

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA
A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA – MESTRADO

FLÁVIA CHERONI DA SILVA BRITA

**CONTRIBUIÇÕES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PARA
A COMPREENSÃO DOS NÚMEROS DECIMAIS: um estudo com alunos do 6º ano**

Maringá

2015

FLÁVIA CHERONI DA SILVA BRITA

**CONTRIBUIÇÕES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PARA
A COMPREENSÃO DOS NÚMEROS DECIMAIS: um estudo com alunos do 6º ano**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre, do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, da Universidade Estadual de Maringá.

Área de Concentração:
Ensino de Ciências e Educação Matemática

Orientador:
Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Coorientadora:
Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira

Maringá

2015

Dados Internacionais de Catalogação em Publicação (CIP)
(Biblioteca Central UEM, Maringá- PR., Brasil)

B862c Brita, Flavia Cheroni da Silva
Contribuições dos registros de
representação semiótica para a compreensão
dos números decimais: um estudo com alunos
do 6ºano / Flavia Cheroni da Silva Brita.
-- Maringá, 2015.
208 f; Il.; color.; figs .

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani
Franco.

Coorientadora: Prof. Dra. Clélia Maria
Ignatius Nogueira

Mestrado (Mestre em Educação para a
Ciência e a Matemática)- Universidade
Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Programa de Pós-graduação em
Educação para Ciência e a Matemática.

1. Educação matemática. 2. Registros
de representação semiótica - Sequência de
atividades. 3. Números decimais. 4.
Engenharia didática. 5. Teoria dos
Registros de Representação Semiótica -
Duval, Raymond,1937-. I. Franco, Valdeni
Soliani, orient. II. Nogueira, Clélia
Maria Ignatius, coorient. III.
Universidade Estadual de Maringá. Centro
de Ciências Exatas. Programa de Pós-
graduação em Educação para Ciência e a
Matemática. IV. Título.

21.ed. 510.7

Cicilia Conceição de Maria
CRB9- 1066

FLÁVIA CHERONI DA SILVA BRITA

**Contribuições dos registos de representação semiótica para a
compreensão dos números decimais: *um estudo com alunos do 6º ano***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Profª. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira
Universidade Estadual de Maringá - UEM



Profª. Dra. Célia Finck Brandt
Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG



Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 23 de Abril de 2015.

*À minha família,
pelo incentivo, apoio
e compreensão
para que fosse possível
a realização deste trabalho.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, por ouvir minhas preces para que eu conseguisse concluir este trabalho com perseverança, paciência, sabedoria e determinação.

Aos meus amados filhos, Igor Matheus Silva Brita e Marcos Vinícius Silva Brita, que compreenderam a minha falta de atenção em alguns momentos das suas vidas, como uma necessidade para o desenvolvimento e conclusão desta pesquisa.

Ao meu esposo, Marcos Antonio Brita, pelo incentivo e compreensão para concluir mais esta etapa da minha vida.

Aos meus queridos pais, Inês e Osvaldo, pela atenção, apoio, amor e carinho, para que eu pudesse estar em paz para realizar este trabalho.

Aos meus irmãos, Edmilson e Fábio, cunhadas, sobrinhos, afilhados e amigos que compreenderam a minha ausência neste momento de dedicação aos estudos, fator que me impedia de estar de corpo e alma com eles.

Ao meu orientador Valdeni Soliani Franco que mesmo distante, por estar morando em Portugal e atarefado com seus estudos do pós doutorado, realizou as orientações e as sugestões que contribuíram com a qualidade deste trabalho.

À querida Veridiana Rezende que humildemente aceitou contribuir com esta pesquisa. Suas sábias, cuidadosas e criteriosas sugestões contribuíram para o meu crescimento e amadurecimento nesta investigação. Agradeço a Deus por providencialmente tê-la colocado em minha vida.

A professora Clélia Maria Ignatius Nogueira que bondosamente aceitou me coorientar e substituir a ausência do orientador que se encontrava fora do país. Foram poucos contatos, mas muito produtivos e esclarecedores.

Aos professores, Rui Marcos de Oliveira Barros e Célia Finck Brandt, que gentilmente aceitaram contribuir com este trabalho e ofereceram valiosas sugestões

Aos professores do PCM, Valdeni, Ourides, Ana Lúcia, Aparecida, Neide, Polônia, Dulcinéia, Lílian, Álvaro e Marcos que contribuíram para a conquista deste título por todo conhecimento compartilhado.

À professora Maria Lúcia Riciere, profissional admirável que prontamente contribuiu com a revisão ortográfica deste trabalho.

Ao padre Edivaldo Rossi Gonçalves, por ser referência espiritual em minha vida e me aconselhar diante de situações inesperadas, acúmulo de tarefas e crises de ansiedade, auxiliando-me a enxergar as prioridades, a ter fé e a não desistir.

À minha amiga Vânia, que Deus gentilmente a colocou em meu caminho, pela preocupação, carinho, companheirismo e amizade verdadeira.

Às amizades construídas no PCM, especialmente à Joici e à Gisele que foram companheiras de disciplina e que, mesmo distantes, durante a escrita da dissertação, ofereciam-me segurança de poder contar com elas, caso precisasse.

Aos alunos sujeitos desta pesquisa, pelo carinho e comprometimento com a pesquisa.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram com este trabalho, um sonho adiado, mas que agora se tornou realidade.

*Chegamos a ser plenamente humanos,
quando somos mais que humanos,
quando permitimos a Deus
que nos conduza para além de nós mesmos
a fim de alcançarmos
o nosso ser mais verdadeiro.
Papa Francisco*

BRITA, F. C. S. **Contribuições dos registros de representação semiótica para a compreensão dos números decimais: um estudo com alunos do sexto ano.** 2015. 208p. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

O presente estudo teve como objetivo favorecer a aprendizagem dos Números Decimais por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com respaldo teórico nos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. O referido autor considera que o acesso ao objeto matemático se dá pela coordenação de pelo menos dois registros, afirmando a necessidade das conversões nas situações de ensino e aprendizagem. Tal aporte teórico subsidiou a elaboração de uma sequência de atividades que contribuiu para que os alunos chegassem às conversões relacionadas a registros de representação semiótica dos Números Decimais, tais como numérico decimal, numérico fracionário, numérico na forma de porcentagem, numérico com significado monetário, figural discreto e figural contínuo. Essa sequência foi desenvolvida com um grupo de vinte alunos do 6º ano de uma escola da rede pública estadual do Paraná, que se encontrou com a pesquisadora uma vez por semana, no contraturno, durante seis semanas. Os encontros foram gravados em áudio e vídeo. A Engenharia Didática conduziu metodologicamente a pesquisa, norteando a implementação e a investigação em sala de aula, relacionando a teoria, os alunos e o saber matemático Números Decimais. As análises ocorreram por meio dos registros escritos dos alunos, bem como das transcrições de suas falas. As análises apontam que a sequência de atividades elaborada à luz dos registros de representação semiótica favoreceu os alunos em relação à familiaridade com os registros, estimulou transformações e subsidiou para que eles realizassem conversões e, dessa forma, compreendessem os Números Decimais.

Palavras-chave: Educação Matemática. Números Decimais. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

BRITA, F. C. S. Contributions of the registers of semiotic representation for the comprehension of decimal numbers: a study with sixth grade students. 2015. 208p. Dissertation (masters) – Post-graduation Program in Education for Science and Mathematics, Maringa State University, Maringa, 2015.

The objective of this study is to favour the learning of Decimal Numbers by sixth grade students, with theoretical backing on Raymond Duval's Registers of Semiotic Representation. The referred author considers that the access to the mathematical object is given by the coordination of at least two registers, stating the necessity of conventions in teaching and learning situations. Such theoretical support has subsidized the elaboration of an activity sequence which contributed for the students to get to the conversions related to the registers of semiotic representations of the Decimal Numbers, such as decimal numeric, numeric fractions, numeric in the form of percentage, monetary numeric, discrete data and continuous data. This sequence was carried out with a group of twenty students in the sixth grade from a public state school in Parana, who met with the researcher once a week, during six weeks as an extra-school activity. The meetings were recorded in audio and video. The Educational Engineering conducted the research methodologically, guiding the implementation and investigation in the class room, relating the theory, the students and the mathematical knowledge of Decimal Numbers. The analysis occurred by means of the registers written by the students, as well as the transcription of their sayings. The analysis points out that the sequence of activities in light of the registers of semiotic representations favoured the students in relation to familiarity with the registers, stimulated transformations and subsidized them in making conversions, being able to comprehend the Decimal Numbers.

Key words: Mathematical Education; Decimal Numbers; Registers of Semiotic Representations

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1: Registros de Representação e Números Racionais..... | 31 |
| Figura 2: Diferentes representações para 0,5..... | 32 |
| Figura 3: Ilustração 1 da atividade 1..... | 52 |
| Figura 4: Ilustração 2 da atividade 1..... | 52 |
| Figura 5: Tabela para organização do registro da altura dos alunos..... | 52 |
| Figura 6: Ilustração 3 da atividade 1..... | 53 |
| Figura 7: Tabela para organização dos registros das diferentes representações das alturas..... | 53 |
| Figura 8: Ilustração 4 da atividade 1..... | 53 |
| Figura 9: Registro numérico decimal dos alunos da equipe A em relação à altura..... | 60 |
| Figura 10: Registro numérico decimal dos alunos da equipe B em relação à altura..... | 60 |
| Figura 11: Tratamento numérico e conversão – pela equipe A..... | 63 |
| Figura 12: Tratamento numérico e conversão – pela equipe B | 63 |
| Figura 13: Registro figural da altura de A_{11} | 66 |
| Figura 14: Registro figural da altura de A_2 | 66 |
| Figura 15: Registro numérico fracionário e em língua natural da equipe A..... | 69 |
| Figura 16: Registro numérico fracionário e em língua natural da equipe B..... | 70 |
| Figura 17: Ilustração 1 da atividade 2 – material dourado..... | 75 |
| Figura 18: Ilustração 2 da atividade 2 – material dourado colorido..... | 76 |
| Figura 19: Representação fracionária e decimal do desenho representativo da ação com material manipulável..... | 76 |
| Figura 20: Registro figural e numéricos decimal e fracionário..... | 77 |
| Figura 21: Transformação da representação figural para a língua natural – milésimos..... | 78 |
| Figura 22: Transformação da representação figural para a língua natural – centésimos..... | 78 |
| Figura 23: Transformação da representação figural para a língua natural – décimos..... | 78 |
| Figura 24: Representação de cinco centésimos com moedas..... | 80 |
| Figura 25: Suposições acerca dos registros dos alunos..... | 81 |
| Figura 26: Registro de A_7 e A_{20} no item a da atividade 2..... | 87 |
| Figura 27: Retomada das cores das peças do material dourado..... | 89 |
| Figura 28: Registros numéricos fracionário e decimal de A_5 e A_8 | 91 |
| Figura 29: Registros numéricos fracionário e decimal de A_6 e A_{10} | 92 |
| Figura 30: Registros numéricos fracionário e decimal de A_2 e A_{11} | 93 |

| | |
|--|-----|
| Figura 31: Transformações de registros numérico decimal para figural e para numérico fracionário por A ₁ e A ₉ | 95 |
| Figura 32: Transformações de registros numérico decimal para figural e para numérico fracionário por A ₆ e A ₁₄ | 99 |
| Figura 33: Transformação do registro figural para a língua natural por A ₁₇ e A ₁₉ | 100 |
| Figura 34: Ilustração 1 da atividade 3..... | 105 |
| Figura 35: Tabela para registro das diferentes representações dos cartões da atividade 3..... | 106 |
| Figura 36: Representação da reta numérica..... | 106 |
| Figura 37: Quadro para organizar os diferentes registros semióticos da atividade 3..... | 107 |
| Figura 38: Registro figural discreto da atividade 3..... | 110 |
| Figura 39: Suposições de respostas dadas pelos alunos participantes da pesquisa..... | 111 |
| Figura 40: Hipóteses das diferentes representações dadas a 2/10 pelos alunos..... | 113 |
| Figura 41: Diferentes registros por A ₅ , A ₈ e A ₁₀ | 116 |
| Figura 42: Registros semióticos de por A ₄ , A ₉ e A ₁₁ | 118 |
| Figura 43: Transformações do registro figural discreto para os registros numéricos decimal, fracionário e língua natural por A ₁₃ | 120 |
| Figura 44: Conversões entre registros por A ₁₁ | 121 |
| Figura 45: Conversões entre registros por A ₁₇ | 122 |
| Figura 46: Conversões entre registros por A ₂₀ | 123 |
| Figura 47: Marcação dos pontos na reta numérica..... | 125 |
| Figura 48: Diferentes registros de 2/10 pela equipe A..... | 126 |
| Figura 49: Diferentes registros de 2/10 pela equipe B..... | 127 |
| Figura 50: Diferentes registros de 2/10 pela equipe C..... | 127 |
| Figura 51: Diferentes registros de 2/10 pela equipe D..... | 128 |
| Figura 52: Diferentes registros de 2/10 pela equipe E..... | 128 |
| Figura 53: Diferentes registros de 2/10 pela equipe F..... | 129 |
| Figura 54: Ilustração 1 da atividade 4 | 135 |
| Figura 55: .Registro numérico fracionário e numérico decimal do item a da atividade 4..... | 136 |
| Figura 56: Ilustração 2 da atividade 4 | 136 |
| Figura 57: Registro em língua natural..... | 137 |
| Figura 58: Hipóteses de registro numérico fracionário e numérico decimal do item a da atividade 4..... | 139 |
| Figura 59: Hipóteses de registros em língua natural.do item c da atividade 4..... | 140 |
| Figura 60: Hipóteses de registros com o preço da bala de banana: R\$ 0,05..... | 141 |

| | |
|---|-----|
| Figura 61: Transformação de registro numérico fracionário para registro numérico decimal..... | 145 |
| Figura 62: Estimativas para a compra dos doces com R\$ 5,00..... | 146 |
| Figura 63: Tratamentos realizados por A_5 e A_{11} | 147 |
| Figura 64: Estimativas para a compra dos doces com R\$ 5,00 por A_7 e A_{16} | 147 |
| Figura 65: Tratamentos realizados por A_7 e A_{16} | 148 |
| Figura 66: Registros em língua natural por A_4 e A_{12} | 149 |
| Figura 67: Registros de cinco centavos por A_{14} e A_{17} | 151 |
| Figura 68: Tratamento no mesmo registro (numérico decimal) realizado por A_1 e A_{18} | 153 |
| Figura 69: Ilustração 1 da atividade 3, usada também como ilustração 1 da atividade 5..... | 158 |
| Figura 70: Registro numérico decimal com registro numérico na forma de porcentagem..... | 159 |
| Figura 71: Registro numérico decimal subtraído de registro figural discreto..... | 159 |
| Figura 72: Registro figural multiplicado por número inteiro..... | 160 |
| Figura 73: Registro numérico fracionário dividido por número inteiro..... | 160 |
| Figura 74: Operações com números decimais partindo de diferentes registros..... | 160 |
| Figura 75: Operações com números decimais partindo de diferentes registros..... | 161 |
| Figura 76: Transformações para o registro numérico decimal..... | 169 |
| Figura 77: Transformações para o registro numérico decimal por A_{15} | 171 |
| Figura 78: Conversão e tratamento realizados por A_{10} | 172 |
| Figura 79: Conversão e tratamento realizados por A_{19} | 173 |
| Figura 80: Conversões e tratamentos realizados por A_{11} | 176 |
| Figura 81: Conversões e tratamentos realizados por A_{18} | 175 |
| Figura 82: Conversões e tratamentos realizados por A_1 | 180 |
| Figura 83: Conversões e tratamentos numéricos decimais realizados por A_{13} | 181 |

LISTAS DE QUADROS

| | |
|--|-----|
| Quadro 1: Retomada do enunciado da atividade 1..... | 59 |
| Quadro 2: Retomada dos itens a, b e c da atividade 1..... | 62 |
| Quadro 3: Visão geral da aprendizagem dos alunos com relação aos tratamentos realizados na atividade 1..... | 72 |
| Quadro 4: Visão geral das transformações entre registros realizadas pelos alunos na atividade 1..... | 72 |
| Quadro 5: Retomada do enunciado da atividade 2..... | 86 |
| Quadro 6: Retomada do item d da atividade 2..... | 88 |
| Quadro 7: Retomada do item e da atividade 2..... | 95 |
| Quadro 8: Visão geral das transformações entre registros realizadas na atividade 2..... | 102 |
| Quadro 9: Tratamento realizado na atividade 3..... | 131 |
| Quadro 10: Visão geral das transformações entre registros realizadas na atividade 3..... | 131 |
| Quadro 11: Tratamento realizado na atividade 4..... | 154 |
| Quadro 12: Visão geral das transformações entre registros realizadas na atividade 4..... | 154 |
| Quadro 13: Retomada do item a da atividade 5: $3,5 + 90\%$ | 171 |
| Quadro 14: Retomada do item b da atividade 5: $5,0 - 2,5$ | 173 |
| Quadro 15: Retomada do item c da atividade 5: $1,5 \times 5$ | 174 |
| Quadro 16: Retomada do item d da atividade 5: $9/2 : 3$ | 174 |
| Quadro 17: Retomada do item e da atividade 5: $3/4 + 2,00 + 1/2 \times 1,5$ | 177 |
| Quadro 18: Retomada do item f da atividade 5: $3/4 \times 1,5 : 1,2$ | 181 |
| Quadro 19: Tratamentos realizados na atividade 5..... | 183 |
| Quadro 20: Visão geral das transformações entre registros realizadas na atividade 5..... | 184 |
| Quadro 21: Visão geral das conversões realizadas pelos alunos no decorrer da sequência de atividades de acordo com a teoria..... | 187 |

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| 1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA..... | 15 |
| 2 DELINEANDO A PESQUISA..... | 20 |
| 2.1 O problema de pesquisa..... | 20 |
| 2.2 A hipótese..... | 20 |
| 2.3 Objetivos..... | 20 |
| 2.4. A pesquisa qualitativa e a preocupação com o ensino da Matemática..... | 21 |
| 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA..... | 23 |
| 3.1 A teoria dos registros de representação semiótica..... | 23 |
| 3.2 A engenharia didática como metodologia de pesquisa..... | 33 |
| 4 A INVESTIGAÇÃO E O PROCESSO METODOLÓGICO..... | 39 |
| 4.1 Análises Preliminares..... | 39 |
| 4.1.1 Aspecto conceitual e histórico dos números decimais..... | 39 |
| 4.1.2 A realidade da escola..... | 41 |
| 4.1.3 Os números decimais e as representações..... | 46 |
| 4.2 Os alunos participantes da pesquisa em seu meio natural..... | 47 |
| 5 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS..... | 50 |
| 5.1 Atividade 1 | 51 |
| 5.2 Atividade 2 | 74 |
| 5.3 Atividade 3 | 104 |
| 5.4 Atividade 4 | 134 |
| 5.5 Atividade 5 | 157 |
| 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 186 |
| REFERÊNCIAS..... | 193 |
| ANEXOS..... | 197 |

1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

O tema dessa pesquisa, Números Decimais no ensino da Matemática, surgiu da experiência de 17 anos da pesquisadora em sala de aula, como professora de Matemática dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e como coordenadora pedagógica de Matemática dos anos iniciais em Secretaria Municipal de Educação. A prática da pesquisadora revela a preocupação com a aprendizagem dos Números Decimais desde o momento em que é apresentado para as crianças, até a sua aplicação nos anos seguintes, articulado com os mais diversos conteúdos estruturantes, como por exemplo, grandezas e medidas, geometrias, funções e tratamento da informação.

O convívio, os testemunhos de professores da área de Matemática e algumas pesquisas como as de Cunha (2002), Padovan (2000), Silva (2006), Esteves (2012), Colombo, Flores e Moretti (2008), Lima (2010) confirmam a existência de problemas na compreensão de tal objeto matemático e motivam o estudo para a busca de possíveis soluções do assunto.

A etapa escolar escolhida para aplicação da pesquisa foi o sexto ano do Ensino Fundamental. É nesse ano que os alunos aprofundam alguns conceitos voltados aos Números Decimais, essenciais para a compreensão de outros conceitos matemáticos estudados no decorrer do processo escolar. Além disso, os Números Decimais estão diretamente ligados ao cotidiano, e, portanto necessitam compreensão para serem usados naturalmente nas atividades diárias, como contribuição ao exercício da cidadania.

Dessa forma, os números decimais estão ligados ao sistema monetário e ao sistema de medidas, e “Manejar o sistema monetário é inteirar-se das situações que mensuram o valor das mercadorias, possibilidade para discutir o valor do trabalho e meio para entender decisões de ordem econômica do país” (PARANÁ, 2008, p.54).

Por meio da análise de algumas pesquisas (CUNHA, 2002; PADOVAN, 2000; SILVA, 2006) relacionadas ao ensino dos Números Decimais, percebe-se, a preocupação do meio acadêmico, que afirma que os alunos apresentam dificuldades em sua compreensão e que revelam entraves em qualquer ano ao ser abordado. Tais leituras evidenciam o distanciamento dos conhecimentos ensinados para os conhecimentos apreendidos.

Para isso, buscou-se subsídios na Didática da Matemática, cujas práticas escolares são objeto de estudo e se mostram num viés amplo para discussões sobre “[...]conceitos didáticos

referentes ao fenômeno da aprendizagem matemática” (PAIS, 2011, p.9). Consideramos que a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a teoria da Engenharia Didática de Michele Artigue ofereceriam subsídios pertinentes para fundamentar a presente pesquisa, haja vista que são respectivamente teoria e metodologia voltadas para o processo de ensino e aprendizagem que podem favorecer a aprendizagem dos Números Decimais.

Duval é um pesquisador francês que apresenta contribuições para a Didática da Matemática. Em seus estudos aponta como problema a falta do trabalho pedagógico voltado para os registros semióticos, e ainda ressalta que a articulação desses registros é condição para a compreensão em Matemática.

Notamos que outros fatores também interferem na compreensão em Matemática, como estratégias docentes inovadoras, teorias e metodologias que sustentam a prática docente, motivação e significado amplo e diversificado ao que se está ensinando. A falta desses fatores tem comprometido o processo de ensino e aprendizagem, conforme indicativo da experiência docente da pesquisadora.

Dessa forma, Esteves (2012, p.194) considera que: “O modo como os professores planejam suas aulas, a seleção das atividades a serem trabalhadas, suas opções metodológicas e as respostas dadas aos alunos evidenciam o conhecimento pedagógico do conteúdo que eles possuem”. Nessa mesma pesquisa, Esteves mostra que os professores têm as mesmas dificuldades dos alunos, em relação aos Números Decimais, pois nem sempre reconhecem um mesmo número em suas diferentes representações.

Esse problema também foi investigado por Padovan (2000), que mostrou a dificuldade de alunos e professores do atual 6º ano do Ensino Fundamental, em entender os números decimais.

Cunha (2002) investigou em crianças de várias idades, as diferenças entre o sistema de representação oral e o sistema de representação escrito, evidenciando a importância desses dois tipos de registros. Contudo, a presente pesquisa se diferencia das demais pesquisas, pois tem como objetivo favorecer a aprendizagem dos alunos com a aplicação uma sequência de atividades utilizando diferentes registros semióticos dos Números Decimais. Nesse caminho de investigação, de acordo com estudos de Duval, há maior compreensão dos Números Decimais, quando associado aos Registros de Representação Semiótica.

Esta pesquisa também se mostra peculiar, por associar, mais uma contribuição da Didática da Matemática – a Engenharia Didática – que é uma metodologia de pesquisa e de ensino adequada para o propósito desta pesquisa, que é identificar gradativamente e

metodicamente a compreensão dos alunos na sequência de atividades. Conforme explica Douady (1993, *apud* Machado 2010), Engenharia Didática é:

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY, 1993, p. 2).

Diante disso, temos a intenção de contribuir com o processo de ensino para a aprendizagem da Matemática dos Números Decimais, por meio das diferentes representações semióticas desse conteúdo (objeto de conhecimento), visando a conceitualização.

A sequência de atividades à luz dos estudos de Duval foi o instrumento para instigar o uso de diferentes registros de representação semiótica. Assim, estudar até que ponto este problema relacionado à falta de compreensão dos Números Decimais, pode ser amenizado com os Registros de Representação Semiótica é o principal objetivo desta investigação, que tem como problema de pesquisa: é possível favorecer a aprendizagem dos Números Decimais, por meio de uma sequência de atividades subsidiada pelos Registros de Representação Semiótica?

Assim sendo, com essa sequência, objetiva-se oportunizar a aprendizagem deste conteúdo que tem gerado muitas dificuldades por parte dos alunos e tem sido uma das causas dos resultados insatisfatórios relacionados à apreensão deste objeto matemático. Conforme indicam Maranhão e Iglioni (2011, p.57), “[...] o processo de ensino e aprendizagem do conceito de números racionais tem sido alvo de várias pesquisas da educação matemática”. Isso porque trata-se de um conteúdo relevante, que não tem sido entendido plenamente pelos alunos.

Os dados mais recentes revelados pela Prova Brasil e SAEB¹ (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) de 2011, indicaram resultados insatisfatórios com relação à aprendizagem dos Números Decimais. Os resultados da avaliação mostraram que apenas 26% dos alunos acertaram a questão relacionada a tal conteúdo e mostra preocupação com este fato, principalmente por se tratar de números do cotidiano. O MEC² por meio do documento

¹ são avaliações em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP/MEC) e que tem o objetivo de avaliar a qualidade do ensino da Educação Básica, oferecido pelo sistema educacional brasileiro.

com os resultados da Prova Brasil, manifesta a importância do entendimento dos Números Decimais:

Resolver problemas de adição ou de subtração envolvendo números expressos na forma decimal é uma habilidade solicitada constantemente em nosso cotidiano, presente em atividades de compras em panificadoras, supermercados e lojas em geral e pagamentos de contas e impostos, como as tarifas de água, energia elétrica e telefone. Os números decimais não se fazem presentes apenas nas atividades que envolvem dinheiro. Nós encontramos esses números quando fazemos medições de terrenos, compramos tecidos, medimos nossa estatura e todas essas e outras situações concretas do cotidiano podem ser trabalhadas com os alunos para o desenvolvimento dessa habilidade (BRASIL, 2011, p. 146-147).

Com essa premissa, é importante ter um olhar mais atento para este problema e tentar buscar soluções que colaborem para um ensino de Matemática qualidade. Mas é importante refletir sobre o que afirma Panizza (2006, p.19) “o trabalho didático necessário é a longo prazo e compromete todos os níveis de escolaridade, devendo começar nos primeiros anos”, pois observam-se no âmbito escolar, inúmeras inquietações acerca da falta de entendimento dos Números Decimais, inclusive que um dos problemas está nos anos Iniciais do Ensino Fundamental, quando ele é apresentado aos alunos.

A primeira seção desta pesquisa, é dedicada à apresentação da intenção da pesquisa, dos objetivos, da justificativa e da hipótese levantada, que sugere a contribuição dos Registros de Representação Semiótica para a compreensão dos Números Decimais.

A seção 2 trata do aporte teórico que fundamentou a pesquisa. Faz referência à pesquisa qualitativa, à teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, enfatizando a importância dos seus estudos para a Educação Matemática, como área de pesquisa e para as questões escolares que se preocupam como o aluno aprende a Matemática.

Na seção 3, faz-se um estudo abrangente para se entender a problemática acerca do ensino e da aprendizagem dos Números Decimais nas chamadas Análises Preliminares.

Já a seção 4 apresenta a sequência de atividades, com as respectivas Análise *a priori*, Experimentação, Análise *a posteriori* e Validação. Desse modo, indica cada uma das fases da metodologia usada, que é a Engenharia Didática. Pode-se conhecer, nesta parte da pesquisa, o universo de estudo, a população e o instrumento utilizado e as análises de cada atividade.

Na seção 5, faz-se a análise dos dados por meio dos registros dos alunos, gravações e filmagens indicando as possíveis conversões entre os registros pelos sujeitos da pesquisa, e, sendo a última seção, pontuam-se as considerações finais, concluindo a pesquisa com base nos resultados obtidos. Nesta mesma seção detalhamos todas as conversões realizadas pelos sujeitos da pesquisa, identificando todos os registros de partida e registros de chegada,

²Ministério da Educação e Cultura

validando assim, as afirmações acerca da aprendizagem dos Números Decimais, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Ainda manifestamos a intenção de continuidade da pesquisa envolvendo outros conteúdos e até mesmo outros sujeitos.

2 DELINEANDO A PESQUISA

2.1 O problema de pesquisa

A experiência da pesquisadora, bem como outras pesquisas citadas na apresentação, revelam a dificuldade dos alunos em lidar com os Números Decimais. Dessa forma, a presente investigação aponta tal fato como problema de pesquisa: como superar as dificuldades dos alunos para entender aspectos conceituais dos Números Decimais, bem como entraves para aplicar tais conceitos a diferentes conteúdos?

2.2 A Hipótese

Acredita-se que a sequência de atividades elaborada à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica possa favorecer a aprendizagem dos Números Decimais pelos alunos e garantir o acesso deles ao objeto matemático.

2.3 Objetivos

Desse modo, o presente estudo teve como objetivo geral, promover a aprendizagem dos Números Decimais por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, por meio da aplicação de uma sequência de atividades com respaldo teórico nos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, contemplando a operação cognitiva de conversão nas atividades propostas.

Apresenta também alguns objetivos específicos que ajudam a entender melhor as metas a serem alcançadas:

- Desvelar se ocorreu ou não a aprendizagem dos Números Decimais a partir da sequência de atividades proposta;
- Analisar a coordenação entre registros pertencentes a sistemas semióticos diferentes;
- Apontar como promover as variações de um registro para outro

2.4. A pesquisa qualitativa e a preocupação com o ensino da Matemática

Esta subseção apresenta a pesquisa, ressaltando a Educação Matemática como campo de pesquisa em que está ancorada a investigação. De cunho qualitativo, de natureza exploratória, esse tipo de pesquisa, apresenta como característica marcante a preocupação com o processo e não apenas com o produto.

As ações da pesquisadora tiveram como foco, estudar o problema relacionado à falta de entendimento dos Números Decimais e apontar uma sequência de atividades com ênfase nas representações semióticas, como um caminho para superar as defasagens de aprendizagem ligadas a este conteúdo matemático. Dessa forma, investigar a evolução do conhecimento dos alunos, por meio da familiaridade com os diferentes registros e analisar a contribuição proveniente das transformações e conseqüentemente das conversões entre os registros para o acesso ao objeto matemático.

Existem várias definições para pesquisa qualitativa, dentre elas, uma que é considerada relevante para essa pesquisa é:

A pesquisa qualitativa é multimetodológica quanto ao seu foco, envolvendo abordagens interpretativas e naturalísticas dos assuntos. Isto significa que o pesquisador qualitativo estuda coisas em seu ambiente natural, tentando dar sentido ou interpretar os fenômenos, segundo o significado que as pessoas lhe atribuem (DENZIN, LINCOLN, 1994, p.2)

Minayo (1996) define método qualitativo como:

Aquele capaz de incorporar a questão do significado e da intencionalidade como inerentes aos atos, às relações, e às estruturas sociais, sendo essas últimas tomadas tanto no seu advento quanto na sua transformação, como construções humanas significativas. (MINAYO, 1996, p.10)

Partindo dessas premissas, articuladas às teorias e metodologias da Didática da Matemática que favoreçam a superação das defasagens pedagógicas diagnosticadas na vivência escolar, surgiu a necessidade de se pensar em possibilidades para superar problemas decorrentes da não compreensão dos Números Decimais.

Damm (2012, p.167) afirma que “[...] existe uma preocupação muito grande entre os pesquisadores em Educação Matemática com a aquisição do conhecimento, com a forma como se processa a aprendizagem”. A autora defende a ideia de se usar como ferramenta de análise desta problemática que rodeia o cenário escolar, os Registros de Representação Semiótica. De acordo com esta teoria, é possível ter contato com diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, favorecendo assim, a compreensão do conhecimento.

Defendemos a ideia de que o ensino deve ser aberto, dinâmico, e, conseqüentemente, gerar transformações. Nesse sentido, Damm (2012, p.167) afirma que a teoria de Duval pode auxiliar os professores em suas ações didático-metodológicas. Em relação à prática pedagógica, Moran (2012), contribui:

Um dos grandes desafios para o educador é ajudar a tornar a informação significativa, a escolher as informações verdadeiramente importantes entre tantas possibilidades, a compreendê-las de forma cada vez mais abrangente e profunda e a torná-las parte do nosso referencial (MORAN, 2012, p. 23).

Para isso, elaboramos atividades que contemplassem os registros de representação semiótica, bem como as variações entre eles, promovendo assim, o acesso dos alunos ao objeto matemático.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 A teoria dos Registros de Representação Semiótica

A teoria dos Registros de Representação Semiótica é a base teórica deste estudo. Esta teoria é de autoria do filósofo e psicólogo Raymond Duval e enfatiza o funcionamento cognitivo, ou seja, o acesso do sujeito ao objeto matemático, principalmente na Matemática e nos problemas de aprendizagem específicos da disciplina. Duval desenvolveu seus estudos relativos à Psicologia Cognitiva, no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França, de 1970 a 1995. Atualmente, Raymond Duval é professor emérito em Ciências da Educação da *Université du Littoral Côte d'Opale*, na cidade de *Boulogne-sur-mer*, e reside na cidade de *Lille*, norte da França.

Dentre suas numerosas publicações, sua obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, publicada em 1995, foi um marco em suas produções, por tratar-se da primeira apresentação sistematizada de sua teoria. De lá para cá, sua teoria dos Registros de Representação Semiótica tem sido divulgada em diversos países e publicada em várias línguas. No Brasil é explícito o crescimento do número de pesquisas em Educação Matemática que se fundamentam nos trabalhos de Duval (FREITAS, REZENDE, 2013).

No Brasil, preocupação referente às representações dos objetos matemáticos, aparece na década de 1990, com o advento das correntes psicopedagógicas cognitivistas, em que a preocupação com o processo ganha força, sendo o produto, apenas consequência do processo.

Colombo, Flores e Moretti (2008) confirmam essa origem no Brasil e contribuem com essa afirmação, observando nas pesquisas por eles analisadas que:

O trabalho com registros de representação semiótica com alunos, ou mesmo com professores em processo de formação, possibilita uma melhor compreensão não apenas do objeto matemático em estudo por parte dos estudantes, como também da especificidade da aprendizagem matemática (COLOMBO, FLORES e MORETTI, 2008, p.61).

A teoria de Duval tem sido cada vez mais utilizada, pois vai ao encontro de uma necessidade do cenário educacional escolar que incide na problemática das dificuldades de aprendizagem matemática e que podem ser superadas com o uso das representações nos processos de ensino e de aprendizagem. Machado (2011, p. 8), relata que “[...] na perspectiva

de Duval, uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento”.

De acordo com Duval (1993, p. 39) representações semióticas são:

[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais tem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento (DUVAL, 1993, p. 39)

Duval (2011.p. 23) explica que não pode haver compreensão se houver confusão entre objeto matemático e sua representação: “[...] por um lado não se deve jamais confundi-las com os próprios objetos, mas de outro elas são, por causa de sua diversidade, sempre necessárias para que se tenha acesso aos objetos”.

No bojo destas discussões, há uma crescente preocupação com o processo de ensino e de aprendizagem, principalmente porque falta conhecimento teórico ao professor para que possa entender eventuais problemas gerados pela prática.

Duval (2009, p.15) contribui com essa questão, quando explica que as representações semióticas são percebidas como “[...] as produções constituídas pelo emprego de regras de sinais (enunciado em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica,...)”. O autor considera que dessa forma, o aluno é capaz de manifestar sua intelectualidade, tornando-se compreensível nas suas relações inter e intrapessoais.

Para Duval (2011, p. 21, grifo do autor) “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve jamais confundir um objeto e sua representação*”.

É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras[...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. [...]. Toda confusão entre objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão (DUVAL, 2009, p. 14).

No entanto, o teórico considera que uma representação pode permitir acesso ao objeto representado, desde que se faça uso de pelo menos dois sistemas semióticos diferentes. Duval (2011, p. 124) afirma que “a compreensão dos “conceitos matemáticos”, diferentemente da compreensão dos conceitos nas outras disciplinas, pressupõe a coordenação sinérgica de pelo menos dois registros de representação”.

Comungando dessa ideia, Machado (2011) explica que uma especificidade da teoria de Duval é a grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática:

Além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente. Para designar os diferentes tipos de representação de representações semióticas utilizados em matemática, falamos parodiando Descartes, de “registro” de representação (MACHADO, 2011, p. 14).

Os objetos matemáticos são abstratos, ou seja, os conteúdos matemáticos estão no mundo das ideias, daí a necessidade de representá-los de diferentes formas para facilitar sua apreensão.

Ora, na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.). O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas (DUVAL, 2003, p. 21).

Nesse caso, as representações por meio de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, softwares, entre outras, auxiliam a troca de informações entre sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento.

A isto é preciso juntar o fato de que a pluralidade dos sistemas semióticos permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto. Tal pluralidade aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e em seguida as suas representações mentais [...] as representações mentais não podem jamais ser consideradas independentes das representações semióticas (DUVAL, 2009, p. 17).

Duval (2009) afirma que “[...] não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*”. Conforme Duval (1993), a “*semiose*” significa a produção e a apreensão de uma representação, e a “*noésis*” significa apreensão conceitual do objeto. Assim, percebe-se a importância de que trata a teoria em chegar-se a *noésis*, que é a apreensão conceitual de um objeto, mas também se observa a necessidade de passar pela *semiose*, que são as representações.

A ideia é que em um determinado momento dos processos de ensino e de aprendizagem, o aluno se desprenda das representações e evolua às abstrações, entretanto, que tenha competência para compreender um objeto matemático, sendo capaz de articular a esse objeto, as suas mais diversas representações semióticas.

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. Estes, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 2009, p. 18).

Ainda com relação às representações, como já afirmou Duval, o que habitualmente gera confusão na prática docente é a representação do objeto matemático com o próprio objeto matemático. As Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná demonstram preocupação com este fato, pois segundo as DCE:

A aprendizagem matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às idéias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios (PARANÁ, 2008, p.45).

Este documento, norteador dos conteúdos curriculares no Estado do Paraná, indica que o estudo dos conjuntos numéricos e suas respectivas operações pertencem ao conteúdo estruturante números e álgebra. Dentre outras expectativas, segundo as DCE de Matemática, no Ensino Fundamental os alunos precisam compreender o significado de número racional na sua forma fracionária e decimal, bem como os conceitos de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, além de resolver situações-problema relacionadas a tais conceitos. O documento supõe que ao terminar o Ensino Fundamental, os educandos dominem esses conceitos matemáticos, inclusive articulando-os a outros conteúdos.

De acordo com Cunha (2002), estão acontecendo problemas no processo de ensino e de aprendizagem dos Números Decimais que não atendem os objetivos conceituais, pois os alunos não estão conseguindo estabelecer acesso a este objeto matemático. Na busca de entendimento para este entrave do cenário escolar, é profícuo reconhecer um viés de convergência entre a falta de compreensão dos Números Decimais e a superação deste problema com subsídios da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Na tentativa de facilitar a aprendizagem dos sujeitos da pesquisa e colaborar com a aprendizagem deles, busca-se respaldo em Duval, nos seus construtos teóricos que esclarecem fatos importantes das transformações entre os registros para a organização da aprendizagem conceitual matemática. O mesmo autor defende que existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são muito diferentes: os tratamentos e as conversões.

Quanto aos tratamentos, Duval mostra a existência de dois tipos: os tratamentos quase-instantâneos e os tratamentos intencionais.

Intuitivamente, os tratamentos quase-instantâneos correspondem à familiaridade ou à experiência ou à experiência resultante de uma longa prática ou de uma competência adquirida em um domínio. O caráter imediato ou evidente de uma apreensão, perceptiva ou conceitual, implica a colocação de um conjunto de tratamentos quase instantâneos (DUVAL, 2009, p.51).

Os **tratamentos intencionais** são aqueles que *tomam ao menos o tempo de um controle consciente para ser efetuados e que se apóiam exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados, numa percepção furtiva do objeto [...]* Esses tratamentos apenas podem apoiar-se sobre o que o sujeito “vê” ou nota de maneira quase-instantânea (DUVAL, 2009, p.52).

Dos tratamentos quase-instantâneos, dependem os intencionais, pois o pensamento passa por uma evolução. O primeiro dá origem à percepção imediata, que continua evoluindo para apreensão de objetos mais complexos, até que se tornem intencionais por natureza. Assim, conforme Duval (2009, p. 54) “Falaremos de tratamento quando a transformação produz outra representação no mesmo registro”.

A grande dificuldade dos alunos está na conversão, que consiste em passar naturalmente de um registro para o outro. A operação cognitiva de conversão consiste em variar unidades significativas num registro e identificar as variações no registro em outros sistema semiótico. Os registros podem ser monofuncionais ou multifuncionais. Os primeiros são aqueles em que se utilizam algoritmos para resolver e, os segundos são aqueles que não possuem algoritmos, em que podemos nos referir por meio da linguagem natural, por exemplo, como sendo um tipo multifuncional de registro de representação.

No entanto, há um uso excessivo de representações internas, ou também chamadas de computacionais, no qual o sujeito “aprende” sem entender o que está fazendo, ou seja, usa um processo automático e mecânico, que não o leva a refletir sobre o significado operatório do objeto matemático em questão, não se preocupa com as representações semióticas do objeto – realizam a função de tratamento automático. Segundo Damm (2012, p. 179), baseada em Duval (2009, p.54), o tratamento “[...] é a transformação dessa representação no próprio registro no qual ela foi formada”. Ou seja, é uma transformação interna de um registro a outro num mesmo quadro, seja ele algébrico, numérico, geométrico, ou outros. Por exemplo, no caso dos números decimais, quando se adiciona $0,25 + 0,30$, tem-se uma representação decimal, envolvendo um tratamento decimal, em um quadro numérico.

Uma situação diferente da operação realizada anteriormente seria somar $0,2 +$ . Nesse caso, tem-se uma transformação envolvendo registros semióticos diferentes. O fato de um aluno mudar de registro, escolher um registro de chegada e realizar a operação com um mesmo registro indica uma possível conversão. Supõe-se que para efetuar essa adição, tenha-se transformado o registro figural contínuo em registro numérico decimal e far-se-ia então, a adição de 0,2 com 0,75. Também poder-se-ia transformar o registro numérico decimal em registro numérico fracionário e o registro figural contínuo em registro numérico fracionário

para realizar a adição. Cada registro viabiliza um tipo específico de tratamento. Duval (2009) faz algumas considerações a esse respeito:

Por mais que eles saibam efetuar a adição de dois números com sua escritura decimal e com sua escritura fracionária, certos alunos não se preocupam de forma alguma em pensar em converter a escritura decimal de um número em sua escritura fracionária (e reciprocamente), [...] a escritura decimal, fracionária e a escritura com exposição constituem três registros diferentes de representação de números. Em efeito, na escritura de um número, é preciso distinguir **a significação operatória fixada ao significante e o número representado**. Assim a significação operatória não é a mesma para 0,25, para $\frac{1}{4}$, e para $25 \cdot 10^{-2}$. Porque não são os mesmos procedimentos de tratamento que permitem efetuar as três adições (DUVAL, 2009, p.59-60).

São estes procedimentos de tratamento diferentes que podem contribuir na mobilização de aprendizagem, já que provocam conversões. Inspirados em Duval (2009, p. 58) “ Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”.

Numa operação de conversão, levando em consideração a natureza cognitiva, existem, de acordo com Duval, dois tipos de fenômenos a serem observados:

a) As variações de congruência e de não congruência, que estão diretamente ligadas aos registros de saída e de chegada que se está usando na representação. As atividades propostas devem evidenciar o caráter congruente da conversão, no seu próprio enunciado. Conforme Duval (2003, p.21) “[...] no caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades/bloqueios são mais fortes”.

b) Já a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, diz respeito ao sentido da conversão. Não se pode dizer que pelo simples fato de se inverter os registros de partida e de chegada, se efetivou a conversão. Duval (2003) faz um alerta importante quanto às atividades a serem escolhidas pelos professores:

Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente no caso de congruência (DUVAL, 2003, p. 20).

Entender o ensino da Matemática, priorizando as representações é ensinar provocando situações para “[...] **mudar a forma pela qual um conhecimento é representado**” (DUVAL, 2009, p. 33, grifo do autor).

As atividades que permitem tomar consciência das conversões e tratamentos específicos a cada registro não podem ser confundidas com sequências de atividades que visam à introdução e a aquisição de um conceito particular. Elas são de naturezas diferentes. As variáveis didáticas a considerar não estão relacionadas com as propriedades dos objetos matemáticos representados, mas se referem às variações do conteúdo das representações do registro utilizado e às covariações do conteúdo das representações em um segundo registro (FREITAS, REZENDE, 2013).

Contudo, deveriam prevalecer as representações semióticas que são consideradas externas e estão ligadas à aquisição do conhecimento matemático. Trata-se de uma maneira didático-pedagógica que o professor pode usar em seus encaminhamentos metodológicos para permitir a conceitualização, fazendo uso da *semiósis* para chegar a *noésis*. Para Duval, quando o aluno é capaz de “transitar” naturalmente por diferentes registros, ou seja, quando ele faz a conversão³ é um indicativo que ele aprendeu o conceito. Damm (2012), apoiada na teoria de Duval, afirma que:

O que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra em passar de uma representação para outra. Ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto. Essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e “passar” de um a outro o mais naturalmente possível. (DAMM, 2012, p.168).

O foco principal é usar todas as estratégias da teoria para se chegar a *noésis*, no entanto, não há possibilidade de chegar a tal processo cognitivo sem passar pela *semiósis*. Assim, nas palavras de Damm (2012, p.177), “[...] para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações)”.

Entretanto, proporcionar uma boa aprendizagem para o aluno não depende só do professor, pois é fundamental para uma educação que pretende ajudar o aluno a perceber sua individualidade, o encaminhamento metodológico adequado, que o torna, também, responsável pelo ato de aprender, que proporciona a otimização das habilidades, facilita o processo de aprendizagem e cria condições de aprender – predisposição. Nesse contexto, conhecer o aluno e perceber suas defasagens de aprendizagem é o primeiro passo para torná-lo um participante ativo no processo de aprender.

