



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA
A CIÊNCIA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

MARCELA BOCCOLI SIGNORINI

CRIANÇAS, ALGORITMOS E SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

MARINGÁ

2007

MARCELA BOCCOLI SIGNORINI

CRIANÇAS, ALGORITMOS E SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós –
Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino
de Matemática da Universidade Estadual de
Maringá – Paraná, para a obtenção do título de
Mestre.

Orientadora: Prof^ª.dr^ª. Clélia Maria Ignatius
Nogueira

Co-orientadora: Prof^ª.dr^ª. Regina Maria Pavanello

MARINGÁ

2007

A meu esposo *Mirtom Francisco*
Signorini, que esteve sempre
presente dividindo comigo as
angústias, decepções, incertezas e
conquistas.

“A compreensão da Matemática escolar é uma prioridade em relação à memorização de regras, fórmulas e algoritmos. A potencialidade desses modelos exige um atencioso trabalho para desenvolver a argumentação, explorando a virtualidade contida na criação dessas máquinas abstratas e não avalizando práticas baseadas na repetição.”

(Prospecto dos Algoritmos)

“Educação é um todo indissolúvel e não é possível criar personalidades independentes (autônomas) no campo ético se a pessoa é subjugada intelectualmente ao aprendizado pela rotina, sem descobrir a verdade por si mesma... se sua ética consiste na submissão ao adulto, se as trocas sociais são aquelas que ligam cada indivíduo a um professor todo-poderoso, ele não saberá ser intelectualmente ativo.”

(Jean Piaget, 1948)

AGRADECIMENTOS

A *Deus*, pelo dom da vida e pela oportunidade de ter encontrado em meu caminho pessoas tão especiais a serem lembradas eternamente;

À minha *orientadora* – prof^ª. Dr^ª. Clélia Maria Ignatius Nogueira – pela compreensão e incentivo e carinho que demonstrou em todos os momentos deste estudo, mesmo diante de todos os obstáculos que tivemos que superar, orientando-me de forma simples, sábia e competente.

À minha *Co-orientadora* – prof^ª. Dr^ª. Regina Maria Pavanello – e a prof^ª. Dr^ª. Luzia Marta Bellini, pelos sábios ensinamentos e por todas as críticas construtivas que fizeram, dando-me condições de desenvolver melhor esse trabalho;

Aos *Professores do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência e o Ensino de Matemática*, pelo crescimento intelectual proporcionado e que, de certa forma, estão presentes neste trabalho;

Aos *professores* da banca examinadora do Exame de Qualificação – prof^ª. Dr^ª. Luzia Marta Bellini, prof^ª. Dr^ª. Regina Maria Pavanello, prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros e ao prof. Dr. Ruy César Pietropaolo – pelas contribuições ao projeto de pesquisa;

Aos *diretores, coordenadores e professores* da escola pública em que a pesquisa foi realizada, por sua receptividade e disponibilidade;

Às *crianças colaboradoras* – grandes estrelas desse trabalho – pela paciência, atenção e carinho, dedicados ao trabalho e à pesquisadora durante as entrevistas;

À minha *querida e grande amiga* – Rita Vieira – por reconhecer o valor do meu trabalho acadêmico, contribuindo diretamente para a concretização deste estudo;

Aos *amigos e professores*, integrantes do grupo de estudos GIEPEM – em especial à amiga Simone – pelas incansáveis discussões a respeito do tema desenvolvido nesta pesquisa;

Aos *amigos e companheiros de estudo* deste Programa, pelo apoio e incentivo, e a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço em especial à minha *família* – Milena, Murilo e carinhosamente ao meu esposo Mirtom – companheiro fiel, zeloso de mim, que diante de minhas exigências e ausências na realização deste trabalho, doou-se por amor e por entender minha dedicação a cada tarefa a cumprir;

RESUMO

Embora vários estudos em Educação Matemática (tanto no âmbito nacional quanto internacional) abordem possíveis problemas na inserção “incorreta” de procedimentos formais no ensino de aritmética nas séries iniciais, é necessário reconhecer que essas discussões ainda não adentraram por completo nos limites escolares a ponto de romper significativamente com as práticas escolares que priorizam a repetição em detrimento da construção do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, a presente pesquisa teve como proposta investigar se o ensino da aritmética, com ênfase no algoritmo, contribui para a construção do conhecimento matemático. Optou-se por analisar apenas as estruturas aditivas – operação de adição e/ou subtração – pois elas permitem investigar: a) se a utilização das técnicas operatórias convencionais (os algoritmos), na resolução das operações de adição e subtração, permite a flexibilidade do pensamento da criança e; b) se a criança, ao utilizar os algoritmos formais de adição e subtração, percebe os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal implícitos nesse procedimento. Para alcançar os objetivos almejados, foram entrevistadas, mediante o Método Clínico de Jean Piaget, vinte crianças de uma escola pública de Maringá, sendo que, dez pertenciam à terceira série do ciclo básico e dez cursavam a quinta série do Ensino Fundamental. Estes dois grupos foram subdivididos ainda em outros dois grupos menores composto por cinco crianças que, segundo suas professoras, apresentavam bom desempenho de aprendizagem em Matemática e cinco que apresentavam desempenho tido com insuficiente. A análise dos resultados indica que tanto as crianças de terceira como as de quinta série reproduzem mecanicamente as técnicas operatórias convencionais, sem compreensão real das ações que realizam. Ao utilizar o algoritmo convencional de adição e subtração o fazem de forma automática, repetindo regras que lhes foram ensinadas e sem perceber a relação existente entre esse dispositivo e os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal. Quanto ao desempenho na aprendizagem da disciplina (bom ou insuficiente), não é possível afirmar que ele esteja relacionado com a compreensão do Sistema de Numeração Decimal, o que nos parece é que essas classificações estão voltadas para outras variáveis do processo educativo.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Algoritmo de adição e de subtração. Sistema de Numeração Decimal.

ABSTRACT

Although many studies in Mathematics Education (in the national as well as in the international sphere) approach possible problems about an “incorrect” introduction of formal educational procedures in the arithmetic’s teaching during the beginning stages of learning, it is important to recognize that these discussions haven’t emerged completely in the scholars limits to provoke an important rupture on the present scholar practices, which remains taking priority to repetition instead of the mathematical knowledge construction. In this sense, the present research proposed to investigate if the arithmetical teaching, with emphasis in algorithm, contributes to the mathematical knowledge construction. It was decided to analyze only the additives structures – addition operation and/or subtraction – as these structures make possible to investigate: a) if the conventional operations techniques (the algorithms) utilization, in addition and subtraction operations solving, allow the flexibility of the child’s thinking and; b) if the child, while using the formal addition and subtraction algorithms, perceives the principles and properties of the Decimal Numeration System which are implicit in this procedure. Aiming to achieve the proposed objectives, it was interviewed, through Piaget’s Clinical Method, twenty children of a public school of Maringá, being that, ten children belonged to the third grade of the basic cycle and the other ten to the fifth grade of the Fundamental Education. Each one of these two groups were subdivided into other two smaller groups, composed by five children who, according to their teachers, had a good performance and five children who had an insufficient performance in mathematical learning. The results analysis indicates that children from both educational stages reproduce mechanically the conventional operations techniques, without a real comprehension of the actions executed by them. While using the conventional algorithms of addition and subtraction, they make it automatically, repeating rules that they were taught to without realizing the existing relation between this mechanism and the principles and properties of the Decimal Numeration System. Regarding the learning performance in the subject (good or insufficient), it is not possible to affirm if it is related to the Decimal Numeration System comprehension, it seems that these classifications point toward to other variables of the educative process.

Key words: Mathematics Education. Addition and Subtraction Algorithms. Decimal Numeration System.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	OS ALGORITMOS CONVENCIONAIS NO ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA.....	14
2.1	Aspectos que dificultam o ensino e aprendizagem de Matemática.....	14
2.2	Algoritmos convencionais, adição e subtração: como temas de estudos e pesquisa.....	21
2.3	Orientações para o ensino de Matemática no Brasil.....	32
3	A PESQUISA.....	40
3.1	O problema de pesquisa.....	40
3.2	Método Clínico Crítico.....	41
3.3	Sistema de Numeração Decimal.....	45
3.4	Estabelecimento das estratégias de investigação.....	47
3.5	Seleção do local e das crianças colaboradoras da pesquisa.....	48
3.6	Procedimentos para a aplicação da prova Matemática.....	50
3.7	O Livro didático adotado	53
4	ANÁLISE.....	62
4.1	“Da direita para a esquerda”.....	62
4.2	Para além do algoritmo.....	67
4.3	A Técnica do “vai um”.....	86
4.4	A Técnica do “empresta um”	98
4.5	A Prova real.....	107
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	115
	REFERÊNCIAS.....	118
	ANEXOS.....	121

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

- P** Utilizado como abreviação de pesquisadora nas transcrições das entrevistas
- C** Crianças de terceira série colaboradoras da pesquisa
- A** Pré-adolescentes de quinta série que colaboraram com a pesquisa
- [...]** Suprime trechos das transcrições que não são pertinentes à discussão
- (...)** Identifica que a criança se manteve calada por algum tempo ou que, frente a um questionamento não manifestou resposta
- PCNs** Parâmetros Curriculares Nacionais

1 INTRODUÇÃO

No ano de 2003 foi implantado nas escolas públicas do estado do Paraná, o projeto denominado Sala de Apoio à Aprendizagem, no qual tive a oportunidade de trabalhar, em período contra-turno, com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental. As crianças selecionadas para compor a referida sala eram alunos que, segundo diagnóstico do professor regente da turma, apresentavam defasagem no aprendizado dos “conteúdos” de matemática das séries anteriores (1ª a 4ª série).

Uma parcela considerável dos alunos que era selecionada para participar da sala de apoio, apesar de já ter cursado quatro anos do ensino fundamental, ainda apresentava dificuldades, ou não se sentia segura na resolução das operações aritméticas, isto é, não dominava as técnicas operatórias, e poucos manifestava outras estratégias de resolução. Diante desse fato, boa parte do tempo que permanecíamos na sala de apoio era empregado na cansativa tarefa de resolver “contas”, o que despendia esforço, da minha parte como educadora, com intuito de sanar as lacunas existentes, e das crianças, na tentativa de aprender as técnicas operatórias. O trabalho desgastava tanto a professora quanto os alunos, que, depois de algum tempo, perdiam o interesse em participar das aulas de apoio, lhes era cansativo ficar repetindo “contas” que, a meu ver, pareciam sem sentido.

Ao fazer uma reflexão sobre essas aulas, eu me perguntava: para que seria importante o domínio do algoritmo das operações aritméticas elementares, uma vez que as calculadoras, acessíveis a todos, executa com maior rapidez e precisão os cálculos necessários? Será que somente aprender a resolver os algoritmos das operações aritméticas elementares contribui para o desenvolvimento do raciocínio? Certamente estas questões já estão praticamente respondidas, uma vez que seguir e respeitar regras contribui apenas para manter o aluno passivo frente ao aprendizado e dependente da aprovação de outros, isto é, não o incentiva a ser questionador e muito menos educa para autonomia. Então, a importância do trabalho com os algoritmos deveriam estar na própria construção do conhecimento matemático. Mas, para a construção de qual “conceito” especificamente, a árdua tarefa de desenvolver os algoritmos poderia contribuir? Com a compreensão dos significados das operações ou utilidades no

mundo real, seguramente não, pois nada nos algoritmos se relaciona diretamente com as operações e as calculadoras resolvem as necessidades cotidianas.

Diante dessa reflexão e do fato de que os algoritmos são procedimentos fundamentados nos princípios e nas propriedades do Sistema de Numeração Decimal, é legítimo indagar se o objetivo implícito no intenso trabalho com eles seria consolidar ou mesmo completar a compreensão do Sistema de Numeração Decimal pelas crianças.

Várias vezes minhas indagações, bem como a de outros professores, no tocante ao ensino da matemática, foram temas de discussão no Grupo Interdisciplinar de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GIEPEM), vinculado ao departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, do qual faço parte. Foi neste grupo que comecei a ter contato com as pesquisas sobre Educação Matemática, que despertaram em mim o gosto pela investigação e a necessidade de conhecer novas maneiras de “ensinar” matemática. Uma avaliação que me intrigou foi a do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) segundo a qual, em 2003, 11,5% dos alunos, por eles avaliados, não conseguiam transpor, para uma linguagem matemática específica, comandos operacionais elementares compatíveis com a série, ou seja, não identificavam uma operação de soma ou subtração envolvida no problema ou não sabiam o significado geométrico de figuras simples.

Na experiência vivenciada por mim, na sala de apoio à aprendizagem, pude constatar que as crianças que não conseguiam resolver as “contas” também não compreendiam o Sistema de Numeração Decimal. Por exemplo, ao subtrair 19 de 23, não sabiam explicar o que significa o “empresta um”; para elas não estava claro que o “dois” do vinte e três na verdade eram duas dezenas, logo, o que se “empresta” é uma dezena. Mesmo na operação de adição, o “vai um” não era entendido por elas, pois não eram capazes de explicar o que significa essa ação.

Mas seria a recíproca verdadeira? Crianças que conseguem “resolver contas” compreendem os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal, ou seja, conseguem perceber a relação existente entre os algoritmos de adição e de subtração e os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal?

No segundo semestre de 2004, tive a oportunidade de participar da seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência e o Ensino de Matemática, que interpretei como a

oportunidade de aprofundar meus conhecimentos e encontrar respostas para as questões que me desafiavam, acerca do ensino da matemática como, por exemplo, se o ensino da aritmética, com ênfase no algoritmo, contribui para a construção do conhecimento matemático, em particular no que se refere aos princípios e propriedades do Sistema de Numeração Decimal.

Por entender que a observação do desenvolvimento desses algoritmos nos permitiria alcançar respostas para nossa indagação, e também, devido ao curto período de tempo que dispusemos para concluir nossa pesquisa, optamos por investigar as estruturas aditivas, operação de adição e subtração. Portanto, visando atender ao objetivo proposto, organizamos o presente estudo em quatro seções. Na primeira, apresentamos a revisão de alguns dos mais recentes resultados de pesquisas (tanto nacionais quanto internacionais), principalmente aqueles publicados a partir da década de 80, que tratam dos problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem da aritmética, nas séries iniciais do ensino fundamental. Já na segunda seção, apresentamos o problema de investigação, descrevemos a metodologia utilizada, o tratamento de dados, bem como o processo de seleção da escola e dos sujeitos que colaboraram com a pesquisa. Na terceira, analisamos os resultados obtidos a partir dos dados coletados, e, na quarta, por sua vez, apresentamos as discussões e considerações finais da pesquisa.

2 OS ALGORITMOS CONVENCIONAIS NO ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA

A literatura especializada em Educação Matemática, seja em âmbito nacional, seja internacional, tem sua atenção voltada para os problemas decorrentes da aprendizagem matemática. Nesta seção, apresentamos uma revisão bibliográfica referente a pesquisas produzidas nos últimos anos, as quais abordam o tema que nos propusemos a investigar. Optamos por dividi-la em duas partes: na primeira, expomos o estudo de alguns autores, como Imenes (1989), Lorenzato (2006) e Machado (1990), que discutem porque a matemática é vista, por algumas pessoas, como algo difícil ou até mesmo impossível de aprender, bem como quais são os aspectos que dificultam o ensino e a aprendizagem de matemática; na segunda parte, nosso foco são pesquisadores que têm sido referência básica para as discussões sobre o ensino e a aprendizagem matemática nas séries iniciais, dentre eles destacamos Kamii (1988, 1995a, 1995b), Nunes e Bryant (1997), Nunes (2005), Lerner (1995), e Carraher e Schliemann (1983), direcionando nossa atenção para as discussões em torno dos possíveis problemas na utilização do procedimento formal em aritmética, mais especificamente, na estrutura aditiva ou, em outras palavras, o uso do algoritmo de adição e subtração.

2.1 Aspectos que dificultam o ensino e aprendizagem de Matemática

As idéias que as pessoas têm da Matemática podem se constituir em entraves à sua aprendizagem. A simples menção da palavra “matemática” já é, por si, desencadeadora de reações extremas. Não é difícil encontrar pessoas que demonstrem seu descontentamento em relação a essa disciplina, e quando são questionadas quanto ao porquê desse desagrado, mencionam frases já conhecidas por professores e pesquisadores.

Encontramos no estudo desenvolvido por Imenes (1989), uma coletânea dessas respostas, reunidas pelo autor durante conversas com pessoas em vários ambientes e situações diversas, e que, posteriormente, serviram como objeto de análise em sua pesquisa, que objetivou

investigar “o que é essencial no fracasso do ensino e da aprendizagem de Matemática”. Imenes (1989) relata que o fracasso do ensino da Matemática, em geral, é creditado ao desinteresse do aluno ou ao seu “baixo rendimento”, restringindo assim a responsabilidade a ele e à escola. Pessoas que vivenciaram essa experiência, quando questionadas sobre o porquê de não gostarem de Matemática, respondem utilizando frases como: “não entendia nada; era grego”; “só tirava nota baixa”, ou ainda, “é muito abstrata”. Segundo o autor quando as pessoas se referem à matemática como sendo abstrata, quer dizer que ela não tinha o menor significado, ou ainda que esta ciência é incompreensível e que dificilmente poderia ser entendida por leigos.

Como mencionado, as declarações expostas pelo autor são conhecidas pelos professores e ouvidas por eles freqüentemente. Segundo Imenes (1989, p. 275), o insucesso do ensino e da aprendizagem da Matemática escolar se deve ao fato de que a grande maioria das pessoas não gosta de Matemática. “Fica a impressão de que a experiência com a matemática, vivida nos bancos escolares, marca necessariamente as pessoas, de alguma forma”. O autor cita como exemplo as reprovações e as notas baixas, dois fatores responsáveis por talharem nítidas marcas que acompanham o indivíduo mesmo após o período de escolarização e que podem ser percebidos nestes relatos: “não consegui aprender e fiquei complexado para o resto da vida”; “meu professor era muito autoritário, só valia se a resposta fosse igual à dele”.

Um outro item citado pelo autor é a falta de contextualização das atividades Matemáticas, algumas pessoas afirmaram: “nunca entendi de onde vinha nem p’ra onde ia”; ou, “nunca me contaram p’ra que servia tudo aquilo”. Estas afirmações podem ser associadas ao ensino da matemática escolar desvinculada de um contexto real, o que a torna algo inacessível, impossível de ser entendida por pessoas comuns, como verificamos nas expressões: “Nunca consegui aprender”, “Sempre achei difícil”, “Não tenho cabeça p’ra isso” (IMENES, 1989, p. 272).

Apesar de transcorridos quase 20 anos da pesquisa de Imenes, os resultados são absolutamente atuais, pois em nossa prática diária, deparamo-nos com alunos que trazem consigo essa concepção em relação à Matemática, o que pode atuar como obstáculo ao aprendizado dessa disciplina, contribuindo para o seu fracasso. Essas concepções podem ser percebidas na sociedade em geral, introjetadas nos pais dos alunos, seus familiares, e até mesmo em seus professores. Podemos perceber claramente que a Matemática tem certo

destaque quando comparada às demais disciplinas, por exemplo, se um aluno não é bem sucedido em outra matéria escolar, como Ciências, História ou Geografia, é porque não teve atenção/dedicação ou teve dificuldades para recordar nomes e datas. Contudo, se ele não for bem sucedido em Matemática, o insucesso será conferido à carência de raciocínio. Esta situação, presente atualmente no cenário escolar é muito bem descrita por Imenes:

Em resumo, quem não aprende as outras matérias é, no máximo, considerado vagabundo; mas quem não aprende matemática é tachado de burro. Esse aspecto peculiar ao ensino de matemática é muito forte. Via de regra, as pessoas reagem ao fracasso das crianças e adolescentes diante da matemática responsabilizando o aluno; atribuem o insucesso à sua incapacidade para pensar. Em nenhuma outra disciplina esse comportamento é tão marcante. Esse modo de ver o problema não é só da escola, ele invade a sociedade e, sem dúvida, tem a ver com o *status* cultural da matemática. Além disso, está também relacionado com uma série de equívocos contidos na afirmação, repetida por muitos, de que “*matemática desenvolve o raciocínio*” (IMENES, 1989, p. 277).

O *status* conferido a esta ciência pode ser verificado nas reações que os pais explicitam quando recebem a notícia de que o filho tirou nota baixa em Matemática. Quando o insucesso está relacionado a outra disciplina, a postura do pai é totalmente diferente. O autor afirma que várias vezes escutou frases, como: “mas meu filho foi ficar justo em Geografia, se ainda fosse em Matemática!”, ou, “o que interessa mesmo é Português e Matemática, se a criança (meu filho, o aluno) aprender bem essas duas o resto ela se vira depois” (IMENES, 1989, p. 278).

Imenes (1989) afirma que o fracasso da Matemática poderia assumir menores proporções caso não fosse vista como a disciplina que só é entendida por pessoas ditas inteligentes, conferido-lhe um *status* cultural.

Um segundo aspecto que colabora com a existência de tal fracasso, segundo o autor, é a maneira como a Matemática é apresentada ao aluno: desprovida de significado; descontextualizada, fechada em si mesma; e atemporal, desvinculada da história da humanidade. Imenes (1989, p. 278) assegura que:

[...] no ensino tradicional moldado no modelo formal euclidiano, o currículo ‘escada’, de estrutura linear, organiza os conteúdos numa seqüência lógica onde o que vem antes é pré-requisito lógico para o que vem depois. Essa forma de arrumar a matemática, que está também nas nossas cabeças, tem uma conseqüência muito séria, detectada, cotidianamente, na sala de aula:

torna-se muito difícil para o aluno ‘pegar o bonde andando’. Explico; como se considera que para aprender tal assunto é necessário saber o que foi ensinado antes, o aluno é, a todo momento, cobrado pelo que não sabe.

Imenes (1989) reconhece a necessidade de se saber alguns conceitos antes de outros, porém alerta quanto ao apego excessivo, por parte de alguns professores, à idéia de pré-requisitos. Esse apego, segundo o autor, pode mascarar, de certa forma, alguma deficiência no trabalho pedagógico, não a falta de base do aluno.

Conforme mencionamos, a concepção que os professores têm da Matemática é refletida em sua ação pedagógica. Durante as aulas, transmitem aos alunos a concepção platônica¹ da matemática que lhes foi passada em sua formação. Assim, os conceitos se mostram estáticos, ocultando que o conhecimento matemático é historicamente construído. E, “Mostrando-se estáticos e rígidos, os conceitos perdem a possibilidade de se transformarem e, com isso, relativizarem-se. Sendo permanentes, imutáveis, absolutas, as idéias Matemáticas transformam-se em dogmas” (IMENES, 1989, p. 284).

De acordo com Imenes (1989), “o modelo formal esta na essência do fracasso”, apontando a necessidade de uma ruptura com esse modelo formal de apresentação da Matemática escolar. Contudo, não implica, segundo o autor, romper com “a formalização na ciência Matemática”, ou “eliminar o raciocínio dedutivo da Matemática escolar”. Continuando, o autor acrescenta:

Raciocínio dedutivo, que também precisa ser construído ao longo do desenvolvimento cognitivo de cada aluno, pode e tem que estar presente ao longo do ensino de matemática, sem que para isso a matemática escolar seja moldada pelo modelo formal. A ruptura com o modelo formal aqui proposta, dentre muitas outras conseqüências, poderia talvez permitir que, construindo-se o pensamento dedutivo ao longo do desenvolvimento cognitivo dos alunos, fosse possível levá-los à compreensão do que é a formalização da matemática (IMENES, 1989, p. 287-288).

Analogamente, Lorenzato (2006, p. 113) aponta que o ensino de Matemática sem significado não leva ao aprendizado e sim à decoração abrindo espaço para “crenças (opiniões com convicção) ou credices (crenças sem fundamento)” em torno dessa ciência.

