderem a definição de paralelismo entre retas ou por não fazerem a inferência de que se retas paralelas não se encontram então as retas que se encontram, não deveriam ser denominadas paralelas.

Ressalta-se ainda que por haver quatro questionários que apresentaram a questão em branco, pode-se inferir que tal questão tenha causado algum tipo de desconforto.

3.4 Questionário 4

Com base nas respostas dadas na questão 4 do questionário anterior, julgou-se necessário a elaboração do questionário 4. O fato de alguns professores afirmarem que retas paralelas se encontram em geometrias diferentes da euclidiana fez com que se elaborasse uma questão específica para tratar do assunto.

(4,1) Afinal, as retas paralelas se encontram no infinito? Explique.

Retas paralelas não se encontram:

P1 - Dentro da geometria Euclidiano não...
P2 - As retas paralelas nunca se encontram no infinito...
P3 - Na perspectiva local (Geometria Euclidiana) as retas paralelas não se encontram
P4 - Não...
P5 - Pela Geometria Euclidiana não
P6 - As retas paralelas não se encontram.
P7 - Não, retas paralelas nunca se encontram (segundo a Geometria Euclidiana)...
P11 - Na Geometria Euclidiana as retas paralelas não se encontram no infinito...
P12 - ... Se estivermos analisando na Geometria Euclidiana elas não se encontram...
P16 - ... no espaço local (localmente) elas não se encontram – Geometria Euclidiana...
P17 - Não...
P18 - As retas paralelas não se encontram no infinito...
P20 - Na Geometria Euclidiana elas não se encontram...

P21 - ... retas paralelas não se encontram no infinito...

P24 - ... no espaço local elas não se encontram...

P25 - ... Na Geometria Euclidiana não se encontram...

P26 - Em Geometria Euclidiana as retas paralelas não se encontram.

P27 - ...para a Geometria Euclidiana elas continuam sendo paralelas

Retas paralelas podem se encontrar em geometrias diferentes da Euclidiana:

P1- ...Dentro da Geometria Projetiva sim.

P2- ... Em Geometria Projetiva no campo visual as retas paralelas se encontram.

P3- ... na Geometria Projetiva todas se encontram.

P4 - ... na Geometria Projetiva sim...

P5- Depende do ponto de vista da geometria...

P6- ... Porém na ilusão ótica, quando trata se do ponto de fuga, sim..

P7 - ... na Geometria Projetiva (visual), as retas paralelas se encontram no mesmo ponto (o ponto cego).

P11- ... na Geometria não Euclidiana (projetiva) se encontram no infinito.

P12- ... Depende da geometria em questão.

P13- Depende da geometria que esta sendo usada.

P14- Depende do tipo de geometria.

P15- Sim, se estivermos trabalhando com Geometrias não Euclidianas e Geometria Projetiva.

P16- Visualmente, dependendo do ponto de vista, elas podem se encontrar- Geometria Projetiva...

P19- Depende da geometria..

P20- ...depende de qual geometria estamos falando.

P21- ... Se elas forem retas paralelas de locomoção, sim.

P23- Sim, na Geometria Euclidiana e na Projetiva.

P24- Depende...

P25- na Geometria não Euclidiana se encontram...

Inferem que na Geometria Projetiva não existem retas paralelas:

P8- ...na Geometria Projetiva não existe retas paralelas

P17- Não, apesar de na projetiva isso parecer possível aos nossos olhos.

P18- No campo visual aparenta que se encontra, mas ai não foram desenhadas retas paralelas.

P19- ...na Geometria Projetiva não existe reta paralela...

P22- Na Geometria Projetiva não existe retas paralelas. (geometria da visão)

P25- ...na Geometria Projetiva não existe retas paralelas pois todas as retas se encontram

Inferências Parciais, questão (4,1):

Dezoito professores afirmam que retas paralelas não se encontram; desse grupo, 12 (doze) deixam explícito que na Geometria Euclidiana elas não se encontram. Ao que parece, tais professores realmente apresentam dúvidas quanto à conservação dessa propriedade em outras geometrias, o que de fato se confirma quando se analisam as unidades de contagem que afirmam enfaticamente que em outras geometrias isso pode acontecer. No total, 19 (dezenove) professores – um número considerável, já que se trabalha com um universo de 27 (vinte sete) professores – declaram explicitamente que em outras geometrias isso é possível, dos 19 (dezenove) professores, 11 (onze) afirmam que na Geometria Projetiva as retas paralelas se encontram.

O fato de a Geometria Projetiva estar presente em várias respostas, pode ter sido ocasionado devido ao cronograma do curso, pois tal geometria foi trabalhada no encontro anterior; contudo, não parece claro aos professores que em tal geometria não existam retas paralelas.

Há um grupo de professores – P8, P17, P18, P19, P22, P25 – que declaram não existir retas paralelas na Geometria Projetiva. Ao comparar os três grupos, percebe-se que os professores P19 e P25 não descartam a possibilidade de que em outras geometrias diferentes da projetiva as paralelas se encontram.

Com base na análise desse questionário, pode-se inferir que o problema com a definição de paralela é muito forte. No questionário anterior, foi inferido que os professores entendem o paralelismo caracterizado principalmente por manter sempre a mesma distância entre as retas. Com base nessa definição, não seria possível conceber a ideia de que retas paralelas se encontram a não ser que se tenha implícito que em outras geometrias a definição de paralelismo entre retas não seja a mesma adotada na Geometria Euclidiana. Entretanto, nenhuma resposta propõe outra definição para retas paralelas em Geometrias não Euclidianas. Infere-se, assim, que o problema principal que constitui essa questão trata-se possivelmente de uma má formação lógica envolvida na elaboração do raciocínio.

3.5 Questionário 5

(5.2) Cite pelo menos um resultado que diferencie a Geometria Euclidiana da Geometria Projetiva.

Na Geometria Euclidiana, há retas paralelas, enquanto que na Geometria Projetiva não há.

> *P1- ...na Geometria Euclidiana existe retas paralelas, na Geometria Projetiva não existe retas paralelas.*
> *P3- Na Geometria Euclidiana existem retas paralelas, já na Geometria Projetiva não existem retas paralelas.*
> *P5- Na Geometria Projetiva não existem retas paralelas todas as retas se encontram.*
> *P12- Na euclidiana existe uma reta paralela a r dado um ponto p fora de r. Na Geometria Projetiva não existe retas paralelas.*
> *P16- Na Geometria Projetiva não há retas paralelas...*
> *P17- Na Euclidiana existe paralelas na Projetiva não, pois elas sempre se encontram*
> *P19- Na Geometria Projetiva não existe reta paralela elas se encontram.*

> *P20- Na Geometria Euclidiana existe duas retas paralelas. Na Geometria Projetiva não existe retas paralelas pois todas as retas se encontram no ponto de fuga.*
> *P23- Na Geometria Euclidiana retas paralelas não se encontram.na Geometria Projetiva não existe retas paralelas todas se encontram no infinito (ponto de fuga)..*
> *P24 - Na Geometria Euclidiana, conserva-se a idéia de retas paralelas, enquanto que na Geometria Projetiva, não há essa conservação, pois na representação de linhas paralelas, visualmente, elas não são.*
> *P25- A Geometria Euclidiana tem retas paralelas a Projetiva não.*

Na Geometria Euclidiana, as retas paralelas não se encontram, enquanto que na Geometria Projetiva as paralelas se encontram em algum ponto.

> *P5 - Na Geometria Euclidiana duas retas paralelas nunca se encontraram e na Geometria Projetiva elas se encontraram visualmente em algum ponto no infinito.*
> *P6 - As retas paralelas se encontram no infinito*
> *P10 - Retas paralelas não se encontram. Retas paralelas se encontram num ponto no infinito*
> *P14 - Na Geometria Euclidiana as retas são paralelas na Geometria Projetiva as reta paralelas se encontram no "fim do túnel".*
> *P18 - Na geometria a Euclidiana as retas são paralelas e não se cruzam, na Projetiva as paralelas se cruzam*
> *P21 - Retas paralelas que se encontram no infinito*
> *P27 - Em Geometria Euclidiana temos que as retas paralelas nunca se cruzam, enquanto na Geometria Projetiva percebe-se que tais retas se encontram em um determinado ponto.*

A Geometria Euclidiana se preocupa com a métrica, enquanto que a Geometria Projetiva se preocupa com a estética, o visual.

> *P2- A Geometria Euclidiana é a geometria das medidas enquanto a Projetiva é das propriedades visuais.*

P15- Na Geometria Projetiva a preocupação que existe são as propriedades visuais e na Geometria Euclidiana há preocupações com as propriedades táteis.
P16- Geometria Projetiva... é uma geometria que apresenta propriedades visuais
P22- Uma geometria se preocupa com medidas e a Geometria Projetiva não se preocupa com as medidas
P27- Na Geometria Euclidiana podemos observar e provar através das unidades de medidas, enquanto na Geometria Projetiva apenas é feito conjunturas visuais

Inferências Parciais, questão (5,2):

Novamente nessa questão o paralelismo se apresentou como uma diferença entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas. Desta vez, porém, houve um número maior de respostas que admitem não existir retas paralelas na Geometria Projetiva. Essa mudança de concepção pode ter sido ocasionada devido ao maior aprofundamento no assunto permitido pelo minicurso. Ao se analisar o segundo grupo das unidades de contagem, percebe-se que ainda há 7 (sete) respostas que afirmam que nessa geometria as retas paralelas se encontram. Dentre as sete respostas, cinco admitem que o ponto de encontro se localiza no infinito.

Um terceiro grupo admite que a Geometria Projetiva se preocupa com questões visuais, enquanto que a Geometria Euclidiana com a métrica. Novamente, fica passível de observação que a Geometria Euclidiana é vista apenas como uma parte da matemática que trabalha com medidas e cálculos.

(5,3) O motorista do carro atrás da seta da figura a seguir recebeu a seguinte instrução: para que você chegue ao destino, basta que você siga reto. Nesse caso, o que significa seguir reto para você? Comente e faça um esboço de sua resposta.

Figura 14: Figura apresentada na questão (5,3)

Fonte: Acervo da Autora.