Duval, explica em entrevista à Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM (2013) que a teoria dos registros de representação semiótica tem a ver com a face oculta da atividade matemática. Ainda reforça que, sem este desenvolvimento não temos condições de

³ Mudança de registro mais eficaz para a aquisição de um conceito.

compreender e nem intervir em uma atividade matemática. É ele próprio que explica a face oculta da Matemática:

Ela corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática. Eu a chamo de face “oculta” porque ela não é direta e imediatamente perceptível em relação ao que observamos do trabalho dos alunos em sala de aula, mesmo que seja a partir de gravações de vídeo. Ela se manifesta indiretamente, por meio de bloqueios ou erros recorrentes, a partir do momento em que solicitamos a resolução de problemas, sejam problemas aritméticos elementares (problemas aditivos e multiplicativos), de aplicação de um teorema de geometria, modelagem de uma situação por meio de uma equação, um problema de mínimo ou de máximo, etc. E, evidentemente, o não reconhecimento de um mesmo objeto em duas escritas diferentes, ou em representações semióticas produzidas em dois registros diferentes, é o sintoma frequente que, muitas vezes, passa despercebido, ou é considerado como uma incompreensão do conceito a ser utilizado (FREITAS, REZENDE, 2013, p.17-18).

Entretanto, a face oculta tem sido apontada em diversos índices, com resultados alarmantes de avaliações externas, que mostram problemas relacionados à falta de entendimento de conceitos matemáticos, advindos de erros recorrentes e falta de habilidade em interpretar o conceito nas suas mais diversas representações.

Há a necessidade de conscientização, entendendo que, como afirma Duval:

Tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor (DUVAL, 2009, p. 37).

Duval (2009) considera três fenômenos que aparecem interligados, no que diz respeito à análise da evolução dos conhecimentos e dos entraves matemáticos, relacionados a raciocínio, compreensão de textos e aquisição de tratamentos lógicos. O primeiro é o da diversificação dos registros de representação semiótica. Os sistemas semióticos são utilizados para representar e podem ser do tipo: língua natural, gráfico, figura, linguagem algébrica, dentre outros.

Nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, há a necessidade de usar diferentes representações para se referir a um determinado objeto matemático, pois de acordo com Flores (2006, p. 2) “[...] um trabalho pedagógico, realizado a partir destes registros, possibilita um real funcionamento cognitivo do aluno, uma vez que o objetivo do ensino é a aquisição do conhecimento por parte do aluno”.

É importante fazer uso da diversidade de registros, pois cada um tem a eficácia de uma aprendizagem específica e, dessa forma contribuir com o processo cognitivo de busca de entendimento. Maranhão e Iglioni (2011), consideram a teoria de Duval para argumentar:

O número racional, quando introduzido no ensino fundamental, aparece representado pelos três tipos de registros de representação apontados por Duval: no registro simbólico-numérico (fracionário e decimal) ou algébrico; no figural (representação de partes de grandezas discretas ou contínuas); e, evidentemente, no registro da língua natural (MARANHÃO, IGLIORI, 2011, p. 58).

As implicações do não entendimento dos alunos acerca dos Números Decimais podem agregar diversos problemas de ordem primária, como por exemplo, não reconhecer um número decimal por meio de uma fração decimal, ou ainda por outros registros que levam ao mesmo objeto matemático. Desse modo, a compreensão e a aplicação deste conteúdo em outros contextos fica comprometida nos saberes escolares e também nos saberes cotidianos.

Nesse sentido, temos a intenção de propor uma aprendizagem voltada para as representações semióticas, a fim de colaborar com a aprendizagem dos alunos, no que se refere ao conteúdo em questão. Entretanto, para que a compreensão aconteça há necessidade de um trabalho pedagógico que vise conversões. Duval (2003, p. 24) afirma que “[...] os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem na mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações.” (DUVAL, 2003, p. 24). Na tentativa de elucidar as diferentes representações referentes aos Números Racionais, considera-se, como exemplo, o seguinte quadro:

Figura 1: Registros de Representação e Números Racionais

| | | | |
|------------------------------|--|--------------|---------------------------|
| Registro Figural Contínuo |  | | |
| Registro Figural Discreto |  | | |
| Registro Simbólico Numérico | $\frac{3}{4}$ | 0,75 | 75% |
| Registro Simbólico Algébrico | $\frac{a}{b}, b \neq a, b \neq 0, a, b \in \mathbf{Z}$ | | |
| Registro na Língua Natural | Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma fração | Três quartos | Setenta e cinco por cento |

Fonte: Inspirados em Duval (2011, p. 59)

O segundo fenômeno é o da diferença entre representante e representado, que confirma esclarecimentos anteriores, evidenciando o fato de que ao ensinar, o professor tem confundido o objeto com suas representações, limitando a busca de representações nas estratégias de tratamento. Ao considerar o reconhecimento de um mesmo objeto em representações diferentes, Duval (2011, p. 47) afirma que “Essa questão traduz no plano cognitivo a exigência epistemológica fundamental de jamais confundir uma representação e o objeto representado”.

Nesse sentido, é comum um aluno não conseguir representar o mesmo objeto de maneiras diferentes, pela falta de familiaridade com os registros. Duval (2011, p. 102), afirma que “Tudo se passa como se os alunos não tivessem nenhuma possibilidade de reconhecer o que é representado, nem as primeiras transformações que eles poderiam efetuar”.

Partindo desse pressuposto, voltado para a diversidade de registros, é que se observa a falta de rotina de trabalho com o objeto nas suas diferentes representações. No caso dos Números Decimais, geralmente não conseguem estabelecer relações de igualdade do objeto nas suas representações, entendendo que zero vírgula cinco, cinco décimos, meio, cinquenta por cento, cinco cubinhos do material dourado (de uma barra que tem dez unidades, considero apenas 5, por isso, cinco décimos com esse registro), meio com registro figural discreto, meio com registro figural contínuo ou ainda cinco décimos, que é uma fração equivalente a meio, representam o mesmo número.

Figura 2: Diferentes representações para 0,5

$$0,5 = \frac{1}{2} = 50\% = \text{cinco cubinhos} = \text{estrela branca} \text{ e } \text{estrela preta} = \text{meio círculo} = \text{cinco décimos}$$

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Já o terceiro fenômeno é o da coordenação entre os diferentes registros, que revela a dificuldade dos alunos em transitar livremente de um registro para outro. Isso porque não está sendo estimulado para realizar ações cognitivas que proporcionem a visão globalizante e o envolvimento dos diferentes registros em um mesmo objeto. Duval chama essa transição entre registros diferentes de conversão. Desse modo, Maranhão e Iglioni (2011, p. 60) considera que

“Uma atividade que requeira do aluno que escreva 0,25 como $\frac{1}{4}$ envolve uma *conversão*. O registro de partida é nesse caso o *numérico, na forma decimal*, e o de chegada, o na *forma fracionária*”.

A compreensão de como podemos lidar com certas características pessoais ajuda tanto o professor como o aluno a identificar, mobilizar e utilizar suas características criativas e intuitivas, pois cada um aprende no seu próprio ritmo e à sua maneira. Contudo, esse processo deve priorizar atividades que estimulem as transformações entre os registros nos dois sentidos, para garantir, assim, a possibilidade de conversões e o acesso ao objeto matemático. Essa é uma atividade cognitiva muito importante na teoria de Duval:

Em uma transformação é preciso distinguir a transformação de partida e a transformação de chegada. Quando a transformação se realiza entre duas representações de um mesmo objeto que são heterogêneas, a questão que se coloca é saber se a transformação inversa é cognitivamente equivalente à transformação direta, isto é, se existe ou não reversibilidade (DUVAL, 2011, p. 67).

Partindo dessa necessidade de trabalho com a diversidade de registros e com as conversões, a Engenharia Didática como metodologia pode provocar tais atitudes e colaborar com as situações didáticas para as transformações entre os registros. Pais (2011, p.100) afirma que “ [...] a engenharia didática se constitui em uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática”.

A execução da Engenharia se dá em quatro fases consecutivas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação (aplicação de uma sequência didática) e análise *a posteriori* seguida de validação.

Os aportes teóricos se complementam, à medida em que os Registros de Representação Semiótica auxiliam na assimilação dos conceitos e a possível superação de dificuldades de aprendizagem relacionadas aos Números Racionais, particularmente no caso dos Números Decimais. E a Engenharia Didática mostra o caminho metodológico a ser percorrido para se ter êxito no planejamento das ações.

3.2 A Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa

Esta pesquisa favorece a compreensão do conceito de Número Decimal por alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, no primeiro semestre do ano de 2014, por se tratar de um período no qual os alunos ainda não estudaram formalmente os Números Decimais, como conteúdo programático anual previsto. Nesta fase de escolarização, os alunos têm

familiaridade com o assunto ao estudar as frações, as noções básicas do Sistema Monetário e, eventualmente, algumas medidas, advindo de estudos dos anos iniciais.

O estudo contou com um grupo de 20 alunos de sexto ano de uma escola Pública no Paraná. Eles foram convidados de acordo com a disponibilidade de horário e desejo de participação, pois as sessões aconteceram em contra turno. As pedagogas da escola auxiliaram na escolha dos participantes, já que o número de interessados era maior que o número de vagas, sob o cuidado de se trabalhar com alunos comprometidos e responsáveis. Não houve escolha por notas maiores ou para os melhores alunos, pois a intenção foi ter um grupo heterogêneo, que contribuísse com a qualidade da análise.

Vale lembrar que, embora a pesquisadora seja professora da escola onde se realizou a pesquisa, os participantes não eram seus alunos no momento da investigação.

No decorrer do estudo, a pesquisa se organizou de tal forma que a princípio, foi realizada uma revisão bibliográfica para avaliar os trabalhos já publicados sobre Números Decimais, Registros de Representação Semiótica e Engenharia Didática.

A Engenharia Didática foi a forma encontrada para direcionar a organização da pesquisa, além de subsidiar a implementação das atividades em sala de aula.

Essa metodologia tem suas origens na década de 1980, na Didática da Matemática de influência francesa. Trata-se de uma maneira específica e regrada para conduzir os instrumentos aplicados e foi assumida nesta pesquisa, pelo seu caráter teórico e experimental. Nesse sentido, tivemos a intenção de confirmar as contribuições teóricas, a partir de fatos apoiados em uma experimentação. Tal metodologia apresenta grande impacto nas pesquisas da Educação Matemática por estabelecer um movimento dinâmico de intercâmbio entre a pesquisa e a ação pedagógica. Dessa forma, a investigação esteve calcada na metodologia da Engenharia Didática.

Artigue (1996) *apud* Pais (2011) faz uma analogia:

A engenharia didática expressa uma forma de trabalho didático comparável com o trabalho do engenheiro na realização de um projeto arquitetônico. Tal como o trabalho de um engenheiro, o educador também depende de um conjunto de conhecimentos sobre os quais ele exerce o seu domínio profissional. Entretanto, quando se faz essa analogia entre a didática com o trabalho do engenheiro, torna-se conveniente destacar que o modelo teórico não é suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do objeto educacional (PAIS, 2011, p. 100).

A Engenharia Didática teve grande significado para a pesquisa que foi voltada para a sala de aula. Sua estrutura permitiu o acompanhamento da apreensão dos conceitos e viabilizou adaptações e intervenções que favoreceram o processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, também garantiu confiabilidade por apresentar um controle sistemático, decorrente de métodos.

De acordo com os estudos de Artigue (1996), o processo experimental da Engenharia Didática se compõe de quatro fases: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

Conforme Almouloud (2010):

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino (ALMOULOU, 2010, p. 171).

Acreditando que o contato com as transformações entre os registros leva os alunos ao conceito tendo por referência o objeto matemático Números Decimais e que as atividades previamente elaboradas favorecem esse fim, busca-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a base teórica para a criação de um cenário de aprendizagem, cujos procedimentos metodológicos pertencem à Engenharia Didática.

As atividades utilizadas nesta pesquisa foram construídas de modo a buscar pensamentos, conjecturas e refutações que provocam a descoberta autônoma de diferentes registros de representação do objeto matemático em questão – Números Decimais, bem como possíveis conversões.

Dessa forma, a primeira etapa, chamada de análises preliminares, assume papel fundamental na compreensão global do assunto investigado – Números Decimais e subsidia a construção da sequência de atividades, como instrumento de análise da pesquisa. Nesta etapa, houve necessidade de buscar documentos que justificassem o ensino de Números Decimais nas escolas, bem como a abordagem do conteúdo em livros didáticos utilizados pelos professores, o conhecimento histórico destes números para entendimento da sua necessidade na sociedade atual, a formação dos professores, capacitações existentes acerca do assunto, plano de aula de professores, conhecimento de alunos, conversas com professores e pedagogos, bem como outros fatores relevantes a serem pesquisados no decorrer deste estudo.

Almouloud (2010, p.172), explica que “Um dos objetivos das análises preliminares ou também conhecidas como análise prévias, é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa”.

O levantamento rigoroso das análises preliminares permitiu a investigação do sistema didático a que pertenciam os sujeitos da pesquisa e subsidiou o levantamento das hipóteses na fase seguinte (análise *a priori*). Machado (2010) elenca alguns fatores a serem investigados:

- a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
 - a análise do ensino atual e de seus efeitos;
 - a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução;
 - a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática;
- Tudo isso levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa (MACHADO, 2010, p.238).

Tratou-se de um trabalho minucioso, que avaliou a importância e a viabilidade da pesquisa como recurso que pode contribuir para amenizar as dificuldades de aprendizagem.

Com base nos estudos das Análises Preliminares, foram elaboradas as atividades que foram desenvolvidas em sala de aula, com os alunos, sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica, planejada especificamente para favorecer a aprendizagem dos Números Decimais.

Conforme explica Almouloud (2010, p. 174): “Com a finalidade de responder à(s) questão(ões) de pesquisa e validar as hipóteses, [...] o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema”. Após a elaboração das atividades, antes da implementação da mesma, foi realizada a segunda etapa da Engenharia Didática: as Análises *a priori*. Nessa etapa a pesquisadora esgotou as supostas respostas dos alunos, levando em consideração todo conhecimento adquirido nas análises preliminares, afinal:

[...] o objetivo da análise *a priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser operada na quarta fase (ARTIGUE, 1988, p.293).

A terceira fase da Engenharia Didática é a experimentação, cujo instrumento essencial foi a sequência de atividades, elaborada criteriosamente para oportunizar aprendizagem. A tarefa foi ir a campo e estabelecer contato maior com os alunos sujeitos da pesquisa.

Portanto, este foi o momento em que os alunos tiveram contato com as atividades previstas. No caso da pesquisa sobre Números Decimais, depois de diagnosticados os problemas, com base nas análises preliminares e nas análises *a priori* foi viável oportunizar contato dos alunos com os Registros de Representação Semiótica, provocando as conjecturas,

utilização de diferentes registros e conseqüentemente naturalidade das conversões de um registro para outro. Para isso, Almouloud (2010), destaca:

É importante que o professor/aplicador, após o debate, selecione e organize as descobertas dos alunos e sistematize os novos conhecimentos e saberes, a fim de promover, para o aluno, uma melhor compreensão dos novos objetos matemáticos. Além disso, é preciso fazer a institucionalização dos saberes novos estudados (ALMOULOU, 2010, p. 175).

Nesta etapa da pesquisa os instrumentos foram aplicados e os registros dos alunos foram cuidadosamente avaliados. Foram instrumentos desta pesquisa durante a experimentação: a própria observação descrita em relatórios, a transcrições das falas dos alunos, os registros escritos, as filmagens e os questionamentos feitos pela pesquisadora para cada aluno ou em pequenos grupos.

Foi uma fase de desafios, conjecturas, argumentações, criticidade, independência, trabalho em equipe, refutações e investigações, na tentativa de validação da seqüência de atividades elaborada. Para Almouloud (2010) é dever do pesquisador provocar a confrontação das respostas dos diferentes grupos e fazer intervenções que culminem na homogeneização do saber pelos grupos e no desenvolvimento dos conhecimentos individuais.

A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise *a posteriori* que se apóia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino (ALMOULOU, COUTINHO, 2008, p.67-68)

Também foi nessa fase que a pesquisadora, com base nas análises *a priori* sistematizou alguns conceitos referentes aos Números Decimais. Foi da experimentação que saíram as transcrições de falas dos alunos e os registros escritos deles para serem analisados.

As últimas fases desta metodologia são as análises *a posteriori* e a validação, marcadas pelo confronto das análises entre as duas, juntamente com os registros dos alunos. Dessa forma comparam-se respectivamente as suposições acerca do conhecimento específico do aluno sobre a questão apresentada (análise *a priori*) e a análise dos resultados específicos de cada atividade, de acordo com as especificidades de pensamento de cada grupo ou de cada aluno sobre o assunto (análise *a posteriori*). E assim, identificam-se as aprendizagens e as dificuldades dos alunos em relação à compreensão dos Números Decimais, na tentativa de

validar a hipótese da contribuição da sequência de atividades para acesso ao objeto matemático.

Esse confronto de ideias é monitorado por cautelosas reflexões da pesquisadora, que se mune de estratégias comparativas para validar os conceitos envolvidos no assunto, neste caso, os Números Racionais, na especificidade dos Números Decimais. É um estudo, que respeita os conhecimentos prévios dos alunos, e a partir deles, amplia e provoca discussões conceituais, com base nas transformações entre os registros, que levam à institucionalização do saber sobre Números Decimais pela pesquisadora e compreensão do objeto matemático pelos alunos.

Ainda nesta etapa foram usadas observações nas filmagens e registro dos alunos, bem como seleção de falas transcritas para maior segurança da análise e estudo das evoluções e descobertas dos alunos a partir da confirmação de suas hipóteses ou refutações diante da pluralidade de registros.

Pretende-se com a pesquisa investigar a possibilidade de contribuir com o quadro atual, em que se observam lacunas na assimilação de conteúdos que abordam os Números Decimais e mostrar que existem caminhos eficazes, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica que podem fazer a diferença no processo de construção do saber. Também contribuir com a Didática da Matemática que divulga a Engenharia Didática como uma metodologia que atende as necessidades e exigências educacionais atuais.

4 A INVESTIGAÇÃO

4.1 Análises Preliminares

4.1.1 Aspecto conceitual e histórico dos números decimais

Denominamos número racional todo número que pode ser colocado na forma fracionária $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e $n \neq 0$. De acordo com Ávila (2006, p. 23) “[...] a conversão de uma fração ordinária em decimal se faz dividindo o numerador pelo denominador. Os Números Decimais apresentam-se como uma particularidade dos Números Racionais.

Ávila (2006) orienta que:

Os números racionais costumam ser representados por frações ordinárias, representação essa que é única se tomarmos as frações em forma irredutível e com denominadores positivos [...] com vistas a entender quando a decimal resulta ser finita ou periódica. [...] Se o denominador da fração em forma irredutível só contiver os fatores primos de 10 (2 e/ou 5), a decimal resultante será sempre finita; e é assim porque podemos introduzir fatores 2 e 5 no denominador em número suficiente para fazer esse denominador uma potência de 10 (ÁVILA, 2006, p. 23-24).

Exemplos:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\frac{41}{20} = \frac{41}{2^2 \times 5} = \frac{41 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{205}{100} = 2,05$$

$$\frac{63}{40} = \frac{63}{2^3 \times 5} = \frac{63 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = 1,575$$

Com esses exemplos de Ávila (2006, p. 24), podemos verificar que “[...] uma fração ordinária em forma irredutível se transforma em decimal finita se seu denominador não contém outros fatores primos além de 2 e 5”.

Dessa forma, podemos concluir que Número Decimal é todo número que pode ser escrito como uma fração cujos denominadores são fatores primos de 10. Por exemplo, toda fração com denominador 5 ou 2 (ou múltiplos desses números) representa um número decimal

e não necessariamente consiste de denominador 10 ou potência de 10. Por exemplo, $\frac{2}{5}$ representa um número decimal, pois 5 é um fator primo de 10. Outro exemplo é $\frac{7}{4}$, representa um número decimal, pois $4 = 2 \times 2$ que é múltiplo de fator primo de 10. Os denominadores das frações que representam números decimais são números que conseguimos transformar em denominador 10, o que não ocorre com um denominador 3, por exemplo.

De acordo com Caraça (1951), Pérez (1988), Ifrah (2005) e Gálenet *al* (2008), observa-se que foi da necessidade de se representar medidas maiores ou menores que a unidade que apareceram as representações fracionárias e mais tarde as representações decimais. De acordo com o percurso histórico, os babilônios foram os primeiros a contribuir com essas representações, com a numeração de base 60. Depois foram os gregos, que usavam barra para numerador e apóstrofe para denominador. A notação mais próxima da que usamos atualmente deve-se aos hindus, devido à numeração posicional decimal. Tal notação foi aperfeiçoada pelos árabes com a barra horizontal.

Buscando a praticidade do uso foi-se, no decorrer da história, tentando-se aprimorar os registros e transformar frações em números decimais.

Segundo Caraça (1951), essa necessidade de registrar tamanhos não inteiros aparece com a formação das primeiras civilizações, pela necessidade de registrar medidas de área das terras privadas e do estado, massa, comprimentos e repartir quantidades. Foi a partir destes tipos de situações que surgiram as primeiras manifestações de Números Racionais na representação fracionária, e mais tarde a representação decimal.

É no trabalho de Al-Uglidisi [...] 952 [...], que encontra-se uma notação muito parecida com a atual, por exemplo: $2'35$ é 2,35 e se lê 2 unidades e 35 de cem (LIMA, 2010,p.36).

Pérez (1988), afirma que os Números Racionais foram ganhando cada vez mais sentido nas suas representações fracionária e decimal. Na Idade Média houve ampla divulgação do sistema posicional decimal, período histórico em que a notação decimal dos Números Racionais se tornou mais popular.

Em 1579, Viéte, um matemático francês, recomendava insistentemente o uso das frações decimais, aquelas cujos denominadores são potências de 10, por acreditar na eficácia do registro e a sua transformação para decimal. Em 1585, Stevin, um matemático dos Países Baixos, reforçava com mais veemência ainda, a recomendação do colega francês. Stevin publicou a obra *De Thiende* (1585), que deu um novo significado para as frações decimais, quando tornou possível operar com tais números, evidenciando que toda fração decimal

poderia ser transformada em número decimal. Em 1617, o escocês John Napier produziu uma obra, enfatizando as ideias de Stevin, sugerindo uma notação com a vírgula separando a parte inteira da parte decimal, parecida com a que usamos hoje. No entanto, foi graças ao matemático Wilbord Snellius, no século XVII, a notação atual, na qual a vírgula separa a parte inteira da parte decimal, como representações decimais dos números decimais (CUNHA, 2002, p. 52).

Segundo Pérez (1988), Al-Kasi é o grande responsável pela divulgação dos Números Decimais, pelo trabalho intitulado “A chave da aritmética”. Foi ele quem explicou claramente uma teoria para as frações decimais e para a noção de número decimal. Por isso se sentiu no direito de reivindicar a invenção dos Números Decimais. A história não mostra com certeza, Al-Kasi como o grande inventor, no entanto não teve outro que explicou melhor os conceitos desses números.

Conforme pesquisa realizada por Lima (2010),

[...] foi apenas por volta de 1600 que a ideia de frações decimais e a notação decimal se popularizou, principalmente pela vantagem de incorporar a mesma estrutura aritmética dos números inteiros. Segundo Ifrah (2005), Simon Stévin em 1582 criou a seguinte notação para o número 679,567: 679(0) 5(1) 6(2) 7(3). Após dez anos, o suíço Jost Bürgi simplificou essa notação, colocando no alto da parte inteira um círculo, como exemplo:

o
679 567 é o número 679,567. Nesse mesmo período começaram a utilizar o ponto e no século XVII o neerlandês Wilbord Snellius inventou o uso da vírgula (LIMA, 2010, p.37).

4.1.2 A realidade da escola

Entender a dinâmica da aprendizagem matemática tem sido motivo de muitas pesquisas que mostram a possibilidade de favorecer o ensino da Matemática para que seja compreendido por todos, rumo à democratização do saber.

Conforme Gomes (2006), os Números Decimais estiveram presentes em toda essa trajetória metodológica, sendo didaticamente (re)pensado a cada década, sob a intenção de atribuir maior significado a este objeto matemático, tão presente nas atividades cotidianas. Tal preocupação desperta nos professores o desejo de que este conteúdo escolar seja apreendido e se reverta em ações colaborativas para a valorização do saber escolar, no saber da vida, aquele que o sujeito usa em seu cotidiano.

Para tanto, é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua

aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL,1997, p.25).

Para isso, há necessidade de se pensar em pressupostos metodológicos que corroborem com a apreensão do objeto matemático. Nesse sentido, há necessidade de ir além do livro didático, em busca de teorias que auxiliem este processo de compreensão da matemática.

Nesta trajetória de pesquisa com os Números Decimais, a fim de buscar supostas respostas para um problema vivenciado no contexto escolar (que é a dificuldade de mobilizar a aprendizagem do objeto matemático Números Decimais), vivido pela pesquisadora e após estudo da trajetória destes números, mediante livros de História da Matemática, fez-se necessária a investigação do que pensam os professores que ensinam este conteúdo. Em conversa informal com sete professoras de Matemática, em um bate papo no dia de uma Reunião Pedagógica na escola, na qual os professores estavam organizados por área do conhecimento, e com o consentimento delas para a gravação da conversa e posterior uso na pesquisa, uma delas (a professora 1) depois de ser questionada como ensina Números Decimais para seus alunos, afirmou que:

“Não conheço outra maneira de ensinar Números Decimais, então ensino como aprendi e como está no livro didático, ou seja, ensino primeiro os números fracionários e depois os números decimais. E a relação entre o dois somente no final do ano”.

E uma outra (professora 2) acrescentou:

“Até pode ter maneiras mais eficazes de ensinar Números Decimais, mas não tenho tempo de ficar pesquisando o que está sendo discutido nas pesquisas acadêmicas”.

Então uma terceira (professora 3) entrou na conversa e disse:

“Só sei que do jeito que estamos ensinando não está bom, pois os alunos não estão aprendendo os conceitos básicos dos Números Decimais”.

E a discussão foi envolvendo todos os professores presentes. Uma professora (professora 4) de física que também dá aula de matemática acrescentou:

“A situação é tão grave gente, que eu fico revoltada, quando preciso que os alunos usem Números Decimais nos conteúdos de Física. Eles não sabem transformar número fracionário em decimal e muito menos operar com estes números”.

Uma outra contribuiu (professora 5):

“Não sei o que acontece, pois eu mesma ensinei este conteúdo no sexto ano, no ano passado para eles e este ano quando fui fazer a avaliação diagnóstica no início do ano, fiquei desesperada, pois eles tinham esquecido tudo”.

Após este comentário, todas as outras professoras concordaram e disseram que também se sentem angustiadas por isso. As professoras 6 e 7 faziam sinal que concordavam, porém não se pronunciaram.

Neste momento de conversa, a pesquisadora fez um questionamento, perguntando a elas, como trabalham os Números Decimais. E as respostas foram unânimes. Afirmaram que trabalham primeiro a representação fracionária e no final do ano a representação decimal, como propõem os livros didáticos. Ainda relataram que os conceitos relativos aos Números Decimais ficam prejudicados, pois são trabalhados no final do último trimestre, com tempo insuficiente para um enfoque com as frações decimais.

Uma das professoras (professora 3) perguntou o que seriam as diferentes representações de um número e cuidadosamente a discussão sobre representações semióticas foram ganhando significado e entendimento.

Perguntamos aos professores sobre formação continuada sobre Números Decimais e ou Números Racionais e uma delas (professora 1) respondeu que nunca tiveram um curso que falasse da importância de se trabalhar com as diferentes representações de um mesmo conceito. Todas concordaram com o que a professora falou, sendo que a professora 6 que ainda não havia se manifestado, disse que a coordenadora de matemática do Núcleo Regional de Ensino dava prioridade às formações envolvendo geometria. Neste momento, a professora 7 se manifestou, dizendo que tinha participado de uma capacitação de laboratório de Matemática e parece ter visto algo sobre números decimais.

Conversamos também, sobre o plano de trabalho docente e elas relataram que seguem exatamente como está no livro adotado. A professora 2 novamente afirmou que quando trabalha com Números Decimais leva panfletos e formula situações problema para os alunos resolverem. A professora 1, confirmou que também faz isso, mas nunca pede para os alunos observarem outras maneiras de registrar o número decimal. E a professora 7 acrescentou que trabalha com materiais manipuláveis, mas quando é fração, enfatiza a fração e quando é número decimal, enfatiza o número decimal. Foi aí que a professora 6 disse que trabalha

primeiro as frações e depois os números decimais, mas que neste último, faz ligação entre decimais e frações.

Na tentativa de prever fatos a serem apontados nas análises *a priori*, seguiu a investigação, agora enfatizando os documentos oficiais

Os números racionais representados nas formas: fracionária e decimal estão sendo trabalhados em compartimentos estanques. Toledo (1997) afirma que “a representação decimal pode ser tratada como decorrente, simultaneamente, dos princípios do sistema de numeração decimal e da representação fracionária”.

O documento oficial que norteia os conteúdos programáticos nas escolas são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que instrui o aprendizado dos números racionais, no segundo ciclo do Ensino Fundamental:

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversas categorias numéricas criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar — números naturais, números inteiros positivos e negativos, números racionais (com representações fracionárias e decimais) e números irracionais. À medida que se depara com situações-problema — envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação —, ele irá ampliando seu conceito de número (BRASIL,1997, p.39).

De acordo com os documentos oficiais, a previsão é que as crianças estabeleçam contato com os Números Decimais desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, no decorrer do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O mesmo documento orienta os professores:

Como um incentivador da aprendizagem, o professor estimula a cooperação entre os alunos, tão importante quanto a própria interação adulto/criança. A confrontação daquilo que cada criança pensa com o que pensam seus colegas, seu professor e demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa, principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e a de comprová-los (convencendo, questionando) (BRASIL,1997, p.31).

No entanto, em contrapartida aos documentos oficiais, o que se tem observado e também de acordo com a experiência e relatos de professores é um ensino compartimentado, em que o professor, com pouco conhecimento teórico, ensina da forma como aprendeu, fazendo do ensino uma prática tradicional, que não tem levado em consideração, práticas cognitivistas, que procuram dar importância em como o aluno aprende. A respeito disso Zunino (1995) mostra em pesquisa realizada com professores a opinião deles sobre como ensinar Matemática:

[...] existe um aspecto essencial do método em que todos coincidem: o que garante o êxito do ensino é a repetição [...] A esta firme e generalizada crença da efetividade da explicação e, sobretudo, da repetição, se soma em alguns casos a suposição de

que cada item deve ser ensinado de forma bem separada dos outros itens, caso contrário as crianças se confundem (ZUNINO, 1995, p. 10-11).

O saber científico não muda, entretanto há necessidade de acompanhar os avanços da sociedade com metodologias que atendam as demandas atuais, a fim de despertar interesse e atrair os alunos com maneiras que auxiliam a apreensão do objeto matemático.

De acordo com Brasil (1997, p. 55), o objetivo proposto para o trabalho com Números Racionais no segundo ciclo é “Construir o significado do número racional e de suas representações(fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social”.

O Estado do Paraná, a partir de discussões coletivas entre professores em todo o estado, organizou sob a supervisão da Secretaria de Estado da Educação (SEED), as Diretrizes Curriculares Estaduais de cada disciplina, para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

O referido documento aponta Números e Álgebra como o conteúdo estruturante dos Conjuntos Numéricos. Refere-se a conteúdos estruturantes como conhecimentos de grande amplitude e indica as expectativas de ensino e de aprendizagem desse conteúdo:

- os conceitos da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades;
- o conceito de razão e proporção, regra de três, porcentagem, frações e dos números decimais e as suas operações (PARANÁ, 2008, p.51).

A SEED/PR preocupada com os baixos índices de aprendizagem, detectados pela Prova Brasil, buscou explicitar ainda mais as abordagens que deveriam ser dadas a cada objeto matemático e para isso disponibilizou aos professores as Expectativas de Aprendizagem, como “complemento” às DCE.

Em 2011 iniciaram-se as discussões sobre a possibilidade de elaboração do Caderno de Expectativas de Aprendizagem pelo Departamento de Educação Básica. O documento foi elaborado de maneira coletiva, com a participação dos professores da rede e dos técnicos-pedagógicos que atuam nos Núcleos Regionais da Educação, apresentando a sistematização de, aproximadamente, 11.720 contribuições dos professores, debatidas durante a Semana Pedagógica de julho de 2011, bem como as contribuições dos técnicos-pedagógicos dos NRE, discutidas na formação continuada, realizada pelo DEB. É necessário destacar que a opção pela elaboração das Expectativas de Aprendizagem deu-se pela necessidade de continuar o processo de implementação das Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica para a Rede Estadual (Parecer CEE/CEB n. 130/10)¹, referencial teórico curricular que fundamenta o documento. A elaboração das Expectativas de Aprendizagem busca, sobretudo, atender a um princípio legal: o direito à educação com qualidade e equidade (PARANÁ, 2011, p. 5).

No tocante aos Números Racionais, tal documento prevê: que no sexto ano, o aluno reconheça, interprete e opere com números racionais nas formas fracionária e decimal, além de resolver situações-problema envolvendo operações com números racionais.

Entretanto, não esclarece a importância das diferentes representações dos Números Racionais, instruindo os professores ao uso das representações semióticas para apreensão de conceitos matemáticos.

Os livros didáticos geralmente não subsidiam o professor para um trabalho voltado para as diferentes representações semióticas. Não intensificam as relações entre os diferentes registros e, normalmente, apresentam um estudo primeiro com as frações e mais tarde com os números decimais, como se fossem objetos distintos.

Segundo informações dos próprios professores, eles seguem o livro didático adotado e raramente buscam apoio em outros materiais.

Essa subjetividade em trabalhar com as representações, possivelmente tem levado ao trabalho isolado de Números Fracionários e Números Decimais, não havendo ligação entre eles, com base nos diferentes registros.

4.1.3 Os números Decimais e as representações

Toledo (1997, p.197) mostra uma opinião do professor Ubiratan D'Ambrósio sobre a representação decimal: “[...] uma das tendências para o próximo milênio é a total substituição da representação fracionária pela decimal, como aliás, já vem ocorrendo no visor das calculadoras e nos computadores”.

O dia-a-dia dos alunos está repleto de Números Decimais. O problema é que muitas vezes, em sala de aula, o conteúdo é trabalhado de maneira mecânica, descontextualizada e pouco atrativa. Em geral não há ligação entre as representações fracionárias e as representações decimais, sendo conteúdos trabalhados isoladamente.

Normalmente, a falta desta relação significativa com as representações semióticas dos Números Decimais e a ausência das conversões seja, um dos motivos das lacunas no entendimento e contextualização deste objeto matemático.

Duval (2011) sustenta a hipótese de que as dificuldades de aprendizagem estão ligadas ao não reconhecimento de um objeto matemático em diferentes representações:

Esse reconhecimento é a condição fundamental para que um aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema. Essa condição supõe que ele não identifica os

objetos matemáticos com os conteúdos de certas representações (DUVAL, 2011, p. 23).

No entanto, o trabalho organizado de modo a propor a operação cognitiva de conversão pode necessitar do professor o conhecimento dos procedimentos metodológicos exigidos para caracterizar a conversão.

Damm (2011, p.167) afirma que “[...] existe uma preocupação muito grande entre os pesquisadores em Educação Matemática com a aquisição do conhecimento, com a forma como se processa a aprendizagem”. Diante da necessidade, a mesma autora defende a ideia, de se usar como ferramenta de análise desta problemática que rodeia o cenário escolar, os Registros de Representação Semiótica.

De acordo com esta teoria, é possível ter contato com diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, favorecendo assim a compreensão do conhecimento.

Para Machado (2011, p. 58), Duval, ao apresentar essa teoria, mostra caminhos eficazes para analisar as dificuldades de aprendizagem matemática relacionada aos números racionais.

Catto (2000) *apud* Tavignot (1999) indica dois objetivos a serem alcançados no processo de ensino dos racionais: “um primeiro, a longo prazo, que se refere à conceituação e um segundo, mais imediato, que diz respeito ao domínio da representação”.

4.2 Os alunos participantes da pesquisa em seu meio natural

Outra preocupação voltada às análises preliminares foi investigar se realmente a aprendizagem dos alunos, relacionada aos números decimais era motivo de pesquisa.

Para dar início a essa investigação, primeiro escolheu-se uma escola pública, para aplicação dos instrumentos. A primeira conversa foi com a diretora, que tem muitos anos de experiência como pedagoga de escola e que recebeu a pesquisa com muito entusiasmo; demonstrando interesse no assunto – Números Decimais – pois, ouve muito dos professores, que os alunos têm muita dificuldade em entender os números com vírgula.

Em seguida, fomos conversar com as pedagogas da escola, que também mostraram interesse na pesquisa, pois de acordo com elas, satisfaz uma necessidade da escola, pois pode ajudar os alunos a entenderem um assunto que gera notas baixas.

As pedagogas apresentaram uma relação de vinte alunos que apresentavam compromisso e assiduidade na escola, sem a preocupação de incluir alunos apenas com

dificuldade de aprendizagem. Entenderam que para o sucesso da pesquisa, seria necessário termos uma diversidade de alunos, no que diz respeito à facilidade ou dificuldade de aprendizagem.

No dia seguinte, com a aprovação da diretora, fizemos uma reunião com os alunos participantes da pesquisa, que preencheram uma ficha com nome, nome dos pais, endereço e telefone. Na oportunidade, conversamos com eles sobre alguns conteúdos matemáticos e para uma avaliação diagnóstica superficial e para o início de um estreitamento de vínculo afetivo entre a pesquisadora e os participantes da pesquisa, foi proposto um jogo de tabuleiro, envolvendo diferentes representações dos Números Decimais. A atividade lúdica tinha o objetivo de diagnosticar os conhecimentos prévios e a facilidade ou dificuldade em lidar com este objeto matemático. Enquanto eles achavam que estavam brincando, era percebida a dificuldade em estabelecer relações entre o registro numérico fracionário e decimal e entre estes com registro figural contínuo e discreto e também o desconhecimento da representação com material manipulável – no caso o material dourado.

Mesmo com muitos erros, mas com cuidadosa intervenção e ajuda da pesquisadora, todos foram presenteados com chocolate pela participação.

Neste mesmo dia, levaram o termo de consentimento livre e esclarecido para menores para trazer assinado pelos pais no primeiro encontro. Tal documento aprovado pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, explicava aos pais a pesquisa e pedia o consentimento deles para a participação do filho. Mesmo com o termo encaminhado, telefonamos para alguns pais e conversamos pessoalmente com outros, para explicar a investigação e avisar o dia do início, bem como horário e tempo de duração.

Os pais demonstraram interesse e inclusive tivemos que abrir mais cinco vagas, a pedido deles. A escola pediu se não poderia abrir outra turma, pois os pais demonstraram interesse. No entanto, a pesquisadora não dispunha de tempo para mais uma turma e foi mantida apenas a primeira.

Em seguida, passamos a pensar em uma sequência de atividades que ajudasse os alunos a compreenderem as diferentes representações dos números decimais e que oportunizasse conversões entre os registros. A preocupação era na elaboração, pois este tipo de atividade geralmente não é encontrada em livros didáticos e teve que ser elaborada pela pesquisadora, que inclusive teve ajuda de uma profissional, para fazer as artes, com as imagens de cada atividade.

Feito o esboço de cada atividade, as mesmas foram rigorosamente discutidas em reuniões de orientação, com reformulações de enunciados, complementações quanto a registros de entrada e saída, até que ficaram prontas para a reprodução das cópias.

A sequência foi composta por cinco atividades, sendo aplicada uma por dia, conforme descrito nas análises *a posteriori*.

A sequência de atividades, como um todo, permitiu discussão e elaboração de conjecturas entre os pares, sistematização de conceitos do objeto matemático em questão (Números Decimais), em que cada item pudesse despertar interesse em conhecer os diferentes registros de representação dos Números Decimais. As atividades enfatizavam desde conceitos primários do objeto, até maiores abstrações como as conversões.

Durante a coleta de dados, os alunos foram filmados com uma câmera filmadora, captando o todo da sala e em cada equipe uma máquina fotográfica, filmando as particularidades de cada grupo. Em alguns momentos, havia filmagem individual de cada aluno, para serem usadas nas posteriores transcrições de falas. As atividades foram fotografadas, tanto as certas como as erradas, no sentido de comparar e enriquecer os dados para análise final.

Ao término da implementação da sequência de atividades, os alunos participaram de um pós teste, juntamente com outros alunos que não haviam participado da pesquisa, justamente para comparar dados e apontar contribuições da investigação. O pós teste foi realizado em um único dia, com duas horas aula de duração e tinha por objetivo verificar a aprendizagem dos Números Decimais e constatar o uso dos diferentes registros de representação semiótica em relação a este objeto matemático.

De posse a todas estas informações, tendo a pesquisa como um recorte da realidade, analisamos os dados coletados e elaboramos a sequência de atividades, para que com base nos registros dos alunos pudéssemos tecer as análises finais deste trabalho de investigação científica.

5 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção são apresentadas a sequência de atividades que foram exploradas com os participantes da pesquisa, bem como objetivos de cada situação problema, os registros de representação explorados, as noções matemáticas envolvidas e o tempo de realização. Em seguida, apresentam-se as análises *a priori*, que são as hipóteses acerca do conhecimento dos alunos e a experimentação. Na sequência aparecem as análises *a posteriori*, como resultados dos dados coletados. Finalmente, há o confronto das análises *a priori* com as análises *a posteriori*, do qual emergiram as validações da pesquisadora, com base nas conceitualizações mobilizadas pelos alunos, ou seja, a verificação das hipóteses levantadas, os imprevistos ocorridos no decorrer da investigação e a melhoria do conhecimento para alunos.

Em cada item das atividades priorizou-se um tipo de registro de saída, focando um outro registro de chegada e constatar apreensão do objeto matemático, por meio das conversões.

Como aponta Flores (2006):

Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático [...]. Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. Além disso, é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação (FLORES, 2006, p.4).

Para se propor conversões, foram realizadas intervenções da pesquisadora, entretanto não prejudicaram as conjecturas elaboradas pelos sujeitos da pesquisa, pois as correções foram pontuais (conforme surgiam dúvidas e erros individuais) e ao mesmo tempo problematizadoras. Procurou-se responder todos os questionamentos dos alunos com outros questionamentos, na intenção de auxiliar a estruturação do pensamento, sem dar as respostas prontas, fazendo com que buscassem por si próprios as respostas e ainda fossem instigados a testar os resultados encontrados.

5.1 Atividade 1

Objetivos da atividade

- Interpretar situação do cotidiano envolvendo Números Decimais;
- Identificar um Número Decimal por meio de diferentes representações;
- Realizar operação de subtração com Números Decimais.

Registros de representação explorados na atividade:

- Registro na língua natural;
- Registro numérico na forma de representação decimal;
- Registro numérico na forma de fração;
- Registro figural.

Noções matemáticas exploradas:

- Números Decimais;
- Comparação entre números na representação decimal;
- Subtração de números na representação decimal;

Tempo para realização da atividade: 2 horas aula.

Atividade 1

Em equipes de cinco alunos, utilizando fita métrica, régua, trena e metro articulado, meçam uns aos outros, preencham a tabela com as alturas em ordem crescente. Depois de realizar as ações propostas, discuta na equipe e responda às seguintes questões:

Figura 3: Ilustração 1 da atividade 1



Fonte :Arquivo da pesquisadora

Figura 4: Ilustração 2 da atividade 1



Fonte :Arquivo da pesquisadora

Figura 5: Tabela para organização do registro da altura dos alunos

| Nome | Altura |
|------|--------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Fonte :Arquivo da pesquisadora

Figura 6: Ilustração 3 da atividade 1

Fonte :Arquivo da pesquisadora

a) Qual a diferença entre as alturas do aluno mais alto e do aluno mais baixo de sua equipe?

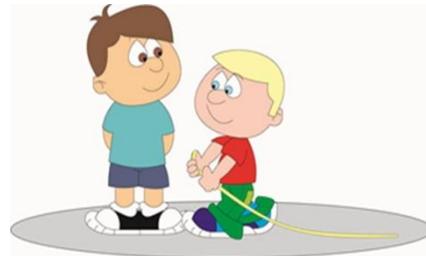
b) Utilize peças do material dourado para representar cada altura dos integrantes da equipe. Em seguida, use o registro figural para fazer estas representações.

c) Escreva as alturas de cada integrante do grupo por meio de frações e na língua natural(língua portuguesa).

Figura 7: Tabela para organização dos registros das diferentes representações das alturas dos alunos

| Nome | Altura | Fração Decimal | Língua Natural |
|------|--------|-------------------|-------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura8: Ilustração 4 da atividade 1

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Análise a Priori da Atividade 1

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.64) apontam como objetivos do trabalho com números racionais para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6° ano): “[...] identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números racionais indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos”.

O assunto altura faz parte do cotidiano dos alunos. Geralmente, no início do ano letivo os professores de Educação Física das escolas medem os alunos. Nesta atividade, a proposta é que os alunos façam esse experimento sozinhos, de modo a favorecer a familiarização com os Números Racionais, na especificidade dos Números Decimais.

Tínhamos a hipótese que todas as equipes conseguiriam preencher as tabelas com as alturas dos alunos.

Supusemos que iriam conseguir montar a ordem decrescente das alturas, comparando o tamanho deles, inclusive fazendo uso de pareamento para evidenciar e confirmar as comparações realizadas, entretanto poderiam escrever as alturas com ponto e com vírgula, por não saber ao certo o que usariam.

Com relação às questões propostas na atividade, esperávamos que diversas respostas pudessem ser apresentadas pelos alunos. Seguem algumas conjecturas previstas, para o item a:

- Fariam a subtração de números decimais, partindo da ideia de comparação, contariam nos dedos essa diferença, já que teriam alturas próximas;
- Organizariam o algoritmo de subtração e resolveriam a operação;
- A maioria tentaria usar a calculadora para resolver a situação, mas ficariam procurando a vírgula que na realidade não existe. No lugar da vírgula, na calculadora usa-se ponto.
- Outros chegariam a conclusão (ou já sabiam) que o ponto é a vírgula e conseguiriam fazer uso da calculadora;
- Poderiam ocorrer erros de interpretação do enunciado e muitos alunos poderiam adicionar as duas alturas ao invés de subtrair;
- Ainda seria possível que, ao montar o algoritmo da subtração ou até mesmo da adição, não colocassem vírgula embaixo de vírgula, evidenciando a falta de entendimento da correspondência entre as casas decimais, por falta de

conhecimento formal do assunto. Alguns poderiam conseguir montar o algoritmo, mas, por um conhecimento do senso comum, já que lidam no dia a dia com situações envolvendo dinheiro.

b) Os alunos teriam dificuldade em resolver este problema, pois não estariam habituados a usar o material dourado para fazer esta comparação. Acreditamos que esta atividade aumentaria o repertório dos alunos, no que se refere às representações, e contribuiria para a compreensão dos números decimais. Dessa forma, pensamos que seria necessário o auxílio da pesquisadora para conseguirem chegar às respostas corretas, mediante conjecturas, sobre os valores decimais de cada peça do material dourado (cubinho, barra, placa, cubo grande).