¹ Tudo que acreditamos ser parte do mundo real constitui aparência, ou seja, pertence ao mundo das idéias.

Objetivando conhecer quais as crenças que se destacavam entre os professores do ensino fundamental, mais especificamente professores de 1^a a 4^a séries, Lorenzato (2006) desenvolveu pesquisa² com um grupo de pós-graduandas em psicopedagogia. Todas eram pedagogas e trabalhavam no magistério há nove anos, em média.

Lorenzato (2006) constatou que as crenças em relação à Matemática podem ser de diferentes aspectos, como, por exemplo, crenças quanto: à concepção, à aprendizagem e ao ensino de matemática. Quanto às crenças sobre a concepção de Matemática, pode-se dizer que essa disciplina se resume a: fazer cálculos com números; é exata e está pronta e acabada; é abstrata, lógica, dedutiva; um conjunto de conhecimentos específicos, ora estanques, ora sequenciados, ou até mesmo que ela se constitui apenas da aritmética.

O segundo aspecto observado pelo autor são as crenças em relação à aprendizagem de matemática. Em relação a elas, pode-se afirmar que: a capacidade para aprender matemática é inata a algumas pessoas; ou resolver problemas é achar a solução correta; ou ainda, afirmar que a disciplina é difícil, sendo, portanto, o seu domínio um privilégio de algumas pessoas que são superiores a outras; e que matemática é aprendida mais facilmente por meninos do que por meninas.

Quanto ao ensino de Matemática, Lorenzato (2006) relata que as professoras compartilhavam das seguintes crenças: quem sabe Matemática, sabe ensiná-la; quanto mais exercícios, melhor será a aprendizagem; o importante é dar a resposta correta ao problema; calcular é sinônimo de fazer operações; cada assunto apóia a compreensão do seguinte; há alguns conteúdos de matemática elementar; fração é qualquer parte do inteiro; zero vale nada; 3,14 é menor que 3,13857; o produto é sempre maior que cada fator; o quociente é sempre menos que o dividendo; toda fração é menor que a unidade; multiplicar é um modo de aumentar; quando divide, diminui; triângulos equiláteros não são isósceles; quadrados não são retângulos; uma incógnita (letra) representa um valor a ser determinado; em a^n o n indica a última das posições possíveis.

² LORENZATO, S. “Por que odeio a matemática”. In: **Congresso Interamericano de Educação Matemática**, 11. Blumenau, Anais.... Blumenau, 2003. CD-ROM.

O pesquisador afirma que mais importante que as crendices das professoras foram os relatos dos episódios causadores dessas crendices e também dos bloqueios herdados do tempo de criança ou de jovem, formados nas aulas de matemática. Como exemplo o autor menciona:

A chamada oral da tabuada e o fazer exercícios na lousa, seguidos de punição no caso de insucesso, foram as duas situações mais lembradas como causadoras de 28 diferentes sentimentos, dentre eles o de medo, pânico, pavor, vergonha, desespero, fracasso, humilhação, ódio e bloqueio mental. Dentre as punições, mais marcantes que as físicas foram as morais, principalmente a humilhação perante os colegas (LORENZATO, 2006, p. 118).

Para Lorenzato (2006, p. 119) é necessário “desmitificar” a Matemática, tornando-a acessível à criança, a fim de possibilitar uma aprendizagem matemática dotada de significado. De acordo com o autor, cabe ao professor a tarefa de levar o aluno a desenvolver os conhecimentos necessários para se resolver um problema, formar conjecturas e, partindo da troca com o grupo, chegar a respostas tanto escritas quanto verbais. Ressalta ainda que o processo de construção de conhecimento infantil demanda tempo, para refletir sobre a ação e elaborar hipóteses acerca da resposta para o problema, entretanto este agir-refletir-agir se faz necessário para que o aluno construa o conhecimento pretendido. Deve-se considerar que esse processo de construção se dá por etapas, conforme o nível de desenvolvimento cognitivo em que se encontra a criança.

Lorenzato (2006, p. 40) argumenta que a “maneira inadequada pela qual muitos de nós fomos levados a resolver problemas quando crianças talvez seja um dos fatores responsáveis pelas conseqüências que sofremos”. Faltou-nos a oportunidade de vivenciar as situações-problema, manusear objetos, elaborar hipóteses, trocar informações em grupo, que possibilitariam obter o resultado de determinado problema de diversas formas, ou seja, pelos procedimentos formais e informais de resolução.

As crenças ou crendices em relação à Matemática, a que se refere Lorenzato (2006) bem como as idéias que as pessoas têm sobre essa disciplina, aludidas por Imenes (1989) são as supostas proposições mencionadas por Machado (1990, p. 29), a saber: “A Matemática é exata”; “A Matemática é abstrata”; “A capacidade para a Matemática é inata”; “A Matemática justifica-se pelas aplicações praticas”; “A Matemática desenvolve o raciocínio”.

Machado (1990, p. 30) relata que essas concepções do senso comum a respeito da Matemática estão fortemente instaladas, a ponto de serem usadas como argumento, dando suporte a uma visão distorcida da Matemática. Afirma ainda que “as referidas frases assemelham-se muito mais a *slogans* do que a proposições”, ou seja, são frases sintetizadas que sugerem algo, por exemplo, se pedirmos para alguém que responda a charada: O que é que desenvolve o raciocínio, é abstrata e exata? Certamente teremos como resposta que é a Matemática.

Para Machado (1990, p. 30), a aceitação irrestrita desses *slogans* pode estar na origem de diversos problemas que tanto professores quanto alunos enfrentam em diversas situações de ensino, chegando até mesmo a determinar qual deve ser a postura das ações pedagógicas. Como exemplo, o autor afirma que quando se admite a Matemática como exata, se subentende que outros setores do conhecimento não o são, ou que, por ser exata, a Matemática não comporta resultados aproximados; “lidar com abstrações é uma característica exclusiva da Matemática”, sendo assim é aceitável que se construa conhecimento sem abstrações; quando se aceita que a Matemática é inata, torna-se “natural que grande parte das pessoas encontre dificuldades em Matemática”; dentre todos os setores do conhecimento, apenas a Matemática desenvolve o raciocínio, e o que deve ser ensinado é apenas “o que comporta aplicações práticas”. O autor alerta para o fato de que “a ruptura dessa rede de noções preconcebidas, algumas com características de meras ficções, é o primeiro passo a ser dado no sentido de viabilizar propostas de ações ao ensino de Matemática”.

Ao refletirmos sobre as afirmações e apreensões citadas por Imenes (1989), Lorenzato (2006) e Machado (1990), conjecturamos se essas idéias, credices ou *slogans* podem ter origem ou até mesmo ser a origem do ensino mecanicista da Matemática, com ênfase nos algoritmos. É clara a posição dos autores quanto à necessidade de romper com a maneira formal de apresentação da Matemática escolar, a fim de torná-la mais acessível e possibilitar um ensino repleto de significado. É visível também que se desejamos superar as dificuldades existentes no ensino de Matemática, não basta estabelecermos um acordo no nível do discurso, são necessárias ações concretas. Como exemplo de ação, corroboramos com Machado (1990), ao sugerir que sejam oferecidos ao professor instrumentos necessários para que possa modificar sua prática pedagógica.

1.2 Algoritmo, adição e subtração: temas de estudos e pesquisas

A maioria das pesquisas sobre estruturas aditivas em Educação Matemática e, em especial as mais recentes, dedicam-se a investigar as dificuldades conceituais básicas decorrentes de situações-problema – LERNER, 1995; KAMMI, 1995 a-b; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1983; BARICCATTI, 2003. São raros os estudos voltados ao ensino e aprendizagem dos algoritmos de adição e subtração, particularmente com números multidígitos – RESNICK, CAUXINILLE-MARMECHE, MATHIEI, (1987, apud CALSA, 2002); CARROL E PORTER (1998, apud CALSA, 2002). Devido a essa questão, nossa revisão traz, em alguns momentos, as dificuldades decorrentes do conceito de adição e subtração, visando alcançar o problema específico de nossa pesquisa.

Parte significativa do primeiro e do segundo ciclos do ensino fundamental (compreendido pelas quatro primeiras séries) é dedicada ao estudo das operações aritméticas elementares e, em geral, as operações de adição e subtração ocupam um bom tempo desse período de aprendizagem, entretanto não se pode assegurar que as crianças finalizem esse ciclo de estudo compreendendo os conceitos e os procedimentos convencionais dessas operações.

Uma dificuldade comum que as crianças têm em relação aos procedimentos da estrutura aditiva pode ser observada quando, ao desenvolver o algoritmo de adição não compreendem o “vai um”, ou quando, na subtração com reserva, reproduzem “mecanicamente” o “empresta um”. Essa ausência de compreensão pode ser entendida como a não-percepção, por parte da criança, dos princípios e das propriedades do Sistema de Numeração Decimal, implícitos nos procedimentos algorítmicos dessas operações.

Pais (2006) alerta para o fato de que a posse de um amplo conhecimento matemático é condição *sine qual non* para que a criança realmente compreenda a utilização do algoritmo. A memorização ou a simples reprodução dos algoritmos não assegura que a criança compreenda o procedimento que utiliza. O autor posiciona-se favoravelmente quanto à utilização, com compreensão, desse dispositivo, por entender que sintetiza as ações e simplifica a resolução das operações matemáticas:

Um algoritmo é um dispositivo lógico, geralmente organizado através de um esquema gráfico, formado por uma seqüência ordenada de ações que devem ser rigorosamente seguidas para a solução de um problema, para a realização de uma tarefa ou de uma operação matemática. Trata-se de um dispositivo abstrato que sintetiza, por essa seqüência de ações, um conhecimento muito mais amplo do que revela sua aparente simplicidade. Por esse motivo, é um instrumento útil para simplificar as operações matemáticas, porque economiza o esforço empreendido pelo seu usuário. Tendo em vista essa utilidade, tais dispositivos estão amplamente presentes no ensino da Matemática. Um dos problemas do ensino dos algoritmos decorre da concepção equivocada de que as ações neles previstas podem ser apenas memorizadas, em detrimento de sua compreensão, como se esse nível de aprendizagem estivesse fora dos objetivos escolares. [...]. A aprendizagem de um algoritmo não se reduz a uma simples memorização ou a um treinamento concebido sob a ótica da reprodução. A utilização educacional desses dispositivos está associada a uma efetiva compreensão do sentido das operações contida na sua aplicação (PAIS, 2006, p. 104).

Partilhando da mesma visão, Lerner (1995) desenvolveu um estudo com o objetivo de investigar se a maneira como a Matemática é ensinada nas séries iniciais realmente oportuniza a construção do conhecimento Matemático. Participaram desse estudo 90 crianças de primeira, terceira e quinta séries do ensino fundamental, sendo 30 de cada série. A amostra foi composta por crianças de seis diferentes escolas públicas venezuelanas, sendo cinco pertencentes a distritos da região metropolitana de Caracas e uma pertencendo ao estado de Miranda.

A autora afirma ter razões para acreditar que, apesar de o Programa de Educação Básica da Venezuela conter inovadoras propostas para o ensino de matemática, grande parcela dos professores dessa disciplina ainda não havia inserido essas novas abordagens em sua prática diária, logo, a melhor forma de analisar as conseqüências da utilização de métodos que enfatizam a reprodução de regras e memorização – em detrimento do desenvolvimento intelectual de cada criança – é o contato mais próximo com essa realidade escolar, o que se consegue através da pesquisa.

Assim Lerner (1995) investigou quais estratégias são utilizadas pelas crianças quando lhes são propostas diferentes situações-problema e como respondem as indagações referentes à utilização dos algoritmos da soma e da subtração. Ao analisar os dados obtidos mediante entrevista clínica, a autora constatou que os procedimentos empregados pelas crianças para resolver “contas” de adição e subtração eram totalmente diferentes daqueles utilizados para resolver as situações-problema que envolviam as mesmas operações aritméticas.

Segundo a autora, quando as crianças se deparam com o algoritmo da adição ou da subtração, passam a ver o número multidígitos, inicialmente proposto para o cálculo, como sendo a aproximação de dois números separados. Por exemplo, na soma de $45 + 17$, a criança percebe o 4 e o 5 como números distintos, não mais como foram propostos para o cálculo, “45”, o mesmo ocorre com o 1 e o 7. Ainda sobre as “contas”, constatou que as crianças de terceiras e quintas séries, em sua maior parte, não conseguiam empregar de maneira correta os algoritmos das estruturas aditivas, e aquelas que o utilizavam corretamente, manifestaram um alto nível de incompreensão quanto à ampliação do mesmo. Por exemplo, as crianças que sabiam desenvolver o algoritmo da adição, não conseguiam explicar: por que não é permitido colocar mais que 9 unidades na “casinha” dessa ordem; quanto vale o “um” que sobe ou o valor do “um” que se empresta do vizinho. “[...], é tal sua impossibilidade de determinar seu valor que se refere a ele dizendo “O 5” empresta algo como um “palito” a mais ao 0” (LERNER, 1995, p. 147).

A autora acredita que a falta de compreensão do processo de resolução dos algoritmos se deva ao tratamento desse procedimento desvinculado do sistema de numeração decimal, que é de natureza posicional. Para nós, adultos, que já passamos pelo processo de construção e reconstrução dos princípios do Sistema de Numeração Decimal, é fácil trabalhar com um sistema de base dez, mas as crianças em fase de aprendizado percorrem, em um curto espaço de tempo, toda construção que a humanidade levou séculos para aprimorar. Argumenta ainda que:

A humanidade levou muitos séculos para inventar um sistema de numeração como este, um sistema que é muito econômico, porque permite escrever qualquer número utilizando só dez símbolos. Porém, justamente por ser tão econômico, pode tornar-se bastante misterioso para aqueles que estão procurando pistas (ou elementos) que lhes permitam reconstruir seus princípios. Se reconhecemos que o sistema de numeração é um objeto de conhecimento muito complexo, reconheceremos também que sua compreensão não pode ser conseguida simplesmente através de explicações acerca do valor das dezenas ou das centenas (LERNER, 1995, p. 140).

Lerner (1995, p.188) constata que as crianças de quinta série, mesmo tendo aprendido muita coisa na escola, como, por exemplo, as regras de multiplicação e divisão, não apresentam o conhecimento necessário para emitirem uma explicação consciente do que é que fazem quando “se leva” ou “pede emprestado”.

Complementando o exposto, Macedo (1994, p. 167) julga ser essencial o processo de tomada de consciência³ da ação, para que haja a construção do conhecimento. A criança precisa planejar, executar e auto-avaliar o caminho por ela percorrido no processo de resolução, o que lhe permite a compreensão do que foi feito, ou seja, a tomada de consciência sobre sua aprendizagem. Segundo o autor, “o fazer depende da construção de procedimentos, de um ‘como fazer’”, e “o compreender depende da construção de uma ‘teoria’ sobre esses procedimentos, de um ‘por que fazer’”. Portanto, pode-se afirmar que a compreensão do saber só se efetiva através da ação, quando as partes se relacionam entre si, formando um todo estruturado. Ao observar seu erro, por exemplo, a criança pode perceber a incoerência da resposta dada, o que provoca, assim, mudanças em sua hipótese explicativa.

Becker (2003) partilhando dessa mesma visão de ensino, alerta que a aprendizagem escolar, da forma como vem sendo gerida, pode ser entendida como um processo eficaz de alienação, na medida em que prioriza o treinamento de ações “planejadas” em detrimento das ações espontâneas, obrigando a criança a resolver problemas que não são seus. E conclui:

Por isso, somos enfáticos ao afirmar: o treinamento é a pior forma de se entender, na prática e na teoria, a produção escolar do conhecimento, porque atua no sentido da destruição das condições prévias do desenvolvimento. À medida que o treinamento exige o *fazer* sem o *compreender*, separando a prática da teoria, ele subtrai a matéria-prima do reflexionamento, anulando o processo de construções prévias de todo desenvolvimento cognitivo e, portanto, de toda aprendizagem, uma vez que o reflexionamento do fazer ou da prática é a condição necessária do desenvolvimento do conhecimento (BECKER, 2003, p. 69).

Outro estudo que trata de questões relacionadas à utilização dos algoritmos convencionais foi realizado por Carraher e Schliemann (1983), em três escolas públicas e três particulares de Recife. Durante o trabalho, as autoras – mediante a aplicação do Método Clínico piagetiano – identificaram as estratégias utilizadas pelas crianças ao resolver as operações de adição e subtração.

A amostra foi composta por 50 crianças, com idades entre sete e treze anos de idade, entrevistadas individualmente. Foram apresentadas, oralmente, a cada criança, sete contas de adição e quatro de subtração, para que anotassem e resolvessem. Duas das adições que

³ Tomada de consciência da ação significa, na teoria de Piaget, transformar o fazer em um compreender.

envolviam parcelas de dois algarismos exigiam o agrupamento de dez unidades para, posteriormente, serem transportadas à coluna das dezenas. Nas subtrações, havia a necessidade de desmembrar uma dezena em dez unidades para, então, poder efetuar a “conta”.

As pesquisas analisaram tanto as explicações verbalizadas pelas crianças quanto os procedimentos utilizados para resolução das operações de adição e subtração. As categorias identificadas foram as seguintes:

- ✓ contagem (eram considerados tanto as marcações feitas no papel quanto nos dedos);
- ✓ a utilização dos algoritmos ensinados pela escola;
- ✓ decomposição dos números envolvidos em dezenas e unidades;
- ✓ uso de resultados antecedentes para proceder a um novo resultado.

Conforme constataram as autoras, menos da metade das crianças da amostra optou pelo uso dos algoritmos formais no momento de resolver as contas de adição, e quando resolviam a operação de subtração, poucas (menos da metade das que utilizaram o algoritmo da adição) operaram usando esse procedimento de resolução. Dentre as crianças que operaram com os algoritmos ensinados na escola, aproximadamente a metade não conseguiu acertar o resultado das contas de adição e quase todas tiveram insucesso quanto aos resultados das subtrações.

Carraher e Schliemann (1983) classificam em dois tipos distintos os erros na resolução do algoritmo da adição: no primeiro a criança operava com o mesmo algarismo duas vezes, misturando dezenas e unidades, o que foi verificado em mais de cinquenta por cento das adições erradas; o segundo consistia na falta de reagrupamento das unidades para transportá-las para a ordem imediatamente superior, a das dezenas.

Os erros cometidos na resolução dos algoritmos de subtração também são separados por Carraher e Schliemann (1983, p. 239-240) em dois tipos diferentes: no primeiro, as crianças, frente a uma subtração que exigia decompor uma dezena em dez unidades, para depois poder efetuar a subtração, subtraíram o número menor, que estava no subtraendo, do maior, que se encontrava no minuendo; o segundo tipo de erro ocorreu sempre em conjunto com o primeiro e consistia em misturar dezenas e unidades, por exemplo, “tem-se que para $22 - 8$ o resto apresentado era 66, pois os passos seguidos eram: $8 - 2 = 6$ e $8 - 2 = 6$ ”.

No trabalho de Gómez-Granell (1997) são encontrados exemplos dos mesmos erros cometidos na resolução do algoritmo de subtração, mencionados por Carraher e Schliemann (1983). São exemplos retirados dos estudos de Resnick, Cauxinille-Marmeche, Mathiei (1987, apud GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 265):

Uma menina de nove anos conhece o algoritmo da subtração com reserva. Quando lhe propuseram que solucionasse estas duas operações, $36 - 27$ e $27 - 36$, a criança aplicou a mesma regra para ambos os casos: sempre subtraindo o número menor do maior. Quando lhe perguntaram por que, a criança afirmou que a professora tinha ensinado que sempre se deve diminuir colocando o número do maior em cima.

Conforme o relato das autoras, fica claro que a criança utiliza regras que lhe foram ensinadas, contudo não apresenta conhecimento do procedimento que deve desenvolver e, tampouco, o conceito lhe é claro, pois não percebe o valor posicional dos números envolvidos na conta.

Nunes (2005, p.43) partilha da mesma preocupação quanto à utilização dos algoritmos quando afirma:

Para utilizar eficazmente esses instrumentos amplificadores de suas capacidades, o aluno precisa compreender tanto as idéias básicas que eles representam – por exemplo, a idéia de número – como a lógica e a organização do próprio instrumento (no caso do sistema de numeração que usamos, o aluno precisa compreender a composição aditiva de número e a idéia de unidades com valores diferentes).

Carraher (1990) afirma serem poucos os educadores que se mostram preocupados em saber como as crianças resolvem as continhas, normalmente o que é ensinado na escola são “regras”, como por exemplo, a técnica do “vai um” ou do “empréstimo”, que servem para resolver problemas complexos. Completando seu raciocínio, ressalta que:

[...] Quando a criança é capaz de compreender bem o sistema decimal, ela tem também maior facilidade de fazer contas utilizando o sistema. Nossos estudos indicam que as crianças que compreendem bem o sistema decimal e sabem usá-lo em operações preferem fazer as operações mentalmente, para depois representá-las no papel. É provável que esse processo deva estar bem solidificado antes de introduzirmos os recursos escolares que facilitam a solução de problemas de computação com lápis e papel (CARRAHER, 1990, p. 67-68).

Outra pesquisa que aborda a temática foi realizada por Bariccatti (2003), com quarenta e oito crianças de terceira e quinta séries do ensino fundamental. Um dos objetivos da investigação foi comparar, nos sujeitos com diferentes rendimentos escolares em Matemática, os níveis de construção de interdependência entre adição e subtração. Para tanto, ela se utilizou de jogos de regras numa perspectiva construtivista.

Por meio da análise dos dados obtidos, Bariccatti (2003) constatou que não ocorreu, entre os alunos de terceira e quinta série, com rendimento insatisfatório, diferenciação nos procedimentos de resolução das operações de adição e subtração. Observou, ainda, que os sujeitos se encontravam principalmente no nível de iniciação da construção da adição e subtração relativas. Contudo, no grupo de quinta série, com rendimento satisfatório, prevaleceram processos mais bem elaborados na relação de interdependência entre as operações, evidenciando que os sujeitos compreenderam as implicações entre ações aditivas e subtrativas.

Bariccatti (2003) afirma que o fato de a criança ter um bom rendimento escolar não garante que ela realmente compreendeu os processos envolvidos nas operações de adição e subtração e que com certeza terá, devido às lacunas ainda existentes, dificuldades com os conteúdos de quinta série.

Assim, a escola, mais do que se preocupar com os conteúdos a serem transmitidos, deve ir além, compreendendo como os sujeitos constroem o conhecimento pelo processo de equilíbrio ou de abstração reflexiva, no caso particular da pesquisa, como compreendem as implicações entre as operações de adição e subtração (BARICCATTI, 2003, p. 161).

Bariccatti destaca o estudo, nesta mesma linha de investigação, de Lopes (2002) por evidenciar que na medida em que as crianças demonstram compreender a relação existente entre as operações de adição e subtração, seus procedimentos de resolução se tornam mais elaborados, confirmando assim, o que foi constatado em sua pesquisa.

Calsa (2002) cita o estudo de Carrol e Porter (1998)⁴, que afirmam ser dispensável, nas séries iniciais, o uso dos algoritmos escritos. Nessa fase, as situações de aprendizagens propostas são resolvidas com o auxílio do cálculo mental e anotações inventadas pelas crianças. É na quarta série do ensino fundamental – momento no qual a criança tem contato, mais intensivamente, com números maiores – que surgem situações de aprendizagem em que o registro escrito dos algoritmos se faz necessário, devido ao insucesso dos outros mecanismos de resolução de tarefas.