Seguir reto como acompanhar o trajeto:

> *P2- Significa não mudar o percurso da trajetória.*
>
> *P11- Significa acompanhar o trajeto da avenida ou rua que esta a seta até o ponto de chegada.*
>
> *P14- Seguir a estrada toda a vida.*
>
> *P18- Seguir a trajetória desenhada como asfalto.*
>
> *P23- Seguir em frente sem mudar o percurso descrito na figura.*
>
> *P25- Significa seguir em frente pela estrada.*
>
> *P26- Seguir reto, significa permanecer na mesma rua, estrada.*

Resistência em usar a palavra 'reto' por não se referir a uma definição euclidiana de reta:

> *P1- Seguir reto para mim é tomar uma linha que tenha sensação de infinito, que eu seja capaz de sempre vê-la na minha frente em linha reta. A expressão do guia foi errada, deveria dizer: siga em frente sem sair desta avenida.*
>
> *P3- Neste caso, seguir reto é não entrar em nenhuma outra rua, que não seja a que já esta trafegando.*
>
> *P5- Seguir reto significa ir em frente por uma linha reta.*

> *P12- Nesse caso seguir reto é continuar na mesma estrada, considero isso uma expressão.*
> *P15- Reto seria seguir o caminho, independente da curva.*
> *P16- Significa seguir em frente. O carro não pode andar entre as casas, então ele precisa ir pela estrada.*
> *P17- No caso reto é a estrada, embora não seja uma reta, mas se fosse o menor caminho era só fazer uma diagonal como é na cidade não dá.*
> *P20- Neste caso significa seguir na rua que o carro já esta até chegar ao ponto.*
> *P22- Vou acompanhar o trajeto da avenida, mas não irei seguir reto, até chegar ao ponto final.*
> *P24- Como já existe um trajeto traçado, seguir reto significa acompanhar o trajeto, que no caso é uma curva.*
> *P27- Seguir reto nesse caso seria uma instrução para que o motorista não fizesse nenhuma manobra para outra direção seguisse sempre em frente.*

Inferências Parciais, questão (5,3):

A pergunta proposta não trata de nenhuma Geometria não Euclidiana específica, foi usado um termo coloquial na elaboração da questão e percebeu-se que, quando houve uma reflexão sobre o assunto – no caso, o uso da palavra reto –, houve também uma resistência.

O primeiro grupo de respostas destaca que seguir reto significa seguir o trajeto da estrada, não parece haver para esses professores problemas com o termo usado e a figura que ele representa.

O segundo grupo, denominado ‘Resistência em usar a palavra reto...’, traz em suas respostas indícios de que o termo usado na orientação foi inadequado observa-se que alguns professores (P3, P12, P20) usam as palavras ‘nesse caso’; talvez, haja a intenção de querer dizer que para essa situação em especial as palavras seguir reto queira significar uma curva.

Em outras respostas, a insatisfação é declarada explicitamente.

Destacam-se em negrito algumas respostas que trazem explícita a resistência em usar o termo reto:

> *P1- Seguir reto para mim é tomar uma linha que tenha sensação de infinito, que eu seja capaz de sempre vê-la na minha frente em linha reta.* ***A expressão do guia foi errada****, deveria dizer: siga em frente sem sair desta avenida*
>
> *P12- Nesse caso seguir reto é continuar na mesma estrada,* ***considero isso uma expressão.***
>
> *P17- No caso reto é a estrada,* ***embora não seja uma reta****, mas se fosse o menor caminho era só fazer uma diagonal como é na cidade não dá.*
>
> *P22- Vou acompanhar o trajeto da avenida* ***mas não irei seguir reto****, até chegar no ponto final.*
>
> *P24- Como já existe um trajeto traçado, seguir reto significa acompanhar o trajeto,* ***que no caso é uma curva.***

Os professores desse grupo se preocuparam em 'corrigir' ou justificar o termo usado. Fica claro que eles não estão à vontade com o uso do termo, isso decorre do fato de que têm em mente o conceito euclidiano de reta: logo, como o trajeto da figura é distinto da representação de reta a que estão acostumados, eles sentem a necessidade de justificar ou corrigir. Mesmo se constituindo em termos usados no cotidiano das pessoas, e que talvez não haja a preocupação de correção no dia a dia, o fato de refletirem no assunto parece fazer com que repensem a formulação da orientação dada.

(5,6)[48] Hoje em dia muito se fala dos Fractais. Escreva o que você já ouviu falar sobre eles.

Apresentam alguma característica dos Fractais:

---

[48] As analises das questões (5,4) e (5,5) serão abordadas na página 97 por tratarem especificamente de alguma geometria não euclidiana.

> *P1 - Adoro fractais, devido a beleza que fica os trabalhos, entendo como figuras que se repete como talvez a couve-flor, a formação dos blocos de neve.*
>
> *P11 - É uma figura geométrica que vai sendo dividida em pequenos pedaços muitas vezes.*
>
> *P12 - É uma repetição de figuras...*
>
> *P16 - Figuras que apresentam perímetro infinito.?!?*
>
> *P17 - ...são construções sucessivas*
>
> *P20 - São figuras geométricas repetidas.*
>
> *P24 - o perímetro dos fractais é infinito.*
>
> *P25 - Fractais são figuras que tem perímetro infinito*

Não responderam:

P2, P14, P18, P19, P22, P26, P27.

Fractais e livro didático:

> *P6 - Sim. Eles aparecem nos livros didáticos.*
>
> *P21 - Sim, aparecem muitos nos livros Didáticos.*

Inferências Parciais, questão (5,6):

Apesar de essa questão apresentar um grande índice de respostas em branco, também foi a que apresentou o maior número de respostas que traziam definições ou propriedades condizentes com a Geometria não Euclidiana a ser trabalhada. É importante lembrar que as perguntas que tratam de alguma Geometria não Euclidiana específica sempre foi abordada antes da apresentação do conteúdo, com o objetivo de que se detectasse o que os professores sabiam. Também é preciso salientar que foi a única Geometria não Euclidiana que os professores destacaram aparecer nos livros didáticos.

Foram entregues um total de 7 questionários com a resposta em branco. Embora se considere a ausência de respostas como um dos motivos para a inferência de que os entrevistados não se sentiram à vontade em responder à questão, há a necessidade, para essa questão em específico, de considerar outra hipótese que consiste na extensão do questionário aplicado. Antes de cada período do curso foi distribuído um questionário;

os professores tinham um tempo antes do início das atividades destinado ás respostas dos mesmos: o questionário 5 foi o mais longo e a questão sobre Fractais a última do questionário, por esse motivo, pode ter havido falta de tempo para que os professores respondessem a essa questão.

SEÇÃO 4

CATEGORIZAÇÃO DAS DIFICULDADES

4.1 As Geometrias não Euclidianas

Como se percebe nas respostas dadas às questões (1,2) e (1,3), apesar de saberem da inserção do conteúdo que trata das Geometrias não Euclidianas nas DCEs, a maioria dos professores demonstra não compreender quais são essas Geometrias e o que as diferenciam da geometria de Euclides.

Ao perguntar especificamente sobre algumas das Geometrias não Euclidianas, o que se obteve foi:

Quanto à **Topologia**: um grande número de professores associou o nome dessa geometria a estudos com base em medições, o que não se caracteriza como uma das preocupações da Topologia, muito pelo contrário. Em outras respostas, o que houve foi uma associação com a topografia. Apenas três professores responderam que se relacionavam com a Tologogia.

Para a **Geometria Projetiva**: por meio das respostas dadas à questão (4,1), observou-se que os professores se enganam ao tratar da questão das paralelas, uma vez que, mesmo depois de ser discutido e observado durante o curso, inúmeras vezes, 8 (oito) professores ainda afirmaram que na Geometria Projetiva as retas paralelas se encontram, ao invés de considerarem que nessa geometria não existem retas paralelas.

Com relação aos **Fractais:** essa foi a geometria que mais apresentou respostas condizentes, 7 (sete) professores em algum momento declararam em suas respostas conceitos ou propriedades relacionados à Geometria dos Fractais. Além disso, em duas respostas há a inferência de que tal conteúdo é apresentado em livros didáticos. Para nenhuma outra geometria não euclidiana os professores fizeram essa observação.

A **Geometria Hiperbólica**: a questão (5,4) tratava de um modelo da Geometria Hiperbólica, mas sua análise foi prejudicada por haver nas respostas uma diversidade tão grande que foi impossível determinar segmentos significativos de convergência. Por esse motivo, pode-se deduzir que não há por parte dos professores uma compreensão de como nem mesmo de que seja possível construir um modelo com as propriedades descritas na questão.

Quanto à **Geometria Esférica**: a questão (5,5)[49] propunha uma construção geométrica, e por meio dela foi possível averiguar os pré-conhecimentos dos professores e a aceitação de retas em tal modelo geométrico. Percebeu-se que essa questão apresentou um número considerável de respostas que admitiram os círculos máximos como retas na superfície Esférica. Ressalta-se, porém, que o uso de um modelo pode ter contribuído para a visualização da representação da reta.

Durante a apresentação do curso, e devido à falta de conhecimento dos professores sobre o tema que seria abordado, várias dificuldades e dúvidas foram se revelando, as quais foram analisadas e categorizadas.

4.2 As Dificuldades

Ao analisar as respostas dos questionários, além do fato já destacado de que muitos professores desconhecem as Geometrias não Euclidianas, algumas dificuldades específicas foram observadas. Foi possível classificá-las em duas categorias:

- Falta de conhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana, o que impediu uma evolução mais efetiva dos conteúdos que deveriam ser explorados no curso.

- Dificuldades em aceitar resultados das Geometrias não Euclidianas, principalmente aqueles que contradizem a geometria de Euclides.

---

[49] Questão (5,5): Em Geometria Espacial, você provavelmente estudou a Geometria da Superfície Esférica. Vivemos em um planeta que é aproximadamente esférico.

a) Desenhe no verso desta folha uma esfera;
b) Desenhe uma reta na sua superfície.

4.3 Primeira Categoria: dificuldades relacionadas à Geometria Euclidiana

A primeira categoria de dificuldades se refere a questões de Geometria Euclidiana.

Durante as análises dos dados coletados, percebeu-se que os professores demonstravam dificuldades relacionadas ao conhecimento de Geometria Euclidiana, que apresentaram especificidades próprias que permitiram categorizá-las. Dentre essas dificuldades, destacaram-se os problemas com definições, várias inferências tentando atribuir termos algébricos aos entes geométricos, além de dificuldades em entender como podem ser representados alguns entes geométricos.

As dificuldades referentes à Geometria Euclidiana receberam a subdivisão como segue:

- Erros conceituais.
- A não compreensão da representação dos entes geométricos.
- A insistência em atribuir aos objetos geométricos características algébricas.

4.4 Erros Conceituais

4.4.1 O Conceito de Geometria Euclidiana.

É possível, ao analisar as respostas dadas pelos professores à questão (1,1), inferir que estes enfrentam dificuldades em explicar o que se considera Geometria Euclidiana.

A seguir, apresenta-se uma tabela que associa as respostas dadas pelos professores que fizeram o minicurso, e as unidades de contagem estabelecidas na seção anterior.

Relação entre as respostas dos cursistas na questão (1,1)																											
Professor	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27
Geometria ensinada na escola		X						X	X		X					X	X								X		
Insegurança ao tentar definir Geometria Euclidiana		X	X			X		X				X	X	X									X				
Cálculos	X							X	X							X									X		
Estudos dos entes geométricos ponto reta e plano				X							X				X	X								X			X
Usada no dia a dia							X				X														X		
Geometria trabalhada na terceira dimensão	X										X			X							X	X				X	

Quadro 1: O que os professores entendem por Geometria Euclidiana

Os professore P5, P10, P18, P19 e P20 não tiverem suas respostas enquadradas em nenhuma das unidades de contagem por elas não convergirem para nenhuma das unidades detectadas na análise.

