UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

TALITA SECORUN DOS SANTOS

A INCLUSÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

MARINGÁ

2009

TALITA SECORUN DOS SANTOS

A INCLUSÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Co-Orientador: Profa. Dra. Regina Maria Pavanello

MARINGÁ

2009

TALITA SECORUN DOS SANTOS

A inclusão das Geometrias Não-euclidianas no Currículo da Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Franco

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Adair Mendes Nacarato

Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato
Universidade São Francisco

Rui Marcos de Barros

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Maringá, 21 de Maio de 2009.

DEDICATÓRIA

Ao meu marido **Luciano Ferreira** e aos meus pais **Irene Ap. Secorun dos Santos** e **Benedicto dos Santos** que sempre estiveram ao meu lado, dividindo comigo as angústias, decepções, incertezas e conquistas. Ao meu filho **João Bento** que vive dentro de mim e me inspira e me dá força para lutar por todos os meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Ao terminar o mestrado só me resta agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente, contribuíram para que meu sonho se tornasse realidade. Agradeço primeiramente a **Deus** por ter me dado a vida e a vontade de lutar e batalhar pelos meus objetivos. Agradeço de forma especial:

Ao meu marido **Luciano Ferreira** que sempre se mostrou companheiro, atencioso, prestativo e preparado para lidar com todos os momentos bons e ruins que passamos no decorrer de todo o mestrado.

Aos meus pais **Benedicto** e **Irene** que sempre foram meu alicerce, meu porto seguro.

A minha sogra **Lúcia Leonor Ferreira**, que como uma segunda mãe, me ajudou em muitos momentos difíceis.

A FECILCAM e a todos meus companheiros de trabalho da FECILCAM, que compreenderam amigavelmente a algumas ausências em reuniões e comissões. Em especial a uma grande amiga e companheira de trabalho **Veridiana** que sempre se mostrou disposta a me ajudar no que fosse preciso, em todas as horas e situações.

Ao professor **Valdeni Soliani Franco** que muito mais que um orientador foi um grande amigo que nunca deixou de acreditar em mim, sempre se mostrando um grande incentivador e me apoiando em todos os momentos. Professor muito obrigada, esse trabalho é nosso.

A professora **Regina Maria Pavanello** cujas críticas e sugestões foram importantíssimas para a conclusão desse trabalho.

A professora **Adair Mendes Nacarato** que nos auxiliou com seu parecer na banca examinadora da qualificação e que gentilmente aceitou o convite para participar da banca examinadora dessa dissertação.

Ao professor **Rui Marcos de Oliveira Barros** que colaborou de forma significativa na banca examinadora da qualificação e que gentilmente aceitou o convite para participar da banca examinadora dessa dissertação.

A professora **Clélia Maria Ignatius Nogueira** que nos auxiliou na construção dessa pesquisa.

A todos os docentes e discentes do Programa de Mestrado, que muito contribuíram com diversas discussões e reflexões.

Aos professores participantes do curso de Geometrias não-euclidianas que aceitaram colaborar, respondendo a todos os questionários. A participação deles foi fundamental nesse trabalho.

A um pequeno ser que vive dentro de mim e que cada dia me dá mais força e vontade para lutar pelos meus objetivos. **João Bento**, meu filho a mamãe te ama muito.

Muito obrigada a todos.

EPÍGRAFE

“A geometria é a arte de raciocinar sobre as figuras mal desenhadas.”

POINCARÉ

RESUMO

A inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná foi proposta no final de 2006 pelo Governo do Estado do Paraná nas Diretrizes Curriculares para Educação Básica. Este trabalho propõe analisar como professores da rede pública do Estado do Paraná reagiram à inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná, o que pensam a respeito de tal inclusão e se sentiriam mais preparados para abordar o tema com seus alunos após participarem de um curso sobre Geometrias não-euclidianas. Os dados da pesquisa foram obtidos em um grupo de cinqüenta professores da rede pública de ensino em um curso de Geometrias não-euclidianas, realizado em seis encontros em um total de vinte e quatro horas, oferecido pelo Núcleo Regional de Educação de Maringá em pareceria com a Universidade Estadual de Maringá. Os instrumentos de pesquisa foram: diário de campo da pesquisadora, gravações dos encontros e questionários respondidos pelos professores. A análise dos discursos dos professores foi realizada de acordo com a metodologia da Análise de Conteúdo (Moraes, 1999). A pesquisa mostrou as principais dificuldades, dúvidas e insegurança dos professores no trato com as Geometrias não-euclidianas e com a Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: Geometrias não-euclidianas. Diretrizes Curriculares para Educação Básica. Professores.

ABSTRACT

This study aimed at analyzing some public school teachers’ reactions and opinions concerned to the inclusion of Non-Euclidian Geometry in the Basic Education Curriculum in Parana State, proposed by the government and stated at the State Basic Education Guidelines (Diretrizes Curriculares para a Educação Básica) at the end of 2009. The research data came from a group of fifty teachers from public schools that were taking a twenty-four-hour course on Non-euclidian Geometry, offered by Núcleo Regional da Educação in Maringa city in a partnership with Maringa State University (UEM). The research tools used were: the researcher’s diary, the meeting recordings, and questionnaires answered by the teachers. The teachers were encouraged to say how well and prepared they felt themselves to approach the topic with their students after have concluded a course on the subject. The analysis of the teachers’ speech was done accordingly to the Contend Analysis (Moraes, 1999). The research pointed out some of the main problems, doubts and lack of confidence the teachers have had and even felt when dealing with both Non-Euclidian Geometry and Euclidian Geometry.

Key-words: Non-Euclidian Geometry. State Basic Education Guidelines. Public School Teachers

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No final de 2006 a Secretaria de Educação do Estado do Paraná divulgou as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica (DCE) trazendo dentro do conteúdo estruturante Geometria o tópico Geometria Não-euclidiana.

A proposta das DCE para Geometrias não-euclidianas na Educação Básica não se refere apenas às geometrias que historicamente são denominadas como tais, ou seja, a Geometria Hiperbólica e a Elíptica, mas, a qualquer geometria que negue pelo menos um dos cinco postulados de Euclides. Isto significa que dentre outras geometrias, a proposta se refere à Topologia, à Geometria Projetiva, à Geometria dos Fractais e a Geometria na Superfície Esférica.

Sou professora da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão e como tal sei que as Geometrias não-euclidianas pouco ou raramente são tratadas nos cursos de Licenciatura em Matemática, e isso pôde ser confirmado em uma pesquisa que realizamos com professores da Educação Básica do Núcleo Regional de Maringá. Nesta pesquisa constatamos que os professores não se sentiam preparados para trabalhar com essas geometrias com seus alunos.

O Núcleo Regional de Maringá (NRE de Maringá) e a Universidade Estadual de Maringá (UEM) ofereceram cursos de formação continuada de professores para a apresentação das Geometrias não-euclidianas aos professores da Educação Básica, já que eles não se sentiam preparados para trabalhar com o tema. Fomos convidados pelo professor que ministrou o curso a acompanhar em meados de 2008 um grupo de cinqüenta professores que participou da primeira turma do curso de Geometrias não-euclidianas oferecido pela UEM em parceria com o NRE de Maringá.

Decidimos acompanhar esse grupo de cinqüenta professores nos seis encontros que tiveram, totalizando vinte e quatro horas, sobre Geometrias não-euclidianas. Para que dados importantes não fossem perdidos todos os encontros foram gravados. Fizemos também o uso de diário de campo e aplicamos sete questionários a todos os cinqüenta professores participantes.

Passamos a seguir a descrever como o trabalho será dividido:

O presente trabalho apresenta na seção 1, *As Geometrias não-euclidianas*, um estudo histórico-bibliográfico sobre as Geometrias não-euclidianas. Este estudo auxilia o entendimento do contexto histórico, tanto do surgimento, quanto da construção de tais geometrias, pois acreditamos que tal entendimento é bastante importante e muitas vezes pouco valorizado.

Na seção 2, *A proposta das DCE,* apresentamos a proposta das DCE de inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná.

Na seção 3, *As questões de pesquisa,* fazemos a apresentação da pesquisa e a metodologia que usamos.

Na seção 4, *Descrição dos encontros com os professores,* descrevemos passo a passo as atividades desenvolvidas em cada encontro, analisando os principais fatos observados durante o curso de Geometria Não-euclidiana.

Na seção 5, *Em busca da compreensão das respostas dadas pelos professores,* analisamos os dados coletados durante a pesquisa de campo.

Ressaltamos que a proposta desse trabalho é apresentar e propor discussões sobre a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica. A nossa intenção é darmos mais argumentos para um debate que promete ser muito importante.

1 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

1.1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Podemos dizer que o que hoje denominamos Geometria Euclidiana surgiu há aproximadamente 4.000 anos no Egito e na Babilônia, de uma maneira intuitiva, não sistemática, com uma série de regras práticas sugeridas pela experiência, objetivando principalmente aplicações às medições. De fato, as relações dessas sociedades, baseadas nas propriedades, impuseram a necessidade de medir.

Por outro lado, a geometria com um caráter dedutivo, apoiado em proposições gerais, teve seu início na antiga Grécia, com Tales de Mileto[1] e Pitágoras. Para Brito (1995, p. 25) "Thales apenas preparou a transformação da matemática para ciências dedutiva; a verdadeira transição ocorreu mais tarde, devido ao trabalho de Pitágoras".

Até meados do século XIX a Geometria Euclidiana foi considerada como a única geometria possível e perfeita para descrever o espaço em que vivemos. A obra *Elementos,* escrito pelo matemático grego Euclides que sistematizou todo o saber geométrico da época (300 a.C.) e tornou-se referência de uma geometria que até então parecia não passível de questionamentos. Sobre a existência de uma verdade única e inquestionável, Brito (1995, p. 30) destaca que: "Para os gregos, as verdades geométricas eram absolutas no sentido de independerem do tempo e do ser humano, além de fornecerem explicações racionais para o funcionamento do universo". Como salientam Piaget e Garcia (1983, p.91)

> Sem dúvida, a geometria é, nas matemáticas gregas, o ramo que deu prova de uma tal perfeição que se transformou, durante séculos, no próprio paradigma da ciências. Dois mil anos após Euclides, ela será para Newton o modelo para toda a construção de uma teoria científica e os seus *Principia* inspirar-se-ão neste modelo (PIAGET, GARCIA, 1983, p.91).

Para Piaget e Garcia (1983, p. 91) *os Elementos* têm:

---

[1] Thales de Mileto, que viveu entre 640-549 a.C., era mercador grego e em suas viagens adquiriu seus conhecimentos matemáticos no Egito e na Babilônia, na primeira metade do século VI a.C., introduzindo-os, posteriormente, na Grécia. (BRITO, 1995, p.23)

> ... o interesse de representar de um modo perfeito o tipo de geometria que vai dominar durante todo o período compreendido entre a Antiguidade e a época moderna. Estas características só serão postas em evidência no século XIX, no exacto momento de uma profunda evolução metodológica e de uma mudança de conceitos sobre o significado da geometria. Neste momento, as suas características e as limitações que elas comportavam serão colocadas em evidência (PIAGET, GARCIA, 1983, p.91).

Euclides[2], em sua obra *Elementos[3],* foi o primeiro a apresentar um sistema axiomático para a geometria, ou seja, um sistema formado por noções primitivas, definições, postulados, axiomas e teoremas. Para Brito (1995, p. 32) "[...] o sistema axiomático deriva do método dedutivo e do esquema de organização loca, ou seja, daquele que estabelece a validez de um resultado a partir de outros fatores geométricos conhecidos de antemão". Os axiomas (nos *Elementos*, são chamados de noções comuns) são o começo dessa cadeia dedutiva e são as afirmações não demonstráveis de caráter mais geral. Os postulados também são afirmações não demonstráveis, mas de caráter mais ligados ao conteúdo a que se quer tratar. Segundo Brito (1995, p. 35) "Hoje, porém, não fazemos mais esta diferenciação. Atualmente, entendemos por postulados o conjunto de axiomas e regras de inferência utilizadas na demonstração". Euclides procurou escolher como postulados as afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso como seria, em um certo sentido, evidentes por si mesmas.

Os cinco axiomas que aparecem no livro I de Euclides [4]como noções comuns são:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se iguais são somadas a iguais, os totais também são iguais.

---

[2] O valor dos seus trabalhos é independente da discussão ligada ao nome de Euclides enquanto autor dos *Elementos* (nome atribuído por alguns a um só homem e por outros a toda uma escola). Está igualmente fora do nosso âmbito ocuparmos-nos dos seus predecessores, que, depois de Proclus, escreveram sobre os elementos de geometria. Este autor fala de Euclides como de << aquele que reuniu os *Elementos*, pôs em ordem muitas coisas deixadas por Eudoxe, aperfeiçoou o que Theaetetus tinha começado e demonstrou rigorosamente aquilo que antes dele tinha sido vagarosamente demonstrado>>. (PIAGET, GARCIA, 1983, p.92)

[3] Os *Elementos* foram de suma importância para o desenvolvimento posterior da matemática, uma vez que neles está organizado todo o conhecimento matemático de um época, com exceção dos estudos sobre as seções cônicas e da geometria esférica. (BRITO, 1995, p. 34)

[4] Segundo o site www.euclides.org

3. Se iguais são subtraídas de iguais, os restos também são iguais.
4. Coisas que coincidem entre si, são iguais entre si.
5. O todo é maior que a parte.

Seguem, de acordo Gerônimo e Franco (2005, p.1), os cinco postulados de Euclides, conforme escritos no livro I dos *Elementos:*

1. Por dois pontos distintos passa uma única reta.
2. Um segmento retilíneo pode sempre ser prolongado.
3. Existe uma única circunferência com centro e raio dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta r corta duas outras retas s e t (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores (α e β) de um mesmo lado de r é menor que dois retos, então s e t, quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r.

Seguem, de acordo Gerônimo e Franco (2005, p.76), os cinco postulados (hoje chamados axiomas), numa linguagem atual:

1. Dois pontos distintos determinam uma reta.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.
3. É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Dados um ponto P é uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r.

1.2 O QUINTO POSTULADO

O quinto postulado que não tinha uma formulação tão simples quanto os primeiros, despertou o interesse de muitos matemáticos por mais de dois mil anos. O próprio Euclides deve ter considerado o quinto postulado pouco evidente, tanto que ele retardou o quanto possível o uso deste postulado. Brito, (1995, p. 54) destaca que: “A organização que ele deu aos *Elementos* foi esta. Os primeiros vinte e oito teoremas necessitavam somente dos primeiros quatro postulados para suas demonstrações e, a partir do vigésimo nono, utilizou o quinto postulado.”

Até meados do século XIX não houve nenhum matemático que questionasse a veracidade do quinto postulado, porque para eles não se tratava de um postulado, mas sim de um teorema. Acreditavam que seria possível demonstrá-lo usando os primeiros quatro postulados e um conjunto de definições. Grandes matemáticos tentaram, sem sucesso, a demonstração do quinto postulado, pois a maior parte destas tentativas de demonstração admitiam fatos que ou eram equivalentes a ele, ou não podiam ser demonstrados usando unicamente os outros quatro postulados.

Dentre os grandes matemáticos podemos citar Legendre[5]. Segundo Brito (1995, p.67) “As várias tentativas que Legendre fez para demonstrar o quinto postulado de Euclides apareceram, de 1749 a 1833, sucessivamente, nas diversas edições de seu livro[6] referido anteriormente.”

> Existem tentativas de provas de todos os tipos, desde as mais simples, que foram facilmente refutadas, até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitavam de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Mas todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, continham sempre um raciocínio circular que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar (CABARITI, 2004, p.32).

Depois de diversas tentativas de se demonstrar o quinto postulado, foi a negação do mesmo que levou a construção de novas geometrias, tão consistentes como a de Euclides. Existem duas maneiras de negar o quinto postulado. A primeira maneira dá origem à Geometria Hiperbólica, neste caso supomos que por qualquer ponto fora de uma reta, é possível traçar pelo menos duas retas paralelas a esta reta. A segunda culmina na Geometria Esférica, neste caso negamos a existência de retas paralelas. A “descoberta” das Geometrias não-euclidianas provocou uma mudança na maneira

---

[5]Segundo Brito (1995, p. 66) Adrian Marie Legendre foi um famoso matemático francês que viveu de 1752 a 1833.

[6] O Livro é denominado: Reflexões sobre diferentes maneiras de demonstrar a teoria das paralelas ou o teorema da soma de três ângulos de um triângulo.

de pensar o espaço e a verdade matemática. Essa mudança permitiu que se abrisse espaço para o estudo de outras geometrias.

A ordem que apresentaremos as Geometrias não-euclidianas não é necessariamente a ordem histórica, mas a ordem como as crianças constroem os conhecimentos geométricos, mesmo não tendo o conhecimento teórico, ou seja, o conhecimento não é tematizado.

1.3 A TOPOLOGIA

A topologia é uma classe de pensamentos geométricos vital para muitas áreas da matemática, e outras áreas do conhecimento humano. Pitorescamente conhecemos a topologia como a "Geometria da Borracha".

> Podemos considerar a grosso modo, a topologia como um tipo especial de geometria, relativo às formas e às maneiras que as superfícies podem assumir ao serem puxadas, esticadas, amassadas, sofrer múltiplas transformações, de uma aparência para outra, mas com a restrição que não sejam rompidas fronteiras (KOBAYASHI, 2001, p. 39).

A topologia, como ramo da matemática, é recente, embora suas principais idéias tenham mais de um século de existência. Inicialmente a topologia era tratada como um ramo da geometria. Mas com a necessidade de conceitos mais precisos para alguns termos, tais como: vizinhança, proximidade, continuidade e outras propriedades de espaços geométricos, a topologia passa a ser, no segundo quarto do século XX, ao lado da álgebra e da análise, parte independente e fundamental da matemática.

Segundo Kobayashi (2001, p.40), as pesquisas em geometria seguiram dois caminhos diferentes: "um conforme enfatizou Möbius, Riemann e Poincaré, chamado "topologia combinatória ou "algébrica" e o outro, "topologia conjuntiva" ou dos conjuntos de pontos, de Cantor".

Kobayashi (2001, p.41) afirma que o termo topologia foi utilizado pela primeira vez por Johann Benedict Listing (1808 -1882), em 1847, mas o marco inicial coube a Poincaré em 1885. Para Kobayashi (2001, p.42) Poincaré tem lugar de relevo entre os matemáticos que auxiliaram para a construção da topologia, já que seus estudos contribuíram não só para a topologia, mas ainda, para diversas áreas da matemática, da física e das ciências em geral.

Outro matemático importante e notável na construção da topologia é Augustus Ferdinand Möbius (1790 – 1868).

> Augustus Ferdinand Möbius (1790 – 1868) tornou-se conhecido na topologia por ter escrito um artigo falando da escrita sobre uma notável superfície de papel como uma fita (Möbius band), que só possui um lado. Difícil de se imaginar, mas extremamente fácil de se fazer, a faixa de Möbius atrai a curiosidade de todos que a conhecem, mas, por trás desta quase brincadeira, Möbius criou uma superfície de uma só face, e de uma aresta, que levou ao conceito de 2-complexo em topologia (KOBAYASHI, 2001, p.43).

É interessante salientar que, as propriedades topológicas de uma figura são mantidas mesmo quando está é submetida a alterações na sua forma e tamanho. Assim quando uma figura passa por transformações topológicas, ela perde muitas de suas outras propriedades geométricas.

Podemos descrever as transformações topológicas como alterações nos objetos, que podem ser descritas como:

- Esticar ou inflar o objeto, ou algumas de suas partes;
- Encolher o objeto, ou algumas de suas partes;
- Retorcer o objeto, ou algumas de suas partes;
- Cortar o objeto segundo uma linha suave nele demarcado e, posteriormente, colar uma na outra as duas bordas que foram geradas por esse corte, resgatando a superfície com a linha nela originalmente demarcada (considerando a mesma orientação).

Considerando as transformações topológicas pode-se observar que a Topologia não satisfaz nenhum dos cinco axiomas da Geometria Euclidiana, sendo considerada, portanto uma Geometria Não-Euclidiana.

1.4 A GEOMETRIA PROJETIVA

Podemos dizer que a história da geometria projetiva começa junto com o Renascimento, na Itália do século XV. Buscando dar mais realismo a suas obras os artistas introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectividade. Porém, levaram-se quase dois séculos para que as idéias dos pintores fossem formuladas matematicamente.

> O desenvolvimento das técnicas de representação dos objetos tridimensionais deu-se no Renascimento, época de grandes invenções. Ambrogio Bondone Giotto (1267 -1337), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Battista Alberti (1404 – 1485), Piero della Francesca (1420-1492), Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), Albrecht Dürer (1471 – 1528), Guidobaldo Del Monte (1545 – 1607) e outros contribuíram para o aparecimento e desenvolvimento da perspectiva central (KODAMA, 2006, p.24).

A geometria projetiva nasceu do interesse de se criar uma teoria que representasse as regras práticas que os artistas e os pintores da Renascença haviam descoberto para desenhar, de modo mais correto, a imagem suscitada em nossos olhos pelo objeto.

> Guidobaldo Del Monte (Sinisgalli, 1984) coloca pela primeira vez a perspectiva como um ramo da geometria. Foi a primeira obra da perspectiva a La Euclides, com definições, proposições e corolários. Não se trata mais de receitas, mas de verdadeiras demonstrações geométricas argumentadas e seguidas de aplicações práticas (KODAMA, 2006, p.25).

Para essa teoria, as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos em questão tinham pouco valor. Ao contrário, era de suma importância conhecer as propriedades visuais das figuras consideradas. A característica marcante da Geometria Projetiva é que duas retas quaisquer sempre se interceptam, ou seja, nessa geometria não existem retas paralelas. Essa nova geometria negligenciou, então, as velhas propriedades dos *Elementos* de Euclides e concentrou o interesse sobre as propriedades visuais da figura.

Os axiomas da Geometria Projetiva são distintos da Geometria Euclidiana. Um dos axiomas que nega o quinto postulado é encontrado em Coxeter (1974, p.24, tradução nossa) “Quaisquer duas retas passam por pelo menos um ponto”. Sendo assim na Geometria Projetiva não existem retas paralelas, pois duas retas se encontram em pelo menos um ponto, logo podemos dizer que a Geometria Projetiva é uma Geometria Não-euclidiana.

Embora, como avalia Brito (1995) não podemos afirmar que os artistas do Renascimento são os verdadeiros inventores das Geometrias não-euclidianas.

> Não há dúvidas de que eles utilizavam-se de uma geometria na qual as retas paralelas se encontram no infinito, porém, para eles, tratava-se de uma geometria euclidiana. Além disso, as Geometrias não-euclidianas enquanto sistema axiomático só surgiram com Gauss, Lobachevsky e Bolyai (BRITO, 1995, p.144).

O francês Girard Desargues (1591-1661) foi quem estabeleceu os fundamentos da Geometria Projetiva. Kodama (2006, p. 26) destaca que Desargues ao procurar generalizar as regras da perspectiva utilizadas pelos artistas, introduziu novos conceitos na geometria como ponto no infinito que teve a sua origem no ponto de fuga. Em sua vida de cientista, suas idéias só podiam ser entendidas e apreciadas pelos matemáticos mais destacados daquele tempo: Descartes, Fermat e Blaise Pascal. Somente no início do século XIX as idéias de Desargues começaram a encontrar reconhecimento geral.

1.5 A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A geometria hiperbólica foi desenvolvida, independentemente, por Nicolai Lobachevsky e Janos Bolyai. Lobachevsky dedicou mais de vinte anos à sua descoberta. Mas a sua primeira apresentação pública, feita à Sociedade de Física-Matemática da cidade de Kazan, em 1826, não foi bem aceita, já que colocava em dúvida a inquestionável Geometria Euclidiana. Lobachevsky não demonstrou nenhuma indecisão nas suas convicções, expondo publicamente suas “descobertas” em vários artigos e apresentações públicas.

> Em 1855 apresentou o original de sua *Pangeometria*, manuscrito em russo e em francês por outra pessoa, porque na época estava quase cego. No ano seguinte morreu esse que foi um dos primeiros homens a desafiar os dogmas da geometria euclidiana (BRITO, 1995, p. 124).

János Bolyai era filho de Farkas Bolyai que, segundo Brito (1995, p. 122), “Farkas passou muito tempo tentando provar o quinto postulado de Euclides, mas não chegou a qualquer conclusão”. O filho herdou do pai a paixão pelo quinto postulado, apesar do pedido de seu pai para que se ocupasse com outra coisa. Bolyai já tinha sistematizado sua Geometria em 1826 comunicando a seu pai que não a acolheu com entusiasmo. Sua teoria foi publicada em 1831. Em 1848 Bolyai descobriu que Lobachevsky já havia publicado a mesma teoria.

A geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica diferem não apenas no conteúdo, mas também na maneira como foram construídas. Enquanto a Geometria Euclidiana foi desenvolvida a partir da percepção tátil e visual e, posteriormente, axiomatizada, a Geometria Hiperbólica foi desenvolvida a partir da axiomatização e somente depois foram desenvolvidos modelos matemáticos para sua percepção tátil e visual. Segundo Brito (1995, p.137) "Beltrami[7], em seu livro *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, de 1868, propôs o primeiro modelo para essa geometria, denominado pseudo-esfera".

O matemático Henri Poincaré (1854-1912) apresentou dois modelos para a Geometria Hiperbólica. Um outro modelo foi criado pelo matemático Felix Klein (1849 – 1925). Para Brito (1995, p.140) "Klein, como Poincaré, propõe uma convenção para interpretar a geometria hiperbólica no plano euclidiano".