Calsa (2002) comenta que os autores mencionados defendem um ensino, para as séries iniciais, que encoraje as crianças a criarem seus próprios modelos de resolução para as situações propostas pela escola, e que esses modelos sejam discutidos e utilizados por elas. Posteriormente, podem ser apresentados os algoritmos canônicos. Desse modo, as crianças têm a possibilidade de responder à situação proposta, pela escola ou no cotidiano, não apenas com a utilização de algoritmos convencionais, mas também por vários outros procedimentos inventados por elas. Quando a criança inventa um procedimento, na tentativa de responder a um problema proposto, em detrimento dos algoritmos formais, ela tem a possibilidade de tomar consciência das propriedades que utiliza durante o processo de resolução, o que contribui para a construção do conhecimento matemático.

Partilhando da mesma opinião, Mauri (1999) afirma que a aprendizagem Matemática pode ser caracterizada como uma reorganização pessoal dos conhecimentos, pois, ela depende do desenvolvimento cognitivo do sujeito que lhe permite determinado nível de compreensão. Essa reorganização depende também da motivação do sujeito em aprender:

A aprendizagem, entendida como *construção* do conhecimento, pressupõe entender tanto sua dimensão como produto quanto sua dimensão como processo, isto é, o caminho pelo qual os alunos elaboram pessoalmente os conhecimentos. Ao aprender, o que muda não é apenas a quantidade de informação que o aluno possui sobre um determinado tema, mas também a sua competência (aquilo que é capaz de fazer, de pensar, compreender), a quantidade do conhecimento que possui e as possibilidades pessoais de continuar aprendendo (MAURI, 1999, p. 88).

⁴ CARROL, W.; PORTER, D. Alternative algorithms for who-number operations. In: MORROW, L; KENNY, M. (Eds). **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**. USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998, p. 106-114.

Nessa perspectiva, o aluno constrói seu conhecimento a partir das atividades que desenvolve para atribuir significado ao tema estudado. Para a autora a coordenação dos esquemas de conhecimento⁵ que a criança tem determina o nível de elaboração do significado e implica também quanto à importância do estabelecimento de vínculo com a nova informação apresentada.

Gómez-Granell (1997, p. 276) corrobora ser esse o sentido de se estimular o uso dos procedimentos inventados pelas crianças, como, por exemplo, recorrer a desenhos, gráficos ou ícones que lhes permitam mencionar com maior facilidade a “semântica da operação e assim construir uma representação mental interna da mesma”. A autora relata ter observado, nas aulas de Matemática, que algumas crianças que não conseguiam resolver um problema utilizando os algoritmos convencionais, resolviam com facilidade se fosse pedido que o fizessem usando suas próprias estratégias. Afirma, ainda que, posteriormente ao uso de estratégias não convencionais as crianças se mostravam mais aptas a explicar as relações e transformações relacionadas ao problema. Enfatiza a necessidade de propor modelos concretos que permitam à criança entender a semântica das operações. Entretanto alerta para a necessidade de associar os símbolos matemáticos ao seu significado referencial, ou seja, os aspectos semânticos e sintáticos das operações e transformações matemáticas.

Assim como Carrol e Porter (1998 apud CALSA, 2002) e Gómez-Granell (1997), Kamii (1988, 1995a-b) alega que o ensino dos algoritmos convencionais nas séries iniciais é prejudicial, pois leva o aluno a desistir de seus “cálculos mentais”, por estes serem diferentes dos procedimentos algorítmicos.

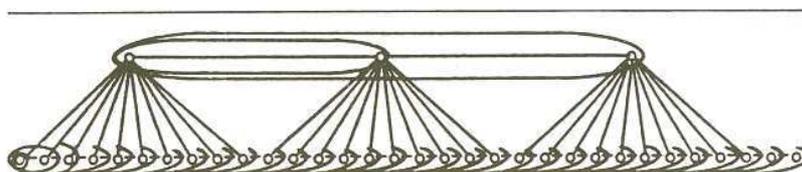
Kamii (1995a), fundamentada em pesquisas da década de 80, que investigaram a compreensão infantil do valor posicional, assegura que mesmo as crianças havendo trabalhado com o valor posicional ao longo das séries iniciais, compreendem o número 15 como sendo 15 unidades, pois ainda não conseguem pensar nesse numeral como sendo 1 dezena e 5 unidades, ou seja, sempre que lhes for pedido para contar uma grande quantidade de objetos, elas contarão de um em um até obter a quantidade total. A autora denomina essa fase de sistema de unidades, dito em outras palavras, quando as crianças procedem dessa

⁵ Entendemos por esquemas de conhecimento a representação que uma pessoa tem, em um determinado momento, sobre uma parcela da realidade (MAURI, 1999, p. 96).

maneira é porque ainda não conseguem pensar em agrupamentos, por exemplo, contar de cinco em cinco ou de dez em dez. Para que isso ocorra, as crianças precisam construir o sistema de dezenas, também denominado sistema decimal, é quando as crianças passam a ser capazes de contar objetos em agrupamentos de dez, por exemplo, se lhes pedimos para contar certa quantidade de objetos, elas os agrupam de dez em dez, depois contam os grupos obtidos até atingir a quantidade total, como afirma Kamii (1995a, p. 45):

Para que a criança seja capaz de pensar no número 32 como compreendendo 3 dezenas e 2 unidades, entretanto, ela precisa construir um segundo sistema – o de dezenas – sobre o sistema de unidades, por abstração construtiva. É isso que está ilustrado na figura 2.3. Da mesma forma que o sistema de unidades não pode ser enfiado na cabeça da criança pelo ambiente que a rodeia, o sistema de dezenas também não pode simplesmente lhe ser transmitido por pessoas e objetos. Enquanto os signos numéricos e a escolha da base dez se constituem em convenções, significando, portanto conhecimento social, as relações hierárquicas de parte e todo mostradas na figura abaixo pertencem ao campo de conhecimento lógico-matemático.

O sistema de dezenas construído sobre o sistema de unidades



Assim como para o sistema de unidades, o sistema de dezenas também envolve a síntese de relações de ordem e inclusão hierárquica, que deve ser feita pela criança. No sistema de dezenas a criança deve igualmente ordenar mentalmente as unidades, incluindo o “um” no “dois”, o “dois” no “três” etc; embora os “uns” nesse novo sistema sejam, na verdade, “dez”.

Objetivando demonstrar que as crianças pensam em sistema de unidades e que a construção do sistema de dezenas se dá ao longo da segunda à quinta série, a autora desenvolveu um estudo, em Genebra, na Suíça, com 100 crianças de primeira a quinta série da escola elementar. Ao entrevistar as crianças, a pesquisadora investigou como elas contavam um grande número de objetos espontaneamente, e como faziam a contagem desses objetos de dez em dez. Constatou que, além das crianças da primeira série, boa parte das demais optou por contar as fichas de uma a uma.

Todos os alunos de primeira série e a maior parte dos demais contaram espontaneamente a grande quantidade de fichas de uma em uma. A contagem espontânea de dez em dez, a partir da separação das fichas em montes, apareceu pela primeira vez na quarta série, em apenas 14% da classe. (Fiquei tão surpresa pela preferência, até entre os mais velhos, pela contagem de um em um que às vezes eu pedia a alunos de quarta e quinta série que contassem as 200 fichas, para ver se passariam a usar dezenas. Ainda assim eles contavam de um em um!) (KAMII, 1995a, p. 49).

Kamii (1995a, p. 50) formulou quatro categorias para sintetizar as respostas das crianças, quando lhes era pedido para que contassem as fichas de dez em dez: a primeira, intitulada “Nenhuma idéia sobre como fazer”, inclui as crianças que alegam não saber como contar de dez em dez, ou, as que contam cada ficha dizendo “Dez, vinte, trinta,...”, entre outras respostas; a segunda categoria, “Fazer montes de dez sem conservar o todo”, é composta pela respostas das crianças que não conseguem pensar em dezenas e unidades simultaneamente, por exemplo, quando era pedido ao aluno que contasse de dez em dez, ele separava os montes, porém, frente à indagação de quantas fichas tinha, respondia contando os montes como se cada um fosse uma ficha; a terceira, “Não separando o todo em partes”, comporta as crianças que contam as fichas de uma em uma até chegar a um monte de dez, em seguida, contam novamente e juntam o segundo monte de dez ao primeiro, dizendo “Vinte”, contam outro monte de dez e o juntam ao de vinte, dizendo, “Trinta”, assim continuam a contagem até o final das fichas; na última categoria, “Fazendo montes de dez e conservando o todo”, incluem-se as crianças que primeiramente separavam as fichas em montes com dez para depois determinar a quantidade total de fichas. “Ao contrário das da segunda categoria, elas faziam montes com a intenção de usá-los para contar de dez em dez. Em outras palavras, essas crianças conseguiam pensar simultaneamente em dezenas e unidades”.

A autora conclui sua análise afirmando que “o sistema decimal aparece pela primeira vez na segunda série, e que a proporção de crianças nessa categoria aumenta daí para frente”, ou seja, a construção do sistema de dezenas ocorre gradativamente durante o período que compreende a segunda à quinta série.

Para que a criança compreenda o número 15 composto por 1 dezena e 5 unidades, é necessária a construção do sistema de dezenas, por meio de abstração construtiva. Entretanto, o sistema de unidades, que antecede o decimal, deve estar bem sedimentado, proporcionado assim uma

base sólida para que ocorra gradativamente, ao longo da segunda à quinta série, a construção do sistema decimal.

Kamii (1995b) afirma que o ensino dos algoritmos na primeira série do ensino fundamental tem efeitos nocivos por confundir a criança e “desensinar” o valor posicional, permitindo que ela pense em cada coluna como se fosse unidade, além disso, não contribui para a autonomia, pois a criança passa a depender de lápis e papel, do arranjo espacial e de outras pessoas para resolução do algoritmo. Para a autora, o que deve ser enfatizado é o raciocínio do aluno e as estratégias mentais que elabora ao resolver uma operação, em detrimento de regras e procedimentos simplesmente memorizados:

Quando não ensinamos algoritmos à criança, e, em vez disso, a encorajamos a pensar e inventar procedimentos de cálculo, seu raciocínio segue um caminho diferente daquele dos algoritmos convencionais. Em adição, subtração e multiplicação, por exemplo, os algoritmos operam da direita para a esquerda. [...] quando a criança é obrigada a seguir algoritmos, ela tem que abrir mão da sua própria maneira de pensar numericamente. Já que não há como conciliar o “ir da direita para a esquerda” com o “ir da esquerda para direita”, a criança acaba por se submetendo ao professor e abandonar suas próprias idéias. Esta razão já é suficiente para justificar o mal causado pelo ensino dos algoritmos (KAMII, 1995b, p. 57).

É essa preocupação que nos impulsiona a investigar se as crianças percebem os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal ao operar com os algoritmos de adição e subtração. Acreditamos que ao término dessa investigação, o presente estudo irá juntar-se às pesquisas mencionadas que se constituíram no referencial para nossa análise resultando em uma contribuição a mais para a efetivação da Educação Matemática escolar.

1.3 Orientações para o ensino de Matemática no Brasil

Durante a a segunda metade da década de 90, o Ministério da Educação iniciou a elaboração de Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN_s), cuja função é orientar o Ensino Fundamental no País. Para tanto, o PCN da disciplina de Matemática pautou-se nos resultados de recentes investigações na área de Educação Matemática, estas em âmbito nacional e internacional.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) apontam a necessidade de refletir sobre o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, assim como analisar quais relações são estabelecidas entre aluno, professor e saber matemático. Para essa reflexão, é indispensável ao professor:

- identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
- conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
- ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.

Além disso, devemos lembrar que a criança, quando chega à escola, já vivenciou situações cotidianas que lhe exigiram reconhecer um problema e tomar decisões objetivando solucioná-lo, ou seja, ela já esteve em contato com alguma atividade matemática. Se esse conhecimento prático for considerado como ponto de partida, a aprendizagem pode apresentar melhores resultados.

Segundo Pires e Campos (2006), esse documento incorpora as mais recentes contribuições das investigações em Educação Matemática:

Para citar alguns, destacaríamos inicialmente a importância que o professor deve dar aos conhecimentos prévios e hipóteses levantadas pelos alunos, como um ponto de partida do trabalho a ser programado para a sala de aula. As hipóteses que as crianças elaboram sobre as escritas numéricas, sobre as operações, as diferentes formas que encontram para resolver uma mesma situação-problema. Há ainda uma discussão mais profunda sobre o papel do erro na aprendizagem dos alunos, as diferenças entre obstáculos didáticos e epistemológicos que interferem na aprendizagem (PIRES; CAMPOS, 2006, p. 32).

Na perspectiva de que a criança participa ativamente da construção de sua aprendizagem, o professor passa a ser o organizador e consultor desse processo, daí a necessidade de conhecer “as condições socioculturais, expectativas e competências cognitivas” das crianças. É preciso

também colocá-las em contato com atividades que possibilitem “a construção de conceitos/procedimentos tendo sempre em vista os objetivos a que se propõe atingir”. O professor deve ser também mediador, “ao promover a confrontação das propostas dos alunos, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar” (BRASIL, 1997, p. 40).

Pires e Campos (2006, p. 31), ao abordar a mesma temática, lembram que o PCN adverte para a necessidade do aluno “desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções”.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), o trabalho coletivo supõe uma série de aprendizados, como:

- perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
- saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro;
- discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias idéias;
- incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.

Para que seja bem sucedido, o trabalho coletivo deve ser amparado por um “contrato didático”, especificando a cada um suas responsabilidades. Também é essencial que o professor admita a existência de vários caminhos para o ensino de Matemática. Podemos encontrar, no PCN, algumas sugestões, como a Resolução de Problemas. Segundo o documento, esta proposta de trabalho só será bem sucedida se o ponto de partida das atividades Matemáticas for o problema, ou seja, o aluno tem que explorar uma situação na qual ele necessita utilizar uma estratégia para resolvê-la. “No processo de ensino aprendizagem, conceitos idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas” (BRASIL, 1997, p. 43).

Della Nina [et. al.] (2005, p. 21) entendem que a resolução de problemas pode ser considerada “a forma de ação mais provocadora do desenvolvimento do pensamento aritmético”, pois o aluno “assume uma atitude de investigação” ao resolver um problema, mesmo nas séries iniciais, “cabendo ao professor ser o mediador que o acompanha na construção do conhecimento”.

Outro recurso metodológico indicado pelo PCN é a História da Matemática. Quanto a este recurso, Della Nina [et al] (2005, p. 73) mencionam que:

Através dessa ferramenta, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores positivos frente ao conhecimento matemático. O aluno reconhecerá a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano. Conhecerá as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos identificando a utilização da Matemática em cada um deles e estabelecerá comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Não podemos nos esquecer de fazer referência às Novas Tecnologias que nos permitem explorar novas situações educativas, como, por exemplo: a calculadora, que pode servir para verificar resultados e corrigir erros, atuando até mesmo como instrumento de auto-avaliação; o computador, “que pode ser usado como elemento de apoio (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades”; os *softwares*, que sendo utilizados adequadamente, podem contribuir para construção de conhecimentos Matemáticos, pois possibilitam a interação do aluno com o programa (BRASIL, 1997, p. 48).

O PCN (1997) traz ainda a indicação de jogos para o ensino de Matemática. Além do caráter lúdico, o jogo leva a criança a vivenciar situações em que é necessário criar estratégias, adotar convenções e interagir com um grupo, possibilitando assim o desenvolvimento cognitivo, emocional e até mesmo social. O jogo em situações de ensino contribui também para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Nessa perspectiva, Pires e Campos (2006, p. 31) discorrem sobre a importância de estabelecer conexões entre os blocos de conteúdos, “entre a matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os chamados Temas Sociais Urgentes

(como Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Ética etc)”. Acrescentam que essas conexões podem ser abordadas através das investigações e projetos-pilotos desenvolvidos em “áreas como a da Modelagem e da Etnomatemática, focalizando a inferência de aspectos sociais e culturais nos currículos”.

Além das indicações metodológicas, os PCNs (1997, p. 51) apresentam os objetivos gerais para o ensino de Matemática do Ensino Fundamental, que almeja levar o aluno a:

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problemas, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimento matemático, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas proposto, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Quanto à relação dos conteúdos para o Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam quatro blocos: Números e Operações⁶; Espaço e Forma; Grandeza e Medidas; e Tratamento da informação. Como vemos, o documento sugere, já no Ensino Fundamental, o estudo da probabilidade e da estatística.

Della Nina [et al] (2005) em referência ao estudo de Lins e Gimenez (1997) menciona que as pesquisas na área da Educação Matemática propõem que o trabalho com a aritmética não seja desvinculado das situações reais do cotidiano, e aponta cinco elementos importantes para o trabalho aritmético na escola, baseados nos projetos curriculares dos anos 90:

- Relação dos números com contextos reais e com significados sociais

 Não só reconhecer nos números a função de contar, mas as de ordenar e medir, além de reconhecer o seu valor social. A capacidade de dar significado aos números, de interpretar a partir deles as informações, de utilizar códigos veiculados pelos meios de comunicação, ou ainda a capacidade de realizar cálculos mentais e aproximados, bem como estimativas de resultados possíveis em situações diárias são competências indispensáveis ao cidadão do século XXI.

- Desenvolvimento de um sentido numérico e não somente da numeração em seu valor posicional

 Reconhecer os distintos significados das frações e dos decimais. Por exemplo, entender que um pedaço que indica um quarto mais outro que indica dois terços são, antes de tudo, a soma de pedaços que devem ser transformados em uma unidade comum, um terceiro pedaço que indica os 12 avo, ou ainda, trabalhar com a idéia de proporção desde as primeiras fases da escolaridade, relacionando-a ao conceito de fração, são ações indispensáveis na construção de um sentido numérico.

- Consideração da Aritmética em suas diferentes linguagens, promovendo significados e justificações diversas associadas a diferentes núcleos de experiências

 Reconhecer o valor de analisar e justificar relações significativas dos elementos aritméticos, utilizando múltiplas representações e experiências (variabilidade perceptual) oferece uma visão alternativa, a do caminho da investigação aritmética, e não apenas o da resolução de problemas. Apresentar problemas, histórias ou questões que surjam de algo significativo no contexto faz com que o estudante elabore hipóteses próprias de solução para o proposto.

- Reconhecimento do uso do cálculo

 Enfatizar os processos de aproximação e os problemas de iteração (tratamento do pi como valor aproximado obtido empiricamente), ou

⁶ Como nosso estudo foca o trabalho com aritmética, não trataremos dos demais blocos de conteúdos, exceto nos momentos em que houver necessidade.

ainda uma aprendizagem com a proposição de problemas que encaminhe aos métodos algorítmicos, relativizando a importância dada aos algoritmos como parte essencial da aritmética. Além disso, não desprender o cálculo e o trabalho aritmético em geral de enunciados vinculados a situações reais.

Quanto às operações aritméticas, o importante é desenvolver maneiras seguras e eficientes de realizá-las. Pode-se usar a calculadora, mas, é necessário que se domine algum método de cálculo.

Estimulo e análise da estrutura numérica (DELLA NINA, et al, 2005, p. 22-23).

Ao referir-se a essa mesma temática os PCNs de Matemática para o Ensino Fundamental apresenta os objetivos⁷ para o segundo ciclo⁸, os quais devem levar o aluno a:

[...] ampliar o significado do número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades; construir o significado do número racional do número e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social; interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal; resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais; ampliar os procedimentos de cálculo – mental, escrito, exato, aproximado – pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados; refletir sobre procedimentos de cálculo que levem à ampliação do significado do número e das operações, utilizando a calculadora como estratégia de verificação de resultados (BRASIL, 1997, p. 81).

Sobre o desenvolvimento do cálculo, o PCN (1997), amparado nas investigações na área da Didática da Matemática, menciona que a habilidade de calcular está intimamente ligada ao domínio da contagem e das combinações aritméticas (tabuada, lista de fatos fundamentais, leis, repertório básico, etc.), não ocorrendo devido “a simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização e, como consequência, a memorização compreensiva desses fatos”.

⁷ Não apresentaremos todos os objetivos para o segundo ciclo de Matemática constantes no PCN, apenas os relacionados aos números e operações.

⁸ Como nossa pesquisa investiga crianças de terceira e quinta série, abordaremos os objetivos do segundo e do terceiro ciclo apenas.

Quando o aluno é levado a explicitar oralmente e comparar sua estratégia pessoal de resolução, tem a oportunidade de construir um repertório básico para o desenvolvimento do cálculo, o qual servirá de “suporte para a ampliação dos diferentes procedimentos e tipos de cálculos que vai desenvolver ao longo dos ciclos iniciais: cálculo mental ou escrito, exato ou aproximado”. Todos estes tipos de cálculo estão relacionados entre si, de modo que um complementa o outro:

O cálculo escrito, para ser compreendido, apóia-se no cálculo mental e nas estimativas e aproximações. Por sua vez, as estratégias de cálculo mental, pela sua própria natureza, são limitadas. É bastante difícil, principalmente tratando-se de cálculo envolvendo números com vários dígitos, armazenar na memória uma grande quantidade de resultados. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito. [...] Assim, é recomendável que a organização do estudo com do cálculo privilegie um trabalho que explore concomitantemente procedimento de cálculo mental e cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles e com isso aperfeiçoa seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos, aproximando-os aos das técnicas usuais (BRASIL, 1997, p. 115-116).

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais, especialmente nas recomendações para o trabalho com o cálculo, que prioriza o trabalho simultâneo entre o cálculo mental e escrito, desenvolvemos as cinco estratégias de investigação de nossa pesquisa, a saber: da direita para a esquerda; e para além do algoritmo; a técnica do “vai um”; a técnica do “empresta um”; prova real. As recomendações expostas também serviram de base para a análise dos resultados obtidos pela presente pesquisa.

3 A PESQUISA

Nesta seção, apresentamos os fundamentos teóricos que permitiram os procedimentos metodológicos deste trabalho. Teoricamente, optamos pela epistemologia genética e, nesta perspectiva, trabalhamos com o Método Clínico Crítico piagetiano, com 20 crianças com idade entre oito a quatorze anos, de uma escola estadual de Maringá. Para nós, o método clínico crítico faz parte das abordagens qualitativas de investigação, uma vez que nos permite tentar entender e interpretar dados de um discurso, considerando a dependência existente na relação observador-observado.

Segundo D' Ambrosio (2004, p. 21), a pesquisa qualitativa também chamada de Método Clínico, “é o caminho para escapar da mesmice; pois lida e dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura fazer sentido de discurso as narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitira propor os próximos passos”.

Bicudo (2004, p. 104) relata que a pesquisa qualitativa “engloba a idéia do subjetivo, passível de expor sensação e opinião”, envolve também a percepção de “diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências”.

3.1 O problema de pesquisa

Nosso problema de pesquisa é: Há construção do conhecimento matemático a partir do ensino da aritmética, com ênfase nos procedimentos algorítmicos. Para tanto, foram delineados dois objetivos:

- investigar se a utilização dos algoritmos, na resolução das operações de adição e subtração, permite a flexibilidade de pensamento da criança, ou seja, se além de

empregar os procedimentos convencionais ela também utiliza outras estratégias, como, por exemplo, o cálculo mental, na resolução das operações de adição e subtração;

- investigar se a criança, ao resolver os algoritmos de adição ou subtração, percebe os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal implícitos nesse procedimento.

Nossos procedimentos metodológicos foram:

- 1) levantamento dos postulados teóricos do Método Clínico Crítico;
- 2) levantamento dos postulados teóricos do Sistema de Numeração Decimal;
- 3) estabelecimento das estratégias de investigação;
- 4) seleção dos 20 sujeitos que participaram de nosso estudo e do local;
- 5) análise do livro didático adotado pela escola;
- 6) aplicação das provas matemáticas.

Empregamos o Método Clínico Crítico como orientação teórica e metodológica à nossa investigação por entender que ele nos permitiria ir além das informações contidas em um formulário, possibilitando a livre conversação entre a pesquisadora e a criança entrevistada.