.

Com base na tabela 1, tem-se que 8 (oito) professores apresentam alguma insegurança ao tentar descrever sobre Geometria Euclidiana, a maioria desses professores não se sente à vontade para acrescentar nada a sua resposta. Dos oito cursistas, cinco se limitam a falar dessa insegurança.

Outra análise possível, quando se comparam as respostas dadas nas unidades de contagem é a de que, dos 5 (cinco) professores que associam a Geometria Euclidiana a cálculos, 4 (quatro) também a associam a conteúdos que são ministrados na escola. Fica implícita aqui uma relação de que o fator indicativo do trabalho com geometria no ensino está muitas vezes restrito ao pensamento métrico, inclusive algébrico.

4.4.2 O Conceito de Dimensão de um espaço

Outra dificuldade conceitual percebida refere-se ao conceito de dimensão de um espaço.

Diante das respostas dadas à pergunta (2,3), percebeu-se que a grande maioria dos professores apresenta dificuldades ao diferenciar a dimensão da representação do objeto em referencia à dimensão do próprio objeto.

Os termos ponto, reta, e plano, entes básicos da Geometria Euclidiana são frequentemente associados a objetos bidimensionais ou até mesmo tridimensionais. Apesar de às vezes ser necessária uma representação para facilitar a compreensão, é preciso sempre estar atento a como esses entes de fato devem ser representados.

> A marca de um toque de grafite num papel dá a ideia da noção não definida de ponto. Isso pode ser a *representação* de ponto, pois ponto não tem dimensão e a marca no papel tem.
> [...] Ao apoiarmos uma ponta de grafite numa régua e traçarmos uma linha, poderemos representar uma reta. *Isso é apenas uma representação* de reta, pois uma reta é um objeto de apenas uma “dimensão” e a linha traçada no papel, por mais delgada que seja, *tem sempre* uma largura.
> [...] Podemos imaginar um plano como uma folha de papel extremamente fina e completamente rígida. *Aqui novamente a atenção ao fato de que esta noção intuitiva pode ser vista apenas como uma representação* de plano, já que um plano possui apenas duas dimensões e uma folha de papel por mais fina que seja *sempre tem* uma espessura. (BARROS, FRANCO e GERÔNIMO, 2010, p.24, grifos nossos).

Não há erro em usar elementos tridimensionais para exemplificar outros de dimensões menores, no entanto, deve sempre ser esclarecido que os primeiros só podem ser considerados como representações dos segundos.

4.5 A Não Compreensão da Representação dos Entes Geométricos

A subseção *"A não compreensão da representação dos entes geométricos"* foi identificada por meio das filmagens obtidas durante a apresentação do curso.

4.5.1 O Cilindro

A atividade proposta no primeiro dia à tarde, e que consistia em tomar uma folha de papel e colar os lados opostos formando o que seria uma representação de um cilindro, possibilitou perceber que nem sempre alguns cuidados são tomados quanto às definições do objeto geométrico. Foi possível perceber também erros referentes à conceituação do que seria de fato um Cilindro Euclidiano.

O professor ministrante levanta com uma das mãos a representação construída, de parte de um cilindro, e pergunta aos cursistas:

> MS: -*Representa um círculo, uma circunferência...?*
> P1 - *Um arco.*
> MS - *Um arco?*
> P2 - *Um cilindro.*
> MS - *Alguém está falando, isso aqui representa o quê?*
> VS - *Um cilindro*
> MS - *Cilindro tem massa?*
> VS - *Tem.*

A unidade de significação destacada na afirmação de vários professores de que "o cilindro tem massa" salienta a inferência de que está sendo feita uma associação, em que, o objeto construído perde a condição de representação e passa a ser considerado como sendo o próprio ente geométrico.

A construção do ente geométrico cilindro deve ser considerada como uma representação, devido ao fato de que sua existência só faz sentido “no mundo das ideias”. Há ainda uma característica fundamental que distingue o cilindro construído do cilindro euclidiano, a qual consiste no fato de que no mundo das ideias a superfície cilíndrica é bidimensional, possuindo apenas largura e comprimento, enquanto que ao se usar o papel para confeccionar a representação da superfície cilíndrica, essa representação possui três dimensões: largura, comprimento e espessura da folha.

A característica descrita serve para distinguir o que se deve entender por cilindro e o que realmente se tem quando ele é confeccionado. A ideia de cilindro deve ser compreendida, e também deve ser compreendido que o que se tem por meio da construção não passa de uma *representação* de um ente geométrico.

Os professores não apresentaram em suas falas indicativos de distinção entre a representação e o ente representado.

Mesmo o professor ministrante sempre se referir ao objeto construído como uma *representação do cilindro*, os professores parecem não se ater às diferenças implícitas.

4.5.2 O Círculo e a Circunferência

Em alguns momentos do curso, identificaram-se as dificuldades referentes a conceitos de alguns entes geométricos. A seguir, apresenta-se um dos discursos que salienta tais dificuldades.

> MS: - *O que é circunferência? Alguém sabe o que é circunferência?*
> Conversa entre os cursistas
> ...
> O professor ministrante então pergunta a uma das cursistas:
> MS - *O que é círculo então, você sabe?*
> ...
> Sem obter resposta, MS continua a questionar os professores.

MS - *Gente quando vocês estão lá com as crianças, e vocês têm que falar para eles sobre a circunferência o que vocês falam?*

P1 - M*ostro, assim, a* **aliança** *para eles;*

O professor 1 começa a rir da própria resposta que iniciara a dar, e continua.

P1 - *É a circunferência.* ***A moeda, a moeda é o círculo.***

...

MS - *O que é circunferência?* – perguntando a outro cursista – *Ela falou* – referindo-se a P1 – *que ela pega a aliança e mostra para as crianças...*

P1 interfere no comentário do professor ministrante;

P1 - *e a moeda é o círculo.*

MS - *a moeda é o círculo?*

...

P2 – *é.*

Conversas

MS - *O que é o círculo?*

P3 - *Uma moeda.*

MS - *É um círculo?*

P4 - ***Dentro é****, por que por fora é a circunferência.*

P5 - ***Seria a linha que circula? Uma linha fechada?***

MS - *Uma linha fechada? Aquela figura cor de rosa* – aponta para uma figura feita no quadro e que representava uma linha fechada com várias "curvas".

Antes de concluir a fala, MS foi interrompido por outro professor.

P6 - *É uma linha fechada e não é uma circunferência.*

P5 - *Aí, me pegou.*

P7 - É *uma linha...*

P7 foi interrompido sem concluir sua fala pelo professor P4.

P4 - ***Uma linha sem curvas*** – conclui P4.

...

MS - *O que vocês diriam para as crianças?*

P8 - ***É uma região fechada com uma reta***...O professor pára a frase sem conseguir concluí-la.

P9 - **É *um conjunto de pontos que circulam*** – gesticula com a mão no ar, desenhando uma circunferência.

MS - *A circunferência é um conjunto de pontos que equidistam de um ponto fixo chamado centro, circunferência na verdade é o conjunto de* ***todos*** *os pontos que equidistam de um ponto dado.*

A transcrição mostra que são várias as interpretações dos professores aos entes geométricos círculo e circunferência.

Definição de Circunferência dada pelos professores:

P1 Aliança,

P5 Linha que circula, linha fechada.

P4 Linha sem curvas, ... parte de fora da moeda.

P8 É uma região fechada com uma reta.

P9 conjunto de pontos que circulam,

Os professores apresentaram duas carências específicas relacionadas ao conceito de círculo e circunferência. A primeira, quanto à distinção desses dois entes, é feita com base na demora e ausência de respostas, e a segunda, quanto à representação.

Algumas definições serão consideradas para compreensão dos entes a serem analisados nesta subseção.

De acordo com *Os Elementos* de Euclides, tem-se que:

> Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação a qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos pontos no interior da figura, são iguais entre si (EUCLIDES, 2009, p. 97).

Franco e Gerônimo (2010) asseveram que as definições de círculo e circunferência podem ser compreendidas com bases nos conceitos de distância.

> Seja O um ponto do plano e r um número real positivo, a circunferência de centro O e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos C do plano, tais que $\overline{OC} = r$. O conjunto dos pontos C que satisfazem a desigualdade $\overline{OC} \leq r$ é dito ser o círculo de centro O e raio r (FRANCO e GERÔNIMO, 2010, p. 44).

Pelo tratamento anteriormente feito, pode-se verificar que são várias as interpretações dadas pelos professores aos entes geométricos círculo e circunferência. As tentativas de definições foram dadas com o intuito de responder aos questionamentos do professor que ministrava o curso. No entanto, todas as respostas dadas possuem "carências" na definição, mesmo que intuitivamente as respostas não correspondem ao ente geométrico em questão.

A definição linha sem curva, lida fora do contexto, remeterá ao leitor à ideia de reta euclidiana, e a definição parte de fora da moeda, foge totalmente à compreensão, pois seria necessário definir em uma moeda o que se entende por dentro e fora.

O exemplo da aliança, ainda que próximo da ideia intuitiva, do que seria circunferência, remete-se muito mais a uma representação de uma superfície cilíndrica do que de circunferência.

Ao ser dada a resposta linha fechada, o professor ministrante levou os cursistas a refletir sobre a definição dada, mostrando-lhes um exemplo de linha fechada que não correspondia ao conceito de circunferência euclidiana. Diante do contra-exemplo, rapidamente percebe-se a inferência feita por um dos professores participantes, na tentativa de "melhorar" a definição de linha fechada, acrescenta ser a circunferência uma linha sem curvas.

Em consonância com Kaleff (2004),

> [...] o professor necessita estar alerta para o fato de que *nem sempre* as imagens visuais, daquilo que se vê, e as palavras expressadas na língua natural, relacionadas a situações do cotidiano, *ajudam* quando se tem em vista levar o sujeito à abstração de situações ligadas à concretude material (KALEFF, 2004, p.32, grifos nossos).

Ao tentarem definir um conceito para o que seria círculo e circunferência, observa-se que os professores possuem, mesmo que a grosso modo, uma ideia intuitiva de tais entes geométrico. No entanto, a dificuldade em explicitá-lo matematicamente faz com que ao fazerem cometam erros que podem construir nos alunos uma ideia equivocada do que sejam tais entes geométricos.

4.5.3 A Reta e o Plano Euclidiano.

Problemas em considerar uma representação também surgiram para os entes geométricos, reta e plano euclidiano.

A questão da representação se apresentou quase como um paradoxo nesta pesquisa, pois apesar de se constituir em uma ferramenta muitas vezes utilizadas nas aulas para facilitar a compreensão dos alunos, foi também uma das maiores responsáveis pelas dificuldades percebidas nos professores.

O problema principal da utilização das representações se encontra no fato de que muitas vezes ela não pode exprimir verdadeiramente os conceitos que integram o ente geométrico representado. Dessa forma, quando se atem às representações como se fossem o próprio ente, corre-se o risco de admitir propriedades que não são válidas.