A Geometria Hiperbólica é a geometria que se obtém assumindo os quatro primeiros postulados da Geometria Euclidiana e negando o quinto postulado. O Axioma Hiperbólico segundo Greenberg (1973, p.148 – tradução nossa) nos diz que: "Na Geometria Hiperbólica existe uma reta *l* e um ponto P, não pertencente a *l*, tal que existe pelo menos duas retas que passam por P e são paralelas a reta *l".*

Tomando como verdade o Axioma Hiperbólico é possível demonstrar o Teorema Hiperbólico Universal[8] encontrado em Greenberg (1973, p.148 – tradução nossa) "Na Geometria Hiperbólica, para cada reta *l* e cada ponto P, não pertencente a *l,* existe pelo menos duas retas que passam por P e são paralelas a reta *l".*

Logo a Geometria Hiperbólica nega o quinto postulado de Euclides, sendo assim uma Geometria Não-euclidiana.

---

[7] Eugenio Beltrami (1835 – 1900) matemático italiano.

[8] A demonstração do Teorema Hiperbólico Universal pode ser encontrado em *EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES Development History* de autoria de Marvin Jay Greenberg.

1.6 A GEOMETRIA NA SUPERFÍCIE DA ESFERA

Após a Geometria Hiperbólica ser divulgada, surgiu a possibilidade de novas geometrias. O matemático alemão Bernhard Riemann[9] (1826 -1866), discípulo de Gauss foi o idealizador da Geometria Elíptica ou Riemanniana. Mas pode-se trabalhar de uma maneira bem mais elementar, utilizando-se para isso a superfície de uma esfera.

> Bem, se na geometria euclidiana, por um ponto fora de uma reta podemos traçar somente uma reta que não intercepta a reta dada; se na hiperbólica, por um ponto fora de uma reta pode-se traçar infinitas retas que não cortam a reta dada; então nessa geometria sobre a esfera, não existe nenhuma reta que passe por um ponto fora de uma reta dada que não a encontre (BRITO, 1995, p.150).

Segundo Brito (1995, p.150) "Na geometria sobre a esfera, as retas não são infinitas e o segundo postulado não é válido." Brito (1995) afirma ainda que:

> Riemann parte do primeiro, do terceiro e do quarto postulado de Euclides, além de um outro que afirma que "por um ponto tomado fora de uma reta não se pode tirar nenhuma paralela a essa reta" e constrói uma geometria inteiramente lógica, concluindo, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos (BRITO, 1995, p. 150).

1.7 A GEOMETRIA DOS FRACTAIS

Se olharmos a nossa volta, encontraremos diversas formas geométricas, difíceis de serem descritas pela Geometria Euclidiana. Suas formas apresentam uma maior complexidade e necessitam de uma nova linguagem para descrevê-las, interpretá-las e modelá-las. Essa nova maneira de interpretar, descrever e modelar essas formas geométricas surge com a Geometria dos Fractais.

Na Geometria dos Fractais nenhum dos cinco postulados de Euclides são satisfeitos, portanto essa geometria é uma Geometria Não-euclidiana.

---

[9] A geometria na superfície esférica foi considera pela sua primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por Riemann para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen.

Há uma série de acontecimentos anteriores que contribuíram para a construção da Geometria dos Fractais, porém seus autores nem sempre imaginavam a importância de suas pesquisas para o desenvolvimento dessa geometria. Vários trabalhos eram considerados como “monstros matemáticos” por desafiarem as noções comuns de infinito e para os quais não havia uma explicação objetiva. Podemos citar, entre outros, Cantor (1845 – 1918) que propôs um segmento do qual seria removido o seu terço médio, seguidamente o terço médio de cada um dos segmentos restantes e assim sucessivamente, gerando infinitos segmentos cujo comprimento total seria igual a zero. Outro trabalho interessante que colaborou para o surgimento da Geometria dos Fractais é o proposto por Von Koch, em 1904, e conhecido como Curva de Koch[10].

Benoit Mandelbrot[11] foi o iniciador das pesquisas sobre estas entidades geométricas por ele denominadas Fractais, por volta da década de 70 do século XX. O nome fractais vem do latim que significa criar fragmentos irregulares, fragmentar.

A Geometria Fractal está ligada à ciência do Caos, decorrente do fato de que as estruturas fragmentadas dessa geometria fornecem uma certa ordem ao caos, buscando padrões em um sistema aparentemente desordenado.

> No fim, a palavra “fractal” passou a representar uma maneira de descrever, calcular e pensar sobre formas irregulares e fragmentadas, recortadas e descontínuas – formas que vão das curvas cristalinas dos flocos de neve até as poeiras descontínuas das galáxias (GLEICK, 1989, p. 108).

Com essa breve introdução à história das Geometrias não-euclidianas fica mais claro e fácil de entender as dúvidas e incertezas vivenciadas pelos professores participantes do curso de Geometrias não-euclidianas.

---

[10] A curva de Koch é uma linha que delimita área finita e que possui comprimento infinito.

[11] Mandelbrot nasceu em Varsóvia em 1924.

2 A PROPOSTA DAS DCE

Na apresentação das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná Arco-Verde (2008 *in* PARANA 2008) afirma que estas

> [...]são frutos de um longo processo de discussão coletiva, ocorrido entre 2004 e 2008, que envolveu os professores da Rede Estadual de Ensino e, agora, se apresentam como fundamento para o trabalho pedagógico na escola. Durante os anos de 2004, 2005 e 2006 a Secretaria de Estado da Educação promoveu vários encontros, simpósios e semanas de estudo pedagógicos para a elaboração dos textos das DCE, tanto nos níveis e modalidades de ensino quanto das disciplinas da Educação Básica (ARCO-VERDE, 2008 p.8 *in* PARANÁ 2008).

Arco-Verde (2008 in PARANA 2008) afima ainda que:

> Ainda em 2007 e 2008, as DCE passaram por leituras críticas de especialistas nas diversas disciplinas e em história da educação. Tais leitores, vinculados a diferentes universidades brasileiras, participaram, também, de debates presenciais com as equipes disciplinares do DEB[12], com vistas aos necessáios ajustes finais dos textos (ARCO-VERDE, 2008 p.8 *in* PARANÁ 2008).

As DCE informam ainda que:

> ..., as disciplinas da Educação Básica terão, em seus conteúdos estruturantes, os campos de estudos que identificam como conhecimento histórico. Dos conteúdos estruturantes[13] organizam-se os conteúdos básicos a serem trabalhados por série, composto tanto por assuntos mais estáveis e permanentes da disciplina quanto pelos que se apresentam em função do movimento histórico e das relações sociais. Esses conteúdos, articulados entre si e fundamentados nas respectivas orientações teórico-metodológicas, farão parte da proposta curricular das escolas (PARANÁ, 2008, p. 26).

Almeja-se com as DCE,

> ... um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriações de conceitos e formulação de idéias. Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas, para que, o homem amplie seu

---

[12] Departamento de Educação Básica

[13] As DCE entendem conteúdos estruturantes como conhecimentos de grande amplitude, conceitos, teorias ou práticas, que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerando fundamentais para a compreensão de seu objeto de estudo/ensino.

> conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade (PARANÁ, 2008, p. 48).

Quanto à disciplina Matemática, as DCE propõem para a Educação Pública cinco conteúdos estruturantes:

- Números e Álgebra
- Grandezas e Medidas
- Geometrias
- Funções
- Tratamento da informação

Especificamente sobre o conteúdo estruturante Geometria as DCE segundo Paraná (2008, p. 55) trazem que para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos:

- geometria plana
- geometria espacial
- geometria analítica
- noções básicas de Geometrias não-euclidianas

Para o Ensino Fundamental, as DCE segundo Paraná (2008, p. 55) destacam, que o conteúdo geometria "tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo."

Em se tratando do conteúdo noções de Geometrias não-euclidianas, afirma que:

> Neste nível de ensino, o aluno deve compreender: [...] noções de Geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linha do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noções de geometrias dos fractais (PARANÁ, 2008, p.56).

Em se tratando do conteúdo estruturante Geometrias, no Ensino Médio, as DCE segundo Paraná (2008) trazem que:

> No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Nesse nível de ensino, os alunos realizam análises dos elementos que estruturam a geometria euclidiana, através da representação algébrica, ou seja, a geometria analítica plana (PARANÁ, 2008, p.56).

Ao se referir ao ensino das Geometrias não-euclidianas no Ensino Médio, as DCE trazem que:

> Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de Geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas,[...] (PARANÁ, 2008, p.57).

As DCE afirmam ainda que:

> Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na representação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésica; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulos esféricos; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: pólos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p.57).

Destacam ainda as DCE segundo PARANÁ (2008, p.57) que “As abordagens das Geometrias: fractal, hiperbólica e elíptica não se encerram, unicamente, nos conteúdos aqui elencados.” Dando assim liberdade para o professor, desde que explore conceitos básicos, investigar e realizar outras abordagens.

No entanto, como professora de um curso de licenciatura em matemática[14], sei que o tema Geometrias não-euclidianas nem sempre é conhecido por professores, ou é um tema abordado em sua formação inicial. Logo, assim que soube da inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica do Estado do Paraná,

---

[14] Professora assistente do Departamento de Matemática da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão - FECILCAM

comecei a me questionar como esse tema seria abordado pelos professores da Educação Básica e como eles reagiriam a tal inclusão. Em um questionário diagnóstico com perguntas abertas, enviado aos professores do Núcleo Regional de Maringá no final de 2007 constatamos que os professores da Rede Pública de Maringá, conheciam muito pouco ou desconheciam completamente as Geometrias não-euclidianas. Começamos então a nos questionar se seria realmente possível a inclusão dessas geometrias na Educação Básica e quais as principais dificuldades que surgiriam.

3 AS QUESTÕES DE PESQUISA

Considerando que o tema Geometrias não-euclidianas não faz parte em geral, dos currículos dos cursos de formação inicial de professores de matemática, e que os professores conhecem muito pouco, ou desconhecem completamente o tema, delimitamos o problema norteador da investigação que leva ao levantamento de hipóteses, à definição dos objetivos, à organização dos procedimentos e à forma de análise dos dados coletados.

Tendo em vista a situação relatada, nos perguntamos: **Como os professores sentiram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná? O que pensam a respeito? Após participarem de um curso sobre Geometrias não-euclidianas se sentem mais preparados para abordar o tema com seus alunos?**

Foram estes questionamentos que nos levaram a realização da pesquisa que tem os objetivos propostos a seguir.

3.1 OBJETIVOS

Dados as questões acima colocadas nos propusemos a propor a pesquisa cujos objetivos são aqui delimitados.

Objetivo geral:

- Investigar o que pensam os professores da Educação Básica do NRE de Maringá, participantes de um curso de formação continuada em Geometrias não-euclidianas, sobre a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica e suas possibilidades em abordá-las em sala de aula.

Objetivos específicos.

- Investigar os conhecimentos iniciais em Geometrias não-euclidianas dos professores participantes do curso sobre Geometrias não-euclidianas.

- Verificar qual a opinião desses professores sobre a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica.
- Detectar quais as dificuldades dos professores na compreensão das Geometrias não-euclidianas.

Formulado o problema, e os objetivos, partimos para a escolha dos procedimentos de pesquisa.

3.2 OPÇÕES METODOLÓGICAS E INSTRUMENTOS DE COLETA DE INFORMAÇÕES

Tendo em vista os objetivos a serem alcançados, esta pesquisa se caracteriza como de cunho qualitativo interpretativo. No entanto alguns dados quantitativos serão usados no decorrer da pesquisa, pois segundo Borba (2004, p.4) “dados quantitativos podem ser utilizados dentro de uma pesquisa qualitativa.”

Os sujeitos participantes da pesquisa foram cinqüenta professores da Educação Básica do Núcleo Regional de Maringá, participantes do curso de Geometrias não-euclidianas. Quanto à formação trinta e dois professores possuíam formação em Ciências com habilitação em matemática e dezoito professores com licenciatura plena em matemática. Quanto ao tempo de magistério tínhamos doze professores com menos de dez anos de magistério e trinta e oito com mais de dez anos de experiência no magistério

3.3 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

A pesquisa foi realizada no decorrer de um curso sobre Geometrias não-euclidianas com cinqüenta professores da Educação Básica do Núcleo Regional de Maringá promovidos pela UEM em parceria com o NRE de Maringá e ministrado por um docente do Departamento de Matemática da UEM.

Definidos os procedimentos para a pesquisa, iniciamos em julho de 2008, a pesquisa de campo após parecer favorável do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, COPEP.

Para coletar os dados da pesquisa foram utilizados os seguintes instrumentos:

- Questionários (Apêndice I) aplicados aos professores do Núcleo Regional de Maringá, no final de 2007 visando investigar se esses professores conheciam algo sobre Geometrias não-euclidianas, se trabalhavam com o tema em sala e se sabiam sobre a Inclusão no Currículo da Educação Básica.

- Questionários (Apêndice II) aplicados aos professores participantes do curso de Geometrias não-euclidianas. Foram aplicados a todos os participantes, sete questionários nos seis encontros que tivemos com o grupo de cinqüenta professores, questionários estes que se encontram no Anexo II. Todos os questionários eram anônimos e ao grupo de professores foram explicados os objetivos da pesquisa. Os questionários eram constituídos por perguntas abertas e fechadas, cujo número de questões variou de um questionário para outro. O nosso interesse nas respostas dos professores não era avaliar quantitativamente o conhecimento dos professores, mas detectar os principais obstáculos que esses professores enfrentariam no decorrer do curso e qual seria o principal caminho para seu melhor aproveitamento. O primeiro questionário foi aplicado no início do primeiro encontro e teve dois objetivos principais. O primeiro foi traçar o perfil dos professores, analisando a sua formação e tempo de magistério. O segundo foi demarcar as impressões que os professores tinham em relação às Geometrias não-euclidianas. Estas questões tinham como objetivos colher as opiniões desses professores sobre os motivos que levaram a inclusão das Geometrias não-euclidianas e qual a importância que eles davam em trabalhar com essas geometrias na Educação Básica. O segundo, terceiro, quarto e quinto questionários foram respondidos pelos professores no início do segundo, terceiro, quarto e quinto encontro respectivamente. Estes questionários tinham como objetivo detectar conhecimentos prévios em alguma Geometria Não-Euclidiana e conhecimentos relativos ao encontro anterior, quando foi trabalhada uma das Geometrias não-euclidianas. Apenas no último encontro aplicamos dois questionários. Um no início do encontro com questões relativas ao quinto encontro, e outro, ao fim do sexto encontro, envolvendo perguntas sobre todos os encontros anteriores, para podermos fazer um apanhado geral das impressões e dificuldades que os professores enfrentaram no curso de uma maneira geral.

- Diário de Campo composto por observações feitas pela pesquisadora durante o curso de Geometrias não-euclidianas.
- Gravações de todos os encontros do curso de Geometrias não-euclidianas que foram ouvidas e continham informações importantes para a pesquisa.

Unindo os questionários aplicados juntamente com as gravações feitas dos encontros e as observações do diário de campo, passamos à leitura do material coletado e à elaboração dos eixos centrais para análise fornecida.

3.4 ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES COLETADAS

As informações recolhidas no transcorrer da pesquisa de campo, foram feitas leituras e releituras, a partir do que passamos a identificar o que havia de importante nelas com relação ao nosso problema de pesquisa.

Analisamos os questionários aplicados aos professores participantes do curso sobre Geometrias não-euclidianas, as gravações dos encontros e o diário de campo escrito durante o curso, visando investigar:

- A formação pessoal dos professores: habilitação profissional e tempo de atuação no magistério.
- Os conhecimentos prévios em Geometrias não-euclidianas.
- Quais as principais dificuldades dos professores em trabalhar com essas geometrias na Educação Básica.
- Quais obstáculos atrapalham a construção, por parte dos professores, das Geometrias não-euclidianas.
- Os eventuais problemas com a Geometria Euclidiana.
- A possibilidade que ao fim do curso, os professores se sintam mais fortalecidos para discutir as Geometrias não-euclidianas com seus alunos.

Na análise dos documentos, utilizamos a metodologia da Análise de Conteúdo (Moraes, 1999).

Moraes (1999) considera a análise de conteúdo como:

> [...] uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum (MORAES, 1999, p. 2).

Para Moraes (1999, p.2) a análise de conteúdo é uma metodologia de pesquisa que "Constitui-se em bem mais do que uma simples técnica de análise de dados, representando uma abordagem metodológica com características e possibilidades próprias".

A tarefa de análise do material coletado, estudado na pesquisa, foi dividida em cinco etapas. A primeira etapa de organização das informações, com estabelecimento de códigos que facilitassem a análise do material.

Para a preparação das informações da pesquisa, separamos os questionários em grupos de cinqüenta, que era o número de professores que participaram do curso e responderam os questionários, e enumeramos os grupo de questionários de um a sete, seguindo a ordem que foram aplicados. Foram aplicados sete questionários. Ou seja, o primeiro questionário recebeu o número 1, o segundo o número 2 e assim sucessivamente até o sétimo questionário que recebeu o número 7.

Fizemos uma releitura de todo o material, estabelecendo códigos adicionais associados ao sistema de codificação estabelecido anteriormente. Assim os questionários que receberam o número 1, foram codificados de 1 a 50, ou seja, 1.1, 1.2, 1.3,... ,1.50. Representando assim as respostas do primeiro questionário aplicado ao grupo de cinqüenta professores participantes do curso de Geometrias não-euclidianas. O mesmo procedimento foi aplicado nos demais grupos de questionários. Por exemplo, o questionário 5.34 representa o quinto questionário respondido por um dos cinqüenta professores. Isso facilitou a análise dos dados e nos ajudou a retornar a um documento específico quando foi desejável e necessário. É importante deixarmos claro que, por exemplo, o professor 5.34 não é o mesmo professor 2.34. A codificação de cada grupo foi feita de maneira aleatória, pois não existia nenhuma identificação nos questionários que possibilitassem uma ligação entre as respostas obtidas em outros questionários.

Depois de ouvidas todas as gravações, feitas nos seis encontros que tivemos com o grupo de professores, conseguimos algumas falas de professores que foram usadas no decorrer do texto. Tais falas foram importantes e mostram dúvidas, questionamentos e incertezas dos professores no trato com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica.

Essas falas dos professores também foram codificadas para facilitar a análise das mesmas. Para codificar tais falas foram usados o símbolo P seguido do número do encontro em que a fala foi ouvida e um terceiro número para representar o professor. Por exemplo, P 2.1, representa uma fala de um professor no segundo encontro, tal professor chamamos, durante o segundo encontro, de professor um.

O segundo passo foi o processo de Unitarização dos dados investigados. Leituras e releituras foram feitas do material coletado, com o objetivo de estabelecer as unidades de análise[15]. Neste processo, as respostas dos professores, em cada grupo de questionário, foram separadas pelos significados que comportavam. Os excertos das respostas dos professores nos questionários foram denominados de unidades de significados.

> No processo de transformação de dados brutos em unidades de análise é importante ter em conta que estas devem representar conjuntos de informações que tenham um significado completo em si mesmas. Devem poder ser interpretadas sem auxílio de nenhuma informação adicional (MORAES, 1999, p.8).

Com as unidades de significados determinadas partimos para a terceira etapa do processo, denominada Categorização. Moraes (1999) entende a etapa de categorização como:

> ... um procedimento de agrupar dados considerando a parte comum existente entre eles. Classifica-se por semelhança ou analogia, segundo critérios previamente estabelecidos ou definidos no processo (MORAES, 1999, p.8).

Para a determinação das categorias, nos atentamos a convergência de idéias presentes em duas ou mais respostas de professores para uma mesma pergunta. Ou seja, a categorização foi feita a partir dos dados obtidos na coleta. Podemos

---

[15] Também denominadas unidades de registro ou unidades de significados.

assim dizer que optamos por uma abordagem do tipo indutiva-construtiva, que segundo Moraes (1999)

> ...toma como ponto de partida os dados, construindo a partir deles as categorias e a partir destas a teoria. É, portanto, essencialmente indutiva. Sua finalidade não é generalizar ou testar hipóteses, mas construir uma compreensão dos fenômenos investigados (MORAES, 1999, p.14).

Sobre as características que as categorias devem obedecer, Moraes (1999) enfatiza que:

> A categorização é sem dúvida, uma das etapas mais criativas da análise de conteúdo. Entretanto, seja com características definidas a priori, seja com uma categorização a partir de dados, o estabelecimento de categorias necessita obedecer a um conjunto de critérios. As categorias devem ser *válidas*[16]*, exaustivas*[17] *e homogêneas*[18]*.* A classificação de qualquer elemento do conteúdo deve ser *mutuamente exclusiva*[19]*.* Finalmente uma classificação deve ser *consistente*[20]*.* Mesmo admitindo-se diferenças na aplicação e interpretação destes critérios, é importante discuti-los e compreendê-los. O eventual não atendimento a algum deles numa pesquisa deve ser justificado adequadamente (MORAES, 1999, p.9).

Com a definição das categorias, o quarto passo da análise de conteúdo foi a descrição. Para etapa de descrição apresentamos a organização de quadros, tabelas e gráficos que representam as categorias determinadas anteriormente. Sobre a fase de descrição Moraes (1999) destaca que:

---

[16] "A validade ou pertinência exige que todas as categorias criadas sejam significativas e úteis em termos do trabalho proposto, sua problemática, seus objetivos e sua fundamentação teórica." (MORAES, 1999, p.9)

[17] "Dizer que um conjunto de categorias deve ser exaustivo significa dizer que deve possibilitar a categorização de todo conteúdo significativo definido de acordo com os objetivos da análise" (MORAES, 1999, p.10).

[18] "Dizer que um conjunto de categorias é homogêneo significa poder afirmar que todo o conjunto é estruturado em uma única dimensão de análise" (MORAES, 1999, p.10).

[19] "Um mesmo dado não pode ser incluído em mais de uma categoria, ou seja, cada elemento ou unidade de conteúdo não pode fazer parte de mais de uma divisão" (MORAES, 1999, p.10).

[20] Também conhecido como critério de objetividade ou fidedignidade. "Quando um conjunto de categorias é objetivo, as regras de classificação são explícitas com suficiente clareza de modo que possam ser aplicadas consistentemente ao longo de toda a análise. Isto significa que não deveria ficar nenhuma dúvida quanto às categorias em que cada unidade de conteúdo deveria ser integrada" (MORAES, 1999, p.11).

> O momento da descrição é, sem dúvida, de extrema importância na análise de conteúdo. É o momento de expressar os significados captados e intuídos nas mensagens analisadas (MORAES, 1999, p.12).

A última etapa da análise de conteúdo utilizada foi da interpretação, que refere-se mais especificamente à pesquisa qualitativa.

> Liga-se ao movimento de procura de compreensão. Toda leitura de um texto constitui-se numa interpretação. Entretanto, o analista de conteúdo exercita com maior profundidade este esforço de interpretação e o faz não só sobre conteúdos manifestos pelos autores, como também sobre os latentes, sejam eles ocultados consciente ou inconscientemente pelos autores (MORAES, 1999, p.12).

As análises dos questionários, com nossa compreensão das respostas dos professores investigados, foram feitas na ordem em que estes foram aplicados no decorrer do curso, acreditamos que isto facilita entendermos as dificuldades, dúvidas e aprendizados vivenciados pelos professores.

4 OS ENCONTROS COM OS PROFESSORES

Um estudo que busca compreender como os professores sentiram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná e o que pensam a respeito desta inclusão, deve necessariamente envolver professores que possam vir atuar no ensino dessas geometrias. Por esse motivo, fizemos a opção de acompanhar um grupo de cinqüenta professores participantes de um curso de Geometrias não-euclidianas, com o objetivo de analisar, se após este curso, os professores se sentem mais seguros em discutir o tema com seus alunos. Neste capítulo vamos discorrer em ordem cronológica o curso de Geometrias não-euclidianas, dando ênfase maior para os relatos que vão ao encontro dos objetivos da pesquisa.

4.1 O PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro foi iniciado com a apresentação do professor e a entrega do primeiro questionário (Apêndice II). A ênfase do encontro foram conceitos da própria Geometria Euclidiana. O encontro seguiu com um breve histórico da Geometria Euclidiana seguido da apresentação dos cinco axiomas e dos cinco postulados da Geometria Euclidiana. Os cursistas não apresentaram problemas em entender os cinco axiomas. A primeira dificuldade dos professores foi relacionada ao quinto axioma, que nos diz que o todo é maior que a parte. Todos os professores conseguiram aceitar com facilidade a validade de tal axioma, mas não aceitaram quando o professor ministrante afirmou que tal axioma não é válido. Os professores apresentaram muita dificuldade em aceitar o fato, mesmo depois de uma longa discussão era possível notar que a dúvida ainda permanecia para alguns. Os quatro primeiros postulados foram aceitos pelos professores sem resistência. Em relação ao quinto postulado, os professores apresentaram dificuldade de visualizá-lo, mas tal problema foi resolvido com uma figura para representá-lo. O professor ministrante explicou aos cursistas a grande inquietação que o quinto postulado de Euclides causou aos matemáticos durante quase dois mil anos. Explicou que muitos matemáticos acreditaram que tal postulado poderia ser demonstrado, tratando assim de um teorema, mas que todas as tentativas de demonstração do quinto postulado foram falhas. Os cinco postulados (hoje chamados axiomas), numa linguagem atual foram apresentados aos cursistas. Logo após a apresentação dos axiomas era possível perceber que alguns professores comentavam com seus colegas que não conheciam a palavra axioma. E estavam surpresos com toda a apresentação.

O primeiro encontro teve seqüência com a apresentação do seguinte problema aos professores:

"Sejam P = {a,b,c}, r_1 = {a,b}, r_2 = {a,c} e r_3 = {b,c}. Chame P de plano, r_1 , r_2 e r_3 de retas, e a, b e c de pontos. Mostre que nessa "geometria" vale o 1º Postulado dos Elementos de Euclides."