Junto com a professora/pesquisadora, com intervenções e questionamentos, supomos que os alunos chegariam às conclusões, depois de manusear as peças do material dourado.

$$\text{Placa} = \frac{1}{10} \text{ do cubo grande}$$

$$\text{Barra} = \frac{1}{100} \text{ do cubo grande}$$

$$\text{Cubo pequeno} = \frac{1}{1000} \text{ do cubo grande}$$

Depois disso, poderiam fazer associações e chegariam à resposta de como representar cada Número Decimal por meio de um registro figural. O material manipulável neste momento teria a função de favorecer a compreensão dos conceitos de décimos (dezena – barra), centésimos (centena – placa) e milésimos (unidade de milhar – cubo grande). O material seria então utilizado para possibilitar uma representação intermediária na forma figural, de um número decimal, registrado pelos alunos, como um registro figural contínuo. Contudo, a apreensão conceitual depende da coordenação entre os registros pertencentes a sistemas semióticos diferentes. Essa coordenação se daria pela variação de unidades significantes em um registro, que provocassem variações no outro. Duval (2009) explica que:

A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro. Essa operação tem sido primeiramente

descrita como “mudança de forma” [...] **“mudar a forma pela qual um conhecimento é representado”**(DUVAL, 2009, p. 32-33, grifo do autor).

Após este entendimento à luz da teoria de Duval, é que os alunos possivelmente teriam condições de relacionar a altura deles com as peças do material dourado e desenhariam esta representação. Por exemplo, um aluno que tem 1,53m de altura, escreveria essa mesma altura com a fração $\frac{153}{100}$ ou seja, relacionariam a parte inteira do registro numérico decimal com o numerador da fração, considerando quantas partes do todo foram tomadas e quantas a mais do que o todo precisam ser contadas e consideradas no denominador. Conseguiriam chegar ao registro figural, desenhando uma placa (para representar a parte inteira), cinco barras e três cubinhos (para representar os décimos e centésimos). Dessa forma, os alunos estariam variando a forma de apresentação dos registros.

Tal contato com diferentes registros despertaria a curiosidade em conhecer outras representações para os Números Decimais, instigando o uso e as transformações entre esses registros, para possíveis conversões.

Acreditamos, ainda, que os alunos poderiam obter várias respostas, por exemplo, para uma criança que teria um metro e trinta centímetros poderia ser:

- Partindo da placa: uma placa e três barras, que estaria relacionada com a fração $\frac{130}{100}$ e com o desenho de uma placa (100) mais três barras (30) e o número decimal da altura 1,30 – destacando parte inteira (desenho da placa) e parte decimal (barras que são pedaços da placa);
- Poderiam seguir o mesmo raciocínio, todavia usando outras peças como a unidade inteira. Partindo do cubo grande: um cubo grande e três placas;
- E ainda poderiam partir da barra e desenhar: uma barra e três cubos pequenos.

c) Planejamos que mais uma orientação seria necessária, a fim de que aos poucos, fosse possível a sistematização dos conceitos. Acreditamos que seria necessário que os alunos compreendessem a transformação do registro numérico na forma decimal para registro numérico na forma de fração. Em seguida, eles teriam maior facilidade em realizar essa mudança de registro com a própria altura. Supusemos ainda, que os alunos apresentariam dificuldade em usar outra representação para as frações decimais, pois geralmente, eles aprendem os conteúdos isoladamente, sem fazer relação de um com o outro. Por isso, supusemos que os alunos iriam demorar um pouco mais para compreender a atividade, entretanto chegariam às respostas corretas.

Neste item, necessitava-se da sistematização de conceitos, para entendimento das diversas representações dos números decimais e do entendimento de que o acréscimo de zeros à direita do(s) número(s) após a vírgula não acrescenta valores.

Acreditamos que nas primeiras representações fracionárias poderiam aparecer erros, tais como:

$$\frac{1}{100} = 0,100$$

$$\frac{1}{1000} = 0,1000$$

Em seguida, eles conseguiriam entender o registro numérico fracionário e as respectivas representações no registro numérico decimal. Dessa forma, seria possível, após várias tentativas, escreverem as frações decimais correspondentes às alturas. Com esse entendimento mais sistematizado, poderiam fazer a escrita na língua natural ⁴de cada altura. Por exemplo, para um aluno que tem um metro e trinta, poderiam escrever um inteiro e três décimos.

Experimentação da Atividade 1

Durante a experimentação da atividade 1, os alunos participantes da pesquisa foram assíduos e demonstraram responsabilidade e interesse. Duas faltas foram justificadas pelos próprios pais, que ligaram para a escola para avisar que os filhos estavam doentes naquele dia. O tempo previsto para cada atividade foi de duas horas, porém eles não queriam sair da sala, já que ficavam na escola, para o período da tarde. Desta forma, para cada atividade aplicada foram usadas, em média, 3 horas.

No primeiro encontro com os alunos, a pesquisadora propôs a construção de algumas regras de convivência, no sentido de prezar pelo bom andamento da pesquisa, uma vez que os próprios alunos é que manifestavam suas ideias, visando um ambiente favorável à aprendizagem. Tais regras prezavam pela ordem e disciplina das aulas, como falar um de cada vez, não ficar pedindo para sair da sala, respeitar os horários de início e término das aulas, ser organizado com os registros.

⁴Para este trabalho, estamos considerando a língua natural como a língua portuguesa, adotada como língua oficial do Brasil.

Em seguida, eles mesmos fizeram as escolhas para a organização dos grupos. O critério para a divisão dos grupos foi por afinidade, os alunos demonstraram satisfação e alegria na liberdade de escolha dos integrantes dos grupos. Não foi prevista nenhuma intervenção, por isso as equipes ficaram com números diferentes. Preferiram assim, pois se agruparam conforme vínculos existentes. A atividade 1 agradou os alunos, conforme podemos conferir nas falas extraídas de filmagens de áudio e vídeo:

“Olha que legal estes desenhos, acho que vamos fazer a mesma coisa...também vamos medir”.

“Adorei essa ideia de subir no banquinho para medir alguém maior que a gente”.

“Que régua grande! Será que existe uma régua igual a essa que a menininha do desenho está segurando?”

“Olha só esse metro! Meu tio usa e ele se chama metro de pedreiro”.

O momento que utilizaram para medir uns aos outros foi muito descontraído. Eles se sentiram livres em poder sair da sala e escolher um lugar para realizar as medições. Alguns alunos insistiam em perguntar se podiam mesmo ir a qualquer lugar que quisessem. A caixa com diversos instrumentos de medida, barbante, calculadora entregue para cada equipe também despertou interesse dos alunos.

Nesse sentido, supomos que a sequência de atividades foi bem aceita pelos alunos e os mesmos se sentiram motivados a dar suas contribuições para a investigação.

Com o intuito de manter o anonimato dos alunos, para a análise das atividades eles foram codificados de A_1 a A_{20} .

Durante a realização da primeira atividade A_{10} afirmou:

“Eu sempre achei que era burra em matemática, mas agora estou vendo que não sou, pois estou conseguindo entender e dar a minha opinião. Isso me deixa muito feliz”.

A_3 contribuiu dizendo:

“Eu sempre fui bom em matemática, mas agora me sinto melhor ainda, porque estou entendendo tanto, que acho que poderia dar aula deste assunto”.

Foi aí que a A_{13} acrescentou:

“Vim aqui porque queria sair de casa, porque detesto matemática, bom, detestava, porque agora que estou entendendo e até respondendo o que a professora pergunta; eu estou gostando muito”.

No decorrer da primeira atividade, os alunos se mostraram entusiasmados, dispostos e participativos. Argumentavam, conjecturavam e discutiam, a fim de encontrar a resposta correta. Demonstravam preocupação em testar os resultados para verificação da resposta encontrada. A atividade excedeu ao tempo previsto, mas porque os próprios alunos quiseram ficar na sala. Este tempo foi dedicado a unificar as respostas, passar na folha de atividade os rascunhos feitos e testar os resultados. Não foi solicitado que fizessem rascunhos, mas eles demonstraram cuidado com a folha de atividade, que segundo eles, estava bonita, em razão das imagens e não podia ser feita de qualquer jeito.

Análise a Posteriori e Validação da Atividade 1

Quadro 1: Retomada do enunciado da atividade 1

Atividade 1 - Em equipes de cinco alunos, utilizando fita métrica, régua, trena e metro articulado, meça uns aos outros, preencha a tabela com as alturas em ordem crescente e, em seguida, responda as questões referentes à esse experimento.

De acordo com o código de cada aluno, as equipes foram compostas da seguinte forma:

Equipe A : A₁, A₄, A₁₁, A₁₃, A₁₆, A₂₀,

Equipe B: A₃, A₇, A₁₂, A₁₄, A₁₇, A₁₈,

Equipe C: A₂, A₅, A₉

Equipe D: A₈, A₁₀, A₁₅

Tendo observado que sabiam usar o registro numérico decimal – altura) acerca do assunto, percebeu-se que tais conhecimentos poderiam favorecer a aprendizagem dos alunos na sequência didática elaborada. Tais ideias pré-existentes fortaleceram as relações com conceitos a serem sistematizados, como por exemplo, unidade de medida, uso de ponto ou de

vírgula, parte inteira e parte decimal, enfim faltava o contato deles com as representações para estabelecerem conexão com o objeto matemático.

Todos conseguiram fazer as medições e os registros numéricos decimais das alturas de cada membro da equipe na tabela. Sobretudo, escreveram os registros numéricos decimais das alturas ora com ponto, ora com vírgula.

Na sequência do texto, estão expostos os registros de duas equipes, para demonstrar os dados coletados. Duas equipes registraram as alturas usando o ponto e duas equipes registraram usando a vírgula. Esses registros são representativos do grupo todo, uma vez que as demais equipes agiram de forma análoga.

Figura 9: Registro numérico decimal dos alunos da Equipe A em relação à altura

| Nome | Altura |
|----------|--------|
| Aluno 16 | 1.38m |
| Aluno 1 | 1.39m |
| Aluno 20 | 1.58m |
| Aluno 4 | 1.57m |
| Aluna 13 | 1.52m |
| Aluna 11 | 1.39m |
| | |
| | |
| | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 10: Registro numérico decimal dos alunos da Equipe B em relação à altura

| Nome | Altura |
|----------|--------|
| Aluno 14 | 1,53 |
| Aluno 3 | 1,54 |
| Aluno 7 | 1,58 |
| Aluna 12 | 1,59 |
| Aluna 17 | 1,64 |
| Aluno 18 | 1,61 |
| | |
| | |
| | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Nota-se que as equipes conseguiram manifestar suas intenções matemáticas de representações numéricas decimais. O fato de duas equipes terem realizado o registro com vírgula e as outras duas com ponto, indicam a noção do registro desses números evidenciando um conhecimento de ordem primária (noções) do objeto matemático em investigação – Números Decimais. Analisando os erros dos alunos pôde-se realizar intervenções pontuais

que superaram as defasagens conceituais diagnosticadas, como por exemplo explicar o uso do ponto na calculadora por causa de sua origem e estabelecer o metro como medida de comprimento padrão para medida de altura.

A₃ exemplifica este fato com a fala:

“Tanto faz usar ponto ou vírgula, os dois são a mesma coisa, mas às vezes a gente usa ponto porque na calculadora só tem ponto. Quem usa muito a calculadora esquece da vírgula”.

Maranhão e Iglioni (2011, p. 61) alertam para o fato que “Um aluno pode dar uma resposta matematicamente certa, mas não mobilizar, de modo coerente, consistente, as unidades cognitivas específicas do funcionamento de um, entre dois, dos registros que se apresentam”.

Por isso que A₃ argumentou, mas não demonstrou ter conhecimento de mudança de registro ou de aspectos conceituais dos Números Decimais.

Dessa forma, tantos os erros como os acertos puderam ser questionados, pois de acordo com algumas pesquisas, crianças de sexto ano, geralmente não entendem a quebra de unidade. Espinosa (2009, p.30) afirma que “[...] a maioria dos alunos não dá significado à representação com vírgula, ignorando-a e operando a parte decimal como se fosse um número inteiro”. Isso porque não conseguem entender a existência de quantidades menores que a unidade, que não podem ser representadas pela unidade natural.

Três equipes (A, C e D) demonstraram conhecimento de unidade de medida, mesmo não indicando a parte inteira com metros e a parte decimal com centímetros. Conforme pode ser conferido na figura 10, a equipe (B) não representou unidade de medida.

No entanto, os dados revelaram dois tipos de representação na execução da atividade. Para preencher a tabela com as alturas dos alunos, primeiro falaram na língua natural o número decimal e depois fizeram o registro numérico decimal.

A₁₁ da equipe A, referindo-se a altura de A₂₀, disse:

“Ele tem um metro e cinquenta e sete centímetros. Escreve aí: um ponto cinquenta e sete”.

Duval (2011, p. 100) afirma que “Todos os problemas que apresentam situações reais [...] mobilizam igualmente pelo menos dois registros: a linguagem, as escritas de números e esquemas.

Espinosa (2009, p. 27) investigou as dificuldades para o ensino e a aprendizagem dos Números Decimais em alunos de sexto e sétimo ano, e, segundo o pesquisador, “A forma

como o Número Decimal vem sendo trabalhado na escola oferece ao aluno uma compreensão um tanto restrita do conceito, pois seria interessante contextualizar o número decimal utilizando as suas diferentes formas de representação”.

Pode ser por este fato investigado por Espinosa (2009) o motivo pelo qual os alunos não se referiram aos Números Decimais referentes à altura como um inteiro e cinquenta e sete centésimos, conforme a fala de A₁₁.

Entendemos que este primeiro contato com a sequência de atividades fez com que os alunos estivessem inseridos em um contexto de Números Decimais para que pudessem discutir nos próximos itens da atividade outras maneiras de registrar suas alturas, não apenas com a representação numérica decimal.

Dessa forma, ter proposto aos participantes da pesquisa um contato maior com os diferentes registros de representação semiótica à luz da teoria de Duval resultou em favorecer a aprendizagem conceitual desses números.

Quadro 2: Retomada dos itens a, b e c da atividade 1

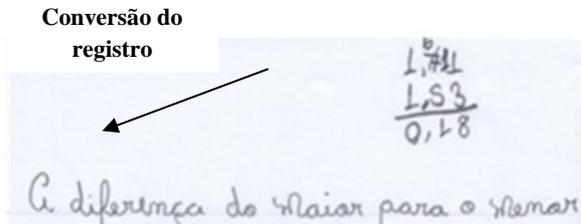
Depois de realizar as ações propostas, discuta na equipe e responda as seguintes questões:

- a) Qual a diferença entre as alturas do aluno mais alto e do aluno mais baixo da sua equipe?
- b) Utilize peças do material dourado para representar cada altura dos integrantes da equipe. Em seguida, use desenhos para fazer estas representações.
- c) Escreva as alturas de cada integrante do grupo por meio de frações e na língua natural (língua portuguesa).

Todas as equipes demonstraram entendimento de resolução do item a, manifestando conhecimento de algoritmo numérico decimal para resolver. Constituiu fator interessante observar que realizaram a verificação, fazendo uso da calculadora e, como previsto, procuraram a vírgula no visor da calculadora e não a encontraram. As equipes que usaram vírgula para registrar as alturas não conseguiam entender, de imediato, que o ponto da calculadora era a vírgula usada por eles. A falta de compreensão deste fato tornou-se um obstáculo para a continuidade da atividade, a ponto de buscarem outras alternativas, como contar nos dedos, por exemplo, como se estivessem lidando com números naturais.

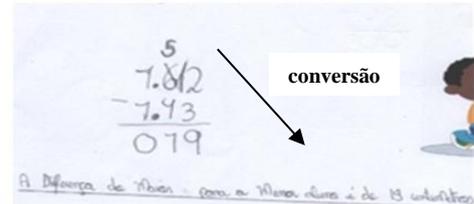
Duas equipes realizaram o algoritmo numérico decimal corretamente, uma equipe deu a resposta oralmente, utilizando-se de cálculo mental e outra utilizou régua para fazer a comparação e chegar ao resultado.

Figura 11: Tratamento numérico e conversão pela equipe A



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 12: Tratamento numérico e conversão pela equipe B



Fonte: Arquivo da pesquisadora

As figuras 11 e 12 conferem a utilização pelos alunos de dois registros diferentes: o numérico decimal e a língua natural. Duval (2011, p. 38) refere-se “[...] a língua natural sendo o primeiro sistema semiótico”.

Dessa forma, os alunos utilizaram a língua natural com espontaneidade e naturalidade. Assim, tivemos a intenção nesta atividade de provocar o uso de duas representações para os Números Decimais. Entretanto, este foi o início, pois sabemos da necessidade do uso de mais registros para compor um repertório maior de representações na prática escolar dos alunos. Duval (2011, p. 68) afirma que “A diversidade de tipos de representação semiótica e o modo de funcionamento próprio de cada tipo são as questões cruciais para a análise cognitiva da atividade matemática e, portanto, dos processos de compreensão e incompreensão na aprendizagem”.

Duval (2011) nos auxilia na interpretação dos dados quanto ao uso da língua natural quando esclarece que:

A originalidade e a força das línguas naturais se devem ao fato de que elas cumprem, ao mesmo tempo, funções de comunicação e todas as funções cognitivas. Ora, conforme privilegiamos as funções de comunicação ou, ao contrário, as funções cognitivas, ora consideramos as línguas como códigos ou, ao contrário, como registros (DUVAL, 2011, p. 74).

Assim sendo, os alunos fizeram uso da língua natural na intenção de comunicar o resultado encontrado, advindo de uma função cognitiva. A linguagem natural cumpre as demais funções discursivas, como referencial e reflexividade, por exemplo.

Uma das equipes, que tinha dois alunos com grande diferença de tamanhos, fez o algoritmo, porém, por descuido, errou. A diferença era de 19 centímetros e no cálculo deu

nove centímetros. Foi então que A₁₁ se referiu ao aluno mais baixo e ao aluno mais alto, dizendo:

“ Levanta vocês dois aí , ficam de pé. ”

A₁₁ pediu para o mais baixo ficar de pé, de costas para a parede e fez uma marcação da altura dele com um giz. Fez a mesma coisa com o aluno mais alto. Depois disso, disse:

“Estão vendo a diferença de altura? Não é nove centímetros e sim mais. Na régua está dando quase 20 cm. Vamos fazer as contas de novo e tem que dar perto de vinte. Aqui na régua pode dar alguma diferença por causa do cabelo deles”.

Depois de conferir, conseguiram encontrar o erro no algoritmo.

Outra equipe quis conferir também, e, colocando o aluno mais alto de costas com o aluno mais baixo, constatou a diferença com a régua, mas já havia feito o algoritmo.

Uma terceira equipe, depois de resolver pelo algoritmo, contou nos dedos a diferença, já que ela era pequena, pois os alunos apresentavam quase o mesmo tamanho e escreveu essa diferença em centímetros.

A quarta equipe, segura de que seu algoritmo correto e confirmado pela calculadora, não precisou de outras confirmações para o resultado.

Dessa forma, todas as equipes com suas conjecturas, organizaram o pensamento e conseguiram encontrar uma resposta coerente para a diferença entre o aluno mais alto e mais baixo. Nesta busca pela resposta foram levados a pensar em outras representações além do registro numérico decimal.

A₁₁ demonstrou que a sequência de atividades estava contribuindo quando disse para sua equipe:

“Vocês perceberam que nós repetimos a resposta aqui na folha. Escrevemos a conta e depois escrevemos o resultado, a resposta do que estava sendo perguntado. Eu acho que as duas coisas estão certas e pode ter ainda outros jeitos diferentes de dar essa resposta”.

A₁₁ estava se referindo aos diferentes registros de representação semiótica. Ela deixou os demais colegas pensativos e querendo saber esses outros “jeitos” (diferentes registros) de representar uma mesma “coisa” (objeto matemático).

O fato da atividade instigar a curiosidade dos alunos pela diversidade de representações, mesmo que a princípio identificaram apenas duas delas (registro numérico

decimal e registro em língua natural), já norteava as demais atividades para que a familiaridade com os registros fossem gradativamente sendo potencializados.

Observa-se no item a da atividade 1 que os alunos realizaram um tratamento.

Conforme Duval (2011, p. 16), chama-se de tratamento as “[...] transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números”.

Nota-se neste primeiro contato com a atividade que os alunos realizaram um tratamento dentro de um único registro, entretanto conseguiram sair desse registro numérico decimal e ir para outro registro na língua natural.

Acreditamos que o uso modesto dos registros, deu-se pela falta de familiaridade com as diferentes representações. Contudo, por meio desta situação proposta, em que tiveram a oportunidade de mudar do registro numérico decimal para o registro na língua natural, eles demonstraram saber realizar os cálculos na representação numérica decimal (operaram com dois números no mesmo registro – neste caso no registro numérico decimal), mas também indicaram outro registro: a língua natural.

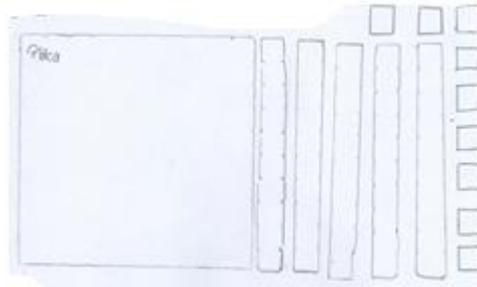
Ainda é muito cedo para falarmos em conversão nesta atividade, mas ela direcionou os alunos a pensarem em mais de uma forma de registrar o Número Decimal. Fato que despertou curiosidade para conhecer outros registros para um mesmo número. Essa experimentação inicial permitiu planejamento das próximas ações da pesquisadora e seguiu subsidiando a ampliação do uso dos diferentes registros pelos alunos.

Para resolver o item b, os participantes da pesquisa precisaram da intervenção pensada nas Análises a Priori, que instruíam o uso do material dourado e sua relação com os números decimais, pois não tinham conhecimento da representação de decimais no material dourado. Rapidamente entenderam essa relação entre os registros numéricos fracionários e as peças do material dourado. Após esta intervenção, conseguiram relacionar o registro figural advindo dos desenhos representativos das ações com o material manipulável, a altura deles e o registro numérico decimal (da altura de cada um).

Duval (1994, p.123) afirma a existência de quatro possíveis tipos de apreensões. Para este caso da representação figural a partir de manipulação de material, destaca-se a apreensão perceptiva que gradativamente vai evoluindo para a apreensão operatória. A reconfiguração, como especificidade da apreensão operatória é percebida nesta atividade, pois os alunos montam e desmontam as peças, reconfigurando as partes para auxiliar na abstração. Para demonstrar o entendimento, foi solicitado os registros figurais, referentes aos registros

numéricos decimais das alturas deles. Uma aluna, a exemplo dos outros, que fizeram a mesma representação, cada qual com a sua altura, colocou as peças do material dourado e fez o contorno em tamanho real. A maioria dos alunos procedeu da mesma forma. Para representar a altura de um metro e cinquenta e nove centímetros, a Aluna 11 fez o seguinte desenho:

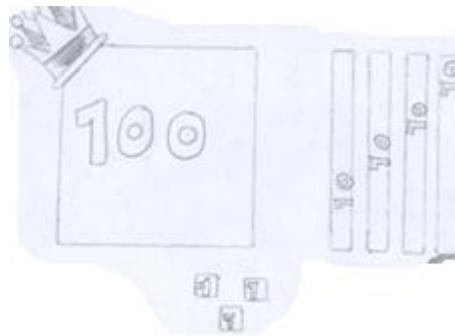
Figura 13: Registro figural da altura de A_{11}



Fonte :Arquivo da pesquisadora

Outro aluno registro sua altura de um metro e quarenta e três centímetros:

Figura 14: Registro figural da altura de A_2



Fonte :Arquivo da pesquisadora

Os alunos conseguiram manusear as peças do material dourado e fazer o respectivo registro figural da representação numérica decimal referente à altura. Também realizaram a operação inversa, pois neste item da atividade conseguiram fazer o registro figural das alturas, mudando o registro de partida, de numérico decimal para um registro figural.

O inverso também aconteceu, pois eles registraram a altura com o material dourado também. Duval (2011) explica a viabilidade das representações:

Em matemática uma representação só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação. Isso vale evidentemente para as figuras [...] Elas

apresentam a particularidade de poder ser realizadas por manipulações sobre objetos materiais (DUVAL, 2011, p.88).

Pelas gravações de áudio e vídeo, conseguiu-se perceber que os alunos registraram outros números decimais, como a altura de outros colegas e também faziam representações de outros números decimais no registro figural com uso do material dourado. Além disso, pediam que os outros colegas da equipe adivinhassem que registro numérico decimal era aquele formado a partir das peças do material dourado. Duval (2011) afirma que:

Em matemática uma representação só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação[...]. Isso vale evidentemente para as figuras. Elas dão lugar a dois tipos de operações figurais 2D/2D (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão. [...] Elas apresentam a particularidade de poder ser realizadas por manipulações sobre objetos materiais. E existem aquelas que dependem das operações de desconstrução dimensional.

As intervenções da pesquisadora aconteceram em todas as equipes, para verificar se mudando o registro de partida eles continuavam dando a resposta correta.

A pesquisadora perguntou:

“ Qual é o registro numérico decimal desse registro figural? ”

“ Qual é o registro figural desse registro numérico decimal? ”

Com o intuito de garantir a segurança do uso desses registros e a possibilidade de mudança da ordem deles, sem interferência no entendimento, é que propusemos essa ação. Constatamos que usavam os registros corretamente, mesmo mudando o registro de partida e de chegada de numérico decimal para figural ou o inverso. Conforme Duval (2011) podemos entender a importância desta inversão entre os registros:

A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha. Em outras palavras, para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único.

Com a continuidade da atividade 1, percebe-se que os alunos evoluíram na familiaridade com os registros e a inversão entre eles. No item a tiveram contato com o registro numérico decimal e com o registro em língua natural e no item b, além dos registros

já utilizados, referiram-se também ao registro figural. Também faziam relações entre os registros, que possivelmente, mais tarde, poderiam evoluir em conversões.

O diálogo entre dois alunos neste momento de mudança de registro, do numérico decimal para o figural e vice-versa, confere o uso dessa diversidade de registros pelos alunos.

“ Olha o que eu montei com o material dourado... fala aí que número decimal é esse.”

Olhando para o registro figural correspondente a 1,20 respondeu:

“ Um inteiro e vinte centésimos.”

“Agora tenta adivinhar esse aqui. Fiz bem difícil.”

Fez a pergunta fazendo o registro figural de 1,05

E o colega respondeu:

“ Um vírgula zero cinco.”

“Errou”

Respondeu o terceiro integrante da equipe:

“Errou sim, porque o certo é falar um inteiro e cinco centésimos.”

“Agora vou fazer o contrário... vou falar um número decimal e você faz o desenho”.

O aluno em língua natural disse quatro centésimos e o outro desenhou quatro cubinhos do material dourado como resposta.

Com base nas falas dos alunos, obtidas pelos registros de áudio e vídeo já mencionados, consegue-se avaliar os primeiros itens da primeira atividade como situações que estariam favorecendo a compreensão dos Números Decimais, no sentido de motivar o uso dos diferentes registros de representação, à luz da teoria de Duval. Nesse sentido, a experimentação revelou necessidade de incluir ainda mais registros para garantir a mobilização da aprendizagem dos Números Decimais.

Na busca de resultados, houve necessidade de que os alunos, além das argumentações, registrassem as diferentes representações, para uma análise mais detalhada das dificuldades que ainda persistiam e em qual registro esta dúvida era mais frequente. Dessa forma, entender entraves que estivessem interferindo no acesso ao objeto matemático.

Flores (2006), se referindo a Duval, afirma:

Uma vez mais, ele nos mostrou a especificidade do pensamento em matemática e, portanto, da aprendizagem em matemática, ou seja, as representações semióticas como acesso aos objetos matemáticos. Assim, descrever, raciocinar e visualizar em matemática são atividades que estão intrinsecamente ligadas à utilização de registros de representação semiótica (FLORES, 2006, p. 3).

Tal aprendizagem matemática relacionada aos registros dos alunos confere que há indícios de que eles manifestaram ideias de transformações entre três diferentes registros de representação: numérico decimal, numérico fracionário e língua natural. Duval (2011, p. 52), nos esclarece que “A característica fundamental dos encaminhamentos matemáticos consistem em TRANSFORMAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS, dadas ou obtidas no contexto de um problema proposto, em outras representações semióticas”.

Nesse sentido a equipe A demonstrou conhecimento quando tentou realizar a atividade mudando os registros nas representações: fracionária, decimal e língua natural, conforme exemplifica a figura 15.

Figura 15: Registro numérico decimal, fracionário e em língua natural da equipe A

| Altura | Fração Decimal | Língua Natural |
|--------|-------------------|----------------------------|
| 1,53 | $\frac{153}{100}$ | 1 inteiro e 53 centésimos |
| 7,43 | $\frac{743}{100}$ | 7 inteiros e 43 centésimos |
| 1,49 | $\frac{149}{100}$ | 1 inteiro e 49 centésimos |
| 1,62 | $\frac{162}{100}$ | 1 inteiro e 62 centésimos |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

A equipe B conseguiu perceber a existência de registros diferentes, no entanto, ainda apresentavam erros de ordem conceitual (utilizaram ponto na representação fracionária, não expressaram na língua natural a representação numérica decimal) da especificidade de cada um dos registros.

Figura 16: Registro numérico decimal, fracionário e em língua natural da equipe B

| Altura | Fração Decimal | Língua Natural |
|--------|--------------------|-----------------------------------|
| 1,52 | $\frac{1,52}{100}$ | Um centezimo e cinquenta e dois |
| 1,54 | $\frac{1,54}{100}$ | Um centezimo e cinquenta e quatro |
| 1,62 | $\frac{1,62}{100}$ | Um deztezesimo e sessenta e dois |
| 1,47 | $\frac{1,47}{100}$ | Um centezimo e quarenta e sete |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os dados coletados dos alunos das equipes A e B demonstraram falta de apreensão conceitual dos Números Decimais, conforme exposto anteriormente. No entanto, observam-se indícios de mudança de registros e da percepção deles. Tais registros podem ser potencializados com outras atividades, priorizando, além da diversidade de registros, a sistematização dos conceitos. É válido ressaltar que o registro figural, com ação do material dourado, foi importante para representar o número decimal na forma fracionária.

Não foram apresentados neste texto os resultados das equipes C e D, pois não houveram registros diferentes dos apontados pelas equipes A e B.

Observa-se a partir dos resultados obtidos com a aplicação da atividade 1, que ela favoreceu a compreensão dos alunos, pelo menos em relação aos objetos nela trabalhados, para a mudança entre as representações decimal, fracionária e língua natural e contribuiu com a familiaridade dos registros.

As atividades elaboradas corroboraram a necessidade do uso de uma diversidade de registros e contemplaram um objetivo dos PCN para o ensino de Números Racionais para que o mesmo fosse alcançado pelos alunos. Este fato é relacionado nos PCN como diferentes escritas numéricas, conforme demonstra um objetivo do conteúdo estruturante números e álgebra:

Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal. (BRASIL,1997, p.56)

O início da atividade 1 inseriu os alunos num contexto do cotidiano em que se usa os Números Decimais, despertou o interesse deles e apontou conhecimentos já existentes acerca desses números.

Os itens a, b e c da atividade 1 ao oportunizarem as articulações dos sentidos numérico fracionário, numérico decimal, língua natural e representação figural, atuaram como instrumentos otimizadores da aprendizagem.

Lorenzato (2006, p. 72) defende a ideia de que “a importância da experimentação reside no poder que ela tem de conseguir provocar raciocínio, reflexão, construção de conhecimento”. As representações semióticas propostas na atividade 1, mobilizaram entendimento que o mesmo objeto matemático estava representado de maneiras diferentes.

O fato de nem todos demonstrarem habilidade com as representações, justifica-se por ser a primeira atividade da sequência e também pela falta de um trabalho rotineiro em sala de aula, que valorize as representações semióticas.

Esse entendimento se dará pelo estímulo frequente com as diferentes representações, fato que permite reflexão, pois com apenas uma atividade, identificou-se evolução no pensamento relacionado aos Números Decimais. Confirmamos a necessidade de mais atividades envolvendo as representações para superação das dificuldades apresentadas. À respeito disso, Espinosa (2009, p.55) afirma que “Uma nova abordagem se faz necessária para que os alunos não decorem apenas regras sem conseguir fazer relações, comparações e representações”.

A sequência de atividades pôde ser melhorada com a aplicação da engenharia didática, no sentido de nortear as próximas ações, inclusive na adequação das futuras atividades. Com base na realização da primeira atividade, ficou evidente a necessidade de contemplar mais atividades que pudessem verificar inversão entre os registros de partida e chegada, no sentido de verificar aprendizagem.

A convicção dos sujeitos da pesquisa na mudança desses registros de partida e chegada apontam para a apreensão conceitual do objeto matemático, necessária para a resolução de problemas nos mais diversos contextos.

De acordo com as produções dos alunos e suas falas durante as atividades, frente ao quadro teórico (*noésis*, *semiósis*, conversão, tratamento, forma decimal, forma fracionária, registro do número decimal em língua natural e registro figural) tendo realizado as análises,

em que os alunos são identificados por códigos (A_1, A_2, \dots) organizamos os resultados obtidos com esta primeira atividade em um quadro em que se visualize, de maneira mais abrangente a aprendizagem dos alunos.

Quadro 3: Visão Geral da aprendizagem dos alunos com relação aos tratamentos realizados na atividade 1

| | Tratamentos realizados |
|----------------------------------|--|
| Registro numérico decimal | $A_1, A_3, A_4, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{20}$ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Quadro 4: Visão geral das transformações entre registros realizadas pelos alunos na atividade 1

| Transformações entre Registros | Alunos que conseguiram realizar as transformações |
|---|--|
| Registro numérico decimal para língua natural | $A_1, A_3, A_4, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{20}$ |
| Registro numérico decimal para registro figural | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{20}$ |
| Registro numérico decimal para registro numérico fracionário | $A_1, A_4, A_{11}, A_{13}, A_{16}, A_{20}$ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

O quadro acima com os códigos, referentes a cada aluno participante da pesquisa, possibilita observação dos diversos momentos em que a teoria contempla os processos de ensino e aprendizagem e os diversos momentos em que os diferentes registros dos Números Decimais são utilizados. Nota-se nesta primeira atividade a falta de familiaridade com os diferentes registros, pois dos 18 alunos que estavam presentes, apenas quatro ($A_1, A_{11}, A_{13}, A_{16}$), demonstraram habilidade em lidar com todos eles. A maioria dos participantes da pesquisa, ora usavam um registro, ora usavam outro, contudo não conseguiam usar mais do que um registro para representar o mesmo número decimal.

É relevante chamar a atenção de um dado do quadro acima que mostra que a maioria dos alunos conseguiu transformar o registro numérico decimal para o registro figural e vice-versa. Verificamos a partir desses dados que o item b da atividade 1 foi o que mais contribuiu para as conversões.

Os resultados desta atividade mostram a necessidade de intensificar o contato dos alunos com os registros, bem como a transformação entre eles, supondo a contribuição da sequência de atividades para as conversões, conforme estudos de Duval.

5.2 Atividade 2

Objetivo da Atividade:

- Identificar um número decimal por meio de diferentes representações.
- Favorecer as transformações entre diferentes registros de representação.

Registros de Representação explorados na atividade:

- Registro em língua natural;
- Registro numérico na forma de representação decimal;
- Registro numérico na forma de fração;
- Registro figural.

Noções Matemáticas Exploradas:

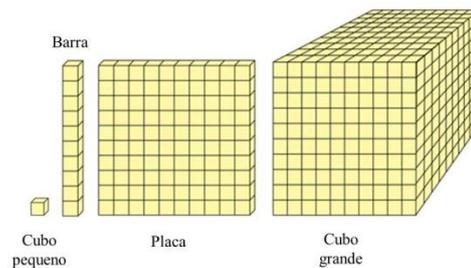
- Transformação de fração decimal em número decimal;
- Transformação de número decimal em fração decimal;
- Transformação figural para fração decimal;
- Transformação figural para registro numérico decimal.

Tempo de realização da atividade: 2 horas aula.

Atividade 2

Maria Montessori foi uma médica e educadora italiana, que desenvolveu alguns materiais para ajudar crianças e jovens entenderem alguns conteúdos matemáticos. Dentre esses materiais está o material dourado.

Figura 17: Ilustração 1 da atividade 2- Material Dourado



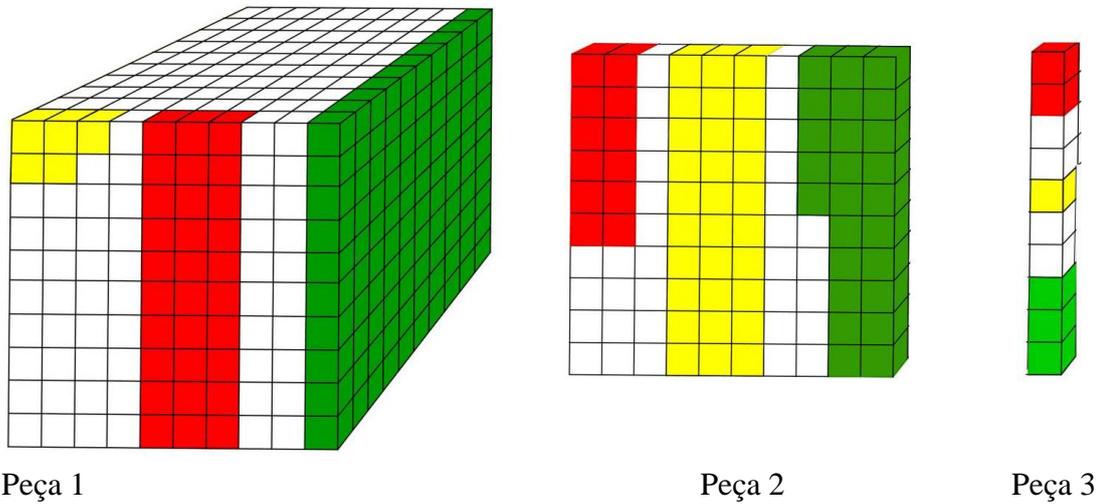
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Manuseiem o material dourado, discutam no grupo e registrem as conclusões para as seguintes questões:

- Qual peça representa $\frac{1}{10}$ do cubo grande?
- Qual peça representa $\frac{1}{100}$ do cubo grande?
- Qual peça representa $\frac{1}{1000}$ do cubo grande?
- Observem as pinturas, manuseiem atentamente as peças do material dourado e escrevam na forma de fração e na representação decimal, os números que correspondem a cada cor⁵.

⁵Adaptada de: SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber Matemática**. São Paulo: FTD, 2012, p. 210 e 211

Figura 18: Ilustração 2 da atividade 2 – material dourado colorido



Fonte : Arquivo da pesquisadora

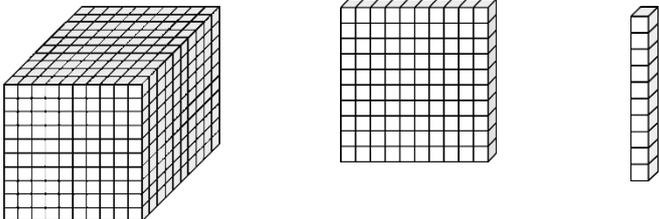
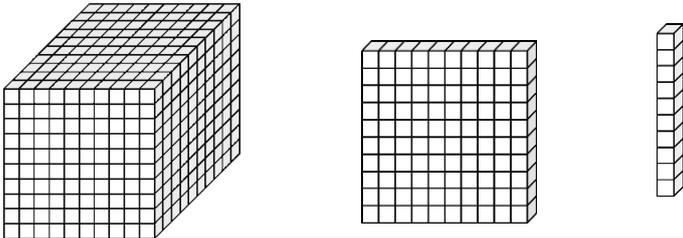
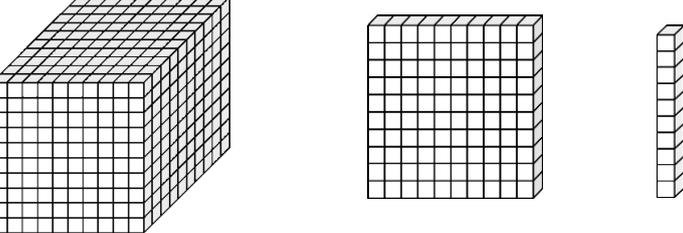
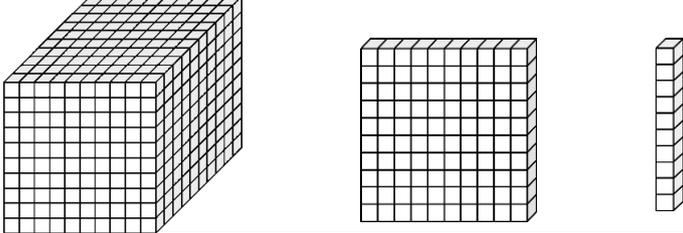
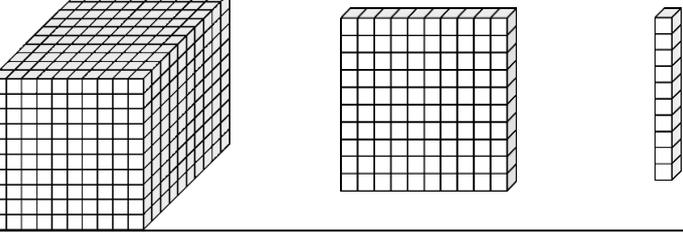
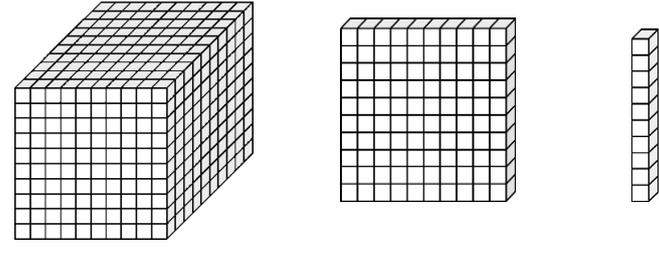
Figura 19: Representação fracionária e decimal do desenho representativo da ação com o material manipulável

| Peça | Amarelo | | Vermelho | | Verde | | Branco | |
|--------|------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | Rep. Fracionária | Rep. Decimal |
| Peça 1 | | | | | | | | |
| Peça 2 | | | | | | | | |
| Peça 3 | | | | | | | | |

Fonte : Arquivo da pesquisadora

- e) Usando lápis de cor, pintem no material dourado as partes correspondes aos números decimais e indiquem a fração que representa cada parte pintada.

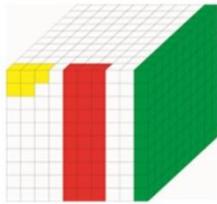
Figura 20: Registro numérico decimal, figural e registro numérico fracionário.

| Número Decimal | Peça do material dourado que correspondem ao número decimal | Representação Fracionária |
|----------------|--|---------------------------|
| 0,5 |  | |
| 0,18 |  | |
| 0,023 |  | |
| 0,1 |  | |
| 0,10 |  | |
| 0,100 |  | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

- f) Escreva, para cada cor, as representações das peças, agora usando língua natural (língua portuguesa) como representação:

Figura 21: Transformação Representação figural para a língua natural referente a milésimos



Fonte : Arquivo da pesquisadora

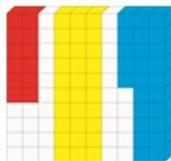
Amarelo: _____

Vermelho: _____

Verde: _____

Branco: _____

Figura 22: Transformação da representação figural para a língua natural referente a centésimos



Fonte : Arquivo da pesquisadora

Amarelo: _____

Vermelho: _____

Verde: _____

Branco: _____

Figura 23: Transformação da representação figural para a língua natural referente a décimos



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Amarelo: _____

Vermelho: _____

Verde: _____

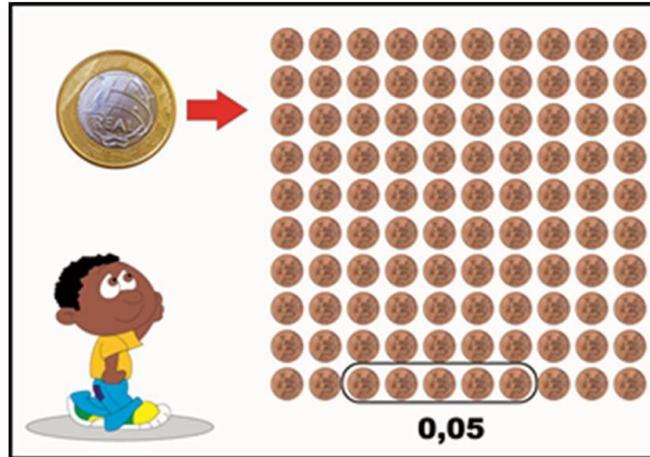
Branco: _____

Análise *a priori* da atividade 2

O material dourado geralmente é conhecido pelos alunos no trabalho com o Sistema de Numeração Decimal nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os alunos investigados deveriam apresentar conhecimento acerca dos agrupamentos de 10 em 10 de cada peça. Geralmente conhecem o cubo grande como unidade de milhar, a placa como centena, a barra como dezena e o cubo pequeno, como unidade simples. Usando este mesmo material para o trabalho com Números Racionais, nas representações fracionária e decimal, supomos que os alunos teriam que pensar um pouco mais e visualizariam as frações decimais nas peças do material dourado, já que eles não teriam costume de manuseá-los no estudo das frações. No entanto, com discussões, argumentações, troca de ideias e conseqüentemente conjecturas, eles chegariam aos resultados corretos nos itens a, b e c. Dessa forma a hipótese é que responderiam:

- a) Placa
- b) Barra
- c) Cubo pequeno
- d) Neste item, supomos que os alunos apresentariam maior dificuldade pela falta de costume em visualizar o mesmo significado quantitativo para o registro numérico na representação decimal, bem como a relação de igualdade para o registro de representação na forma fracionária. Também acreditávamos que os alunos teriam mais familiaridade com os números decimais, ao trabalharem com o sistema monetário. Foi prevista para este item, uma intervenção da professora/pesquisadora, no sentido de orientá-los nas diferentes representações de um mesmo número. Para isso, depois de ser dado um tempo para investigações, caso não houvesse evoluções no pensamento sobre a questão, planejar-se-ia fazer a representação figural. Para essa contextualização, seriam usadas cem moedas de um centavo e uma moeda de um real (todas com imã atrás), fixadas em uma placa de aço, como mostra a figura a seguir:

Figura 24: Representação de cinco centésimos com moedas



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Sendo assim, cinco centavos seria usado em língua natural para nos referirmos a dinheiro e cinco centésimos para nos referirmos ao registro numérico decimal. Dessa forma, 0,05 na forma de registro numérico decimal e o registro numérico fracionário $\frac{5}{100}$, também chamado de fração decimal, representariam a mesma quantidade.