Kasner e Newman (1968), tratar da geometria plana, declaram:

> Ela não descreve o espaço acessível aos nossos sentidos, que explicam em termos de vista e tato. Fala de pontos que não tem dimensões, linhas que não tem largura, planos que não tem espessura – tudo abstrações e idealizações que não se assemelham a nada do que experimentamos ou encontramos (KASNER e NEWMAN, 1968, p. 117).

Destarte, quando se trata do ensino, compreende-se necessária tal representação para que os conceitos, principalmente os geométricos, sejam transmitidos.

Na perspectiva de Kaleff:

> Estes conceitos abstratos, para que sejam comunicados da nossa mente para a de outros indivíduos, necessitam ser representados por signos, símbolos, desenhos, ícones, etc. Todos estes entes, perceptíveis por meio da nossa visão, isto é, esses representantes visuais das idéias matemáticas abstratas podem não ter nenhuma

> característica de analogia, visualmente perceptível, com aquilo que representam (BRESSON apud KALLEF, 2004, p. 32).

Os professores pesquisados apresentaram dificuldades em exprimir propriedades dos entes geométricos reta e plano por considerarem muitas vezes as representações como o próprio ente, não fazendo distinção entre um e outro.

Reta

No primeiro dia à tarde, ao tratar dos entes geométricos e de suas representações, o professor faz a seguinte "brincadeira", a qual provocou uma reação nos cursistas, que permitiu detectar um problema com o conceito de reta.

> MS - *Deixa eu escolher aqui alguém.*
>
> O professor ministrante sai no meio da sala procurando alguém para fazer uma pequena interpretação com ele, pára em frente a um dos cursistas e fala:
>
> MS - *Segura a pontinha aqui,* (entrega na mão do cursista algo imaginário), *segura firme para não escapar* (a professora segura com o indicador e o polegar algo imaginário) *todo mundo tá vendo, ela segurando.*
> Risos
> VS - *Sim.*
> MS - *Não solta* (se referindo ao objeto dado), *ela tá segurando a pontinha da minha reta geométrica, não solta, não solta.*
> O professor também, segurando algo imaginário, volta à frente da sala.
> MS - *Vai pra marte, eu vou ficar aqui na terra, tchau, tchau.*
>
> A professora se levanta da cadeira e vai para o fim da sala, colaborando com a encenação.
>
> MS - *Agora ela ta lá em marte, e eu to aqui na terra.*
> ...

MS - *Eu tô aqui com uma carretilha segurando essa reta geométrica, eu vou dar um grito pra ela e vou começar a enrolar nessa carretilha a reta geométrica.*

MS - *Pode soltar* (o professor altera o tom da voz para representar um grito).

MS - *shushushun* (imitando o som da carretilha enrolando).

MS - *Daqui até marte haja carretilha, é muito longe. Muito obrigado* (agradece a professora que colaborou, e que retornava ao seu assento).

MS - *Encheu a carretilha com a reta, não é isso?*

VS - *é.*

MS - *é isso?*

VS - *é.*

A cada pergunta que MS fazia aumentava o número de professores que respondiam afirmativamente.

MS - *é isso?*

VS - *é.*

...

MS - *A carretilha está vazia, porque a reta não tem espessura, ela só tem comprimento, ela só tem uma dimensão*.

...

MS - *Veja como a gente não constrói esse conceito de reta bem, porque se tivéssemos construído, não haveria confusão.*

Os professores nem sempre compreendem as propriedades dos entes geométricos; note que ao afirmarem que seria possível encher a carretilha, já que se tratava de um segmento grande de reta, aceitam a condição de que essa reta imaginária tem espessura, mesmo tendo o professor ministrante instigado várias vezes o público com a pergunta – É isso?. A cada pergunta, os cursistas afirmavam mais convictos de que se deveria considerar que a carretilha se encheria. Essas afirmações feitas pelos professores permitem a inferência de que o conceito de dimensão não é bem elaborado, essa dificuldade, já descrita na subseção ‘‘O Conceito de Dimensão’’, atrapalha a compreensão do que realmente se constituem alguns dos entes geométricos.

Plano

Uma das atividades[50] do curso consistia em tentar imaginar o mundo de seres bidimensionais que viviam em um espaço onde a forma deveria ser identificada por meio da análise do movimento dos habitantes desse planeta.

ATIVIDADE 1: Alguns cientistas de um planeta chamado Planolândia, portanto bidimensionais, tais como o Hum Quadrado, o Hum Triângulo e o Hum Círculo, resolveram conhecer melhor o mundo em que viviam. Para isso, organizaram uma expedição científica. Durante a expedição, os habitantes de Planolândia deixavam por onde passavam uma marca com tinta vermelha; ao fim da expedição, qual não foi a surpresa dos planolandenses quando, ao olharem para o chão, viram marcado nele o ponto inicial por onde haviam começado a expedição. Quais são as possíveis formas deste planeta?

ATIVIDADE 2: Em uma nova expedição científica, os mesmos cientistas resolveram fazer uma nova rota. Ao invés de percorrer no sentido oeste-leste, caminharam no sentido sul-norte. Deixaram agora uma marca verde. Após esse retorno, observaram que não haviam cruzado a linha vermelha nenhuma vez, ou seja, o único lugar de cruzamento das linhas vermelha e verde foi no início do percurso. E agora? Quais são as possíveis formas desse planeta?

Ao perceberem a impossibilidade de usarem a esfera na segunda atividade, iniciou-se um diálogo no qual se constataram problemas com a definição de plano.

Após ler o enunciado da segunda atividade, o professor ministrante começou a questionar os professores.

---

[50] Essa atividade está melhor descrita na seção 2, trata-se de uma das atividades dadas no primeiro dia a tarde.

MS - *Dá pra ser a esfera?*

VS - *Não.*

MS - *Quais são as possíveis formas desse planeta?*

Silêncio

....

P1 - *Professor, e se for um plano?*

MS - *Plano? Mas como eles viriam Planópolis, se fosse um plano?*

...

MS - *Se fosse um plano, o que iria acontecer?*

A professora tomou um caderno e tentou explicar como, a seu ver, era o mundo dos habitantes de Planópolis.

P1 - *Ele sai daqui* (apontando para o centro do caderno), ele *caminha por baixo do plano* (faz o percurso com o dedo seguindo do centro até a espiral da capa e descendo pela capa de traz do caderno), *vou colocar aqui horizontal* (se referindo ao sentido do caminho percorrido), *ele vai chegar* ***no mesmo lugar*** (continua demarcando o caminho até chegar no ponto inicial de onde havia partido), *tá, mas se ele sai daqui* (novamente apontando para o centro do caderno) *e vai pra norte* (o percurso demarcado pelo dedo segue agora um sentido contrário ao escolhido no início da exposição), *ele vai cruzar* (mostrando o ponto de cruzamento na parte de baixo e de cima do caderno), *mas no* ***mesmo ponto de onde ele saiu****.*

MS - *E onde que está a beiradinha do seu plano?*

...

MS - *Onde ele termina?*

P1 - *Não pensei, eu só pensei em fazer a volta.*

A professora traz em sua argumentação alguns detalhes relevantes para o estudo em questão.

É possível inferir que a professora, mesmo usando o caderno, um objeto tridimensional, com espessura, largura e comprimento, interpreta o objeto descartando a sua espessura. Ao afirmar que os habitantes se encontram (tanto na capa superior do caderno, como na capa inferior do caderno) no mesmo ponto, a professora idealiza o caderno com apenas duas dimensões (comprimento e largura); nesse sentido, a ideia de plano é correta, o erro é cometido ao imaginar um plano finito, donde se torna capaz dar a volta.

Erros como esse acontecem sempre que se utilizam “representações”, pois por não corresponderem efetivamente ao ente geométrico estudado, podem contribuir para a formulação de construções erradas.

4.6 Insistência em Atribuir aos Termos Geométricos Nomenclaturas Algébricas

Percebeu-se, em algumas das respostas da questão (1,1), o uso de termos algébricos, recurso usado outras vezes com a intenção de “explicar”, justificar ou compreender como se relacionam alguns termos geométricos.

Apesar de haver discordâncias[51], é comumente aceita a ideia de que a Geometria Analítica foi desenvolvida por Pierre de Fermat e René Descartes, não deve ser, no entanto, considerada como uma nova geometria nem mesmo como parte da Geometria Euclidiana; na verdade, trata-se de um método, uma forma de estudar as geometrias.

A Geometria Analítica ofertada no Ensino Médio tem como principal característica associar uma correspondência entre os pontos do plano a pares ordenados de números reais, devido a essa correspondência é possível estabelecer relações que associam equações a curvas o que transforma problemas de geometria em problemas algébricos.

4.6.1 Distância de ponto a reta

No terceiro dia do curso, no período da manhã, o professor ministrante instigou os cursistas a definirem distância de ponto a reta na Geometria Euclidiana. A introdução do

[51] Boyer (1999) pontua que Nicole Oresme (século XIV) foi o primeiro a representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente com a independente. Para ele, foi Oresme quem deu a primeira manifestação explícita da equação da reta. No entanto, como a geometria analítica só pode ser desenvolvida plenamente por meio do simbolismo algébrico, considera-se que só a partir do século XVII ela veio a ser desenvolvida como se conhece hoje, o que se deve a Pierre de Fermat e René Descartes.

estudo da Geometria Hiperbólica e distância de ponto a reta nessa geometria seria um dos pontos que seriam discutidos posteriormente, cujo objetivo era permitir que eles percebessem as relações e diferenças entre o conceito nas diferentes geometrias.

MS - *Como faço para calcular a distância de um ponto até uma reta na Geometria Euclidiana?*

P1 - *É a raiz quadrada, né?*

P2 - x_a *menos* x_b *mais* y_a *menos* y_b.

MS - *Tem uma fórmula isso?*

P. - *Módulo.*

- ....

MS - *Eu quero calcular a distância de um ponto até uma reta? Tem fórmula isso?*

- ...

P3 - *Módulo de ax mais by mais c ...*

Os cursistas insistem em descrever a fórmula analítica que determina a distância de ponto à reta estudada na Geometria Analítica Plana. MS percebe e tenta chamar a atenção para o que ele deseja que seja definido.

MS - ... *Então se estamos na geometria analítica estamos em casa, é só jogar na fórmula que temos a distância, mas eu estou falando da Geometria Euclidiana isso aí é Geometria Analítica que pega a Geometria Euclidiana transforma a geometria em álgebra, pra gente poder fazer essas continhas*...

- ...

MS - *Eu tenho uma reta no friso deste piso,*- mostrando com a mão o friso ao qual se refere – *e eu estou aqui* – o professor chama a atenção para a posição demarcada por ele – *Eu não consigo calcular a distância daqui até aquele friso que eu marquei?*

- ...