Os professores passaram a se reunir em grupos para tentar resolver o problema. Retas como definidas na Geometria Euclidiana eram desenhadas para representar as "retas" do problema. Houve grande dificuldade em aceitar uma geometria onde o plano era definido por apenas três pontos. O conceito que os professores possuíam de retas atrapalhou o entendimento dessa geometria. Nesse momento, o professor ministrante explicou aos cursistas que uma Geometria Não-euclidiana é uma geometria na qual não vale pelo menos um dos cinco Postulados de Euclides.

Dando seqüência ao curso o professor ministrante propõe as três atividades abaixo relacionadas sobre construções de triângulos. Para resolver as atividades os professores deveriam usar apenas régua e compasso.

1. Construir um triângulo sabendo que seus lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm.
2. Construir um triângulo sabendo que dois de seus lados medem 5 cm e 6 cm e um dos ângulos mede 30º.
3. Construir um triângulo sabendo que um lado mede 6 cm e dois de seus ângulos mede 30º e 45º.

Alguns professores demonstraram dificuldades em desenhar triângulos com os três lados conhecidos, como foi proposto na primeira atividade. Mas a grande dificuldade das atividades foi a construção do ângulo de 30°. O professor ministrante precisou desenhar com os professores o ângulo de 60°, traçar a bissetriz para obter assim o ângulo de 30°.

Com essas atividades percebemos a dificuldade dos professores em trabalhar com construções geométricas e com conceitos da própria Geometria Euclidiana. Dificuldade essa advinda principalmente de uma formação precária do conteúdo, conforme afirmam Pavanello e Andrade (2002):

> Pesquisas visando investigar como se encontra o ensino de geometria em nossa escola básica (Peres, 1995; Alves, et al., 1998; Lorenzato, 1995; Tancredi et al., 1998; Campo, Pires et al., 1998, entre outros), têm constatado como Pavanello (1989) que a geometria é pouco ensinada em nossas escolas, principalmente porque os professores consideram sua própria formação em relação a esse conteúdo bastante precária. (PAVANELLO E ANDRADE, 2002, p. 80)

Dando continuidade ao primeiro encontro o professor ministrante demonstrou a equivalência entre os postulados escritos por Euclides e os cinco axiomas escritos em uma linguagem atual. Para a demonstração da equivalência do quinto postulado e do quinto axioma foi necessário demonstrar vários resultados da Geometria Euclidiana.

Encerrando o primeiro encontro, o professor ministrante chamou a atenção novamente para os postulados de Euclides.

4.2 O SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro do curso foi marcado pela apresentação de conceitos topológicos possíveis de serem trabalhados na Educação Básica. O professor ministrante iniciou o segundo encontro com a entrega do segundo questionário.

Depois de recolhido o segundo questionário o professor ministrante pediu para que os professores diferenciassem as quatro primeiras perguntas abaixo das demais:

- Qual é o **comprimento** desta sala de aula?
- Qual a **medida** do ângulo feito por aquelas duas paredes?
- Qual **área** desta sala?
- Qual à **distância** da UEM até o colégio Rui Barbosa?
- Você é **vizinho** de Paulo?

- Maria derramou o café **fora** da xícara?
- José se encontra **separando** Maria?
- Ou ele **está entre** Maria e João?
- O móvel já está **dentro** da sala?
- Qual a **divisa (fronteira)** entre o Paraná e São Paulo?
- Roberto é um cara **aberto**?
- Já temos **direção** para caminhar?

O silêncio prevaleceu e nenhum professor se arriscou a responder, o professor ministrante explicou aos cursistas que entre os dois grupos de perguntas anteriores, há então uma diferença notável: o primeiro grupo está relacionado à quantidade do objeto, do fenômeno etc. enquanto o segundo grupo se relaciona com a qualidade. Explicou ainda que noções de longe/perto (vizinhança); dentro/fora (interior/exterior); aberto/fechado; separado/unido (conexo-desconexo); contínuo/descontínuo; orientado/não-orientado, são noções topológicas. Disse que estas noções costumam vir associadas a outras tais como: adjacências (proximidade), ordem etc., as quais, igualmente se incluem no rol das noções topológicas. Piaget afirma que as percepções do espaço em que vivemos começam com as topológicas para só depois surgirem as relações projetivas (projetividades, perspectividades etc.) e as relações euclidianas. São diversos os textos em que Piaget se refere a essas construções do espaço pela criança. Podemos citar, Piaget (1975), Piaget e Inhelder (1993), Piaget, Inhelder e Szeminska (1964).

O professor ministrante apresentou aos cursistas a Topologia, também conhecida como “Geometria da Borracha” ou “Geometria Elástica”, ou ainda, “Geometria das Deformações”. Ele chamou a atenção dos professores dizendo que as propriedades topológicas de uma figura são preservadas mesmo quando está submetida a alterações na sua forma e tamanho, isto é, quando a figura sob transformações topológicas, perde muitas de suas outras propriedades geométricas e seguiu definindo as transformações topológicas.

Atividades com bexigas, massa de modelar e a construção da Faixa de Möbius[21] foram realizadas com os professores. Alguns professores disseram que conheciam e já trabalharam com seus alunos com a Faixa de Möbius. Isso mostra que mesmo sem ter consciência, os professores já trabalhavam com as Geometrias não-euclidianas.

O segundo encontro teve seqüência com a apresentação de vários conceitos topológicos possíveis de serem trabalhados na Educação Básica. Iniciou-se com a Teoria dos Grafos.

O Problema das Pontes de Königsberg

No século XVIII havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel. Os moradores de Köenigsberg (hoje Kaliningrad, cidade da Rússia) se perguntavam se era possível fazer um passeio pela cidade passando **exatamente uma** vez em cada uma das sete pontes. Você consegue traçar um tal caminho para tal problema?

Depois de muita conversa e muita discussão o professor ministrante disse que tal problema foi resolvido em 1736 pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). Euler mostrou usando Teoria de Grafos que tal travessia não seria possível.

O problema das quatro cores foi proposto aos cursistas.

O problema das quatro cores[22]

[21] A Faixa de Möbius é uma superfície não orientável, uma forma tridimensional com apenas um lado. Obtem-se um modelo desta superfície identificando os lados opostos de um retângulo após um giro de 180°, ou seja, uma semi-torção. August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) idealizou a Faixa de Möbius em 1865.

[22]O Jogo das Quatro Cores foi criado em 1852, por Francis Guthrie, que percebeu que a maioria dos mapas dos atlas era pintada com quatro cores, respeitando-se o critério de não pintar dois países vizinhos com a mesma cor. Pediu a seu irmão, Frederick, que, como ele, era um aluno da Universidade de Londres, que demonstrasse matematicamente o teorema de que quatro cores bastariam para colorir qualquer mapa sem que as regiões vizinhas tivessem a mesma cor. De acordo com as regras do Jogo das Quatro Cores, em uma de suas primeiras modalidades, o jogador deve pintar uma figura que lhe será apresentada, subdividida em regiões, utilizando somente quatro cores, sem que regiões vizinhas sejam

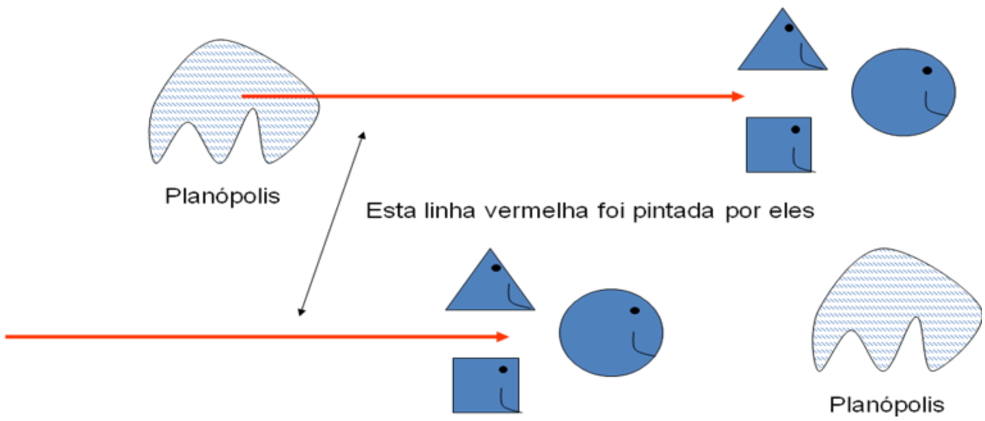
“Todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes"

O docente do curso explicou que até o presente momento não há uma demonstração do teorema das quatro cores feita sem o uso de computadores, que possa ser lida e apreciada pela comunidade matemática internacional. Ou seja, não existe uma demonstração do teorema das quatro cores que possa ser completamente escrita e publicada. Mas o mesmo problema pode ser resolvido com o uso de cinco cores[23].

Mas um desafio foi proposto aos professores:

Questão

Alguns cientistas de um planeta chamado Planolândia, portanto bidimensionais, tais como o Hum Quadrado, o Hum Triângulo e o Hum Círculo resolveram conhecer melhor o mundo que viviam. Para isso, organizaram uma expedição científica.



pintadas da mesma cor. Essa modalidade é conhecida como Colorindo Figuras Individualmente (SILVA E ORTEGA, 2002, p.1).

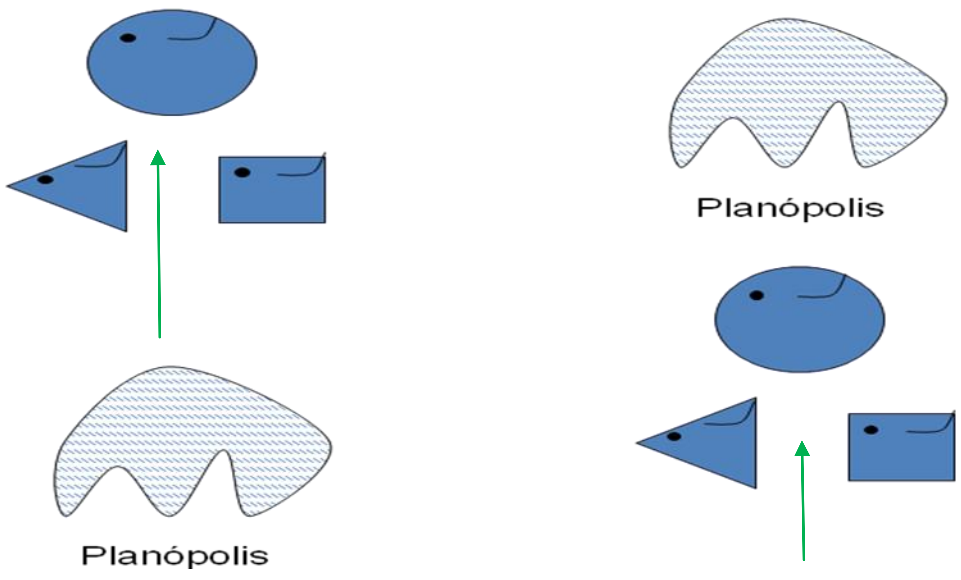
[23] Uma demonstração do teorema das cinco cores usando o Teorema de Euler para grafos planos pode ser encontrada num trabalho intitulado “Quatro Cores e Matemática” apresentado na II Bienal da SBM – UFBA, publicado por Sampaio (2004), disponível em www.bienasbm.ufba.br/M35.pdf

Quais são as possíveis formas deste planeta?

Figura 1 – Desafio 1 - Cientistas na Planolândia 1

Fonte: Sampaio (2008)

Em uma nova expedição científica, os mesmos cientistas resolveram fazer uma nova rota. Ao invés de percorrer no sentido oeste-leste, caminharam no sentido sul-norte. Deixaram agora uma marca verde.



Após este retorno, eles observaram que não haviam cruzado a linha vermelha nenhuma vez, ou seja, o único lugar de cruzamento das linhas vermelha e verde foi no início do percurso. E agora?

Quais são as possíveis formas deste planeta?

Figura 2 – Desafio 2 - Cientistas na Planolândia 2

Fonte: Sampaio (2008)

O segundo encontro foi encerrado logo após a apresentação do Toro aos professores.

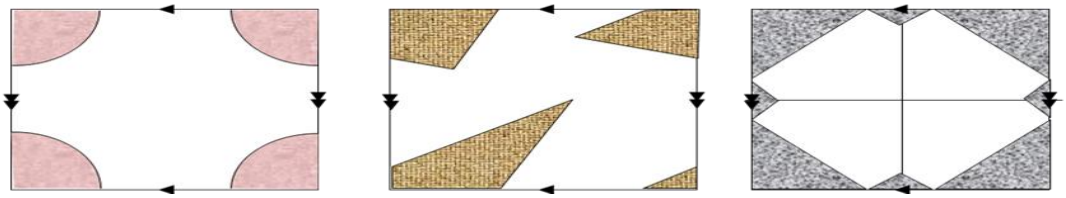
4.3 O TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro foi iniciado com a entrega do terceiro questionário e seguiu com a retomada das idéias da Planolândia e do Toro. A aula focalizou a Geometria Projetiva, seu histórico e sua ligação com a arte.

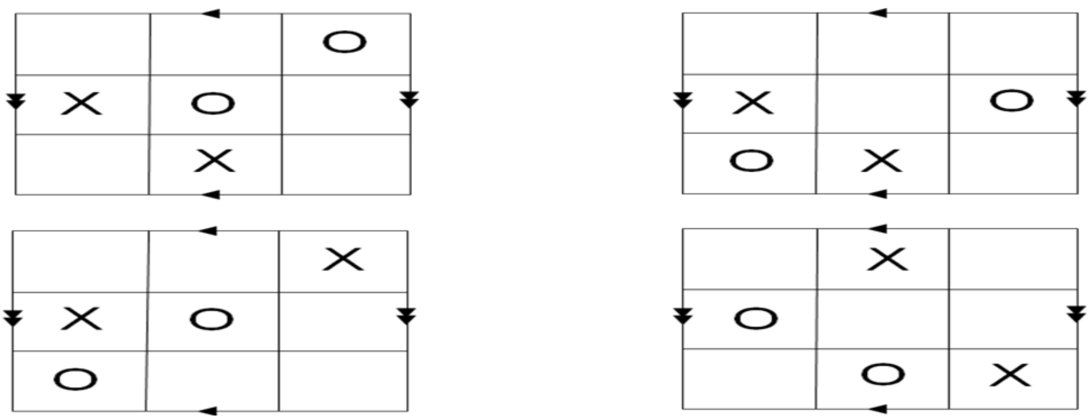
O terceiro questionário foi entregue aos professores. Nesse questionário, tivemos alguns problemas com as respostas dos professores. Alguns destes entregaram os questionários apenas no final do encontro. Com isso algumas respostas ficaram comprometidas, principalmente as que se referiam a Geometria Projetiva. Era possível perceber que os professores seguravam os questionários por terem medo de errar.

O docente do curso deu continuidade ao curso e sugeriu algumas atividades possíveis de serem trabalhadas na Educação Básica.

1. O que representa geometricamente cada uma das áreas sombreadas no toro plano?



2. Quais dos seguintes jogos-da-velha no toro plano o jogador do X ganha se for o próximo a jogar? Como ele deve jogar para ganhar? Quais dos seguintes jogos-da-velha no toro plano o jogador do O ganha se for o próximo a jogar?



3. Em quantas partes se subdivide o toro plano da figura a seguir, quando ele é cortado segundo a linha tracejada?

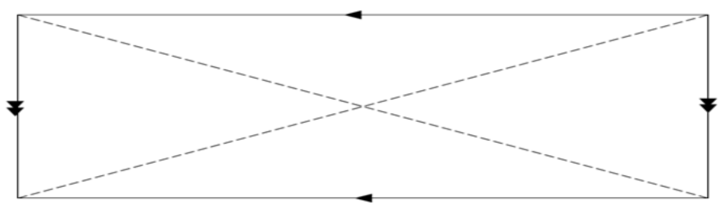


Figura 3 – Atividades no Toro

Fonte: Sampaio (2008)

A aula teve seqüência com a apresentação de mais uma Geometria Não-euclidiana, a Geometria Projetiva focalizando seus aspectos históricos e sua ligação com a arte.

Quadros de pintores famosos, figuras e fotografias foram apresentadas aos professores com o objetivo de trabalhar a imagem suscitada em nossos olhos pelos objetos do mundo exterior. As regras criadas para representar o que nossos olhos vêem, constituem a atual perspectiva, à qual a Geometria Projetiva fornece a indispensável base teórica. Para tal teoria, as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos em questão possuem escasso valor. Pelo contrário, o que é importante conhecer são as propriedades visuais das figuras consideradas.

O professor ministrante prosseguiu o encontro, convidando os professores para se sentirem como os pintores renascentistas. Algumas figuras foram apresentadas aos professores, iniciou-se por desenhos de figuras e objetos de forma simples, para depois partir para os mais complexos. Para isso, o professor ministrante iniciou com modelos bidimensionais. Depois dos cursistas dominarem com relativa facilidade essas duas dimensões espaciais, o docente do curso passou aos objetos tridimensionais. Foram apresentado aos professores alguns processos clássicos de medida visual, como o artifício do lápis[24] e da régua graduada[25]. Tais artifícios auxiliaram os professores a medir e obter as proporções. Além disso, serviram também para verificar as direções das diferentes partes do objeto.

O encontro foi encerrado com a apresentação de algumas noções elementares de perspectiva de observação. Foi definida perspectiva como sendo a arte de nos fazer ver os objetos, não como são na realidade, mas como nos aparecem à nossa vista. O professor ministrante explicou que, para pormos uma figura ou um objeto em perspectiva de observação, temos que considerar quatro elementos fundamentais que servem de base a toda operação de representação em perspectiva.

1. Linha de horizonte: em um desenho ou em um quadro de pintura, chama-se *linha de horizonte*, uma linha imaginária que está na altura da vista.

2. Ponto de vista: É a posição ocupada pelos olhos do observador que são reduzidos a um ponto geométrico.

---

[24] Consiste no emprego do lápis comum utilizado para desenhar. O artifício consiste em utilizá-lo para medir e obter proporções. Além disso, servirá também para verificar as direções das diferentes partes do objeto.

[25] Consiste no emprego da régua comum. Diferencia-se do artifício do lápis por usar uma régua graduada para encontrar as proporções e tem o benefício da medida numérica na própria régua.

3. Pontos de fuga: é a extremidade da perpendicular ou raio que vai do olho do observador à linha de horizonte, qualquer que seja a altura.

4. Ponto de fuga principal: é o ponto de fuga de todas as retas perpendiculares ao quadro.

4.4 O QUARTO ENCONTRO

O tema do quarto encontro foi a construção matemática da Geometria Projetiva com a apresentação de problemas da Geometria Euclidiana, que puderam ser resolvidos de uma maneira concisa e elegante, com a formalização propiciada pela Geometria Projetiva.

O quarto questionário (Apêndice II) com apenas duas questões foi entregue aos professores antes da aula ser iniciada. O professor ministrante esperou até que todos os professores entregassem os questionários para iniciar o encontro, evitando assim que problemas como o do encontro anterior voltassem a acontecer.

Após recolher todos os questionários o professor ministrante ressaltou aos professores que em termos axiomáticos a diferença marcante entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva, é que na Geometria Projetiva duas retas quaisquer sempre se interceptam. Ou seja, nessa geometria, e também na geometria esférica, não existem retas paralelas.

Com o objetivo de apresentar aos cursistas que a Geometria Projetiva pode ser explorada ainda, para solução de situações-problemas o professor ministrante apresentou propostas de problemas que podem ser resolvidos com o auxílio da Geometria Projetiva.

1ª Situação

Em uma competição de nado em mar aberto são colocadas balizas orientadoras para a largada. As retas geradas por essas balizas se interceptam em um ponto no mar. Queremos encontrar uma reta que cada competidor deve seguir na praia para ir diretamente até o ponto de interseção.

2ª Situação

Como traçar o ponto ***I*** de interseção das duas retas ***p*** e ***q***. Sendo que no caminho da reta ***p*** existe uma colina?

3ª Situação

Entre as torres ***A*** e ***D*** de energia deve-se colocar mais uma torre ***I***. Como determinar o lugar da torre ***I*** se entre as torre ***A*** e ***D*** existem duas casas?

Para que as situações-problemas fossem resolvidas, o professor ministrante apresentou aos cursistas alguns conceitos e resultados da Geometria Projetiva, tais como projeção central, centro de projeção, ponto impróprio, reta imprópria projetiva. E resultados como o Teorema de Pappus-Pascal, o Teorema de Brianchon e o Teorema de Desargues.

Teorema de Pappus-Pascal[26]: Se os vértices de uma figura de seis vértices estão situados consecutivamente em duas retas, então os pontos de interseção de seus lados opostos encontram-se em uma reta.

Teorema de Desargues[27]: Dados duas figuras de três vértices ABC e A'B'C' que se encontram em um plano de tal modo que as retas AA', BB' e CC', que unem seus vértices correspondentes, convergem em um ponto O, então os pontos de interseção dos lados correspondentes destas figuras de três vértices situam-se em uma reta.

Teorema de Brianchon[28]: Se os lados de uma figura de seis vértices passam consecutivamente por dois pontos, então as retas que unem seus pontos opostos encontram-se em um ponto.

O software Geogebra[29] foi usado pelo professor ministrante para auxiliar a resolução das situações-problemas propostos[30], que foram apresentadas aos professores.

[26] A demonstração deste teorema se encontra em COXETER, H. S. M. (1964).

[27] A demonstração deste teorema se encontra em COXETER, H. S. M. (1964).

[28] A demonstração deste teorema se encontra em COXETER, H. S. M. (1964).

4.5 O QUINTO ENCONTRO

O quinto encontro foi marcado pela apresentação da Geometria Hiperbólica e da Geometria da Superfície Esférica. O encontro mais uma vez foi iniciado pela entrega do quinto questionário, com apenas três questões.

Depois da entrega do quinto questionário a aula foi iniciada. O professor ministrante perguntou quem dos cursista se sentia preparado para diferenciar as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana. Após um tempo de silêncio uma professora levantou a mão e deu a resposta esperada.

O professor ministrante comentou, nesse momento, sobre as dúvidas advindas do quinto postulado de Euclides que nortearam a vida de muitos matemáticos durante séculos. Dissertou sobre a ligação dos matemáticos Nicolai Lobachevsky e Janos Bolyai com a Geometria Hiperbólica de sua história de vida. Eles foram apresentados como os idealizadores da Geometria Hiperbólica.

O docente do curso explicou aos cursista que a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica diferem não somente em seu conteúdo, mas que diferem também no modo como foram construídas. Ele explicou que enquanto a primeira foi desenvolvida a partir da percepção tátil e visual e posteriormente axiomatizada, a segunda foi desenvolvida a partir da axiomatização e somente posteriormente é que foram desenvolvidos modelos matemáticos para sua percepção tátil e visual.

O quinto encontro foi marcado por questionamentos, dúvidas, discussões, incertezas, curiosidades e muita dificuldade. O Axioma Hiperbólico[31], que contradiz o quinto postulado de Euclides foi apresentado aos professores, que mostraram

---

[29] O Geogebra é um software gratuito de matemática dinâmica que pode ser utilizado em ambiente de sala de aula que reúne geometria, álgebra e cálculo. Seu download pode ser feito pela página www.geogebra.at .

[30] As soluções dos problemas propostos podem ser encontrados em *Teoremas de Configuración, 1980,* de autoria de B. I. Argunov e L. A. Skorniakov.

[31] Axioma Hiperbólico: Na Geometria Hiperbólica existe uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente a *r*, tal que existem duas retas distintas que passam por *P* e são paralelas a *r.* *(*GREENBERG, 1973)

dificuldades em sua visualização. Foram também apresentados alguns resultados da Geometria Hiperbólica.

Seguem abaixo, alguns dos resultados demonstrados:

Lema (Teorema de Saccheri-Legendre)[32]: A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180º .

Teorema[33]: Existe pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos é menor que 180º.

Teorema Hiperbólico Universal[34]: Na geometria hiperbólica, para toda reta *r* e todo ponto P não pertencente a *r*, existe no mínimo duas retas distintas passando por P e paralela a *r*.

Teorema[35]: Na Geometria Hiperbólica, não existem retângulos e todos os triângulos têm a soma dos seus ângulos internos menor que 180º.

Corolário[36]: Na Geometria Hiperbólica, todos os quadriláteros convexos têm a soma dos seus ângulos internos menor que 360º.

Teoremas[37]: Na Geometria Hiperbólica se *r* e *r´* são duas retas distintas e paralelas, então quaisquer conjuntos de pontos em *r* eqüidista de *r´* no máximo em dois pontos.

Foi também apresentado o quadrilátero de Saccheri, um quadrilátero cujos ângulos da base são retos e os lados adjacentes à base são congruentes.

Até esse momento do encontro apenas alguns resultados da Geometria Hiperbólica haviam sido apresentados aos professores. Agora era necessário apresentar algum modelo real que satisfizesse o axioma hiperbólico. Dessa forma foi apresentado o

---

[32] A demonstração se encontra em GREENBERG, M. J.(1973).

[33] A demonstração se encontra em GREENBERG, M. J.(1973).

[34] A demonstração se encontra em GREENBERG, M. J.(1973).

[35] A demonstração se encontra em GREENBERG, M. J.(1973).

[36] A demonstração se encontra em GREENBERG, M. J.(1973).

[37] A demonstração se encontra em GREENBERG, M. J.(1973).

modelo plano idealizado por Felix Klein e dois modelos planos apresentados por Henri Poincaré.