A intenção com esta explicação era deixar claro que usaríamos centavos apenas quando nos referíssemos a dinheiro e assim deixaríamos claro o uso do símbolo R\$.

Essa contextualização com as cem moedas de um centavo poderia favorecer a compreensão do que é parte inteira e o que é parte decimal, bem como o conceito de que o valor do número decimal não se alteraria quando se acrescentaria zeros à sua direita.

“Agora imaginem que na placa do material dourado tem cem moedas de um centavo (cem centésimos) formando uma placa inteira. Com base nesse entendimento dos centavos e da escrita de um mesmo número de várias maneiras diferentes, responda as questões do item d”.

Depois dessa contextualização, acreditávamos que os alunos poderiam ter mais segurança para preencher a tabela, no que diz respeito às peças 1, 2 e 3. Acreditava-se que eles deixariam as peças 1 e 3 por último, pois se diferenciariam da questão envolvendo as cem partes de um real, contudo eles teriam condições de resolver as situações-problema das outras

peças e usariam a notação de 0,10 para dez centavos. Assim, eles poderiam relacionar a barra do material dourado com os dez centavos do sistema monetário e o conceito dos números decimais, que seriam equivalentes às frações decimais. Também seriam subsidiados no entendimento de que uma unidade poderia ser dividida em décimos, centésimos, milésimos. Sendo o primeiro algarismo depois da vírgula chamado de décimo, o segundo chamado de centésimo e o terceiro chamado de milésimo. Dessa forma teriam a oportunidade de refletir sobre a quebra da unidade natural. Assim, acreditamos que a maioria preencheria a tabela da seguinte forma:

Figura 25: Suposições acerca dos registros dos alunos

| Peça | Amarelo | | Vermelho | | Verde | | Branco | |
|--------|------------------|--------------|-------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------------|--------------|
| | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal |
| Peça 1 | $\frac{5}{1000}$ | 0,005 | $\frac{30}{1000}$ | 0,03 | $\frac{100}{1000}$ | 0,1 | $\frac{865}{1000}$ | 0,865 |
| | $\frac{1}{200}$ | | $\frac{3}{100}$ | 0,030 | $\frac{1}{10}$ | 0,100 | | |
| Peça 2 | $\frac{30}{100}$ | 0,30 | $\frac{12}{100}$ | 0,13 | $\frac{25}{100}$ | 0,25 | $\frac{33}{100}$ | 0,33 |
| | $\frac{3}{10}$ | 0,3 | $\frac{6}{50}$ | | $\frac{1}{4}$ | | | |
| Peça 3 | $\frac{1}{10}$ | 0,1 | $\frac{2}{10}$ | 0,2 | $\frac{3}{10}$ | 0,3 | $\frac{4}{10}$ | 0,4 |
| | | 0,10 | $\frac{1}{5}$ | | | | $\frac{2}{5}$ | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

- e) Fundamentado em Duval, acreditávamos que os alunos estariam fazendo uma conversão do registro numérico fracionário e decimal para o registro figural.

Esperávamos que eles conseguissem realizar a mudança de registro. No entanto, não é tão fácil para a criança, fazer este tipo de transformação. Dessa forma, pode ser que alguns tivessem dificuldade e registrassem a fração, colocando no numerador o número com vírgula. Caso isso ocorresse, seriam feitos alguns questionamentos do tipo: Qual tipo de número foi usado para escrever a fração? É possível usar duas representações em um único tipo de número?

Depois de proporcionar mais tempo para a discussão, seria possível institucionalizar o saber, sistematizando alguns conceitos:

“As frações cujos denominadores são potências de base 10 são chamadas de frações decimais. Toda fração decimal pode ser representada por um número decimal e todo número decimal pode ser representado por uma fração decimal”.

A leitura de um número decimal (língua natural) poderia favorecer a compreensão de sua escrita na forma de fração. Assim sendo, com a intenção de favorecer a aprendizagem dos conceitos, faríamos mais uma intervenção, na qual falaríamos em língua natural alguns números decimais e as crianças discutiriam na equipe, escreveriam em fichas a sua representação fracionária e decimal.

Exemplos:

“vinte e oito centésimos” e as crianças mostrariam cartões, escritos por elas próprias em dois registros diferentes:

$$\frac{28}{100} \qquad 0,28$$

“trezentos e cinquenta e sete milésimos”:

$$\frac{357}{1000} \qquad 0,357$$

“nove décimos”:

$$\frac{9}{10} \qquad 0,9$$

“três inteiros e dois milésimos”:

$$3 \frac{2}{1000} \quad 3,002$$

No que diz respeito à pintura nas representações figurais das peças do material dourado, não demonstrariam dificuldade para identificarem a peça correta e consequentemente as partes que as representariam.

A intenção da intervenção prevista nestas Análises *a Priori* seria no sentido de que perceberiam a igualdade entre 0,1; 0,10 e 0,100. Caso isso não ocorresse seriam feitos questionamentos relacionados à existência de relação entre os números e o que se poderia dizer sobre eles. Esta relação seria encaminhada para que encontrassem as frações decimais irredutíveis de cada número decimal (0,1; 0,10 e 0,100) para que percebessem a igualdade. Também seria sugerido pensar no registro figural para confirmar a igualdade entre os Números Decimais.

Posteriormente, as discussões deveriam levar ao entendimento de que “*o valor do número decimal não se altera quando acrescentamos zeros à sua direita*”.

Entretanto prevemos pinturas diferentes para 0,1; 0,10 e 0,100. Algumas crianças poderiam não ter entendido esta propriedade. Fato que instruiria a retomada do assunto nas próximas atividades.

- f) A hipótese era que nesta atividade não escreveriam usando a língua natural do sistema monetário e sim os termos próprios da leitura de números decimais, identificariam, assim, décimos, centésimos e milésimos. Neste item, fariam tentativas de escrita dos números decimais e ainda perceberiam que quando o denominador da fração fosse 100 o número decimal teria duas casas após a vírgula, por isso representado por centésimos e lido como centésimos. Quando uma fração decimal tivesse o dez no denominador, a representação decimal deste número teria apenas uma casa após a vírgula, o que explicaria a leitura décimos. Consequentemente, se uma fração decimal tiver o número mil no denominador, o número decimal correspondente seria lido como milésimos.

Após discussão no grupo, poderiam chegar a um consenso e acreditava-se que todos concluiriam a atividade convencidos da leitura correta de cada parte pintada das peças do material dourado, que corresponde à leitura e escrita de um determinado

número decimal. Pode ser que algumas crianças tentariam provar o contrário, como confundir décimos com centésimos ou com milésimos e vice versa. Mas seriam facilmente convencidos pelos próprios colegas que mostrariam a peça do material dourado e pediriam para que contassem a quantidade de cubinhos, na tentativa de explicar o porquê de décimos, centésimos e milésimos.

Possíveis registros em língua natural:

Peça 1: cinco milésimos, trinta milésimos, cem milésimos, oitocentos e sessenta e cinco milésimos.

Peça 2: doze centésimos, trinta centésimos, vinte e cinco centésimos e trinta e três centésimos.

Peça 3: dois décimos, um décimo, três décimos e quatro décimos.

Acreditávamos que o formato das peças (cubo grande: mil cubinhos, placa: cem cubinhos e barra: dez cubinhos) contribuiria para a leitura correta de cada número decimal e conseqüentemente com a aprendizagem significativa dos números decimais.

- g) Por fim, poderiam escrever que para transformar um número decimal em fração decimal, escreve-se uma fração cujo numerador seria o número decimal sem vírgula e cujo denominador seria o algarismo 1(um) seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado. E para transformar uma fração decimal em número decimal, bastaria escrever o numerador da fração e, em seguida, separar com uma vírgula, a partir da direita, tantas casas decimais quantos fossem os zeros que constariam no denominador. Tentariam utilizar língua natural para tal explicação.

Há necessidade de uma sistematização de conceitos, supondo que eles encontrariam dificuldades, caso o numerador da fração tivesse o número de algarismos menor do que o número de algarismos contidos no denominador. Nesse caso, acrescentar-se-ia à esquerda, tantos zeros quantos fossem necessários para poder se igualar à fração dada.

Para demonstrar entendimento deste conceito, seriam propostos alguns números na representação fracionária e os alunos fariam tentativas de escrita na representação decimal e usariam a língua natural para explicar tal transformação.

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{1000} & & \frac{25}{1000} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0,005 & & 0,025 \end{array}$$

Experimentação da atividade 2

Para realização da atividade 2 os alunos foram divididos em duplas, sendo que puderam escolher seus pares. Distribuímos peças do material dourado em todas as duplas e em seguida, uma atividade para cada dupla. Eles sentiram necessidade de manusear livremente o material dourado. Então foi dado cinco minutos para reconhecimento do material.

Para a atividade 2 nenhum aluno faltou, portanto estiveram na sala os vinte alunos participantes da pesquisa. Demonstraram interesse e responsabilidade na realização da atividade, com exceção do aluno 15 que se mostrava disperso e desatento.

Segundo a pedagoga da escola, o referido aluno é diagnosticado como hiperativo e faz uso de medicamento, porém às vezes a família esquece-se de dar o remédio.

Manusearam o material dourado, sobrepondo as peças para certificarem-se das repostas. Discutiram, conjecturaram e se equiparam de argumentos convincentes, caso alguém da dupla tivesse dúvida. A dupla formada pelo aluno 15 e 19 apresentou problema, pois o aluno 19 se queixava a todo o momento que o aluno 15 não estava colaborando com as decisões.

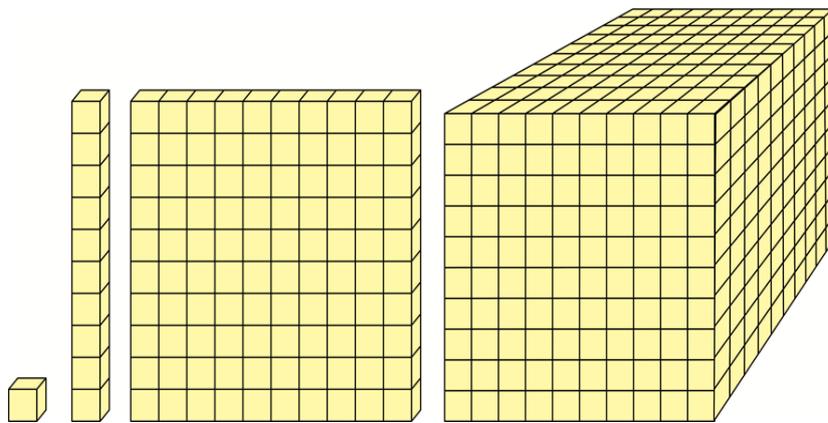
Mas no geral, os alunos mostraram-se organizados, pois não derrubaram peças do material dourado pelo chão e também souberam usar os lápis de cor.

Todas as ações previstas nas análises *a priori* foram executadas. Os alunos lembravam-se de detalhes da primeira atividade para resolver esta segunda e percebia-se maior envolvimento dos alunos com as diferentes representações dos Números Decimais.

Análise a posteriori e validação da atividade 2

Quadro 5: Retomada do enunciado da atividade 2

Atividade 2: Maria Montessori foi uma médica e educadora italiana, que desenvolveu alguns materiais para ajudar crianças e jovens entenderem alguns conteúdos matemáticos. Dentre esses materiais está o material dourado, que é chamado assim porque o primeiro material, idealizado por Maria Montessori, era feito de contas douradas. Hoje é industrializado em madeira, mas com o formato original:

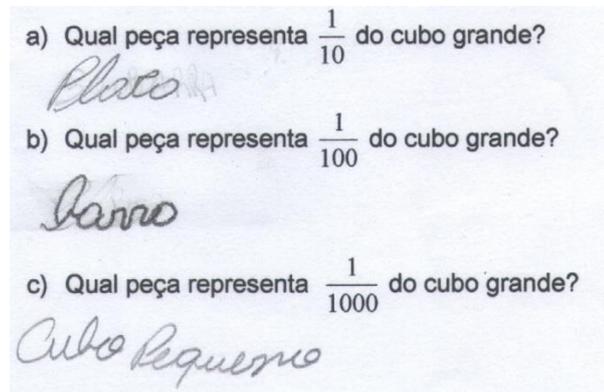


Manuseiem o material dourado, discutam no grupo e registrem as conclusões para as seguintes questões:

- Qual peça representa $\frac{1}{10}$ do cubo grande?
- Qual peça representa $\frac{1}{100}$ do cubo grande?
- Qual peça representa $\frac{1}{1000}$ do cubo grande?

De acordo com o previsto nas Análises a Priori, os alunos não tiveram dificuldade em responder placa, barra e cubo pequeno para os respectivos itens a, b, e c da atividade 2. Acreditamos que o fato de manusearem o material favoreceu maior compreensão para a mudança do registro numérico fracionário para o registro figural.

Figura 26: Registro de A₇ e A₂₀ no item a da atividade 2



Fonte : Arquivo da pesquisadora

O fato de todos terem respondido corretamente as questões permitem a reflexão de que ao relacionarem a fração decimal à peça do material, estavam construindo um conhecimento para posterior transformação dessa ideia em registro figural.

Dessa forma, supomos que identificaram o registro figural aliado ao registro numérico fracionário, como podemos conferir nesta fala de A₁₃ que explicou a resposta dada no item a:

“Claro que é a placa, porque se eu cortar o cubão em dez pedaços (mas é claro que não dá para cortar é só para imaginar na cabeça) iguais e pegar, um desses pedaços, eu terei uma fração onde o dez vai embaixo e o um vai em cima. Esse um que vai em cima quer dizer uma placa”.

A fala de A₁₃ indica conhecimento acerca das frações decimais e a contribuição deste pensamento para o registro figural. Podemos perceber que A₁₃ faz uma operação mental para dar sua resposta.

Duval (2009, p. 46) nos alerta para a diferença entre representações semióticas e as representações mentais. Nosso objetivo é que esta sequência de atividades favoreçam as representações semióticas, no entanto, neste contato inicial é possível perceber que os alunos realizam representações mentais.

[...] a diferença essencial que separa as representações semióticas e as representações mentais: as primeiras apresentam um grau de liberdade, necessário a todo tratamento de informação, que as segundas não apresentam [...] limitam-se a uma só visão, à do que é representado. Essa diferença é essencial em razão da consequência que ela provoca: as representações mentais não se prestam a

tratamentos a não ser por meio da mobilização de um registro semiótico e da prática “mental” desse registro (DUVAL, 2009, p.46).

A₁₇ foi quem respondeu o questionamento do item b sobre o porquê da resposta dada:

“É a barra, essa comprida aqui, porque no cubo grande tem cem dessas aqui. Então a peça que representa um sobre cem é a barra”.

A₁₁ conseguiu identificar a fração decimal, organizando seu pensamento em um registro figural para responder que a resposta correta era a barra. Tal pensamento está sendo estruturado a usar representações. A intenção era despertar a curiosidade pelo registro figural, para que o mesmo pudesse ser mais usado.

Perguntamos para A₁₁ qual foi a resposta dada por ela.

“Na letra c, eu respondi cubinho, que é o cubo pequeno porque no cubo grande tem mil cubinho pequenos. Mas quase errei, porque no começo achei que era a barra, pensando que tinha mil barras no cubo grande. Então contei bem certinho e nem terminei de contar, porque era muito e já descobri que a resposta tinha que ser cubinho”.

A₁₁ também usou registro figural para dar sua resposta. Este contato inicial foi planejado para ampliar o repertório de registros, sendo neste caso, o figural, ferramenta para entender os Números Decimais.

Todas estas afirmações feitas pelos alunos partiram do registro figural com ação do material dourado como ponto de partida e o registro numérico fracionário como ponto de chegada. Foi interessante observar que a atividade previa como ponto de partida o registro numérico fracionário, mas eles faziam a sobreposição do material, montavam e desmontavam, para ter certeza do registro numérico fracionário. A língua natural foi usada para conferir o registro figural, ou seja, explicaram com suas próprias palavras o desenho que tinham realizado, inclusive indicaram parte inteira e parte decimal. Duval (2011, p. 125) explica que “A língua natural é um dos registros utilizados em matemática para formular definições [...] para justificar soluções.

Quadro 6: Retomada do item d da atividade 2

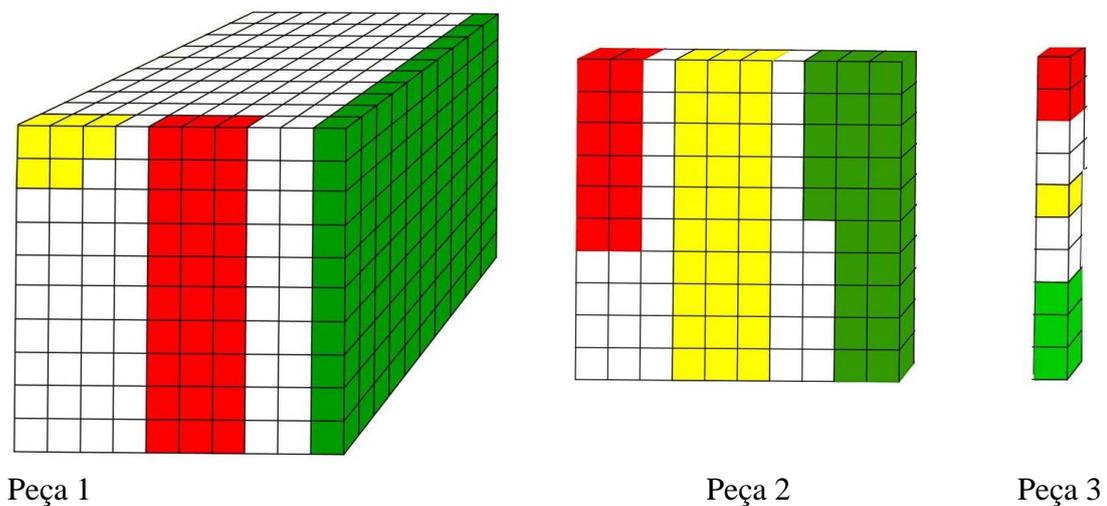
d) Observem e manuseiem atentamente as pinturas realizadas nas peças do material dourado e escrevam na forma de fração e na representação decimal, os números que correspondem a cada cor.

Como previsto, os alunos tiveram um pouco de dificuldade para concluir toda a atividade. Mostravam dúvidas na passagem da representação fracionária para a representação decimal.

Desse modo, a pesquisadora pediu para interromperem a atividade e prestarem atenção no que ia falar. Usando um exemplo do cotidiano, com relação ao sistema monetário, fez-se a exemplificação, conforme exposto nas Análises a Priori da atividade 2. A intenção foi fazê-los perceber a quebra da unidade. Para isso, foi usado um real como sendo a unidade inteira, que foi quebrado em cem partes (cem moedas de um centavo), do qual se tirou a parte que interessava, ou seja, cinco centavos.

Depois deste exemplo com as cem moedas de um centavo, os alunos apresentaram mais segurança na mudança de representação entre os registros fracionário e decimal, sabendo que o registro figural permeava ação cognitiva também. As cores usadas nas peças do material dourado, bem como a quantidade, podem ser conferidas na figura abaixo:

Figura 27:Retomada das cores das peças do material dourado



Fonte :Arquivo da pesquisadora

Pelos resultados obtidos, durante o tempo que manuseavam as peças do material dourado, faziam rabiscos de registros numéricos fracionários e decimais, relacionando estes registros numéricos com as respectivas cores. Tais atitudes de reconhecimento do registro figural indicaram que compreenderam a questão da parte decimal, relacionada a décimos, centésimos e milésimos.

Neste momento, o uso do material dourado como um desenho representativo da ação com o recurso manipulável colaborou com a compreensão deste conceito, subsidiando uma futura conversão.

Dos vinte alunos que estavam participando, percebeu-se maior dificuldade de aprendizagem em cinco deles. E foram esses que apresentaram alguns erros que evidenciaram a falta de segurança para transitar livremente entre os registros propostos na atividade.

A₂₀ disse:

“Eu consigo saber que é trinta milésimos, mas na hora de colocar em número com vírgula, eu me confundo, pois é mais difícil”.

Nota-se com esta dificuldade de A₂₀ que haveria necessidade de mais atividades de transformação do registro numérico fracionário para registro numérico decimal. O contato dos alunos com estas dúvidas referentes á mudança de registros indicou que os referidos registros de partida e chegada deveriam a ser trabalhados novamente nas próximas atividades.

A experimentação apontou familiaridade pela maioria dos alunos quando o registro numérico fracionário estava como registro de partida e o registro figural como chegada. Esta mesma maioria de alunos também não apresentou problemas quando foi proposta a ação inversa de mudança de registro, ou seja, quando o registro de partida era figural e se pretendia chegar ao numérico fracionário. A importância deste fato é apontada por Duval (2011, p. 57) quando ele afirma que “ [...] para poder efetuar essas transformações, é preciso efetuar implícita ou explicitamente uma ida e volta constante entre as transformações de um tipo de representação e a de outro tipo”.

Nesse sentido a atividade contribui para a inclusão de um repertório maior de registros nas ações cognitivas dos alunos, instigou a congruência entre os registros e favoreceu a compreensão dos Números Decimais. Duval (2009, p. 21) “O problema essencial da semiótica é naturalmente aquele da diversidade dos sistemas de representação e aquele dos fenômenos de não-congruência que resultam para a conversão das representações”. Dessa forma, planejamos esta sequência de atividades para que tal problema apontado por Duval fosse melhorado no cotidiano escolar.

Tais ações cognitivas que levaram à coordenação entre os registros puderam ser potencializadas pelos alunos participantes da pesquisa, com exceção de A₁₅ que diferente dos outros, não demonstrou pré-disposição para que a evolução do pensamento acontecesse. Em A₁₅, percebe-se um distúrbio de atenção, pois não terminou a atividade e quando perguntado a ele porque não tinha conseguido concluir, respondeu:

“Eu estou com preguiça, não quero fazer, não prestei atenção e não sei direito onde eu coloco a vírgula”.

Entende-se que A₁₅ não prestou atenção e não participou das intervenções, por isso não tinha compreendido.

Os outros alunos que também manifestaram maiores dificuldades de compreensão (A₅, A₈ e A₁₀) conseguiram terminar a atividade, deixando alguns itens da tabela em branco e errando outros. Tais alunos necessitavam de maior atenção nas próximas atividades.

Figura 28: Registro numérico fracionário e decimal de A₅ e A₈

| Peça | Amarelo | | Vermelho | | Verde | | Branco | |
|--------|-------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|--------------------|--------------|
| | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal |
| Peça 1 | $\frac{50}{1000}$ | 0,005 | $\frac{30}{100}$ | 0,003 | $\frac{1}{100}$ | 0,001 | $\frac{145}{1000}$ | 0,0014 |
| Peça 2 | $\frac{30}{100}$ | 0,003 | $\frac{1}{12}$ | 0,01 | $\frac{1}{25}$ | 0,001 | $\frac{1}{33}$ | 0,031 |
| Peça 3 | $\frac{01}{10}$ | 0,01 | $\frac{02}{100}$ | 0,002 | $\frac{03}{10}$ | 0,003 | $\frac{4}{10}$ | 0,04 |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Nota-se que A₅ e A₈ demonstraram erros na troca dos registros. Por exemplo: fizeram o registro numérico fracionário correto da peça 3 verde, mas não conseguiram visualizar o mesmo número na representação numérica decimal.

A₁₀ também apresentou dificuldades para a mudança de registro numérico fracionário para numérico decimal, mas como fez a sua atividade com A₆, acabou sendo convencido das respostas corretas.

Figura 29: Registro numérico fracionário e decimal de A₆ e A₁₀

| Peça | Amarelo | | Vermelho | | Verde | | Branco | |
|--------|------------------|--------------|-------------------|--------------|--------------------|--------------|-------------------|--------------|
| | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal |
| Peça 1 | $\frac{5}{1000}$ | 0,005 | $\frac{30}{1000}$ | 0,030 | $\frac{100}{1000}$ | 0,100 | $\frac{55}{1000}$ | 0,055 |
| Peça 2 | $\frac{30}{100}$ | 0,300 | $\frac{12}{100}$ | 0,120 | $\frac{25}{100}$ | 0,250 | $\frac{35}{100}$ | 0,350 |
| Peça 3 | $\frac{1}{10}$ | 0,1 | $\frac{2}{10}$ | 0,2 | $\frac{3}{10}$ | 0,3 | $\frac{4}{10}$ | 0,4 |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Quando começaram a preencher a tabela os dois alunos (A₆ e A₁₀) concordaram que para a peça 1 a cor amarela pintada no material dourado estava representando o registro numérico fracionário cinco milésimos, mas ao pensar no registro numérico decimal A₁₀ disse que era para colocar zero vírgula cinco. Prontamente A₆ disse:

“Claro que não! O número decimal é cinco milésimos, por isso tem que ter três casas depois da vírgula. Coloca o cinco primeiro. Depois vai colocando zero para a esquerda até dar três casas, aí coloca a vírgula e mais um zero. Imagina aí na cabeça que são cinco cubinhos pequenos dentro do cubo grande que tem mil”.

Neste caso, podemos perceber que A₆ apresenta conhecimento relacionado aos diferentes registros dos números decimais, pois indicou nessa atividade coordenar três

registros diferentes: numérico fracionário, numérico decimal, figural e ainda se expressa para explicar a relação entre tais registros com a língua natural. Tal fato é referido por Duval (2011, p. 124) que sugere que quando “Pedimos para os alunos produzirem explicações verbais e analisamos suas produções, como se a dupla designação de um mesmo objeto fosse uma operação familiar na prática espontânea da linguagem” estamos favorecendo o funcionamento cognitivo para a conversão.

Ainda não temos dados para afirmar que este aluno realizou conversão entre esses registros. Esse fato será investigado nas próximas atividades, entretanto, nota-se que, de modo geral, os alunos têm evoluído cognitivamente no reconhecimento das representações, o que parece caracterizar uma operação cognitiva de conversão.

A sequência de atividades evidenciou de cada item já trabalhado a pluralidade de registros que se inseriram no repertório individual de cada participante da pesquisa. Estabeleceu-se um ambiente favorável à compreensão dos Números Decimais quando ampliou-se o uso de diferentes registros, dado estímulos da atividade.

Figura 30: Registro numérico fracionário e numérico decimal de A₂ e A₁₁

| Peça | Amarelo | | Vermelho | | Verde | | Branco | |
|--------|------------------|--------------|-------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------------|--------------|
| | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal | Rep. Fracionária | Rep. Decimal |
| Peça 1 | $\frac{3}{1000}$ | 0,003 | $\frac{30}{1000}$ | 0,030 | $\frac{100}{1000}$ | 0,100 | $\frac{865}{1000}$ | 0,865 |
| Peça 2 | $\frac{30}{100}$ | 0,30 | $\frac{12}{100}$ | 0,12 | $\frac{25}{100}$ | 0,25 | $\frac{33}{100}$ | 0,33 |
| Peça 3 | $\frac{1}{10}$ | 0,1 | $\frac{2}{10}$ | 0,2 | $\frac{3}{10}$ | 0,3 | $\frac{4}{10}$ | 0,4 |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Acredita-se que A_2 e A_{11} já apresentavam familiaridade com os registros, pois rapidamente terminaram a atividade, demonstrando segurança nas respostas dadas. Entretanto, Duval (2009) explica:

Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação, quer dizer, dar-lhes acesso ao objeto representado apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo, e que eles possam converter “espontaneamente” de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas. Quando essas duas condições não são preenchidas, a representação e o objeto representado são confundidos, e duas representações diferentes de um mesmo objeto não podem ser reconhecidas como sendo as representações do mesmo objeto (DUVAL, 2009, p. 38).

Pode-se perceber que a atividade 2 oportunizou aos alunos contato com essas duas condições referidas por Duval, pois tiveram contato com a diversidade de registros dos Números Decimais e a transformação entre estes registros que do ponto de vista cognitivo, segundo Duval (2009, p. 82), serve para “[...] formar a representação de um objeto, ou para transformar, a possibilidade de mudar de registro, e então “escolher” aquele que é mais econômico ou potente”.

É oportuno explicar que as atividades registradas pelas outras duplas foram semelhantes às anteriormente apresentadas. Algumas duplas acertaram tudo, conforme os registros de A_2 e A_{11} , confirmando a transformação do registro numérico fracionário para o registro numérico decimal, aparentemente de maneira natural. Outras duplas, duas delas, cometeram equívocos parecidos com os de A_6 em que não fez relação entre a fração decimal e as casas decimais correspondentes a ela.

Algumas intervenções foram propostas a estas equipes que apresentaram dificuldades, no sentido de orientá-las na observação cuidadosa do denominador da fração decimal, a fim de relacionar este denominador com as casas decimais ao escrever o registro numérico decimal.

Ao fim da intervenção A_6 que juntamente com A_{10} tinha escrito 0,012 como registro numérico decimal referente a $12/100$. Ele perguntou se poderia fazer a atividade novamente pois tinha certeza que haviam erros na que entregaram.

“Deixa eu arrumar, me lembro que no doze centésimos nós colocamos zero vírgula zero doze. Escrevemos doze milésimos e a gente precisava escrever doze centésimos”.

A_{10} acrescentou:

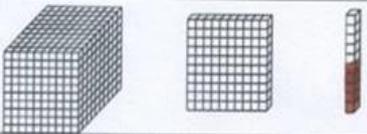
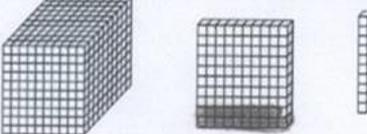
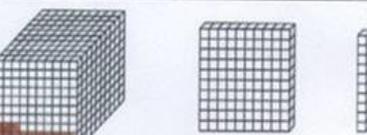
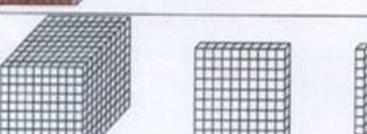
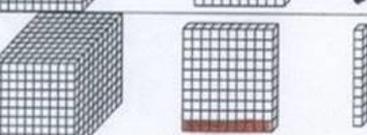
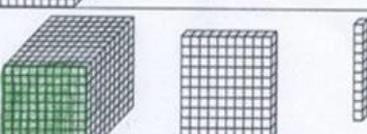
“Nossa como fomos fazer isso. Se a gente tivesse usado a língua natural a gente teria percebido o erro, porque na fração a leitura é doze centésimos e no número com vírgula também é doze centésimos e se é centésimo só pode ter duas casas depois da vírgula ”.

Podemos atestar com as falas dos alunos que neste momento da atividade, eles começaram perceber a importância dos diferentes registros para se referirem ao mesmo objeto matemático, além da necessidade do uso do registro em língua natural.

Quadro 7: Retomada do item e da atividade 2

e) Usando lápis de cor, pintem no material dourado as partes correspondes aos números decimais e indiquem também a fração que representa cada parte pintada.

Figura 31: Transformações de registros de numérico decimal para figural e para numérico fracionário por A₁ e A₉

| Número Decimal | Partes do material dourado que correspondem ao número decimal | Representação Fracionária |
|----------------|---|---------------------------|
| 0,5 |  | $\frac{5}{10}$ |
| 0,18 |  | $\frac{18}{100}$ |
| 0,023 |  | $\frac{23}{1000}$ |
| 0,1 |  | $\frac{1}{10}$ |
| 0,10 |  | $\frac{10}{100}$ |
| 0,100 |  | $\frac{100}{1000}$ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os registros acima foram apresentados por A_1 e A_9 . Após questionamentos feitos pela pesquisadora, quiseram outra folha, pois perceberam erros e quiseram modificar. A orientação dada foi para escreverem no verso da folha uma justificativa para o erro.

As anotações feitas pelos alunos mostraram que colocaram a vírgula no registro numérico fracionário, mas depois lembraram-se que neste tipo de registro não se usa vírgula. Na justificativa deles estava escrito:

“Em fração não se usa vírgula. Somente na forma decimal”.

A partir desta afirmação de A_1 e A_9 percebeu-se o acesso deles aos aspectos conceituais do objeto matemático em estudo. Este acesso ainda estava limitado, pois não se teve justificativa para o não reconhecimento de 0,1; 0,100 e 0,1000 como quantidades iguais. Tal fato, mesmo acontecendo na minoria das equipes, em duas delas, precisava ser abordado novamente. No momento, aconteceram intervenções individuais com questionamentos pontuais sobre os zeros que estavam acrescentados a direita, que oportunizou a reflexão e superação da dificuldade sobre a igualdade de 0,1; 0,100 e 0,1000 e a mobilização da aprendizagem acerca dos zeros acrescentados à direita dos registros numéricos decimais. Essa intervenção foi positiva e ação ganhou credibilidade quando A_9 disse:

“Posso acrescentar mil zeros depois do um que continua sendo um décimo. Isso é muito legal! Não vou errar mais isso.”

Algumas crianças, precisamente A_5 , A_{10} e A_{15} (já referidas com dificuldades de aprendizagem), também colocaram no numerador da fração o número com a vírgula. Isso demonstra a dificuldade em diferenciar um registro do outro, mesmo sendo ambos numéricos.

Na tentativa de elucidar ainda mais os conceitos, perguntou-se para A_5 :

“Qual o tipo de registro de número usado para escrever uma fração?”

A_5 respondeu, olhando para sua atividade:

“Número com vírgula em cima e número sem vírgula embaixo”.

E novamente perguntou-se:

“Sempre que vocês escrevem frações vocês usam a vírgula? É possível usar duas representações em um único tipo de número”

E sem ser direcionada à responder, A₁₂ de outra dupla, disse:

“Não! Ou é número com vírgula ou é número sem vírgula. Não pode misturar”.

E A₁ ansiosamente quis dizer:

“Se vamos passar do número com vírgula para a fração, então o número de cima e o número de baixo da fração não pode ter vírgula, se não, não passamos, ficamos no número com vírgula”.

Então A₁₀ que havia sido questionado no início desta conversa disse:

“Eu nunca usei vírgula nas frações, mas agora usei. Acho que confundi, porque nunca tinha pensado em olhar para um números e enxergar nele outros jeitos de escrever”.

O diálogo acima, entre a pesquisadora e os alunos participantes da pesquisa, conferem uma familiaridade maior com os registros de representação dos Números Decimais do que quando começou esta sequência de atividades. Quando A₁ diz que se a vírgula continuar no registro numérico a transformação não pode ser validada, demonstra conhecimento acerca das transformações de registros de representação.

A atividade contribui com essas transformações e prevê a partir destas discussões possíveis conversões. Duval (2009, p. 59) afirma que “A conversão é então uma **transformação externa em relação ao registro da representação de partida** (grifo do autor)”.

Para garantir a naturalidade dessas transformações entre registros de representação dos Números Decimais, propondo a inversão entre os registros de partida e de chegada, a pesquisadora propôs uma dinâmica onde falou em língua natural um número no registro numérico fracionário e os alunos escreveram em cartões, previamente preparados, a representação em registro numérico decimal.

No momento em que as crianças levantaram os cartões, a pesquisadora conseguiu observar que as dificuldades haviam sido superadas e a naturalidade nesta transformação se tornou mais habitual do que anteriormente.

Na continuidade da atividade tiveram que mobilizar conhecimentos acerca do registro em língua natural e todos conseguiram expressar tal registro sem apresentar dificuldade.

Foi interessante quando A₂ disse para o amigo que estava ao seu lado:

“Essa atividade é fácil demais, pois as peças do material dourado já mostram se tem que escrever décimo, centésimo ou milésimo. Quem errar essa não presta atenção mesmo!”

O relato de A₂ confere sua familiaridade com o registro figural e a naturalidade para transformar o registro figural em registro numérico fracionário. Houve preocupação da pesquisadora em inverter os registros de partida e de chegada, em comparação com as atividades anteriores, para conseguir evidenciar aprendizagem dos Números Decimais pelos alunos.

A₁₁ ouviu a conversa com A₂ e complementou:

“Acho fácil este jeito que essa professora ensina, pois reprovei no ano passado e já tinha visto isso, mas não conseguia entender. Com esse material fica moleza, porque é só olhar na barra e falar décimos, na placa e falar centésimos e no cubo grande e falar milésimos. E mesmo que a gente não tenha esse material na mão, podemos só pensar nele”.

A fala de A₁₁ mostrou sua facilidade em ter o registro figural como ponto de partida e a facilidade de relacionar tal registro com outros, como por exemplo, o numérico fracionário e o numérico decimal. Para A₁₁ representar uma fração decimal por outros registros não era mais um problema.

A₁₉ acrescentou o que A₁₁ tinha dito:

“Mas não é sempre que vocês vão ter o material dourado nas mãos, daí é só lembrar dele na hora de falar se é décimo é a barra. Se é centésimo é a placa e se é milésimo é o cubo grande. Desse jeito não dá para confundir”.

Essa discussão indica a preferência dos alunos pelo registro figural e a necessidade de tê-lo como registro de partida. Essa preferência estimulou o uso de outros registros de partida nas próximas atividades, certificando que já tinham condições de usar várias representações em uma mesma atividade.

A₁₉ se referiu a vários registros e propôs uma associação entre o registro figural do material manipulável, o registro em língua natural e o registro numérico. Lembrou os demais alunos que essa relação entre os três registros foi e sempre seria possível. Ela certamente pensou numa espécie de visualização. Duval (2011) explica:

O que importa primeiro nas representações semióticas é a potencialidade intrínseca de serem facilmente transformadas em outras representações semióticas. Isso porque a potência do cálculo em desenvolvimento e o controle dos raciocínios ou ainda a inventividade da visualização dependem dessa potencialidade dinâmica das representações semióticas e não dos objetos representados (DUVAL, 2011, p. 40).

Essa dinâmica das representações pode ser conferida na atividade realizada por A₆ e A₁₄ que demonstraram não confundir as representações com o objeto representado. Conseguiram identificar diferentes representações semióticas para os Números Decimais.

Figura 32: Transformações de registros de numérico decimal para figural e para numérico fracionário por A₆ e A₁₄

| Número Decimal | Partes do material dourado que correspondem ao número decimal | | | Representação Fracionária |
|----------------|---|--|--|---------------------------|
| 0,5 | | | | $\frac{5}{10}$ |
| 0,18 | | | | $\frac{18}{100}$ |
| 0,023 | | | | $\frac{23}{1.000}$ |
| 0,1 | | | | $\frac{1}{10}$ |
| 0,10 | | | | $\frac{10}{100}$ |
| 0,100 | | | | $\frac{100}{1000}$ |

OS TRÊS ÚLTIMOS SÃO IGUAIS.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

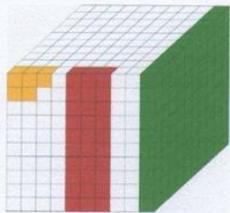
Os alunos da figura 32 tentaram explicar da melhor forma possível o seu entendimento. A imagem demonstra entendimento e familiaridade com os diferentes registros.

A atividade, portanto, despertou algumas capacidades essenciais para apreensão em matemática, permitindo aumentar o repertório de registros, na intenção de favorecer as conversões.

O item f da atividade 2 foi compreendido por todos alunos, que não apresentaram erros consideráveis que pudessem desmerecer este item da sequência de atividades. Podemos afirmar que este contato dos alunos com os registros de representação semiótica, bem como as tentativas de conversões, favoreceram a apreensão conceitual dos Números Decimais. Puderam registrar suas conclusões fazendo uso da língua natural como exemplifica a figura 33. A única do item, dado a facilidade com que lidaram com a atividade, que não mostrou erros, a não ser de ordem ortográfica, que não interessa para nossa investigação.

Figura 33: Transformação do registro figural para língua natural por A₁₇ e A₁₉

f) Escreva, para cada cor, as representações das peças, agora usando língua natural (língua portuguesa) como representação.

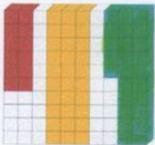


Amarelo: cinco milésimos

Vermelho: trinta milésimos

Verde: cem milésimos

Branco: cento e trinta milésimos



Amarelo: trinta centésimos

Vermelho: dezoito centésimos

Verde: um e cinco centésimos

Branco: um e seis centésimos



Amarelo: dois décimos

Vermelho: dois décimos

Verde: três décimos

Branco: quatro décimos

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os alunos realizaram a atividade com naturalidade e segurança, foram rápidos para dar as respostas e entregar a atividade. Demonstraram facilidade em lidar com estes dois registros: registro figural e registro em língua natural. É possível que nessa familiaridade, realizaram transformações que estão próximas de conversões.

A ênfase dada ao registro em língua natural é entendida por Duval como uma organização semiótica por excelência.

A língua natural constitui um registro a parte. Não somente em razão de sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela oferece, mas também em razão de sua prioridade genética sobre os outros registros [...] Ela se traduz em todos os indivíduos, por uma espontaneidade discursiva que serve de ponto de ancoragem a toda a aprendizagem ligada a um ensino (DUVAL, 2009, p. 105,106).

Esta espontaneidade discursiva que se refere Duval (2009) foi conferida na letra g da atividade 2 quando conseguiram explicar com suas próprias palavras a passagem de um número no registro numérico fracionário para um no registro numérico decimal. Tais falas foram registradas em filmagem de áudio e vídeo, onde um de cada dupla deu a explicação. No geral as falas foram significativas e atenderam a teoria que fundamenta esta pesquisa, pois os sujeitos da pesquisa deram mostras de que estavam conseguindo acesso ao objeto matemático por eles mesmos, numa ação cognitiva independente.

Duval (2011, p. 15) considera que “A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos”.

A fala de A₁ exemplificou a relação que ele estabeleceu entre o objeto matemático e suas representações.

“Bom...quando temos uma fração e olhamos para o denominador e lá tem o número dez, ou cem, ou mil, ou potências de dez, temos as frações decimais. Com elas fica fácil de transformar o registro de fração para o registro decimal. É só prestar atenção... eu coloco primeiro a vírgula olho a fração decimal, por exemplo se for cem...já sei que terá duas casas depois da vírgula. Pode ter parte inteira e pode ser que tenha somente parte decimal. Vou dar um exemplo: 2/100, transformado que na verdade é a mesma coisa fica zero vírgula zero dois que em língua natural os dois são dois centésimos, mas escritos de maneiras diferentes”.

A validação das noções matemáticas previstas nesta atividade foram pontuais e significativas, uma vez que a Análise a Priori comparada com a Análise a Posteriori, revelou resultados de apreensão dos conceitos, que foram mobilizados por meio de um cenário de

aprendizagem ancorado nos Registros de Representação Semiótica, sob cuidados da aplicação da sequência de atividades que aperfeiçoaram a familiaridade com a coordenação entre os diferentes registros para Números Decimais.

Conforme Duval (2009, p.39) “A questão da coordenação dos registros e os fatores suscetíveis de favorecer esta coordenação aparecem então como questões centrais para as aprendizagens intelectuais”.

De acordo com as produções acadêmicas dos alunos e suas falas durante as atividades, frente ao quadro teórico (*noésis*, *semiósis*, conversão, tratamento, forma decimal, forma fracionária, registro do número decimal em língua natural e registro figural) tendo realizado as análises, em que os alunos são identificados por códigos (A₁, A₂,...) organizamos os resultados obtidos com esta segunda atividade em um quadro em que se visualize, de maneira mais abrangente as transformações de registros realizadas pelos alunos e se evidencie os avanços da pesquisa de uma atividade para a outra.

Quadro 8: Visão Geral das transformações entre registros realizadas na atividade 2

| Trnasformações entre registros | Alunos que conseguiram realizar a transformação |
|--|---|
| Registro figural para registro numérico fracionário | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₆ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₂ , A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ |
| Registro figural para registro numérico decimal | A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₆ , A ₇ , A ₁₁ ,A ₁₂ , A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ |
| Registro numérico decimal para registro figural | A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₆ , A ₇ , A ₁₁ ,A ₁₂ , A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ |
| Registro numérico fracionário para registro numérico decimal | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₆ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₂ , A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico decimal para registro numérico fracionário | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₆ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₂ , A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro figural para registro na língua natural | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro na língua natural para registro figural | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

No quadro 8 é possível perceber maior adesão dos alunos pelos diferentes registros. Em comparação com o primeiro quadro, da primeira atividade, se mostraram mais persistentes no uso dos registros. Nota-se, a partir de então, a familiaridade para lidar com eles.

Na atividade 1 nossa preocupação foi em saber se os alunos investigados conseguiam realizar transformações entre os registros. Na atividade 2 esta investigação continua, no entanto, tivemos o cuidado para avaliar quais alunos conseguiam realizar a ida e a volta entre alguns registros.

Também se diferencia da primeira atividade pela quantidade de representações utilizada pelos alunos como possibilidade de acesso ao objeto matemático. Duval (2011, p.23) contribui com o entendimento sobre a necessidade dessa diversidade quando explica “[...] as representações são epistemologicamente ambivalentes, porque de um lado elas são, por causa de sua diversidade, sempre necessárias para que se tenha acesso aos objetos. Pois, elas estão <<no lugar dos>> objetos ou os <<evocam>>, quando esses não são imediatamente acessíveis”.

Nesse sentido, conforme Duval, acreditamos que a sequência de atividades com as especificidades de cada item trabalhado tem favorecido a compreensão dos alunos com relação aos Números Decimais.

Com a presença dos registros em suas argumentações, e conforme a atividade foi proporcionando maior envolvimento, observou-se a naturalidade deles em transitar de um registro para outro, sinalizando possíveis conversões, pois conforme podemos conferir no quadro 8, os alunos conseguiram fazer um caminho de ida e de volta entre registros diferentes. Tais registros deles evidenciaram a contribuição da sequência de atividades para a *semiósis*, como ponte para se chegar a *noésis*, conforme estudos de Duval.

5.3 Atividade 3

Objetivo da Atividade:

-Identificar um número decimal por meio de diferentes representações.

Registros de Representação explorados na atividade:

- Registro na língua natural;
- Registro numérico na forma de representação decimal;
- Registro numérico na forma de fração;
- Registro numérico na forma de porcentagem;
- Registro figural contínuo;
- Registro figural discreto.