MS - *Esta aqui é minha reta,* – novamente mostra com a mão a posição desejada – *e eu tô aqui, e eu quero calcular a distância daqui até aquela reta. Não dá pra gente calcular sem usar a Geometria Analítica?*

VS - *Dá.*

MS - *Dá? Como é que a gente faria?*

...

P4 - *Eu iria pegar uma trena.*

MS - M*uito bem!*

Risos

MS - *Isso mesmo, e como é que você vai medir?*

P4 - *Eu iria por minha trena lá* – apontando em direção da reta de onde se pretende calcular a distância

MS - *Lá? Mas, lá onde exatamente?*

P4 - *Eu iria pegar um ponto para marcar ela* – se referindo à reta.

MS - *Qual ponto você iria pegar?*

P4 - ***Qualquer um.***

MS - *É? Então eu vou pegar esse aqui* – O professor sugere pegar um ponto na extremidade da semirreta determinada pelo friso.

P5 - *Mas aí* ***minha distância ia ser diferente da distância dela****, e daí?*- P5 sugere por meio de gestos pegar outro ponto na reta determinada pelo friso que não o tomado pelo professor.

P4 - *Mas aí eu ia falar que era um* ***valor aproximado****.*

MS - *Mas quão aproximado?*

P5 - *Se eu pegasse um ponto mais longe ia ficar o dobro do seu* (se referindo à distância) ***ia ser muito diferente.***

MS - *Então, como a gente faz? Eu quero calcular a distância daqui até aquela parede como vocês fariam?*

P. - *Medir.*

MS - *Medir o quê?*

MS - *Vamos pegar a parede então, eu quero calcular a distância daqui até aquela parede. Como vocês fariam?*

....

MS - *É um problema prático!*

...

P6 - *Pega um instrumento de medida e mede.*

MS - *Daqui até essa parede? Até aqui?* – O professor ministrante caminha em direção ao lugar onde sugere medir, no entanto percorre um caminho retilíneo, mas não perpendicular – *assim?*

VS - *Não.*

MS - *Então como é que eu faço?*

P. - *Perpendicular.*

MS - *Ah, tá surgindo a palavra. É qualquer coisa? Posso fazer assim?* – apontando com a mão para diferentes direções – *assim? Qualquer uma é a distância? O que, que eu tenho que fazer?*

P. - *Perpendicular.*

MS - *Perpendicular é a palavra. Eu estou aqui e se eu quero calcular a distância até aquela reta. Eu faço o quê? Pego a perpendicular.*

Respostas que fazem uso da geometria analítica.

P1 - É a raiz quadrada, né?

P2 - x_a *menos* x_b *mais* y_a *menos* y_b.

P. - Módulo.

P3 - Módulo de ax mais by mais c ...

Respostas que sugerem outras formas de medir:

P4 - Eu iria pegar uma trena.

P6 - Pega um instrumento de medida e mede.

Inferências Parciais:

Nota-se que nas transcrições acima, a primeira tentativa feita pelos professores consistia em encontrar uma resposta algébrica que responderia à pergunta do professor ministrante. Quando impossibilitados de usar tais conceitos algébricos (já que não se tinha pontos determinados por eixos cartesianos), o problema, apesar de prático, causou várias discussões, os professores não conseguiram apresentar facilmente uma resposta adequada à questão formulada.

A definição geométrica, que seria a de tomar a menor distância entre o ponto e a reta, causou vários transtornos, e apesar de tentarem dar uma resposta satisfatória, o critério de que a distância seria determinada pela perpendicular só apareceu depois de algum tempo.

O conceito de distância é fundamental para que se compreenda como determinar distâncias em outras geometrias. Se tal conceito não está bem estabelecido, o professor terá dificuldades em tratá-los em outras geometrias.

Em qualquer geometria, a distância entre entes dessa geometria deve ser entendido a menor distância entre tais entes, tendo que levar em consideração apenas como é definido ponto e reta na geometria que se está trabalhando. Tentar encontrar respostas algébricas torna a compreensão mais difícil, uma vez que a fórmula determinada para uma geometria pode não ter relação alguma com a que será determinada na outra.

Nessse sentido, infere-se que a busca por respostas algébricas pode contribuir para que se apresentem dificuldades em compreender outras geometrias.

4.6.2 O Plano Cartesiano

No primeiro dia de curso, foi proposta uma atividade[52] que consistia em considerar uma geometria diferente da euclidiana e determinar se em tal geometria se verificava o primeiro postulado de Euclides.

A atividade foi proposta por meio do enunciado:

Sejam $P = \{a,b,c\}$, $r_1 = \{a,b\}$, $r_2 = \{a,c\}$ e $r_3 = \{b,c\}$. Chame P de plano, r_1, r_2 e r_3 de retas, e a, b e c de pontos. Mostre que nessa "geometria" vale o 1º Postulado dos Elementos de Euclides.

[52] Na seção 2, as atividades trabalhadas no curso estão melhor explicitadas.

A transcrição abaixo retrata a tentativa de um professor em compreender a nova geometria remetendo-a à geometria analítica.

P1 - *Vamos primeiro fazer o plano cartesiano...*

PS - *Tem que fazer o plano?*

P1 - *Tem que fazer né?- O certo seria papel quadriculado, mas.*

PS - *Por quê?*

P1 - *Pra ficar mais fácil.*

...

P1 - *P é o plano, deixa eu dividir primeiro.*- dividindo os eixos do plano cartesiano em pequenas unidades com a régua.

P1 - *r_1 vai ser o* a *e o* b – demarcando na abscissa um ponto aleatório e denotando-o de a, o cursista também denota um ponto arbitrário na ordenada e denota-o de b.

PS - *O* a *e o* b. *E o* c *é...?*

P1 - *É o plano né, seria o plano, o r_1 é a reta a e b, o pontinho a e o b.*

PS - *Mas porque você usou o sistema cartesiano?*

P1 - *Para representar.*

PS - *Mas você tem valores para x e para y?*

P1 - *Eu tô considerando que existe, estou considerando uma unidade para cada um.*

PS - *Mas então o* a *estaria no eixo x?*

P1 - *Sim, e o* b *no eixo y.*

Silêncio

P1 - *o P vai ser o plano, o plano que eu falo é o plano* – apontando para a folha do caderno onde havia desenhado os eixos cartesianos.

PS - *o* c *estaria onde na sua representação?*

P1 - *É verdade, o* c *estaria na terceira dimensão...*

P1 questiona a professora ao lado que passara o tempo todo assistindo às argumentações.

P1 - *Será que não dá pra usar o plano cartesiano? Não dá?*

....

P1 - *Veja bem, o P é o plano, eu considerei o plano.*

P2 - *Mas daí não precisa considerar o cartesiano.*

P1 - *Eu considerei pra ficar mais, assim, pra gente pensar melhor.*

Percebe-se que o professor P1 insiste em usar a geometria analítica para solucionar o problema proposto:

Vamos primeiro fazer o plano cartesiano...

O certo seria papel quadriculado

Mesmo diante do questionamento da pesquisadora, ele procura forçar um sistema em que seja possível utilizar seus conhecimentos da geometria analítica:

PS - *Mas por que você usou o sistema cartesiano?*

P1 - *Para representar.*

PS - *Mas você tem valores para x e para y?*

P1 - *Eu tô considerando que existe, estou considerando uma unidade para cada um.*

O professor denotado por P1 acredita ser possível representar os elementos a, b e c no plano cartesiano, associando-os a coordenadas cartesianas, mesmo não tendo a geometria apresentada qualquer relação com a Geometria Euclidiana. Ele não se atém ao fato de que o exercício proposto trata de uma geometria diferente da que ele é habituado.

Outros professores representavam no caderno pontos, que foram desenhados com a ponta do lápis, denotando-os por a, b e c e construíam representações de retas euclidianas, ligando os pontos desenhados para representar r_1, r_2 e r_3.

É comum buscar representações, ou ainda uma relação algébrica para tratar de problemas geométricos, porém essas associações podem proporcionar dificuldades quanto à efetiva compreensão do conteúdo a ser aprendido.

Infere-se que o enraizamento da Geometria Euclidiana e Analítica promove obstáculos na aprendizagem das Geometrias não Euclidianas. O desprendimento desses conhecimentos é necessário ao tentar introduzir novos conceitos nos quais as representações não condizem com as costumeiramente usadas.

4.7 Segunda Categoria: A Geometria Não Euclidiana

A segunda categoria sobre dificuldades em compreender Geometrias não Euclidianas se refere à grande rejeição de conceitos próprios de tais geometrias; houve, por parte dos professores participantes, resistência em aceitar alguns resultados advindos da não utilização de alguns dos postulados de Euclides.

Para esta categoria foram detectados os seguintes grupos de dificuldades:

- Dificuldades em aceitar entes geométricos cujas representações contrastassem com as representações usuais da Geometria Euclidiana.

- Busca de semelhança com a Geometria Euclidiana, o que frequentemente contribuía para construção de erros, já que em muitos casos era forçada uma resposta que se adequasse ao sistema euclidiano.

- A necessidade de um modelo

4.8 Dificuldades em aceitar entes geométricos cujas representações contrastam com o modelo Euclidiano

Ao ser analisada a questão (5,3) percebe-se que alguns professores se sentiram incomodados em usar o termo reto, já que o percurso descrevia um caminho que fugia a definição euclidiana de reta.

Os professores (*P1, P3, P5, P12, P15, P16, P17, P20, P22, P24, P27),* apresentam dificuldades em usar a palavra "reto" para a situação descrita, em algumas respostas essa dificuldade é claramente explicitada por termos que justificam o uso da palavra ou ainda expressões que declaram a resistência em usar o termo reto.

A expressão do guia foi errada...
... considero isso uma expressão.
...embora não seja uma reta
...mas não irei seguir reto.
...que no caso é uma curva.

O que se infere é que há muitas vezes um enraizamento das representações euclidianas, o que pode contribuir para que haja dificuldades na aprendizagem das geometrias que têm como representações de seus entes, imagens que contrastam com os apresentados na Geometria Euclidiana.

Historicamente também é possível encontrar relatos que mostram tal resistência. Ao propor uma demonstração para o quinto postulado, Sacchieri conclui ser um absurdo admiti-lo como falso já que se assim fosse, resultaria em obter retas que tinham traçados curvos, conforme afirma Barker (1969, p.50), "Sacchieri procurou mostrar que essa hipótese era incompatível com os seus pressupostos e acreditou justificada a ideia de abandoná-la em virtude de algumas estranhas consequências que acarretava".

Dentre as dificuldades constatadas nesta pesquisa relacionadas aos entes geométricos destas novas geometrias, se destacam: a compreensão de entes como as representações de retas, e algumas propriedades resultantes dessas novas geometrias, como a questão do paralelismo entre retas e a soma interna dos ângulos de um triângulo.

4.9 Busca por semelhança com a Geometria Euclidiana

A atividade descrita a seguir foi dada no primeiro dia do curso, e tem algumas das discussões feitas durante sua realização, transcritas a seguir.