Algumas propriedades da Geometria Hiperbólica foram discutidas com os professores, como no quadro a seguir:

Nesta geometria:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos;
- Uma reta é dividida em duas por um ponto;
- As retas paralelas nunca são eqüidistantes;
- Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira são paralelas;
- A área de um triângulo é proporcional ao defeito da soma dos seus ângulos;
- Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

Os softwares Geogebra, Cabri-géomètre[38] e Cinderela[39] auxiliaram na demonstração e visualização dos resultados da Geometria Hiperbólica. Mas, mesmo com a apresentação dos modelos e a visualização nos softwares geométricos, os professores ainda mostravam muita dificuldade em aceitar as "retas" e as propriedades dessa nova geometria.

O professor ministrante comentou com os professores cursistas que o software Geogebra já está implantado nos computadores das escolas da Rede Pública do Estado do Paraná e explicou-lhes como ele poderia ajudá-los a trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica.

Com o auxílio de cornetas que haviam sido trazidas pelos professores, o professor ministrante pediu que os cursistas construíssem triângulos sobre a superfície da

[38] O Cabri-géomètre é um software de geometria dinâmica de marca registrada da UJF – Université Joseph Fourrier - França

[39] O software Cinderela é um software de geometria dinâmica. O Cinderela pode ser adquirido na APM (Associação dos Professores de Matemática) e na SPM (Sociedade Portuguesa de Matemática).

corneta. Em seguida, com o uso do transferidor, pediu para que os professores medissem a soma dos ângulos internos do triângulo desenhado. Os professores encontraram triângulos com soma dos ângulos internos inferior a 180°, o que os deixaram surpresos.

O professor ministrante explicou aos professores que, com o auxílio de um cone e uma corneta, pode ficar mais claro a visualização da diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica. Assim, se desenharmos um triângulo na superfície de um cone e medirmos a soma dos ângulos internos do triângulo iremos obter 180°. Isto porque se recortarmos este triângulo obteremos sua planificação. No entanto, quando construímos um triângulo na superfície da corneta e medimos a soma dos ângulos internos desse triângulo temos uma soma inferior a 180°.

Inquirido sobre a maneira de se calcular a área do triângulo na superfície do cone, o docente do curso explicou que a fórmula usada para cálculo de área é a mesma da Geometria Euclidiana. Ressaltou, porém, que a maneira de se calcular a distância entre dois pontos na Geometria Hiperbólica é diferente, na Geometria Hiperbólica, a distância entre dois pontos A e B, no modelo de Poincaré é dada por:

$$d(A,B) = \left| \ln \frac{AU.BV}{AV.BU} \right|$$

onde U e V são os pontos ideais[40] da reta-h[41] AB e AU.BV/AV.BU é a razão cruzada entre A e B.

Na continuidade do encontro o professor ministrante sugeriu o seguinte problema aos professores:

Problema do urso: Um urso saiu de sua casa e caminhou 30 km ao sul. Depois virou a oeste e caminhou por mais 30 km. Então virou novamente e caminhou por mais 30 km ao norte. Qual não foi sua surpresa quando

[40] Os pontos de intersecção das retas hiperbólicas com o horizonte são pontos que não pertencem ao plano hiperbólico, chamados de pontos ideais ou finais da reta hiperbólica.

[41] Reta Hiperbólica que passa por A e B.

descobriu que voltara novamente a sua casa.

Questão 1: Esboce o percurso do urso. Que conclusão vocês chegaram?

Questão 2: É possível o urso chegar ao mesmo lugar da partida conforme o enunciado do problema?

O professor ministrante aproveitou o problema para iniciar o estudo da Geometria da Superfície Esférica.

O professor ministrante discorreu sobre as retas da Geometria Esférica, que são diferentes da reta da Geometria Euclidiana. Ressaltou que vivemos em uma superfície esférica, que os aeronautas e os marinheiros não utilizam a Geometria Euclidiana para se locomover. Assim, chegava o momento de se apresentar a reta na Geometria na Superfície Esférica. Tal reta é obtida com a interseção da superfície esférica com um plano que passa por seu centro. Tais interseções são círculos máximos, esses círculos são as retas dessa geometria. Assim, as retas serem curvas, não é um absurdo, explicou o professor ministrante.

Foram distribuídas bolas aos professores para que eles pudessem desenhar triângulos sobre a superfície esférica e calcular a soma dos ângulos internos desse triângulo. Os professores apresentaram dificuldade em desenhar os triângulos na superfície da esfera, dado que para se obter as retas era preciso obter os círculos máximos. Não se tratava de qualquer triângulo, mas de triângulos que tivessem como lados segmentos de retas da Geometria Esférica. Com o auxílio de transferidor os professores calcularam a soma dos ângulos internos do triângulo desenhado, obtendo uma soma superior a 180°.

O quinto encontro foi encerrado com o professor ministrante apresentando algumas propriedades da Geometria da Superfície Esférica, diferenciando-a da Geometria Euclidiana.

Nesta geometria

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos;

- O plano é uma superfície esférica, e a reta uma geodésica, ou circunferência de um círculo máximo;
- Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira se interceptam;
- Uma reta não é dividida em duas por um ponto;
- A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;
- Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

Um professor afirmou que a Linha do Equador e o Trópico de Capricórnio são duas retas paralelas da Geometria da Superfície Esférica. O professor ministrante explicou a esse professor que o Trópico de Capricórnio não é uma reta da Geometria da Superfície Esférica, pois o plano que corta a esfera e forma este Trópico não passa pelo centro da Terra, o que ele não o torna um círculo máximo.

4.6 O SEXTO ENCONTRO

Nesse último encontro os professores responderam a dois questionários, um no início do encontro e um ao final. O sexto encontro foi marcado pela apresentação da Geometria Fractal.

Como no quinto encontro não houve tempo de se trabalhar com algumas atividades na Geometria Esférica, o professor ministrante iniciou o sexto encontro com a realização de tais atividades. O propósito destas era trabalhar principalmente com conceitos da Geometria Euclidiana Espacial.

Primeira atividade proposta: A perpendicular do centro de uma superfície esférica a uma corda divide-a ao meio. Utilize este resultado na resolução do seguinte problema. Numa superfície esférica de raio 15 cm, a distância de uma corda ao centro é igual a 9 cm. Qual o comprimento da corda?

Segunda atividade: Sejam A e B dois pontos de uma superfície esférica S que não são extremos de um diâmetro de S. Mostre que existe uma e somente uma circunferência máxima de S passando por A e B.

Terceira atividade: Explique porque duas circunferências máximas quaisquer de uma superfície esférica se cortam nas extremidades de um diâmetro da superfície esférica.

Quarta atividade: Duas circunferências máximas são ditas perpendiculares se estiverem em planos perpendiculares. Mostre que para cada duas circunferências máximas existe uma terceira circunferência máxima perpendicular a ambas. Se duas circunferências máximas no globo terrestres passam pelos pólos, que circunferência máxima é perpendicular a ambas?

Quinta atividade: Na geometria esférica as retas são representadas por circunferências máximas. Encontre, se puder, cada uma das seguintes figuras em tal geometria.

a) Um triângulo eqüilátero.

b) Um triângulo com dois ângulos retos.

c) Um triângulo com três ângulos retos.

d) Um triângulo cujas medidas de seus ângulos internos somem 500º.

e) Um retângulo.

Uma circunferência, isto é, o lugar geométrico dos pontos sobre a esfera que dista de um ponto conhecido (centro da circunferência) uma distância conhecida (medida do raio da circunferência).

Encerrada a Geometria da Superfície Esférica, o professor ministrante iniciou o estudo da Geometria dos Fractais, que foi a última Geometria Não-euclidiana abordada no curso.

A Geometria dos Fractais foi apresentada como a Geometria da Natureza, e Benoit Mandelbrot, como o iniciador das pesquisas sobre estas entidades geométricas por ele denominadas Fractais.

O professor ministrante explicou que a Geometria Fractal possibilita abrir portas para vários caminhos na aprendizagem, tais como: estabelecer conexões com várias ciências, ajudar no estudo da Geometria Euclidiana, trabalhar de maneira lúdica nos computadores e com as tecnologias da informação nos vários níveis de escolarização, trabalhar conceitos da própria Geometria Euclidiana.

Fotos e figuras de fractais foram apresentados aos professores. O professor ministrante construiu com o auxílio de softwares geométricos etapas dos fractais: Curva de Peano, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinsk.

Para se obter a curva de Peano, deve-se proceder da seguinte maneira, conforme BARBOSA (2005):

1. Iniciamos com um segmento de reta;

2. Construímos um retângulo sobre o terço central de maneira que ele bissecte o retângulo, formando dois quadrados cujos lados têm a mesma medida da terça parte do segmento central;

3. Segue uma construção semelhante a cada um dos segmentos visíveis.

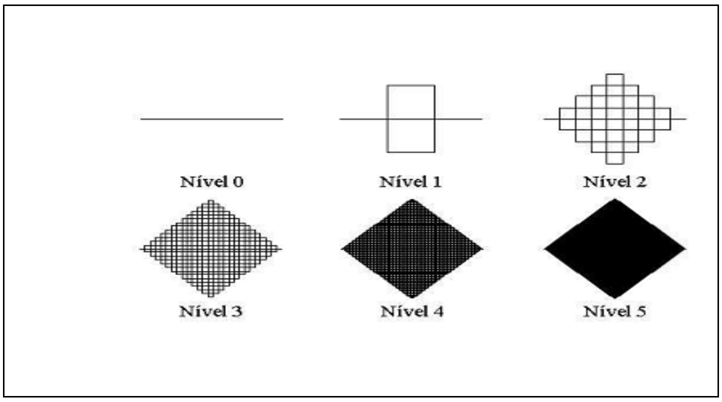


Figura 4 – Construção da Curva de Peano

Fonte: Famous Fractals, *on-line* (2008)

A curva de Koch foi desenvolvida pelo matemático sueco Helge Von Koch, essa curva possui uma característica peculiar, pois não é possível traçar uma tangente em ponto algum pertencente à curva. A construção da curva de Koch que será apresentada a seguir foi baseada em Barbosa (2005), vejamos:

1. Considerar um segmento de reta;

2. Dividir esse segmento em três outros segmentos de forma que fiquem com o mesmo tamanho;

3. O segmento central deverá ser substituído por outros dois segmentos congruentes de modo a formar um triângulo eqüilátero sem a sua base;

4. Temos agora quatro novos segmentos que deverão ser substituídos conforme os passos 2 e 3, e assim devemos proceder sucessivamente.

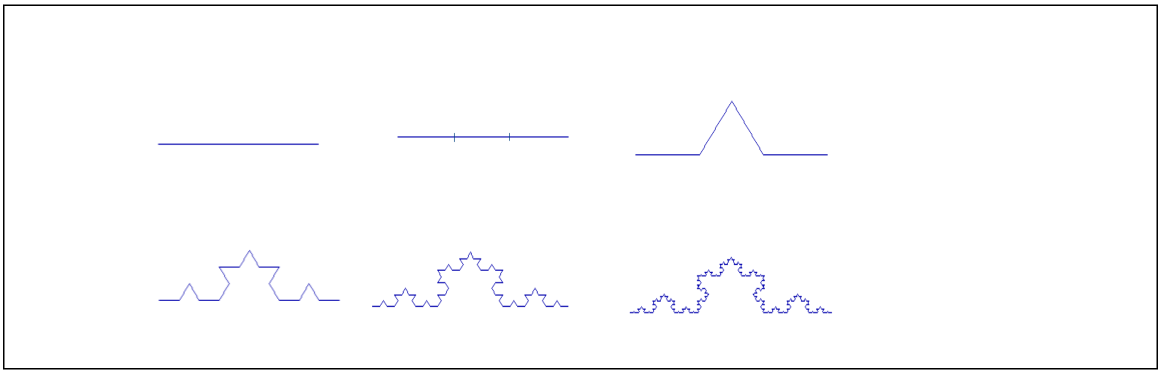


Figura 5 - Construção da Curva de Koch

Fonte: Batanete, Castro, Lago, *on-line* (2009)

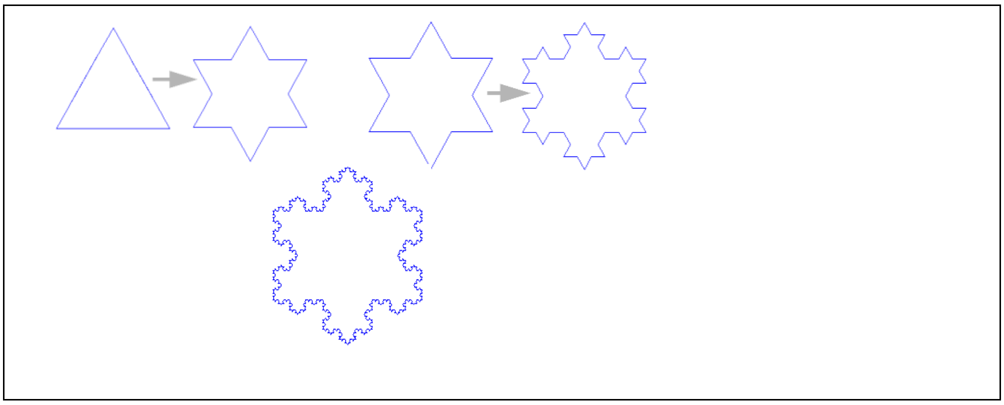


Figura 6 - Construção do Floco de neve de Koch

Fonte: Famous Fractals, *on-line* (2008)

O Triângulo de Sierpinski[42] pode ser construído da seguinte forma de acordo com Barbosa (2005):

1. Considerar inicialmente um triângulo eqüilátero;

2. Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos eqüiláteros;

3. “Remover” o triângulo central, o que pode ser codificado, por exemplo, com cor preta e os outros com uma cor cinza;

4. Repetir em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3;

5. Repetir a iteração 4 sucessivamente.

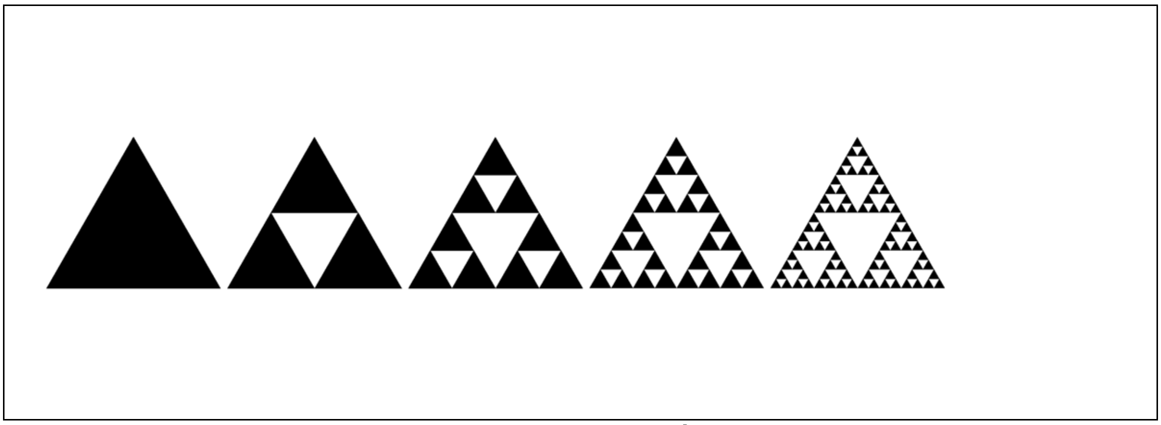


Figura 7 - Construção do Triângulo de Sierpinski

Fonte: Wikipedia, *on-line*, (2008)

Para a construção desses fractais foram utilizados muitos conceitos da Geometria Euclidiana.

Um professor questionou o professor ministrante sobre a diferença entre mosaicos e fractais. O professor ministrante explicou que uma primeira resposta seria que o mosaico consiste em preencher todo o plano, sem deixar nenhum espaço, enquanto os fractais podem ser feitos com curvas, que não necessariamente preenchem todo o plano. Uma outra resposta dada pelo professor ministrante é que os Fractais têm a característica de auto-similaridade, ou seja, os fractais possuem uma imagem de si,

[42] Waclaw Sierpinski (1882-1969) segundo Barbosa (2005), foi um matemático polonês professor em Lvov e Wariaw de grande influência na década de 1920-1930 a ponto de uma das crateras lunares ter o seu nome.

própria em cada uma de suas partes. Assim nos fractais existem pedaços que são parecidos com o todo, o que não acontece nos mosaicos.

O professor explicou que vivemos em um espaço tridimensional e que antes da Geometria Fractal apenas conhecíamos dimensões inteiras, mas a Geometria Fractal possibilitou a descoberta de um mundo de dimensões fracionárias.

A dimensão do triângulo de Sierpinski foi calculada com os professores, que mostraram-se admirados ao encontrar a dimensão fracionária aproximadamente igual a 1,585.

Para encerrar o encontro, os professores cursistas construíram um modelo de cartão fractal (Anexo I), e responderam ao último questionário.

O curso foi encerrado com a entrega das respostas do sétimo questionário pelos professores.

Um pequeno passo foi dado para que esses professores participantes do curso de Geometrias não-euclidianas se sentissem um pouco mais seguros no trato com as Geometrias não-euclidianas. Mas, para que essa proposta de inclusão aconteça de verdade é necessário tempo, determinação, estudo, incentivos, e muito mais.

5 EM BUSCA DA COMPREENSÃO DAS RESPOSTAS DADAS PELOS PROFESSORES

Nessa seção faremos a análise dos dados coletados durante a pesquisa de campo.

5.1 A ANÁLISE DO PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

Os professores se mostraram atentos às mudanças curriculares já que apenas sete professores não sabiam que a inclusão havia ocorrido.

Dos cinqüenta professores participantes, doze professores declararam não saber do que trata as Geometrias não-euclidianas. Um professor foi enfático ao afirmar não acreditar na possibilidade de se trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica e seguiu afirmando que não considera tal trabalho importante.

Dezesseis professores se mostraram inseguros, afirmando que não sabem se acreditam ser possível o trabalho com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica. Trinta e três professores afirmaram que acreditam ser possível o trabalho com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica. Dezoito professores disseram que não sabem se o trabalho com as Geometrias não-euclidianas na educação Básica é realmente importante e trinta e um afirmaram que acreditam nessa importância.

A sétima pergunta do questionário indagava os professores sobre os motivos que na opinião deles levaram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica.

Justificativa dada pelos professores para a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**

Afirmaram que a inclusão aconteceu devido a existência das Geometrias não-euclidianas no cotidiano. (15 professores)	1.2 –1.5 – 1.6 - 1.15 – 1.16 –1.24 – 1.25 – 1.26 – 1.27 - 1.28 – 1.30 – 1.33 –1.35 –1.37 –1.48	1.25 *“Para ampliar os conhecimentos dos alunos e pois ela faz parte do nosso dia a dia.”* 1.28 *“Para explicar situações que ocorrem em nosso cotidiano com mais precisão.”*
Afirmaram que a inclusão aconteceu para que o aluno pudesse estudar Geometria fora do plano. (8 professores)	1.3 – 1.18 - 1.42 – 1.43 - 1.44 – 1.45 - 1.47 – 1.49	1.3 *“Para ampliar os conhecimentos e percepção de mundo. Já que muito pouco do viver passa no plano.”* 1.42 “*Vivemos num mundo onde nem tudo é plano e muitas questões da matemática às vezes ficam sem respostas por nós não termos conhecimento desta parte da matemática.”*
Relacionaram a inclusão com a preocupação em melhorar o ensino e para que os alunos se sintam mais preparados para concursos. (5 professores)	1.4 – 1.32 – 1.34 – 1.36 – 1.41	1.4 *“Para dar conhecimentos básicos aos alunos que estão na escola publica de concorrer em pé de igualdade em avaliações como o ENEM e o vestibular.”*

		1.36 *“Devido a sua importância para a aprendizagem.”*
Argumentaram que as Geometrias não-euclidianas vieram para que os alunos pudessem conhecer outras geometrias e questionar a Geometria Euclidiana. (8 professores)	1.1 – 1.19 – 1.29 – 1.31 – 1.39 – 1.40 – 1.46 – 1.50	1.1 *“Acredito que deve ao fato da necessidade de questionar a Geometria Euclidiana.”* 1.39 *“Para adquirir uma visão de diferentes “ângulos” da geometria.”*
Declararam que não sabem responder. (12 professores)	1.7 - 1.9 – 1.10 - 1.11 – 1.12 – 1.13 – 1.14 – 1.17 – 1.20 – 1.21 - 1.22 – 1.23	
Criticaram a maneira como a inclusão foi feita. (2 professores)	1.8 - 1.38	1.8 “*Acho que como tudo está sendo inovado é mais uma inovação.”* 1.38 “*Não tenho uma opinião formada sobre isso, visto que, a carga horária de matemática na rede pública do Estado do Paraná é reduzida a cada ano que passa. Isso no Ensino Médio.*

Note-se que este primeiro questionário foi aplicado antes dos professores terem qualquer contato com as Geometrias não-euclidianas no curso. Assim todas as respostas marcam as opiniões que eles trazem para este curso. A importância de estudar questões relativas ao dia a dia dos alunos fica demarcada em 17 respostas, mas os professores não dizem em que situações elas possam ser aplicadas. Pelas respostas dos professores temos duas hipóteses a serem seguidas, ou os professores não leram as DCE, ou as DCE não são claras em relação aos motivos da inclusão das Geometrias não-euclidianas.

Vejamos a afirmação do professor a seguir:

"*Não tenho uma opinião formada sobre isso, visto que, a carga horária de matemática na rede pública do Estado do Paraná é reduzida a cada ano que passa. Isso no Ensino Médio." (*1.38)

Note que a resposta desse professor mostra que ele no fundo está querendo indagar como querem que ele trabalhe as Geometrias não-euclidianas com um número cada vez mais reduzido de aulas. Talvez essa não seja apenas uma dúvida dele, mas de uma parte dos professores que não teve coragem de dizer.

Ainda nesse primeiro questionário um professor, por exemplo, afirmou conhecer algo sobre as Geometrias não-euclidianas, mas quando questionado sobre os motivos que, em sua opinião levaram a inclusão delas nas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná, afirmou:

*"Para ampliar os conhecimentos e percepção de mundo. Já que muito pouco do viver se passa no plano." (*1.3)

Tal resposta deixa transparecer que esse professor tem problemas com a Geometria Euclidiana, não conseguindo diferenciar a Geometria Euclidiana Plana e a Espacial. Outros sete professores mostram o mesmo problema ao responder a mesma pergunta.

*"Devido à sua importância em explicar as formas da natureza com mais exatidão e clareza do que a geometria plana." (*1.44)

*"Com o avanço tecnológico, nossos alunos possuem informações, não somente da Geometria plana." (*1.43)

As respostas acima evidenciam que, para esses professores a Geometria Euclidiana se restringe a geometria plana. Esse foi apenas um indício que viria a se confirmar nos demais encontros e questionários, que um dos principais obstáculos para o entendimento por parte dos professores, das Geometrias não-euclidianas é a falta de conhecimento da Geometria Euclidiana, principalmente da Espacial. Tendo em vista estas evidências é possível questionar se, para estes professores a Geometria Euclidiana Espacial não é uma Geometria Euclidiana, ou ainda que na escola não são trabalhadas as figuras geométricas espaciais, apenas as figuras planas. Sobre estas questões Pavanello e Andrade (2002) comentam que:

> Embora o trabalho com as figuras geométricas e com suas medidas, principalmente as áreas e perímetros, sejam algumas das poucas noções trabalhadas na escola básica, muitos dos professores possuem concepções equivocadas a respeito: consideram, por exemplo, que o retângulo de medidas 3 m de comprimento por 4 m de largura é diferente – e não o mesmo, porém em posição diferente – do de medidas 4 m por 3 m; ou seja, figuras de iguais perímetros terão áreas iguais, ou que à figura de maior área corresponderá o maior perímetro. Ainda com relação ao cálculo das áreas das principais figuras geométricas, observa-se que nem sempre conhecem os procedimentos para sua determinação, principalmente no caso do círculo. (PAVANELLO E ANDRADE, 2002, p.81)

Pavanello e Andrade complementam ainda que:

> O mesmo pode ser verificado em relação aos sólidos geométricos. Seu conhecimento sobre os mesmos é pouco consistente, não apresentando uma concepção muito abrangente e clara sobre o que seja prisma ou uma pirâmide, por exemplo. Observa-se, como Kaleff (1998), que confundem figuras planas com as tridimensionais, identificando, por exemplo, um modelo de tetraedro regular como o desenho de um triângulo, chegando mesmo a designá-lo como tal. (PAVANELLO E ANDRADE, 2002, p.81)

Outro ponto, que nos chamou a atenção nas respostas desses professores, foi eles demonstrarem acreditar que partes do mundo onde vivemos são planas.

"Vivemos num mundo onde nem tudo é plano..." (1.42)

Qual a concepção que esse professor tem de plano? Como esse professor vê o mundo em que vivemos? Como ele trabalha a questão do espaço com seus alunos? Essas são algumas perguntas que nos fazemos quando lemos respostas como estas. Possivelmente esse professor, assim como outros, se é que trabalham a Geometria Euclidiana espacial, podem estar reduzindo-a a como um conjunto de fórmulas que servem apenas para calcular áreas laterais e volumes de figuras espaciais como cubo, prismas, paralelepípedos, esferas, cilindros e cones. Segundo Veloso (2008) existe:

> [...] no caso da geometria, uma tradição persistente limita as experiências dos jovens, durante muitos anos – porventura todo o ensino básico e portanto toda a vida para quase todos – a meia dúzia de figuras planas e a meia dúzia dos chamados “sólidos geométricos” (VELOSO, 2008, p.18).

Foi possível perceber que, alguns professores tiveram “receio” de preencher o questionário, acreditando ser vergonhoso não conhecer as Geometrias não-euclidianas.