3.2 Método Clínico Crítico

O método clínico surgiu da necessidade, identificada por Piaget, de formular uma técnica de pesquisa que não fosse extremamente rígida como o teste padronizado e ao mesmo tempo, utilizasse os benefícios da observação, de modo a facilitar a realização das experiências, de avaliação da inteligência das crianças, que integravam seu universo de pesquisa (WARDWORTH, 1984; CASTRO, 1996).

Matuí (1995, p. 78) relata que Piaget acrescentou um adjetivo (crítico) ao nome do método, tornando-o conhecido como “método clínico crítico”. Segundo Piaget, “o método deve ser crítico” por exigir do pesquisador cautela quanto às “hipóteses explicativas”, e o questionamento quanto ao porquê da resposta utilizada pela criança.

O método clínico crítico de Jean Piaget permite a livre conversação entre o pesquisador e a criança sobre o tema a que se objetiva investigar. A entrevista é apoiada por um roteiro flexível, adaptável a cada criança, que serve apenas para orientar o pesquisador, evitando que este se desvie do foco de estudo. A cada resposta dada pela criança, surge uma nova hipótese, e é essa seqüência de perguntas e respostas que torna a entrevista coerente (LEITE, 1987). Wardworth (1984, p.267-268) compartilha da mesma concepção:

[...] O objetivo da entrevista clínica é determinar a natureza do raciocínio da criança – se é a respeito de um conteúdo específico (exemplo, número, área, vida) ou mais geral ou mais inclusivo quanto à sua finalidade. [...]. O examinador precisa estar pensando todo o tempo, mudando conforme as respostas da criança para chegara ao seu pensamento, não dizer para a criança sobre o que falar (sugestão) mas dar pistas suficientes a respeito do que pensar. Não há regras estabelecidas para este tipo de diagnóstico [...].

Segundo Carraher (1989, p.27) o pesquisador deve estar atento ao tipo de linguagem a ser utilizada durante a entrevista. Ela deve ser simples e definida anteriormente, a fim de não tornar-se um obstáculo ao entendimento da situação que se pretende verificar. “Por exemplo, se o sujeito utiliza o termo <<bicho>>, é mais aconselhável que o examinador empregue esta palavra do que a palavra <<animais>>, que poderia ser desconhecida do sujeito e dificultar seu desempenho”.

Carraher (1989) alerta para a necessidade de se reformular uma questão feita para a criança caso esta não consiga entender o que lhe está sendo proposto. Desse modo, é indispensável saber antecipadamente que tipos de perguntas serão aplicadas, para que estas não levem a criança a dar respostas dirigidas. Caso a resposta não seja clara, o método permite que o pesquisador peça à criança a apresentação de uma justificativa a respeito do exposto. A maneira sugerida é a contra-argumentação. Encontramos essa mesma preocupação em Wardworth (1984, p. 268), ao expor que:

O entrevistador faz perguntas a uma criança, ouve, observa, faz uma hipótese a respeito de sua capacidade conceitual e continua a fazer mais

perguntas *baseando-se na hipótese* que formulou. Ele esta constantemente testando e reformulando as hipóteses até que esteja persuadido de que os critérios piagetianos de avaliação tenham sido realizados e o pensamento e raciocínio estejam claramente revelados. [...]. As respostas “erradas” têm tanto interesse quanto as “corretas”.

Matuí (1995) afirma em outras palavras, que o pesquisador deve conversar com a criança e, no decorrer da entrevista, identificar as respostas fundamentais a serem exploradas, segundo o foco da pesquisa, as quais devem revelar os conceitos formulados e, ao mesmo tempo, provocar conflitos cognitivos. Deve-se indagar o porquê de cada resposta, isto é, pedir que a criança justifique o que respondeu.

Há algumas diretrizes a serem seguidas, segundo Carraher (1989), no decorrer da pesquisa:

1. deve-se acompanhar atentamente o raciocínio da criança sem concluir as respostas formuladas por ela as situações-problema propostas;
2. o processo pelo qual a criança chega à resposta é de suma importância;
3. as respostas dadas pela criança devem sempre ser verificadas, a fim de que se identifique o raciocínio que levou à formulação das respostas;
4. é importante não se satisfazer com respostas ambíguas, procurando questioná-las novamente;
5. o pesquisador deve permanecer atento a diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo durante a entrevista.

Com relação à primeira diretriz, o pesquisador deve permitir que a criança, por suas próprias tentativas, chegue à resposta. Outro ponto a ser observado é o não julgamento dessas respostas como sendo óbvias, uma vez que o pesquisador e a criança entrevistada não estão no mesmo estágio de desenvolvimento cognitivo. Tal preocupação garante a diferença nas estruturas de raciocínio.

No que se refere à segunda diretriz, o exame clínico piagetiano objetiva, essencialmente a, alcançar justificativas para as respostas dadas, por entender que estas respostas auxiliam na compreensão das relações utilizadas pela criança, indicam o possível caminho percorrido por ela até a resposta, e permitem saber, em alguns casos, se existe mesmo o conhecimento ou se

a resposta está sendo dada ao acaso. Isto nos remete à terceira diretriz, que trata da importância da verificação das respostas dadas.

Piaget salienta que uma resposta que está inserida em um sistema dedutivo pode ser dada com certeza, enquanto que uma resposta dada na ausência de tal sistema é frequentemente mudada diante de circunstâncias criadas pelo examinador (sugestão de uma resposta diferente, indicação de contradições aparentes, etc.) (CARRAHER, 1989, p. 34-35).

No caso de a criança apresentar resposta que permita mais de uma interpretação, não cabe ao pesquisador determinar qual significado ela pretendia utilizar. Na ocorrência de tal fato, o pesquisador deve lançar mão de novos questionamentos, com o intuito de extrair da própria criança o real significado, eliminando a ambigüidade da questão (CARRAHER, 1989).

Segundo Castro (1996, p. 170), Piaget constatou a existência de cinco diferentes maneiras de reagir ao exame clínico: a criança pode dar uma resposta qualquer; inventar histórias, *fabulação*; “a crença sugerida”, a resposta dada tem a intenção de agradar o entrevistador; “a crença desencadeada”, respostas gerada a partir de raciocínio e reflexões próprias, sem a influência do pesquisador; e “a crença espontânea”, resposta formulada sem a necessidade de raciocinar. Nesse caso, mesmo que o pesquisador contra-argamente, a criança não modifica sua resposta.

Para Wadsworth (1984), são quatro os critérios de avaliação empregados na entrevista clínica de Piaget, os quais sugerem que a criança se encontra em determinado nível de raciocínio. Para expressar o nível em que se encontra, ela precisa: dar uma resposta correta, segundo os padrões adultos; justificar logicamente a resposta dada; manter seu posicionamento frente à contra-sugestão verbal; e ter um bom desempenho ao desenvolver uma tarefa comportamental relacionada.

Vale considerar que o fato de apresentar a resposta certa não significa que a criança “tem o conceito”, Wadsworth (1984, p. 270) alerta que as crianças podem dar as respostas certas por várias razões:

(1) elas sabem a resposta e a compreendem; (2) elas adivinham a resposta; (3) elas recebem do examinador uma pista para resposta; (4) elas se lembram de algo que serve como pista para a resposta, mas sem nenhuma compreensão verdadeira (memorização mecânica).

Wadsworth (1984) enfatiza que o mais importante não são as respostas corretas, e sim conhecer como as crianças raciocinam, além de observar o que ocorre quando lhes são feitas as contra-sugestões, se as crianças mudam de respostas ou permanecem convictas de que estão certas na constatação que fizeram.

Não podemos desconsiderar a existência do conceito em alguns casos de respostas incorretas. Wadsworth (1984) indica a existência de algumas razões para que isso ocorra: a criança não compreendeu a pergunta; a questão não lhe interessou, não a motivou; medo ou ansiedade frente ao questionamento ou à situação; ou a criança está preocupada com algo diferente.

3.3 Sistema de Numeração Decimal

A história da evolução do Sistema de Numeração acompanha a própria história de evolução da humanidade. Atualmente, o Sistema de Numeração que utilizamos é o Sistema de Numeração Decimal (SND) que, segundo Andrade (2005), tem sua origem em meados do século VI d. C. Apesar de ter sido sistematizado pelos hindus a sua difusão se deve ao povo árabe, por essa razão ficou conhecido como Sistema de Numeração Indo-arábico.

Foi o matemático de língua árabe Muhammad al-Khārezmi o responsável por repassar para o mundo ocidental a maneira de contar dos indianos, isto é, o sistema posicional decimal que foi se destacando gradativamente e com o tempo sofrendo algumas adaptações até que no século XIV alcançou o pico de sua difusão (MORETTI, 1999).

Freitas e Bittar (2004, p. 52) expõem que “a opção pela base dez, deve-se puramente ao fator biológico de nossas mãos possuírem dez dedos” e que no início, quando não havia um símbolo para representar o zero, a leitura do número incidia em grandes confusões, devido à necessidade de se deixar vazia a coluna correspondente ao zero, só sendo possível saber o verdadeiro valor se fosse conhecido o contexto no qual estava inserido o referido número. Prosseguindo, os autores relatam que:

Assim, 12 podia ser confundido com 120 ou 102, etc. O uso freqüente de registros contendo a coluna vazia fez surgir um símbolo para representar o zero, o que veio facilitar enormemente os cálculos. Pode-se dizer que a invenção do zero democratizou a Aritmética, pois antes dele pouca gente conseguia fazer cálculos, somente os abaquistas, e depois dele houve proliferação de regras para o cálculo escrito. Talvez por isso o zero seja considerado a maior descoberta científica da humanidade.

Lima e Vila (2002) citam sete principais aspectos que servem para caracterizar o sistema de numeração Indo-arábico, a saber:

- utiliza dez diferentes símbolos denominados algarismos indo-arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- funciona através de agrupamentos de 10. Este número (10) é chamado base do sistema. Sendo assim, qualquer número pode ser escrito em termos de potência de 10: 10^1 , 10^2 , 10^3 , 10^4 , etc. Por exemplo, o número 246 pode ser escrito assim: $2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$;
- o sistema é posicional, ou seja, o valor de um algarismo é determinado pela sua posição no numeral. Por exemplo, no numeral 333 cada número tem valor diferente, o primeiro, da direita para esquerda, vale 3, o segundo vale 30 e o terceiro 300;
- também é multiplicativo, sendo assim, num numeral, cada algarismo representa um número que é múltiplo de uma potencia de sua base (10). Por exemplo, no número 382 o algarismo 3 representa o número 3×10^2 , que é um múltiplo de 10^2 , e o algarismo 8 representa o número 8×10^1 , que é um múltiplo de 10;
- no sistema indo-arábico cada numeral representa um único número;
- o sistema é aditivo, portanto o valor do numeral é obtido pela soma dos valores individuais dos algarismos. Por exemplo, 1 486 é igual a $1\ 000 + 400 + 80 + 6$;
- possui um símbolo para representar o zero (0).

Nunes (1997) afirma que efetuar a contagem em um sistema de numeração com base fixa implica contar unidades de tamanhos diferentes. Continuando, cita o nosso sistema de numeração como exemplo:

No nosso sistema de numeração, por exemplo, contamos em unidades, dezenas, centenas, etc. Estas são unidades de tamanhos diferentes (também referidas como ordens) que podem ser contadas dentro de classes diferentes – a classe das unidades, a classe dos milhares, a classe dos milhões, etc.

Como usamos um sistema de base dez, quando temos dez unidades de qualquer tamanho reagrupamos estas em unidades do tamanho seguinte. Por exemplo, contamos unidades até dez. Dez unidades formam uma dezena, e então combinamos as dezenas e unidades até termos nove dezenas e nove unidades. Dez dezenas formam uma centena, então combinamos centenas, dezenas e unidades até termos nove centenas, nove dezenas e nove unidades. Uma nova classe de unidades, a classe dos milhares, é introduzida, e podemos repetir o mesmo raciocínio indefinidamente (NUNES, 1997, p. 57-58).

3.4 Estabelecimento das estratégias de investigação

Para atender aos objetivos propostos foram estabelecidas cinco estratégias de investigação, a saber:

- a primeira é denominada “da direita para a esquerda”, na qual investigamos se as crianças compreendem a importância da organização espacial do algoritmo, isto é, para operar corretamente, as unidades devem estar “embaixo” das unidades, as dezenas na coluna das dezenas, etc;
- a segunda estratégia é a “para além do algoritmo” na qual questionamos se há outras maneiras de fazer as “contas” de adição e subtração sem lançar mão dos algoritmos convencionais, com a intenção de investigar se as crianças utilizam outras táticas de resolução, bem como quais são elas;
- terceira é a técnica do “vai um”, consiste em investigar se as crianças ao desenvolverem o procedimento algorítmico da adição, percebem que aí estão implícitos os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal, mais especificamente, se elas compreendem o valor posicional do algoritmo;
- a quarta estratégia, técnica do “empresta um”, permite observar se as crianças entendem que, na subtração com reserva, elas devem, antes de iniciar a “conta”, decompor uma dezena em dez unidades, somente então poderá subtrair. Esta estratégia também nos permite investigar se a criança percebe, no algoritmo da subtração, o sistema de numeração decimal.

- na última estratégia, “prova real”, investigamos se as crianças entendem as operações de adição e subtração como operações inversas, podendo utilizar uma para confirmar o resultado da outra.

As estratégias mencionadas estão embasadas nas recomendações para o trabalho pedagógico com o cálculo, a qual prioriza o trabalho simultâneo entre o cálculo escrito e o mental, constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

3.5 Seleção do local e das crianças colaboradoras da pesquisa

Recorremos ao Núcleo Regional de Educação, órgão responsável pelo levantamento anual do desempenho das escolas, com o objetivo de ter acesso à relação das escolas estaduais do município de Maringá, norte do Paraná, para podermos selecionar o local em que realizaríamos a pesquisa.

Alguns critérios foram estabelecidos para escolha do local, tentando minimizar possíveis interferências nos dados obtidos, como por exemplo: atribuir possível “insuficiência de desempenho” do aluno, a qualidade do ensino da escola; falta de qualificação dos docentes; mudança da Proposta Político Pedagógica. Para tanto dois critérios foram pré-determinados:

- a escola deveria ofertar, no mesmo estabelecimento de ensino, o Ciclo Básico de Ensino (1ª a 4ª série) e o Ensino Fundamental (5ª a 8ª série).
- apresentar um bom desempenho na avaliação do processo de ensino e aprendizagem, segundo o Núcleo Regional de Educação.

Foi-nos fornecido o nome de três estabelecimentos de acordo com os critérios apontados. Dentre eles, selecionamos uma escola pública da zona norte do município de Maringá, norte do Paraná. Além dos critérios já mencionados, um terceiro foi decisivo na escolha final dentre os três estabelecimentos: optamos por um estabelecimento que oferece no mesmo turno

(vespertino) as duas séries que foram pesquisadas, de modo a facilitar a realização da pesquisa.

Para atender aos propósitos desta pesquisa, os dados foram coletados em duas séries diferentes: um grupo de dez crianças está no início das atividades com as operações de adição e subtração e já estabeleceu contato com os algoritmos convencionais, elas pertencem à terceira série do ensino fundamental; o segundo grupo de dez crianças cursa a quinta série do ensino fundamental, e nesta etapa escolar acredita-se que o aluno seja capaz de explicar o processo de resolução convencional dessas operações, percebendo a relação existente entre o algoritmo (de adição e de subtração) e o Sistema de Numeração Decimal. Assim sendo, participaram da pesquisa 20 sujeitos (N=20) de uma escola pública estadual do município de Maringá, norte do Paraná, sendo 10 crianças que cursavam a terceira série do ciclo básico e 10 que freqüentavam a quinta série do Ensino Fundamental.

As crianças colaboradoras da pesquisa pertencem a turmas diferentes, mesmo dentro de cada série, e suas professoras também não são as mesmas. Aquelas que cursam a terceira série foram selecionadas de três turmas diferentes e as de quinta série também pertencem a três turmas distintas.

Objetivando verificar se há construção do conhecimento matemático, os dois grupos anteriormente expostos, de terceira e quinta série, apresentam-se subdivididos em dois outros grupos menores: cinco alunos que apresentam bom desempenho de aprendizagem em Matemática e cinco que apresentam desempenho insuficiente, segundo avaliação de suas professoras.

Assim, para selecionar os sujeitos, contamos com a colaboração das professoras de matemática de cada turma. Solicitamos a cada uma delas que nos fornecesse a relação de 5 alunos que possuíssem bom desempenho na aprendizagem de matemática e 5 que tinham um desempenho de aprendizagem insuficiente, segundo avaliações desenvolvidas por elas durante o primeiro bimestre do ano de 2006, na disciplina de matemática. De posse dessa relação, foram selecionados os alunos de cada turma (de terceira e quinta série) que segundo avaliação do professor possui maior facilidade e maior dificuldade em matemática, somando um total de vinte sujeitos colaboradores.

O quadro a seguir apresenta a descrição geral das crianças colaboradoras da pesquisa⁹.

SÉRIE ESCOLAR	DESEMPENHO ESCOLAR	NOME	IDADE	SEXO
	BOM	C ₁	8; 9	M
		C ₂	9; 2	M
		C ₃	8; 11	M
3ª SÉRIE		C ₄	8; 7	F
		C ₅	8; 5	M
	INSUFICIENTE	C ₆	8; 6	M
		C ₇	9; 4	F
		C ₈	8; 7	M
		C ₉	8; 5	F
		C ₁₀	9; 4	M
SÉRIE ESCOLAR	BOM	A ₁	10; 9	F
		A ₂	11; 5	M
		A ₃	11; 2	F
		A ₄	10; 5	M
		A ₅	10; 9	M
5ª SÉRIE	INSUFICIENTE	A ₆	11; 4	M
		A ₇	10; 7	F
		A ₈	10; 11	F
		A ₉	14; 2	M
		A ₁₀		

Quadro 1 - Caracterização das crianças colaboradoras da pesquisa.

3.6 Procedimentos para a aplicação da prova matemática

A aplicação das provas matemáticas teve início na segunda semana de Abril de 2006, posteriormente ao contato com a equipe diretiva da escola. De posse das devidas autorizações (de diretores, coordenadores, professores da área de matemática), e mediante apresentação da aprovação do projeto de pesquisa, pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, foram definidos, com a equipe diretiva e com os professores dos sujeitos

⁹ Por motivos particulares uma das crianças de 5ª série, que apresentam desempenho insuficiente, não participou da pesquisa, desde o início.

colaboradores, os dias e os horários em que as entrevistas seriam realizadas. Para melhor comodidade das crianças, ficou determinado – com aceitação da pesquisadora – que as entrevistas se dessem durante o período de aula das mesmas. Na seqüência obtivemos as devidas autorizações dos pais, ou responsáveis pelas crianças mediante a assinatura do termo de consentimento.

Cada criança participou de um único encontro com a pesquisadora, durante o qual lhe foi proposto que resolvesse algumas “contas”, sendo duas de adição e quatro de subtração, com graus de complexidades diferentes. Essas se encontravam dispostas na forma de sentença matemática, em uma folha de sulfite branca, conforme a disposição a baixo:

a) $135 + 99 =$

b) $1035 + 999 =$

c) $63 - 54 =$

d) $3058 - 2379 =$

e) $2014 - 1989 =$

f) $100 - 24 =$

Em todas elas a criança necessitava lançar mão do uso de recursos (decomposição ou reagrupamento) para a sua resolução. Foram escolhidas, na maioria, contas contendo no mínimo três dígitos no minuendo (no caso das subtrações), com o intuito de se ter um grau de dificuldade maior. Para resolver as contas propostas, seguindo os procedimentos algorítmicos convencionais, as crianças deveriam seguir algumas “exigências” tais como:

- Na conta $135 + 99$, o aluno necessita “transformar” dez unidades em uma dezena, somando-a com as dezenas já existentes e dez dezenas em uma centena, somando-a com as centenas existentes.
- Na conta $1053 + 999$, o aluno necessita “transformar” dez unidades em uma dezena, somando-a com as dezenas já existentes, e dez dezenas em uma centena, somando-a com as centenas existentes, sendo que na primeira parcela existe um “zero” na “casa” das centenas, depois, transformar dez centenas em um milhar e somar ao milhar já existente.
- Na conta $63 - 54$, terá de decompor uma dezena em dez unidades, somando-a com as unidades já existentes para poder efetuar a conta.

- Na conta 3058 – 2379, ele terá que decompor uma dezena em dez unidades, adicionando-a às unidades existentes para depois subtrair, em seguida, como na “casa” da centena do minuendo existe um zero, deverá decompor uma unidade de milhar em dez centenas, para depois decompor uma centena em dez dezenas e continuar a subtração.
- Na conta 2014 – 1989, a criança procederá da mesma forma que na subtração anterior. Deverá decompor uma dezena em dez unidades, adicionando-a às unidades existentes, para depois subtrair; em seguida, como na “casa” da centena do minuendo existe um zero, deverá decompor uma unidade de milhar em dez centenas, para depois decompor uma centena em dez dezenas e continuar a subtração.
- Na conta 100 – 24, como a “casa” da dezena é “zero” ela necessitará primeiro decompor uma centena em dez dezenas, para depois decompor uma dezena em dez unidades e realizar o cálculo.

Nossa conversa com as crianças foi orientada por um roteiro semi-estruturado, contendo algumas questões pré-definidas que contemplavam o propósito de nossa investigação. Enquanto as crianças desenvolviam os cálculos, foram feitas intervenções com a finalidade de direcionar as explicações para os objetivos da pesquisa. As questões que nortearam a entrevista são:

- ✓ Porque tem que organizar a “conta” dessa forma?
- ✓ Como você ensinaria uma criança do 1º ano a fazer esta conta?
- ✓ O que é “vai um”?
- ✓ O que é “emprestar” um? “Um” o quê?
- ✓ Será que está é realmente a resposta correta? Como você mostraria para um coleguinha que esta conta esta certa?
- ✓ Se eu não tivesse lápis e papel daria para resolver uma conta de mais ou de menos?
- ✓ Será que tem outro jeito de fazer essa conta sem ser o jeito que a gente aprende na escola?

Esse roteiro teve a finalidade de orientar a entrevista. O recurso técnico empregado para gravar as entrevistas com as 20 crianças foi a utilização de um gravador cassete, *Powerpack*. Cada entrevista durou 30 minutos e, em seu decorrer, quando se fez necessário, a

pesquisadora fez registros em um caderno de anotações. Iniciávamos as entrevistas explicando à criança a necessidade do uso do gravador para o registro de nossas conversas.

3.7 O livro didático adotado

A coleção adotada pela escola participante da pesquisa é composta por quatro volumes não-consumíveis, abrangendo da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental. A referida coleção contempla os tópicos normalmente estudados durante os quatro primeiros anos do ensino fundamental. Os volumes são divididos em unidades, cada uma dedicada a um tema central, estruturada uniformemente, apresentando três subdivisões: inicialmente, um texto explanatório, que gira em torno de um problema proposto, antecipa os conceitos e, em seguida, faz as representações simbólicas e os procedimentos. Em continuidade, apresenta um conjunto de atividades, compostas por exercícios de reconhecimento, fixação e aplicação, acerca do tema apresentado e, por fim, há a seção denominada *Quero mais*, com exercícios destinados à consolidação dos conhecimentos do aluno. É evidente a preocupação com os aspectos informativos e técnicos, em detrimento da atenção dispensada à construção dos conceitos matemáticos. Em geral os conteúdos são abordados em partes isoladas ao longo dos volumes da coleção, o que dificulta a articulação entre os campos temáticos.