Noções Matemáticas Exploradas:

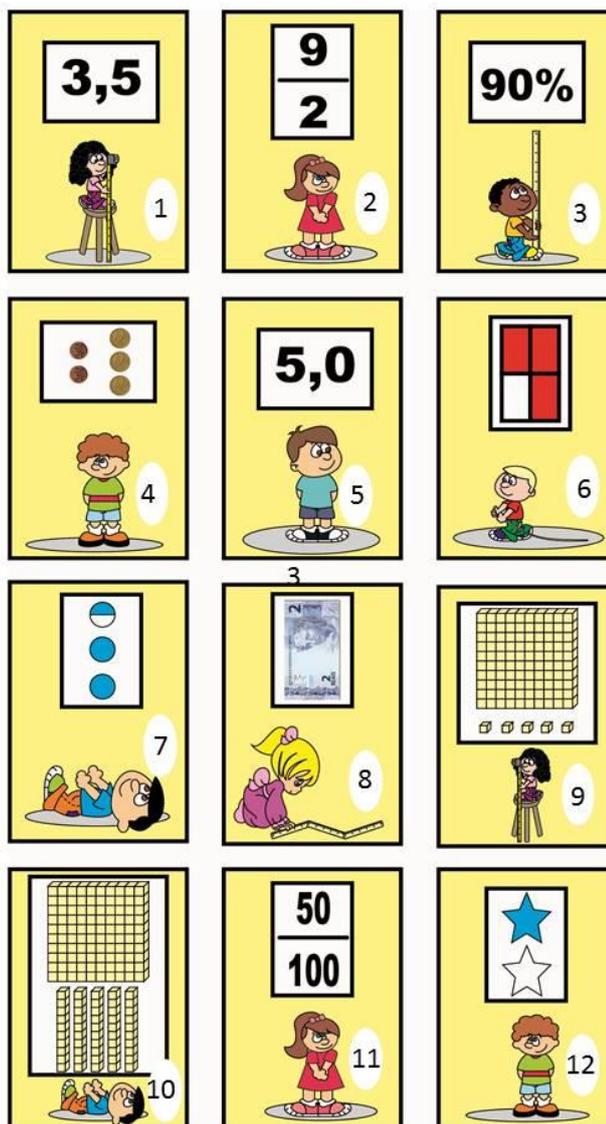
- Transformação de fração decimal em número decimal;
- Transformação de número decimal em fração decimal;
- Reta numérica;
- Porcentagem.

Tempo de realização da atividade: 2 horas aula.

Atividade 3:

Escreva na forma de representação decimal cada número representado nos cartões. Organize os cartões em ordem crescente.

Figura 34: Ilustração 1 da atividade 3



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Agora registre:

- Organize uma tabela para fazer o registro numérico na forma de representação fracionária e decimal de cada cartão.

Figura 37: Quadro para organizar os diferentes registros semióticos do item d da atividade 3

| |
|--|
| |
| |
| |
| |
| |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Análise *a priori* da atividade 3

Para a realização da atividade os cartões seriam previamente preparados e levados prontos, em tamanhos grandes, a fim de que os alunos tivessem tempo suficiente para discutirem, argumentarem, conjecturarem. Portanto, vários conjuntos de cartões, para as equipes com três alunos cada. Estes cartões seriam entregues às crianças que teriam um tempo para manusearem e fazerem algumas descobertas.

Por experiência própria de dezoito anos em sala de aula e convívio direto com professores de matemática, geralmente os livros didáticos são seguidos fielmente por eles. Na maioria das vezes, esses materiais não dão ênfase às diferentes representações dos Números Decimais, pois cada conteúdo é trabalhado isoladamente, conforme dados da prática pedagógica da professora/pesquisadora. No entanto, é um trabalho previsto em documentos, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. A resolução de situações-problema com números naturais, racionais e inteiros permite, neste ciclo, ampliação do sentido operacional, que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números (BRASIL, 1998, p. 66).

Dessa forma, em nossas análises prévias prevíamos que essa atividade iria ao encontro de uma necessidade prevista nos PCN e em teorias que valorizariam a importância de se usar diferentes representações para um mesmo objeto matemático, como, por exemplo, a teoria das representações semióticas de Duval.

Nem todos os grupos conseguiriam fazer as conversões, em virtude da falta de conhecimento dos registros explorados e também porque não estariam acostumados com este tipo de atividade. Porém a discussão com as diversas representações dos números decimais nos grupos seria produtiva para a compreensão dos diferentes registros dos Números Decimais e poderia favorecer a aprendizagem do mesmo.

Para isso, acreditamos que seria preciso a discussão de mais algumas questões para que os alunos conseguissem perceber a importância das frações equivalentes para tal transformação. Assim sendo, dependeria da dificuldade apresentada por eles para serem propostos os seguintes questionamentos:

Como escrever $\frac{1}{5}$ em porcentagem? E 60% em número decimal? E $1\frac{2}{5}$ em número decimal?

Por meio de questionamentos, instigáramos as conjecturas até que todos tivessem entendido e a maioria dos grupos chegariam a seguinte conclusão na organização dos cartões:

Ordem crescente dos cartões: 90%; $\frac{1}{4}$; $\frac{50}{100}$; $\frac{1}{2}$; 0,6; 1,05; 1,5; 2; $2\frac{1}{2}$; 3,5; 4,5; 5,0.

Durante a atividade, os resultados (registros dos alunos) seriam fotografados, para auxiliar nas análises da pesquisa. É válido lembrar que propositalmente, o registro figural seria retomado para verificação de aprendizagem deste tipo de conversão, além das outras já trabalhadas. Além disso, a intenção nesta atividade seria a de abordar mais um tipo de representação dos Números Decimais – a porcentagem, cuja representação decimal seria percebida, quando se encontraria a fração equivalente com denominador 100. Entretanto, julga-se necessária uma abordagem conceitual da transformação de porcentagens em números decimais e vice versa. Para isso, seria proposta a seguinte situação problema: Dos alunos que estão participando desta pesquisa, oito moram perto da escola e 12 moram longe da escola. Que porcentagem do total de alunos que estão participando da pesquisa mora perto da escola? Qual porcentagem corresponde aos alunos que moram longe da escola?

$$\frac{8}{20} = \frac{40}{100} = 40\% \text{ dos alunos moram perto da escola}$$

$$\frac{12}{20} = \frac{60}{100} = 60\% \text{ dos alunos moram longe da escola}$$

Depois disso, os alunos seriam convidados a realizar um cálculo de transformação de do registro numérico fracionário para o registro numérico em forma de porcentagem:

$$\frac{8}{40}$$

Supõe-se que nesta transformação, tentariam multiplicar o quarenta por um número que resulte em cem. Depois de várias tentativas frustradas, poderiam se lembrar de encontrar a fração equivalente, usando a divisão. Caso isso não ocorra, é prevista uma intervenção, para mostrar que frações equivalentes podem ser obtidas tanto pela multiplicação como pela divisão.

Outro número, agora tendo como registro de partida, o registro numérico decimal, seria proposto, supondo que chegariam ao registro numérico percentual como registro de chegada.

0,05

Nesse caso, buscariam a escrita na representação fracionária, para depois indicar a porcentagem.

E por último, um registro figural discreto como registro de partida:

Figura 38: Registro figural discreto da atividade 3



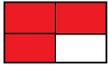
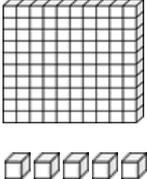
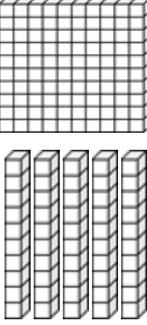
Fonte: Arquivo da pesquisadora

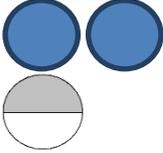
A previsão foi que escreveriam a fração $\frac{1}{5}$. Em seguida, buscariam uma fração equivalente de denominador 100 e então, obteriam como registro de chegada a resposta em porcentagem que é vinte por cento.

Essas ações de valorização dos registros de partida e registro de chegada seriam intervenções coletivas, com intuito despertar a curiosidade por tais transformações. Estes encaminhamentos antecederiam a realização do item a da atividade 3.

- a) Depois de várias intervenções e discussões, esperava-se que a maioria conseguisse realizar as conversões propostas no item a. Poderia acontecer de algumas crianças demonstrarem insegurança na realização das conversões, evidenciando, assim a necessidade de mais atividades que provocariam tais ações de conversão. Os alunos tentariam construir uma tabela semelhante a essa. Há previsão de erros e confusões entre os registros, pois essa é a primeira atividade que exige várias conversões simultâneas. Algumas representações poderiam ser deixadas em branco (sem registro nenhum). Isso mostraria a falta de entendimento por parte de alguns alunos e a necessidade de intensificar atividades que provocariam familiaridade com os diferentes registros semióticos e a conseqüente liberdade de realizar conversões. Seguem abaixo as hipóteses acerca do conhecimento daqueles alunos que conseguiriam realizar as conversões.

Figura 39: Suposições de respostas dadas pelos alunos participantes da pesquisa

| CARTÃO | REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA | REPRESENTAÇÃO DECIMAL | LÍNGUA NATURAL DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL |
|---|---|---|---|
| 90% | $\frac{9}{100} \frac{9}{10}$ | 0,9 | NOVE DÉCIMOS |
|  | $\frac{1}{4} \frac{25}{100}$ | 0,25 | VINTE E CINCO CENTÉSIMOS |
| $\frac{50}{100}$ | $\frac{5}{10}$ | 0,5 | CINCO DÉCIMOS |
|  | $\frac{1}{2} \frac{50}{100} \frac{5}{10}$ | 0,5 | CINCO DÉCIMOS |
|  | $\frac{60}{100}$ | 0,25 + 0,05 + 0,10 + 0,10 + 0,10 OU 0,60 | SESSENTA CENTÉSIMOS OU SESSENTA CENTAVOS (POR SE TRATAR DE DINHEIRO) |
|  | $1 \frac{5}{100}$ | 1,05 | UM INTEIRO E CINCO CENTÉSIMOS |
|  | $1 \frac{5}{10}$ | 1,5 | UM INTEIRO E CINCO DÉCIMOS |
|  | $\frac{2}{1}$ | 2,002,0 | DOIS INTEIROS OU DOIS REAIS (POR SE TRATAR DE DINHEIRO) |

| | | | |
|---|--|---------|---------------------------------|
|  | $2\frac{1}{2}\frac{5}{2}$ | 2,5 | DOIS INTEIROS E CINCO DÉCIMOS |
| 3,5 | $\frac{35}{10}3\frac{1}{2}\frac{7}{2}$ | 3,5 | TRÊS INTEIROS E CINCO DÉCIMOS |
| $\frac{9}{2}$ | $\frac{450}{100}\frac{45}{10}$ | 4,5 | QUATRO INTEIROS E CINCO DÉCIMOS |
| 5,0 | $\frac{10}{2}$ | 5,00000 | CINCO INTEIROS |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Pode ser que deixariam de fazer a representação fracionária dos números inteiros (no caso os cartões que mostram 2,00 e 5,00). As primeiras respostas seriam fotografadas, pois seria prevista uma intervenção para o entendimento de representações fracionárias de números inteiros, fazendo um resgate às frações aparentes.

b) Poderiam aparecer dificuldades por parte dos alunos, na localização dos pontos na reta numérica, mas com a ajuda mútua, descobririam o lugar aproximado de cada ponto. Mais uma vez, a resposta seria fotografada e depois seria feita uma discussão coletiva, para verificação da marcação dos pontos, respeitando as diferentes ideias, das diferentes equipes.

c) A hipótese era que a pergunta seria respondida afirmativamente, pois teria duas frações equivalentes, que embora representadas de maneiras diferentes, seriam referentes à mesma quantidade. No entanto, a hipótese é que alguns alunos, a minoria, não conseguiria “enxergar” este fato. Verificado isso, seria preciso mostrar que cinquenta centésimos e meio representam a mesma quantidade. Isso seria feito com uma peça do material dourado (a placa), em que cinquenta cubinhos estariam pintados de vermelho, para representar $\frac{50}{100}$. E um quadrado, do tamanho da placa do material dourado, feito em cartolina, que estaria

dividido ao meio para considerar a fração $\frac{1}{2}$. Depois disso, far-se-ia a comparação da parte pintada do material dourado com a metade recortada do quadrado, comprovando a igualdade entre os números.

d) Era esperado que representassem $\frac{2}{10}$ de diferentes maneiras:

Figura 40: Hipóteses das diferentes representações dadas a $\frac{2}{10}$ pelos alunos

| | |
|--|---|
| Registro numérico na representação decimal | 0,2 |
| Registro figural discreto | ☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆ |
| Registro numérico na forma de porcentagem | 20% |
| Registro figural | Desenhariam uma barra do material dourado e pintariam dois cubinhos |
| Registro em língua natural | Dois décimos ou um quinto ou vinte centésimos |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Experimentação da Atividade 3

Os alunos foram organizados em seis trios, pois dois alunos faltaram, porque moravam longe da escola e o tempo estava chuvoso. As carteiras já haviam sido distribuídas de três em três pela professora/pesquisadora e quando os participantes da pesquisa entraram na sala, sobre as mesas estavam os cartões a serem usados na atividade e no quadro de giz estavam colados os cartões em tamanho ampliado, sendo cada um do tamanho de uma folha de sulfite.

O material da atividade foi recebido com entusiasmo e curiosidade pelos alunos que manusearam os cartões previamente preparados pela pesquisadora em tamanho grande (12 cm x 8 cm) e plastificados com papel *contact*. O tamanho, o colorido e o papel grosso despertaram interesse dos alunos que perguntaram se era um jogo e se no final do encontro poderiam levar

para casa. Prontamente explicamos que não se tratava de um jogo, mas de um material necessário para o desenvolvimento da atividade. O aluno 4 lembrou:

“Olha essa carta é aquela menininha daquela primeira atividade que nós fizemos”.

E a aluna 13 acrescentou:

“É mesmo! Olhem tem todos aqueles personagens da atividade número um”.

Então foram convidados a manusear os cartões e visualizarem em cada um, registros diferentes. Foi um momento rico para a identificação de diferentes registros para os Números Decimais, em que saíram alguns relatos destacados a seguir:

“Eu olho para o cartão que tem o número três vírgula cinco e consigo ver o trinta e cinco centésimos também”.

“Olha esse aqui com essa figura repartida em quatro partes e pintada três partes...é a mesma coisa que três quartos e... espera aí...preciso fazer a conta... faço o denominador vezes vinte e cinco e o numerador vezes vinte e cinco e tenho setenta e cinco sobre cem, que é setenta e cinco centésimos, que se escreve zero vírgula setenta e cinco. Nossa quantas maneiras de escrever!”

“Esse do material dourado é fácil! Eu olho para as peças e lembro do número um inteiro e cinco centésimos”.

Por quê?- perguntou um colega do grupo:

“Porque a placa é cem que quer dizer um inteiro e os cinco cubinhos são pedaços da placa, mas se eu fosse completar toda a placa com esses pedacinhos que são os cubinhos precisaria de cem, por isso são cinco centésimos”.

Estes foram alguns comentários feitos pelas crianças enquanto manuseavam os cartões.

Depois de quinze minutos foram direcionados a iniciar o item a da atividade 3.

Para melhorar a organização, e, com a finalidade de analisar os resultados, os alunos receberam uma folha com uma tabela, sendo que na primeira coluna estavam as miniaturas dos cartões que teriam que escrever com outros registros. Na segunda coluna escreveriam o registro numérico decimal, na terceira o registro numérico fracionário e na quarta coluna o registro em língua natural da representação decimal.

Este item foi o mais demorado, usaram quarenta minutos para concluir a atividade. Durante o preenchimento desta tabela houve muita discussão nos grupos. Sempre havia um aluno que tentava convencer os outros com argumentações convincentes, como por exemplo:

“Não é nove meios, tem que achar a fração decimal de nove meios para ficar fácil de chegar no número com vírgula”.

Em alguns casos, principalmente nos grupos com alunos com dificuldade em transformar os registros, demoraram para chegar a um consenso. Entretanto, foi neste momento do preenchimento da tabela com as representações numéricas fracionárias e decimais que vários alunos começaram a compreender os diferentes registros de representação semiótica.

Os cartões afixados no quadro em tamanhos grandes eram sempre olhados pelos alunos. Enquanto um argumentava o(s) outro(s) colegas do grupo, olhava(m) atentamente para as ilustrações do quadro, como se estivessem mentalmente transformando os registros.

Para o item b, usaram vinte minutos, pois no geral, tiveram dificuldade na localização dos pontos na reta. Contudo, as argumentações foram produtivas e proporcionaram evolução dos pensamentos dos alunos.

O item c foi realizado rapidamente pelos grupos. Alguns fizeram duas representações e já entregaram a atividade, enquanto outros ficaram tentando lembrar o maior número de representações possíveis para $2/10$.

A atividade foi concluída dentro do tempo previsto e mostrou-se eficaz para um ambiente de aprendizagem voltado para a valorização dos diferentes registros de representação semiótica. Também permitiu verificar na Engenharia Didática uma metodologia que condiz com a realidade da escola pública atual e que mostra que as intervenções são necessárias na medida em que se percebe a necessidade momentânea do ajuste.

Análise *a posteriori* e validação da atividade 3

A evolução gradativa das atividades voltadas para os registros de representação semiótica foram ganhando cada vez mais força conforme o avanço das discussões pelos alunos e sistematização dos conceitos pela pesquisadora.

As dificuldades apareceram, porém foram sendo superadas por novos conhecimentos, quando as dúvidas foram sendo esclarecidas. As apreensões mobilizadas em atividades anteriores subsidiou a compreensão das discussões atuais e tornou evidente a familiaridade com as diferentes representações dos Números Decimais.

Recortes do item a, com registros dos alunos, mostram as evoluções que os alunos foram apresentando durante a atividade. As intervenções feitas suscitaram ideias anteriormente elaboradas para apoiar a construção do entendimento do que ainda se mostrava duvidoso.

Figura 41: Diferentes registros por A₅, A₈ e A₁₀

| | | | |
|--|------|------------------|--------------------------------|
|  | 3,5 | $\frac{35}{10}$ | Três inteiros e cinco décimos |
|  | 9,2 | $\frac{9}{2}$ | Dois inteiros e dois décimos |
|  | 0,90 | $\frac{90}{100}$ | zero inteiro e noventa décimos |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Na organização dos grupos, sem que percebessem, sugerimos que A₅, A₈ e A₁₀ ficassem juntos, pois eram os que estavam apresentando dificuldades na troca dos registros e segundo a pedagoga da escola, tratava-se de alunos com déficit de atenção, que apresentavam dificuldade de aprendizagem em praticamente todas as disciplinas.

Na figura 41, tem-se parte da atividade desenvolvida por eles, para mostrar que ainda não conseguiram transitar livremente entre os registros decimal, fracionário e língua natural, pois embora tivessem manifestado conhecimento sobre o assunto, como nos registros de 3,5 não obtiveram o mesmo sucesso com o de $9/2$.

Dessa forma a figura 41 mostra a “ida” de algumas transformações entre registros realizadas por estes alunos:

Na primeira linha valeu a ida: decimal \longrightarrow fracionário e decimal \longrightarrow língua natural

Na segunda linha não valeu a volta: fracionário $\dots\dots\longrightarrow$ decimal, mas valeu a ida: decimal \longrightarrow língua natural.

Na terceira linha valeu a ida: porcentagem \rightarrow decimal, mas apresentou confusões para decimal \rightarrow fracionário e decimal \rightarrow língua natural.

A partir destes dados, verificamos as transformações que estes alunos conseguiram realizar:

Decimal \rightarrow fracionário

Decimal \rightarrow língua natural

Porcentagem \rightarrow decimal

Isso pode indicar que apresentam mais facilidade tendo um registro numérico decimal como registro de partida, do que quando este registro é numérico fracionário. Neste caso, podemos visualizar, com auxílio da figura 41, que não houve conversão, pois mudou-se o registro de partida e o conhecimento acerca do registro foi alterado.

Os registros das transformações realizadas indicaram que não houve conversão entre os registros decimal, fracionário e língua natural pelos alunos A_5 , A_8 e A_{10} .

Tais alunos podem estar presos a um único registro, por falta da familiaridade com eles. Isso pode estar impedindo o acesso deles ao objeto matemático.

Duval faz uma consideração sobre problemas deste tipo:

Existe como que um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem (DUVAL, 2011, p.21).

Tal “enclausuramento” apontado por Duval pode ser superado com a sequência de atividades, pois houveram indícios do reconhecimento do mesmo objeto por representações diferentes por outros alunos.

Assim sendo, A_4 , A_9 e A_{11} mostraram agilidade e segurança para realizar todas as mudanças de registros propostas:

Figura 42: Registros semióticos de A₄, A₉ e A₁₁

| Cartão | Representação Decimal | Representação Fracionária | Língua Natural da Representação Decimal |
|---|-----------------------|---------------------------------|---|
|  | 0,75 | $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ | Setenta e Cinco Centésimos |
|  | 3,5 | $\frac{36}{10}$ | Três Inteiros e Cinco Décimos |
|  | 4,5 | $\frac{9}{2} = \frac{450}{100}$ | Quatro Inteiros e Cinco Décimos |
|  | 0,90 | $\frac{90}{100}$ | Nove Décimos |
|  | 0,4 | $\frac{40}{100}$ | Quarenta Centésimos |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Observa-se que esse grupo, em que parte das respostas do item a está na figura 41, usaram conceitos de frações equivalentes para chegarem aos registros numéricos decimais, bem como às frações decimais. Também não apresentaram problemas para fazerem uso a língua natural.

Os alunos deste grupo tiveram iniciativa para escolherem os registros adequados para cada representação solicitada e realizaram a tarefa envolvendo as conversões com agilidade, indicando o nível de compreensão em que eles se encontram.

O nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de um problema dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente. Tarefas de estrito reconhecimento são, então, tão importantes para a aprendizagem quanto as tarefas de produção. Ora, o sucesso em uma tarefa de reconhecimento não depende somente do conteúdo das respostas, mas do tempo que foi necessário para as obter. (DUVAL, 2011, p. 28).

Houve questionamento sobre o primeiro cartão, em relação ao motivo de precisarem de outra fração para chegar ao registro numérico decimal 0,75, se registraram primeiro três quartos. Eles apresentaram o argumento de que encontrando o denominador dez, cem ou mil ficava fácil de visualizar o registro numérico decimal pela relação com a quantidade de casas depois da vírgula. O que os alunos explicaram com clareza de ideias informou o acesso ao objeto matemático por meio dos diferentes registros de representação semiótica.

Esta atividade teve a intenção de conferir as transformações entre registros, alterando os registros de partida e de chegada, pois cada cartão expressou um registro de partida diferente. A figura 41 mostra que este grupo, a exemplo de outros que agiram da mesma forma, realizaram algumas transformações:

Figural \longrightarrow decimal \longrightarrow fracionário \longrightarrow língua natural

Decimal \longrightarrow decimal \longrightarrow fracionário \longrightarrow língua natural

Fracionário \longrightarrow decimal \longrightarrow língua natural

Porcentagem \longrightarrow decimal \longrightarrow fracionário \longrightarrow língua natural

Sistema monetário \longrightarrow decimal \longrightarrow fracionário \longrightarrow língua natural

Observamos que A_4 , A_9 e A_{11} realizaram conversão entre os registros numérico fracionário e numérico decimal, pois conseguiram fazer a ida e volta desses registros. Nas demais representações realizaram transformações de ida com naturalidade.

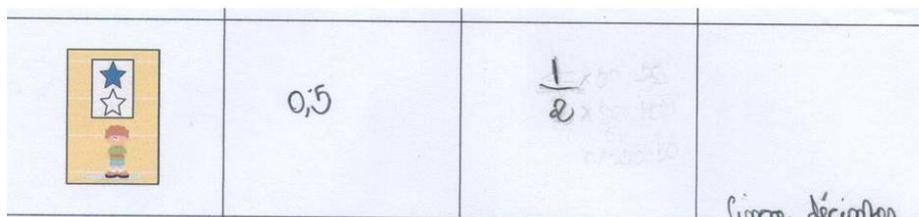
Depois da familiaridade conseguida pelos alunos com as atividades anteriores, neste momento houve necessidade de favorecer as conversões, com base na pluralidade de registros. Tal afirmação está de acordo com Duval (2011, p. 23) quando infere que “Descartar a importância da pluralidade de registros de representação leva a crer que todas as representações de um mesmo objeto matemático têm o mesmo conteúdo”. Dessa forma, tivemos a intenção de valorizar as representações como ferramentas de conteúdos diferentes para o acesso ao objeto matemático.

Nessa atividade, os alunos mobilizaram conhecimento nos mais variados registros de partida, sejam eles, numérico decimal, numérico fracionário, figural discreto, figural contínuo ou em forma de porcentagem, obtiveram êxito no registro de chegada.

Isso mostra que a atividade favoreceu o domínio dos registros e a coordenação entre eles, viabilizando segurança e naturalidade na rotina com os registros pela maioria das

equipes. Tal afirmação é possível, visto que não apresentaram erros e entregaram a atividade com rapidez.

Figura 43: Transformações do registro figural discreto para os registros numérico decimal, numérico fracionário e língua natural por A₁₃



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Foi curioso perceber nas gravações de áudio e vídeo o que A₁₃ e sua equipe fizeram. Como eram três colunas para serem preenchidas, organizaram-se de tal forma que cada integrante tinha que falar a resposta de uma linha inteira e depois da aprovação de todos pela resposta correta em língua natural é que fizeram o registro escrito. A fala abaixo retrata a cena vivenciada para realizarem os registros da figura 43. A₁₃ falou:

“Um sobre dois, que é a mesma coisa que cinquenta centésimos que é zero vírgula cinco. Concordam? Agora vamos registrar, mas cada uma faz sua parte.”

A₁₇ da mesma equipe disse:

“Sabe de uma coisa, vamos mudar a regra. Cada uma fala uma resposta completa, pois não tem como pensar em um jeito de registrar sem passar pelo outro. Daí todo mundo vê se concorda antes de passar para a folha. Pode ser?”

A₁₃ sorriu dizendo:

“Então ... foi isso que eu disse!”

Todas concordaram com a ideia das colegas e procederam, conforme sugerido, com os demais cartões.

As falas delas demonstram que estavam se importando com a necessidade de informar os diferentes registros semióticos de cada cartão. A₁₁ inclusive disse que não havia maneira de pensar somente em um registro do cartão, que o correto seria que cada uma pensasse em todos, dispondo neste caso, como recomenda Duval, de ao menos dois sistemas semióticos diferentes.

O recorte da atividade confere o conhecimento de A_{13} com relação aos diferentes registros de representação semiótica.

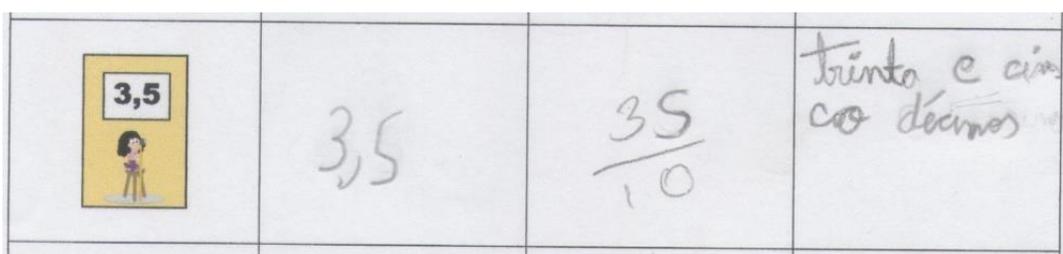
Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação, quer dizer, dar-lhes acesso ao objeto representado apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo...e que eles possam converter “espontaneamente” de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas (DUVAL 2009, p. 38).

Essa equipe formada por A_{11} , A_{13} e A_{17} , estabeleceu, com estímulo da atividade proposta, um comportamento de valorização da capacidade mental. Sobre isso Duval esclarece:

O desenvolvimento da *capacidade mental da representação* depende do desenvolvimento cultural de *sistemas semióticos*, porque esses sistemas não preenchem somente uma função de comunicação, mas também uma função de transformação de representações (“tratamentos”) e de objetivação consciente para o sujeito (DUVAL, 2011, p.29).

Com o intuito de testar a segurança dos participantes da pesquisa, acompanhamos os seus registros, mudando-se o registro de partida, a fim de investigar a facilidade de identificar outros registros quando mudou-se o inicial de figural discreto para numérico decimal. Mas para garantir as conversões foi preciso oportunizar a ida e a volta de tais registros.

Figura 44: Conversões entre registros por A_{11}



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A_{11} não apresentou dificuldade para realizar as transformações. Talvez por descuido, registrou a forma fracionária em língua natural, quando o comando era para se fazer o registro na língua natural da representação decimal. A agilidade com que cada integrante da equipe fez cada item confirmou a segurança que tinham, ao realizar a atividade. Para assegurar que A_{11} estava realizando uma conversão e não apenas uma transformação, a professora/pesquisadora perguntou a ele:

“E se estivesse escrito cinco inteiros e sete centésimos, como você faria as transformações?”

A₁₁ respondeu:

“Então começaria da língua natural... daí eu escreveria o número decimal 5,07 e depois a fração decimal 507/100.

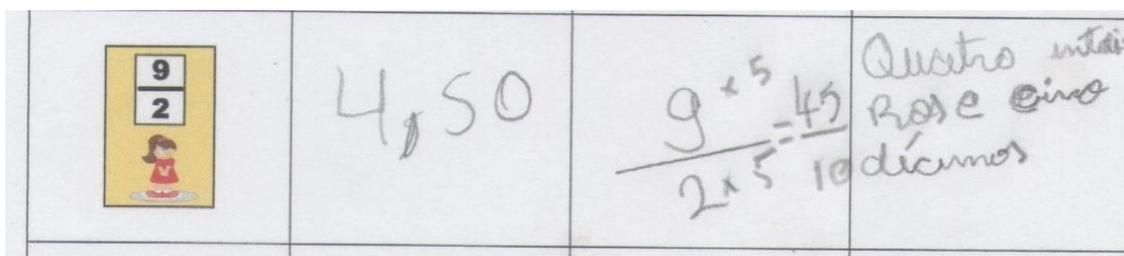
A intenção da professora/pesquisadora foi verificar a conversão entre os registros. Fato que foi confirmado pois o aluno fez a ida e volta dos registros.

Ida: decimal → fracionário → língua natural

Volta: língua natural → decimal → fracionário

Mais uma mudança de registro de partida foi proposta, tendo agora, o registro numérico fracionário como registro de partida.

Figura 45: Conversões entre registros por A₁₇



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A₁₇ foi questionado quanto à volta do registro da figura 45 e ele relatou que para ida primeiro fez um tratamento numérico para encontrar a fração decimal e depois encontrou o registro numérico decimal. Soube argumentar a volta a partir de um registro numérico decimal, afirmando que se tivesse como registro de partida 1,06 escreveria uma fração decimal de denominador cem e numerador cento e seis. Isso mostra que A₁₇ realizou conversão:

Ida: fracionário → fracionário → decimal → língua natural

Volta: decimal → fracionário

As atitudes das equipes, em geral, revelaram apreensão conceitual dos Números Decimais, possivelmente pelas manifestações intelectuais mobilizadas em prol dos diferentes

registros de representação semiótica dos Números Decimais nas atividades anteriores. Isso leva a crer que apresentaram capacidades para realizar um fenômeno denominado por Duval de coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica.

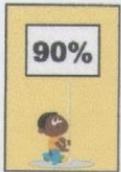
Com a aplicação desta sequência de atividades, conseguiu-se extrair resultados satisfatórios em relação à apreensão conceitual dos Números Decimais. Foi importante para se avaliar o nível da coordenação entre os registros pelos alunos participantes da pesquisa, em que se teve oportunidade de inverter os registros de partida e chegada para afirmar tal coordenação. Para isso, as atividades, desde que foram elaboradas, visavam ações cognitivas de conversão e não de tratamento, por entender, com base nas Análises Preliminares e Análise *a Priori*, bem como nas pesquisas já mencionadas, que é esse tipo de atividade envolvendo a coordenação entre os registros que está faltando em sala de aula.

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. O estudo dessa atividade de conversão deve então permitir compreender a natureza de um laço estrito entre *semiósis* e *noésis* (DUVAL, 2009, p. 39)

A partir desta atividade, foi possível perceber a relação entre *semiósis* e *noésis* no comportamento, argumentação e registro dos alunos.

Isso pode ser exemplificado com mais um recorte de atividade feito por outra equipe, que também acertou todos os registros propostos.

Figura 46: Conversões entre registros por A₂₀

| | | | |
|---|-------------|------------------|------------------------|
|  | <p>0,90</p> | $\frac{90}{100}$ | <p>noventa décimos</p> |
|---|-------------|------------------|------------------------|

Fonte: Arquivo da pesquisadora

A₂₀ estabeleceu a seguinte ida dos registros:

numérico em forma de porcentagem → decimal → fracionário → língua natural.

O aluno foi convidado a explicar a volta de tais registros, caso o registro de partida estivesse em língua natural e fosse vinte centésimos:

“Se estivesse escrito primeiro vinte centésimos eu ia escrever a fração vinte sobre cem, daí vinte por cento e depois podia continuar fazendo o decimal que é zero vírgula vinte ou zero vírgula dois”.

A₂₀ ficou pensativo e disse para a professora pesquisadora:

“Agora coloca um número com décimo para começar”.

Percebeu-se que ao fazer a volta de língua natural para registro numérico fracionário chegou no registro numérico 0,2 e ele estranhou que décimos poderiam ser porcentagem. Então, a professora/pesquisadora sugeriu seis décimos como registro de partida escrito na representação de língua natural.

A₂₀ fez a seguinte afirmação:

“Bom... daí tenho que escrever zero vírgula seis com números, daí passar para fração decimal que é seis sobre dez, daí fazer o denominador ficar cem... multiplico o de cima e o de baixo por dez que vai ficar sessenta sobre cem que é sessenta por cento! Pronto dá certo também!”

A₂₀ demonstrou com essa explicação que realizou conversão, pois conseguiu fazer a ida e a volta entre os registros numéricos: em forma de porcentagem, fracionário, decimal e língua natural.

Aqueles que utilizavam com naturalidade os diferentes registros para se referirem a um Número Decimal, não apresentando dificuldade para a ordem do registro de partida e chegada, foram os alunos que demonstraram apreensão conceitual do objeto matemático, não apresentaram erros. No entanto, este fato será investigado ainda mais, nas atividades a seguir.

No item b, escolheram cinco cartões e escreveram os mesmos com registros numéricos decimais para localizá-los na reta numérica.

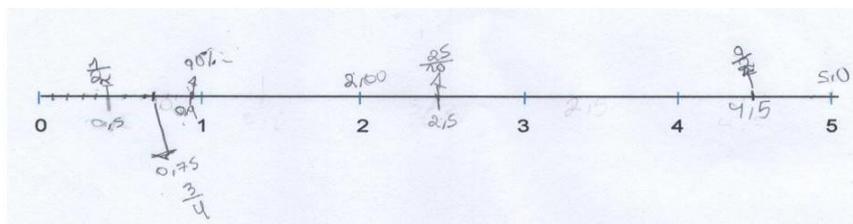
A equipe A disse que não saberia fazer a atividade, pois nunca tinha visto aquilo (reta numérica). Como previsto, a dificuldade foi pensada nas Análises a Priori com intervenções para esclarecimentos de conceitos referentes à reta numérica. Depois desta intervenção, as equipes tiveram menor dificuldade para realizar a atividade proposta, que desde o início não se mostrou muito produtiva.

A equipe B marcou primeiro, os registros numéricos decimais, já mostrados nos cartões (2,0 e 5,0). Depois transformou os registros numéricos fracionários ($\frac{9}{2}$ e $\frac{50}{100}$) em

registros numéricos decimais pela equivalência de frações na busca do denominador 100. Por fim, escolheu um cartão com o material dourado e a partir dele, fez o registro numérico decimal (uma placa e cinco barras igual a um vírgula cinco).

A equipe C, composta por A₁₈, A₁₉ e A₂₀ fez a seguinte marcação:

Figura 47: Marcação dos pontos na reta numérica



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Marcaram mais que os cinco pontos pedidos na atividade e mostraram mais uma vez que conhecem os diferentes registros, sabendo o significado numérico de cada um deles.

Tanto a equipe B, composta por A₁₁, A₁₃ e A₁₇ como a C cujos integrantes foram A₁₈, A₁₉ e A₂₀, tiveram que realizar transformações com diferentes registros de partida e de chegada para a localização dos pontos na reta. Duval (2011, p. 57) explica que “para poder efetuar essas transformações, é preciso efetuar implicitamente uma ida e volta constante entre as transformações de um tipo de representação e a de outro tipo”.

As equipes D, E e F, portanto (A₁, A₂, A₃, A₄, A₇, A₉, A₁₄, A₁₅ e A₁₆) também conseguiram terminar a atividade, no entanto levaram um tempo bem maior, se comparado ao tempo das equipes B e C. Isso pela falta de familiaridade com a reta numérica. Este conteúdo (ordenar números na reta numérica) ainda não era do conhecimento deles.

A equipe A (A₅, A₈ e A₁₀) dispersou a atenção e não quiseram terminar a atividade. Como são alunos com déficit de atenção e se dedicaram para a realização do item a, já não conseguiram se concentrar para o item b.

No entanto, pensando na aplicação desta sequência de atividades por outros professores, julga-se desnecessário este item da atividade 3, porque tornou a atividade longa e cansativa pela falta de habilidade em lidar com reta numérica no primeiro semestre do sexto ano. Acreditamos que esta atividade poderia ter maior eficácia, se este item tivesse sido aplicado no final do ano.

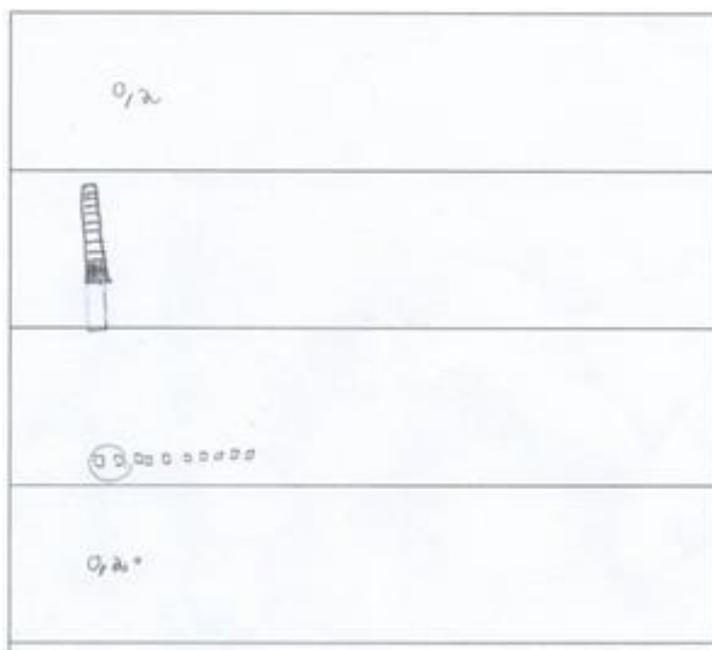
Neste sentido, não nos alongamos na análise deste item da atividade 3, por tê-lo como pouco produtivo para este tipo de investigação no primeiro semestre do ano letivo e por não ter a pretensão de manter este item em aplicação futura desta mesma sequência de atividades.

No item c demonstraram a capacidade cognitiva ao usar diferentes registros para um mesmo número. O registro de partida era numérico fracionário: $\frac{2}{10}$.

Sob à luz da teoria de Duval, a importância de usar diferentes registros está apreciado na pesquisa de Brandt (2005, p. 68) quando diz que: “A necessidade de uma diversidade de representações semióticas para um objeto matemático deve-se ao fato de que eles não têm existência física e não estão diretamente acessíveis na percepção”.

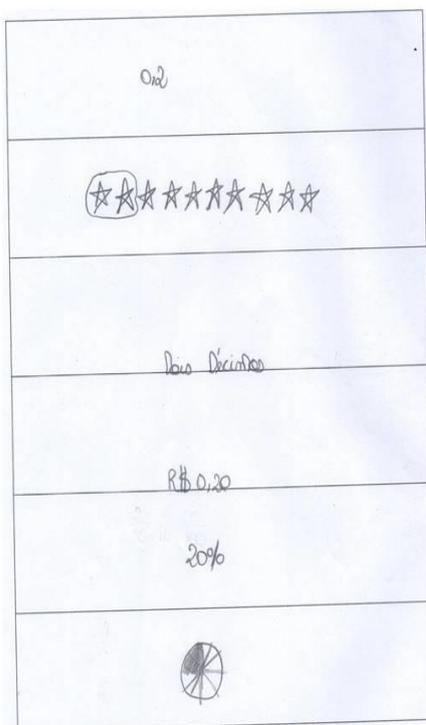
Esta afirmação de Brandt (2005), juntamente com os dados obtidos na realização deste item da atividade 3, conferem apreensão conceitual do objeto matemático, mobilizada por diferentes registros de representação semiótica. Nesta ocasião, tiveram liberdade para expressar esses diferentes registros. Duval (2011, p. 42) enfatiza que “É pela dinâmica das transformações semióticas que a *semiós* está no centro dos processos cognitivos do pensamento matemático”. O autor está se referindo em como se deve fazer matemática para que as *semiós* se evoluam para a *noés*. Tal atividade favoreceu os processos cognitivos, como conferem os registros das equipes:

Figura 48: Diferentes registros de $\frac{2}{10}$ da equipe A (A_5, A_8 e A_{10})



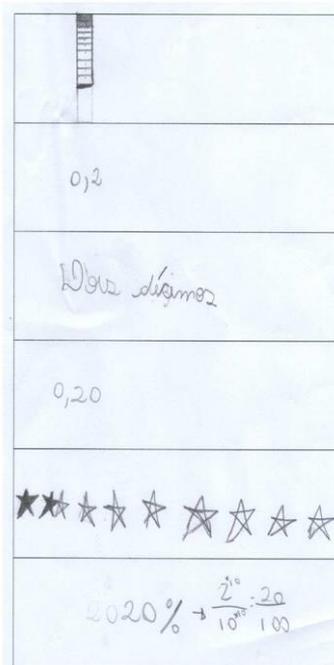
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 49: Diferentes registros de 2/10 da equipe B (A₁₁, A₁₃ e A₁₇)



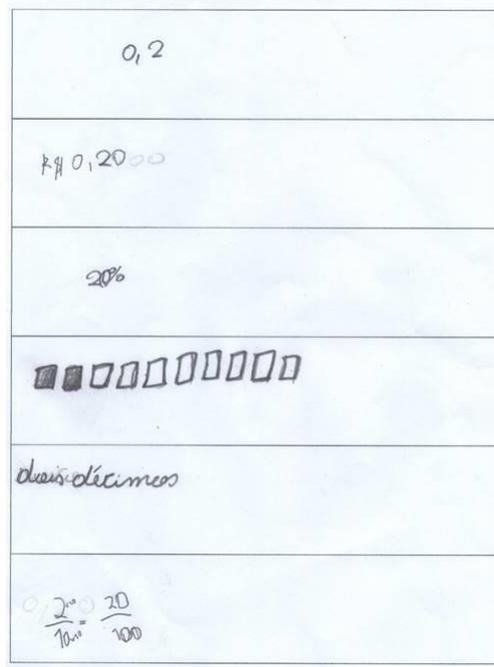
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 50: Diferentes registros de 2/10 da equipe C (A₁₈, A₁₉ e A₂₀)



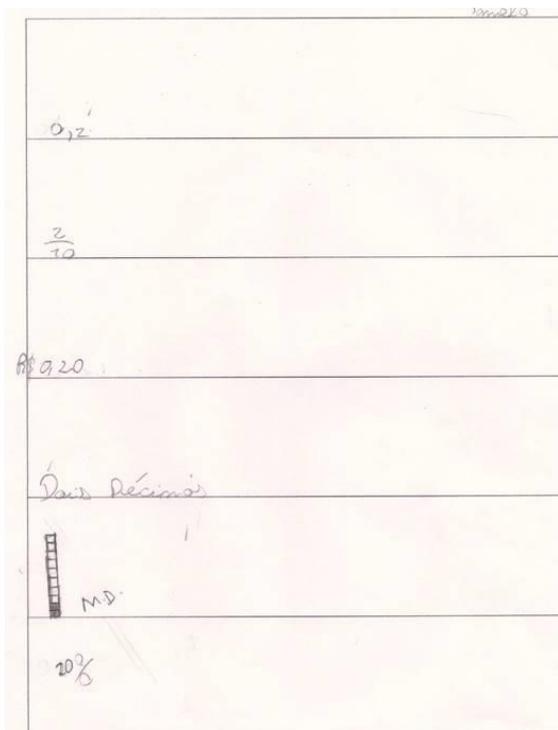
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 51: Diferentes registros de $\frac{2}{10}$ da equipe D (A₄, A₁₅ e A₁₆)



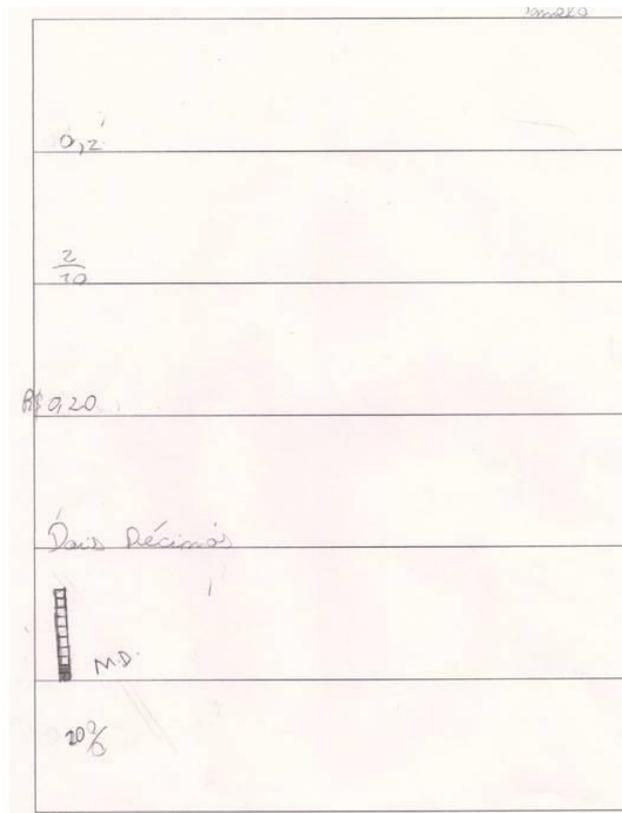
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 52: Diferentes registros de $\frac{2}{10}$ da equipe E (A₁, A₃ e A₉)



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 53: Diferentes registros de $\frac{2}{10}$ da equipe F(A₂, A₇ e A₁₄)
registro figural. Esses dados retratam a importância



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Observa-se com base nos registros dos alunos que as equipes B, C, D, E e F conseguiram transformar o registro numérico fracionário em vários outros tipos de registros. Quase todas as equipes, exceto B e D lembram-se do material dourado e fizeram e o utilizaram como das atividades anteriores desta sequência por terem conseguido criar um repertório para registrar as diversas representações semióticas de um determinado número.

Fizeram com agilidade e terminaram antes do tempo previsto. Duval (2009, p. 63) adverte que “Não é inútil lembrar aqui a variedade e a importância das mudanças de registros para sublinhar a frequência com a qual a atividade cognitiva de conversão pode ser solicitada”.