5.2 A ANÁLISE DO SEGUNDO QUESTIONÁRIO

A entrega do segundo questionário provocou uma discussão entre dois professores:

*“Você acha que o conceito de reta e plano atrapalha a entender essas novas geometrias?” (*P 2.1)

*“Acho que não!” (*P 2.2)

*“Claro que atrapalha, você lembra que tentamos desenhar as retas e não deu certo?” (*P 2.1)

*“Vendo por esse lado atrapalhou sim.” (*P 2.2)

A conversa, entre os dois professores acima, mostra a consciência da dificuldade dos professores em entender e assimilar novas geometrias. A dificuldade de construir novos conceitos que ferem conceitos trazidos como verdades absolutas.

Segundo Gobbi et al (2008) O estudo das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica pode provocar discussões importantes sobre o conceito de verdade matemática, levando a um questionamento sobre as bases que se constroem a matemática e o desenvolvimento do conhecimento matemático. Como salientam os autores,

> Este tipo de discussão leva a um questionamento sobre os fundamentos da matemática e a uma visão de como se desenvolve o conhecimento matemático. Desta forma, pressupondo, que um professor de matemática além de dominar conceitos, de conhecer resultados e de saber lidar com a linguagem matemática, deva ser

> capaz: de relacionar conceitos de diferentes campos desse conhecimento, de refletir sobre os fundamentos da matemática, de perceber as relações desta com outros campos do saber e de perceber o seu dinamismo interno, conduz à conclusão de que um estudo sobre o desenvolvimento histórico e de fundamentos das Geometrias não-euclidianas pode contribuir de forma significativa para a formação de professores de matemática (GOBBI et al, 2008, p.1).

Além disso, começamos a perceber já no primeiro encontro, que o estudo das Geometrias não-euclidianas pode contribuir para o ensino da Geometria de maneira geral, já que para se aprender Geometrias não-euclidianas é necessário solidificar o conhecimento de Geometria Euclidiana.

Analisando o segundo questionário verificamos que dos cinqüenta professores participantes do curso, vinte e seis declararam que não conheciam a geometria euclidiana axiomática. A resposta dos professores mostra a importância do primeiro encontro, no qual esta foi apresentada. Dado que o conhecimento sobre os cinco axiomas é a base de toda a Geometria Euclidiana, sendo fundamental para a compreensão das Geometrias não-euclidianas. Barbosa (1995) compara a Geometria Euclidiana a um jogo.

> Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamados de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas (BARBOSA 1995, p. 5).

Pensando como Barbosa vemos que grande parte dos professores que ensinam geometria não conhecem as regras do jogo, ou seja, ensinam Geometria Euclidiana sem conhecer os seus princípios básicos.

Considerando ainda o segundo questionário, encontramos vinte professores que disseram que o conceito que possuíam de reta atrapalhou o entendimento das Geometrias não-euclidianas. No entanto, notamos que isso aconteceu com quase todos os professores, dado que eles apresentavam muita dificuldade em aceitar e entender as Geometrias não-euclidianas.

Procurando investigar se os professores conheciam algo sobre Topologia, os questionamos sobre o tema em duas perguntas. A primeira indagava os professores se eles trabalham com conceitos como noções de vizinhança, fora, dentro, interior, exterior, aberto-fechado, separado-unido, contínuo-descontínuo. A segunda pergunta foi se eles conheciam algo sobre Topologia. Apesar de dezesseis professores afirmarem trabalhar com esses conceitos, eles não fazem ligação desses conceitos com a Topologia. Na verdade, os professores não sabem que de forma implícita acabam trabalhando conceitos topológicos, mesmo sem saber o que é a Topologia. Nenhum professor fez ligação da topologia com os conceitos apresentados na primeira pergunta. Quarenta declararam que não conheciam o assunto, apesar de alguns dizerem que chegaram a ver algo na faculdade e dez professores confundiram a palavra topologia com topografia.

Uma outra questão do questionário pedia aos professores para que eles diferenciassem a Geometria Euclidiana das Geometrias não-euclidianas.

Respostas dadas pelos professores ao diferenciar as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**
Mostraram respostas satisfatórias ao diferenciar as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana. (17 professores)	2.3 – 2.4 – 2.5 – 2.6 – 2.9 – 2.12 – 2.23 – 2.28 – 2.29 – 2.30 – 2.33 – 2.36 – 2.37 – 2.39 – 2.40 – 2.41 – 2.42 -	2.12 – *“A diferença é que a Geometria Euclidiana tem que valer os cinco axiomas e a outra se furar apenas um.”* 2.28 – *“Nas Geometrias não-euclidianas, os cinco postulados de Euclides não são considerados na sua totalidade.”*
Declararam não saberiam o que responder.	2.10 – 2.13 – 2.35 – 2.43 – 2.44 – 2.45 –	

(11 professores)	2.46 – 2.47 – 2.48 – 2.49 – 2.50 -	
Afirmaram que as Geometrias não-euclidianas existem apenas no campo das idéias. (7 professores)	2.22 – 2.24 – 2.25 –2.26 - 2.31 – 2.32 – 2.38	2.25 – "*Ao meu entender uma é real ou visível e a outra é imaginária, virtual.*" 2.38 – "A Não-euclidiana é só na idéia."
Afirmaram que as Geometrias não-euclidianas estudam a geometria fora do plano. (11 professores)	2.2 – 2.7 - 2.11 - 2.14 – 2.15 – 2.17 – 2.18 - 2.19 - 2.20 – 2.8 –2.27	2.8 – *"Euclidianas – no mesmo plano. Não-euclidiana – fora do plano."* 2.15 – *"O plano e o espaço. (tipos de superfície).*
Apresentou ter problema com o conceito de axioma. (1 professor)	2.21	2.2.1 – *"Eu entendi que a Geometria de Euclides consegue demonstrar os 5 axiomas"*
Apresentou muita confusão em relação aos ângulos da Geometria Euclidiana. (1 professor)	2.34	2.34 – *"Na GE os ângulos tem 90 graus e a não euclidiana não tem."*
Mostraram-se confusos. (2 professor)	2.1 – 2.16	2.1 – *"A maior diferença entre elas é que o que é verdade para a Geometria Euclidiana passa a não ser na Geometria não-euclidiana tornando alguns cálculos impossíveis em possíveis. Mas ainda tenho dúvidas."*

		2.16 – “A geometria não-euclidiana diz que algumas verdades da geometria euclidiana não são verdades e que o que não é possível na euclidiana na não-euclidiana é possível.

Note-se que depois do primeiro encontro dezessete professores conseguiram diferenciar de maneira satisfatória as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidianas. Mas muitos professores ainda se mostravam despreparados para trabalhar com o tema.

Pelas respostas do segundo questionário percebemos que poucos professores conheciam a Topologia. Tudo que estava sendo trabalhado sobre a Topologia era novidade para grande parte deles.

Os professores se mostraram interessados em resolver o problema das Pontes de Königsberg, e mais uma vez se reuniam em grupos para tentar resolver e discutir a situação.

Os professores foram rápidos para resolver o desafio 1, apontando a esfera como a possível forma do planeta Planolândia. Mas o professor ministrante seguiu o curso apresentado a segunda parte do problema.

Os professores se mostravam interessados pelo problema proposto pelo desafio 2 e tentavam imaginar as possíveis formas deste planeta. Muitas foram as sugestões apontadas pelos professores, mas todas elas eram apenas deformações da esfera.

Por toda a sala era possível encontrar professores curiosos, interessados e dispostos a resolver o problema. No entanto eles não conheciam o Toro, e isso os impedira de encontrar a resposta do problema. Nenhum professor conseguiu apontar para a resposta correta que foi apresentada pelo professor ministrante. Mas será que os professores nunca tinham visto um Toro? Com certeza sim, e isso foi afirmado por eles. Eles apenas não o conheciam pelo nome, e como estão acostumados a trabalhar sempre com as mesmas figuras geométricas mostraram dificuldade em apontar o Toro como solução do problema.

> [...] no caso da geometria, uma tradição persistente limita as experiências dos jovens, durante muitos anos – porventura todo o ensino básico e portanto toda a vida para quase todos – a meia dúzia de figuras planas e a meia dúzia dos chamados "sólidos geométricos" (VELOSO 2008, p.18).

5.3 A ANÁLISE DO TERCEIRO QUESTIONÁRIO

A apresentação do Toro aos professores os deixou entusiasmados e após o segundo encontro quarenta e seis professores afirmaram que depois da aula de Topologia acreditavam ser possível o trabalho com estas na Educação Básica, o que representava uma mudança de postura razoável para grande parte de professores que antes do segundo encontro não a conheciam.

No terceiro questionário fizemos a seguinte pergunta aos professores: "Quando estamos em uma estrada reta temos a impressão que as laterais da estrada se encontram num ponto mais distante aos nossos olhos. Um curioso aluno, atento a sua aula onde você definia o conceito de retas paralelas, questionou se a impressão que ele teve nessa estrada pode levá-lo a afirmar que duas retas paralelas se encontram no infinito. O que você diria a esse aluno e como explicaria isso a ele?"

O quadro abaixo representa as respostas encontradas:

Explicações que os professores dariam para o aluno que teve a impressão que as retas paralelas se encontram no infinito	Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta	Excertos de respostas dadas pelos professores.
9 professores disseram que não saberiam o que responder para este aluno.	3.7 – 3.12 – 3.29 – 3.34 – 3.35 – 3.36 –	3.7 – *"... ao ver esta pergunta percebi o quanto tenho*

		3.48 – 3.49 – 3.50	*dificuldade de compreensão quanto a Geometria Não-euclidiana.”*
11 professores afirmaram que retas paralelas se encontram no infinito, dos quais:	Diriam ao aluno que as retas se encontram, pois a superfície em que vivemos é curva. (6 professores)	3.6 – 3.41 – 3.42 – 3.44 – 3.46 – 3.47	*3.6* – “No infinito elas se encontram pois a superfície é curva (abaulada).” 3.46 – *“Por ser uma superfície curva as duas retas se encontram no infinito.”*
	Afirmaram apenas que duas retas paralelas se encontram no infinito. (3 professores)	3.21– 3.43 – 3.45	3.21 – *“Sim, pois num estudo de retas paralelas profundamente analisado, veremos a possibilidade delas se encontrarem no longíquo.”* 3.45 – *“Duas retas paralelas se encontram no infinito.”*
	Diriam que, no imaginário, o encontro de duas retas seria possível.	3.2 - 3.22	3.2 – *“Diria que na imaginação, como perspectiva sim, pois demonstrar o infinito é impossível.*

	(2 professores)		3.22 – *"Imaginariamente isso seria possível."*
30 professores afirmaram que retas paralelas não se encontram, dos quais:	Diriam ao seu aluno que retas paralelas não se encontram. (10 professores)	3.5 – 3.11 – 3.13 – 3.14 – 3.15 – 3.24 – 3.27 – 3.33 – 3.38 – 3.40	3.11 – *"Que duas retas quando paralelas possui sempre a mesma distância entre elas, portanto nunca poderiam se encontrar."* 3.24 – *"Se as retas são paralelas, não acontece o encontro."*
	Argumentariam com seus alunos que ele teve apenas uma ilusão de óptica. (20 professores)	3.1 – 3.3 – 3.4 – 3.8 – 3.9 – 3.10 – 3.16 – 3.17 – 3.18 – 3.19 – 3.20 – 3.23 – 3.25 – 3.26 – 3.28 – 3.30 - 3.31 – 3.32 – 3.37 – 3.39	3.18 – *"Ilusão otíptica temos varias atividades desse tipo para mostrarmos aos alunos."* 3.23 – *"Devido o ponto onde se encontra e a ilusão de ótica."*

Apenas nove professores assumiram que não saberiam o que dizer caso fossem defrontados com essa questão. Dentre os professores que responderiam ao seu aluno encontramos nove que acreditam que as retas paralelas se encontram no infinito e trinta e dois que afirmam que elas não se encontram.

Dentre os nove que afirmaram que retas paralelas se encontram no infinito encontramos dois grupos de professores. O primeiro, formado por seis professores, justifica que as retas paralelas se encontram no infinito, porque a superfície em que vivemos é curva. O segundo grupo, de três professores, apenas afirma que retas paralelas sempre se encontram no infinito, sem se preocuparem em justificar tal afirmação.

Os trinta professores que afirmaram que retas paralelas não possuem ponto em comum podem formar três grupos. O primeiro, formado por dez deles, apresenta forte ligação com a Geometria Euclidiana e apenas afirma que retas paralelas não se encontram no infinito, sem se preocuparem em abrir o debate, ou discutir tal fato com seus alunos. Os professores do segundo grupo, formado por vinte deles, afirmariam aos seus alunos que o fato observado se trata apenas de uma ilusão de óptica. Os professores do terceiro grupo, com dois integrantes acreditam que o encontro de retas paralelas seria possível apenas na imaginação dos alunos.

Os professores formaram grupos para resolver as atividades no Toro, todos participando, e discutindo apresentando as possíveis soluções.

Os cursistas mostraram-se interessados pela atividade do desenho e com as técnicas apresentadas pelo professor ministrante.

Ao final do terceiro encontro era possível perceber que os professores ainda se sentiam desconfiados e despreparados para trabalhar com o ensino das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica.

5.4 A ANÁLISE DO QUARTO QUESTIONÁRIO

A primeira questão do quarto questionário propunha que os professores diferenciassem a Geometria Euclidiana das Geometrias não-euclidianas.

Diferenças apontadas pelos professores.	**Respostas dos professores enumeradas de**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**

	um a cinqüenta	
Disseram que a diferença entre as Geometrias não-euclidianas e a geometrias Euclidiana está relacionada a negação de pelo menos um dos cinco postulados de Euclides. (13 professores)	4.1 – 4.2 – 4.3 – 4.4 – 4.5 – 4.6 – 4.7 – 4.8 – 4.9 – 4.10 – 4.11 – 4.35 – 4.48	4.9 – *“Essa diferença encontra-se nas discussões dos postulados de Euclides, onde um deles é derrubado na Geometria Não-euclidiana.”* 4.10 – *“A diferença é que a geometria euclidianas tem que valer os cinco postulados, caso não vale um deles já não-euclidiana...”*
Afirmaram que a Geometria Euclidiana enxerga o infinito. (2 professores)	4.49 – 4.50	4.49 – *“A diferença é que uma nós só enchergamos no infinito.”* 4.50 – “*A euclidiana podemos enchergar o infinito e a não-euclidiana não.”*
Afirmaram que a Geometria Não-euclidiana é a geometria da visão e da natureza. (2 professores)	4.46 – 4.47	4.46 – *“Que a Geometria Não-euclidiana é a geometria da natureza e da visão.”* 4.47 – *“A Geometria não-euclidiana é a geometria da visão e a geometria da natureza.”*
Declararam que a	4.40 – 4.41 – 4.42	4.44 – *“A diferença está em*

diferença entre as geometrias está no tipo de superfície. (6 professores)	– 4.43 – 4.44 – 4.45	*relação a superfície.”* 4.45 – *“O tipo de superfície e realidade vista.*
Afirmaram não saber responder. (3 professores)	4.37 – 4.38 – 4.39	4.37 – *“Ainda não consigo explicar.”*
Afirmaram que na Geometria Euclidiana as retas paralelas não se encontram e nas Geometrias não-euclidianas elas se encontram. (3 professores)	4.33 – 4.34 – 4.36	4.34 – *“Geometria Euclidiana as retas paralelas não se encontram já a Geometria Não Euclidiana existe um foco de fuga que faz com que ela se encontra na nossa visão.”* 4.36 – *“Geom. Euclidiana duas retas paralelas nunca se encontram. Geo. Não Euclidiana duas retas paralelas se encontram num ponto de fuga.”*
Apresentou conceitos falhos da Geometria Euclidiana. (1 professor)	4.32	4.32 - *“Geometria Euclidiana = um ângulo reto tem 90°. Geometria não Euclidiana = um ângulo tem menos que 90° onde entra a topologia.”*
Disseram que as Geometrias não-euclidianas existem	4.22 – 4.23 – 4.24 – 4.25 – 4.26 – 4.28 – 4.29 – 4.30	4.28 – *“A geometria não-euclidiana trabalha no imaginário.”*

apenas no campo das idéias. (9 professores)	– 4.31	4.30 – *“A Geometria não-euclidiana está na nossa imaginação.”*
Afirmaram que a Geometria Euclidiana trabalha apenas no plano. (11 professores)	4.12 – 4.13 – 4.14 – 4.15 – 4.16 – 4.17 – 4.18 – 4.19 – 4.20 – 4.21 – 4.27	4.17 – *“A Geometria não-euclidiana trabalha no tridimensional e não somente no plano, que é o caso da Geometria euclidiana.”* 4.18 – *“A Geometria euclidiana trabalha somente no plano, retas, ... já as Geometrias não-euclidianas trabalham no tridimensional, etc.”*

Para que possamos analisar melhor as respostas dadas pelos professores no segundo e quarto questionários sobre a diferença entre as Geometrias não-euclidianas e a Geometria Euclidiana, segue um gráfico que as representa.

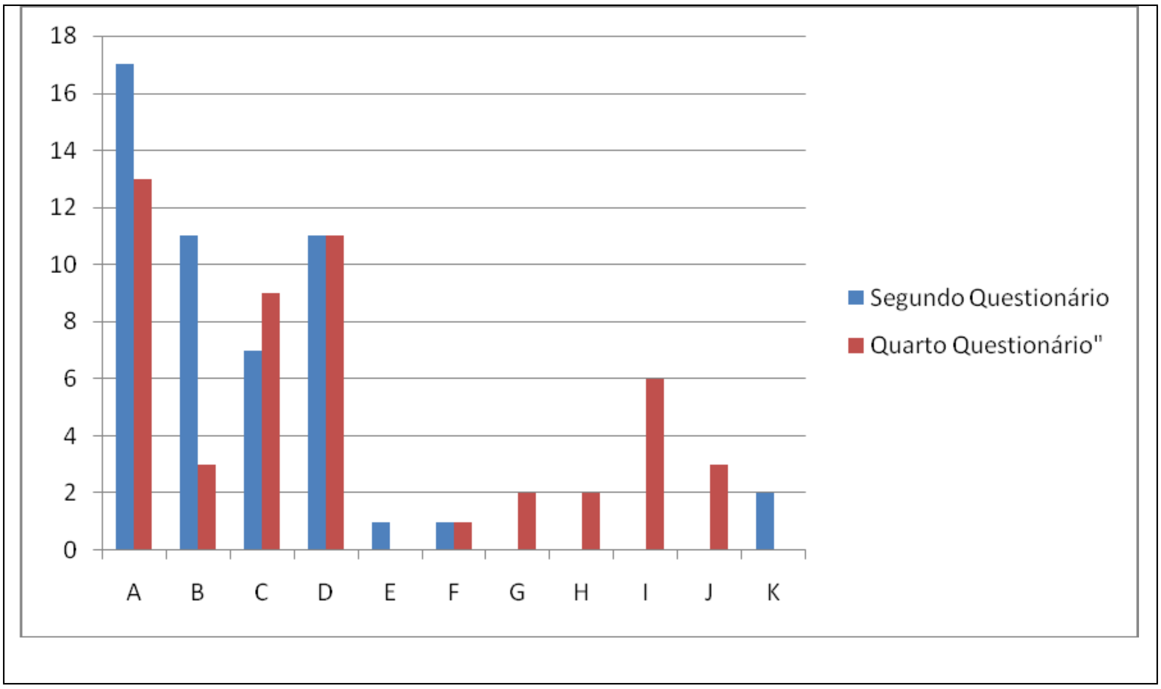


Gráfico 1 – Diferenciando as Geometrias não-euclidianas das Geometrias Euclidianas no quarto encontro.

As letras em ordem alfabética que aparecem no gráfico representam, respectivamente:

A - Respostas satisfatórias dadas pelos professores ao diferenciar as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana.

B – Professores que declaram não saberiam o que responder

C – Professores que afirmaram que as Geometrias não-euclidianas existem apenas no campo das idéias.

D – Professores que afirmaram que as Geometrias não-euclidianas estudam a geometria fora do plano.

E – Professores que apresentaram ter problema com o conceito de axioma.

F – Professores que apresentaram problemas com conceitos da Geometria Euclidiana.

G – Professores que afirmaram que a Geometria Euclidiana enxerga o infinito.

H – Professores que afirmaram que a Geometria Não-euclidiana é a geometria da visão e da natureza.

I – Professores que declararam que a diferença entre as geometrias está no tipo de superfície.

J – Professores que afirmaram que na Geometria Euclidiana as retas paralelas não se encontram e nas Geometrias não-euclidianas elas se encontram.

K – Professores apresentaram respostas confusas.

Analisando o gráfico percebemos que o número de professores que diferenciaram de forma satisfatória as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana sofreu uma queda. No segundo questionário tínhamos dezessete professores e no quarto questionário encontramos apenas treze. Vários fatores podem ter influenciado as respostas dos professores. Um desses fatores foi o terceiro encontro, no qual falou-se que todas as retas, independentemente de paralelas ou não, se encontram, ou seja falou-se de uma geometria que não admite a existência de retas paralelas. Isto pode ter levado alguns professores a acreditarem que nas Geometrias não-euclidianas as retas paralelas também sempre se encontram.

Outros pontos que merecem atenção na comparação das respostas dadas pelos professores é que o número de professores que declararam que não saberiam o que responder na questão também decresceu. E o número de professores que acreditam que as Geometrias não-euclidianas existem apenas no campo das idéias aumentou. Perceba que mesmo depois do professor ministrante trabalhar com figuras, fotos e quadros que representam a maneira como vemos o mundo, o número de professores que acredita que as Geometrias não-euclidianas existem apenas no mundo das idéias aumentou.

Onze professores mostraram, mesmo depois do terceiro encontro, que acreditam que a Geometria Euclidiana está restrita ao plano. Isso pode mostrar que os pré-conceitos que eles trouxeram para o curso ainda não haviam sido abalados. Na verdade, é que falta a estes professores conceitos da própria Geometria Euclidiana. Como os professores podem compreender conceitos das Geometrias não-euclidianas se não conhecem suficientemente os da Geometria Euclidiana. Para Pavanello e Andrade (2002),

> Não se trata aqui de reforçar a idéia de pré-requisito, mas de se propor que a formação de conceitos não se dá no vácuo, mas é um processo que incorpora ou modifica níveis anteriores de conhecimento. Se estes não foram construídos, como continuar o processo?(PAVANELLO E ANDRADE, 2002, p. 82)

A segunda questão do quarto questionário retomou a questão feita no terceiro questionário sobre o aluno atento e curioso que questiona o professor se pode afirmar que as retas paralelas se encontram no infinito, depois de observar que as laterais da estrada se encontravam em um ponto. Aos professores foi perguntado se eles mudariam a maneira de explicar o fato aos alunos.