Sejam P = {a,b,c}, r_1 = {a,b}, r_2 = {a,c} e r_3 = {b,c}. Chame P de plano, r_1, r_2 e r_3 de retas, e a, b e c de pontos. Mostre que nessa “geometria” vale o 1º Postulado dos Elementos de Euclides.”

Depois de algum tempo em que os cursistas passaram tentando resolver o problema o professor promoveu uma discussão referente à atividade proposta.

MS - Vocês fizeram algum desenho para representar, entender ou compreender?

P1 - Sim, as retas.

VS - Sim

MS - Quais desenhos vocês fizeram?

P1 - Retas.

P2 - Triângulo.

P3 - Eu fiz o plano

P4 - Se os pontos estiverem alinhados não vai dar pra desenhar um triângulo – o professor P4 argumenta contra o ideia do professor P2 que alegou ter desenhado um triangulo.

...

MS - O que são os pontos nessa geometria?

VS - a, b e c

MS - A letra a, a letra b e a letra c, esses são os pontos nessa geometria não é? Eu posso representar esses pontos, do mesmo jeito que eu represento os pontos na Geometria Euclidiana, ***represento*** – o professor neste momento dá ênfase a palavra represento – *porque eu não sei o que é ponto, a ideia de ponto está dentro da minha cabeça eu não tenho uma maneira de como desenhar, então o que eu posso fazer aqui* – se referindo a geometria que está sendo trabalhada – *é pegar um primeiro ponto, segundo ponto e terceiro ponto,* – desenha três pontos e nomina-os de a b e c- *então esses três elementos são os pontos desta geometria,* ***mas representando*** *porque nesta geometria a letra a, a letra b e a letra c é que são os pontos, não isso daí* – apontando para o desenho feito – *é a letra a, a letra b e a letra c.*

MS - E o que é o plano?

P5 - a folha – P5 mostra a folha do caderno onde estão desenhados os pontos, induzindo a ideia de que a folha representaria o plano.

Alguns professores gesticulam mostrando a folha do caderno outros apontam para o quadro onde o professor representou os pontos a b e c.

MS - O que o problema diz ser o plano.

P. - É o conjunto de três pontos.

Então aí, está desenhado o plano

MS - Pois então, esse ponto, esse ponto e esse ponto – mostrando no ar como se estivessem três letras escritas – *é o plano, mais nada.*

P. - ah!

Neste momento, percebe-se que alguns cursistas demonstram ter compreendido como se dá esta geometria.

MS - Pois não é o que está escrito? O conjunto com esses três elementos é o plano, o que esta acontecendo com vocês? Vocês estão tentando usar a Geometria Euclidiana e por isso tentam desenhar o plano euclidiano, mas não é isso que está escrito, o que está escrito é que o plano é o conjunto formado pelas letras a, b e c.

...

MS - e o que são as retas?

P5 - Os pontos a e b.

MS - Então você pega o a e o b e está é a minha reta, esses dois elementos, o conjunto formado pelas letras a e a letra b é a minha reta, não precisa traçar nada. Não é isso que está escrito lá – se referindo ao enunciado do problema – *é o conjunto formado pela letra a e a letra b, nada mais.*

Neste momento houve uma pequena dispersão. O professor refez a pergunta para chamar a atenção dos alunos ao que se estava trabalhando.

MS - Então vamos lá quem são as retas? Os conjuntos - o professor interrompe a fala e os cusrsistas completam.

VS. - ab ac e bc

MS - Pega dois pontos quaisquer dessa minha geometria

P. - a e b

MS - Por a e b passa uma única reta?

P. - sim ... r1.

MS - Então, passa essa reta r1.

MS - Fale outros dois pontos?

P.- a e c

MS - Por a e c passa uma única reta nessa geometria?

P.- sim, a reta r2

MS - Outros pontos agora,

P. - b e c

MS - Por b e c? Quantas retas há nessa geometria?

P. - uma, a reta r3

MS - Tem outras possibilidades de escolher dois pontos?

VS. - Não.

MS - Só tem essas possibilidades ab ac ou bc, e para estes casos só passa uma reta... ou seja o primeiro postulado de Euclides é válido nessa geometria, essa geometria se chama geometria discreta

- ...

P6 - E se esses pontos forem colineares?

MS - O que significa ser colinear?

P6 - Estar na mesma reta.

MS - Quantos pontos tem em cada reta?

P7 - Infinitos.

MS - Nessa geometria?

...

MS - Não faz sentido nessa geometria ser colinear, pois nessa geometria cada reta só tem dois pontos não dá pra pegar o terceiro ponto naquela reta, eu só tenho três retas o conjunto ab o conjunto ac e o conjunto bc.

P. - Professor é muito difícil compreender isso.

Inferências

Associações gráficas com elementos da Geometria Euclidiana.

P1- retas.

P2- Triângulo.

P3- Eu fiz o plano

Argumentos relacionados à Geometria Euclidiana.

P4- Se os pontos estiverem alinhados não vai dar pra desenhar um triângulo.

P5- a folha – P5 mostra a folha do caderno onde estão desenhados os pontos, induzindo a ideia de que a folha representaria o plano.

P6- E se esses pontos forem colineares?- se referindo a possibilidade de a, b e c descreverem uma única reta.

P7- Infinitos.- se referindo a quantidade de pontos de uma reta

Por meio das falas dos professores percebe-se que há uma tentativa em associar a atividade proposta com a Geometria Euclidiana, esta tentativa se dá desde associações gráficas até argumentações que se relacionam intrinsecamente com conceitos Euclidianos. Em muitos casos pode se perceber que os professores não atentam as definições prescritas no enunciado. Note ainda que a ideia de que os pontos poderiam ser colineares é persistente durante toda a discussão, essa ideia aparece no princípio da discussão pelo professor P4 quando este tenta descartar a possibilidade de que três pontos formariam um triângulo e essa ideia volta a ser considerada pelo professor P6, quando se propõe uma análise das retas desta geometria.

Considerar a Geometria Euclidiana como ‘referencia’ para o estudo de outras geometrias nem sempre se constitui como uma boa ferramenta, o professor ao trabalhar com as geometrias não euclidianas pode, no entanto, aproveitar essas relações estabelecidas pelos alunos para mostrar que os resultados a que chegam não são compatíveis com a nova geometria a ser apreendida. Diferenciando e estabelecendo a partir daí novos conceitos e a estrutura geométrica da nova geometria.

4.10 A necessidade de um modelo

O terceiro encontro foi destinado ao trabalho das geometrias: Hiperbólica e Esférica, o professor iniciou o trabalho com demonstrações da Geometria Euclidiana e a explicação da necessidade de supor em alguns casos que por dois pontos passam **uma única** reta.

Segue as transcrições de parte destes momentos.

> MS - *É importante que vocês saiam daqui compreendendo que a Geometria Euclidiana é dessa forma porque se estabeleceu convenções, estabeleceu verdades sem demonstrações, não se demonstrou que por dois pontos passa uma única reta, se acredita nisto, e eu vou mostrar hoje que existe uma geometria que por dois pontos passa mais do que uma reta...*
> P1 - *Professor* - P1 interrompe a fala do professor que estava ministrando o curso
> MS - *Oi*
> P1 - *Vamos polemizar um pouco* – risos – *veja bem, eu posso fazer uma reta em cima de outra reta, uma reta sobre outra reta, eu posso fazer infinitas retas sobre outra reta...*
>
> P1 ao falar gesticula com a mão no ar o traçado imaginário da representação da reta euclidiana, tentando enfatizar que mesmo na Euclidiana é possível que haja mais do que uma reta passando por dois pontos.
>
> MS - *Não, não, não, retas distintas, se eu fizer uma reta sobre outra vou ter retas iguais.*
>
> O ministrante, tenta chamar a atenção do cursista para o fato que há geometrias onde por dois pontos podem ser estabelecidos mais do que uma reta distinta.
> ...
>
> P2 - *Mudou todos os nossos conceitos.*
>
> Nesse momento começam haver discussões sobre a representação destas retas, alguns gestos feitos no ar induzem uma representação de reta em formato curvo,

passando por dois pontos também imaginários estabelecidos. O professor ministrante percebe e pergunta aos professores.

MS - *Em qual superfície? Se o plano for o plano Euclidiano a reta é essa mesmo*- representando no ar a reta euclidiana- *não adianta você fazer assim* – gesticulando com a mão uma representação curva.

P3 - *E se for uma esfera?*
MS - *Pois é, depende da superfície que eu estou.*
P1 - *Mas professor, na esfera eu não terei uma reta eu terei uma circunferência.*

Na descrição acima é possível perceber que o professor P1 fica tão preso as representações euclidianas que não pode admitir existir uma geometria onde seja válida a condição de que por dois pontos passam mais do que uma reta, mesmo com a sugestão de um possível modelo, sua representação euclidiana o impede de conceber conceitos que não condizem com os elaborados na Geometria Euclidiana. No entanto, com o decorrer das atividades, principalmente práticas, onde se estabelecia a resolução de problemas por meio de materiais concretos foi possível perceber que essa resistência se dissipa.

Depois das discussões sobre a possibilidade ou não de existirem geometrias onde se tem mais de uma reta passando por dois pontos, o professor ministrante solicitou aos cursistas que pegassem a bola de isopor, alfinetes e linha, definiu o que seria reta naquela superfície – definida como sendo: o traçado demarcado com a menor quantidade de linha possível, presa a dois alfinetes espetados na superfície- a partir da definição foi possível ver professores determinando pontos nessa superfície pelos quais seriam possível estabelecer infinitas retas distintas (tais pontos se localizam nos polos).

Outra situação que o modelo colaborou para que se efetuasse a aprendizagem consistiu da possibilidade de existirem triângulos cuja soma dos ângulos internos seriam maiores ou menores do que 180º. A princípio ficou claro a discordância por parte dos cursistas quanto a essa afirmação, o ministrante realizou várias demonstrações que corroboravam para a validade da afirmação, ainda assim foi possível perceber professores procurando erros nas demonstrações – maifestando dessa forma a insatisfação quanto ao que se havia concluído -, quando se introduziu o trabalho com cornetas e esferas e incitou os professores a construírem triângulos nessas superfícies e posteriormente a medirem os ângulos desse triangulo, percebe-se não mais insatisfação, mas surpresa e compreensão da possibilidade de existirem tais triângulos.

Também fica passível de observação que quando apresentados os modelos e com o desenvolver das atividades nestes não há mais dúvidas que tratam de retas nesses modelos e de como estas podem ter representações distintas da estabelecida no modelo Euclidiano.

Também parecem ter ficado claro, questões como paralelismo sempre depois de atividades práticas com a utilização de modelos de superfícies os professores passavam a admitir a possibilidade de tais propriedades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A inserção do conteúdo Geometrias não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares da Rede Pública do Estado do Paraná em 2006, a qual prevê que no Ensino Fundamental o aluno deva compreender noções de Geometria Projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), Topologia (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção da Geometria dos Fractais e no Ensino Médio se aprofundem o estudo das noções de Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica, fez despertar o interesse de vários pesquisadores que passaram a averiguar quais foram as consequências desta inserção. Uma série de pesquisas que analisaram o impacto, a disseminação e a recepção dos professores estaduais frente a esta inserção foram feitas (SANTOS, 2009, LOVIS, 2009, CALDATTO, 2011).