O manual do professor compõe-se de uma apresentação da estrutura e do conteúdo da obra. Propõe algumas reflexões sobre a metodologia da resolução de problemas, mais especificamente da investigação de novos conceitos. Como recurso didático, sugere a utilização de jogos matemáticos, menciona o cálculo mental, as conexões da Matemática com outras disciplinas e a articulação entre tópicos da própria Matemática. Comenta também sobre o trabalho com os paradidáticos e a literatura infantil em Matemática. Uma extensa seção, no final do manual, trata dos objetivos específicos, com comentário e sugestões para cada capítulo do livro do aluno (PNLD, 2004).

O primeiro volume traz as seguintes unidades¹⁰: Vocabulário fundamental, Números de 0 a 9, As idéias da adição, As idéias da subtração, Sistema de Numeração Decimal (números até 99), Adição (soma até 99), Subtração com números naturais.

As unidades que compõem o segundo volume são: Sistema de Numeração Decimal (números até 999), Contando com outros povos, Adição sem e com reagrupamento, Idéias da subtração, subtração sem e com reagrupamento.

O livro da terceira série¹¹ é bastante atrativo e, como toda a coleção, possui um forte apelo visual, pois vem carregado de ilustrações. A distribuição dos conteúdos acontece de forma linear e compartimentada, sendo uma unidade destinada ao Sistema de Numeração Decimal, uma para o trabalho com adição com números naturais e outra, á subtração com números naturais.

O quadro a seguir traz as unidades citadas e, dentro de cada uma, os conteúdos trabalhados pelo livro:

Nome da Unidade	Conteúdos trabalhados
Sistema de numeração decimal	<ul style="list-style-type: none"> • Os números no dia-a-dia • O sistema de numeração decimal • Números ordinais • Valor posicional do algarismo • Unidade de milhar • Leitura de um número de quatro algarismos • Dezena de milhar • Centena de milhar
Adição com números naturais	<ul style="list-style-type: none"> • Adição sem reagrupamento e com reagrupamento • Propriedade da adição • Propriedade comutativa • Propriedade associativa • Elemento neutro
Subtração com número natural	<ul style="list-style-type: none"> • Subtração sem reagrupamento e com reagrupamento • Usando a subtração para conferir o resultado da adição e vice-versa

Quadro 2 - Conteúdos abordados pelo livro didático adotado

O autor inicia o trabalho com o Sistema de Numeração Decimal através da apresentação de várias gravuras que mostram os números no dia-a-dia, após uma única proposta de atividade (desenhar outros exemplo de números no dia-a-dia), faz breve explanação sobre a criação do

¹⁰ Abordamos, em cada volume, apenas os conteúdos pertinentes à nossa pesquisa.

¹¹ Uma maior atenção será dispensada ao terceiro volume da coleção, devido ao fato de que um dos grupos de crianças colaboradoras de nossa pesquisa cursa a 3ª série.

número e sua evolução histórica, chegando à representação atual dos algarismos. As atividades propostas intercalam: representação do número utilizando material dourado, números decompostos em ordem para serem nomeados, antecessor e sucessor, alguns problemas relacionados ao cotidiano da criança, a utilização dos símbolos $<$ e $>$, escrita de números em ordem crescente e decrescente.

Os números ordinais são abordados com uma situação-problema, que pode ser realizada com a turma ou somente relatada pelo professor: mostra a ordem de chegada das crianças em uma gincana, mais especificamente em uma corrida de sacos. As atividades dessa seção, em sua maioria, estão relacionadas ao cotidiano dos alunos.

O valor posicional do número é trabalhado com a criança a partir do quadro de ordens¹², assim apresentado:

As ordens são contadas da direita para a esquerda. Observe o quadro:

3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas	Dezenas	Unidades
C	D	U

Figura 1 - Ordem numérica.

Na seqüência, o autor relata que, dependendo da posição do algarismo, este assume valores diferentes, e exemplifica¹³:

- No número 735, temos:

7	3	5
→ 3ª ordem: 7 centenas = $7 \times 100 = 700$ unidades	→ 2ª ordem: 3 dezenas = $3 \times 10 = 30$ unidades	→ 1ª ordem: 5 unidades

- No número 573, temos:

5	7	3
→ 3ª ordem: 5 centenas = $5 \times 100 = 500$ unidades	→ 2ª ordem: 7 dezenas = $7 \times 10 = 70$ unidades	→ 1ª ordem: 3 unidades

Assim, no número 735 o 7 representa 700 unidades e no número 573 representa 70 unidades.

Figura 2 - Valor Relativo.

¹² Figura retirada da coleção adotada pela escola, v. 3, p. 19.

¹³ Figura retirada da coleção adotada pela escola, v. 3, p. 19.

Prosseguindo, afirma ser esse o motivo por que cada algarismo tem um valor relativo, e, a partir desse exemplo, apresenta as atividades a serem resolvidas, finalizando com uma seção denominada *Quero mais*, com exercícios que retomam o assunto abordado.

Na seqüência o livro traz o trabalho com as unidades de milhar, que inicialmente são representadas por intermédio do material dourado e, em seguida, no ábaco. Finaliza a explicação com o quadro de ordens e apresenta uma série de atividades de fixação.

O assunto seguinte intitula-se *Leitura de um número de quatro algarismos*. Parte da afirmação de que para lermos um número composto por quatro algarismos, devemos inicialmente decompor esse número, logo após chama a atenção da criança para a leitura de dois números, apresentando primeiro a sua decomposição. Finaliza com atividades relacionadas.

No trabalho com as Dezenas de milhar e as Centenas de milhar não é utilizado o material dourado, e sim o quadro de ordens e o ábaco.

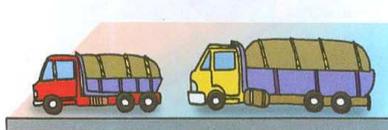
A unidade destinada à adição com números naturais, inicia-se com uma situação problema do dia-a-dia da criança. Segue representando essa situação por meio da utilização do material dourado, logo após, faz a decomposição do número em unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar, para, então, adicionar as ordens e as classes correspondentes. Na seqüência, apresenta o quadro valor de lugar e o modo prático, ou seja, o algoritmo formal. Após essa exposição, segue uma lista de atividades.

Em uma unidade à parte, após a explicação anterior, são mostradas à criança as propriedades comutativas e associativas da adição, bem como o elemento neutro, seguidos também de lista de atividades.

A adição com reagrupamento é apresentada à criança sem nenhuma discussão prévia. Propõe-se um “problema”, em seguida, é explicado como ele deve ser resolvido. A solução aparece em um quadro valor de lugar e no algoritmo formal, entretanto, não se faz menção de que o “um que subiu” na verdade corresponde a dez unidades que são trocadas por uma dezena e adicionada às dezenas já existentes. Através da observação da gravura, a criança pode

observar e mesmo entender que o “um” do número treze é quem “vai” para a ordem das dezenas. A seguir, a situação-problema proposta¹⁴:

2) De um depósito de construção, saíram dois caminhões. Um transportava 2 847 tijolos e o outro, 9 326 tijolos. Quantos tijolos os dois caminhões levaram?



Devemos efetuar a adição $2\ 847 + 9\ 326$.

DM	UM	C	D	U	Modo prático
	2	8	4	7	2 847
+	9	3	2	6	+ 9 326
	1	2	7	3	<u>12 173</u>

Os dois caminhões levaram 12 173 tijolos.

Figura 3 - Situação-problema proposta.

Entre as 22 atividades envolvendo adição, apenas uma pede que a criança calcule mentalmente, e antes de listar os valores a serem adicionados, traz um modelo de como deve ser feito o cálculo mental através da utilização das propriedades da adição. Em nenhum momento é sugerido que a criança discuta com os colegas o resultado obtido, ou que resolva uma das atividades em grupo.

Quanto ao trabalho com o cálculo, o PCN (1997) recomenda que o cálculo mental e o escrito sejam desenvolvidos simultaneamente, pois este, para ser compreendido, apóia-se naquele, bem como também nas estimativas e aproximações. Como as estratégias do cálculo mental são limitadas, principalmente se calculamos números “grandes”, em alguns momentos temos de recorrer ao registro dos resultados parciais.

Na operação de subtração, o autor segue a mesma linha de apresentação do conteúdo: uma situação-problema, que é resolvida com a utilização do material dourado, em seguida o cálculo é representado no quadro valor de lugar e no algoritmo convencional. O livro, tanto no trabalho com a adição quanto com a subtração, destaca um lembrete ao aluno quando mostra o cálculo no quadro valor de lugar e no algoritmo convencional: “Colocamos unidade debaixo de unidade, dezena debaixo de dezena, centena debaixo de centena e assim por diante. Em

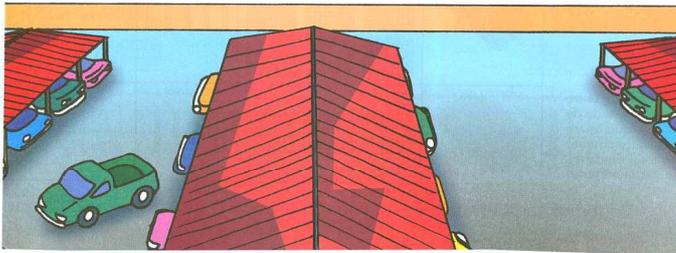
¹⁴ Figura retirada da coleção adotada pela escola, v. 3, p. 44.

seguida, subtraímos unidade de unidade, dezena de dezena, centena de centena e assim por diante”. Segue apresentação da situação-problema¹⁵:

Veja as seguintes situações:

1) Um estacionamento possui lugar para 1 954 automóveis, mas nem todas as vagas estão ocupadas. O dono desse estacionamento pediu a um dos manobristas para verificar quantos carros estão estacionados. O manobrista verificou que há 612 carros estacionados.

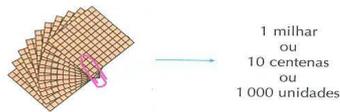
Então, quantos lugares estão vagos?



Para saber quantos lugares estão vagos, devemos efetuar a subtração $1\,954 - 612$.

Vamos usar inicialmente as placas, as tirinhas e os quadradinhos.

Mais uma vez, vamos combinar que cada 10 placas são agrupadas e presas com um clipe, para representar 1 milhar.



Representando a situação:

	Grupos de 10 placas	Placas	Tirinhas	Quadradinhos
Capacidade do estacionamento: 1 954 carros				
$1\,954 - 612$				
Diferença entre a quantidade de carros que lotam o estacionamento e o total de carros estacionados				

Podemos também fazer este cálculo usando o quadro valor de lugar:

UM	C	D	U		Modo prático
1	9	5	4	— minuendo	1 954
—	6	1	2	— subtraendo	— 612
1	3	4	2	— diferença ou resto	1 342

Colocamos unidade debaixo de unidade, dezena debaixo de dezena, centena debaixo de centena e assim por diante. Em seguida, subtraímos unidade de unidade, dezena de dezena, centena de centena e assim por diante.

— é o sinal da subtração.

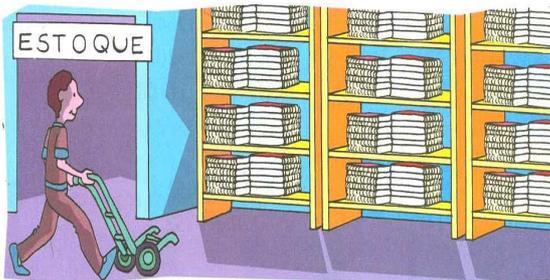
O número de lugares vagos é 1 342.

Figura 4 - Situação-problema proposta e a representação.

¹⁵ Figura retirada da coleção adotada pela escola, v. 3, p. 53 e 54.

Durante o estudo da subtração com reagrupamento, apresenta-se o problema diretamente no quadro valor de lugar e o algoritmo formal. Aqui, o autor menciona a troca de 1 dezena por 10 unidades, mas usa a palavra “transformar”, ao invés de trocar 1 dezena por 10 unidades. No trabalho com a operação de subtração, assim como na adição, podemos perceber que a ênfase na resolução das questões propostas¹⁶ é direcionada ao algoritmo formal.

2) No estoque de uma papelaria, havia 3 472 cadernos. Foram vendidos 1 285 desses cadernos. Quantos sobraram?



Para saber quantos cadernos sobraram, devemos efetuar a subtração $3\,472 - 1\,285$.

UM	C	D	U	UM	C	D	U	UM	C	D	U
3	4	7	2	3	4	6	12	3	3	16	12
-1	2	8	5	-1	2	8	5	-1	2	8	5
		?	?			?				2	1

1D em 10U 1C em 10D

$$\begin{array}{r} 3\,472 \\ -1\,285 \\ \hline 2\,187 \end{array}$$

Sobraram 2 187 cadernos.

Figura 5 - Situação-problema proposta.

A operação de adição é apresentada separadamente da operação de subtração. Somente após a criança ter resolvido uma lista de exercícios (primeiramente de adição, depois de subtração) o autor mostra para a criança que estas são operações inversas, uma serve para verificar o resultado da outra. Para comprovar que a operação de adição é inversa a de subtração o autor utiliza o quadro valor de lugar¹⁷ e, em seguida, apresenta uma lista de atividades.

Observe as operações de adição e subtração:

1) $3\,910 + 2\,573$

UM	C	D	U	UM	C	D	U
3	9	1	0	6	4	8	3
+2	5	7	3	-3	9	1	0
				2	5	7	3

parcela parcela soma ou total minuendo subtraendo diferença

2) $9\,876 - 6\,789$

UM	C	D	U	UM	C	D	U
9	8	7	6	6	7	8	9
-6	7	8	9	+3	0	8	7
				9	8	7	6

minuendo subtraendo diferença

Perceba que a subtração desfaz a adição e a adição desfaz a subtração. A adição e a subtração são chamadas **operações inversas**.

Figura 6 - Operação inversa.

¹⁶ Figura retirada da coleção adotada pela escola, v. 3, p. 155.

¹⁷ Figura retirada da coleção adotada pela escola, v. 3, p. 62.

Novamente, antecipa-se a apresentação do conceito para a criança, privando-a de formular conjecturas, colocá-las em prática e discutir os resultados com seus pares, o que visaria à autonomia da aprendizagem. Sem esse agir-refletir-agir a criança não toma consciência¹⁸ da ação executada o que inibe a construção do conhecimento.

O quarto volume, por sua vez, apresenta as unidades: Um pouco da história dos números, Sistema de Numeração Decimal (números até milhões), Números ordinais, Adição e subtração com números naturais, Expressões numéricas, Valor aproximado de um número, Estimativas.

A referida coleção é recomendada com ressalvas na avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2004. Segundo análise do PNLD, a organização dos conteúdos dificulta o estabelecimento de conexões entre os diferentes campos, ao tratar um mesmo tema exaustivamente. Além disso, quando o assunto é retomado, há exaustiva repetição do que foi abordado em momentos anteriores, sem a ampliação ou aprofundamento do tópico. O guia relata a diversidade de enfoques de um mesmo conceito, o que pode ser observado no caso dos diferentes significados das operações fundamentais, no entanto, denuncia a carência de articulações entre eles. A coleção é elogiada quanto à variedade de representações dos conceitos e algoritmos, ao equilíbrio do emprego da linguagem materna e do símbolo matemático (PNLD, 2004).

Quanto à metodologia de ensino-aprendizagem, o PNLD aponta algumas deficiências: o predomínio da formalização dos conceitos, em especial dos procedimentos, algoritmos e registros convencionais; o tema é abordado através da apresentação do conceito ou procedimento, somente depois são propostas as atividades que, em sua maioria, aplicam-se exclusivamente ao procedimento que acabou de ser introduzido. Essa apresentação praticamente não exige que o aluno reflita sobre a atividade desenvolvida. São poucas as atividades que favorecem “o desenvolvimento das competências de encontrar regularidades, de generalizar, de trabalhar em equipe, entre outras. Também são raros os desafios, as questões abertas, os problemas com inexistência de soluções”. Entretanto, podem ser

¹⁸ Tomar consciência da ação significa, na teoria de Piaget, transformar o fazer em compreender.

encontradas algumas atividades relacionadas ao cálculo mental e estimativa (PNLD, 2004, p. 151).

Analisando o exposto, indagamos quais motivos levaram a escolha dessa coleção, pois a avaliação do PNLD aponta, em vários momentos, o forte apelo ao cálculo escrito (na forma convencional) em detrimento das relações que possam ser estabelecidas pela criança, mediante o cálculo mental e o trabalho em grupo. É visível que a linha de trabalho sugerida pela coleção não vem ao encontro das recomendações referidas pelo PCN e pelas pesquisas em Educação Matemática. Tendo em vista que o livro didático é uma das fontes de informação mais utilizada pelo professor na condução da ação docente, consideramos importante, para o nosso estudo, a análise do livro didático adotado pela escola.

4 ANÁLISE

Para a análise dos dados obtidos durante as entrevistas realizadas, procuramos identificar se as crianças, durante a resolução dos algoritmos de adição e subtração, perceberam os princípios e as propriedades do sistema de numeração decimal implícitos no procedimento. Também observamos se as crianças apresentaram outras formas de resolver essas operações, do algoritmo tradicional. Analisamos sua repostas, separando por série e dentro de cada série, por desempenho de aprendizagem, para posteriormente, comparar os resultados, na tentativa de investigar se há crescimento no conhecimento matemático a partir do trabalho da aritmética, com ênfase nos algoritmos.

Inicialmente, realizamos a transcrição das entrevistas, em seguida, fizemos uma leitura minuciosa dessas transcrições, em conjunto com os protocolos de cada criança, tendo em vista as estratégias de investigação adotadas: da direita para a esquerda, para além do algoritmo, a técnica do “vai um”, a técnica do “empresta um”, e a prova real.

Visando preservar a identidade das crianças colaboradoras da pesquisa, utilizamos abreviações para designá-los, assim: as crianças que pertencem à terceira série serão representadas, em nosso estudo, pela letra maiúscula **C** (de criança) e, para distinguir uma criança da outra, inserimos índices de 1 a 10; as crianças de quinta série são representadas pela letra maiúscula **A** (de adolescente) e como já mencionado, aqui também os índices vão de 1 a 10. Para referir-se a pesquisadora, utilizamos a letra **P**.

4.1 “Da direita para a esquerda”

Para investigar se as crianças colaboradoras da pesquisa entendem a organização espacial do algoritmo, durante a entrevista, indagávamos as razões pelas quais é necessário organizar os números da maneira como o fazemos (da direita para a esquerda) para poder efetuar a conta.

As “contas” nas quais nos apoiamos para situar esse questionamento são as duas operações de adição propostas.

A análise dos protocolos e as respostas¹⁹ apresentadas pelas crianças de terceira série que apresentam bom desempenho em Matemática revelaram sua compreensão do arranjo espacial dos algoritmos. Dentre essas crianças, destacamos a resposta de **C₃**, que afirmou não ser permitida a alteração da organização espacial do algoritmo, por ser indispensável a soma das ordens correspondentes, na “conta”: (1035 + 999) as unidades de uma parcela devem ser adicionadas às unidades da outra parcela, as dezenas devem ser adicionadas às dezenas, as centenas devem ser adicionadas às centenas e as unidades de milhar às unidades de milhar.

P – Uma outra criança²⁰ que resolveu as contas colocou assim: embaixo do 1 colocou um 9, embaixo do 0 colocou outro 9 e embaixo do 3 ela colocou o outro nove. Será que está certo o jeito que ela fez?

C₃ – (...)

P – Eu não poderia colocar esse 9 aqui, do 1 para lá (*iniciando na ordem da unidade de milhar e indo até a dezena – dá esquerda para a direita*), em vez de colocar do 5 para cá (*iniciando na unidade e indo até a centena – dá direita para a esquerda*)?

C₃ – Não.

P – Você sabe me explicar por que não pode?

C₃ – Porque se colocar aqui (*aponta para uma unidade de milhar*), vira unidade de milhar, e aqui, vira centena (*aponta para centena*), e aqui (*aponta para dezena*), dezena. Então, tem que colocar o 9 aqui, pra ele virar dezena, oh, unidade, aqui pra virar dezena e aqui pra virar centena (*refere-se as 9 unidades, 9 dezenas e 9 centenas que compõem o número 999*).

C₄, assim como **C₃**, afirma que a unidade de um número deve ser somada com as unidades do outro, e da mesma forma devemos proceder com as dezenas, centenas e unidades de milhar.

¹⁹ Ao longo da entrevista expressamos-nos através de uma linguagem coloquial, muitas vezes semelhante àquela utilizada pelas crianças entrevistadas, o que se justifica pela preocupação em estabelecer empatia com o entrevistado, bem como meu próprio envolvimento com o objeto de pesquisa.

²⁰ Criança fictícia citada durante a pesquisa em momentos que a pesquisadora necessita criar uma situação de conflito cognitivo.

P – Tem uma criança que eu entrevistei que colocou na folha dela assim, desse jeito: 9 embaixo do 1, depois embaixo do 0 e embaixo do 3, deixou esse aqui sem nada (*aponto para as unidades*). Entendeu? De lá para cá (*da esquerda para a direita*). Colocou diferente do seu. Será que o dela estava certo?

C₄ – Não. Porque aqui é unidade, dezena, centena e milhar (*aponta para as casas e vai explicando*). Aí, tem que deixar unidade, dezena, centena e milhar. Se tiver 4 números, vai na unidade de milhar, e se tiver 3, vai na centena.

De todas as crianças entrevistadas, pertencentes a esse grupo, apenas **C₁**, ao ser colocado em conflito cognitivo, não afirmou ser necessário mantermos o arranjo espacial do algoritmo, para que, ao resolvermos a “conta”, obtivéssemos o resultado correto.

P – A outra criança que me ajudou na entrevista falou que temos que colocar esses números assim: o 9 aqui (*aponto para casa da centena*) e o outro 9 aqui (*aponto para casa da dezena*). Não aqui na casinha da unidade, como você me falou. Então ela me ensinou errado?

C₁ – Não sei, talvez tenha outras possibilidades também²¹.

A análise dos protocolos das crianças de terceira série que apresentavam desempenho insuficiente em Matemática constata que as respostas são as mesmas do grupo anterior, conforme podemos confirmar através de fragmentos das entrevistas de **C₈** e **C₉**:

P – A outra criança que eu entrevistei me falou que devemos colocar esses números (999) daqui para cá (*da esquerda para a direita*). Um 9 embaixo do 1, outro 9 embaixo do 0 e outro embaixo do 3, daí fica essa casinha sem nada. Será que pode? (*Refiro-me à adição de 1035 com 999*)

C₈ – A unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena. A da unidade não pode deixar vazia. A casinha.

C₉ sustentou a afirmação de **C₈**:

²¹ Apesar de em seu protocolo haver organizado o algoritmo de maneira adequada e ter iniciado a resolução começando pela “cacinha” da unidade, aceita a contra-argumentação sem conflito.

P – Por que você coloca os números desse jeito aqui? 1035 e depois começou do 0 para cá colocando os números ? (*Interrogo a respeito das casas, unidade, dezena e centena*). Por que você não começou debaixo do 1 para cá? (*Aponto o número 1035 da esquerda para a direita.*)

C₉ – Eu comecei de lá pra cá. (*Da direita para a esquerda.*)

P – È que a outra criança que fez a conta para mim colocou assim: 9 debaixo do 1, outro 9 embaixo do 0 e outro 9 embaixo do 3, e não colocou nada embaixo do 5.

C₉ – É só que daí ela fez ao contrário porque tem que sempre ser aqui (*aponta para unidade*). Porque se eu começar daqui (*aponta para unidade de milhar*), não vai dar. Tem que sobrar um aqui (*aponta para unidade de milhar*) e tem que ter só 3 aqui.

Em sua fala **C₉**, explicou a organização espacial do algoritmo que lhe foi questionado, afirmou que na adição de 1035 com 999 devemos organizar a segunda parcela, colocando unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena. Como a segunda parcela não tem unidade de milhar, a criança afirmou que deveria sobrar um espaço nessa “casinha”.