A equipe A foi a última a entregar e a que realizou menos registros. Lembrando que esta é a equipe formada pelos alunos (A₅, A₈ e A₁₀) com déficit de atenção e que desde a primeira atividade apresentou dificuldade de aprendizagem. Duval (2011, p. 47), explica que: “A dificuldade cognitiva vem do fato de que duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam”.

Esta foi uma atividade que não direcionou o(s) registro(s) de chegada, contudo a maioria das equipes subsidiadas pelas atividades anteriores demonstraram conhecimento sobre os diferentes registros e que possivelmente realizaram conversões.

Dessa forma, a atividade 3, mostrou nos registros dos alunos que usar diferentes registros de representação com naturalidade é uma condição significativa para apreensão conceitual do objeto matemático. Cada representação tem sua especificidade e particulariza um aspecto deste objeto. Quanto mais representações usadas pelos alunos, maior foi a abrangência do que se pretendeu representar e maior foi o significado deste objeto representado.

Duval explica que:

Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza (DUVAL, 1995, p.17).

De acordo com o pressuposto de Duval para a aprendizagem de um conceito, com a confrontação dos dados obtidos com a aplicação desta sequência de atividades, podemos dizer que a aprendizagem pode ser mobilizada por meio da diversidade de registros e que a coordenação entre estes registros pode favorecer a aprendizagem dos Números Decimais. Duval (2009, p. 99) afirma que “Uma aprendizagem especificamente centrada sobre a conversão de representações e efetuada fora de toda tarefa de tratamento parece, então, necessária ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual”.

O avanço gradativo com os registros e as oportunidades de transformação entre eles, avaliando inclusive, registro de partida e registro de chegada, bem como a inversão destes registros nesta sequência de atividades favoreceu a indicação dos alunos frente ao quadro teórico (*noésis*, *semiósis*, conversão, tratamento, forma decimal, forma fracionária, registro do número decimal em língua natural e registro figural) confirmando assim algumas hipóteses iniciais da contribuição das representações semióticas para a compreensão dos Números Decimais. Foi possível com a aplicação da sequência até o momento, identificar os sujeitos da pesquisa que possivelmente mobilizaram conhecimento acerca do objeto matemático em investigação. É conveniente lembrar, para entendimento do quadro abaixo, que A_6 e A_{12} não estavam presentes neste dia.

Quadro 9: Tratamento realizado na atividade 3

| Registros envolvidos | Alunos que realizaram o tratamento proposto |
|--|--|
| Registro numérico fracionário para encontrar frações decimais | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |

Fonte: arquivo da pesquisadora

Para organização do quadro 9 foram usadas apenas as letras iniciais de cada registro sendo:

- F para figural
- D para decimal
- FR para fracionário
- L para língua natural
- NP para numérico em forma de porcentagem
- NS para numérico referente ao sistema monetário.

Quadro 10: Visão Geral das transformações entre registros realizadas na atividade 3

| Transformações entre registros | Alunos que realizaram as transformações |
|---------------------------------------|---|
| F → D → FR → L | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |
| D → FR → L | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ ,A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ ,A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |
| L → FR → NP → D | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |
| FR → D → L | A ₁ ,A ₂ , A ₄ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |
| L → D → FR → NP | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ ,A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ ,A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |
| NP → D → FR → L | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ ,A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |
| NS → D → FR → L | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Com o quadro acima é possível perceber equiparação no uso dos registros, entre os alunos frente ao quadro teórico em estudo, pois os mesmos alunos são indicados em praticamente todas as linhas. O fato se deu pela familiaridade do uso dos registros por praticamente todos os alunos participantes da pesquisa.

Também é possível perceber no quadro 9 a ida e volta dos registros e que tiveram alunos que conseguiram a ida, no entanto, não conseguiram a volta. É o caso de A_5 , A_8 e A_{10} que fizeram a ida do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário, porém não conseguiram a volta do registro numérico fracionário para o registro numérico decimal. Estes alunos não realizaram conversão.

A_3 também não converteu registro numérico fracionário e língua natural, pois na linha 3 do quadro 9 podemos observar que fez a ida, porém na linha 4 do mesmo quadro, observa-se que não conseguiu a volta.

A_7 conforme apontado na linha 5 do quadro 9, conseguiu transformar língua natural em registro numérico em forma de porcentagem, contudo não realizou a volta, de acordo com a linha 6 do mesmo quadro.

Com mais esta atividade foi possível perceber os alunos que estavam transitando livremente entre os registros, pois não demonstraram dificuldade para registrar o número na forma numérica fracionária, nem tampouco na forma numérica decimal e ainda, reconhecendo estas formas numéricas por sua transposição na forma figural e até mesmo porcentual. Com estes dados pode-se conferir a transparência das representações semióticas.

Duval (2011, p. 101) afirma que “*As representações semióticas só são transparentes quando existe reconhecimento imediato e espontâneo do que elas representam*” (grifo do autor). Os dados da atividade 3, comprovam esse reconhecimento espontâneo entre os registros e asseguram a existência da *semiósis*, que conseqüentemente mobilizam a apreensão conceitual do conteúdo – *noésis*. Duval (2011) ainda explica que:

[...] a atenção pode sempre comutar o objeto de que temos consciência. Assim, a consciência pode instantaneamente passar do objeto matemático que ela visa para a representação semiótica que é o alvo do ato visado, mas que ela não observaria. Essa comutação do alvo da atenção torna-se necessária para poder transformar uma representação semiótica transparente em outra representação semiótica (DUVAL, 2011, p.101).

Tal operação cognitiva foi percebida na atividade 3 quando os alunos manifestaram ideias de sua atenção para consciência instantânea do objeto matemático e suas representações. Exemplo disso são as construções espontâneas das representações de $2/10$.

Visualizaram na representação numérica fracionária todas as outras representações. Porém, essa é apenas uma das operações necessárias conforme Duval (2011, p. 103) para “compreender, fazer ou apenas utilizar a matemática”. Segundo Duval (2011), essas duas condições são:

Primeiro, converter essa representação para outro registro. Depois, gerar todas as modificações possíveis dessa representação para convertê-las para esse outro registro. Podemos, então, observar se as variações feitas no primeiro registro produzem, ou não produzem, covariações no segundo. Dessa maneira, o segundo registro serve como revelador das unidades de sentido matematicamente pertinentes nas representações do registro de partida. A escolha do segundo registro é metodologicamente importante. Ela permite reconhecer se duas representações, pertencentes a dois registros diferentes, são ou não representações de um mesmo objeto. Ou inversamente, se duas representações pertencentes a um mesmo registro, mas parecendo quase iguais, são ou não representações de um mesmo objeto (DUVAL, 2011, p. 104).

Em comparação com os quadros anteriores, das atividades 1 e 2, observa-se a evolução do acesso a essas representações e a naturalidade em lidar com os registros. Nesta atividade foi possível verificar conversões entre registros e os alunos que ainda não estavam realizando conversões.

É possível que os registros de representação semiótica tenham mobilizado a aprendizagem dos Números Decimais pelos dados coletados, frente aos estímulos favorecidos na sequência de atividades proposta. Entretanto, para garantir tal atribuição aos registros de representação semiótica, continuamos a investigação, a procura de fatos que comprovem o uso das operações de transformação específicas de cada registro.

5.4 Atividade 4

Objetivos da Atividade:

- Resolver situações-problema;
- Identificar um número por meio de diferentes representações;

Registros de Representação explorados na atividade:

- Registro na língua natural;
- Registro numérico na forma de representação decimal;
- Registro numérico na forma de fração;
- Registro manipulável;
- Registro figural contínuo.

Conceitos explorados:

- Ordem crescente de frações;
- Transformação de fração decimal em número decimal;
- Sistema monetário;
- Operações com números decimais.

Tempo de realização da atividade: 2 horas aula.

Atividade 4

Marcos foi ao mercado comprar balas e pirulitos. Chegando lá, ficou admirado com a forma que os preços estavam indicados. Sabendo que sua mãe lhe recomendou não gastar todo dinheiro em um único dia e, por isso, deveria trazer a metade do dinheiro de troco, ele precisou pensar, para decidir o que comprar com os R\$ 5,00 que tinha levado.

Organize em ordem crescente, analisando os valores em reais dos doces e coloque o número da ordem no retângulo deixado ao lado de cada figura.

Figura 54: Ilustração 1 da atividade 4



Bala de iogurte = R\$ $\frac{7}{100}$



Pirulito de coração = R\$ $\frac{20}{100}$



Bala de banana = R\$ $\frac{5}{100}$



Pirulito de chocolate = R\$ $\frac{50}{100}$



Pirulito recheado = R\$ $1\frac{5}{100}$

Fonte: Arquivo da pesquisadora e ilustrações do google imagens

- a) Complete a tabela informando a representação numérica fracionária e a representação numérica decimal de cada doce:

Figura 55: Registro numérico fracionário e numérico decimal do item a da atividade 4

| Doce | Fração | Número Decimal |
|-----------------------|--------|----------------|
| Bala de iogurte | | |
| Pirulito de coração | | |
| Bala de banana | | |
| Pirulito de chocolate | | |
| Pirulito recheado | | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

- b) Quais são as opções de compra de Marcos? Inclua todos os tipos de doces na compra, de maneira que sobre o troco recomendado por sua mãe. Depois registre um possível resultado.

Figura 56: Ilustração 2 da atividade 4



Fonte: Arquivo da pesquisadora

- c) Escreva por extenso como se lê os números decimais que estão representando os preços dos doces:

Figura 57: Registro em língua natural

| Nome do doce | Língua Natural (dinheiro) | Língua Natural (número decimal) |
|-----------------------|----------------------------------|--|
| Bala de banana | | |
| Pirulito recheado | | |
| Bala de iogurte | | |
| Pirulito de coração | | |
| Pirulito de chocolate | | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

- d) Represente o número associado ao preço da bala de banana de várias maneiras diferentes. Tente esgotar todas as possibilidades.
- e) Qual a diferença entre o preço do pirulito de chocolate e a bala de banana?
- f) Quanto o pirulito recheado custa a mais do que a bala de iogurte?
- g) Se uma professora quisesse levar pirulito recheado para os seus 25 alunos, quantos reais ela iria gastar?

Análise *a priori* da atividade 4

Apesar da impossibilidade de se encontrar preços marcados como sugerido na atividade, no dia a dia, que foi motivado apenas para que as crianças fizessem as conversões necessárias para resolver o problema de uma maneira lúdica, o contexto envolvendo o sistema monetário, vivenciado nessa atividade, faz parte do cotidiano das crianças que frequentam o sexto ano do Ensino Fundamental. Com frequência crianças desta idade fazem compra de doces com pequenas quantias em dinheiro, inclusive na cantina da escola. Conforme orientação das Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (DCE), saber agregar atitudes docentes intencionais para potencializar o uso do sistema monetário permite que:

[...] aluno da Educação Básica tenha condições de estabelecer relações entre o conjunto de moedas legais em circulação em diferentes países. Entretanto, prima-se que o aluno conheça, primeiro, o sistema monetário do país onde vive. Manejar o sistema monetário é inteirar-se das situações que mensuram o valor das mercadorias, possibilidade para discutir o valor do trabalho e meio para entender decisões de ordem econômica do país (PARANÁ, 2008, p.54).

A compra de doces poderia motivar às investigações em busca das soluções, no entanto, eles deveriam se preocupar em buscar a solução em que comprariam a maior diversidade de doces e ficariam com o troco recomendado pela mãe. Mais tarde, quando todos os alunos tivessem encontrado suas respostas, iniciar-se-ia uma discussão entre os grupos, a fim de verificar o que teria comprado a maior diversidade de doces e tivesse ficado com o menor troco. Um integrante de cada grupo seria o relator das soluções encontradas.

- a) Supomos que os alunos conseguiriam realizar a conversão da representação numérica fracionária para a representação numérica decimal, no entanto poderiam apresentar mais dificuldade com a representação decimal do pirulito recheado ($1\frac{5}{100}$), que poderia acontecer de terem esquecido da parte inteira e colocariam apenas a parte decimal. Se isso acontecer, será feita a pergunta: A bala de banana e pirulito recheado teriam o mesmo preço?

Figura 58: Hipóteses de registro numérico fracionário e numérico decimal do item a da atividade 4

| Doce | Registro numérico na forma de fração | Registro numérico na forma decimal |
|-----------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| Bala de iogurte | $\frac{7}{100}$ | 0,07 |
| Pirulito de coração | $\frac{20}{100}$ | 0,20 |
| Bala de banana | $\frac{5}{100}$ | 0,05 |
| Pirulito de chocolate | $\frac{50}{100}$ | 0,50 |
| Pirulito recheado | $1\frac{5}{100}$ | 1,05 |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

- b) A hipótese é que haveria uma diversidade de respostas, mas todas as equipes conseguiriam encontrar pelo menos uma. A divisão de R\$5,00 por 2 poderia ser feita com a calculadora ou até mesmo com o dinheiro de brincadeira que estaria à disposição das equipes. Acredita-se que nenhuma criança tentaria montar o algoritmo de divisão. Isso por falta de conhecimento do assunto, pois até este momento da escolaridade eles não têm conhecimento do algoritmo da divisão.

1 pirulito recheado, 1 pirulito de chocolate, 1 pirulito de coração, 5 balas de iogurte e 8 balas de banana = R\$ 2,50 com R\$ 2,50 de troco

1 pirulito recheado, 1 pirulito de chocolate, 1 pirulito de coração, 7 balas de iogurte e 4 balas de banana = R\$ 2,44 com R\$2,56 de troco.

1 pirulito recheado, 1 pirulito de chocolate, 1 pirulito de coração, 3 balas de iogurte e 10 balas de banana = R\$ 2,46 com R\$ 2,54 de troco

E outras possibilidades que atenderia o exigido no enunciado.

Poderia acontecer de alguma criança dizer que bastaria pegar um de cada, mas logo seria alertada por outra ou outro da equipe, que se lembraria do maior número de doces. Caso isso não ocorresse haveria a intervenção da pesquisadora.

- c) O item c da atividade 4 teria a intenção de fazê-los refletirem sobre significados diferentes, diferenciando a língua natural quando nos referimos ao sistema monetário e a língua natural própria dos Números Decimais. Nesse caso, evitaria transtornos e mostraria que para cada situação teríamos uma maneira de nos referirmos aos Números Decimais. Poderia acontecer que algumas crianças escrevessem vinte centésimos para o pirulito de coração e cinquenta centésimos para o pirulito de chocolate, quando tentasse, escrever na língua natural o registro numérico decimal. Caso tal fato ocorresse, seriam lembrados por questionamentos, do conceito sobre os zeros acrescentados à direita do número.

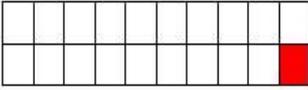
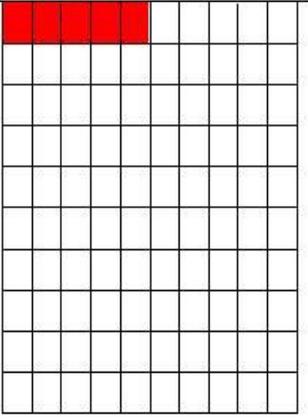
Figura 59: Hipóteses de registro em língua natural do item c da atividade 4

| Nome do doce | Língua Natural (dinheiro) | Língua Natural (número decimal) |
|-----------------------|--------------------------------------|--|
| Bala de banana | Cinco centavos | Cinco centésimos |
| Pirulito recheado | Um real e cinco centavos | Um inteiro e cinco centésimos |
| Bala de iogurte | Sete centavos | Sete centésimos |
| Pirulito de coração | Vinte centavos | Dois décimos |
| Pirulito de chocolate | Cinquenta Centavos | Cinco décimos |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

- d) Depois das experiências anteriores que teriam vivenciado com os diferentes registros de representação semiótica, esperar-se-ia que os alunos conseguiriam fazer as conversões e representar o preço da bala de banana de várias maneiras diferentes:

Figura 60: Hipóteses de registros com o preço da bala de banana: R\$0,05

| | |
|--|---|
| $\frac{5}{100}$ $\frac{1}{20}$ na forma de fração irredutível |  |
| 0,05 |  |
| 5% |  |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Depois de terem discutido os diferentes registros para 0,05, teriam a oportunidade de, uma equipe por vez, registrar uma representação diferente do preço da bala de banana no quadro, até esgotarem-se todas as possibilidades. Caso alguma representação não fosse registrada pelas crianças, mesmo sendo instigadas para isso, estava previsto uma intervenção da parte da pesquisadora para que ficassem registradas todas as representações.

e) Qual a diferença entre o preço do pirulito de chocolate e a bala de banana?

Seria provável que contassem nos dedos, mas também seria previsto que montassem o algoritmo e resolvessem a operação. Algumas crianças fariam o cálculo na calculadora. Poderiam acontecer erros na colocação correta das casas decimais.

f) Quanto o pirulito recheado custa a mais do que a bala de iogurte?

Poderia ter criança que somasse os dois números $1,05 + 0,07 = 1,75$ em virtude da falta de compreensão e interpretação do enunciado. Se isso acontecesse, seria feita uma intervenção com exemplos envolvendo as próprias crianças, com lápis de cor, figurinhas, carrinhos,...

Para estes casos haveria necessidade de intervenção, para que conseguissem descobrir que a operação seria de subtração.

Como no item e, também poderia acontecer que contassem nos dedos, mas também seria previsto que montassem o algoritmo e resolvessem a operação. Algumas crianças fariam o cálculo na calculadora. Poderia acontecer erros na colocação correta das casas decimais.

- g) Se uma professora quisesse levar pirulito recheado para os seus 25 alunos, quanto em reais ela iria gastar?

Poderiam acontecer erros neste item, pois não dominariam os conceitos relacionados à operação de multiplicação com Números Decimais. Dessa forma, poderia aparecer o resultado sem a vírgula ou a vírgula colocada em lugar errado. Outro problema, poderia estar relacionado com a tabuada, apareceriam erros por falta de compreensão da tabuada.

Alguns alunos poderiam deixar em branco, mostrando a total falta de conhecimento acerca do assunto. Questionamentos seriam feitos para provocar e instigar a busca de soluções, mas não seria dada a resposta ou partes da mesma.

Se isso realmente acontecer e os alunos não conseguirem a resposta correta, tentar-se-ia uma intervenção conceitual para tratar da operação de multiplicação com Números Decimais, para que compreendessem o resultado 26,25 (resultado da multiplicação de 1,05 por 25).

Experimentação da atividade 4

As vinte crianças que estavam presentes foram divididas em duplas e as mesmas demonstraram interesse pela atividade 4. Não se recusaram a realizá-la por se depararem com frações, como geralmente acontece com os alunos de sexto ano, conforme experiência da prática docente da pesquisadora.

Na ocasião, conversamos sobre a maneira que os preços estavam representados. A discussão esclareceu que habitualmente não encontramos preços na forma numérica

fracionária, mas como eles já manifestavam facilidade para transitar entre os registros, não haveria dificuldade de olhar para o Número Decimal na sua representação fracionária.

A ideia era fazê-los perceber um registro nada usual para aquela situação, mas que devido à familiaridade com as representações e transformações entre estes registros, tornava-se natural o uso, entendendo todos os registros como representações semióticas do objeto matemático, necessários para mobilização da aprendizagem dos Números Decimais.

Os preços dos doces em registro numérico fracionário foram rapidamente convertidos em registro numérico decimal pelos alunos. A transformação era realizada mentalmente e usavam a língua natural para expressar o conhecimento acerca do uso das diferentes representações dos Números Decimais. O registro de partida foi o numérico fracionário e o de chegada o numérico decimal. Mostravam-se ágeis e se comunicavam oralmente para evidenciar a transformação realizada naturalmente.

Como o registro numérico decimal faz parte do cotidiano das crianças, elas não tiveram dificuldade para indicar a ordem crescente dos preços dos doces.

As tentativas de comprarem o maior número de doces e levarem o troco pedido pela mãe, no item b, fizeram com que os alunos realizassem diversas operações de adição e subtração com números decimais. As equipes que não conseguiram montar o algoritmo usavam a calculadora para chegar às conclusões.

No item c, os alunos tiveram oportunidade de diferenciar na língua natural um número decimal relacionado ao sistema monetário de um número decimal desvinculado do contexto de dinheiro. Essa era uma preocupação ao elaborar a atividade, pois o significado do sistema monetário R\$ 0,5 é diferente do significado de um número decimal “puro” 0,5. Dessa forma, eles precisariam perceber tais significados diferentes e, por isso a leitura diferente: cinco centavos e cinco décimos.

No item d, registraram 0,05 de várias maneiras diferentes, dentre elas, usaram registro figural contínuo, língua natural (usando o sistema monetário e usando as propriedades de números decimais), registro numérico fracionário, registro numérico na forma de porcentagem. A coordenação entre diferentes registros foi percebida na maneira natural com que lidavam com as transformações dos registros, supondo que aconteceram conversões.

As operações de subtração e de multiplicação das letras e, f e g também contribuíram com a aprendizagem, pois as previsões feitas nas análises *a priori*, mobilizaram aspectos conceituais necessários à aprendizagem dos Números Decimais, como por exemplo, o lugar

certo de colocar a vírgula para subtrair dois números decimais, a vírgula no lugar certo para dar o resultado da multiplicação.

Análise *a posteriori* e validação da atividade 4

A experimentação da atividade 4 revelou dados importantes para esta investigação, pois mostrou a naturalidade com que os alunos participantes da pesquisa estavam tendo com as transformações entre os registros.

O fato dos doces estarem no registro numérico fracionário, não causou estranheza aos alunos pela naturalidade que estavam tendo para lidar com a coordenação entre os registros. A atividade foi planejada para este momento da aplicação da sequência, com a intenção de investigar se o fato dos preços estarem na forma fracionária seria um empecilho para a continuidade da mesma.

A confirmação de que as representações estariam evocando o objeto matemático Números Decimais, apareceu na fala de A₂:

“Eu não tenho mais problema com as frações. Olhei para o preço da bala de iogurte em fração, mas na minha cabeça veio o preço dela com número de vírgula. Então eu consigo olhar para o número que está de um jeito e na minha cabeça já vem rapidinho o outro jeito. Ainda fechei os olhos e vi uma figura com cem partes e sete delas, estavam pintadas. E tem mais, logo imaginei sete por cento e também sou capaz de falar sete centésimos”.

A₂ em sua afirmação declarou conhecer os diferentes registros e ainda mostrou que sabe coordená-los com naturalidade. Observa-se que não teria dificuldade se o registro de partida fosse outro, pois dá pistas em sua fala que conhece e domina os outros registros, como numérico decimal (número de vírgula), registro figural (figura de cem partes com cinco pintadas), registro na língua natural (cinco centésimos) e registro na forma de porcentagem (sete por cento). Declarou que todos se referem à mesma quantidade.

A contribuição do contato com os registros de representação semiótica para a compreensão dos Números Decimais pode ser conferida no item a da atividade 4, em que noventa e cinco por cento dos alunos realizaram corretamente a transformação do registro numérico fracionário para o registro numérico decimal. Tal fato é exemplificado com a atividade realizada por A₃e A₉ :

Figura 61: Transformação de registro numérico fracionário para numérico decimal

| Doce | Fração | Número Decimal |
|-----------------------|------------------|----------------|
| Bala de iogurte | $\frac{7}{100}$ | 0,07 |
| Pirulito de coração | $\frac{20}{100}$ | 0,20 |
| Bala de banana | $\frac{5}{100}$ | 0,05 |
| Pirulito de chocolate | $\frac{50}{100}$ | 0,50 |
| Pirulito recheado | $\frac{5}{100}$ | 1,05 |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Para evitar repetições, os registros das outras duplas não serão expostos, pois todas conseguiram realizar corretamente as transformações. O índice de noventa e cinco por cento mencionado anteriormente se dá pelo fato de A₁₅ se recusar a desenvolver a atividade. O mesmo dormiu durante todo o tempo da aula. A₁₃, que estava fazendo dupla com ele, realizou a atividade sozinha.

No caso da figura 61 que retrata o resultado conseguido por todos, notamos a contribuição desta sequência de atividades para a compreensão dos Números Decimais. Duval (2011, p. 47) explica que “A dificuldade cognitiva vem do fato de que duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam”.

Dessa forma, diante das evidências retratadas nos registros dos alunos, podemos afirmar que o acesso ao objeto matemático tem sido cada vez mais alcançado, conforme o desenvolvimento das atividades desta sequência. A maioria dos alunos já estava realizando esta conversão em atividades anteriores, entretanto, com mais essa atividade envolvendo esta transformação de registro numérico fracionário para registro numérico decimal, todos os alunos, exceto A₁₅ conseguiram visualizar o conteúdo Números Decimais por duas representações diferentes (representação fracionária para representação decimal). Nesta atividade num único sentido, entretanto na atividade 3, foram observadas a ida e volta destas representações: de fracionária para decimal e de decimal para fracionária, além de outras, conferidas na atividade 3.

No item b, tiveram contato com as operações, envolvendo Números Decimais e também com estimativas sobre a quantidade de doces a comprar com R\$ 2,50 pois os outros R\$ 2,50 seria o troco a ser levado para a mãe, conforme explicitado no enunciado.

A₅e A₁₁ encontram uma resposta como exemplifica a figura 54.

Figura 62: Estimativas para a compra dos doces com R\$5,00

b) Quais são as opções de compra de Marcos? Inclua todos os tipos de doces na compra, de maneira que sobre o troco recomendado por sua mãe. Depois registre um possível resultado.

$1,05 = 1$ Pirulito Recheado
 $0,25 = 5$ Bolas de Borracha
 $0,21 = 3$ Bolas de Sorvete
 $0,40 = 2$ Pirulito de Caramelo
 $0,50 = 1$ Pirulito de Chocolate

Ele comprou 12 doces e ainda ficou com 9 centavos de lucro

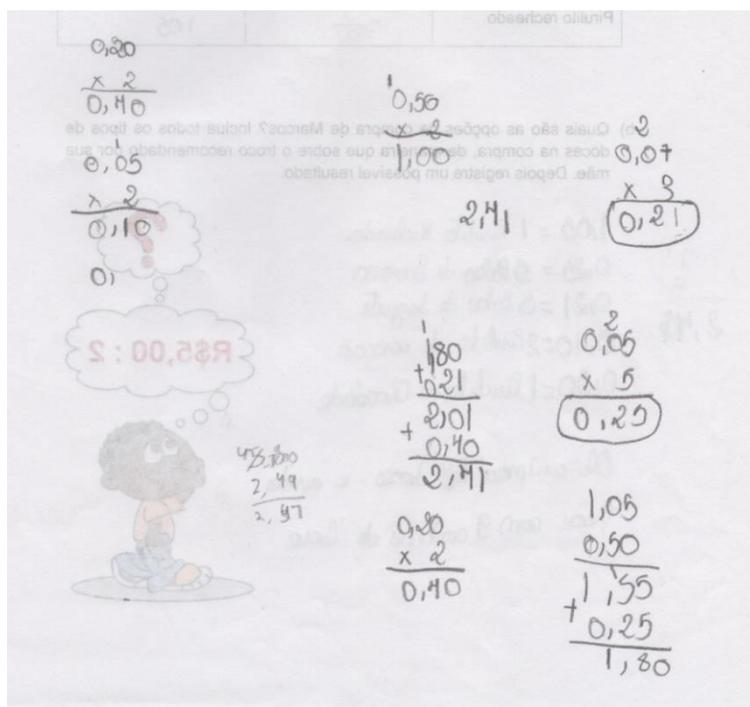
R\$5,00 : 2



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A dupla referida na ilustração, na busca por uma resposta coerente com o enunciado do exercício, realizou diversos algoritmos no verso da folha, conforme figura 55. Eles demonstraram ter conhecimento de operações envolvendo Números Decimais, pois sabiam o lugar certo de colocar a vírgula nos algoritmos utilizados.

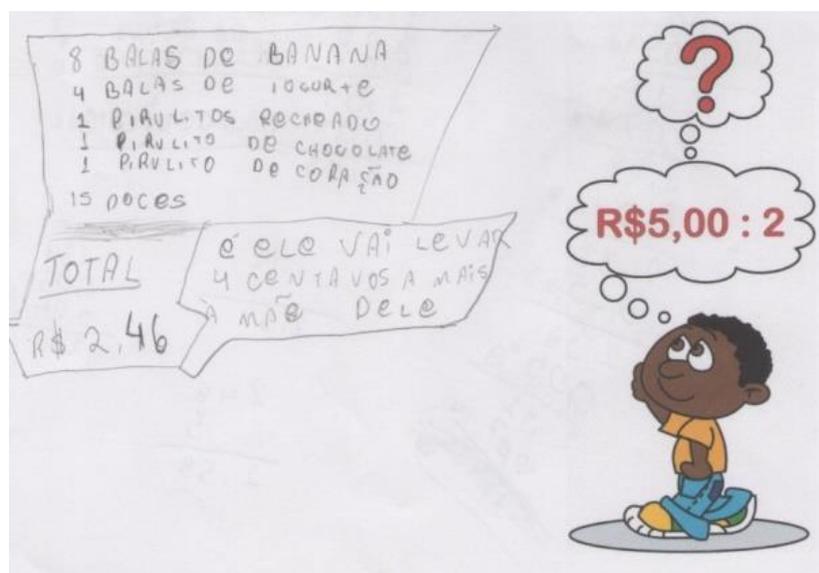
Dessa forma, A₅e A₁₁ realizaram com tranquilidade uma operação, chamada por Duval de tratamento cujas operações se deram no mesmo registro: numérico decimal. Estes alunos mostraram que conseguiram acesso aos conceitos envolvendo adição e multiplicação de Números Decimais.

Figura 63: Tratamentos realizados por A₅ e A₁₁

Fonte: Arquivo da pesquisadora

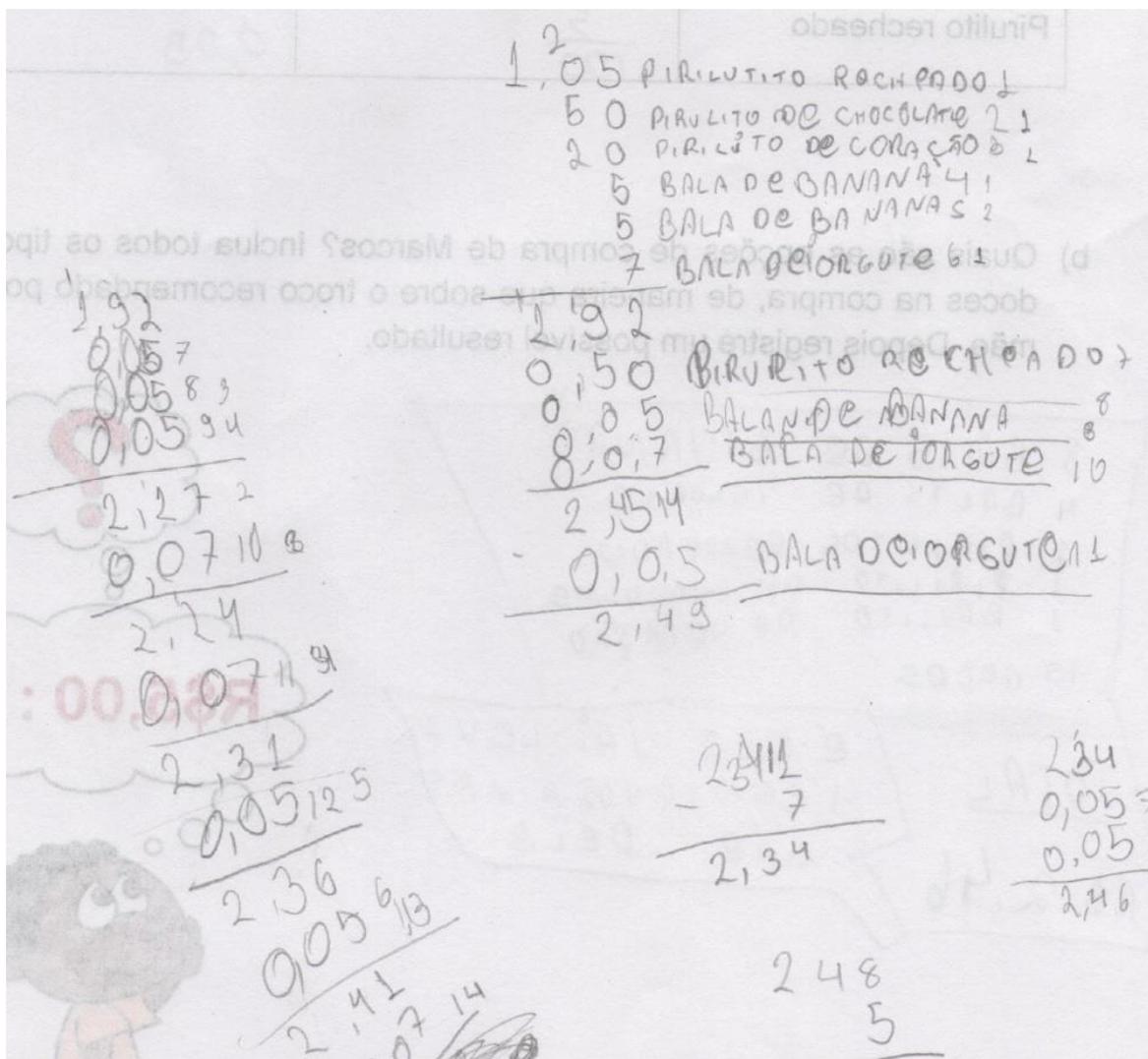
Percebe-se com a realização desta atividade que não houve dúvidas para realizar as operações propostas dentro do mesmo registro. Posteriormente investigaremos o uso de operações com registros de partida diferentes.

Outros resultados foram encontrados pelas demais duplas, entretanto, todos semelhantes a este encontrado por A₅ e A₁₁ como mostra a figura 56.

Figura 64: Estimativas para a compra dos doces com R\$5,00 por A₇ e A₁₆

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 65: Tratamentos realizados por A₇ e A₁₆



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A questão do tratamento no mesmo registro de partida não foi problema para os alunos participantes da pesquisa que lidaram com as operações de adição, subtração e multiplicação no registro numérico decimal sem demonstrarem dificuldades.

A habilidade em usar a língua natural também foi motivo de investigação nesta atividade 4. No item c, expuseram seus pensamentos acerca dos Números Decimais em língua natural, como mostra a figura 58, com um exemplo de A₄ e A₁₂ que abarcou o que todos os alunos fizeram.

Figura 66: Registros em língua natural por A₄ e A₁₂

| Nome do doce | Língua Natural (dinheiro) | Língua Natural (número decimal) |
|-----------------------|--------------------------------|---|
| Bala de banana | Cinco Centavos | 0,05 cinco centésimos |
| Pirulito recheado | Um real e cinco Centavos | 1,05 Um inteiro e cinco centésimos |
| Bala de iogurte | sete Centavos | 0,07 sete centésimos |
| Pirulito de coração | vinte centavos | Dois décimos 0,20 vinte centésimos |
| Pirulito de chocolate | Cinquenta Centavos Centavos | cinco décimos 0,50 cinquenta centésimos |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os alunos não confundiram o registro na língua natural do sistema monetário e o registro na língua natural da representação numérica decimal. Isso confirma a contribuição de situações que partam do sistema monetário para favorecer a compreensão dos Números Decimais. Este fato foi evidenciado na sequência de atividades com uma intervenção com cem moedas de um centavo, do qual se pegou cinco delas para representar cinco centavos. Daí saiu a fração cinco sobre cem: $\frac{5}{100}$ que também pode ser representada por zero vírgula zero cinco: 0,5. Tal fato foi, por várias vezes, lembrado pelas crianças no momento das transformações em que o registro de chegada era o numérico decimal.

A fala de A₄ neste momento de transformação exemplifica o parágrafo anterior.

“Bom...a bala de banana custa cinco centavos. Então é só pensar naquelas cem moedas que a professora trouxe, pegar cinco delas. Isso é a mesma coisa que a fração cinco centésimos e essa fala cinco centésimos é igualzinho a zero vírgula zero cinco”.

A₁₂ acrescentou:

“Dá para fazer o mesmo com outros valores. Por exemplo, o pirulito de chocolate custa cinquenta centavos que é cinquenta moedas de um centavo. Isso é a mesma coisa que cinquenta sobre cem ou cinquenta centésimos que em número com vírgula fica cinquenta centésimos. Olha que a fração e a escrita por extenso é a mesma: cinquenta centésimos. Opa ...espera aí... o mais certo é falar cinco décimos porque zero a direita do número não significa nada”.

Considera-se nestas falas de A₄ e A₁₂ a presença das representações para o acesso ao objeto matemático. A₄ em sua fala está mostrando que sabe transformar R\$0,05 em registro numérico fracionário $\frac{5}{100}$ e ainda faz a volta de fracionário para decimal quando informa o 0,05. A₁₂ tem o mesmo raciocínio, pois realiza as transformações nos dois sentidos, quando converte R\$ 0,50 em registro figural, deste em registro numérico fracionário $\frac{50}{100}$ e depois faz a volta de registro numérico fracionário para registro numérico decimal. Todas estas indicações de conversões foram explicadas oralmente por A₄ e A₁₂. Duval esclarece sobre a importância de trabalharmos a língua natural:

A originalidade e a força das línguas naturais se devem ao fato de que elas cumprem, ao mesmo tempo, funções de comunicação e todas as funções cognitivas. Ora, conforme privilegiamos as funções de comunicação ou, ao contrário, as funções cognitivas, ora consideramos as línguas como códigos ou, ao contrário, como registros (DUVAL, 2011, p. 74)

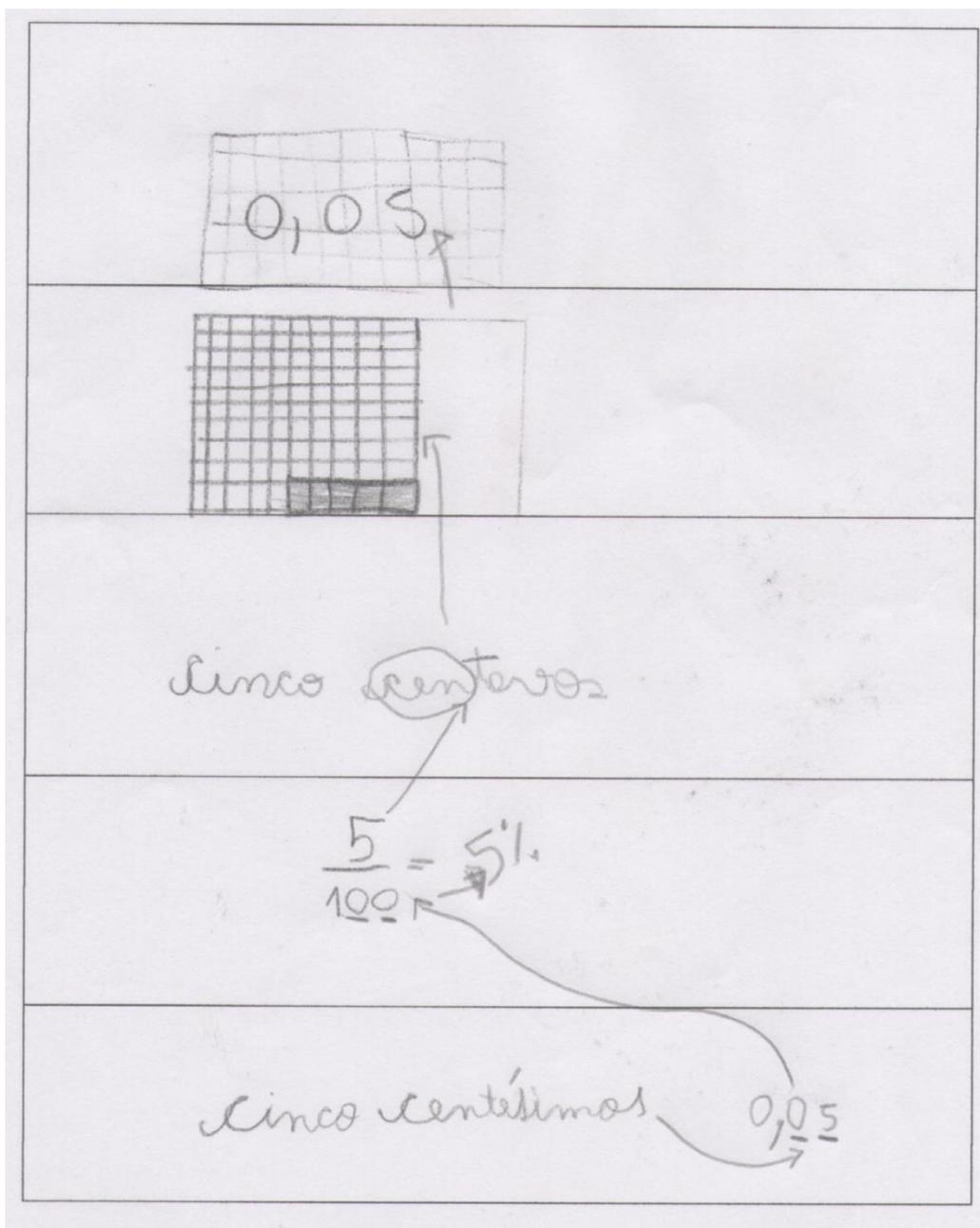
Com isso, vamos abordando na sequência de atividades a diversidade dos registros e as transformações entre elas. Neste item c, ao usar a língua natural fizeram transformações de registro numérico fracionário (pois os preços dos doces estavam em frações) para língua natural do sistema monetário e desta para registro numérico fracionário que rapidamente se transformou em registro numérico decimal, para finalmente chegar a partir dele, escrever o registro em língua natural.

Parece uma atividade simples, mas ao analisarmos a quantidade de transformações realizadas, pode-se perceber a contribuição dela para a aprendizagem do conteúdo. Pois, acreditamos, conforme Duval (2011, p.68), que “O que é matematicamente essencial em uma representação semiótica são as transformações que se podem fazer, e não a própria representação. Para analisar essas transformações, é preciso levar em conta a diversidade de tipos de representações semióticas”.

Nesta ótica de valorização das representações semióticas, no item d se propõe à identificação de alguns registros pelas crianças. Na atividade 3, investigou-se o uso da diversidade de registros pelos participantes da pesquisa, contudo o registro de partida foi o numérico fracionário. Neste contexto, o registro de partida também foi o numérico fracionário, mas pretendia-se investigar depois de uma semana da realização da atividade 3, se continuavam a usar todos os tipos de registros trabalhados.

E o resultado foi este apresentado na figura 59.

Figura 67: Registros de cinco centavos por A₁₄ e A₁₇



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Este foi o registro mais completo pela tentativa de explicação com flechas. Todas as outras equipes fizeram no mínimo quatro registros diferentes que se apresentaram como numérico fracionário, numérico decimal, numérico em forma de porcentagem, língua natural do sistema monetário, língua natural do registro numérico decimal, figural contínuo e figural discreto.

Essa dupla a que se refere a ilustração 59, além de utilizar conceitos de fração equivalente cujo registro foi encontrado no verso da folha, também identificou o registro na forma de porcentagem. O mais interessante é que quando terminou de escrever os registros, voltou conferindo e indicando com flechas que um registro era transformado em outro. Portanto, realizaram a ida e a volta das representações. Na análise destas transformações entre os registros, percebe-se a apreensão conceitual do objeto matemático. Nesse sentido, Duval (2011, p. 68) afirma que “Distinguir e classificar os tipos de representação semiótica utilizados na matemática é a primeira etapa para elaborar uma ferramenta de análise cognitiva das atividades matemáticas”.

Dessa forma, observa-se que a atividade favoreceu tal distinção e classificação dos registros semióticos, até porque mesmo passado uma semana, os participantes da pesquisa não se esqueceram dos registros trabalhados, concordando com a importância das transformações entre tais representações. A sequência de atividades tem se tornado uma ferramenta para a compreensão dos Números Decimais, pois valoriza transformações constantes entre os registros. Duval (2011, p. 57) orienta que “[...] para poder efetuar essas transformações, é preciso efetuar implícita ou explicitamente uma ida e volta constante entre as transformações de um tipo de representação e a de outro tipo”.

Os três últimos itens da atividade 4 foram para verificar a capacidade de realizarem operações de adição, subtração e multiplicação dentro de um mesmo registro: o numérico decimal. A garantia pela apreensão conceitual dos algoritmos se fez necessária, para que na atividade 5 pudessem realizar conversões partindo de operações de registros diferentes.

Foi necessária a sistematização de conceitos referentes ao posicionamento da vírgula no resultado da multiplicação envolvendo dois registros numéricos decimais. Eles entenderam rapidamente e aplicaram tais conhecimentos nas atividades realizadas, como mostra a figura 60, com os registros de A_1 e A_{18} .

Figura 68: Tratamento no mesmo registro (numérico decimal) realizado por A₁ e A₁₈

- e) Qual a diferença entre o preço do pirulito de chocolate e a bala de banana?

$$\begin{array}{r} 0,30 \\ 0,05 \\ \hline 0,45 \end{array}$$

A DIFERENÇA É 0,45 CENTAVOS DE REAIS

- f) Quanto o pirulito recheado custa a mais do que a bala de iogurte?

$$\begin{array}{r} 01,90 \\ 0,07 \\ \hline 0,98 \end{array}$$

O PIRULITO RECHEADO CUSTA 0,98 centavos a mais

- g) Se uma professora quisesse levar pirulito recheado para os seus 25 alunos, quanto em reais iria gastar?

$$\begin{array}{r} 1,05 \\ \times 25 \\ \hline 5,25 \\ 2,10 \\ \hline 26,25 \end{array}$$

ELA IRÁ GASTAR 26,25 R\$.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os registros acima mostram o conhecimento dos alunos (pois todos agiram de modo análogo a este) relacionado ao aspecto cognitivo chamado por Duval de tratamento, no qual os alunos realizaram as operações de subtração, adição e multiplicação de Números Decimais. Os sujeitos da pesquisa demonstraram saber operar dentro do mesmo registro, neste caso, o numérico decimal. As respostas deles também evidenciaram a transformação do registro numérico decimal para o registro na língua natural.

Assim, tivemos a certeza de que conseguiam operar dentro de um mesmo registro. A ideia foi investigar na atividade se as operações eram realizadas corretamente, para posteriormente observar o tratamento com registros diferentes.

Dessa forma, a atividade 4 deu continuidade à investigação, sendo parâmetro para analisar com mais veemência as transformações entre os registros, garantindo a compreensão deles em operações de conversões, pois favoreceram as seguintes transformações de ida: língua natural para representação numérica decimal e a volta: representação numérica decimal para língua natural.