Esta pesquisa por sua vez teve seu foco voltado a estudar, analisar e categorizar as dificuldades enfrentadas pelos professores frente à apreensão deste novo conteúdo, isto porque, com a finalidade de capacitar os professores e auxiliá-los com a preparação de material didático para aplicação em sala de aula, diversos cursos foram e ainda são oferecidos por Universidades Estaduais do Paraná, cujo foco é o estudo das Geometrias não Euclidianas. Tendo em vista a inquietação de alguns professores universitários que ministraram estes cursos, diante das dificuldades apresentadas pelos cursistas, e a impressão de que algumas das dificuldades demonstradas pareciam ser reincidentes apresentando-se nas diferentes turmas, surgiu à intenção por parte da autora em pesquisar: **Que dificuldades os professores apresentam quando se dispõem a estudar as Geometrias não Euclidianas**.

Algumas pesquisas (SANTOS, 2009 e LOVIS, 2009) cujo público pesquisado e as condições de pesquisa se assemelham com a apresentada neste texto mostram que há por parte dos pesquisados dificuldades em aceitar geometrias diferentes da Euclidiana, assim como se concluiu neste trabalho. Não foi possível, no entanto, nesta pesquisa, perceber se há a reincidência em todas as dificuldades detectadas, apesar de que algumas indicações corroboram para que haja realmente dificuldades que são persistentes nestes grupos pesquisados, serão necessárias ainda outras pesquisas que foquem a questão da reincidência para responder as indagações dos professores ministrantes dos cursos de capacitação, no entanto entendemos que o texto dessa dissertação colabora com a bibliografia no sentido de que por meio dele poderá se fazer futuras comparações a fim de se detectar ou não tais reincidências.

Além dessa possibilidade de pesquisa outras que não puderam ser concluídas neste trabalho, por falta de material ainda a ser pesquisado, ou por se caracterizar como uma pesquisa que fugia ao âmbito deste texto de dissertação, ainda poderão ser verificadas em pesquisas futuras, tais possibilidades serão apresentadas ao longo destas considerações.

A busca pelas dificuldades apresentadas pelos professores se deu por meio de análises realizadas em questionários e em filmagens gravadas durante a realização do curso, a metodologia escolhida para tal análise se sustenta na teoria de Análise de Conteúdos segundo Bardin (1977), isso porque se verificou nesta teoria a possibilidade de analisar materiais de diversos formatos como foi o caso dos materiais coletados na pesquisa: material escrito e em vídeo. Além disso, tal teoria considera também as entrelinhas, o subentendido, o que contribuiu para análises das diferentes situações que surgiram como o silêncio e a resistência por parte dos pesquisados em responder algumas questões.

A leitura dos questionários foi sempre acompanhada de consultas à bibliografia auxiliar que tratavam de conteúdos matemáticos, assim cada resposta foi confrontada com o que se têm na literatura matemática quanto a definição e concepção de algumas teorias. Isso permitiu realizar uma articulação e inferir quais seriam os erros cometidos pelos participantes da pesquisa no que concerne aos conteúdos trabalhados no curso.

Ficou claro nesta pesquisa que muitos dos professores pesquisados desconhecem as Geometrias não Euclidianas, dentre os que afirmam conhecer, suas descrições concisas sobre o assunto permitiu inferir que tal conhecimento é superficial. Mesmo quando se trata da Geometria Euclidiana, o conhecimento de muitos se restringe a simples associação deste conteúdo às questões métricas deste conhecimento, como cálculo de áreas e volumes. Percebeu-se ainda, que a maioria dos professores associa o conhecimento geométrico unicamente ao ensinado nas salas de aula, o que permitiu concluir que os conteúdos de geometria ensinado nas escolas tem se restringido a conteúdos que envolvem métricas e cálculos. Mesmo quando questionados sobre quais conhecimentos geométricos são inicialmente apreendidos pelas crianças, as respostas se alternavam entre conceitos ensinados na escola como conhecimento e diferenciação de figuras geométricas planas e espaciais – o que constitui a maioria das respostas – e conhecimentos que tratam de questões topológicas como perto longe, dentro fora, entre outros, no entanto não foi inferido pelos participantes da pesquisas que os conceitos deste segundo grupo pertenciam a Geometrias não Euclidianas. Ainda pôde-se perceber que mesmos esses conhecimentos, quando considerados pelos professores, estavam de alguma forma associados a conceitos trabalhados dentro de uma instituição escolar, sem ênfase de conhecimentos apreendidos por meio da vivência do aluno. De modo geral as geometrias, mesmo a Euclidiana, se apresentaram por vezes como conteúdos matemáticos desvinculados da vida.

Ao serem realizadas as análises das dificuldades apresentadas pelos professores, percebeu-se que a maioria das dificuldades possuía entre si uma forte relação, o que possibilitou classificá-las em duas categorias, a saber: "Dificuldades relacionadas ao conhecimento da geometria de Euclides", e "Dificuldades que permeavam conhecimentos específicos das Geometrias não Euclidianas".

As dificuldades enquadradas na categoria relacionadas à Geometria Euclidiana puderam ainda ser classificadas em três subdivisões: "Erros conceituais", "A não compreensão da representação dos entes geométricos" e "A insistência em atribuir aos objetos geométricos características algébricas".

Quanto aos erros conceituais, se destacaram dificuldades em definir a Geometria Euclidiana, um número considerável de professores emitiu suas respostas limitadas aos comentários sobre a insegurança que os professores sentiam ao tratar do assunto.

Outro problema percebido nesta pesquisa diz respeito ao conceito de dimensão. Os professores quando questionados acerca de dimensão de espaços confundiram-se e consideraram medidas de grandezas de objetos (geométricas ou matemáticas), não apresentaram definições convergentes com a definição de dimensão de um espaço geométrico.

Quanto à representação dos entes geométricos, se conclui que na maioria das vezes a representação é entendida como o próprio ente, não houve a compreensão de que a representação, muitas vezes usada no ensino de geometrias, se distingue do ente representado. A reta, o plano euclidiano e outras figuras geométricas foram identificados como a própria representação, tal identificação foi um dos principais complicadores para a aprendizagem das Geometrias não Euclidianas, uma vez que, quando foram apresentados os entes das outras geometrias, suas representações diferiam das representações Euclidianas, o que causou nos cursistas, resistências em aceitar esses novos entes geométricos. Concluiu-se que o desenho utilizado como facilitador da aprendizagem, quando não compreendido apenas como uma representação, pode se constituir em um complicador para a aprendizagem de novos conceitos.

Além das figuras, a álgebra também foi muito considerada pelos professores como auxiliadora para a compreensão de conceitos geométricos. Em alguns casos, detectou-se que quando impossibilitados de utilizar conceitos algébricos na resolução de problemas, os professores sentiram dificuldades em apresentar soluções para problemas geométricos. Mesmo quando a situação tratava de questões práticas como a medição da distância de um ponto a outro em uma sala, percebeu-se que havia sempre a intenção de tratar os problemas apresentados no curso, em problemas cujas resoluções partiam de fórmulas ou teorias matemáticas, sem menção das possibilidades práticas para a solução dos mesmos.

Ao considerar esta primeira categoria de dificuldades que são as relacionadas à Geometria Euclidiana, concluiu-se que o enraizamento da Geometria Euclidiana e Analítica promove uma barreira à aprendizagem das Geometrias não Euclidianas. O desprendimento destes conhecimentos é necessário ao tentar introduzir novos conceitos nos quais as representações não condizem com as costumeiramente usadas.

A segunda categoria, que tratou de dificuldades próprias dos conhecimentos das Geometrias não Euclidianas, foi subdividida e apresentada em três seções: "Dificuldades em aceitar entes geométricos cujas representações contrastassem com as representações usuais da Geometria Euclidiana", "Busca de semelhança com a Geometria Euclidiana" – o que frequentemente contribuía para construção de erros, já que em muitos casos era fornecida uma resposta que se adequasse ao sistema euclidiano – e "A necessidade de um modelo".

Os professores apresentaram dificuldades em aceitar entes geométricos cujas representações diferiam das representações de objetos da Geometria Euclidiana. Dentre os entes e resultados das Geometrias não Euclidianas que mais sofreram resistência destacam-se a representação da reta, o paralelismo entre retas e a soma dos ângulos internos de um triângulo. Foi visível a reação dos cursistas em rejeitar, de imediato, tais possibilidades que contrariavam a intuição, algumas insatisfações na utilização do termo reta diante de uma situação onde a representação não condiz com a Euclidiana pôde ser percebida nas respostas dadas a questão (5,3). Essa resistência também descrita na história das descobertas das Geometrias não Euclidianas é resultado de um enraizamento das representações Euclidianas, a geometria de Euclides por ter entes instintivamente aceitos e perceptivelmente passíveis de observação provoca no indivíduo a reação de negação frente a conceitos que contrastam com os da Geometria Euclidiana, o que se caracterizou em dificuldades para a aprendizagem das Geometrias não Euclidianas.

Em alguns momentos do curso, frente a uma atividade que tinha como foco Geometrias não Euclidianas, foi possível perceber a tentativa de utilização de resultados da Geometria Euclidiana para resolução do problema proposto, talvez por ainda não estarem adaptados aos novos modelos geométricos, os professores forçavam uma situação na qual se pudesse usar a geometria conhecida por eles, Essa busca por semelhança entre as geometrias deu origem a uma das subseções de dificuldades à qual denominou-se de "Busca de Semelhança com a Geometria Euclidiana", as dificuldades desta seção não se caracterizaram necessariamente pela busca, mas devido a ela surgiram conceitos que não eram definidos nas geometrias que foram trabalhadas, por exemplo, foi admitido que na geometria discreta, definida como sendo o conjunto de três pontos, existiriam triângulos uma vez que de acordo com os professores estes pontos poderiam não ser colineares o que sugeria que cada um dos pontos representaria o vértice do triângulo.

A última subseção denominou-se: "A necessidade de um modelo", essa subseção, no entanto, não foi criada devido às dificuldades que os professores apresentaram, mas sim devido aos resultados didáticos conseguidos quando houve a apresentação de modelos de superfícies nas quais puderam ser verificados os conceitos das novas geometrias. Percebeu-se que no momento que o curso passou a trabalhar com materiais como a bola de isopor ou a corneta, e foram propostas atividades que deveriam ser realizadas nestas superfícies, os professores não só passaram a compreender e aceitar mas admitiram, sem necessidade de inferência do professor que ministrava o curso, que o que faziam era conceber possibilidades de Geometrias não Euclidianas. Por esse motivo a falta de um modelo pode ser considerada como uma das dificuldades para aceitação e compreensão das Geometrias não Euclidianas.