Durante a análise dos protocolos das crianças de quinta série que apresentavam bom desempenho em Matemática, notamos que elas entendem que ao efetuar uma operação de adição com dois números, devemos obedecer à ordem de cada adição, para fazê-lo corretamente. Vejamos como procedeu **A₁**:

P – A outra criança que eu entrevistei colocou os números assim: esse 9 embaixo do 1, esse outro 9 embaixo do 3 e aqui embaixo do 5 ela não colocou nada.

A₁ – Tá errado.

P – Está errado?

A₁ – Tem que colocar debaixo da unidade.

P – Embaixo da unidade, como assim?

A₁ – Unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena.

Mesmo as crianças de quinta série com desempenho insuficiente sabiam que para operar corretamente, a organização do algoritmo teria de ser mantida.

P – A outra criança que eu entrevistei colocou os números assim: aqui está 135 mais 99 (*aponte para os números*), ela colocou um 9 embaixo do 1 e outro embaixo do 3 e deixou essa “casinha” aqui (*a unidade*), sem nada. Será que ela estava fazendo errado?

A₈ – Pelo que eu aprendi, estava.

É evidente que todas as crianças entrevistadas sabiam que para chegar ao resultado adequado da operação proposta era necessária a correta organização espacial do algoritmo, em outras palavras, elas estavam convictas de que devemos organizar os números de forma que as unidades sejam adicionadas às unidades, as dezenas adicionadas às dezenas, as centenas adicionadas às centenas e assim sucessivamente. No entanto, quando perguntávamos sobre o motivo por que deveríamos manter essa organização, elas recorriam à própria organização espacial do algoritmo como único argumento para justificar sua ação, como atestou a fala de **C₈**: “A unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena. A da unidade não pode deixar vazia. A casinha”. Ou a de **A₁**: “Unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena”.

Ao voltarmos nossas atenções para essas frases que as crianças repetiram de maneira automática, temos a impressão de que estão “copiando” de algum lugar, porém, não entendem realmente o que isso significa. Se voltarmos à página 50 de nosso trabalho, encontraremos essa frase expressa justamente da forma como as crianças a repetiam. Não queremos com isso afirmar que ela esteja errada e não deva ser usada, antes, pretendíamos alertar para o fato de que o importante não é a repetição das regras de um procedimento sem a devida compreensão, e sim, propiciar situações de aprendizagem que permitam às crianças descobrirem as razões que fundamentam o algoritmo convencional, como, por exemplo, a formulação de perguntas acerca da pertinência ou não da utilização do algoritmo formal, a fim de levar a própria criança a indagar se é possível obter o mesmo resultado para uma determinada operação, procedendo da direita para a esquerda ou vice-versa (LERNER, 1995).

Em virtude da falta de argumentação das crianças entrevistadas, conjecturamos se elas realmente tinham conhecimento de que esse dispositivo possui essa organização espacial

(unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena) fundamentada no Sistema de Numeração Decimal, objetivando maior economia de ações no momento do cálculo. Entretanto, devemos desconsiderar que foram necessários anos de evolução para que esse dispositivo chegasse a forma como o conhecemos, hoje e que essa é apenas uma das formas de apresentação do cálculo escrito, por exemplo, podemos adicionar 99 a 135 primeiramente decompondo os números ($90+9$ e $100+30+5$), para então adicionarmos as centenas ($100+0$), depois as dezenas ($90+30$) e, por fim, as unidades ($9+5$).

4.2 Para além do algoritmo

Para investigar se as crianças utilizavam outras técnicas operatórias, por exemplo, o cálculo mental, contextualizamos (durante a entrevista) algumas das “contas” a elas apresentadas e lhes perguntamos se seria possível resolver a questão sem termos lápis e papel. Separamos, para a investigação dessa estratégia, uma “conta” de subtração ($100-24$) e duas de adição ($135+99$ e $1035+999$) que foram utilizadas aleatoriamente, conforme andamento da entrevista. A seleção das duas operações de adição deve-se ao fato de ser possível fazer em cada uma delas, o arredondamento de uma das parcelas (99 ou 999), facilitando assim o cálculo mental.

Durante a análise dos protocolos das crianças de terceira série que apresentavam desempenho satisfatório em Matemática notamos que apesar de elas mencionarem que na falta de lápis e papel a conta pode ser resolvida “de cabeça”, não estavam se referindo a estratégias utilizadas no cálculo mental, como a estimativa e a aproximação. Para quatro crianças desse grupo, “fazer a conta de cabeça” significava resolvê-la como se fosse o algoritmo convencional, porém, sem a utilização de lápis e papel. Dito de outra forma, elas “imaginam” o papel no qual haveria o algoritmo organizado espacialmente e tentavam operar como se estivessem resolvendo com lápis e papel, o que pode ser verificado na fala de C_5 :

P – E se fôssemos fazer uma “conta” e não tivéssemos lápis nem papel, por exemplo, se eu tivesse 100 figurinhas e tivesse perdido 24. Tem jeito de saber quantas figurinhas eu ainda tenho, sem ter lápis nem papel?

C₅ – Tem.

P – Como eu faria?

C₅ – Você tinha 100 figurinhas, não é? Você pega 24 e põe o resto em linha reta, e daí, conta quantas que tem.

P – É só contar quantas que sobraram que dá para fazer!

E se eu tenho 6 balas e ganho mais 7 balas, dá para fazer também sem papel e lápis?

C₅ – Assim, por exemplo, se você tem 6 balinhas mais 7 é só contar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, até dar o 6 mais 7.

[...]

P - Vamos supor que nós estejamos brincando durante o intervalo, então nós contamos as figurinhas que temos. A quantidade que você tem são 135 figurinhas. Aí, eu conto as minhas, deu 99. Se nós juntássemos as minhas figurinhas e as suas, com quantas figurinhas iríamos ficar? Tem jeito de saber sem usar lápis e papel?

C₅ – Tem.

P – Que jeito?

C₅ – Na cabeça, por exemplo, 9 mais 5, daí, vai dar um tanto, não é? Daí, o que der 9 mais 5, daí, põe um embaixo e o outro sobe lá, aí, a gente vai pensando como vai ser. Daí, a gente fala (*refere-se ao resultado da operação*), se tiver errado daí a gente faz de novo. Assim. (*Refazendo toda operação novamente*).

P – Igual faz no papel?

C₅ – É.

P – E se nós contássemos novamente as figurinhas e víssemos que temos mais, 1035 e 999, também dá para fazer?

C₅ – Dá.

P – Daí, de que jeito dá para fazer?

C₅ – É só fazer assim, é... quanto que é mesmo?

P – 1035 e 999.

C₅ – Daí, é só contar assim, 5 mais 9, daí, o tanto que der, você vai fazendo assim de cabeça, sem fazer no papel, a gente vai contando nos dedinhos.

P – Ah tá!

Tem uma outra criança que eu entrevistei, na outra escola, que me explicou assim: essa conta aqui, $135 + 99$ pode ser feita assim, arredonda o 99 para 100 daí faz a soma e depois tira o que você acrescentou.

C₅ – É. Porque daí olha. Não é 100? Quanto que é 0 mais 5? Daí é cinco. E 3 mais 0 é três? Daí vai, acrescenta só mais 1 (*referindo-se a uma centena*), daí, da 235 (*não se lembrou de retirar uma unidade que foi acrescentada*).

P – Daí, dá para fazer a mesma coisa com o 1035 e o 999?

C₅ – Dá.

P – E como fica?

C₅ – É só fazer a continha. Assim, faz nos dedos, assim, 9 mais 5, o tanto que der vai dar dezena, daí, um sobe o outro fica lá. A unidade fica embaixo e a dezena fica em cima. Daí, faz a continha contando com o de cima.

C₅, ao discorrer como procederia para resolver a conta que lhe propusemos, passou-nos a impressão de estar efetuando o algoritmo convencional no papel. Para ela, é desta forma que efetuamos o cálculo mentalmente: imaginamos um papel com a “conta” e vamos efetuando o cálculo até obter o resultado. Outro exemplo da mesma visão de cálculo mental é encontrada na explicação dada por **C₃**, entretanto, quando propusemos uma segunda operação de adição para confirmarmos se sua hipótese explicativa resumia-se em reproduzir o procedimento formal, seu discurso tomou rumo totalmente diferente da primeira explicação, apresentando indicativos de que ela sabia calcular mentalmente, apesar de não ter esse conhecimento sedimentado.

P – Vamos supor que eu e você estejamos no intervalo, e eu conto as figurinhas²² que eu tenho. São 135, aí contamos as tuas e são 99. Dá para saber quantas figurinhas ficam, as minhas e as suas juntas, sem usarmos lápis e papel?

C₃ – Dá.

P – Que jeito você faria?

C₃ – Na cabeça.

P – Na cabeça? Você consegue fazer para vermos quanto dá?

C₃ – [...]. 234.

P – Como você fez para chegar em 234?

²² Em trechos que antecedem esse fragmento da entrevista, a pesquisadora combinou com a criança que esta deveria “fazer de conta” que tem um álbum de figurinhas.

C₃ – Somei 9 mais 5 que deu 14. Daí, se soma 9 com 1 que foi, fica 10, com mais 3, 13, esse aqui soma com o outro.

P – Ah, entendi. E se nós tivéssemos um pouco mais de figurinhas? Eu tivesse 1035 e você 999. Daria para fazer a “conta” sem lápis e papel?

C₃ – Dá.

P – Quanto que dá?

C₃ – 2034.

P – 2034? Como você fez para saber que são 2034?

C₃ – Eu coloquei 1 aqui (*no 999,*) daí ficou 1000, mais 1000, 2000. Tinha 34 e eu somei, 2034.

Apontando²³ para uma das parcelas da adição que lhe foi proposta ($1035 + 999$), **C₃** afirmou ter arredondado 999 para 1000, ou seja, utilizou uma estratégia do cálculo mental (aproximação), que implica em arredondar o número, facilitando assim a contagem. Esse fragmento da conversa com **C₃** nos levou a indagar qual parcela do trabalho com as operações básicas é destinada a outras estratégias de resolução, como, por exemplo, o cálculo mental, que, segundo sugestão dos Parâmetros Curriculares Nacionais, deve ser trabalhado simultaneamente ao cálculo escrito, bem como às estratégias próprias das crianças, e ao trabalho como os algoritmos formais automatizados e desconectados de outros conhecimentos que a criança possa ter construído.

O fragmento, a seguir, sustenta nosso questionamento, pois **C₂** só conseguiu realizar o cálculo mental após receber ajuda da pesquisadora:

P – E se não tivéssemos papel nem lápis na mão e quiséssemos fazer a continha de 100 menos 24? Eu tenho 100 balas e chupei 24 com quantas balas eu fiquei? Daria para fazer a “conta” sem papel e lápis?

C₂ – Não sei... fazer mentalmente.

P – Mentalmente dá para fazer? E se a gente fizesse a outra continha assim: eu tenho 100 figurinhas e ganhei 39, sem papel e lápis também dá para fazer?

C₂ – Dá, daí deu 139. Porque daí tem 0 e 0 (*referindo-se ao 0 da unidade e da dezena*), daí, é só botar o 3 e o 9 e o 1 fica lá. Daí dá 139.

²³ Durante a entrevista, a folha com as contas resolvida pela criança permaneceu em cima da mesa.

P – Aí fica fácil de fazer não é?

C₂ – É.

P – E se eu tivesse 99 mais 135, também dá para fazer mentalmente? Se eu tivesse 99 figurinhas e, 135 figurinhas, e eu quisesse saber quanto que dá os dois montinhos juntos, daria para fazer mentalmente?

C₂ – Acho que sim.

(...)

P – E essa aqui, eu tenho 1035 figurinhas e ganho mais 999 figurinhas. Tem jeito de resolver sem ter lápis e papel?

C₂ – (...)

P – Você conhece algum outro jeito de fazer?

C₂ – Não.

P – Não conhece? Só esse jeito aqui que a gente aprendeu na escola mesmo? (*Balança a cabeça afirmando que sim*). Uma outra criança que entrevistei me disse que se eu arredondasse o 99 para 100, eu conseguiria fazer a conta de cabeça, e depois, no final, eu descontaria esse 1 que eu acrescentei aqui (*no 99*). Será que dá para fazer?

C₂ – Dá.

P – Você sabe fazer se for desse jeito? Para podermos ver como fica?

C₂ – Sim.

P – Você consegue fazer? (*Repito a pergunta por que a criança, apesar de afirmar que sabia fazer o cálculo, mantém-se calada.*)

C₂ – Sim.

P – Então faz para que eu veja.

C₂ – Olha, se arredondou 99 para 100, daí 100 mais 135 é só aumentar mais uma centena, que fica 235. Como aumentou 1 no 99, desconta no 235, aí, fica 234.

P – Daria para fazer assim?

C₂ – Dá.

P – Será que a gente consegue fazer com esse número aqui debaixo, a mesma coisa? Com 1035 mais 999?

C₂ – Consegue.

P – Como fica então?

C₂ – É só arredondar 999 para 1000, daí, aumenta 1 no milhar, que fica 2035. Daí é só tirar 1 na unidade, que fica 2034.

Essa é a única criança do grupo de terceira série com bom desempenho em Matemática que consegue utilizar a estratégia do arredondamento com as duas operações de adição, entretanto, foi necessária a intervenção da pesquisadora para que ela pudesse lembrar que, nesse caso, poderia lançar mão da estratégia de arredondamento de número. A dependência da intervenção de outra pessoa revelou a falta de autonomia no momento de resolver suas atividades, indicou também que se essa criança participou de atividades em grupos e tinha liberdade de se expressar sem seguir uma única forma de apresentar seus resultados, isso aconteceu de maneira implícita, o que a tornava dependente da aprovação de outros.

A análise dos protocolos das crianças de terceira série que apresentavam desempenho insuficiente em Matemática apontou que elas entendem o cálculo mental como sendo uma reprodução do algoritmo convencional, “na cabeça”. Todas as crianças desse grupo procederam como se estivessem resolvendo o algoritmo no papel, o que pode ser observado no fragmento da entrevista de C₇:

P – Vamos supor que estamos no intervalo, brincando com figurinhas e eu contei as minhas e deu 99 figurinhas e as suas deram 135. Se juntássemos as minhas e as suas, teria como saber, sem usar lápis nem papel, quantas figurinhas nós temos?

C₆ – Tem.

P – Como a gente faz?

C₆ – Ai pega 99 mais 135 não é?

Aí, joga na cabeça, 9 mais 5, dá 14. 9 mais 3 dá 12, ai abaixa o um. Fica cento e... vai dar 134.

P – 134? E se nós tivéssemos um pouco mais de figurinhas, se você tivesse 1035 e eu tivesse 999, daria para fazer também?

C₆ – Acho que dá.

P – Você consegue fazer?

C₆ – 1035 mais 999. Coloca 9 mais 5, vai dar 14, e 9 mais 3, vai dar 12, e 9, 9, vai dar cento e..., novecentos e vinte e quatro (*perde-se no meio do cálculo*).

P – É? Tem outra criança que eu entrevistei e ela disse que dá para arredondar o 99 para 100, depois, somar com o 135. No final, tira o que acrescentou. Será que dá para fazer assim?

C₆ – (...)

P – Você sabe fazer assim?

C₆ – Sei.

P – Você acha que ela fez certo?

C₆ – Acho que sim.

P – Vamos tentar fazer? Será que você consegue fazer do jeito que ele fez?

C₆ – Consigo.

P – Então tenta fazer. É o 135 mais 99 (*precisou de ajuda para entender como arredonda o 99 e chega ao resultado de 234*²⁴).

Apesar de se propor a fazer a “conta”, C₆ não entendia como arredondar o 99, mesmo com a intervenção da pesquisadora, e quando lhe propusemos que efetuasse uma operação de subtração, percebemos que suas hipóteses eram totalmente confusas, ao invés de subtrair, ela adicionou os valores, mesmo falando que perdemos figurinhas:

P – E se eu não tivesse nem lápis e nem papel para resolver a “conta” e tivesse 100 figurinhas e perdesse 24. Teria como fazer?

C₆ – Tinha 100 e perdeu 24?

P – É.

C₆ – (*balança a cabeça afirmando que sim*).

P – Que jeito? Conta para mim, para eu aprender. Porque daí, se alguém perguntar, eu sei ensinar.

C₆ – É assim, pega o 100 menos 24, que dá 124 figurinhas.

P – Então, eu tinha 100 figurinhas (*ele me interrompe*).

C₆ – Aqui tem 100 e aqui 24, (*faz gestos como se tivéssemos dois montes de figurinhas*), aí, faz assim. Você faz conta de mais, um, dois, três, quatro, vai contando tudo junto.

P – Tudo junto, os dois montinhos?

C₆ – É.

P – E se eu estou andando na rua com o meu pacotinho com 100 figurinhas e daí eu perdi 24 figurinhas? Para saber quantas figuras sobraram no pacotinho, como eu faço se não tiver lápis para fazer a conta? Tem jeito de fazer?

²⁴ Devido à dificuldade de expressão da criança, optamos por suprimir a apresentação desse trecho.

C₆ – Tem.

P – Como é?

C₆ – Vai contando. Faz dois montes 50 aqui, 50 aqui, aí, vai contando e vai dar 100.

Durante a fala de C₆, percebemos várias lacunas, quando adicionou uma quantidade a outra, que afirmamos ter perdido. Notamos que o conceito de subtração ainda não fazia sentido para ele. C₇ afirmou de imediato que não conseguia resolver o cálculo sem lápis e papel, então lhe foi proposto um valor menor e, apesar de dizer que era mais fácil, não respondeu qual era o resultado:

P – Se nós tivéssemos que fazer essa continha: eu tinha 100 balas, chupei 24, sem utilizar papel e papel, tem como?

C₇ – Eu não consigo.

P – E se tivéssemos 12 figurinhas e ganhássemos 5, tem como fazer?

C₇ – De mais eu acho fácil.

P – Sem o papel e o lápis, tem jeito de fazer?

C₇ – É que a professora passa de mais pra gente e de dividir. Eu já sou acostumada.

Como não obtivemos resposta, voltamos a indagar se poderíamos resolver uma “conta” sem termos lápis e papel. Entretanto, obtivemos, como resposta, resultados incorretos, pois, apesar da intervenção da pesquisadora a criança afirmou não conseguir resolver a questão arredondando valores:

P – Se eu tenho 135 balas e ganho mais 99, e não tem lápis nem papel para podermos resolver a conta, tem como saber com quantas balas eu fiquei?

C₇ – Tem.

P – De que jeito seria?

C₇ – De cabeça.

P – Você sabe fazer? Para ver com quantas balas nós ficamos? Nós tínhamos 135 e ganhamos mais 99.

C₇ – 145 (*respondeu imediatamente*).

P – 145? Como você fez a conta? Explique para mim.

C₇ – (...)

P – Você foi contando? Como foi que você fez?

C₇ – Eu contei no dedo e na cabeça.

P – É? Tem uma criança que eu entrevistei, e ela disse que se arredondasse o 99 para resolver a conta, depois tirasse o que arredondou, também daria para fazer. Será que daria para fazer assim? Será que dá certo?

C₇ – Não.

P – Não dá? E se eu tivesse 1035 figurinhas e ganhasse 999, daria para fazer a “onta sem lápis e papel?”

C₇ – Sim.

P – Você sabe fazer para que possamos saber o resultado?

C₇ – 1044 (*responde imediatamente*).

P – 1044? Então, a mesma criança que me falou da conta anterior, disse que se arredondássemos 999 para 1000, era só fazer a conta, depois descontar o que foi acrescentado que eu conseguiria obter o resultado. Será que dá para fazer assim, fazendo arredondamento? O que você acha?

C₇ – Eu não sei.

Quando **C₇** respondeu que a soma de 1035 com 999 dava 1044, imediatamente após a pergunta, levou-nos a entender que esse valor foi citado aleatoriamente, assim como ocorreu com o cálculo anterior, o qual ela afirmou ter dado 145. **C₁₀** era mais uma criança desse grupo que não conseguia resolver mentalmente as questões propostas, e mesmo quando propusemos um cálculo com valores menores, não resolveu, apesar de dizer que era possível contar na mão:

P – Se eu tivesse 100 figurinhas e brincando com um amiguinho no intervalo, perdesse 24 figurinhas, como eu poderia fazer para saber com quantas fiquei, sem ter lápis e papel, tem algum jeito?

C₁₀ – Não.

P – E se eu tivesse 5 balas na mão e ganhasse mais 20 balas, tem jeito de fazer a “conta” sem ter lápis e papel? Para saber quantas balas eu fiquei na mão?

C₁₀ – Se não tivesse papel nem lápis contava na mão.

Apresentamos outras operações de adição, mas mesmo assim não tivemos sucesso. Apenas após a intervenção ela arriscou um valor como resposta:

P – Se nós estivéssemos brincando no intervalo de contar figurinhas. Você contando as suas para eu ver e eu contando as minhas. As minhas deram 99 figurinhas e você contou as suas deu 135. Se nós juntarmos as minhas e as suas, com quantas figurinhas vamos ficar? Tem como fazer isso se estamos no intervalo e não temos lápis e nem papel?

C₁₀ – Não.

P – Não tem jeito? E se nós tivéssemos um outro valor menor será que dava?

C₁₀ – Dava para fazer na mão.

P – Só na mão?

C₁₀ – Na cabeça.

P – Na cabeça? Você consegue fazer na cabeça para a gente ver?

C₁₀ – Não.

P – Não consegue? Eu entrevistei uma outra criança, em outra escola, que me disse que se arredondar o 99 para 100, colocar 1 mais 99 que dá 100, e faz a “conta”, depois que der o resultado, tira o 1 que colocou. Será que assim dá certo?

C₁₀ – Dá.

P – Você consegue fazer igual a ela, para a gente ver quanto dá? (*Balança a cabeça, afirmando que sim*). Então faz para vermos.

C₁₀ – (...) Dá 214.

P – As minhas e as tuas juntas?

C₁₀ – É.

P – E se você tivesse 1035 e eu tivesse 999, para contarmos a minha e a tua juntos, sem usar lápis e papel, tem jeito?

C₁₀ – Na cabeça.

P – Você conseguiria fazer para a gente ver quanto dá?

C₁₀ – (...)

P – Se nós fôssemos arredondar, como a criança da outra escola fez, será que dá certo?

C₁₀ – Dá.

P – Você consegue fazer do jeito que ela fez? (*Balança a cabeça, afirmando que sim*).

P – Faz, então, para vermos quanto dá.

C₁₀ – (...)

P – Não deu? (*Balança a cabeça afirmando que não*). Não conseguiu fazer?

Os protocolos das crianças de quinta séries que apresentam bom desempenho em Matemática nos revelaram que apenas três desse grupo conseguiam explicar de maneira satisfatória o cálculo mental, mas ainda assim, em alguns momentos, o relacionavam com o algoritmo formal. **A₄** era uma dessas três crianças, quando lhe perguntamos se havia outro jeito de resolver as “contas” sem ser “como aprendemos na escola”, sua resposta indicou que para ela, o cálculo mental era uma mera reprodução do algoritmo formal sem o uso do lápis e papel:

P – Tem outro jeito de fazer essas continhas, sem ser esse jeito que a gente aprende na escola?

A₄ – De menos dá para fazer de cabeça, para quem sabe, não é? Se for de dividir, dá para arredondar, aí, vai dar um valor aproximado. Tem vários jeitos de fazer. Quando a continha é fácil, eu prefiro fazer de cabeça, se a professora deixar, se ela exigir a continha e eu também não souber fazer de cabeça, porque tem uma que é complicada, fica mais fácil fazer a continha. Saber fazer de cabeça qualquer continha sabe fazer, só que demora mais pra fazer de cabeça, tem que ficar emprestando na sua cabeça, para ver se dá certo, e no papel é mais fácil, você entende melhor.