<table>
<tr><th colspan="2">Explicações que os professores dariam para o aluno que teve a impressão que as retas paralelas se encontram no infinito</th><th>Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta</th><th>Excertos de respostas dadas pelos professores.</th></tr>
<tr><td colspan="2">3 professores disseram que não saberiam o que responder para este aluno</td><td>4.3 - 4.37 – 4.39</td><td>4.39 – “... por falta de segurança e aprofundamento teórico na geometria não euclidiana.”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16 professores afirmaram que retas paralelas se encontram no infinito, dos quais:</td><td>Diria ao aluno que as retas se encontram, pois a superfície em que vivemos é curva.
(1 professor)</td><td>4.45</td><td>4.45 – “Diria que no infinito ela se encontram. Poderia usar uma superfície curva para mostrar aí a linha do horizonte onde ela já se mostraria aproximando. (bola grande).”</td></tr>
<tr><td>Afirmaram apenas que duas retas paralelas se encontram no infinito.
(4 professores)</td><td>4.18 – 4.22 – 4.42 - 4.49</td><td>4.22 – “Eu diria que sim, que elas se encontram no infinito, mas não mudaria a maneira de explicar; porém procuraria convence-los mais através de outras</td></tr>
</table>

			experiências." 4.42 – *"Começaria com um exemplo, como uma gravura, um desenho, onde ocorre este fato, falaria de ponto de fuga, linha do horizonte e chegaria à conclusão que retas paralelas se encontram num ponto no infinito."*
	Disseram que as retas paralelas se encontram na linha do horizonte, no ponto de fuga. (8 professores)	4.9 – 4.12 - 4.17 – 4.24 – 4.40 – 4.41 – 4.43 – 4.44 –	4.9 – *"Diria que duas retas paralelas se encontram na linha do horizonte dependendo sempre do ângulo em que nos encontramos e do nosso ponto de visão, levando-se em conta a geometria projetiva."* 4.17 – *"Que as retas se encontram na linha do horizonte num único ponto."*
	Diriam que no imaginário o encontro de duas retas seria possível.	4.27 – 4.29 – 4.30	4.27 – *"Explicaria a ele que imaginariamente isso é possível, porém no concreto isso não irá*

	(3 professores)		*acontecer.”* 4.30 – *“Mudaria a explicação pois no último questionário eu explicaria com geometria euclidiana mas na validade devo falar sobre a geometria não euclidiana e que essas retas // estão apenas no nosso imaginário elas não existem.”*
31 professores afirmaram que retas paralelas não se encontram, dos quais:	Argumentariam com seus alunos que ele teve apenas uma ilusão de óptica. (16 professores)	4.5 – 4.10 – 4.11 – 4.13 - 4.14 – 4.16 – 4.19 – 4.21 – 4.23 – 4.25 – 4.28 - 4.32 - 4.38 – 4.46 – 4.47 – 4.50	4.14 – *“Diria a ele que é uma visão que ele tem, é uma impressão visual. (principalmente se for aluno de série inicial).”* 4.38 – *“Eu diria que é uma ilusão de ótica e que realmente elas não se encontram na linha do horizonte.”*
	Encerrariam a conversa com o aluno dizendo que retas paralelas não se encontram.	4.6 – 4.15 – 4.26 - 4.31 – 4.34	4.15 – *“Retas paralelas não se encontram.”* 4.31 – *“Sim, mudaria a forma de explicar. Diria a ele que é comprovado que duas retas // nunca*

	(5 professores)		*se encontram...”*
	Diriam aos seus alunos que se eles caminhassem mais tempo sobre a estrada iriam perceber que as retas paralelas não se cruzam. (5 professores)	4.4 – 4.7 – 4.8 – 4.20 – 4.35	4.4 – *“Se andarmos mais adiante na mesma estrada, teremos a impressão que está sempre adiante o tal fato, temos uma visão em perspectiva. É o mesmo caso da visão do fim da Terra e do Mar.”* *4.7 – “Diria que retas paralelas realmente não se encontram no infinito e pediria que ele voltasse a essa estrada e tentasse achar o encontro das retas paralelas. E só depois explicaria que a distância dá a impressão de que elas se encontram mas isso realmente não ocorre na geometria Euclidiana.”*
	Argumentariam que na Geometria Projetiva não existem retas paralelas.	4.1 – 4.2 – 4.33 – 4.36 – 4.48	4.2 – *“Daria os mesmos exemplos, apenas complementaria dizendo que na geometria*

	(5 professores)		*projetiva não existem as retas paralelas, pois trabalhamos com o conceito de ponto de fuga."* 4.33 – *"Explicaria que na geometria projetiva não existem retas paralelas."*

Para facilitar a comparação das respostas apresentadas pelos professores no terceiro e quarto questionário a esta última questão, apresentamos o gráfico a seguir:

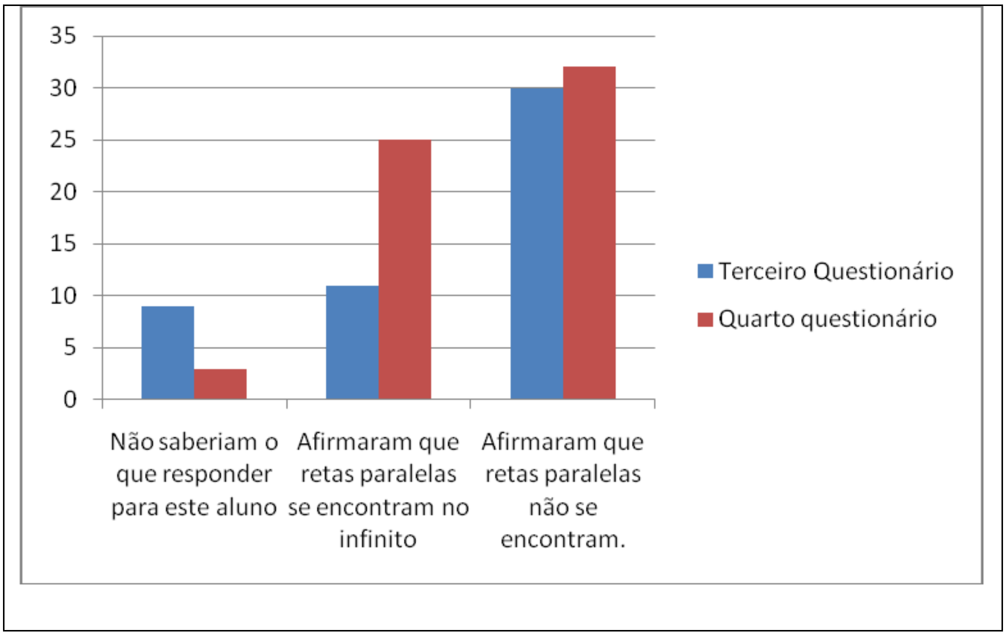


Gráfico 2 – Retas paralelas se encontram no infinito? Quarto encontro.

Pelo gráfico podemos observar que o número de professores que declararam não saber o que responder ao seu aluno diminuiu, o que pode representar que os professores se apresentam mais seguros em relação à Geometria Projetiva. No entanto, o número de professores que declarou que retas paralelas se encontram no infinito aumentou consideravelmente, o que mostra que os conceitos ainda não estavam suficientemente construídos. Não ficou claro para muitos professores que na Geometria Projetiva não há retas paralelas e que retas paralelas, por definição, não se encontram. Mas percebemos, nesse questionário, professores mais seguros em discutir com seus alunos a maneira como eles visualizam o mundo a sua volta.

Percebemos que, ao contrário dos demais encontros, os professores se apresentavam mais desmotivados para este quarto encontro. Houve grande dificuldade em entender os conceitos e resultados da Geometria Projetiva. Tal dificuldade pode ter sido causada pelo fato de esta ser uma aula teórica, diferente das anteriores que priorizaram os aspectos lúdicos do tema. A aula foi encerrada e alguns professores levantaram um debate, dizendo que seria muito difícil os alunos entenderem, e que eles não saberiam como lhes explicar os resultados da Geometria Projetiva.

A dificuldade levantada por alguns professores tem procedência, já que o estudo da Geometria Projetiva requer mais tempo e demanda um período de adaptação. Não era de se esperar que em um encontro inicial com noções preliminares levassem os professores a se sentirem totalmente preparados e seguros para lidar com tais conceitos.

5.5 A ANÁLISE DO QUINTO QUESTIONÁRIO

Analisando duas questões do quinto questionário constatamos que vinte e sete pessoas não faziam idéia nenhuma do que seria a Geometria Hiperbólica e vinte e duas não sabiam do que trata a Geometria da Superfície Esférica.

A terceira questão fazia a seguinte indagação aos professores: “Pelo que foi visto nos dois últimos encontros, temos que as retas paralelas sempre se encontram? Justifique sua resposta.” Segue a análise das justificativas dadas pelos professores.

Explicações que os professores dariam para o aluno que teve a impressão que as retas paralelas se	Respostas dos professores enumeradas	Excertos de respostas dadas pelos professores.

encontram no infinito		**de um a cinqüenta**	
38 professores afirmaram que retas paralelas se encontram no infinito, dos quais:	Disseram que na Geometria Não-euclidiana as retas paralelas se encontram, mas na Geometria Euclidiana não. (7 professores)	5.6 – 5.37 – 5.39 –5.44 - 5.46 – 5.49 – 5.50	5.46 – *"Se for considerado a Geometria não-euclidiana, pois na geometria clássica, retas paralelas não possuem ponto em comum."* 5.49 – *"Encontram-se somente nas Geometrias não Euclidianas."*
	Afirmou que na Geometria Euclidiana as retas paralelas se encontram e na Geometria Não-euclidiana o encontro não ocorre. (1 professor)	5.40	5.40 – *"A geometria não Euclidiana, destaca que as retas paralelas não se encontram no infinito como é posto pela Geometria Euclidiana."*
	Afirmaram que na Geometria Euclidiana as retas paralelas não se encontram.	5.47 – 5.48	5.48 – *"Na geometria Euclidiana elas nunca se encontram."*

	(2 professores)		5.47 – *"Na Geometria Euclidiana, as retas não se encontram."*
	Afirmou que depende da geometria em questão. (1 professor)	5.4	5.4 – *"Depende da geometria."*
	Afirmaram que na Geometria Projetiva as retas paralelas se encontram. (18 professores)	5.1 – 5.2 – 5.3 – 5.5 – 5.8 - 5.9 – 5.10 – 5.11 – 5.12 – 5.13 – 5.14 – 5.15 – 5.16 – 5.23 - 5.24 – 5.25 – 5.26 – 5.27	5.16 – *"Duas reatas quaisquer se interceptam na geometria projetiva, devido as suas propriedades visuais."* 5.8 – *"Nos dois últimos encontros falamos da geom. Projetiva onde todas as retas de um plano possuem interseção. (Pto de fuga ou impróprio)."*
	Declararam que retas paralelas podem se encontrar depende do tipo de	5.31 – 5.32 – 5.33	5.31 – *"Depende da dimensão analisada e do tipo de superfície analisada."*

	superfície. (3 professores)		5.32 – *“Depende da dimensão analisada e da superfície.”*
	Disseram que retas paralelas se encontram no infinito. (2 professores)	5.36 – 5.38	5.38 – *“As retas paralelas se encontram no infinito.”* 5.36 – *“No infinito...”*
	Afirmou que retas paralelas se encontram no imaginário. (1 professor)	5.34	5.34 – *“Se afirmarmos no imaginário.”*
	Restringiram a Geometria Euclidiana ao plano, afirmando que na geometria plana as retas paralelas não se encontram. (3 professores)	5.29 – 5.30 - 5.35	5.30 – *“Somente na geometria plana as retas paralelas não se encontram.”* 5.29 – *“As retas paralelas não se encontram apenas na geometria plana.”*
	Concluíram que na Geometria Euclidiana elas não se encontram e na Geometria Projetiva	5.17 – 5.18 - 5.19 – 5.22	5.19 – *“As retas paralelas nunca se encontram, na geometria projetiva não temos retas*

12 professores afirmaram que retas paralelas não se encontram, dos quais:	não há retas paralelas. (4 professores)		*paralelas."* 5.22 – *"Na geometria euclidiana elas nunca se encontram e na geometria projetiva não há retas paralelas."*
	Concluíram que retas paralelas não se encontram, temos apenas ilusão. (6 professores)	5.7 – 5.28 - 5.41 – 5.42 - 5.43 –5.45	5.43 – *"Dá a idéia que se cruzam, mas não se encontram."* 5.41 – *"Parecem se encontrar, mas é apenas ilusão."*
	Afirmou que existem Geometrias onde não há retas paralelas. (1 professor)	5.20	5.20 – *"Dependendo da geometria nem existem retas paralelas."*
	Afirmou que retas paralelas existem somente na Geometria Euclidiana. (1 professor)	5.21	5.21 – *"Pois retas paralelas só existem na geometria Euclidiana nas outras não existe retas paralelas."*

O gráfico abaixo representa a comparação entre o segundo, quarto e quinto questionário.

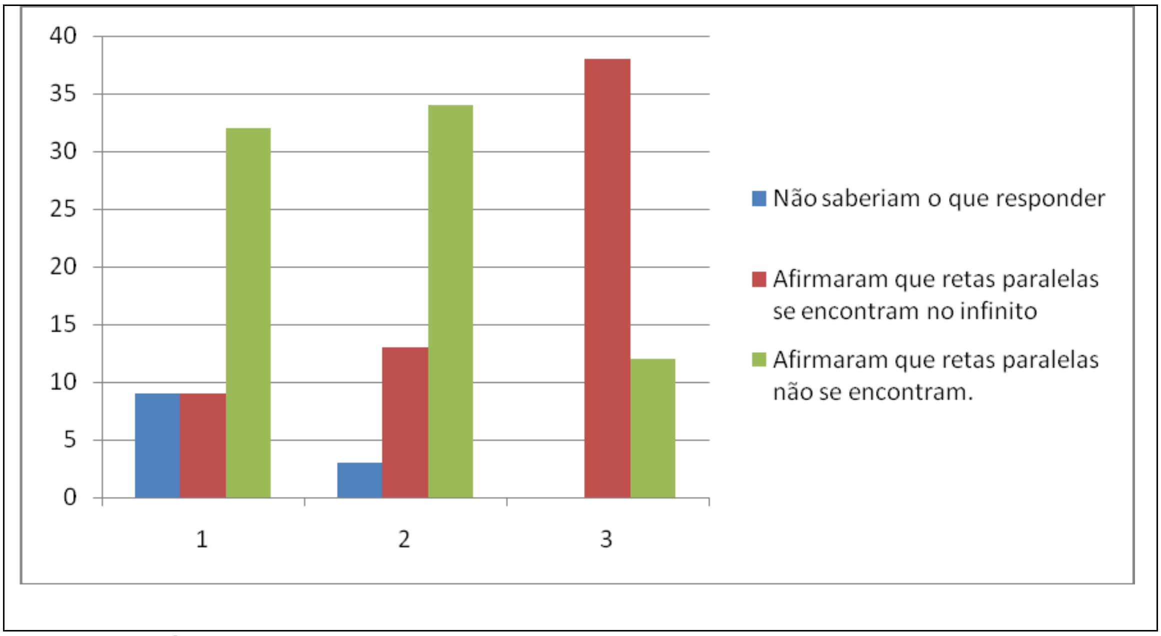


Gráfico 3 – Retas paralelas se encontram no infinito? Quinto encontro.

Neste gráfico temos:

1 – representando os resultados encontrados no terceiro questionário

2 – representando os resultados encontrados no quarto questionário

3 – representando os resultados encontrados no quinto questionário

Mas, o fato mais importante para ser analisado neste gráfico é que o número de professores que afirmaram que as retas paralelas se encontram em um ponto aumentou consideravelmente no passar de cada encontro. Isso mostra que os professores ainda não estavam com os conceitos suficientemente construídos.

Ainda no quinto encontro continuamos a encontrar professores que continuaram a restringir a Geometria Euclidiana ao plano.

*"As retas paralelas não se encontram apenas na geometria plana." (*5.29)

Os professores manifestaram suas dúvidas em relação à Geometria Hiperbólica e declararam ser muito difícil aceitá-la. Um professor diz em voz alta, logo após a apresentação do quadrilátero de Saccheri:

*"Difícil de aceitar!" (*P 5.1)

Outro professor segue dizendo:

*“Aí meu Deus.” (*P 5.2)

Apesar da grande dificuldade em entender e aceitar a Geometria Hiperbólica a atenção que os professores demonstravam era impressionante. A curiosidade dos professores os deixavam alvoroçados.

O problema do urso já era conhecido por alguns professores, que conseguiram resolvê-lo com facilidade, apresentando a esfera como o possível habitat do urso. No entanto, tivemos professores que não concordaram com o problema, como um, por exemplo, que afirmou que o urso voltar no lugar da partida seria um absurdo.

5.6 A ANÁLISE DO SEXTO E DO SÉTIMO QUESTIONÁRIO

No primeiro questionário entregue aos professores no início do sexto encontro pedimos a eles que falassem sobre o que sentiram ao ver o conceito que possuíam de retas ser modificado, e se o conceito que possuíam atrapalhou o entendimento dessas novas geometrias.

Dos cinqüenta professores participantes trinta afirmaram que o conceito que possuíam de retas foi um obstáculo para a compreensão da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica. Segue na tabela abaixo o que disseram os professores do sentimento de ver o conceito de reta que possuiam ser modificado.

Impressões dos professores	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**
Restringiram a Geometria Euclidiana ao plano. (4 professores)	6.11 – 6.15 – 6.18 – 6.30	6.11 – *“O conceito de reta em Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica, quando conceituado, observamos a reta em figuras tridimensionais, assim há uma boa distinção da reta quando observada no*

		plano.” 6.18 – *“Não percebi o conceito de reta sendo alterado. E sim que existem outras geometrias onde a reta não é o que é no plano.”*
Declararam não saber o que responder. (23 professores)	6.3 – 6.5 – 6.10 - 6.16 – 6.27 – 6.31 – 6.32 – 6.33 – 6.36 – 6.37 – 6.38 – 6.39 – 6.40 – 6.41 – 6.42 – 6.43 – 6.44 – 6.45 – 6.46 – 6.47 – 6.48 – 6.49 – 6.50	
Manifestaram sensação de mudança de postura no trato com a geometria. (5 professores)	6.7 – 6.13 – 6.14 - 6.17 – 6.34	6.14 – *“Achei estranho, mas depois de pouco tempo do início do curso me acostumei com a idéia. Agora antes de comentar algo, penso logo, em qual geometria?”* 6.34 – *“É altamente gratificante, poder perceber as relações da geometria, que até então, não tenha, ou tinha, poucas informações.”*
Afirmaram que a	6.8 – 6.9 – 6.12 –	6.20 – *“O maior problema na*

dificuldade deles foi compreender retas que não são retas. (6 professores)	6.19 – 6.20 – 6.35	*compreensão das retas nas Geometrias não-euclidianas é a questão de que não são "retas". Mas rapidamente, com a explicação, é fácil convencer a quebra dos paradigmas e conceitos da geometria euclidiana."* 6.35 – *"Foi uma revolução, pois tudo que sabia sobre reta, deixou de ser reta, para não existir ou ser uma curva."*
Declararam que a sensação que tinham era de que tudo que eles haviam aprendido até o momento estava errado. (10 professores)	6.1 – 6.4 – 6.6 – 6.21 – 6.22 – 6.23 – 6.24 – 6.25 – 6.26 -	6.21 – *"Obtive uma impressão de que tudo o que havia aprendido na geometria euclidiana estava errado mas com a compreensão da não euclidiana percebi uma visão diferente. Compreendendo as duas geometrias diferenciadas."* 6.22 – *"Sou resistente a mudanças, senti uma certa dificuldade em assimilar um novo conceito."*
Questionou o porque de questões como estas não serem discutidas na graduação.	6.28	6.28 – "*A primeira atitude que tive foi pensar "porquê no decorrer de nosso estudos a nível de graduação não são discutidas questões como*

(1 professor)		*essas", já que são de extrema importância para que nós professores não continuemos a reproduzir em nossa prática somente os conceitos da GEOMETRIA EUCLIDIANA como verdade única e incontestável. A segunda foi de esperança pensando que talvez com mudanças ocorridas na PROPOSTA DA DISCIPLINA e com oportunidades de capacitação como essa nosso prática possa ser mudada com vistas a um ensino de qualidade em que MAIS PARADIGAMAS SEJAM QUEBRADOS."*
Confundiu as geometrias em questão com a Geometria Projetiva. (1 professor)	6.2	6.2 – *"Gostei em função do desenho em perspectiva."*
Afirmou que já conhecia sobre o assunto e está acostumada com tal. (1 professor)	6.29	6.29 – *"Já estou acostumada, pois já havia lido alguns escritos sobre isto. Diretrizes Curriculares, Internet, concursos. Já havia visto..."*

Pode-se observar que no último encontro tivemos ainda professores que afirmam que a Geometria Euclidiana está restrita ao plano.

O gráfico a seguir representa o número de professores que no decorrer do curso apresentaram respostas nos questionários que restringiam a Geometria Euclidiana ao plano.

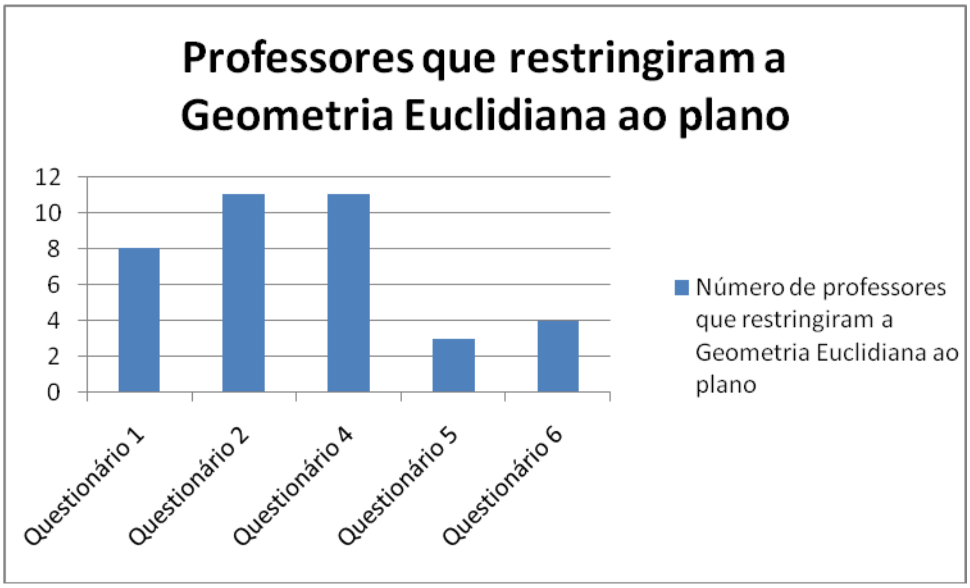


Gráfico 4 – Professores que restringiram a Geometria Euclidiana ao plano - sexto encontro.

O gráfico nos mostra que o número de professores que apresentaram respostas nos questionários restringindo a Geometria Euclidiana ao plano não oscilou muito durante o curso.

A mudança de postura no trato com a geometria pode ser percebida nas respostas de alguns professores, mas fica explícito na fala de um professor de modo especial:

*“... Agora antes de comentar algo, penso logo, em qual geometria?” (*6.14)

Podemos então afirmar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°? Sim, podemos! Desde que a geometria em questão seja a Geometria Euclidiana. Assim, como o professor (6.14), antes de fazermos qualquer afirmação devemos pensar a qual geometria estamos nos referindo.

Dentre as sensações descritas pelos professores a que mais nos chama a atenção são dos professores que declararam que a sensação que tiveram foi de que tudo que eles haviam aprendido até o momento estava errado. Para esses professores o contato com o novo rompeu o velho conhecimento que possuíam causando grandes conflitos internos.

*“Sentimento de que não sabe nada, que tudo que aprendeu é realmente quase nada e tudo errado.” (*6.4)

“Há uma certa resistência do cérebro, que diante de algumas reflexões vai se

*transformando.” (*6.22)

Mas dentre todas as respostas, uma que questiona os motivos de continuarmos na escola a apresentar a Geometria Euclidiana como verdade única e incontestável:

*“A primeira atitude que tive foi pensar “porquê no decorrer de nossos estudos a nível de graduação não são discutidas questões como essas”, já que são de extrema importância para que nós professores não continuemos a reproduzir em nossa prática somente os conceitos da GEOMETRIA EUCLIDIANA como verdade única e incontestável. A segunda foi de esperança pensando que talvez com mudanças ocorridas na PROPOSTA DA DISCIPLINA e com oportunidades de capacitação como essa nossa prática possa ser mudada com vistas a um ensino de qualidade em que MAIS PARADIGAMAS SEJAM QUEBRADOS.” (*6.28)

As questões postas pelo professor são questionamentos pelos quais também passamos e que motivaram inicialmente nossa pesquisa. Como passamos anos e anos na escola e não aprendemos que existem outras geometrias, diferentes da Geometria Euclidiana, e tão consistentes quanto ela? Porque continuar a apresentar a Geometria Euclidiana como verdade única e incontestável se desde o século XIX conhecemos as Geometrias não-euclidianas? A esperança do professor também é a nossa esperança e professores como este nos deixam mais confiantes que mudanças, para melhor, na educação possam acontecer.

A segunda pergunta do sexto questionário indagava os professores sobre os conhecimentos que eles possuíam da Geometria Fractal.

O que os professores sabiam sobre a Geometria Fractal	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**
Afirmaram não conhecer algo sobre a Geometria Fractal. (22 professores)	6.1 – 6.2 – 6.3 – 6.4 – 6.5 – 6.6 – 6.7 – 6.8 – 6.9 – 6.10 –– 6.12 – 6.13 – 6.14 – 6.15 – 6.16 – 6.17 –	

	6.18 – 6.19 – 6.20 – 6.22 –6.31 –6.32	
Afirmaram que já viram alguma imagem ou já leram a respeito. (11 professores)	6.23 – 6.24 – 6.29 - 6.30 – 6.34 – 6.42 – 6.44 – 6.45 – 6.47 – 6.49 – 6.50 -	6.34 – *"Apenas li alguns textos em revista matemática."* 6.45 - *"Em um curso que participei, fizemos um trabalho, ou melhor, uma atividade da qual foi se construindo a partir de um triângulo eqüilátero, infinitos triângulos eqüiláteros em cada um de seus lados. Temos também um exemplo do "floco de neve"."*
Declarou que Fractais são superfícies com contornos irregulares que mudam de direção. (1 professor)	6.26 -	6.26 – *"São superfícies com contornos bastante irregulares, que mudam muitas vezes de direção – os lados."*
Falaram que a Geometria Fractal é a Geometria da natureza. (4 professores)	6.36 – 6.37 – 6.38 – 6.39 -	6.36 – *"É a geometria da natureza."* 6.38 – *"Figuras encontradas na natureza com formas que se repetem."*
Ligou a Geometria Fractal a equações que geram	6.33 -	6.33 – *"Que uma equação, no computador pode gera*

imagens no computador. (1 professor)		*imagens."*
Afirmaram que Fractais são divisões infinitas baseadas em um padrão. (5 professores)	6.27 – 6.28 – 6.35 – 6.41 – 6.43	6.28 – *"Que nesta geometria existe a repetição constante de uma figura que se subdivide em várias outras iguais a essa. Além disso tais geometrias tem aplicações em muitas áreas."* 6.41 – *"Ouvi muito pouco. São divisões sucessivas infinitamente buscando-se um padrão."*
Apresentou confusão entre fractais e mosaicos. (1 professor)	6.25	6.25 – *"Seria formas geométricas de várias maneiras refletidas em um espelho. (mosaico)"*
Disseram que A Geometria Fractal é o estudo de fragmentos do todo. (3 professores)	6.11 – 6.40 – 6.46	6.40 – *"Apenas noções básicas, que se trata de um estudo de fragmentos de um todo."* 6.46 – *"São partes de um todo, cuja parte conserva as mesmas propriedades do todo, é como se fossem pequenos pedaços em miniaturas, com todas as características conservadas."*

Afirmaram que Fractais são figuras que se formam com vários desenhos do mesmo formato. (2 professores)	6.21 – 6.48	6.48 – *"São figuras que se formam, com vários desenhos de mesmo formato?"*

As respostas mostram que alguns professores já tinham noção da Geometria Fractal. Mas um número considerável não sabia do que tratava tal geometria.