O contato cada vez mais intenso com as representações e o incentivo às transformações entre elas, oportunizou ampliação do repertório de registros pelos alunos, bem como a análise de ordem conceitual dos avanços dessas representações em relação à aprendizagem dos Números Decimais, frente ao quadro teórico (*noésis*, *semiósis*, conversão, tratamento, forma decimal, forma fracionária, registro do número decimal em língua natural e registro figural) que se tornava cada vez mais transparente ao se deparar com os registros dos alunos.

Quadro 11: Tratamento realizado na atividade 4

| Registro | Alunos que realizaram o tratamento |
|----------------------------------|--|
| Registro numérico decimal | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₅ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Quadro 12: Visão geral das transformações realizadas pelos alunos na atividade 4

| Transformação entre os registros | Alunos que conseguiram realizar a transformação |
|---|--|
| Registro numérico fracionário para numérico decimal | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₅ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro Numérico Fracionário para língua natural do sistema monetário | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |

| | |
|---|--|
| Língua natural do sistema monetário para o registro numérico decimal | A ₁ ,A ₂ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₈ |
| Registro numérico fracionário para registro figural | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico fracionário para registro numérico em forma de porcentagem | A ₁ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ , A ₁₆ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico decimal para língua natural | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico decimal para registro numérico fracionário | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico decimal para registro figural | A ₃ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ |
| Registro figural para língua natural | A ₁ ,A ₂ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Língua natural para registro numérico decimal | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Língua natural para registro fracionário | A ₁ ,A ₂ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico em forma de porcentagem para registro numérico decimal | A ₄ , A ₁₇ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

O quadro acima permite analisar a pluralidade de registros utilizados pelos alunos e as transformações entre eles com apreciação de mudança nos registros de partida para registros de chegada. Essa investigação que constou na atividade 4 foi necessária para validação dos dados coletados em que se verifica a ação mental dos alunos frente a reversibilidade. Duval (2011) fundamenta a importância do trabalho com os registros de partida e de chegada quando afirma que:

Em uma transformação é preciso distinguir a transformação de partida e de chegada. Quando a transformação se realiza entre duas representações [...] a questão que se coloca é saber se a transformação inversa é cognitivamente equivalente à transformação direta, isto é, se existe ou não reversibilidade (DUVAL, 2011, p. 67).

Nesse sentido, observamos que a atividade 4 foi oportuna para investigar tal reversibilidade e o quadro 10 aponta as transformações entre os registros, contemplando diversos registros de partida e de chegada.

É visível, tomando como base o quadro acima, a pluralidade de registros utilizadas pelos alunos, que se tornou maior em relação às atividades anteriores. Entendemos que cada atividade da sequência contribui para o uso dessa diversidade na atividade 4.

Além da diversidade, notamos nessa fase da análise a facilidade encontrada pelos alunos em realizar as transformações entre os registros. Isso pode ser conferido pela quantidade de transformações realizadas entre os diferentes registros por eles.

Duval (2011, p. 40) cita a existência de dois problemas relacionados às representações semióticas para o conhecimento matemático: “a referência ao objeto” e as “ transformações em outras representação”. Com base nesta afirmação de Duval, a sequência foi elaborada para tentar suprir tais defasagens, e assim, potencializar as transformações das representações –*semiósis* - como meio para se chegar a *noésis*.

Mesmo já tendo indícios dos alunos que se utilizam da *semiósis* para chegar a *noésis*, faremos tais apontamentos somente na última atividade desta sequência, na intenção de confirmar mais algumas hipóteses.

Entretanto, é possível afirmar a contribuição da sequência de atividades para a compreensão dos Números Decimais, uma vez que Duval (2011) assegura que:

O fenômeno importante para compreender o papel da *semiósis* no modo como funciona o pensamento e na maneira como se desenvolvem os conhecimentos não é o emprego deste ou daquele tipo de signos, mas a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados. A *semiósis* é inseparável de uma diversidade inicial de tipos de signos disponíveis (DUVAL, 2011, p. 35)

A sequência de atividades proporcionou aos sujeitos da pesquisa acesso ao objeto matemático pelo estímulo ao uso da diversidade de registros, que naturalmente foram sofrendo transformações. Conforme maior número de transformações, maior foi sendo o poder argumentativo para se referir ao objeto e para confirmar as conversões pelas idas e voltas dos registros.

5.5 Atividade 5

Objetivo da atividade:

-Operar com os decimais em diferentes registros.

Registros de Representação explorados na atividade:

- Registro na língua natural;
- Registro numérico na forma de representação decimal;
- Registro numérico na forma de fração;
- Registro numérico na forma de porcentagem;
- Registro figural contínuo;
- Registro figural discreto.

Noções Matemáticas Exploradas:

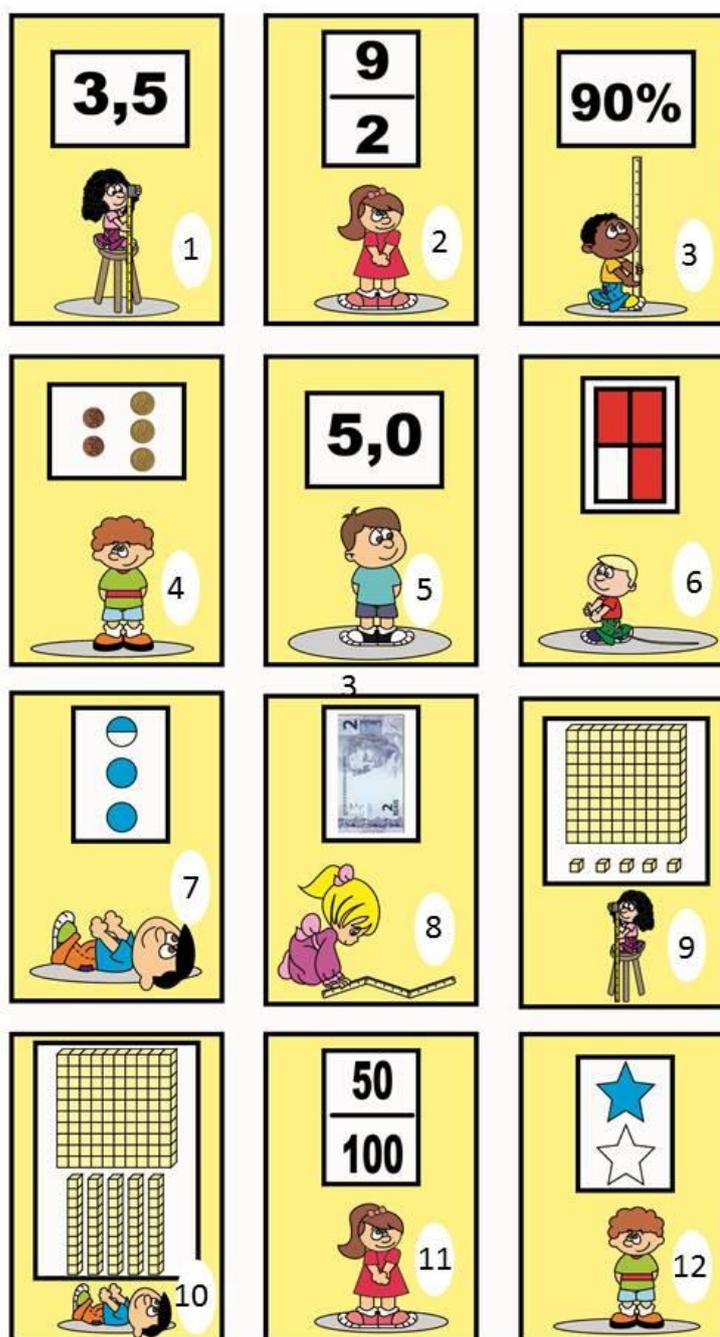
-Adição, subtração, multiplicação e divisão de números decimais.

Tempo de realização da atividade: 2 horas aula.

Atividade 5

Observe atentamente os cartões já usados na atividade 3 e realize as operações indicadas em cada item:

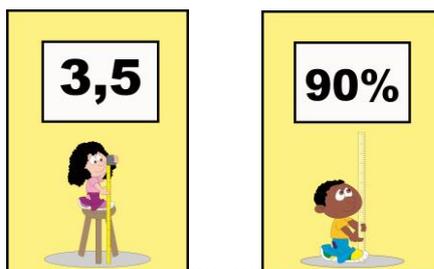
Figura 69: Ilustração 1 da atividade 3, usada também como ilustração 1 da atividade 5



Manuseiem os cartões, pensem em cada um imaginando a sua forma numérica decimal e resolva algumas operações em decimais:

- a) Adicione os registros numéricos decimais referentes aos cartões 1 e 3.

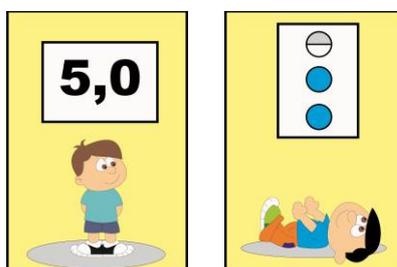
Figura 70: Registro numérico decimal adicionado com registro numérico na forma de porcentagem



Fonte: Arquivo da pesquisadora

- b) Qual a diferença entre os registros numéricos decimais relacionados aos cartões 5 e 7.

Figura 71: Registro numérico decimal subtraído de registro figural discreto

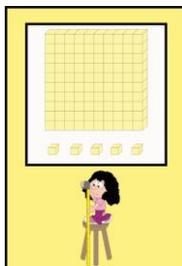


Fonte: Arquivo da pesquisadora

- c) Multiplique o registro numérico decimal que corresponde ao cartão 9 por 5

Figura 72: Registro figural multiplicado

por número inteiro

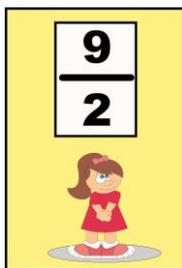


Fonte: Arquivo da pesquisadora

- d) Divida o resultado numérico decimal que corresponde ao cartão 2 pelo número 3.

Figura 73: Registro numérico fracionário dividido

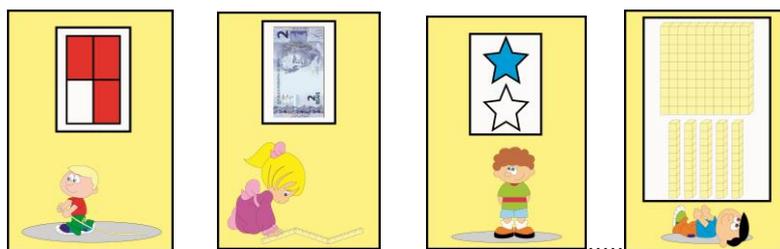
por número inteiro



Fonte: Arquivo da pesquisadora

- e) Adicione os registros numéricos decimais correspondentes aos cartões 6, 8 e 12 e em seguida multiplique o resultado pelo registro numérico decimal relacionado ao cartão 10.

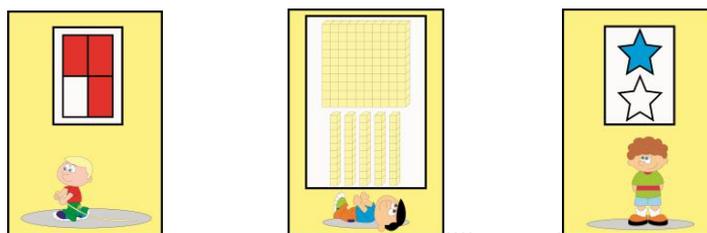
Figura 74: Operações com Números Decimais partindo de diferentes registros



Fonte: Arquivo da pesquisadora

- f) Multiplique o registro numérico decimal que corresponde ao cartão 6, pelo registro numérico decimal que corresponde ao cartão 10. Em seguida, divida o resultado pelo registro numérico decimal relacionado ao cartão 12.

Figura 75: Operações com Números Decimais partindo de diferentes registros



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Análise *a priori* da atividade 5

Com a atividade proposta, teríamos a intenção de potencializar as conversões em seus variados sentidos e ainda proporíamos uma discussão sobre as operações com decimais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), enfatizam o trabalho com as operações, mostrando que “se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos”. O mesmo documento norteador dos conteúdos programáticos escolares, explicitaria em seus objetivos a importância da identificação, interpretação, utilização de diferentes representações, indicadas por diferentes notações. Nesse sentido, ao explorar registros numéricos de diferentes formas e operar com eles, atenderíamos o que recomenda o documento oficial e ainda divulgaríamos uma teoria que poderia trazer contribuições para o ensino e a aprendizagem dos Números Decimais.

Trataria-se, então, de uma exploração que atenderia os seguintes registros: registro na língua natural; registro numérico na forma de representação decimal; registro numérico na forma de fração; registro numérico na forma de porcentagem; registro manipulável; registro figural contínuo e registro figural discreto, numa relação que instigaria as conversões nos dois sentidos.

Todo trabalho desenvolvido nas atividades anteriores poderiam subsidiar a realização das operações previstas nessa atividade. Teríamos a intenção de investigar a evolução do pensamento dos alunos sobre a existência de diversos registros de representação semiótica, bem como o entendimento acerca das conversões.

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de comparar e ordenar números [...] racionais; reconhecendo suas diferentes formas de expressão como fracionária, decimal e percentual; representar na forma decimal um número racional expresso em notação fracionária; efetuar cálculos envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão [...]; escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas (BRASIL, 1998, p. 76).

De acordo com a prática docente da professora/pesquisadora e convívio com outros professores da área de matemática, geralmente, as operações com números racionais seriam trabalhadas isoladamente, primeiro com a forma numérica fracionária e depois com a forma numérica decimal, sem a preocupação com as transformações entre os diferentes registros. A experiência de dezoito anos da professora/pesquisadora em sala de aula revela que nos livros didáticos haveria uma preocupação com os tratamentos num mesmo registro; normalmente apenas o numérico é enfatizado. Em raros casos, incentivar-se-ia um pensamento relacionado com conversões, principalmente quando se trata de operações.

A primeira ação da atividade 5, suporia diversas conversões mentais, nas quais os alunos olhariam para os diversos cartões em suas mais variadas representações e tentariam converter mentalmente para o registro numérico decimal. A hipótese seria que alguns conseguiriam pensar mentalmente, já outros necessitariam de cálculo auxiliar para chegar à conversão. Entretanto, poderiam aparecer dificuldades nas transformações para registro figural ou até mesmo fracionário, cujo denominador não é aparentemente o cem. Caso acontecesse tal fato, as crianças seriam questionadas e levadas a pensar no denominador cem de cada uma.

A sugestão que seria dada após esta ação mental, é que registrassem ao lado de cada cartão a representação decimal, isso facilitaria as operações que teriam que realizar.

- a) Seria provável que, nesta operação de adição, não encontrassem dificuldades e que conseguissem fazer a conversão de percentual para decimal e, em seguida, organizariam corretamente as casas decimais e chegariam na resposta correta. No entanto, poderiam acontecer erros de cálculo, por algum descuido e desatenção. Caso fossem percebidos erros com relação aos conceitos dos Números Decimais, no caso, não fazer correspondência entre as casas decimais, recorrer-se-ia às atividades que

seriam fotografadas antes das discussões e, em seguida, aconteceria uma intervenção para a efetivação dessa compreensão. O fato das atividades serem fotografadas antes das intervenções, garantiriam a veracidade das ideias produzidas pelos alunos para posterior avaliação dos avanços. A ideia seria fazer uma adição, utilizando as peças do material dourado para que, olhando o formato e tamanho das peças, pudessem entender que parte inteira juntar-se-ia com parte inteira e cada parte decimal com a sua parte decimal correspondente. Esse recurso concreto poderia facilitar o entendimento do conceito relacionado à adição de números decimais, em que se deve colocar vírgula embaixo de vírgula para respeitar a junção das casas decimais de mesma natureza.

$$\begin{array}{r} 3,50 \\ +0,90 \\ \hline 4,40 \end{array}$$

Propositalmente, e na operação de adição desse item, não seriam disponibilizadas calculadoras, para que pudessem fazer o registro completo da operação.

- b) A operação de subtração entre os cartões de registro numérico decimal e registro figural discreto, exigiria uma destroca da parte inteira para a parte decimal, e poderia ser que fizessem tal ação de destroca de maneira mecânica, sem o devido entendimento conceitual. Devido à intervenção realizada no item a, é provável que não apresentariam dificuldades para organizar o minuendo e o subtraendo, respeitando a correspondência entre as casas decimais. Mas ter-se-ia a previsão de fazer questionamentos sobre a destroca de um inteiro para dez décimos e a sua relação de equivalência. Dessa forma, mesmo tendo realizado o algoritmo corretamente, seriam questionados: Quanto da parte inteira foi destrocada (emprestada) e com quanto a parte decimal ficou?

$$\begin{array}{r} 5,0 \\ -2,5 \\ \hline 2,5 \end{array}$$

Poderia ser que alguns alunos conseguiriam realizar a operação mentalmente e rapidamente informariam o resultado. Outros tentariam buscar auxílio na calculadora, que neste momento, diferente do item a, estaria à disposição dos alunos. Assim sendo, encontrariam a resposta, mas teriam dificuldade para explicar o procedimento realizado. Isso mostraria a falta de compreensão sobre a operação.

- c) A operação de multiplicação com Números Decimais seria pouco estudada nos anos iniciais, por ser o último conteúdo anual. Em virtude do final do período letivo, os alunos teriam pouco contato com este tipo de algoritmo no conteúdo escolar.

De posse do número decimal do cartão nove que é 1,05, poderiam realizar a operação de multiplicação como se estivessem resolvendo uma multiplicação com números naturais, entretanto não se atentariam ao fato de que o resultado também deveria ser decimal. Por isso, seria realizada uma discussão conceitual sobre a semelhança entre operação de multiplicação com Números Decimais e a operação de multiplicação com números naturais, entretanto a importância da contagem das casas decimais para se colocar a vírgula no resultado é que faria a diferença.

$$\begin{array}{r} 1,05 \\ \underline{\times 5} \\ 5,25 \end{array}$$

Na intenção de verificar a compreensão dos alunos, seria proposta a realização de uma outra multiplicação que certificaria o entendimento ou a necessidade de mais intervenções, até que o conceito estivesse efetivado.

$$\begin{array}{r} 234,2 \\ \underline{\times 1,3} \\ 7026 \\ + \underline{2342} \\ 304,46 \end{array}$$

Seria oportuno comentar que “pular-se-ia” uma casa quando fosse iniciada a multiplicação da parte inteira do multiplicador, porque a parte inteira estaria multiplicando os décimos, que deveriam ser colocados embaixo dos décimos já existentes.

d) A operação de divisão de Números Decimais é praticamente desconhecida pelos alunos no primeiro semestre do sexto ano do Ensino Fundamental. A princípio, teriam que converter o registro numérico fracionário em registro numérico decimal, conforme o enunciado. Depois, poderiam chegar à resposta, fazendo uso da calculadora, já que o algoritmo de divisão não seria usual por eles. Mesmo assim, seria pedido para que tentassem resolver o algoritmo, pensando na divisão da parte inteira e depois na divisão da parte decimal para que iniciassem um processo de conjecturas acerca do conceito de divisão de Números Decimais. Supomos que encontrariam dificuldades para pensar sobre essa divisão. Dessa forma, no sentido de institucionalizar o saber, seria realizada uma divisão com uso do material dourado que facilitaria o entendimento. Por exemplo 2,8. Para isso, seriam utilizadas duas 2 placas e oito barras do material dourado. Seria iniciada a divisão de duas placas para duas pessoas e, com isso, dividir-se-ia a parte inteira, fazendo-se a indicação dessa divisão e informando-se no quociente o número 1, pois cada um ficou com uma placa. Depois, dividir-se-iam os décimos, que são oito, para as mesmas duas pessoas, cada uma receberia 4 barras e imediatamente seria registrado no quociente este resultado 4 como continuidade da divisão. A ideia seria fazer isso com as próprias crianças como numa dramatização. Também, poderia se pedir para as crianças pensarem na divisão de 29,5 por quatro. Esperar-se-ia que conseguissem realizar esta divisão, mas prevendo também que não conseguissem, seria proposta mais uma dramatização envolvendo os próprios alunos, as peças do material dourado e o quadro de giz. No caso da divisão de 29,5 por quatro seguiríamos a seguinte resolução:

- 29 unidades (parte inteira) divididas por 4 crianças seria igual a 7 unidades para cada uma, que seria registrada como quociente (indicaria a divisão da parte inteira) por isso, colocar-se-ia a vírgula no quociente para separar o resultado da divisão da parte inteira com a divisão da parte decimal. Da divisão da parte inteira restaria 1 unidade e, esta sobra seria convertida para décimos e se juntaria aos décimos já existentes, portanto 15 décimos que seriam divididos para quatro crianças e cada uma ficaria com 3 décimos e ainda sobrariam 3 décimos que equivaleriam a 30 centésimos. Estes 30 centésimos poderiam ser divididos pelas quatro crianças, ficando com 7 cada uma e ainda sobrariam dois centésimos que equivaleriam a vinte milésimos. Estes poderiam

ser divididos pelas quatro crianças, ficando 5 para cada uma. Dessa forma, cada criança fica com três inteiros e trezentos e setenta e cinco milésimos.

Supomos que tal intervenção, relacionada ao algoritmo de divisão com Números Decimais, colaboraria com a compreensão desta operação para que pudessem então resolver o que havia sido proposto no item d, da atividade 3. Preveríamos um tempo maior para este item, já que seria necessária a sistematização de conceitos relacionados à divisão de Números Decimais.

- e) Nesta adição, envolvendo vários registros diferentes, poderiam ocorrer erros de cálculos, mas a hipótese é que os alunos não cometeriam equívocos relacionados à transformação entre os registros. Avaliar-se-ia neste momento a naturalidade em lidar com os registros, naturalidade esta conseguida nas atividades anteriores, entretanto os educandos demonstrariam a capacidade em operar com os registros, mesmo estando em representações diferentes. Tínhamos a intenção que todas as transformações para registros numéricos decimais aparecessem desta forma:

$$0,75 + 2,00 + 0,50 = 3,20 \times 1,5 = 4,8$$

Não se poderiam negar erros advindos da falta de memorização da tabuada e até mesmo desatenção, em relação aos cartões, mas conferir-se-ia o desempenho dos alunos em realizar esta conversão já que em atividades anteriores teriam demonstrado acesso ao objeto matemático. Ainda neste item, os alunos seriam instruídos para usarem a calculadora para conferirem os fatores da tabuada que se mostrassem duvidosos, na intenção de se evitar esse tipo de erro.

- f) Nesse item, depois de terem certeza dos registros numéricos decimais dos cartões, ou seja, realizarem as conversões, a hipótese é que os alunos fariam tentativas para acertar o algoritmo de multiplicação e de divisão. Caso isso não ocorresse, poderíamos levar em consideração que o tempo para entendimento das operações, principalmente de divisão, tivesse sido insuficiente para gerar aprendizagem. Neste caso, surgiria a necessidade de uma abordagem em pesquisas futuras, envolvendo apenas as operações de multiplicação e divisão. Acreditávamos que seriam capazes de transformarem os

registros e organizarem os algoritmos de multiplicação e divisão em busca das respostas corretas.

$$0,75 \times 1,5 = 11,25 : 0,5 = 2,25$$

Assim sendo, por meio de uma variável microdidática⁶, organizou-se a fase das Análises a Priori em cada atividade, que julgáramos de fundamental importância para a confrontação de dados e verificação dos resultados no momento das análises. É válido lembrar que as Análises a Priori foram cautelosamente adequadas, após testagem da sequência de atividades para uma criança em idade escolar de sexto ano e que não participaria da pesquisa posteriormente. Dessa maneira, as atividades também sofreram pequenas alterações, para se apresentarem da forma como estão, visando evitar equívocos por falta de entendimento dos enunciados.

Experimentação da atividade 5

Para a experimentação da atividade 5, estiveram presentes os vinte alunos participantes da pesquisa e esta última atividade da sequência foi realizada individualmente por eles. Tivemos a intenção de investigar o desempenho dos sujeitos da pesquisa quanto às transformações entre os registros, coordenação e operação entre eles.

Nesse sentido, essa última atividade confirmou resultados obtidos anteriormente por alunos que já estavam realizando conversões e intensificou a atenção àqueles que apresentavam dúvidas para coordenar diferentes registros referentes aos Números Decimais.

O item a foi realizado com segurança e tranquilidade por todos, inclusive por A₁₅ que nas últimas atividades se mostrava disperso. Eles conseguiram transformar noventa por cento para o registro numérico decimal e adicionar com três inteiros e cinco décimos.

Os demais itens tiveram alguns equívocos por parte de alguns alunos como mostrará a análise a posteriori. Entretanto, no geral, eles não apresentaram dificuldades para a realização

⁶Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis potenciais que serão manipuladas pelo pesquisador: as variáveis macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia e as variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase. Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos) (ALMOULOU, COUTINHO, 2008, p. 67).

da atividade 5. Demonstraram que as intervenções realizadas em cada item relacionadas aos conceitos operacionais dos Números Decimais foram compreendidos pela maioria.

As transformações entre os registros, foco de estudo desta pesquisa, foram alcançadas de tal forma que foi possível identificar a naturalidade com que lidaram com tais mudanças. Percebemos, durante a experimentação da atividade 5, segurança, agilidade, independência e conhecimento para realizar as tarefas propostas.

Para essa realização das atividades, fizeram uso da calculadora para conferir os resultados, manusearam os cartões e não necessitaram do material dourado para verificar algumas transformações envolvendo o registro figural. Notou-se que as operações mentais, envolvendo essas mudanças de registros, tornavam-se mais frequentes e mais seguras, por isso não tinham necessidade de manusear o material ou desenhar no papel os registros figurais. Os alunos se mostraram com capacidade para abstrações e disposição para terminar as atividades.

Neste dia, o tempo com os alunos foi maior, usamos três aulas, sendo duas para a realização da atividade 5 e uma para uma avaliação oral deles quanto à participação na pesquisa e confraternização.

O último dia da experimentação foi marcado por gratidão da professora/pesquisadora pela participação e assiduidade dos alunos na pesquisa, bem como o comprometimento deles com a compreensão do conteúdo.

Análise *a posteriori* e validação da atividade 5

Os resultados foram positivos na aplicação da sequência como um todo, entretanto a atividade 5, realizada individualmente, apresentou um desfecho que confirmou hipóteses da contribuição da sequência de atividades para a compreensão dos Números Decimais.

Para iniciar a atividade 5, a maioria dos alunos optou por realizar todas as transformações necessárias para que o registro numérico decimal fosse o registro de chegada. Isso porque em todos os itens havia a necessidade dessa transformação, já que a atividade visava às transformações entre os registros, para se chegar às diversas representações semióticas dos Números Decimais. Este fato foi percebido assim que a atividade foi entregue

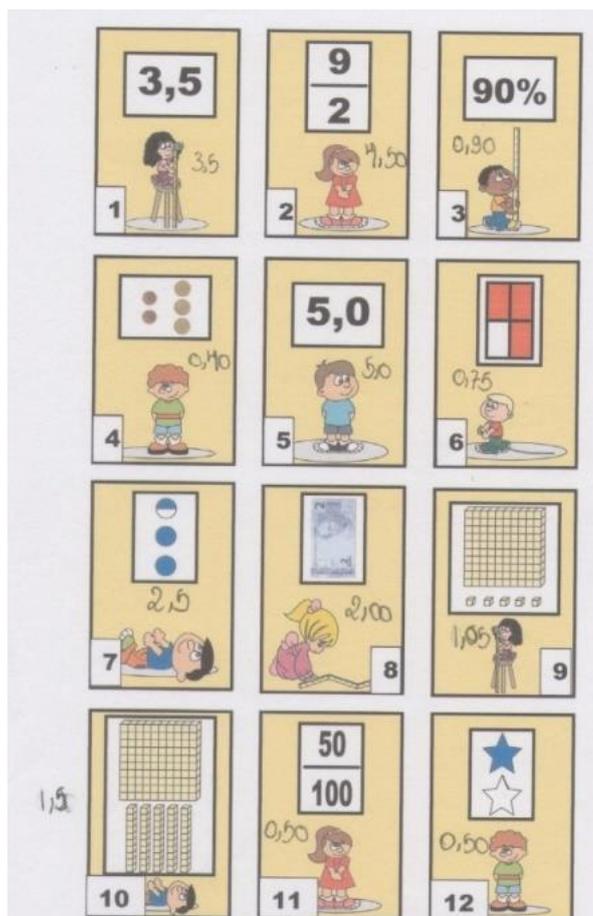
aos alunos e a maioria deles iniciaram os registros numéricos decimais nos cartões que apresentam outras representações diferentes da numérica decimal.

A pesquisadora questionou o porquê estavam realizando aquelas mudanças de registros e A₃ respondeu:

“É para facilitar professora. Eu já li que em todas as letras vou precisar do número com vírgula, então já vou fazer a mudança de todos”.

A₃ respondeu com segurança e registrou rapidamente todos os registros numéricos decimais, como exemplificado na figura abaixo:

Figura 76: Transformações para o registro numérico decimal



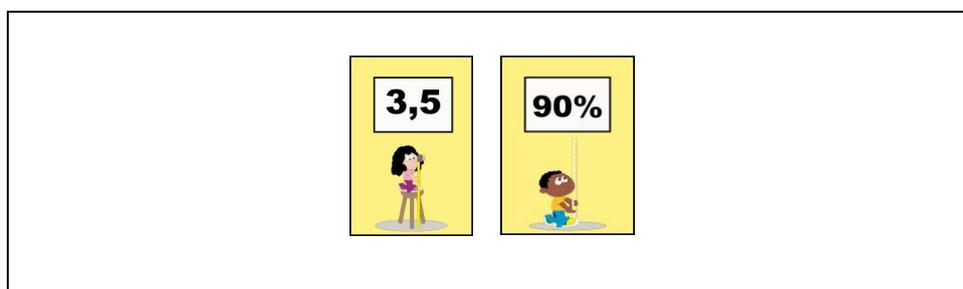
Fonte: Arquivo da pesquisadora

A₃ demonstrou em atividades anteriores que coordenava diferentes registros de representação semiótica, pois não apresentou dificuldade quando se inverteu o registro de partida e de chegada. Ele demonstrou converter todos os registros trabalhados. Em atividades que solicitava as diversas representações de um determinado registro, A₃ mostrou conhecer a pluralidade de registros. As argumentação de A₃ indicaram seu acesso ao objeto matemático pois conforme Duval (2011, p. 73) “As operações semióticas próprias aos diferentes registros utilizados na matemática constituem os gestos intelectuais necessários em não importa qual atividade matemática”.

Os cartões da atividade 5 trouxeram a diversidade de registros e A₃ soube transformar com liberdade essa pluralidade de registros. Isso permite dizer que A₃ realizou conversões. Tal afirmação foi feita com o acompanhamento de A₃ em todas as atividades da sequência que gradativamente foi evidenciando a transformação dos diferentes registros nos dois sentidos.

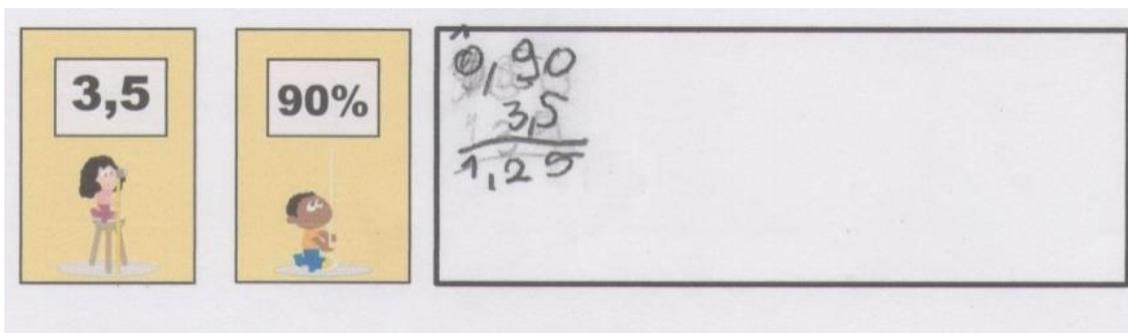
Outras ações cognitivas dos alunos permitiram apontar conversões. Para isso, o quadro 9 ajuda lembrar o solicitado aos alunos no item a.

Quadro 13: Retomada do enunciado do item a da atividade 5 : $3,5 + 90\%$



Este item da atividade 5 foi realizado por todos os alunos participantes da pesquisa, inclusive por A₁₅ que parecia não ter compreendido nenhuma transformação. Ele errou o algoritmo, pois ainda não tinha compreendido a relação entre as casas decimais, mas conseguiu realizar a transformação de porcentagem para registro numérico decimal como pode ser conferido na figura 69.

Figura 77: Transformações para o registro numérico decimal por A₁₅

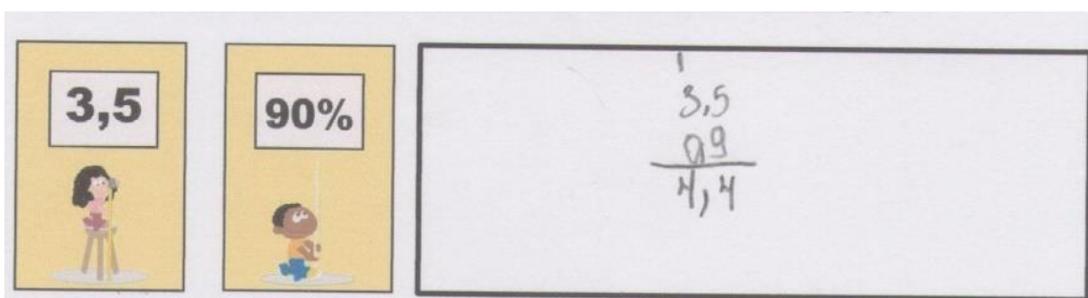


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Acreditamos que o tempo para a aprendizagem do conteúdo por A₁₅ foi curto para esse aluno. O referido aluno necessitava de um período maior para ter acesso ao objeto matemático. Acreditamos que o déficit de atenção dele interferiu na compreensão, uma vez que não conseguiu manter atenção por muito tempo nos momentos de sistematização dos conceitos pelas professora/pesquisadora.

Por outro lado, tivemos a maioria dos alunos realizando a transformação e o algoritmo corretamente como mostra a figura 70.

Figura 78: Conversão e tratamento realizados por A₁₀



Fonte: Arquivo da pesquisadora

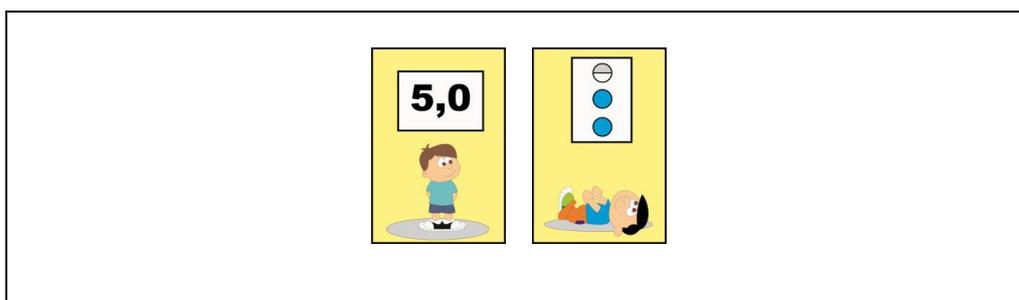
A conversão é percebida nesta atividade pela operação realizada entre registros diferentes (90% para 0,90) e pela observação de A₁₀ em atividades anteriores que conferem a transformação dos registros envolvidos em dois sentidos: ida e volta. Esse aluno transformou a porcentagem em registro numérico fracionário (mas anteriormente já tinha transformado o registro numérico fracionário em porcentagem) e depois transformou este registro em numérico decimal (anteriormente demonstrou habilidade para transformar o registro numérico

decimal em registro numérico fracionário) para chegar ao tratamento numérico decimal. Acreditamos que o fato de a maioria ter conseguido chegar às transformações necessárias para este caso, deve-se aos estímulos com a diversidade de registros realizados nas atividades anteriores. Também foi possível observar a espontaneidade dos alunos para tal ação cognitiva. Duval (2011, p. 99) afirma que “ As operações próprias de cada registro são as operações cognitivas. Isso significa que o sujeito deve ter consciência para poder cumpri-las intencional e espontaneamente”.

Podemos perceber neste item que os alunos realizaram uma operação cognitiva quando transformaram 90% em $90/100$ e em $0,90$. Muitos deles mudaram primeiro o registro em forma de porcentagem para o registro numérico fracionário e depois para numérico decimal, sendo auxiliados, dessa forma, por um registro intermediário. Também precisaram perceber que não se poderia operar com registros diferentes sem a necessária transformação. Dessa forma buscaram no repertório de registros essa transformação para que fosse possível algoritmizar.

O mesmo ocorreu com o item b, em que precisaram recorrer ao repertório de registros e realizar a conversão de um registro figural discreto para um registro numérico decimal.

Quadro 14 : Retomada do item b da atividade 5: $5,0 - 2,5$



Não apresentaram dificuldade para esta transformação e visualizaram imediatamente $2,5$ no registro figural discreto apresentado. Também não foram percebidos erros com relação ao posicionamento das vírgulas para montar o algoritmo e dar a resposta correta.

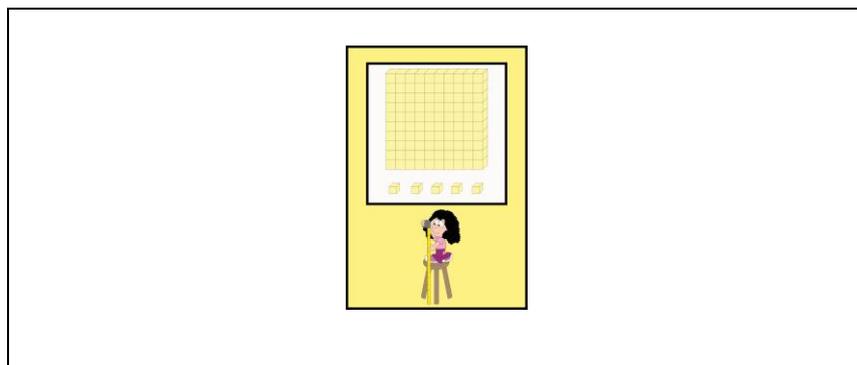
A exemplo de A_{19} , todos procederam de forma análoga:

Figura 79: Conversão e tratamento realizados por A₁₉

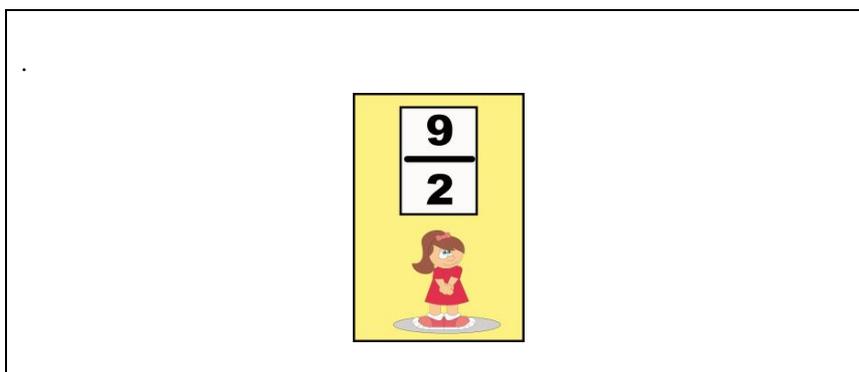
Fonte: Arquivo da pesquisadora

As operações de adição e subtração, envolvendo diferentes registros, não foram dificuldades para os sujeitos da pesquisa. Acreditamos que o planejamento desta sequência de atividades com a pluralidade de registros e as propostas para transformar e inverter registros de partida e de chegada, culminaram em conversões como estas apresentadas para os item a e b, respectivamente. Conversões estas que Duval afirma ser de extrema importância para a compreensão do conteúdo. Duval (2011, p. 100) considera que “ A conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática. Ela é também o lugar em que se opera a tomada de decisão do funcionamento representacional próprio de cada registro”. Nesse sentido, percebemos que o conhecimento da pluralidade de registros indicou a tomada de decisão para a escolha da representação adequada para a realização do algoritmo, tanto de adição como de subtração.

Os itens c e d apontaram dados de compreensão dos aspectos conceituais das operações de multiplicação e divisão de Números Decimais, bem como a transformação dos registros: figural no item c e numérico fracionário no item d, ambos para o registro numérico decimal.

Quadro 15: Retomada do item c da atividade 5: $1,5 \times 5$ 

Quadro 16: Retomada do item d da atividade 5: $\frac{9}{2} : 3$



As atividades da forma como foram apresentadas aos alunos, permitiram interpretação e iniciativa, pois os alunos demonstraram facilidade para transformar os registros a partir de diversos pontos de partida com a intenção de visualizar o registro numérico decimal como ponto de chegada deles.

Dessa forma, acreditamos que conseguiram perceber as relações entre os diferentes registros dos Números Decimais.

Vale lembrar que a partir do item c, A₁₅ não quis realizar as atividades e ficou perturbando os demais colegas. Todos os outros participantes da pesquisa apresentaram resultados positivos nestes itens, pois conseguiram terminar a atividade corretamente. Foi interessante constatar que mesmo sem solicitar, a maioria deles (15 alunos) escreveram a resposta fazendo uso da língua natural. Isso indica o acesso dos alunos ao objeto matemático – Números Decimais – e a contribuição das conversões para que este acesso acontecesse.

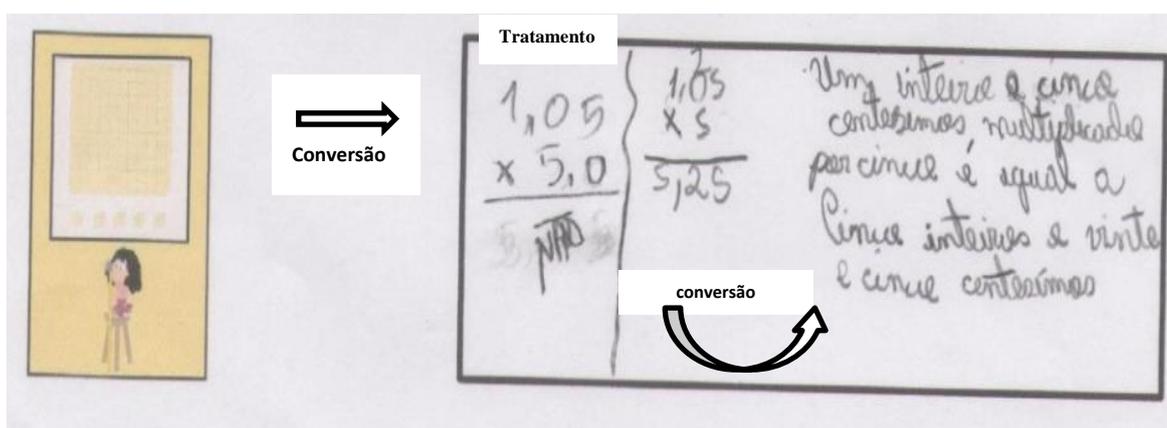
Com o contato gradativo dos sujeitos da pesquisa com a sequência de atividades, foi possível identificar avanços consideráveis relacionados à articulação entre os registros, de tal forma que eles conseguiram reconhecer qualquer representação dos Números Decimais. Como se pode observar, a ênfase desta investigação se deu na apresentação, transformação entre os registros e nas operações no quadro numérico decimal.

A necessidade de investigação, com relação à inversão entre registros de partida e chegada, foi analisada em atividades anteriores. No caso específico desta atividade, priorizamos a pluralidade de registros, instigando os alunos a realizarem conversões para o registro numérico decimal, oportunizando, em seguida, a realização de tratamento com este registro.

Essas conversões para representação decimal, envolvendo tratamento decimal são exemplificadas nos registros de A₁₁ e A₁₈, respectivamente. Os demais alunos também

realizaram os mesmos tipos de conversões, entretanto detalharam um pouco mais a maneira que pensaram. De modo geral, os objetivos foram alcançados pela maioria.

Figura 80: Conversões e tratamentos realizados por A₁₁



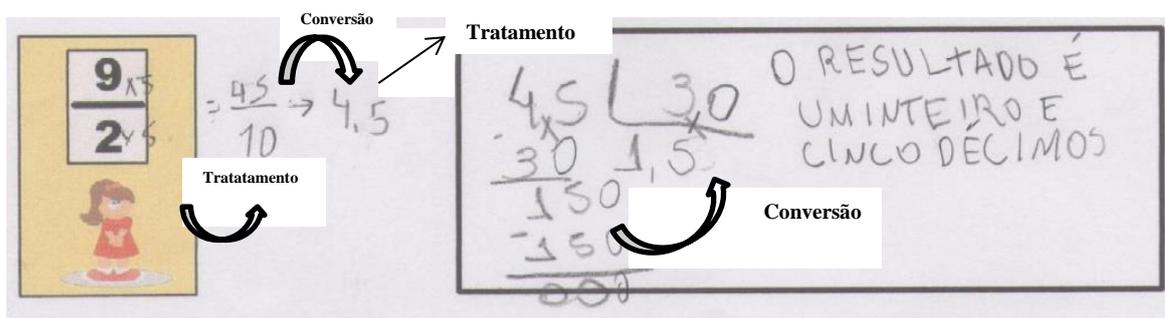
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Pelos registros de A₁₁, podemos conferir que fez uma conversão do registro figural para o registro numérico decimal, em seguida, montou o algoritmo, colocando cinco vírgula zero, desconsiderou o primeiro algoritmo escrito, pois lembrou-se da inutilidade do zero a direita da vírgula. Na sequência, realizou tratamento numérico para a representação numérica decimal. E, para concluir a atividade, descreveu o procedimento utilizado, fazendo uso da língua natural.

Acreditamos que A₁₁, ao transitar livremente pelos diferentes registros, demonstrou acesso ao objeto matemático, evidenciando pelas representações, apreensão conceitual dos Números Decimais, sobretudo por ter descrito em língua natural o procedimento de conversão e operação de multiplicação entre os Números Decimais 1,05 e 5,0.

Da mesma forma, A₁₈ evidenciou por meio de seus registros, que coordenou diferentes registros e manifestou conhecimento dos Números Decimais. Tais evidências aparecem com a pluralidade de registros do seu repertório individual e a naturalidade para sair de um registro e ir para o outro.

Figura 81: Conversões e tratamentos realizados por A₁₈



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A₁₈ saiu do registro numérico fracionário para outro registro numérico fracionário, realizando um tratamento numérico na representação fracionária. Depois, mudou do registro numérico fracionário para o registro numérico decimal. Continuou realizando um tratamento numérico na representação decimal. Fez mais uma conversão do registro numérico decimal para a língua natural. Efetuiu sucessivas conversões que atestaram o acesso ao objeto matemático. A₁₈ conseguiu este acesso ao objeto pela naturalidade e transparência para lidar com as representações semióticas. Duval (2011, p. 101) afirma que “As representações semióticas têm uma propriedade fenomenológica fundamental. Elas são **TRANSPARENTES AO QUE ELAS REPRESENTAM**, quando elas funcionam como representações semióticas para quem as produz, as compreende ou as transforma (grifo do autor)”.