Na tentativa de investigarmos se **A₄** realmente não entendia como proceder para fazer um cálculo mental, retomamos a indagação de antes e diferentemente da primeira resposta, ela mostrou que entendeu perfeitamente a estratégia de arredondamento de número. É importante lembrar que não houve intervenção da pesquisadora em nenhum dos dois momentos da apresentação de suas hipóteses explicativas:

P – Vamos supor que eu e você estejamos no intervalo. Eu estou mostrando minhas figurinhas para você e você está mostrando as suas para mim. Eu contei no meu álbum e deu 99 figurinhas. Aí, você contou o seu e deu 135. Se a gente juntar as figurinhas do meu com as do seu álbum, dá para saber quantas figurinhas tem? Só que nós não temos lápis nem papel para fazer a conta. A gente consegue fazer?

A₄ – De uma certa forma consegue. Eu tiraria o 35 e somaria o 100 com o 99 que ficaria 199, arredondaria para 200. Ia ficar com 34, aí, colocaria o 34. 234 figurinhas.

P – Se a gente tivesse um pouquinho mais de figurinhas, um álbum um pouco maior. Eu contei as minhas deram 999 e você contou as suas deram 1035. Daria também para juntar e saber quantas dá?

A₄ – Daí, é só pensar um pouquinho mais. Eu tiraria o 35 do 1000, somaria mais 999, que da 1999. Ia arredondar para 2000, ficava 34. Daí, dava 2034.

Assim como **A₄**, **A₅** primeiramente fez menção ao procedimento formal para depois explicar a estratégia do arredondamento:

P – Vamos supor que eu e você estejamos no intervalo jogando figurinhas a valer. Você tem 100 figurinhas.

A₅ – 100 figurinhas.

P – É. E você perdeu para o outro menininho com quem você estava jogando. Você perdeu 24 figurinhas para ele.

A₅ – Ah!

P – Tem jeito de a gente saber quantas figurinhas sobrou sem usar lápis nem papel? Porque lá no intervalo nós não temos lápis e papel na mão.

A₅ – Dá.

P – Que jeito a gente faz?

A₅ – É assim, vamos colocar assim, 25 é mais fácil. Colocar 25 em vez de 24, Beleza?

P – Pode ser.

A₅ – Aú, faz assim, imagina na sua cabeça que você tem um papel lá, aí, você vai colocar 100 menos 25, não é? Aí, aquele 5 lá não vai dar por 0 aí você vai ter que emprestar lá do 1, certo? Aí, o número 0 do meio vai ficar 9 e o outro vai ficar 10. Aí... Não, vamos colocar o 74 certinho. Aí vai ficar 10, aí vai 6. E o outro é 2, não é? Aí, 2 conta 3, (...), deu , vai ficar 76 (*tentou explicar como resolver a conta imaginando o algoritmo, mas só afirmou que deu 76 por ter consultado suas anotações*).

P – Dá para fazer de cabeça, não é?

A₅ – Tem que imaginar que tem um papel na sua frente, e estar bem concentrado também.

(...)

P – Vamos fazer de conta que eu estou mostrando meu álbum de figurinhas para você e você está mostrando o seu para mim. Nós contamos as figurinhas do seu álbum e vimos que tinha 135. Depois, contamos do meu e

deu 99. Se pegássemos as figurinhas do seu álbum e do meu e colocássemos juntas em um único álbum quantas dariam? Só que nós não temos papel nem lápis para fazer essa conta.

A₅ – Vai dar 130, 234.

P – 234? Explica para mim como é que você fez essa conta sem o lápis e o papel.

A₅ – É. Eu peguei o 135 e somei o 99. Só que eu faço do jeito mais fácil. Eu peguei 100, coloquei 99, ficou 199. Aí, eu tirei um do 35, coloquei 1 no 199, ficou 200. Aí, sobrou 34, aí, ficou 234.

P – E se a gente tivesse um álbum um pouco maior. No seu álbum tivesse 1035 e no meu tivesse 999, também dá para fazer a conta?

A₅ – 1035?

P – E 999.

A₅ – Vai dar 2000, espera. Mais um ali, vai dar 2034.

P – E como você fez?

A₅ – Eu tirei 1 do 35 e coloquei no 9 9 9, que é 999 para fazer 1000. Aí, como dá 1000, dá 2000. Aí, como eu tirei do 34, fica 2034.

Apesar de explicarem satisfatoriamente como devemos proceder para arredondar um número, as duas crianças inicialmente se mostraram confusas sobre como deveriam proceder para resolver uma “conta” sem a utilização de lápis e papel. Isso pode ser comprovado no trecho da entrevista em que elas afirmaram ter que imaginar o papel “na cabeça”. Esse conflito que elas vivenciavam na tentativa de explicar como chegaram ao resultado as ajudou a assimilar melhor a técnica operatória do cálculo mental.

Duas crianças desse grupo necessitavam de intervenção para abordar a estratégia do cálculo mental. **A₁** inicialmente afirmou que, para fazer o cálculo, mesmo “de cabeça”, dependia de outra pessoa para “marcar” enquanto resolvia a conta, mostrando sua insegurança e dependência de outras pessoas para direcioná-la em sua atividade mental. Quando lhe perguntei se conseguimos resolver uma conta maior sem anotar no papel (no parágrafo nono do fragmento da entrevista), a resposta continuou sendo a mesma: “se tiver marcando do lado!”. Vejamos:

P – Se nós estivéssemos no intervalo e eu mostrasse o meu álbum para você. Vamos supor que nós colecionássemos figurinhas. Aí, nós contamos no seu

álbum, tinha 135 figurinhas e no meu tinha 99. Se nós juntássemos as figurinhas do seu álbum com as do meu, daria para sabermos quantas figurinhas temos sem ter papel para fazer conta?

A₁ – Na cabeça.

P – Você consegue fazer para vermos quantas são?

A₁ – Só que eu vou marcando o resultado.

P – Mas nós não temos nem lápis nem papel!

A₁ – Eu sempre peço para alguém marcar do meu lado o número senão eu acabo esquecendo.

P – Para você ir fazendo? Sem marcar você esquece?

A₁ – Eu escrevo o número, o resultado já está na minha cabeça, aí, eu vou marcando assim, com a mão.

P – E se a gente tivesse um número um pouco maior? Será que daria para fazer de cabeça sem ir marcando?

A₁ – Dependendo da conta dá.

P – Daí, o número seria 1035 mais 999. Você tem 1035 figurinhas no seu álbum e eu tenho 999 no meu.

A₁ – É muita figurinha.

P – É muita? Aí não daria para fazer de cabeça?

A₁ – Se tiver marcando do lado!

P – Aí você consegue?

Ao percebermos que não iríamos conseguir outra resposta de **A₁** intervimos, explicando como uma outra criança havia resolvido, para descobrirmos se ela era capaz de entender. Logo no início da conversa ela afirmou já ter visto “essa tática”:

P – Tem uma outra criança que eu entrevistei, em uma outra escola, que me contou como ela resolvia. Ela pega o 99 e acrescenta 1, aí, dá 100.

A₁ – Depois ele tira 1. Eu já vi essa tática.

P – Já viu? Será que dá para fazer? Você consegue fazer assim?

A₁ – Dá, mas qual é o valor?

P – 135 mais 99.

A₁ – 135 mais 99.

P – É.

A₁ – Dá 234.

P – E se fosse para fazer com número maior? 1035 mais 999?

A₁ – Ia ficar com 1000. Dá 2000, aí, tira um. (...).

P – Daí, fica quanto?

A₁ – 2035, da,í tira 1, 2034.

Questionamo-nos quando nos deparamos com casos como esse: por que as crianças apesar de terem conhecimento de que podemos fazer uso do cálculo mental não o fazem, ou mesmo se esquecem de que esse procedimento de resolução pode ser uma maneira rápida de chegarem ao resultado?

Das crianças de quinta série que apresentavam desempenho insuficiente, duas demonstraram entender o cálculo mental como se fosse a reprodução mental do algoritmo, o que já foi detectado, e uma afirmou só saber resolver a conta se tivesse lápis e papel:

P – Se nós estivéssemos no intervalo, e você e um outro amigo seu estivessem brincando de virar figurinha. Você sabia que quando foi para o intervalo tinha 100 figurinhas na mão, aí, jogando com seu amigo, perdeu 24. Tem como saber quantas figurinhas sobrou para você quando vocês pararam de jogar, sem fazer conta com papel e lápis? Porque lá nós não temos papel e lápis.

A₉ – Assim, por exemplo, 100 figurinhas e perdeu 24?

P – É, perdeu 24. Tem jeito de fazer sem ser com lápis e papel?

A₉ – Tem.

P – De que jeito a gente faz?

A₉ – $100 - 24$?

P – Dá para fazer sem usar o papel?

A₉ – Dá.

P – Dá? *(Como ele não efetuava, continuei questionado)*

E tem outro jeito da gente fazer essa conta sem ser do jeito que aprendemos na escola?

A₉ – Tem.

P – Que jeito?

A₉ – Pensar e fazer assim sem pôr não papel *(referindo-se ao cálculo mental)*.

A₉ respondeu que era possível fazer a “conta” proposta de outra forma, além do algoritmo convencional ensinado na escola. Entretanto pedimos várias vezes que ele mostrasse como

deveríamos proceder para encontrar o resultado, no caso, saber quantas figurinhas sobraram, e não obtivemos resposta em valor numérico, ele afirmou apenas que bastava pensar, sem pôr no papel, que obteríamos o resultado. Como essa resposta foi insuficiente para afirmarmos se **A₉** sabia realmente como desenvolver o cálculo mental no decorrer da entrevista, retomamos esse questionamento:

P – Vamos supor que eu e você tínhamos, cada um, um álbum de figurinhas. Você contou as figurinhas do seu álbum, deu 135, e eu contei do meu, deu 99 figurinhas. Se nós fôssemos pegar todas as figurinhas que nós temos e colocar em um único álbum, daria para saber, sem fazer contas com lápis e papel, quantas figurinhas nós temos juntos?

A₉ – Sem fazer as continhas, assim é contar?

P – Sem fazer as continhas como se faz na escola, no papel. Tem jeito de saber quantas figurinhas nós temos?

As suas 135 e as minhas 99?

A₉ – Tem.

P – Tem? Quanto daria?

A₉ – (...)

Acho que é 102.

P – Como você fez para saber?

A₉ – Acho que é de mais, aí, tinha que somar.

P – Como você somou?

A₉ – Tem que pensar. Ai junta os dois resultados e ponha junto.

P – E se a gente tivesse um pouco de figurinhas a mais? Você tivesse 1035 e eu 999. Também dá para saber, se juntássemos as minhas e a suas? Uma outra criança que eu entrevistei me disse que se arredondássemos o 999 para 1000, somássemos com o 1035 e tirássemos um do resultado daria para saber? Será que dá?

A₉ – Não sei.

P – Não sabe?

A₉ – Eu não consigo contar sem ser escrito.

A₉ revelou-se totalmente dependente do lápis e papel. Nem mesmo quando mencionamos que outra criança utilizara o arredondamento ela se propôs a arriscar uma resposta para o cálculo proposto. Das crianças desse grupo, somente uma, após intervenção, conseguiu efetuar o cálculo através da utilização da estratégia de arredondamento:

P – Tem outro jeito da gente fazer essas continhas sem ser do jeito que a gente aprende na escola?

A₈ – Dá para fazer sem ser armada. Dá para fazer na calculadora, só que eu saiba.

P – Se a gente estivesse jogando um jogo e eu tivesse 50 pontos. Aí, você fez uma jogada e ganhou, dos meu 50 pontos, 30 pontos para você. Dá para fazermos a conta de quantos pontos ainda me sobraram se não tivermos papel nem lápis na mão?

A₈ – Dá.

P – Que jeito a gente faria?

A₈ – É só, tipo arma uma conta na cabeça, não é? Aí, você arma dezena e unidade, $50 - 20$, não é?

P – 30. (*Corrijo.*)

A₈ – 30. Menos 30, que vai dar 20.

P – Vamos supor que estejamos eu e você, brincando lá do lado de fora, e nós não temos lápis nem papel. Eu estou mostrando para você o meu álbum de figurinhas e você está mostrando o seu para mim. Eu contei e tenho 99 figurinhas e você contou o seu deu, 135 figurinhas. Se a gente juntar as figurinhas do meu álbum com as do seu quantas figurinhas serão? Tem jeito de saber sem ter lápis e papel para fazer a conta?

A₈ – Fazer mentalmente.

P – Você consegue fazer para vermos quanto dá?

A₈ – (...)

Quantas figurinhas? É, 99 mais...?

P – 135.

A₈ – (...)

Deu 134, não (...).

P – Conta para mim de que jeito você faz mentalmente?

A₈ – Eu somo o resultado da unidade, 9 mais 5 e vou subindo até somar tudo isso.

P – Se fosse para a gente fazer uma conta um pouquinho maior, eu tenho mais figurinhas e você tem mais ainda. Você está com um álbum com 1035 e eu com 999. Tem jeito de fazer de cabeça também, ou de alguma outra forma? Porque com lápis e papel não tem como.

A₈ – Aí, de cabeça fica difícil.

P – Fica difícil? Uma outra criança que eu entrevistei, na outra escola, falou assim para mim: se você pegar, somar 1 ao 99 que você tem, dá 100. Aí, você pega o 100 e soma com o 135, e depois que der o resultado você tira aquele 1 que você colocou no 99. Diz ela que dá certo, será que dá?

A₈ – Dá.

P – Será que você consegue fazer para a gente ver como vai ficar?

A₈ – Daí, o que você pega?

P – O 135 mais 99.

A₈ – Deu 199.

P – Aí, como você fez?

A₈ – Ah, fiz errado.

P – Fez errado? Mas você entendeu o que ela falou que faz?

A₈ – Sim.

P – Você acha que está certo do jeito que ela me disse?

A₈ – Eu acho. Porque soma um para arredondar, aí, fica mais fácil de fazer a conta.

P – Fica mais fácil, não é? Quer tentar fazer de novo?

A₈ – (...) 234.

P – Como você fez?

A₈ – Agora eu arredondei para 100 o 99, e somei mais 100 que ficou 200, 235, aí, eu tirei 1, ficou 234.

P – Será que você consegue fazer a mesma coisa com esse número maior? Com a quantidade de 1035 mais 999.

A₈ – Dá 2000, 2034.

P – Como você fez?

A₈ – Eu arredondei o 999 para 1000.

P – Igual você fez no primeiro?

A₈ – É.

Entre as crianças entrevistadas apenas as de 5ª série que apresentavam bom desempenho conseguiram chegar ao resultado da operação utilizando cálculo mental, entretanto, em alguns momentos, foi necessária a intervenção da pesquisadora. Por estarmos a todo o momento em contato com as tecnologias como, por exemplo, os computadores e calculadoras, imaginávamos que quando as crianças fossem questionadas sobre outras maneiras de resolver as contas mencionariam as calculadoras, mas de todas as crianças entrevistadas em nossa pesquisa, apenas duas desse grupo mencionaram ser possível resolver com calculadora.

P – Tem outro jeito de resolver essas contas sem ser como aprendemos na escola?

A₁ – Dá para fazer na calculadora.

P – Na calculadora também dá?

A₁ – Dá. É mais rápido.

Analisando o exposto, evidenciamos a insegurança das crianças no momento de emitir uma resposta totalmente sua, sem o amparo ou aprovação de outros, indício de carência de autonomia na aprendizagem. Notamos também a ausência de uma reorganização pessoal do conhecimento, o que nos levou a indagações, para cujas respostas nossa pesquisa não possui dados suficientes para responder: a ausência de reorganização pessoal do conhecimento deve-se ao fato de o seu desenvolvimento cognitivo não lhe permite, no momento, aprender determinado tema; ou ainda, ao processo de ensino a que foi submetida não lhe possibilitou a construção desse conhecimento.

Outro aspecto fundamental é a educação para a cidadania. Não podemos afirmar que existe conteúdo específico de Matemática para a cidadania, todavia, quando a criança é capaz de efetuar cálculos mentais e ter confiança nos resultados obtidos, ela está exercendo sua cidadania “matemática”. É com discussões e troca de idéias que a criança vai desenvolvendo a auto confiança, fator indispensável para que ela se aventure em experiências matemáticas fora do contexto escolar:

A falta de autonomia (heteronomia) reflete-se no desempenho profissional e no exercício da cidadania do indivíduo. Matemática é um poderoso instrumento de compreensão do mundo, e a interpretação adequada de seus conceitos, aliada a habilidade de efetuar cálculos simples mentalmente e estimar quantidades (pelo menos a ordem de grandeza), nos torna aptos para exercer nossa cidadania de forma mais imediata. É esta habilidade (e a confiança nela) que nos encoraja a duvidar, a questionar e a apresentar argumentos matemáticos baseados em estimativas [...]. Pensar matematicamente e operar mentalmente possibilitam a resolução de problemas que, apesar de serem na sua maioria de solução simples, são importante para a nossa sobrevivência [...] (NOGUEIRA; ANDRADE. 2004, p. 25).

Entendemos o cálculo mental como uma via de acesso à compreensão e à construção do algoritmo convencional, ao mesmo tempo em que funciona como ferramenta de controle do

mesmo. Contudo, para que isso seja possível é necessário que o cálculo mental se torne automático, liberando a criança para a construção de um novo conhecimento matemático (PARRA, 1996).

4.3 A técnica do “vai um”

Para investigarmos se as crianças compreendiam que a técnica do “vai um” se fundamenta no Valor Posicional e utiliza as propriedades do Sistema de Numeração Decimal, propusemos a resolução de duas contas de adição: $135 + 99$ e $1035 + 999$. Entre as cinco crianças de terceira série, com bom desempenho escolar, quatro chegaram corretamente ao resultado. A única que não obteve o resultado correto efetuou as duas operações como sendo de subtração (o que acreditamos deva-se a falta de atenção). A análise dos protocolos mostra que as crianças de terceira série que apresentavam bom desempenho em matemática compreendiam a organização espacial do algoritmo e sabiam identificar as classes e ordens do sistema de numeração decimal (unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar) conforme atestou a fala de C_1 :

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 135 \\ + 99 \\ \hline 234 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ + 1035 \\ + 999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

C_1 – 999 mais 1035, começo pela unidade, de novo e faço 5 mais 9 igual 14, sobe “um” aqui. 3 mais 1, 4. 9 mais 4, 13, sobe “um” em cima do 0. 1 mais 0, 1, mais 9, 10, sobe “um”. 1 mais 1, 2. Então, 1035 mais 999 igual 2034.

P – Esse “um” que você está “subindo” aqui, é “um” o quê? Não posso pôr ele lá embaixo, pois deu 14?

C_1 – Não, porque daí fica aqui 14, então, tem que somar esse, com esses dois para ver o que é que dá (*somar 1 dezena as 12 já existentes*).

P – E esse “um” é o que mesmo?

C_1 – A dezena.

P – O que sobe aqui? (Aponto para o 1 em cima da dezena e ele confirma.) E o que sobe aqui? (Aponto para o 1 sobre a centena.)

C₁ – A centena (continua resolvendo).

O mesmo pode ser observado em C₂:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 135 \\ +99 \\ \hline 234 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 1035 \\ +999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

C₂ – 9 mais 5 daí, você junta tudo, daí, dá 14. Você bota o 4 aqui e não pode deixar, é, botar tudo junto na unidade. Daí, bota lá na dezena. Daí, 3 mais 1 dá 4, 4 mais 9 dá 13. Daí, o 3 bota aqui e o 1 bota lá na centena. Daí o 1 mais 1 da centena dá 2. Que daí dá 234.

Quando perguntamos a C₁: “esse ‘um’ é o que mesmo?”, ele respondeu simplesmente “A dezena”. O fato de verbalizarem corretamente as classes: unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar, não confirma que C₁ e C₂ realmente compreenderam que o algarismo de uma determinada classe do Sistema de Numeração Decimal representa a quantidade ali existente. Por exemplo, no número 135, o algarismo 3, colocado na casa das dezenas, representa 3 dezenas, ou seja, 30 unidades. No caso de C₁ e C₂ verificamos que se referem às classes, e não à quantidade existente em cada uma delas.

Dentre as crianças de terceira série, com bom desempenho, C₄ se destacou por conseguir elaborar uma hipótese explicativa que mais se aproximava da compreensão da técnica do “vai um”.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 135 \\ +99 \\ \hline 234 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 1035 \\ +999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

C₄ – Essa deu 1035 mais 999, daí, é 5 mais 9, dá 14. Daí, 4 mais 9, deu 13. Aí, aqui ficou 1 mais 9,10. Aqui, 1 mais 1, 2.

P – Uma criança que eu entrevistei colocou o 1 do lado do 4, deixando 14 aqui (*na coluna das unidades*), ela não colocou o 1 aqui em cima como você colocou. Será que está certo o que ela fez?

C₄ – Fica errado.

P – Por que fica errado, você consegue explicar?

Eu não entendi por que vocês fazem diferente.

Por que é que o dela deu errado?

C₄ – Porque aqui, ó, aqui não pode colocar. Só se for assim, 10 mais 4, tem que colocar assim: aqui embaixo tem que colocar o 10. Se for só esse número pode colocar (*referindo-se a 4 unidades*), mas se não for, não pode.

P – E esse “um” que você está subindo?

Que você fala que vai aqui em cima, é “um” o quê?

C₄ – É uma, é a dezena desse número (*referindo-se ao “1” das 14 unidades*).

P – Em todo lugar aqui é uma dezena também?

C₄ – Não, esse é milhar, dezena, centena e unidade.

P – E esse que foi aqui?

C₄ – É a dezena do 3 (*referindo-se ao “1” das 13 dezenas*).

P – E esse que foi aqui em cima?

C₄ – É a dezena do 0 (*referindo-se ao “1” das 10 centenas*).

Ao tentar explicar que o algarismo máximo que poderia ser colocado em cada ordem era o nove, **C₄** não o fez de maneira adequada (como pode ser constatado no quinto parágrafo de sua fala), indicando que o sistema de dezenas ainda não estava bem sedimentado. Contudo, sua hipótese explicativa caminhava na direção correta, pois compreendia a possibilidade de decompor as 14 unidades e reagrupá-las em grupo de dez unidades (no momento em que decompõe 14 unidades em “10 + 4”), corroborando o estudo de Kamii (1995) segundo o qual a construção do sistema de dezenas ocorre gradativamente durante o período compreendido entre a segunda a quinta série.

Os protocolos das crianças de terceira série que apresentavam desempenho insatisfatório de aprendizagem em Matemática, indicaram suas inseguranças ao explicarem a técnica do “vai um”, e devido à sua incompreensão, não conseguiam chegar a uma resposta satisfatória, conforme pode ser verificado na reação de **C₈**, apontada no fragmento abaixo. Ao lhe

perguntar o que era esse “um” que sobe, não obtivemos resposta alguma. Diante de seu silêncio, e na incerteza de que C_8 tinha conhecimento acerca do questionamento que lhe fizemos, no decorrer da entrevista voltamos à questão:

$$\begin{array}{r} 135 \\ +99 \\ \hline 235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2035 \\ +99 \\ \hline 2134 \end{array}$$

P – E esse “um” que você está “subindo” aqui, quando faz a continha, é “um” o quê?

Uma outra criança que eu entrevistei disse que quando dá 14 tem que colocar o 14 aqui (*aponto para coluna das unidades*).

Naquele momento, C_8 já havia efetuado as duas operações de adição, e o 14 ao qual nos referimos é o resultado da soma das unidades da primeira adição, que ele considerou como sendo 15 unidades. A nossa intenção primeiramente foi investigar sua compreensão quanto à técnica do “vai um” e também alertar para o erro da soma das unidades, no entanto, C_8 continuou conversando normalmente, sem perceber o erro:

C_8 – Não pode deixar os dois números. Ponha 4, e aqui, ponha 1 (*aponta para coluna das dezenas*).