Primeira atividade proposta: A perpendicular do centro de uma superfície esférica a uma corda divide-a ao meio. Utilize este resultado na resolução do seguinte problema. Numa superfície esférica de raio 15 cm, a distância de uma corda ao centro é igual a 9 cm. Qual o comprimento da corda?

Um professor conseguiu resolver com facilidade a primeira atividade proposta pelo professor ministrante, apenas uma aplicação do teorema de Pitágoras, apresentando o comprimento da corda como sendo 24 cm. Foi possível constatar a facilidade dos professores em resolver exercícios que apenas aplicam fórmulas. Os professores em geral entendem a primeira questão. O professor ministrante resolveu o problema para que todos pudessem entender e conferir o resultado, e ressalvou que este resultado faz parte da Geometria Euclidiana, mas é muito importante para a Geometria da Superfície Esférica.

Segunda atividade: Sejam A e B dois pontos de uma superfície esférica S que não são extremos de um diâmetro de S. Mostre que existe uma e somente uma circunferência máxima de S passando por A e B.

Na segunda atividade proposta pelo professor docente, os professores já apresentaram um pouco mais de dificuldade, já que a questão não envolve fórmulas e nem números. Dificuldade muito grande por parte dos professores. O professor ministrante precisou conversar bastante e ir juntando as resposta para então conseguir uma resposta que pudesse ajudar na resolução do problema:

*"Temos que pegar um plano que passa pelo centro da esfera, que vai gerar uma circunferência máxima" (*P 6.1)

Os professores se uniram em grupos para discutir sobre o assunto para tentar resolver o exercício, mas mostravam dificuldades em visualizar a Geometria Euclidiana Espacial. Os professores não conseguiram apresentar a solução para o problema, assim o professor ministrante apresentou a solução do problema.

Terceira atividade: Explique porque duas circunferências máximas quaisquer de uma superfície esférica se cortam nas extremidades de um diâmetro da superfície esférica.

A dificuldade dos cursistas em visualizar a Geometria Euclidiana Espacial foi percebida mais uma vez na solução dessa atividade. Mas, apesar da dificuldade apresentada por grande parte dos professores, havia entre os professores uma disposição para aprender que transparecia nas discussões e nas tentativas de resolver os problemas.

É importante ressaltar, porém, que mesmo com o professor ministrante resolvendo com os professores a terceira atividade, pode-se perceber que não foram todos os professores que entenderam a questão.

Quarta atividade: Duas circunferências máximas são ditas perpendiculares se estiverem em planos perpendiculares. Mostre que para cada duas circunferências máximas existe uma terceira circunferência máxima perpendicular a ambas. Se duas circunferências máximas no globo terrestres passam pelos pólos, que circunferência máxima é perpendicular a ambas?

O professor ministrante usou bolas para ajudar os professores a resolverem a quarta atividade. Poucos professores conseguiram participar da resolução da questão e demonstraram entender o que estava sendo dito. Mas se observava em geral o interesse por parte dos professores.

Quinta atividade: Na geometria esférica as retas são representadas por circunferências máximas. Encontre se puder, cada uma das seguintes figuras em tal geometria.

a) Um triângulo eqüilátero.

b) Um triângulo com dois ângulos retos.

c) Um triângulo com três ângulos retos.

d) Um triângulo cujas medidas de seus ângulos internos somem 500º.

e) Um retângulo.

f) Uma circunferência, isto é, o lugar geométrico dos pontos sobre a esfera que dista de um ponto conhecido (centro da circunferência) uma distância conhecida (medida do raio da circunferência).

Ao ler a quinta atividade os professores mostraram-se incrédulos.

*“Como vou desenhar um triângulo com três ângulos retos” (*P 6.1)

*“Aí meu Deus.” (*P 6.2)

*“Aí complicou o negócio.” (*P 6.3)

O professor ministrante resolveu a atividade com os professores que, em geral, permaneceram em silêncio absoluto apenas ouvindo o que o professor ministrante explicava.

Para desenhar um triângulo com dois ângulos retos o professor ministrante pediu para os professores imaginarem dois meridianos e o equador, o que facilitou o entendimento dos professores. Mas ao citar um triângulo com três ângulos retos os professores voltaram a se manifestar.

*"Difícil de imaginar essa situação" (*P 6.4)

*"Como trabalhar isso meu Deus" (*P 6.5)

*"Tem que estudar muito" (*P 6.6)

*"É muito difícil" (*P 6.7)

Poucos professores tentaram resolver a sexta atividade, a grande parte apenas aguardou a resolução apresentada pelo professor ministrante. Os professores se mostravam incomodados com o que estavam vendo e ouvindo. Percebendo que os professores estavam tendo muita dificuldade em entender e visualizar a atividade, o professor ministrante usou o software Cinderela para desenhar figuras na Geometria da Superfície Esférica.

O principal objetivo de se trabalhar com a Geometria da Superfície Esférica era mostrar que, com essa geometria, pode-se trabalhar interdisciplinarmente com a Geografia, "formando interconexões entre esses domínios, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados e possibilita uma aprendizagem motivadora, que articule o objeto de estudo com a realidade" (PATAKI, 2003, resumo). Pode-se ainda, utilizar softwares geométricos para desenvolver atividades exploratórias da geometria da superfície esférica, e também explorar com materiais manipuláveis a própria superfície de um modelo da esfera, exibindo propriedades de tal geometria.

O principal objetivo do sétimo questionário era analisar os professores cursistas após o término do curso de Geometrias não-euclidianas. Questionado se eles acreditavam ser possível trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica, apenas dois professores (7.2 e 7.34) afirmaram que no Ensino Fundamental não é possível o trabalho com as Geometria Não-euclidianas. Em se tratando de Ensino Médio apenas um professor 7.23 afirmou que não acredita ser possível o trabalho com GNE no Ensino Médio.

Respostas dadas pelos professores quando questionados com quais	**No Ensino Fundamental**	**No Ensino Médio**

geometrias é possível trabalhar na Educação Básica		
13 professores acreditam ser possível trabalhar com conceitos de Topologia no Ensino Fundamental e 25 professores acreditam ser possível trabalhar com conceitos de Topologia na Educação Básica.	7.1 – 7.14 - 7.15 – 7.16 – 7.18 – 7.19 – 7.21 – 7.27 – 7.32 - 7.37 – 7.39 – 7.42 – 7.47	7.1 - 7.3 - 7.5 – 7.6 – 7.10 - 7.11 – 7.13 –7.14 – 7.15 - 7.16 – 7.21 – 7.24 – 7.25 - 7.26 - 7.27 - 7.28 - 7.32 – 7.34 -– 7.36 - 7.38 –7.39 - 7.40 - 7.42 - 7.44 –7.47
31 professores afirmaram que acreditam ser possível trabalhar com a Geometria Projetiva no Ensino Fundamental e 32 professores acreditam que tal trabalho é possível no Ensino Médio.	7.1 – 7.3 – 7.4 – 7.6 – 7.7 - 7.8 - 7.9 – 7.10 – 7.14 – 7.16 – 7. 20 – 7.21 – 7.22 – 7.25 - 7.26 – 7.27 - 7.28 – 7.29 – 7.30 –7.32 – 7.35 -– 7.36 –7.38 – 7.39 –7.40 - 7.42 - 7.44 - 7.45 – 7.47 – 7.48 - 7.50	7.1 - 7.3 - 7.5 – 7.6 - 7.8 – 7.9 - 7.10 - 7.12 – 7.14 - 7.16 – 7.19 – 7.20 - 7.21 – 7.24 – 7.25 - 7.26 - 7.27 - 7.28 - 7.31 - 7.32 - 7.36 – 7.37 – 7.38 - 7.39 – 7.40 - 7.41 - 7.42 –7.43 - 7.44 – 7.45 - 7.47 - 7.50
13 professores disseram que o trabalho com a Geometria Esférica é possível no Ensino Fundamental e 33 acreditam no trabalho com essa geometria no Ensino Médio.	7.1 – 7.7 - 7.16 – 7.21 – 7.25 - 7.27 - 7.30 - 7.32 – 7.33 - 7.39 – 7.46 - 7.47 - 7.48 -	7.1 – 7.3 - 7.5 - 7.6 – 7.10 - 7.11 - 7.8 – 7.12 - 7.14 - 7.16 - 7.19 – 7.20 - 7.21 - 7.22 - 7.25 - 7.26 - 7.27 - 7.28 - 7.30 – 7.32 - 7.33 - 7.35 - 7.36 – 7.38 –7.39 - 7.40 - 7.42 - 7.44 – 7.45 - 7.46 –7.47 - 7.48 - 7.50

12 professores afirmaram que o trabalho com a Geometria Hiperbólica é possível no Ensino Fundamental e 32 afirmaram que o trabalho com esta geometria é possível no Ensino Médio.	7.1 - 7.16 – 7.21 - 7.24 - 7.25 - 7.27 - 7.32 – 7.33 – 7.39 – 7.45 - 7.46 - 7.47	–7.1 – 7.3 - 7.5 - 7.6 – 7.10 – 7.11 – 7.14 - 7.16 – 7.18 - 7.19 – 7.21 - 7.22 - 7.25 - 7.26 - 7.27 - 7.28 - 7.30 - 7.32 - 7.33 - 7.35 - 7.36 – 7.38 - 7.39 – 7.40 - 7.41 - 7.42 - 7.44 – 7.45 - 7.46 – 7.47 - 7.48 - 7.50 -
28 professores disseram ser possível o trabalho com a Geometria dos Fractais no Ensino Fundamental e esse número aumentou para 31 quando se tratou de Ensino Médio.	7.1 – 7.3 –7.4 – 7.6 - 7.7 - 7.13 – 7.11 – 7.15 – 7.16 – 7.18 – 7.20 – 7.21 – 7.24 - 7.25 – 7.26 - 7.27 - 7.28 – 7.29 – 7.32 – 7.36 - 7.39 – 7.40 - 7.41 - 7.44 – 7.45 - 7.46 – 7.47 - 7.48	7.1 - 7.3 - 7.5 - 7.6 - 7.10 – 7.13 – 7.14 - 7.15 – 7.16 – 7.19 – 7.20 - 7.21 - 7.22 – 7.25 – 7.26 - 7.27 - 7.28 – 7.30 - 7.31 - 7.32 -7.34 –7.36 – 7.38 - 7.39 – 7.40 – 7.41 –7.42 - 7.44 – 7.45 - 7.46 – 7.47

Podemos perceber que a Geometria dos Fractais e a Geometria Projetiva foram as que os professores consideraram mais à vontade para tratar, principalmente no Ensino Fundamental.

Repetindo uma pergunta feita no primeiro questionário perguntamos novamente aos professores se, ao fim do curso, eles consideram importante trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica.

Apenas dois professores afirmaram não acreditar ser importante o trabalho com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica. Um afirmou que:

"Ainda não consegui uma aplicabilidade para tal geometria, se eu encontrei muita dificuldade imagina os alunos, até porque o tempo real em sala de aula é mínimo para uma explicação tão complexa." (7.7)

O outro afirmou que:

“Porque o tempo é pequeno, mal dá para a álgebra já que a matemática tem perdido sua objetividade e as bases já não tem tanta importância com por exemplo saber tabuada, o que torna o raciocínio lento, e o caminhar mais difícil.” (7.4)

Nas respostas dadas para justificar a importância de se trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica encontramos professores com consciência que para se aprender as Geometrias não-euclidianas é necessário um sólido conhecimento da própria Geometria Euclidiana.

*“Existem determinados assuntos que a Geometria Euclidiana não consegue explicar, mas considero muito importante ter um bom conhecimento sobre Geometria Euclidiana para então aplicar outra geometria.” (*7.44)

Encontramos também professores que admitiram a dificuldade em romper com os conhecimentos da Geometria Euclidiana, tidos, até então, como verdades únicas e absolutas. Aliás, eles repetem o que houve historicamente, já que os matemáticos levaram séculos para considerar a existência de outras geometrias.

*“Dá uma visão mais geral do espaço, não fica preso a uma geometria tradicional, apesar de que para nós professores é muito difícil romper esse conhecimento.” (*7.47)

Dentre os professores que afirmaram acreditar ser possível o trabalho com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica, encontramos as justificativas apresentadas na tabela a seguir.

Justificativas dadas pelos professores para a importância de se trabalhar com conceitos das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica.	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**
Declararam que a importância do estudo se justifica pela existência das Geometrias não-euclidianas no cotidiano, no mundo a sua volta, na	7.3 – 7.11 – 7.13 - 7.18 - 7.21 – 7.25 – 7.28 – 7.30 – 7.34 – 7.35 –	7.48 – *“Para que os alunos percebam que à sua volta existem conceitos geométricos que não são respondidos por meio da*

natureza. (12 professores)	7.38 –7.48 –	*Geometria Euclidiana, bem como para que não sejam privados "como nós" de compreender tais conceitos."* 7.38 – *"Para que o aluno tenha visão melhor da natureza e das coisas que os cercam, pois a geometria euclidiana nem sempre dá conta de explicar o mundo a nossa volta."*
Não souberam justificar a resposta. (3 professores)	7.17 – 7.20 – 7.37	
Afirmaram que as Geometrias não-euclidianas ajudam a trabalhar a imaginação. (3 professores)	7.26 – 7.32 - 7.39	7.26 – *"Vai além do concreto, é algo imaginário, tem que imaginar para poder enxergar."* 7.39 – *"Para se formar conceitos e visões de diferentes ângulos. Saber que o mundo é mais além do que aquilo que nos rodeia."*
Afirmaram que as Geometrias não-euclidianas despertam a	7.6 – 7.45	7.6 – *"Despertar a criatividade, percepções*

criatividade, a lógica e o raciocínio mais rápido. (2 professores)		*lógicas e compreensão entre teoremas e construções.”* 7.45 – *“O aluno tem uma visão mais ampla sobre as geometrias. Dá a ele noções de espaço, distância, lógica e mesmo raciocínio mais rápido.”*
Disse que as Geometrias não-euclidianas ensinam os alunos a questionar o quinto postulado. (1 professor)	7.31	7.31 – *“Por ser interessante o aluno ter esse conhecimento e verificar que essa geometria derruba o quinto postulado da geometria euclidiana.”*
Justificaram restringindo a Geometria Euclidiana ao plano. (2 professores)	7.2 - 7.49	7.2 – *“Para compreensão de que o que está a nossa volta não é apenas plano.”* 7.49 – *“Por que ela nos traz a realidade de nosso mundo, hoje nossos alunos vivem no mundo 3 D muito mais através dos jogos.”*
Acreditam que com o ensino das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica os alunos irão sofrer menos com os primeiros	7.4 - 7.5 – 7.9 – 7.16 – 7.23 – 7.42	7.5 – *“para que o aluno tenha conhecimento dessa geometria e não tenha dificuldade em entender quando for trabalhado em*

contatos com tais geometrias. (6 professores)		*certos momentos.”* 7.42 – *“Porque o aluno deve ter pelo menos uma noção das geometrias para que não se “perca” desde o começo em um curso de graduação.”*
Afirmaram ser de suma importância os alunos conhecerem outras Geometrias além da Geometria Euclidiana. (14 professores)	7.1 – 7.10 - 7.12 – 7.15 - 7.22 – 7.24 - 7.27 – 7.29 – 7.33 – 7.40 – 7.41 - 7.44 –7.47 – 7.50	7.12 – *“Para que os alunos não tenham a idéia de que existe uma única geometria a Euclidiana, e sim em outras geometrias que negam alguns postulados de Euclides.”* 7.29 – *“Para que o aluno tenha noção das outras geometrias, não ficando apenas achando que existe apenas a geometria euclidiana.”*
Afirmaram que o ensino das Geometrias não-euclidianas fará com que os alunos tenham um conhecimento mais amplo. (6 professores)	7.7 - 7.8 – 7.14 – 7.36 – 7.43 - 7.46	7.14 – *“Para ampliarmos o conhecimento de nossos alunos.”* 7.43 – *“Para se ter um conhecimento mais amplo.”*
Afirmou que o ensino das Geometrias não-euclidianas	7.19	7.19 – *“Conduzir os alunos a pensar mais e calcular*

levarão os alunos a pensar mais e calcular menos. (1 professor)		*menos."*

Analisando os argumentos utilizados pelos professores, vemos que a compreensão ainda é muito superficial. Alguns dizem respeito apenas a continuação de estudos, outros apresentam razões muito vagas. Os professores não conhecem o suficiente sobre as Geometrias não-euclidianas para justificarem a sua importância da inclusão destas no currículo da Educação Básica.

Um dos professores utiliza o quinto postulado para justificar a importância de se trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica. Nos perguntamos ao ler a resposta desse professor, se ele trabalha com postulados e axiomas com seus alunos.

Repetindo uma pergunta feita no primeiro questionário, indagamos os professores quais foram, na opinião deles, os motivos que levaram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná.

Justificativa dada pelos professores para a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**
Afirmaram que a inclusão aconteceu devido a existência das Geometrias não-euclidianas no cotidiano. (16 professores)	7.1 – 7.3 – 7.9 – 7.11 – 7.16 – 7.18 – 7.28 – 7.30 – 7.31 – 7.33 – 7.35 – 7.37 – 7.39 – 7.40 – 7.47 – 7.48	7.33 – *"Para fazer com que o professor aproxime o seu trabalho com a geometria o mais próximo possível da realidade."* 7.48 – *"Por ser relevante e de extrema importância na*

		compreensão de situações cotidianas e estar presente na arte nas formas da natureza, etc.”
Declararam que a Geometria Não-euclidiana veio para que os alunos possam conhecer outras geometrias e questionar a Geometria Euclidiana. (4 professores)	7.12 – 7.13 – 7.24 – 7.41	7.13 – *“Pois esta geometrias explica fatos, que não podemos respondê-los dentro da Geometria Euclidiana.”* 7.41 – *“Para os alunos reconhecerem que não existe apenas as geometrias euclidianas.”*
Afirmaram que a inclusão aconteceu para que o aluno pudesse estudar a Geometria fora do plano. (4 professores)	7.26 – 7.43 – 7.45 – 7.49	7.26 – *“Porque vivemos em um mundo em que objetos e coisas são tridimensionais, bidi. Podemos ter conceitos diferentes em espaços diferentes (bi ou tri).”* 7.43 – *“Para se ter uma visão mais abrangente da Geometria tridimensional.”*
Relacionou a inclusão com a preocupação em melhorar o ensino e para que os alunos se sintam mais preparados para concursos. (1 professores)	7.46	7.46 – *“Porque nos vestibulares, Enem e olimpíadas de matemática já vem nas questões para resolver.”*

Acreditam que estudando as Geometrias não-euclidianas os alunos terão um conhecimento mais amplo. (10 professores)	7.5 – 7.6 – 7.20 – 7.22 – 7.25 - 7.27 – 7.32 – 7.36 – 7.42 – 7.44	7.20 – *"Para propiciar um nível de conhecimento melhor."* 7.32 – *"Porque são úteis para ampliar conhecimento."*
Não souberam responder. (10 professores)	7.7 – 7.8 – 7.10 – 7.14 – 7.17 – 7.19 – 7.21 – 7.29 – 7.38 – 7.50	7.7 – *"Nem tenho idéia."* 7.8 – *"Eu não sei. Gostaria de saber, o objetivo."*
Afirmou que se não forem trabalhadas, as Geometrias não-euclidianas, serão esquecidas pelos professores. (1 professor)	7.15	7.15 – *"Pois estava sendo esquecida, pois se analisamos o que vimos na graduação sobre a geometria não-euclidiana não lembramos mais pois não esta sendo praticada no dia-a-dia da escola."*
Criticaram a maneira como a inclusão foi feita. (4 professores)	7.2 – 7.4 – 7.23 – 7.34	7.4 – *"O Paraná gosta de ostentar que sempre está a frente mas não pensa na funcionalidade."* 7.34 – *"Pela importância do tema. Mas acredito que antes, deveriam preparar os professores, pois temos que trabalhar algo desconhecido, muitas vezes despreparados*

		para cumprir com a função de "formar" conceitos e conhecimentos."

Na análise das respostas acima obtemos contradições entre as respostas dadas pelos professores. Alguns professores afirmam que a inserção das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná foi um pedido dos professores e que ela foi discutida com os professores em encontros e capacitações.

*"Nas capacitações, os professores fizeram esse pedido, devido as necessidades dos alunos." (*7.36)

*"Porque os professores de matemática estão em constante aperfeiçoamento, assim como os das demais áreas, assim em vários encontros, foi discutido essa possibilidade de introduzir o trabalho de novas geometrias nas Diretrizes o que foi acatado com grande sucesso." (*7.44)

*"Acredito que, para se ter idéia de que existe outras geometrias que não seja Euclidiana, mas acho, que primeiro deveria estar ocorrendo formação para os professores e depois de estarmos com uma formação melhor, ir implantando este conteúdo no currículo." (*7.12)

No entanto, outros professores criticaram com veemência a maneira como a inclusão foi feita, principalmente com a diminuição da carga horária da disciplina de matemática ocorrida no Estado do Paraná. Eles declararam não ter participado de discussão sobre a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica.

*"É algo também que eu gostaria de saber, pois, esta secretaria (secretaria de Educação do Paraná) não valoriza a educação de matemática, tendo em vista que, sempre que aumenta alguma disciplina na grade, é a matemática que perde carga horária." (*7.23)

*"Não sei dizer. Apenas pegamos sempre o pacote pronto, não somos consultados e nem informados." (*7.17)

Em Paraná (2008) encontramos um agradecimento feito a todos os professores que,

> [...] desde 2003 participaram de eventos propostos pela Secretaria de Estado da Educação, contribuindo com argumentações fundamentadas tanto em sua prática de ensino quanto em suas leituras teóricas e fizeram leituras críticas das diversas versões preliminares enviadas às escolas. Destacamos, também, o trabalho dos professores dos Núcleos Regionais de Educação e da Secretaria de Estado da Educação que, ao longo desse período, coordenaram discussões e sistematizaram os textos em suas versões preliminares, até chegarmos a estas diretrizes curriculares, agora oficialmente publicadas (PARANÁ, 2008).

Apesar de não se referir diretamente a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica, encontramos em Paraná (2008) afirmações que nos levam a acreditar que ocorreram discussões sobre todos os assuntos que tratam as DCE. No entanto, não podemos afirmar, não é esse nosso objetivo, que as discussões foram feitas com a participação e aprovação de todos os professores da rede pública do Estado do Paraná.

Mesmo se tratando do último encontro, encontramos ainda professores que continuaram a restringir a Geometria Euclidiana ao plano.

"Na minha opinião a nossa realidade de 3D está aí, e devemos preparar nossos alunos para essa realidade de que o mundo nos traz." (7.49)

O gráfico que segue abaixo compara as respostas dadas pelos professores, no primeiro e sétimo questionário, sobre os motivos, que na opinião deles, levaram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná.Veja que as respostas dadas pelos professores, tanto no primeiro como no último encontro, não são suficientemente consistentes.

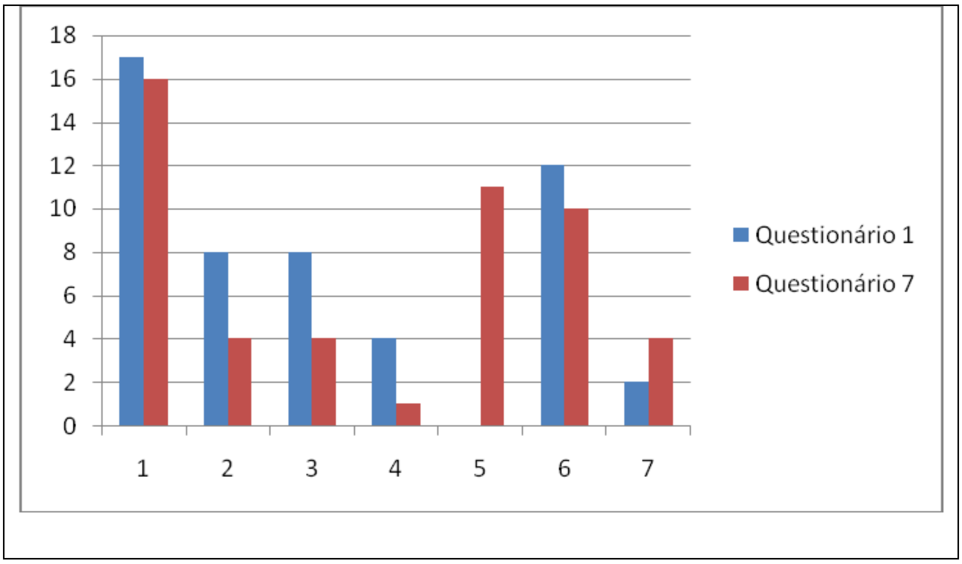


Gráfico 5 – Quais os motivos da inclusão?

1 - A inclusão aconteceu devido a existência das Geometrias não-euclidianas no cotidiano.

2 - A Geometria Não-euclidiana veio para que os alunos possam conhecer outras geometrias e questionar a Geometria Euclidiana.

3 - A inclusão aconteceu para que o aluno pudesse estudar de Geometria fora do plano.

4 - A inclusão veio com a preocupação em melhorar o ensino e para que os alunos se sintam mais preparados para concursos.

5 - Estudando as Geometrias não-euclidianas os alunos terão um conhecimento mais amplo.

6 - Não souberam responder.

7 - Criticaram a maneira como a inclusão foi feita.

Houve uma diminuição considerável no número de professores que deram respostas restringindo as Geometrias não-euclidianas ao plano. No entanto não podemos deixar de ressaltar o aumento do número de críticas à maneira como a inclusão aconteceu.

A última questão do sétimo questionário propunha que os professores relatassem as principais dificuldades encontradas por eles no decorrer do curso. A tabela a seguir representa a análise das respostas dadas pelos professores.