Conjecturou-se, no início, que dificuldades em trabalhar com sistemas axiomáticos poderiam se caracterizar como um dos problemas para o ensino das Geometrias não Euclidianas. Não foi possível, no entanto, com base no material coletado inferir que os professores apresentassem problemas relacionados à lógica e aos sistemas axiomáticos, mas pareceu-nos claro que a axiomatização da teoria geométrica pode ter sido um dos responsáveis pelas dificuldades apresentadas. Para tal conclusão, no entanto, seriam necessária questões específicas que tratassem do processo axiomático e atividades que despertassem nos cursistas a necessidade do uso da axiomatização e das inferências lógicas, o que não foi contemplado nesta pesquisa. Essa questão pode, no entanto, direcionar a continuidade desta pesquisa.

Esperamos ter contribuído com a bibliografia existente até o momento para que se verifiquem quais das dificuldades descritas e constatadas no grupo pesquisado possam ser amenizadas, afim de que o ensino das Geometrias não Euclidianas possa ser contemplado em sua totalidade.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática.** Brasília: SBM, 1984.

AABOT, Edwin A. **Planolandia: Um romance de muitas dimensões**. São Paulo: Conrad, 2002.

ALVES-MAZOTTI, Alda J.; GEWANDSZNAJER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2ª ed. São Paulo: Thomson, 2004.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Euclides, Geometria e Fundamentos**. Revista do Professor de Matemática.** SBM, São Paulo, n 45. p 1-9, 2001.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias Faces da Matemática:** Tópicos para Licenciatura e Leitura em Geral. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM, 1997.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: edições 70, 1977.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: ZAHAR, 1969.

BARROS, Rui M. de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliane; GERÔNIMO, João R. **Geometria Euclidiana Plana:** Um estudo com o Software Geogebra**.** Maringá: EDUEM, 2010.

BAUER, Martin W.; AARTS, Bas. A construção do Corpus: Um princípio para a coleta de dados qualitativos. In: BAUER, Martin W.; GASKELL, George. **Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som**. Petrópolis: Editora Vozes, 2008. p. 39-63.

BECKER, Oscar. **O pensamento matemático**. São Paulo: Editora HERDER, 1965.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. Sobre a beleza nua: A geometria plana de Euclides. In: BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática Através dos Tempos:** Um guia fácil e prático para professores e entusiastas**.** 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010. Cap. 14, p. 159 – 166.

BONGIOVANNI, Vincenzo.; JAHN, Ana Paula. De Euclides às geometrias não euclidianas. **Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, nº 22, p.37-51, junho 2010.

BONOLA, Roberto. **Geometrias não Euclidianas**. Buenos Aires: Espasa – Calpe Argentina S. A., 1951.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 1999.

BRITO, Arlete de Jesus, MORAES, Lafayette. A Obra de Girolamo Saccheri e a História das Geometrias Não Euclidianas. **Zetetike,** UNICAMP, Campinas**,** v. 6, n. 10, p. 105-114. 1998.

BRITO, Arlete de Jesus. **Geometrias Não – Euclidianas:** Um Estudo Histórico – Pedagógico. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas, 1995.

CALDATTO, M. E. **O Processo coletivo de elaboração das diretrizes curriculares para a educação básica do Paraná e a inserção das geometrias não euclidianas**. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARMO, Manfredo P. do. Geometrias Não-Euclidianas. **Matemática Universitária**; SBM, Rio de Janeiro, nº 6, p. 25-48, 1987.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. Tradução de João Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2008.

FRANCO, Valdeni Soliani, GERÔNIMO, João Roberto**. Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático**. Maringá: EDUEM, 2010.

GARNICA, A.V. M. História oral e educação matemática. In BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. de L. (org). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 77 - 98

HOFFMAN, Kenneth.; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear**, 2^a ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1979.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1956.

KALEFF, Ana Maria. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na resolução de Problemas introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de professores de Matemática. **Bolema,** Rio Claro, ano 20, nº 28, p. 69-94, 2007.

KALEFF, Ana Maria. Sobre o Poder de Algumas Palavras e Imagens Quando se Busca Avançar Além das Noções Euclidianas Mais Comuns. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, nº 45, p.26-42, 2004.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. In: Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural. 1974.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e Imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1968.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol. 2**, 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:** o que pensam e o que fazem os professores. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná 2009.

MORAES, Roque. Análise de Conteúdo. **Revista Educação,** Porto Alegre, v.22, p. 7-32, 1999.

MORAES, Roque. Uma Tempestade de Luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n.2, p.191-211, 2003.

PAVANELLO, Regina Maria. ANDRADE, Roseli Nozaki Grave de. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. **Educação Matemática em Revista,** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, n. 11, p. 78-86, abr 2002.

POINCARÉ, Henri. **O Valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

SAMPAIO, J. C. V. **Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores**. São Paulo: EduFscar, 2008.

SANTOS, Talita Securon. **A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica.** Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO PARANÁ. **Diretrizes Curriculares para as Séries Finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio**. Curitiba, 2008. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/livro_e_diretrizes/diretrizes_matematica_2008.pdf> Acesso em: 5 agosto 2010.

SOUZA, Julio Cesar de Mello. **O escândalo da Geometria**. Rio de Janeiro: Editora Aurora. 1948.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. 1 ed. Lisboa: Gradiva, 1989.

VELOSO, Eduardo. Há vida na geometria para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones**. Educação e Matemática: revista da associação de professores de matemática**, Lisboa, n. 96, p. 18-19, fev. 2008.

APÊNDICES

Apêndice A

Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática

Questionário 1 – dia 31/08/10 - manhã

Nome ou identificação: ____

Local: ____________________________________

Data de nascimento: _____/_____/_____

Nível de ensino em que trabalha:

(   ) Fundamental - Tempo de atuação: ______

(   ) Médio - Tempo de atuação: _______

(   ) Superior - Tempo de atuação: _______

(   ) EJA - Tempo de atuação: _______

Sobre a sua formação:

Faculdade em que se formou: ____

Ano em que se formou: ________________

1 – Descreve o que você entende por Geometria Euclidiana.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

2 - Antes de serem incluídas as Geometrias Não Euclidianas nas DCE, você sabia da sua existência? Se a respostar for sim, descreva quais Geometrias você conhecia ou tinha ouvido falar.

3 – Você conhece alguma diferença entre conceitos ou resultados válidos na Geometria Euclidiana que não são válidos nas Geometrias Não Euclidianas? Mesmo não tendo certeza dessas diferenças escreva alguns desses conceitos ou resultados.

Apêndice B

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

Introdução às Geometrias não Euclidianas – Turma Cianorte

Questionário 2 – dia 31/08/10 - tarde

Nome ou identificação: ____

1 – Descreva o que você entende por Topologia.

2 – Para você, quais são os primeiros conceitos geométricos que as crianças aprendem?

3 – Você sabe o que significa dimensão de um espaço? Dê exemplos de espaços com diferentes tipos de dimensão.

Apêndice C

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

Introdução às Geometrias não Euclidianas – Turma Cianorte

Questionário 3 – dia 20/09/10 - manhã

Nome ou identificação: ____

1 – Após o primeiro encontro do curso você modificou o seu conceito sobre Geometria Euclidiana? Descreva o que você entende por Geometria Euclidiana.

2 – Foram citados no primeiro encontro alguns postulados de Euclides. Cite os que você se lembra?

3 – A Geometria Espacial e Geometria Analítica trabalhadas na Educação Básica são geometrias não Euclidianas? Por quê?

4 – Quando estamos em uma estrada reta temos a impressão que as laterais da estrada se encontram em um ponto mais distante aos nossos olhos. Um aluno curioso, atento a sua aula na qual você introduzia o conceito de retas paralelas perguntou se as duas retas paralelas (representadas pelas laterais da estrada) se encontram no infinito. O que você diria a esse aluno e como explicaria isso a ele?

Apêndice D

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

Introdução às Geometrias não Euclidianas – Turma Cianorte

Questionário 4 – dia 20/09/10 – Tarde

Nome ou identificação: ____

Afinal, as retas paralelas se encontram no infinito? Explique.

____

____

____

____

____

____

Apêndice E

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

Introdução às Geometrias não Euclidianas – Turma Cianorte

Questionário 5 – dia 27/09/10 - manhã

Nome ou identificação: ____

1 – Para que serve os postulados na Geometria Euclidiana?

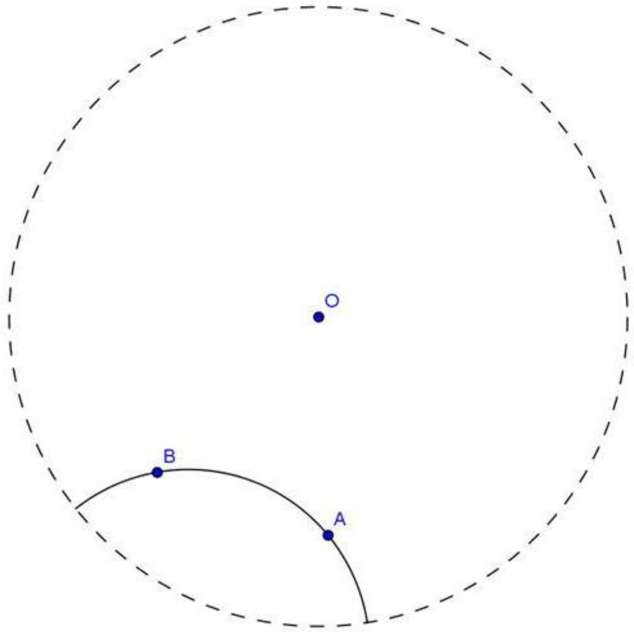
____
____
____
____
____
____

2 – Cite pelo menos um resultado que diferencie a Geometria Euclidiana da Geometria Projetiva.

____
____
____
____
____

3 – O motorista do carro atrás da seta da figura a seguir, recebeu a seguinte instrução: *Para que você chegue ao destino* (bolinha na figura) *basta que você siga reto*. Neste caso o que significa seguir reto para você? Comente e faça um esboço de sua resposta.

4 – Em um dos modelos da Geometria Hiperbólica a reta é representada como o arco que passa pelos pontos A e B da figura a seguir. É possível introduzir uma maneira de calcular a distância entre dois pontos de tal forma que a reta seja infinita. Essa afirmação é aceitável? Por quê?



5 – Em Geometria Espacial, você provavelmente estudou a Geometria da Superfície Esférica. Vivemos em um planeta que é aproximadamente esférico.

c) Desenhe no verso desta folha uma esfera;
d) Desenhe uma reta na sua superfície.

6 – Hoje em dia muito se fala dos Fractais, escreva o que você já ouviu falar sobre eles.

Apêndice F

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

Introdução às Geometrias não Euclidianas – Turma Cianorte

Questionário 6 – dia 27/09/10 - final

Nome ou identificação: ____

1 – Terminou o curso. O que ficou?