Dessa forma, acreditamos que a sequência de atividades contribuiu para que os alunos participantes da pesquisa conseguissem essa transparência considerando uma afirmação de Duval (2011, p. 101) em que “As representações semióticas só são transparentes quando existe reconhecimento imediato e espontâneo do que elas representam (grifo do autor)”.

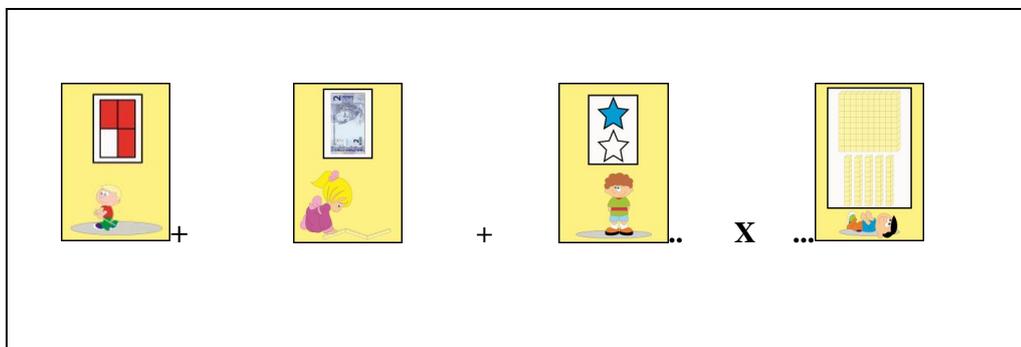
Constatamos este conhecimento imediato, pois as crianças terminaram a atividade rapidamente.

Já os itens c e d, alguns alunos levaram um pouco mais de tempo para terminar, sendo que quatro alunos erraram o cálculo.

Entretanto até este momento da aplicação da sequência, foi possível perceber grandes avanços e apreensão conceitual do conteúdo. Tomamos a decisão de problematizar um pouco mais os dois últimos itens da sequência, inserindo mais registros, propondo mais conversões e verificando com mais propriedade as transformações realizadas pelos alunos.

Dessa forma, os itens e e f exigiram um envolvimento maior com os registros e a contribuição da diversidade deles para a agilidade nas transformações.

Quadro 17: Retomada do item e da atividade 5: $\frac{3}{4} + 2,00 + \frac{1}{2} \times 1,5$



As ações cognitivas propostas nesta atividade levaram os alunos a realizarem várias conversões para o registro numérico decimal, tendo como ponto de partida os registros: figural contínuo, figural discreto e sistema monetário. A fala de A₉ pode retratar a espontaneidade para tratar os registros:

“Nossa professora se fosse antes de eu vim aqui eu não ia saber nunca fazer isso. Mas agora consigo olhar para estes registros e enxergar número com vírgula - desculpa, registro numérico decimal. Eu nem preciso mais fazer conta no papel, faço na minha cabeça e já transformo um jeito no outro”.

A₉ se referiu à professora /pesquisadora com segurança, admitindo a compreensão dos diferentes registros e a transformação entre eles. Entretanto, acreditamos que A₉ se referiu à transformação, priorizando apenas um sentido (chegada no registro numérico decimal) pelo estímulo da atividade que priorizava esta ação cognitiva. Observamos que os outros alunos se referiam ao registro não apenas com o objetivo de chegar ao registro numérico decimal. Eles realizaram diversas transformações, tais como: decimal para fracionária e fracionária para decimal, porcentagem para figural e figural para porcentagem, figural para fracionária e fracionária para figural, figural para decimal e decimal para figural, língua natural para decimal e decimal para língua natural, figural para língua natural e língua natural para figural, monetário para fracionária e fracionária para monetário, monetário para decimal e decimal para monetário (significados diferentes). É isso que Duval (2011, p. 116) considera importante para a compreensão em matemática:

A análise do funcionamento cognitivo do pensamento exigida pela matemática mostra, ao contrário, a necessidade de uma mobilização simultânea e coordenada de diversos registros para poder compreender. A atividade matemática real não se

limita jamais à utilização de um único registro. Ela ultrapassa sempre as produções explícitas no registro em que efetuamos os tratamentos. Mobilizamos também um segundo registro, seja para antecipar os tratamentos a realizar e, portanto, escolher o registro de tratamento, seja para controlar os tratamentos efetuados no registro escolhido (DUVAL, 2011, p. 116)

O item d da atividade 5 oportunizou ação cognitiva de transformação entre os registros para que o tratamento no registro numérico decimal fosse realizado, conforme indicado no enunciado da atividade. Contudo, para que outros professores que pretendam usar esta mesma sequência de atividades, possam explorar ainda mais a coordenação entre os registros, sugerimos que tenha conversões cujo registro de chegada seja o numérico fracionário, por exemplo. Ao final desta investigação, constatamos a necessidade de uma atividade em que não sejam induzidos à transformação para o registro numérico decimal, pois mesmo sendo a minoria, identificamos casos de alunos que estavam realizando as transformações em um único sentido.

Nesta atividade, ao ser questionado pela pesquisadora sobre o procedimento de sua resolução, A₁₇ explicou:

“Eu fiz assim professora: somei 2 inteiros que é o dois reais com zero vírgula cinco que é do desenho das estrelas. Deu dois inteiros e cinco décimos. Daí peguei o desenho que é três quartos e transformei em fração decimal. Fiz na cabeça mesmo multipliquei quatro do denominador por vinte e cinco para dar cem e então multipliquei o três também por vinte e cinco que deu setenta e cinco. Veja: setenta e cinco centésimos que é zero vírgula setenta e cinco. Bom, daí juntei dois inteiros e cinco décimos com setenta e cinco centésimos. Daí tive que pegar o lápis e fazer a conta para achar o resultado três inteiros e vinte e cinco centésimos. Depois multipliquei este resultado por um inteiro e cinco décimos. Precisei usar lápis e papel também para fazer a conta de vezes e dar a resposta de quatro inteiros e oitocentos e setenta e cinco milésimos”.

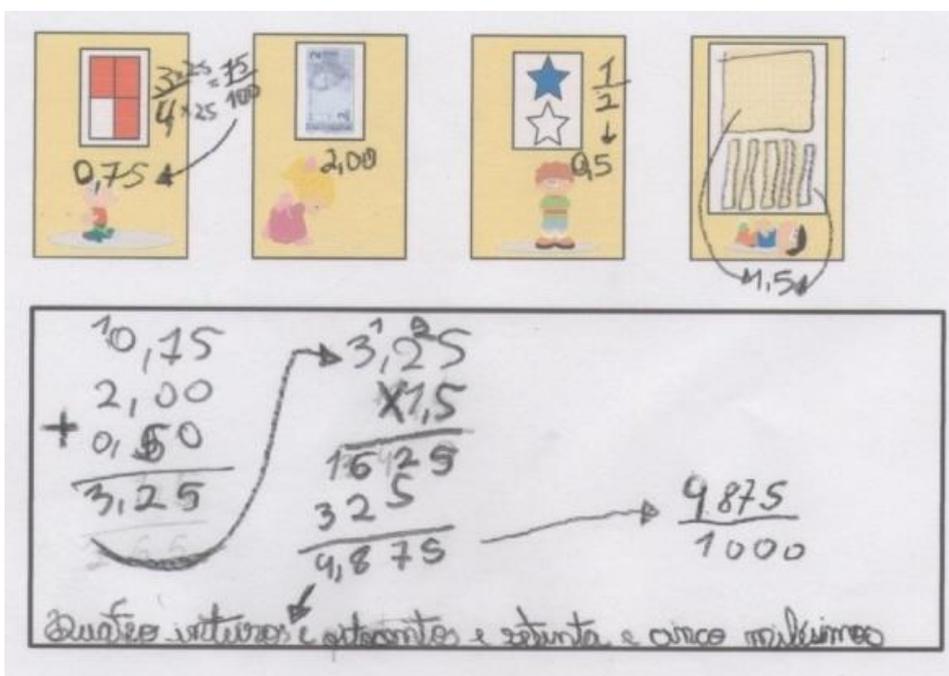
Desse modo, notamos que A₁₇ fez uma conversão do registro numérico do sistema monetário e do registro figural discreto, ambas para o registro numérico decimal e mentalmente adicionou essas quantidades. Entretanto, para sair do registro figural discreto usou um registro intermediário que foi o registro numérico fracionário. Em seguida, realizou mais uma conversão do registro figural contínuo para o registro numérico fracionário. Depois disso, fez um tratamento numérico da fração três quartos para a fração decimal setenta e cinco centésimos. Para dar continuidade, realizou mais uma conversão do registro numérico fracionário para o registro numérico decimal. Quando todos os registros estavam na representação numérica decimal, tendo feito a soma dos dois primeiros, usou o tratamento numérico para encontrar a resposta que juntava as três quantidades. De posse desta resposta, precisou fazer mais uma conversão de registro figural para registro numérico decimal para ter

o multiplicador. Realizou mais um tratamento numérico para encontrar o produto da multiplicação. Confere-se também o uso da língua natural como registro de comunicação das quantidades referidas. Acreditamos nas conversões de A_{17} , pois ele já havia demonstrado, em atividades anteriores, que as transformações que realizava visavam conversões. Conferimos que anteriormente já havia realizado transformações de decimal para figural, de fracionário para figural e decimal para fracionário que são as respectivas voltas para as idas realizadas nessa atividade.

Com essas sucessivas conversões, necessárias aos tratamentos numéricos a serem realizados, temos indicativos de que este aluno, assim como outros que agiram da mesma forma, realizou conversões, mesmo que alguns ainda estejam num sentido único de registro figural para fracionário e de registro fracionário para decimal e, portanto, conseguiram pelas representações, acesso ao objeto matemático. Isso pôde ser conferido, inclusive pelo uso da língua natural usada para informar os dados numéricos convertidos e os resultados encontrados nos tratamentos efetuados.

O registro de A_1 também é um exemplo do acesso ao objeto matemático:

Figura 82: Conversões e tratamentos numéricos decimais por A_1



Fonte: Arquivo da pesquisadora

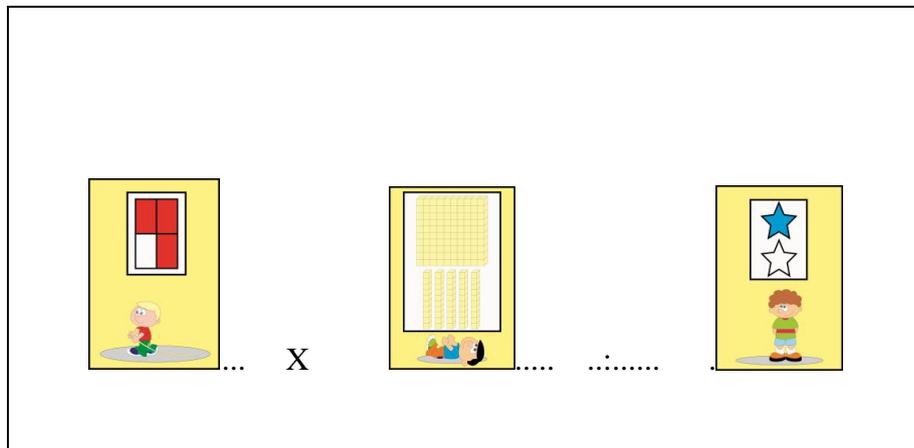
A₁ mostrou em seus registros que domina a coordenação entre eles, pois ao perguntar a A₁ sobre a volta do 0,75 para registro figural, ele não teve dúvidas em responder sem olhar na sua folha de atividades:

“Para voltar é só transformar o número com vírgula em fração: fica setenta e cinco sobre cem, para visualizar o desenho com menos partes, eu simplifico a fração por vinte e cinco ou também daria para simplificar por cinco e depois por cinco de novo até chegar em três quartos. Daí era só desenhar uma figura, dividir em quatro partes e pintar três dessas partes”.

Desse modo, A₁ conseguiu mostrar que além de converter, sabe realizar tratamento numérico decimal e que tem clareza da necessidade das conversões para tais tratamentos. O mesmo aluno teve um pensamento semelhante ao de A₁₇ que explicou sua resolução em língua natural com detalhes. A₁ explicou com setas indicativas as conversões realizadas por ele.

O item f foi semelhante ao item d, com a diferença nas operações envolvidas. Neste a operação de divisão exigiu manifestações de apreensão conceitual do algoritmo da divisão.

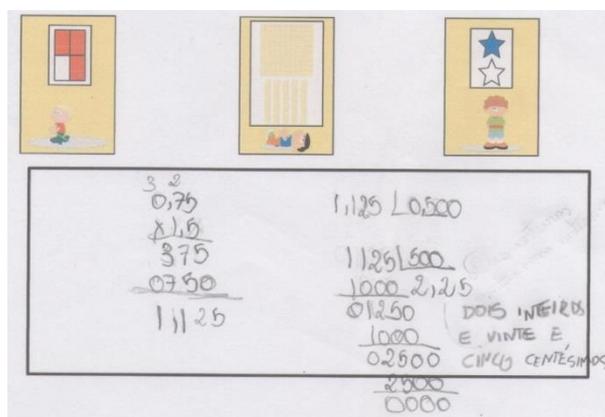
Quadro 18: Retomada do item f da atividade 5: $\frac{3}{4} \times 1,5 : 1,2$



A atividade foi bem sucedida, pois maioria dos alunos conseguiu resolver a multiplicação e a divisão, contudo dois alunos (A₆e A₈) erraram o algoritmo de divisão e A₁₅ deixou a atividade em branco.

Os demais alunos conseguiram fazer as conversões necessárias e efetuar os tratamentos numéricos de multiplicação e divisão, a exemplo de A₁₃ como podemos conferir na figura 75.

Figura 83: Conversões e tratamentos numéricos decimais por A₁₃



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Podemos observar as conversões de registros figurais para registros numéricos decimais e destes para língua natural realizadas por A₁₃, bem como os tratamentos numéricos, que indicam a apreensão conceitual deles, quanto às operações de multiplicação e divisão de Números Decimais.

Afirmamos a conversão de A₁₃, pois ele fez um questionamento que despertou também a curiosidade de outros sete alunos (A₁, A₃, A₇, A₁₃, A₁₇, A₁₉, A₂₀):

“Professora e se eu não quisesse transformar para número com vírgula e quisesse transformar em fração, daria o mesmo resultado?”

Tal atitude dos alunos não havia sido prevista nas análises *a priori*, no entanto, revelaram um dado importante para a análise, de alterações na atividade em caso de aplicação desta sequência para outros alunos. Seria interessante que este item f da atividade 5, poderia ter modificações no seu enunciado para : Multiplique o registro numérico fracionário que corresponde ao cartão 6, pelo registro numérico fracionário que corresponde ao cartão 10. Em seguida, divida o resultado pelo registro numérico fracionário relacionado ao cartão 12.

Tal alteração pode enriquecer a sequência de atividades e garantir que todos os alunos realizem a volta dos registros para numérico fracionário.

Dessa forma, diante da curiosidade dos alunos, estes foram convidados para resolverem no quadro, a fim de constatar se o resultado seria o mesmo.

A₁₃, que havia feito o questionamento, propôs-se a ir fazer os registros no quadro. Com a ajuda dos colegas interessados, transformou todos os registros em

numéricos fracionários e multiplicou três quartos por quinze décimos. Não lembraram como fazia para multiplicar duas frações e por isso, tiveram a intervenção da pesquisadora. Chegaram ao resultado quarenta e cinco quarenta avos que dividiram por meio com a ajuda de A₁ que instruiu A₁₃ como realizava a divisão. Finalmente, chegaram ao resultado nove quartos. A₁₉ contribuiu com a transformação de nove quartos em duzentos e vinte e cinco centésimos, que se transformou em dois inteiros e vinte e cinco centésimos. O grupo de alunos que resolveu no quadro, vibrou quando o resultado foi o mesmo conseguido no algoritmo.

Com estes dados, relacionados à transformação entre registros, é possível afirmar a contribuição desta sequência de atividades para a compreensão dos Números Decimais. A última atividade desta sequência foi concluída por todos os alunos, com exceção apenas de A₁₅.

Foi notável o avanço dos participantes da pesquisa na aplicação gradativa das atividades. O repertório de registros que a princípio era escasso foi agregando diferentes representações e compondo a pluralidade de registros, bem como as transformações entre eles.

O contato com a mudança de registros de partida e de chegada no decorrer das atividades também colaboraram para que a coordenação entre os registros realmente acontecesse. A conversão pôde ser conferida nas ações cognitivas dos alunos, pela naturalidade com que transitaram entre os registros.

O quadro abaixo indica a visão geral da aprendizagem dos alunos, levando-se em consideração a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Quadro 19: Tratamentos realizados na atividade 5

| Registro numérico decimal | Alunos que realizaram o tratamento no registro numérico decimal em cada operação |
|----------------------------------|---|
| Adição | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Subtração | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |

| | |
|----------------------|--|
| Multiplicação | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Divisão | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₇ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Apenas um aluno não conseguiu operar com Números Decimais (A₁₅) e dois alunos não conseguiram se apropriar dos conceitos relacionados às operações de divisão de Números Decimais. Acreditamos que se tivéssemos um tempo maior para retomar os conceitos, poderíamos chegar à totalidade de alunos com a compreensão destes conceitos.

Contudo, nosso alvo era que os alunos chegassem às conversões, em razão das manifestações de conhecimento acerca das diferentes representações dos Números Decimais. Foram nestas representações que nos baseamos para construir a sequência de atividades, para que pudesse ser instrumento de acesso aos Números Decimais.

Quadro 20: Transformações entre registros realizadas na atividade 5

| Transformação entre registros | Alunos que conseguiram realizar a transformação |
|--|--|
| Registro numérico em forma de porcentagem para numérico decimal | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₅ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro figural para numérico decimal | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |
| Registro numérico fracionário para numérico decimal | A ₁ ,A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ ,A ₁₃ ,A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Ao final desta sequência de atividades, todos os alunos, com exceção de A₁₅ que apresentou transtorno de atenção e hiperatividade, realizaram as conversões necessárias para garantir acesso ao objeto matemático.

A apresentação das atividades, gradativamente, inseriu os alunos no contexto das representações, com ênfase nas transformações entre os registros e valorização das conversões. Duval (2009, p. 47) afirma que: “[...] em razão da diversidade dos

sistemas semióticos, as representações semióticas permitem ter uma variedade de representações para um mesmo objeto [...] do ponto de vista da função de tratamento e do ponto de vista da conceituação [...].”

O quadro 20 mostra a adesão dos alunos nas representações semióticas, considerando o avanço deles em relação às primeiras atividades. Essa atividade, em seu caráter de resolução individual, garantiu a confirmação das conversões investigadas desde atividades anteriores, que aos poucos foram se confirmando.

O conjunto de todas as atividades da sequência permitiu análise individual do desempenho dos alunos, a liberdade com que lidavam com eles, a testagem das conversões nos registros de ida e volta e a coordenação entre os registros como capacidade cognitiva necessária para a conversão. Duval (2009, p. 91), ao se referir ao aluno, considera que “Essa coordenação lhe dá, com respeito a representações semióticas que ele utiliza, esse grau de liberdade permitindo ter estratégias heurísticas, conduzir bem os tratamentos escolhidos e controlar a sua pertinência”.

Acreditamos que este instrumento de pesquisa pode estar apto para ser aplicado em salas de aula, para alunos desta mesma faixa etária, como contribuição científica para a compreensão dos Números Decimais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi fundamental para a presente investigação, pois subsidiou a elaboração do instrumento de pesquisa: uma sequência de atividades que buscou favorecer a aprendizagem dos Números Decimais, à luz dos Registros de Representação Semiótica. Duval (2011, p. 40) afirma que “O que importa primeiro nas representações semióticas é a potencialidade intrínseca de serem facilmente transformadas em outras representações semióticas.”

Além da fundamentação teórica, as análises preliminares (uma das fases da Engenharia Didática) subsidiaram a elaboração das atividades, que tiveram a intenção de favorecer aos sujeitos da pesquisa a familiaridade com os diferentes registros de representação semiótica, as transformações de ida e de volta entre eles e possíveis conversões relacionadas aos Números Decimais.

Esta foi a alavanca inicial da pesquisa, já que havia consciência, com respaldo teórico em Duval (2011), de que a aprendizagem em Matemática, de acordo com Duval (2011, p. 15) “ [...] suscita problemas de compreensão que não encontramos nos outros domínios do conhecimento”(DUVAL, 2011, p.15).

Cada atividade foi apresentada no texto da pesquisa, seguida da análise *a priori*, da experimentação, análise *a posteriori* e validação dos resultados obtidos, de acordo com os registros dos alunos. Portanto, nas etapas finais da Engenharia Didática - análises *a posteriori* e validação – quarta e quinta etapas, respectivamente, identificou-se a contribuição da sequência de atividades elaborada especificamente para esta pesquisa, para favorecer aprendizagem dos Números Decimais.

Destaca-se que a análise se deu por meio dos registros escritos dos alunos, bem como as transcrições de falas dos mesmos, mediante observação das gravações de áudio e vídeo. O confronto entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori*, juntamente com os dados coletados das respostas dos alunos, permitiu evidenciar possíveis validações, como a da familiaridade com os registros, transformações entre eles e conversões como operações cognitivas, que consistiram em variar as unidades significativas de um registro e identificar as variações no registro em outro sistema semiótico.

As conversões propostas nas atividades foram percebidas nos registros dos alunos, ao observar no âmbito geral destes registros, as variações nos dois sentidos das transformações. Apenas uma transformação contemplou um único sentido: do registro numérico fracionário para o registro numérico com significado do sistema monetário, na atividade 4. Esse é um indicativo de que em aplicações futuras dessa sequência possa ser explorado o outro sentido de transformação desses registros.

No entanto, outras variações foram favorecidas, como por exemplo, do registro numérico fracionário para o registro numérico decimal, relacionando a parte inteira do registro fracionário com o registro decimal, associando o numerador com os décimos, centésimos e milésimos do registro decimal de denominador 10, 100 e 1000.

O quadro 16 mostra as transformações entre os registros, realizadas pelos alunos sujeitos da pesquisa. De acordo com esse quadro, pode-se afirmar que aconteceram a ida e a volta dos registros: registro numérico decimal (D), registro numérico fracionário (FR), registro numérico na forma de porcentagem (P), registro numérico com significado do sistema monetário (NS), registro figural (FI), registro na língua natural (LN).

Quadro 21: Transformações e conversões realizadas pelos alunos

| Transformação entre os registros | Atividade(s) cujas transformações foram realizadas pelos alunos | Número de alunos que realizaram cada transformação | Alunos que realizaram a transformação | Conversão |
|---|--|---|---|------------------|
| D \longrightarrow LN | 1, 3, 4 | 12 | A ₁ , A ₃ , A ₄ , A ₇ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ | 12 |
| LN \longrightarrow D | 3,4 | 19 | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ | |

| | | | | |
|---------------------|-------------|----|--|----|
| $D \rightarrow FI$ | 1,2,4 | 19 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16},$ A_{17}, A_{18}, A_{20} | 19 |
| $FI \rightarrow D$ | 2, 3 e 5 | 19 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17},$ A_{18}, A_{19}, A_{20} | |
| $D \rightarrow FR$ | 1, 2, 3 e 4 | 19 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17},$ A_{18}, A_{19}, A_{20} | 19 |
| $FR. \rightarrow D$ | 2, 3, 4 e 5 | 19 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17},$ A_{18}, A_{19}, A_{20} | |
| $F \rightarrow FR$ | 2, 3 | 15 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A_7,$ $A_9, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14},$ $A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}$ | 15 |
| $FR \rightarrow FI$ | 4 | 19 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17},$ A_{18}, A_{19}, A_{20} | |
| $FI \rightarrow LN$ | 2, 4 | 19 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{16}, A_{17},$ A_{18}, A_{19}, A_{20} | 17 |
| $LN \rightarrow FI$ | 2 | 17 | $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6,$ $A_7, A_9, A_{10}, A_{11},$ $A_{12}, A_{13}, A_{16}, A_{17}, A_{18},$ A_{19}, A_{20} | |

| | | | | |
|---------------------|-------|----|---|----|
| FR \rightarrow LN | 3 | 12 | A ₁ , A ₂ , A ₄ , A ₇ , A ₉ , A ₁₁ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ | 12 |
| LN \rightarrow FR | 3 e 4 | 18 | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ | |
| FR \rightarrow P | 3 e 4 | 17 | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ | 15 |
| P \rightarrow FR | 3 | 15 | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ | |
| P \rightarrow D | 3 e 5 | 20 | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₅ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₁₉ , A ₂₀ | 16 |
| D \rightarrow P | 3 | 16 | A ₁ , A ₂ , A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₇ , A ₈ , A ₉ , A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ , A ₂₀ | |

Fonte: Arquivo da pesquisadora

A cada duas linhas do quadro, verifica-se a quantidade de alunos que chegaram às conversões naqueles dois registros, indicando as transformações de ida e de volta realizadas por cada sujeito da pesquisa. O quadro ainda informa a quantidade de alunos que realizaram as transformações nos dois sentidos e, dessa forma, alcançaram a conversão naqueles registros.

Em alguns casos de transformações entre registros, como do decimal para o fracionário e do decimal para o figural, notamos que 19 alunos realizaram essas conversões. Isso porque tiveram na aplicação do instrumento, um maior número de atividades que

favoreceram a percepção das variações entre os registros, quando associaram a parte inteira do registro decimal com o numerador da fração e a parte decimal com o denominador da fração decimal.

Este fato da quantidade de atividades que favoreceram a transformação entre os registros, pode contribuir com futuras elaborações de sequências de atividades, para que tenham o mesmo número de cada registro envolvido. Mas também pode apontar a necessidade por alunos de sexto ano, de número maior de contato com os registros. Isso porque os registros mais contemplados foram convertidos por praticamente todos os alunos.

Assim, conforme estudos de Duval, a conceitualização dos Números Decimais deu-se por meio da coordenação de diferentes registros de representação do mesmo objeto pelos sujeitos da pesquisa. A conversão, por sua vez, é uma operação cognitiva que implicou na variação de unidades significantes em forma de registro e a associação dessas variações nas unidades significantes do outro registro em outro sistema semiótico.

No entanto, embora em menor número, todas as outras possíveis conversões presentes no quadro foram favorecidas pelas atividades, para que os sujeitos da pesquisa tivessem oportunidade de realizar as transformações de ida e de volta dos registros, proporcionando compreensão das variações, como subsídio das conversões.

Alguns alunos não conseguiram realizar a transformação nos dois sentidos em todos os registros propostos, pois necessitavam de um tempo maior para compreender as variações das unidades significantes entre alguns deles. Desse modo A_3 , A_5 , A_6 , A_7 , A_8 , A_9 , A_{10} , A_{12} , A_{14} , A_{15} , A_{19} e A_{20} em algum momento das transformações entre os registros, no decorrer das atividades, não realizaram um dos sentidos da transformação para que ocorresse a conversão, como pode-se conferir no quadro acima. Já A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_{11} , A_{13} , A_{16} , A_{17} e A_{18} realizaram as transformações de todos os registros propostos nos dois sentidos, e por isso, pode-se afirmar que tais alunos realizaram conversões.

O aluno A_{15} identificado com transtorno de atenção e hiperatividade, não converteu registros, apenas transformou alguns. Isso por que não se interessou em realizar as atividades propostas. No entanto, destaca-se que A_3 , A_7 , A_9 , A_{12} , A_{14} e A_{20} deixaram de realizar apenas uma das oito conversões propostas nas atividades. A_5 , A_6 e A_{10} não realizaram três das oito conversões. A_8 não converteu quatro das transformações propostas e A_{19} deixou de fazer cinco conversões.

Com base nestes dados, acredita-se que a maioria dos alunos manifestou ação cognitiva de conversão. Algumas transformações apareceram espontaneamente pelos alunos,

como a do registro em língua natural para o registro fracionário, do registro numérico fracionário para o registro em forma de porcentagem e do registro na língua natural para registro numérico decimal. Estes registros apareceram nas argumentações dos alunos antes de serem mencionados nas atividades. Perceberam estes registros espontaneamente A_3 , A_4 , A_{11} , A_{13} , A_{16} , A_{17} e A_{18} .

Foi possível perceber que no decorrer das atividades, aumentavam o número de alunos que conseguiam realizar transformações, pois as dúvidas deles iam sendo amenizadas com as próprias atividades. Por exemplo, alunos como A_3 e A_{17} que na primeira atividade não conseguiram transformar o registro numérico decimal em registro numérico fracionário, fizeram a mesma operação sem apresentar dificuldade nas atividades 3 e 4.

Dessa forma, foi possível perceber a existência de conversões como possibilidade de acesso ao objeto matemático. Duval considera a importância do reconhecimento dos diferentes Registros de Representação Semiótica e ainda afirma que a habilidade de lidar com eles é muito importante para a aprendizagem. No entanto, o próprio autor enfatiza a necessidade dos alunos fazerem a ida e a volta dos registros, pois, somente neste caso, estariam realizando conversões e chegariam à apreensão conceitual do conteúdo. Dessa forma, o quadro acima indica esse ponto chave da teoria de Duval.

Ao final da pesquisa, conseguiu-se chegar a resultados, que conferem a contribuição da sequência de atividades para a compreensão dos Números Decimais. Duval considera importante para a aprendizagem a coordenação de pelo menos dois registros. As análises apontam por meio das transformações realizadas e registradas pelos alunos, a existência desta coordenação, considerada por Duval, essencial para a compreensão conceitual do conteúdo. Observou-se na pesquisa que foram muitas as possibilidades de coordenação entre os diferentes registros. Os resultados demonstram a necessidade de um trabalho mais intenso com alguns registros em detrimento de outros. Isso pode ter acontecido pela ênfase maior dada ao registro numérico decimal como ponto de chegada e, motivo para possíveis ajustes para a aplicação desta sequência para outros alunos.

Desse modo, a experiência desta investigação revela a necessidade de conversões com mais atividades envolvendo, por exemplo, o registro numérico fracionário como ponto de chegada.

No entanto, os resultados finais desta investigação se mostram satisfatórios, pois os alunos manifestaram conhecimento acerca dos seguintes registros nos dois sentidos: 12 alunos converteram o registro numérico decimal para a língua natural e o registro numérico

fracionário para língua natural, 15 alunos realizaram conversão de registro figural para registro numérico fracionário e de registro numérico fracionário para registro numérico em forma de porcentagem, 16 alunos converteram registro numérico em forma de porcentagem para registro numérico decimal, 17 alunos realizaram conversão de registro figural para língua natural e 19 alunos converteram registro numérico decimal em registro figural e registro numérico decimal em registro numérico fracionário. a

Esses números revelam a habilidade dos alunos em transformar registros e transitar naturalmente entre eles. Tal liberdade com os registros permitiram acesso ao objeto matemático Números Decimais. Vários alunos, como mostrado no quadro de análise geral de transformações e conversões, realizaram transformações em todos os registros trabalhados.

Dessa forma, a análise da aplicação da sequência de atividades, as conversas gravadas e as ações filmadas contribuíram com as conclusões finais, no sentido de ampliar quantitativamente as circunstâncias que possivelmente levaram os alunos a apreensão do conteúdo.

Esta verificação indicou maiores possibilidades em resolver situações-problemas e em lidar com as diferentes representações dos Números Decimais, por parte dos sujeitos da pesquisa, bem como maior agilidade deles para encontrar a resposta correta conforme o tempo de contato com as representações, observadas nas últimas atividades em comparação com as primeiras. A intenção foi constatar a evolução cognitiva dos alunos que possuíam um repertório de registros, na procura de evidências que comprovassem o uso das representações semióticas na rotina de estudo deles.

Os resultados apontam que de posse dessa pluralidade de registros os sujeitos da pesquisa lidaram naturalmente com as representações. Contudo as suposições da necessidade das conversões para a aprendizagem do conteúdo são baseadas no que destaca Duval (2009, p. 32), de que “A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro”.

Entende-se que é neste cenário de pesquisa que se tem a oportunidade de superar as lacunas vivenciadas na sala de aula, por experiência da pesquisadora, e de se propor soluções de cunho científico para melhorar a qualidade das aulas de Matemática.

Desse modo, com a presente pesquisa, foi possível apreciar o contato dos alunos que não tinham uma rotina com diferentes registros e confirmar a importância das representações para compreensão dos conceitos. Com isso, foram constatados dados de contato com as

representações semióticas, para evidenciar a afirmação de Duval de que não há *noésis* sem *semiósis*. Foi pelo contato com os registros semióticos nas atividades propostas e oportunidades em transformá-los que os alunos sujeitos da pesquisa chegaram às conversões (transformações nos dois sentidos) e manifestaram conhecimento acerca do objeto matemático Números Decimais.

Acredita-se que esses fatos citados, coexistentes nas relações entre *noésis* e *semiósis*, favoreceram a aprendizagem dos alunos em relação aos Números Decimais, como pôde confirmar esta investigação, com base nos registros e transcrições de falas dos alunos.

Espera-se, a partir destes resultados, que outros professores utilizem representações semióticas para auxiliar na compreensão conceitual dos Números Decimais. De maneira especial, contribuir com outros professores de quinto ano, sexto ano e salas de apoio à aprendizagem, que poderão utilizar a mesma sequência para favorecer a aprendizagem dos Números Decimais por meio das representações semióticas.

Os resultados instigam a continuidade da investigação e até se permite pensar em futuras pesquisas, com outros conteúdos e até com outros sujeitos - com professores - pensando numa maneira de tais aportes teóricos e metodologia adentrarem as salas de aulas a ponto de modificar a prática do professor e fazer a diferença no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**.3.ed.São Paulo:EdgardBlücher, 2006.

ALMOULOUD, Ag Saddo; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPed. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, UFSC: 2008.

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2010.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques**,v.9, n. 3,1988.

BRANDT, Célia Fink. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. Tese de doutorado (Programa de Pós Graduação em Educação Científica Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2005.

BRASIL, **Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica**: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática /Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília : MEC /SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: 1ª edição, 1951.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos**. Dissertação de Mestrado (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo) – PUC, São Paulo, 2000.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. *Zetetiké*, v.16, p. 41- 72, 2008.

CUNHA, Micheline R. K. da. **A quebra da unidade e o número decimal: um estudo diagnóstico nas primeiras séries do ensino fundamental**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação matemática: uma (nova) introdução**. 3. Ed. São Paulo: Educ, 2012. (Série Trilhas)

DAMM, Regina Flemming. **Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, São Paulo: Papirus, 2011.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. - **Handbook of qualitative research**. London, Sage Publication, 1994.

DOUADY, R: **L'ingénieriedidactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage**. Cahier de DIDIREM, Paris: IREM de Paris VII. 1993.

DUVAL, R. **Registres de représentationsémotiqueetfonctionnementcognitif de lapensée**. In: *Annales de Didactique et de SciencesCognitives*. IREM de Strasbourg, vol V. 37-65. 1993.

_____. **Écartssémantiques et cohérencemathématique: introductionauxproblèmes de congruence**. *Annalesde Didactique et de SciencesCognitives*, v. 1, IREM de Strasbourg, p. 7-25, 1988. Anais. 1988.

_____. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática** in: *Aprendizagem Em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus Editora, 2003.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. 7.ed. Campinas: Papirus, 2010.

DUVAL, Raymond; CAMPOS, Tânia M.M.(org.). **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: Proem, 2011.

ESTEVES, AnelisaKisielewski; SOUZA, Neusa Maria Marques de. **Números decimais na sala de aula: os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica**. *Revista Eletrônica de Educação*. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p. 188-205, mai. 2012. Disponível em <http://www.reveduc.ufscar.br>. Acesso em 15 de agosto de 2013.

FLORES, Cláudia Regina. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. *Boletim de Educação Matemática*, vol. 19, núm. 26, 2006.

FREITAS, José L. Magalhães de; REZENDE, Veridiana. **Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica**. *Revista Paranaense de Educação Matemática, RPEM*, Campo Mourão, Pr, v.2, n.3, jul-dez. 2013

GÁLEN, F.; FEIJS, E.; FIGUEIREDO, N.; GRAVEMEIJER, K.; HERPEN, E.; KEIJZER, R. **Fractions, Percentages, Decimals and Proportions**. A Learning Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6. The Netherlands: SensePublishers, 2008

- GOMES, Maria Laura Magalhães. **Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira**. Boletim de Educação Matemática, vol. 19, núm. 25, 2006.
- IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. 11 ed. São Paulo: Globo, 2005.
- LIMA, Cláudio Woerle. **Representações dos números racionais e a medição de segmentos**: possibilidades com tecnologias informáticas. 2010. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática) UNESP São Paulo, Rio Claro, 2010.
- LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).
- MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. Ed. São Paulo: Educ, 2010. (Série Trilhas)
- MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 8. ed. São Paulo: Papirus, 2011. (Coleção Papirus Educação).
- MARANHÃO, M. C. S.A., IGLIORI, S. B. C. **Registros de Representação e Números Racionais**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo: Papirus, 2011.
- MINAYO, M. C. De S. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. 4. ed. São Paulo, 1996.
- MORAN, José Manoel; MASETO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19. ed. Campinas: Papirus, 2012.
- PADOVAN, D. M. F. **Números decimais**: o erro como caminho. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: USP, 2000.
- PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. Belo Horizonte – MG: Autêntica, 2011.
- PANIZZA, Mabel. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análise e propostas. Tradução de Antonio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da educação básica**: matemática, 2008.
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Caderno de Expectativas de aprendizagem**: matemática, 2011.
- PÉREZ, J. C. **Números decimales**. Por qué? Para qué? Editorial Síntesis, Madrid, 1988
- SILVA, Benedito Antonioda. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. Ed. São Paulo: Educ, 2010. (Série Trilhas)
- SILVA, V. L. **Números Decimais**: no que os saberes de adultos diferem dos de crianças? Dissertação de Mestrado em Educação, Recife: UFPE, 2006.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de saber matemática**: 6° ano. São Paulo: FTD, 2012.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática de matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

ZUNINO, Delia Lerner de. **A matemática na escola: aqui e agora**. 2.ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ANEXO A

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL DO NUCLEO REGIONAL DE
EDUCACAO**

Maringá, ___ de _____ de 2014.

Ilustríssima Senhora Chefe do Núcleo Regional de Maringá.

Eu, Flavia Cheroni da Silva Brita, responsável pela pesquisa que faz parte do curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, venho pelo presente solicitar vossa autorização para realizar o projeto de pesquisa intitulado “Contribuições dos Registros de Representação Semiótica para a Compreensão dos Números Decimais”, no (Nome da Instituição), na cidade de Marialva, orientado pelo prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, da Universidade Estadual de Maringá.

Este projeto de pesquisa, atendendo o disposto na Resolução CNS 196 de 10 de Outubro de 1996, tem como objetivo investigar a compreensão do conceito de Número Decimal por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Para isso, a participação desta escola é muito importante, e ela acontecerá da seguinte forma: no contraturno das aulas serão desenvolvidas atividades referentes ao ensino e aprendizagem de números decimais, utilizando metodologias de ensino diferentes das convencionais, visando a investigar a compreensão deste objeto matemático, que tem se revelado uma dificuldade de aprendizagem em Matemática. A pesquisa utilizará por volta de duas horas em cada seção, e os dados obtidos serão divulgados por meio de publicações científicas. Informamos que poderão ocorrer passageiros constrangimentos, no início da pesquisa, pela gravação do áudio, que tenderá a desaparecer rapidamente. No geral, a investigação não acarretará danos inaceitáveis ou duradouros, visto que se desenvolverá por meio de protocolos seguros, ancorados em metodologias e teorias reconhecidas mundialmente no meio acadêmico.

A qualquer momento vossa senhoria poderá solicitar esclarecimento sobre o desenvolvimento da pesquisa que está sendo realizada e, sem qualquer tipo de cobrança, poderá retirar sua autorização. Os pesquisadores aptos a esclarecer estes pontos e, em caso de necessidade, dar indicações para solucionar ou contornar qualquer mal estar que possa surgir em decorrência deste estudo.

Os dados obtidos nesta pesquisa serão utilizados na publicação de artigos científicos e que, assumimos a total responsabilidade de não publicar qualquer dado que comprometa o sigilo da participação dos integrantes de vossa instituição como nome, endereço e outras informações pessoais não serão em hipótese alguma publicados. A participação será voluntária, não fornecemos por ela qualquer tipo de pagamento.

Espera-se com esta pesquisa contribuir com a qualidade da educação, cujos benefícios esperados estão relacionados à melhoria no ensino e aprendizagem de Matemática e superação de possíveis obstáculos encontrados durante os anos anteriores que impedem a compreensão da referido conteúdo.

Caso tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços a seguir ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta neste documento.

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida, assinada e entregue a vossa senhoria.

Além da assinatura nos campos específicos, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você, como órgão responsável pela instituição de ensino) de tal forma a garantir o acesso ao documento completo.

Eu, _____ declaro que fui devidamente esclarecida, e como chefe deste NRE autorizo o Colégio

Estadual....., pertencente a este Núcleo Regional de Educação, contribuir com a pesquisa coordenada pelo Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.

_____ Data:.....

Assinatura da chefe do NRE de Maringá

Eu, Flávia Cheroni Silva Brita, declaro que forneci todas as informações referentes à pesquisa supra-nominada

_____ Data:.....

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com os pesquisadores, conforme o endereço abaixo:

Nome: Valdeni Soliani Franco

Endereço: Praça Rocha Pombo, 327/302 – CEP: 87013-030 – Maringá/PR.

(telefone/e-mail): (44)-3011- 4933 – vsfranco@uem.br

Nome: Flávia Cheroni Silva Brita

Endereço: Rua Pedro GiacomoBorsari, 88 – CEP: 86990-000 – Marialva/PR

Telefone/ email : (44) 3011- 4827 – flavia_cheroni@hotmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

ANEXO B

AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL DO(A) DIRETOR(A) DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO

Eu,....., responsável pela instituição....., declaro que fui informado(a) dos objetivos da pesquisa acima, e concordo em autorizar a execução da mesma nesta instituição em que sou gestor(a), mediante parecer aceito pela chefe do Núcleo Regional de Ensino de Maringá. Estou ciente de que a pesquisa será realizada sob a responsabilidade da pesquisadora Flavia Cheroni da Silva Brita, sob a supervisão do orientador Dr. Valdeni Soliani Franco e concordo que a mesma proceda neste Estabelecimento de Ensino, no decorrer do ano de 2014.

Caso necessário, a qualquer momento como instituição CO-PARTICIPANTE desta pesquisa poderemos revogar esta autorização, se comprovada atividades que causem algum prejuízo a esta escola ou ainda, a qualquer dado que comprometa o sigilo da participação dos integrantes desta instituição. Declaro também, que não recebemos qualquer pagamento por esta autorização bem como os participantes também não receberão qualquer tipo de pagamento.

Declaro concordar com a Resolução CNS 196 de 10/10/1996, sendo que a pesquisa só terá início nesta instituição após apresentação do Parecer de Aprovação por um Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos.

Esta instituição está ciente de suas co-responsabilidade como instituição co-participante da presente pesquisa, e de seu compromisso no resguardo da

segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Pesquisador

Responsável pela Instituição

Orientador

Documento em duas vias:

1ª via instituição

2ª via pesquisadores

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MENORES

Gostaríamos de solicitar sua autorização para a participação de seu filho(a) na pesquisa intitulada “Contribuições dos Registros de Representação Semiótica para a Compreensão dos Números Decimais”, que faz parte do curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá e é orientada pelo prof. Dr. Valdeni Soliani Franco da Universidade Estadual de Maringá. O objetivo da pesquisa é investigar a compreensão do conceito de Número Decimal por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Para isso, a participação de seu filho(a) é muito importante, e ela acontecerá da seguinte forma: no contraturno das aulas serão desenvolvidas atividades referentes ao ensino e aprendizagem de números decimais, utilizando metodologias de ensino diferentes das convencionais. A pesquisa utilizará por volta de duas horas em cada seção, e os dados obtidos serão divulgados por meio de publicações científicas. Informamos que poderão ocorrer um passageiro constrangimento no início pela gravação do áudio, que tenderá a desaparecer rapidamente. No geral, a investigação não acarretará danos inaceitáveis ou duradouros, visto que se desenvolverá por meio de protocolos seguros. Esclarecemos que a participação de seu filho(a) é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a autorizar tal participação, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa ou à de seu filho(a). Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade, sua e a de seu (sua) filho(a). Após as transcrições das entrevistas as gravações serão descartadas. Os benefícios esperados estão relacionados à melhoria no ensino e aprendizagem de Matemática e superação de possíveis obstáculos encontrados durante os anos anteriores.

Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços a seguir ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta deste documento.

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e por você, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você, como sujeito ou responsável pelo sujeito de pesquisa) de tal forma a garantir o acesso ao documento completo.

Eu, _____

declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar

VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pelo Profº Dr. Valdeni Soliani Franco.

_____ Data:.....

Assinatura ou impressão datiloscópica

Campo para assentimento do sujeito menor de pesquisa (para crianças escolares e adolescentes com capacidade de leitura e compreensão):

Eu, _____

declaro que recebi todas as explicações sobre esta pesquisa e concordo em

participar da mesma, desde que meu pai/mãe (responsável) concorde com esta participação.

_____ Data:.....

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, Flávia Cheroni Silva Brita, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

_____ Data:.....

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador, conforme o endereço abaixo:

Nome: ValdeniSoliani Franco

Endereço: Praça Rocha Pombo, 327/302 – CEP: 87013-030 – Maringá/PR.

(telefone/e-mail): (44)-3011- 4933 – vsfranco@uem.br

Nome: Flávia Cheroni Silva Brita

Endereço: Rua Pedro Giacomo Borsari, 88 – CEP: 86990-000 – Marialva/PR

Telefone/ email : (44) 3011- 4827 – flavia_cheroni@hotmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

ANEXO D

Riscos

Esta pesquisa não expõe os participantes a riscos sérios, uma vez que são professores da Educação Básica, e já estão acostumados a serem observados por ocasião de suas formações. Contudo, há que se considerar mínimos riscos de desconforto transitório e constrangimento passageiro durante as gravações de áudio e a resolução das atividades propostas, uma vez que a pesquisadora estará presente e intermediará as ações durante a investigação.

Benefícios

Acredita-se que a pesquisa contribuirá com o quadro atual, em que se observam lacunas na assimilação de conteúdos que abordam os Números Decimais e poderá mostrar que existem caminhos eficazes, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica que podem fazer a diferença no processo de construção do saber. Também deve contribuir com inúmeras pesquisas, como as de Almouloud e Coutinho(2008) que divulgam a Engenharia Didática como uma metodologia que atende as necessidades e exigências educacionais atuais.