Principais dificuldades encontradas pelos professores durante o curso de Geometrias não-euclidianas	**Respostas dos professores enumeradas de um a cinqüenta**	**Excertos de respostas dadas pelos professores.**
Declararam que não houve dificuldade.	7.20 – 7.38	7.20 – *“Transcorreu normalmente, sem dificuldades.”*

(2 professores)		7.38 – *"Creio que não houve grandes dificuldades."*
Não souberam responder. (4 professores)	7.10 – 7.19 – 7.22 – 7.33	
Afirmaram que a maior dificuldade foi em entender a aplicabilidade em sala de aula. (4 professores)	7.18 – 7.21 – 7.25 – 7.43	7.18 – *"Dificuldade de aplicar o conhecimento adquirido com a realidade que vivo na sala de aula, no qual a maioria dos alunos, não estão motivados, indo para escola obrigados e sem objetivo."* 7.21 – *"como aplicar em sala de aula."*
Disseram que o tempo do curso foi pouco para muita informação. (5 professores)	7.36 – 7.41 – 7.44 – 7.46 - 7.50	7.36 – *"Muito pouco tempo para muita informação."* 7.50 – *"Achei o tempo um pouco corrido, então muitas coisas eu não entendi muito bem."*
Afirmou que a sua maior dificuldade foi na aula de Topologia que trabalhou com o Toro. (1 professor)	7.1	7.1 – *"A construção de algumas figuras no toro."*
Declaram que tiveram dificuldades em entender	7.42 – 7.49 - 7.35	7.42 – *"A parte dos exercícios, resolver um*

as demonstrações. (3 professores)		*exercício por definição é muito complicado, pois na sala de aula o aluno quer ver o concreto, e uma fórmula ou um caminho ideológico para chegar a tal resultado.”* 7.49 – *“As demonstrações, visualizá-las, sempre tive dificuldades com elas.”*
Disseram que a grande dificuldade foi entender a diferença entre as Geometrias não-euclidianas e a Geometria Euclidiana. (4 professores)	7.15 – 7.17 – 7.23 – 7.40	7.17 – *“Diferenciar as geometrias euclidianas das não-euclidianas. Notei a diferença apenas no 4° encontro.”* 7.23 – *“Dificuldade de diferenciar a geometria não-euclidiana de outras geometrias, tais como: hiperbólica, projetiva etc.”*
Afirmaram a necessidade de tempo para exercitar e aplicar os conhecimentos, para então por em prática. (6 professores)	7.2 – 7.8 – 7.11 – 7.12 – 7.24 – 7.47	7.2 – *“Nenhuma, a compreensão é possível porém há necessidade de tempo para exercitar e aplicar nos programas específicos de computador.”* 7.24 – *“O não conhecimento*

		das geometrias não euclidianas e a ansiedade em aprender para depois levar estes conhecimentos para os nossos alunos. Sei que terei que pesquisar muito, aprofundar os mais conhecimentos para poder ajudar nos nossos alunos terem uma visão melhor dessas geometrias."
Declarou não ter conhecimento matemático suficiente. (1 professor)	7.32	7.32 – *"Não ter muito conhecimento matemático devido a não ter atuado muito ainda me matemática."*
Declararam que a maior dificuldade foi quebrar paradigmas, aceitar novos conceitos que contradizem o que acreditavam ser verdade absoluta e incontestável. (15 professores)	7.3 - 7.4 - 7.6 – 7.7 - 7.13 – 7.14 – 7.16 – 7.26 – 7.27 – 7.29 – 7.30 – 7.31 – 7.34 – 7.39 – 7.48	7.13 – *"Tudo foi novidade, e o nosso pensar Euclidiano, é muito forte, o que dificulta, conceber a Geometria Não-euclidiana"* 7.30 – *"Desprender da geometria euclidiana para aceitar novas verdades."*
Disseram que a dificuldade maior foi devido ao primeiro contato com as Geometrias não-euclidianas.	7.5 – 7.9 - 7.37 – 7.45	7.5 – *"Minha falta de conhecimento sobre o assunto."* 7.37 – *"Primeiro contato com*

(4 professores)		*o assunto.”*
Afirmou que sua dificuldade foi imaginar figuras fora do plano. (1 professor)	7.28	7.28 – *“Conseguir imaginar as diferentes superfícies, pois sempre imaginamos o plano.”*

Dentre as dificuldades postas pelos professores destacamos a mais citada, a quebra de paradigmas. A dificuldade em aceitar novos conceitos que contradizem o que acreditavam ser verdade absoluta e incontestável.

*“Confrontar e contestar o que já temos como regra.” (*7.7)

*“Conceituar as Geometrias não-euclidianas, pois sempre vimos apenas a euclidiana e a mesma está incorporada em nossa mente como única possível.” (*7.39*)*

Mas a maior dificuldade percebida durante o curso foi a falta de conhecimentos da própria Geometria Euclidiana. A confusão de alguns professores da Geometria Euclidiana Espacial com as Geometrias não-euclidianas foi outro ponto que fortemente nos chamou a atenção durante a análise das respostas dos professores.

Para que o professor se aproprie de uma inovação curricular, como no caso a inclusão das Geometrias não-euclidianas, ele precisa ser protagonista desse currículo. Para isso, suas práticas precisam ser problematizadas e refletidas. Não houve espaço para tais problematizações tanto por parte da secretaria do estado, quanto, no próprio curso que tinha muito conteúdo para ser ministrado em pouco tempo.

CONCLUSÕES

Desde meados do século XIX as Geometrias não-euclidianas são conhecidas nos meios acadêmicos. Mas a escola ainda se prende a conhecimentos anteriores ao século XIX e continua apresentando aos alunos a Geometria Euclidiana como a única geometria existente quando se sabe que, na verdade existem outras, que, na maioria das vezes são desconhecidas por professores.

Tendo em vista ampliar os conhecimentos dos alunos sobre a(s) Geometria(s), a Secretaria do Estado da Educação (SEED) introduziu, nas Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná, divulgadas no final de 2006, dentro do conteúdo estruturante *Geometria* o tópico, *Noções de Geometrias não-euclidianas*, para o Ensino Fundamental e, *Noções Básicas de Geometrias não-euclidianas*, para o Ensino Médio.

Foi este o acontecimento que nos levou a propor esta investigação cujo objetivo era analisar como professores da Rede Pública do Estado do Paraná, mais especificamente do Núcleo Regional de Maringá, reagiram à inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica, o que pensam a respeito dessa inclusão e como se sentiram, após participarem de um curso sobre Geometrias não-euclidianas oferecido pelo NRE de Maringá em parceria com a UEM, em relação à perspectiva de abordarem deste tópico em sala de aula.

Com a finalidade de levar avante esta proposta, aproveitamos o convite feito pelo docente que ministrou o curso de Geometrias não-euclidianas, para assistirmos e acompanharmos os cinqüenta professores que dele participaram nos seis encontros do curso. Para essa investigação fizemos o uso de questionário, diário de campo da pesquisadora e gravação de todos os encontros. Para análise do material obtido, utilizamos a Análise de Conteúdo, baseada em Moraes (1999). A escolha dessa metodologia auxiliou o entendimento e a categorização das respostas obtidas nos questionários.

Quando iniciamos nossa pesquisa de campo esperávamos encontrar professores despreparados para trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica, principalmente porque sabíamos que este tema não é abordado nos seus cursos de formação. Sabíamos que um curso não seria o bastante para deixar os professores preparados para abordarem este conteúdo em sala de aula e que ele seria apenas um pequeno passo para prepará-los para essa inclusão. No entanto, percebemos que, além de não conhecerem as Geometrias não-euclidianas, os seus conhecimentos sobre Geometria Euclidiana eram muito incipientes. A falta de conhecimento de Geometria Euclidiana pelos professores, que já havia sido denunciada por vários autores, foi, mais uma vez constatada durante o curso. Assim o problema com o ensino das Geometrias não-euclidianas envolve um problema mais amplo, já que os professores estão se formando, sem ao menos ter disciplinas voltadas à geometria no seu curso. Isso se evidencia nas dúvidas que os professores apresentaram durante o curso.

Já no primeiro encontro encontramos professores que desconheciam a Geometria Euclidiana axiomática, que nunca tinham ouvido a palavra axioma, e se mostravam surpresos e admirados com o que lhes estava sendo apresentados. Esse pode ser um dos motivos que levaram os professores a apresentarem muita dificuldade em diferenciar as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana. Mesmo ao fim do curso ainda havia professores que não conseguiam diferenciar as Geometrias não-euclidianas da Geometria Euclidiana.

Foi possível detectar ainda, durante todo o curso, que professores restringiam a Geometria Euclidiana ao plano, afirmando inclusive que partes do mundo onde vivemos é plana.

O contato com novos conhecimentos que romperam com conhecimentos antigos gerou conflitos internos em muitos professores, que muitas vezes mostraram-se confusos. O curso de vinte e quatro horas, tratou apenas de uma primeira aproximação, muito rápida, com vários conteúdos sendo trabalhado em poucas aulas. Porém, não sabemos ao certo, sem fundamentos em experiências a respeito se mesmo um curso mais longo, ou mesmo uma disciplina durante a graduação, garantiria que os professores se sentissem preparados, com conhecimentos suficientemente construídos para trabalhar com o tema em sala de aula. Isto porque o estudo das Geometrias não-euclidianas requer mais tempo de estudos e demanda um período de adaptação.

Quando questionamos os professores sobre a possibilidade de retas paralelas se encontrarem no infinito, foi possível categorizar respostas que, apesar de estarem corretas, mostram a forte ligação dos professores com a Geometria Euclidiana. Essas respostas indicam as dificuldades vivenciadas pelos professores em aceitar a existência de outras geometrias, que neguem princípios da Geometria Euclidiana.

Em relação aos encontros, foi possível verificar uma dificuldade maior de compreensão da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica. Mesmo com o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica os professores não aceitaram com facilidade a imagem das retas nessas geometrias, se mostrando muitas vezes incrédulos com o que estavam vendo. As dúvidas em relação à Geometria Euclidiana Espacial ficaram explícitas no estudo dessas geometrias.

Ao final do último encontro, o docente do curso pediu que os professores entregassem um plano de aula de uma das Geometrias não-euclidianas vistas durante o curso. Poucos professores o entregaram, um indício que não se encontravam, ao fim do curso, preparados para trabalhar com as Geometrias não-euclidianas em sala de aula. Como foram poucos os planos entregues, fizemos a opção por não analisá-los. No entanto, acreditamos que seriam interessantes pesquisas que analisassem os planos e a prática destes professores, dado que, durante a nossa pesquisa, analisamos apenas o discurso destes professores nos questionários por eles respondidos.

Nas DCE encontramos frases que nos levam a crer que a inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica foi um processo decidido pela Secretaria de Ensino do Estado do Paraná em conjunto com os professores da Educação Básica. Mas quando questionamos os professores sobre os motivos, que na opinião deles, levaram a essa inclusão, pudemos encontrar algumas críticas quanto à maneira como a inclusão ocorreu. Encontramos também algumas respostas vagas de professores que tentavam justificar a inclusão de um conteúdo que não conheciam, ou conheciam muito pouco. Houve, no entanto, professores que afirmaram ter participado das discussões sobre a inclusão e que mostraram acreditar na importância da inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica.

Acompanhando os professores durante todo o curso percebemos que dúvidas ainda existem, e que grande parte dos professores ainda não se encontra preparada e segura para trabalhar com as Geometrias não-euclidianas, necessitando ainda de mais estudos para uma melhor compreensão. Muitos reconheceram que não conseguiram construir o conhecimento, outros conseguiram alguma coisa, mas nem sempre com qualidade suficiente para trabalhar em sala de aula. No entanto, apesar de todas as dificuldades, dúvidas e incertezas dos professores, cabe ressaltar que, de maneira geral os professores se mostraram sempre interessados e motivados em discutir o assunto em questão.

REFERÊNCIAS

ARCO VERDE, Yvelise Freitas de Souza. **Carta da Secretária da Educação. In:** PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf - Acesso em 20 mar. 2008.

ARGUNOV, B. I., SKORNIAKOV, L. A. **Teoremas de Configuración.** Moscú: Editorial MIR, 1980. 53 p. (Coleção Lecciones populares de matemática)

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal:** para sala de aula. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 142 p. (coleção tendências em Educação Matemática).

BATANETE, A., CASTRO, A., LAGO, H. **Natureza – Caos ou Ordem?** Disponível em <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/natureza.pdf > Acesso em 21 de abr. de 2009.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso em 16/01/2008.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: Um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

CABARITI, Eliane. **Geometria Hiperbólica:** uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

COXETER, H. S. M. **Projetive Geometry.** 2. ed. Toronto: University of Toronto, 1974. 162p.

FAMOUS FRACTALS. Disponível em: < http:// library. thinkquest.org/ 26242/full/ fm/fm16.html> Acesso em 29 de out de 2008.

GERÔNIMO, João Roberto, FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Plana e Espacial:** um estudo axiomático. Maringá, Massoni, 2005. 313 p.

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries:** Development and History. 2. ed. California: Santa Cruz, 1973. 400p.

GLEICK, J. **Caos:** a criação de uma nova ciência. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

GOBBI, Luciane et al. **Tópicos Da Geometria Hiperbólica com o Cabri-Géomètre II.** Disponível em http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/minicursos/mc63.pdf - Acesso em 02 de mai. de 2008.

KOBAYASHI, Maria do Carmo Monteiro. **A construção da geometria pela criança.** Bauru: EDUSC, 2001. 202 p.

KODAMA, Yumi. **O Estudo Da Perspectiva Cavaleira:** Uma Experiência No Ensino Médio. 192 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LENI C. **Cartão Fractal**. Disponível em: <http://64.233.169.104/search?q=cache:qUJkeBV8JcJ:www.integralweb.com.br/docs/aula_virtual/7serie/DEVER_MAT_II%25207.doc+cart%C3%A3o+fractal&hl=pt-BR&ct=clnk&cd=6&gl=br > acesso em 16 ago. 2008.

MORAES, Roque. **Análise de conteúdo**. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf - Acesso em 20 mar. 2008.

PAVANELLO, Regina Maria. ANDRADE, Roseli Nozaki Grave de. **Formar professores para ensinar geometria:** um desafio para as licenciaturas em matemática. Educação Matemática em Revista: revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, n. 11ª, p. 78 – 86, abr. 2002.

PIAGET, Jean. **Introduccion a la epistemologia genetica**: 1. El pensamiento matemático. 1 ed. Buenos Aires: Editorial Paidos, 1975. 315p.

PIAGET, Jean, BARBEL, Inhelder. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIAGET, Jean, BARBEL, Inhelder e SZEMINSKA, Alina. **The Child´s conception of geometry**. 1 ed. New York: Harper Torchbook, 1964. 411 p.

PIAGET, Jean, GARCIA, Rolando. **Psicogénese e História das Ciências.** Lisboa: Flammarion, 1987. 251 p. (Coleção Ciências Nova, n°6).

SAMPAIO, João Carlos V, **Quatro Cores e Matemática** In: II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004, Bahia. Disponível em http://www.bienasbm.ufba.br/M35.pdf Acesso em 30 de mar. de 2009.

SAMPAIO, J. C. V. **Uma introdução à topologia geométrica:** passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores. São Paulo, EduFscar, 2008.

SILVA, Lorena Carla Macedo da, ORTEGA, Antonio Carlos. **Aspectos psicogenéticos da prática do Jogo das Quatro Cores.** *Estudos de Psicologia,* Espírito Santo, v.22, n. 2, p. 289-298, 2002.

VELOSO, Eduardo. **Há vida na geometria para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones.** Educação e Matemática: revista da associação de professores de matemática. Lisboa, n. 96, p. 18-19, fev. 2008.

WIKIPEDIA. **Triangulo de Sierpinski**. Disponível em: <http://pt. wikipedia. org/wiki/ Tri%C3%A 2ngulo_de_Sierpinski> Acesso em 15 set. 2008.

SÍTIO NA INTERNET: <www.euclides.org> Acesso em 15 de abr. 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE I - QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ

1) Qual é a sua formação?
2) Há quanto tempo está no magistério?
3) Você conhece algo sobre as Geometrias não-euclidianas?
4) Você sabe que as Geometrias não-euclidianas foram incluídas nas Diretrizes Curriculares para a Educação Pública do Estado do Paraná?
5) Você sabe o que é Geometria Projetiva?
6) Você já ouviu falar em ponto de fuga?
7) Você já ouviu falar que retas paralelas se encontram no infinito?
8) Você já ouviu falar em fractais?
9) Você acredita ser possível trabalhar com as Geometrias não-euclidianas no ensino fundamental?
10) Você desenvolve algum tipo de atividade com seus alunos que envolvam essas geometrias?
11) Você conhece algum tipo de trabalho que traga sugestões de atividades para te ajudar a trabalhar com essas geometrias?

APÊNDICE II - QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ PARTICIPANTES DE UM MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

1º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

1) Qual é a sua formação?

2) Há quanto tempo está no magistério?

3) Você sabe que as Geometrias não-euclidianas foram incluídas nas Diretrizes Curriculares para a Educação Pública do Estado do Paraná?

   ( ) SIM ( ) NÃO

4) Você conhece algo sobre as Geometrias não-euclidianas?

   ( ) SIM ( ) NÃO

5) Você acredita ser possível trabalhar com as Geometrias não-euclidianas no ensino básico?

   ( ) SIM ( ) NÃO

6) Você acha importante trabalhar com as Geometrias não-euclidianas no ensino básico?

   ( ) SIM ( ) NÃO

7) Em sua opinião, porque o tema geometria não-euclidiana foi incluído nas Diretrizes Curriculares para a Educação Pública do Estado do Paraná?

2º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

1) Você conhecia a geometria euclidiana axiomática como apresentada no primeiro encontro?

   ( ) SIM ( ) NÃO

2) Ficou claro para você a diferença entre a geometria euclidiana e as Geometrias não-euclidianas? Qual seria essa diferença?

   ( ) SIM ( ) NÃO

3) O conceito que você possui de reta e plano atrapalhou o entendimento das Geometrias não-euclidianas?

   ( ) SIM ( ) NÃO

4) Você trabalha com seus alunos noções de noções de vizinhança, fora, dentro, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, separado-unido, contínuo-descontínuo, alto-baixo?

   ( ) SIM ( ) NÃO

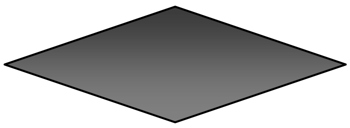
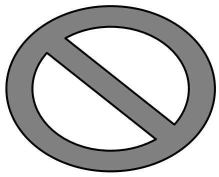
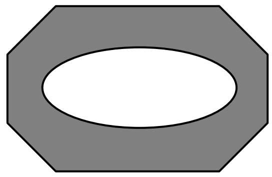
5) O que você conhece sobre Topologia?

3º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

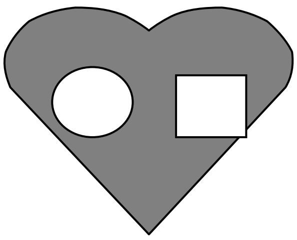
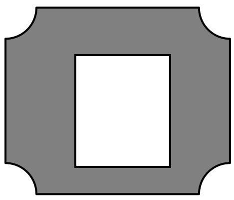
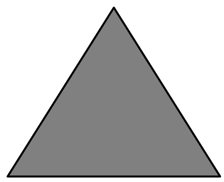
1) Depois de conhecer um pouco sobre Topologia, você considera possível trabalhar com essa geometria na Educação Básica?

( ) SIM ( ) NÃO

2) Identifique quais as figuras que são topologicamente equivalentes:

a) b) c)

d) e) f)

3) Quando estamos em uma estrada reta temos a impressão que as laterais da estrada se encontram num ponto mais distante aos nossos olhos. Um curioso aluno, atento a sua aula onde você definia o conceito de retas paralelas, questionou se a impressão que ele teve nessa estrada pode levá-lo a afirmar que duas retas paralelas se encontram no infinito. O que você diria a esse aluno e como explicaria isso a ele?

4º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

1) Já está ficando mais clara para você a diferença entre a geometria euclidiana e as Geometrias não-euclidianas?

   ( ) SIM ( ) NÃO

   Qual seria essa diferença?

2) Lembra-se da questão colocada no último questionário? “Quando estamos em uma estrada reta temos a impressão que as laterais da estrada se encontram num ponto mais distante aos nossos olhos. Um curioso aluno, atento a sua aula onde você definia o conceito de retas paralelas, questionou se a impressão que ele teve em uma estrada reta pode levá-lo a afirmar que duas retas paralelas se encontram no infinito. O que você diria a esse aluno e como explicaria isso a ele?” Você mudaria a maneira de explicar o fato a seu aluno? O que você diria a ele?

3) O quinto postulado de Euclides em uma versão atual afirma que *Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única reta paralela a r passando pelo ponto P.* Você saberia negar essa afirmação quanto a existência dessa reta?

5º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

1) Pelo que foi visto nos dois últimos encontros, temos que as retas paralelas sempre se encontram?

   ( ) SIM ( ) NÃO

   Justifique sua resposta.

2) Agora em relação ao último encontro em que foi trabalhado a Geometria Projetiva Matematicamente, você seria capaz de citar o nome de algum dos teoremas expostos?

   ( ) SIM ( ) NÃO

   Caso sua resposta seja afirmativa, dê o nome e se quiser, fale mais ou menos o que ele afirma, pode ser utilizando uma figura.

3) Você faz alguma idéia do que seria a Geometria Hiperbólica?

   ( ) SIM ( ) NÃO

4) Você faz alguma idéia do que seria a Geometria Esférica?

   ( ) SIM ( ) NÃO

6º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

1) O conceito de reta construído por vocês antes de conhecer as Geometrias não-euclidianas, foi um obstáculo para a compreensão da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica?

   ( ) SIM ( ) NÃO

   Fale um pouco de suas impressões ao ver o seu conceito de reta sendo alterado.

2) Você conhece algo sobre Fractais?

   ( ) SIM ( ) NÃO

   O que você já ouviu falar?

7º QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DO NÚCLEO DE MARINGÁ – MINI-CURSO SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS – PROFESSOR VALDENI SOLIANI FRANCO

1) Qual é a sua formação?

2) Há quanto tempo está no magistério?

3) Agora que você conhece algo sobre as Geometrias não-euclidianas, você acredita ser possível trabalhar com essas geometrias na Educação Básica?

   a) Ensino Fundamental

   ( ) SIM   Quais?   ( ) NÃO

   b) Ensino Médio

   ( ) SIM   Quais?   ( ) NÃO

4) Considerando tudo que estudamos sobre as Geometrias não-euclidianas, você acha importante trabalhar com essas geometrias na Educação Básica?

   ( ) SIM   ( ) NÃO

   Por quê?

5) Você pretende aplicar alguma atividade envolvendo Geometrias não-euclidianas com seus alunos ainda neste ano?

   ( ) SIM

   ( ) NÃO -

   Se não, pretende aplicar a partir de quando?

6) Em sua opinião, porque o tema Geometria Não-euclidiana foi incluído nas Diretrizes Curriculares para a Educação Pública do Estado do Paraná?

7) Quais foram as principais dificuldades encontradas por você no decorrer do curso?

ANEXOS

CONSTRUÇÃO DO CARTÃO FRACTAL

A seguir temos a construção passo-a passo, segundo Leni (2008, *on-line*):

1) Dobre uma folha de papel ao meio; Todos os cortes serão feitos apenas na direção vertical da folha (direção da lateral maior);

2) Faça cortes de comprimento $\frac{a}{2}$ a $\frac{1}{4}b$ de cada lado;

3) Dobre ao longo do segmento produzido pelos dois cortes;

4) Repita os passos 2 e 3 enquanto for possível na folha;

5) Abra a folha de modo que ela fique como no início. De agora em diante você vai trabalhar com a folha na posição horizontal. Vinque a folha no meio e puxe o retângulo maior de modo que fique saliente. Feche a folha com o retângulo puxado e vinque bem;

6) Continue a puxar os retângulos e vincá-los até que todos estejam salientes. O seu cartão está pronto

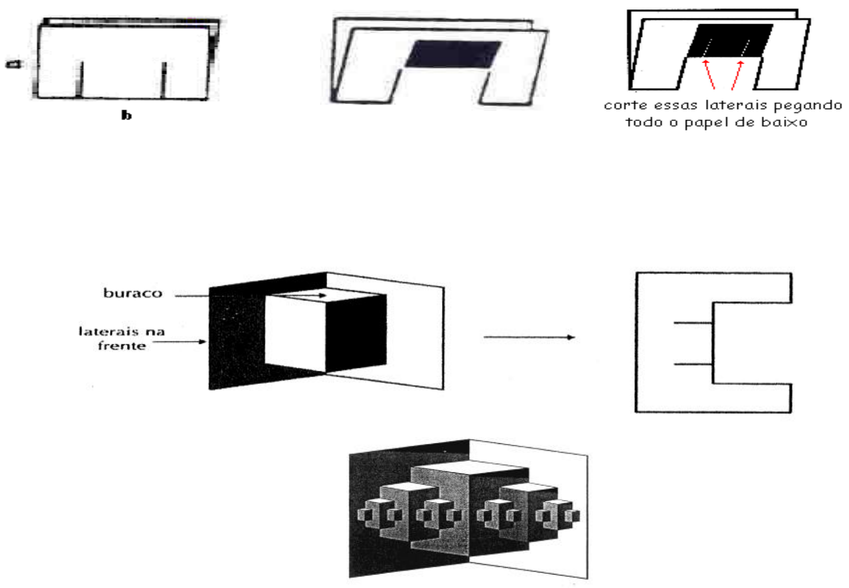


Figura 8 – Construção do Cartão Fractal

Fonte: LENI C., *on-line* (2008)