P – E esse “um” que vai para cima, é “um” o quê?

Como podemos perceber na adição de 135 a 99, C_8 não colocou o “um” que representa as dez unidades a serem somadas às outras já existentes na coluna das dezenas, e provavelmente, por não visualizar esse “um”, no momento da resposta, ele se referiu ao “um” da centena. Novamente, percebemos ações automáticas desprovidas de significados. Continuando a conversa, C_8 afirmou:

C_8 – Vai para cima, depois fica 2 (*nesse momento, a criança adiciona o “um” que subiu com uma centena já existente na coluna das centenas*).

P – Você falou para mim que tem unidade, dezena e centena. A casinha da unidade, a casinha da dezena e a casinha da centena. Eu entendi! Então esse “um” que vem aqui em cima é uma unidade? (*Referindo-me ao 1 colocado na coluna das centenas.*)

C₈ – É.

Não, tirou da unidade e agora virou centena, depois fica 2. Junta mais 1 pra somar, abaixa o 2.

P – E quando está aqui? (*Apondo para coluna das dezenas.*) É uma centena também? Porque a outra criança me falou que era a mesma coisa daqui.

C₈ – Não, aí é a dezena. Debaixo de dezena fica dezena.

Apesar de saber que o número composto por três dígitos contém a casa das unidades, das dezenas e das centenas, **C₈** não conseguia explicar a operação por ela realizada e mesmo quando tentamos lhe proporcionar um conflito cognitivo, ao mencionar que outra criança procedera de forma diferente, não conseguimos direcionar sua atenção para o resultado da adição de 5 e 9 que segundo ela, resultara em 15. Voltamos a questionar sobre o “um” que “sobe” (no terceiro parágrafo da fala de **C₈**), e pela terceira vez não obtivemos uma resposta, nem sequer uma tentativa, mesmo que errada, de explicação. Tentamos novamente reformular a pergunta (no 5º parágrafo da fala de **C₈**) com o intuito de que **C₈** se aventurasse na reformulação de uma hipótese explicativa. Naquele momento, constatamos sua dependência do arranjo espacial do algoritmo para elaborar suas respostas, pois quando perguntei se o “um” que “vai” em “cima” das centenas era uma unidade, ele se confundiu ao tentar responder, primeiramente afirmou que sim, em seguida reformula sua resposta e concluiu que “tirou da unidade e agora virou centena”.

C₇ é outro exemplo, podemos notar que sua ação é inconsciente e totalmente dependente, quando afirmou resolver o algoritmo como a professora ensinou, não sendo capaz de explicar sua ação.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1} \overset{1}{3} 5 \\ + 99 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1} \overset{1}{0} \overset{1}{3} 5 \\ + 999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

P – Esse “um” aqui (*aponto para as 10 unidades que ela colocou na casa da dezena,*) por que você o subiu aqui?

C₇ – Por que não pode pôr junto.

P – Uma outra criança que eu fiz entrevista com ele colocou tudo aqui embaixo (*me refiro a deixar as 14 unidades na coluna das unidades*). Daí fica errado?

C₇ – Não sei. A professora ensinou tudo assim. Que não pode por tudo junto.

P – Não pode por? E esse “um” que vai aqui, o que é?

C₇ – É 1 desse 14.

Ao afirmar que não sabia explicar o porquê de não poder colocar 14 unidades não coluna das unidades, **C₇** confirmou, mais uma vez, as constatações feitas por Kamii (1995), para quem a construção do sistema de dezenas se dá no decorrer da segunda à quinta série do ensino fundamental. No caso, **C₇** entendia o número 14 apenas como 14 unidades, ela ainda não dominava suficientemente o sistema de unidades para poder lançar mão da decomposição dessas unidades e reagrupá-las em 1 dezena e 4 unidades. É preocupante constatar, na fala de **C₇**, a passividade e a falta de autonomia quando relatou que procedia como “a professora ensinou”.

Outro aspecto que confirma que **C₇** ainda não construiu o sistema de dezenas pode ser observado no quinto parágrafo da transcrição (“é 1 desse 14”). Para ela, o 1 e o 4 são números distintos. Tanto Lerner (1995) como Kamii (1995) afirmam que este fato ocorre devido à inserção errônea do algoritmo nas séries iniciais.

As crianças que apresentavam bom desempenho de aprendizagem em Matemática, que pertencem à quinta série do ensino fundamental se aventuraram na construção de algumas hipóteses explicativas, entretanto, percebemos que apesar de terem trabalhado com o Sistema de Numeração Decimal ao longo das quatro primeiras séries do Ensino Fundamental, ainda apresentavam dificuldades em fazer conexões entre conceito e procedimento. A técnica do “vai um” ainda não era compreendida ao ponto de ser explicada, como podemos notar no fragmento da entrevista de **A₁**:

$$\begin{array}{r} 135 \\ - 100 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1035 \\ - 1000 \\ \hline 2034 \end{array}$$

P – E vale quanto esse “um” que vem aqui?

A₁ – Vale 10.

P – 10?

A₁ – 10 ou 1, tanto faz.

P – Ah?

A₁ – Eu coloco como 1, mas se a gente colocar 10 também serve, daí vai subindo.

A resposta dada por **A₁** não nos permite afirmar se ela realmente entendeu que as dez unidades são trocadas por uma dezena, então, durante a entrevista, retomamos a mesma questão, mas dessa vez pedimos que ela representasse o “um” que sobe e o quatro do quatorze com um desenho de bolinhas:

P – Se fosse para a gente fazer as bolinhas representando esse número que você colocou aqui, o 14, o 4 que fica mais esse 1 que sobe, você conseguiria fazer para mim?

A₁ – Colocar 14 aqui?

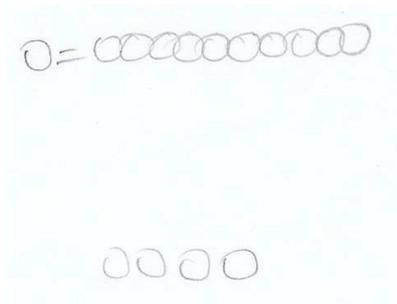
P – A outra criança fez desenhando para mim. Ela mostrou assim: olha, eu tenho 14, então desses 14 fica 4...

A₁ – E sobe 1.

P – E esse 1 sobe? Você conseguiria fazer em desenho também, como ele fez?

A₁ – Ah, esse eu não sei se eu consigo é mais difícil, mas eu vou fazer.

P – Posso ver como ia ficar?



A₁ – Fazer o 1. Aqui é o 1, que também pode usar como 10, e aqui, o 4.

P – Para dar o 14?

A₁ – É.

A₁ sabia operar com o algoritmo da adição, no entanto, o conceito do procedimento que executava ainda não tinha significado real para ela. Efetuava as “contas” inconscientemente, faltava-lhe estabelecer as conexões necessárias para que ocorresse a construção do conhecimento. Diante dessa representação feita por ela, podemos afirmar que a resolução do algoritmo aconteceu “mecanicamente” desprovida de conhecimento, dito de outra forma, **A₁** não entendia que a base do dispositivo que utilizava é o Sistema de Numeração Decimal. Outro exemplo da falta de significado pode ser observado quando pedimos a **A₂** que representasse o 4 que “fica” e o 1 que “sobe”:

P – Esse “um” que sobe aqui é 1...?

A₂ – É 1 do 14.

P – 1 do 14?

A₂ – Porque não pode colocar o 1 aqui (*aponta para as unidades*).

P – Se fosse para representar em conjunto de bolinha, esse 4 e esse “um” que sobe aqui...

A₂ – 14?

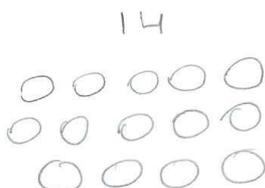
P – Para dar o 14. Como que você representaria?

A₂ – Faz 14 bolinhas?

P – É, fazer a representação desse valor que fica e desse que vai. Do 14. Porque nós o separamos em partes. Ficaram 4 e subiu 1, não foi? Então, para fazer um conjunto com 14 e depois mostra o 4 que ficou e o 1 que subiu. Como ficaria? Você sabe me ajudar a fazer isso?

A₂ – Aqui no 14 eu faria 14 bolinhas.

P – Faz então para podermos ver como fica.



A₂ – (...) 14 bolinhas.

P – A outra criança que eu entrevistei fez assim, separou aquele “um” que foi daquele 4 que “ficou”. Aqui, do jeito que você colocou (*aponto para as 14 bolinhas desenhadas em um único grupo*):



A₂ – Esse daqui é os 14. Esse daqui é o 1 que subiu, e esse é o 4 que ficou.

P – Então esses conjuntos aqui...

A₂ – Vai dar o 14.

P – Tem a mesma quantidade?

A₂ – Ahan! Não tem a mesma quantidade de bolinha, né!

P – É que a outra criança falou para mim que tinha que ter a mesma quantidade de bolinhas.

A₂ – Não precisa, se colocar o 1 aqui na frente, vai dar o mesmo 14 do mesmo jeito.

A hipótese explicativa de **A₁** evidenciou que, embora essas crianças sejam capazes de realizar com êxito os procedimentos algorítmicos não compreendiam o conceito matemático nele envolvido, como já mencionado, não o relacionavam com o Sistema de Numeração Decimal que o embasa.

Nenhuma das crianças fez uma representação adequada da quantidade, e três crianças com desempenho insuficiente em Matemática afirmaram não saber como fazer o desenho para mostrar o “um” que “sobe” e o quatro que “fica”. Novamente, a criança entendeu o 1 e o 4 como sendo números distintos, desprovidos de significados.

A₄ nos trouxe um dado que até o momento outra criança não abordara e que ela denominou de “regrinha importante”.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}35 \\ + 099 \\ \hline 234 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{1}035 \\ + \overset{0}{0}999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

A₄ – Uma regrinha importante é que o zero à direita sempre vale, só o zero à esquerda, antes do número, que não vale. Pode colocar quantos zeros quiser aqui (*aponta para a esquerda do número*), para a esquerda que o número vai ter o mesmo valor, mas se colocar aqui (*aponta para a direita do número*), ele vai mudar.

As crianças de quinta séries que apresentavam desempenho de aprendizagem insuficiente tinham hipóteses explicativas semelhantes às hipóteses anteriormente mencionadas, o que pode ser observado na explicação de **A₈**:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}4\overset{1}{3}5 \\ + 99 \\ \hline 234 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{1}0\overset{1}{3}5 \\ + 999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

P – Esse “um” que vai em cima é “um” o quê?

A₈ – É tipo assim, a unidade somando vai dar mais que 10, então vai 1 lá em cima, igual aqui deu 14, aí, vai 1 lá em cima e fica o 4 aqui embaixo.

[...], aí, aqui a mesma coisa, soma as unidades e cola 1 lá em cima, aí, soma as dezenas.

Novamente a criança tinha conhecimento sobre como efetuar o algoritmo da adição, o que pode ser observado quando ela afirmou que deveria somar as unidades, depois as dezenas, no entanto, o sistema de dezenas ainda não foi totalmente compreendido por ela, dificultando a reformulação de uma explicação adequada do “um” que “sobe”. No caso de **A₆** e **A₇** podemos

dizer que seus atos eram totalmente “mecânicos”, devido à carência de respostas à contra-argumentação:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 135 \\ + 99 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 1035 \\ + 999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

P – Esse número que você põe aqui em cima, é “um” o quê?

A₆ – É daqui, 9 mais 5 dá 14, não pode colocar tudo aqui embaixo então coloca 4 aqui embaixo e 1 aqui em cima.

P – Mas é 1 só. Por que quando ele esta em baixo com o 4 dá 14?

A₆ – É, o 1 é 1, e o 4 é 4.

$$\begin{array}{r} a) \overset{1}{\uparrow} \\ 135 \\ + 99 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \overset{11}{\uparrow} \\ 1035 \\ + 999 \\ \hline 2034 \end{array}$$

P – Esse risquinho que você está pondo aqui em cima, o que é?

A₇ – É o número 1.

P – É “um” o quê?

A₇ – O número 1 que subiu.

P – A outra criança que eu fiz entrevista colocava aqui embaixo, o 1 do lado do 4.

A₇ – Não, do jeito que eu faço coloca lá em cima.

P – Não pode colocar? Será que a criança fazia errado?

A₇ – Não. Minha professora me ensinou assim.

P – E esse “um” que sobe lá, é “um” o quê?

A₇ – É 1, por exemplo, aqui no 9 mais 5 deu 14, então, fica o 4 e sobe o 1.

A análise dos resultados obtidos a partir dessa estratégia aponta: problemas de compreensão dos conceitos de número e algarismo, o que pode ser confirmado em vários momentos do

relato das crianças, tanto nas de quinta quanto nas de terceira, com bom desempenho ou com desempenho insuficiente na aprendizagem Matemática. O que muda é apenas a maneira de se expressar, particular de cada criança, por exemplo, “é o 1 desse 14”, “é, o 1 é 1 e o 4 é 4”, “o número 1 que subiu”.

Outro fato importante é a falta de conexão entre conceito e procedimento, nenhuma criança entrevistada conseguiu explicar que para operar corretamente o algoritmo da adição devemos ficar atentos às regras que são necessárias seguir. Apesar de saber fazê-las, sua ação não é consciente a ponto de entender que tais regras estão fundamentadas no Sistema de Numeração Decimal. Comprova essa afirmação o fato de elas não terem emitido resposta adequada quando indagamos o que era o “um” que “subia”.

Percebemos também, ao longo das entrevistas, que elas manifestavam muita insegurança e falta de autonomia, o que pode ser confirmado na afirmação de C₇: “a professora ensinou tudo assim”, e na ausência de argumentação das crianças entrevistadas, o que nos reporta aos estudos de Kamii (1995a-b). Corroboramos com a autora quanto à necessidade de propiciar à criança tempo suficiente para a construção do sistema de unidade, para que não fique prejudicada a construção do sistema de dezenas, mas para isso a criança precisa ter autônoma em sua educação, pois a construção das relações hierárquicas depende da sua própria ação mental.

Assim como exposto no estudo de Lerner (1995), constatamos que as crianças têm dificuldades em entender que o mesmo algarismo serve para escrever vários números, dito de outra maneira, o 1 colocado na ordem das unidades é 1 unidade, no entanto, quando colocado na ordem das dezenas, passa a ser 1 dezena, ou seja, 10 unidades. Concordamos quando a autora afirma que um sistema de numeração tão complexo quanto o nosso deve ser apresentado para as crianças de diversas formas, na tentativa de proporcionar a elas a compreensão dos seus princípios e propriedades.

4.4 A técnica do “empresta um”

Na investigação de como as crianças de terceira série, que apresentavam bom desempenho escolar, compreendem a subtração com reserva que, como a estratégia anterior, fundamenta-se no Valor Posicional, propusemos a resolução de três contas: $63 - 54$, $3058 - 2379$ e $2014 - 1989$. Iniciamos pela análise da fala de C_1 . Fica visível, em sua explicação, que a regra para a resolução do algoritmo foi memorizada (o que pode ser constatado no primeiro parágrafo da transcrição) e que essa criança tem uma compressão parcial do procedimento utilizado, pois consegue perceber o “um” que emprestou como uma dezena:

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3058 \\ - 2379 \\ \hline 0689 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2014 \\ - 1989 \\ \hline 0025 \end{array}$$

C_1 – 63 começa de cima e pela unidade. 3 não dá pra tirar da 4 ,então, vai pegar emprestado do 6. Então fica 13.

P – Quanto que pega emprestado do 6?

C_1 – Pega só 1, que aumenta uma dezena.

Outra evidência de que a compreensão do procedimento é parcial pode ser encontrada na fala de C_3 :

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3058 \\ - 2379 \\ \hline 0679 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2014 \\ - 1989 \\ \hline 0025 \end{array}$$

C_3 – Agora vai ter que emprestar. Esse vai ficar valendo 5, e esse vai ficar valendo 13, porque emprestei uma dezena aqui para o 3 (*refere-se a 6 dezenas e as 3 unidades do numeral 63*). Daí, $13 - 4$ (...) daí sobrou 9.

Aqui vai ter que emprestar de novo. Aqui, vira 4 (nesse momento, esta se referindo a cinco dezenas da segunda subtração) e aqui 18 (referindo-se as oito unidades somadas as dez unidades). Daí 18 – 9, 9.

P – Daqui pra cá empresta “um” o quê? (Faço referência ao primeiro parágrafo citado)

C₃ – Uma dezena.

Daí, aqui como não tem nada, não dá pra tirar (referindo-se ao 0 da centena). Vai ter que emprestar uma dezena daqui, daí, fica valendo 2, aí, aqui, vai ficar valendo 10, emprestou 1, vai ficar valendo 9 aqui, e aqui vai ficar valendo 15. 15 tira 7, 8. 9 tira 3... 6.

Esses exemplos confirmam os estudos de Kamii (1995a), nos quais constata que a construção do Sistema de Numeração Decimal ocorre gradativamente no período compreendido entre a segunda e a quinta série do fundamental. No último parágrafo da entrevista de **C₃**, verificamos que ele ainda não conseguia explicar corretamente todas as trocas necessárias para a resolução da “conta”, no momento em que afirmou ter que “emprestar” uma dezena da unidade de milhar para a centena, embora compreendesse bem quando se tratava da troca de 1 dezena por 10 unidades.

Entre todas as crianças que apresentam bom desempenho em Matemática, **C₄** é a única que não arriscou dar uma resposta que explicasse o “um que se pega emprestado”. Mesmo após várias indagações, sempre mudando a forma de perguntar, não obtivemos resposta:

$$\begin{array}{r} 5183 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294188 \\ - 2379 \\ \hline 0679 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19044 \\ - 7929 \\ \hline 0929 \end{array}$$

P – E esse um que você emprestou aqui, você sabe me explicar? A outra criança não conseguiu me explicar o que é.

C₄ – (balança a cabeça, afirmando que não).

Nos protocolos das crianças que apresentam desempenho insuficiente em Matemática, observamos a falta de compreensão ao desenvolverem o algoritmo de subtração. O fragmento

da fala de C₇ nos mostrou que ao lhe ser questionado sobre quanto vale o “um” que se “pega emprestado”, calou-se, pois de algum modo encontrava-se impossibilitado de responder:

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{6}3 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{3}1015.8 \\ - 2379 \\ \hline 0789 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{2}1014 \\ - 1989 \\ \hline 0135 \end{array}$$

P – O que você fez aí? (*Aponto para o risquinho ao lado do 3*)

C₇ – Aqui? Empréstei do 6, porque 3 não dá para tirar 4, daí, aqui ficou 5.

P – E o 3 ficou valendo 4?

C₇ – Ficou valendo 13.

P – Mas você não emprésteu 1 para cá? (*Aponto para o risquinho ao lado do 3.*)

É que a outra criança que eu entrevistei me falou que quando a gente empresta 1 para cá, aí, junta com esse número aqui (*aponto para o número 3*) para poder ficar 4. É isso?

C₇ – [...]

Quando lhe perguntamos se o “um” (que se “pega emprestado”) junto com o três, ao invés de dar treze, resulta em quatro, instalamos uma situação de conflito cognitivo (o que pode ser visto no penúltimo parágrafo do fragmento da conversa com C₇) na tentativa de levar a criança refletir sobre o que sabia e nos dar uma resposta. Entretanto, não obtivemos retorno diferente do anterior:

P – Aí, esse 1 que você emprésteu aqui, é 1 o quê?

C₇ – O 6 que empresta para o 3, porque não dá pra tirar 4.

P – E esse “um” que ele emprésteu é “um” o quê? Você sabe explicar para mim o que é esse “um” aqui?

Você falou que aqui é a “casinha” da unidade (*aponto para “casinha” das unidades*). É só uma unidade que eu emprésteo?

A outra menininha me falou que era uma unidade que eu empréstava. Você acha que o que ela disse está certo?

C₇ – (Balança a cabeça, afirmando).

Ficou evidente que as ações que C₇ desenvolveu ao efetuar o algoritmo da subtração eram inconscientes e como não conseguia responder ao questionamento, apenas concordava com a resposta sugerida pela pesquisadora. Apesar de conseguir identificar um algarismo para cada classe ou ordem do Sistema de Numeração Decimal a criança não associava nenhuma quantidade a esse algarismo, prova de que eles eram considerados “etiquetas verbais” (GOLBERT, 2002, p. 75).

Para efetuar o algoritmo da subtração com reserva, a criança precisou decompor unidades de milhar em centenas, centenas em dezenas e dezenas em unidades, isso exigiu o conhecimento das propriedades do Sistema de Numeração Decimal. Apesar de a criança identificar no arranjo espacial do algoritmo, as unidades, as dezenas e as centenas, não sabia (no momento de decompor o valor para “emprestar”) se o que se “empresta” é uma unidade, uma dezena ou uma centena. C₉ deixou claro, em sua explicação, essa dificuldade de definir quanto vale o “um” que se pede emprestado:

Handwritten subtraction problems:

$$\begin{array}{r} c) \quad \cancel{1}3 - \\ \quad 54 \\ \hline \quad 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 210914 \\ 2379 - \\ \hline 28778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 191044 \\ 1989 - \\ \hline 0035 \end{array}$$

P – Esse um que você está falando em “emprestar” aqui é “um” o quê? Por exemplo, aqui no 4. Eu empresto o que para o 4? (*Refiro-me a quatro unidades da conta e*)

C₉ – Uma unidade.

P – E quando eu empresto daqui desses 2 para esse aqui, o que eu empresto? É uma unidade também?

C₉ – Não, aqui é uma centena e aqui eu empresto uma dezena. 10 menos 8 sobra 2, daí 9 menos 9 não sobra nada. 1 menos 1 não sobra nada. Aqui, agora vou pôr o resultado do “e”.

O protocolo de C₆ merece destaque por ser a única criança de terceira série que apresentava desempenho insatisfatório em Matemática a efetuar o algoritmo de subtração como se ela fosse uma operação comutativa, subtraindo o menor número do maior, pertença esse ao minuendo ou subtraendo. Na terceira conta de subtração (e), a criança deu indícios de saber

que alguma coisa deveria ser feita para que o valor do minuendo fosse maior que o do subtraendo, porém, não construiu o conhecimento necessário para realizar uma operação de subtração com compensação e, então, a partir da dezena continuou subtraindo o menor algarismo do maior:

$$\begin{array}{r} 963 \\ - 54 \\ \hline 917 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) 3058 \\ - 2379 \\ \hline 7329 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e) 2014 \\ - 1989 \\ \hline 1985 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f) 100 \\ - 24 \\ \hline 124 \end{array}$$

Passamos à análise dos protocolos das crianças de quinta série que apresentavam desempenho satisfatório em Matemática, os quais demonstram que suas ações eram automáticas e resultavam em explicações incompletas. Estas respostas podem indicar que o conhecimento sobre o conceito necessário para a compreensão da operação de subtração com reserva ainda se encontrava em processo de construção, como nos mostra o fragmento da entrevista de **A₁**. Novamente a criança considerou cada algarismo do numeral como sendo um número em separado, não relacionando o número à sua quantidade:

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3058 \\ - 2379 \\ \hline 0679 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2014 \\ - 1989 \\ \hline 0025 \end{array}$$

P – Esse “um” que põe aqui aí vale quanto? (*Uma dezena que foi emprestada para o três.*)

A₁ – Eu coloco como 10, mas tem quem faz 10 mais esse aqui, que tem aqui (*referindo-se ao 3*), ou pode colocar como 1, daí. soma 1 e o 3. que dá 13. Então. é a mesma coisa.

P – Como assim?

A₁ – O 1 e o 3 atrás.

A fala de **A₄** também elucida que o sistema de dezenas ainda não está sedimentado, todavia sua explicação sobre o valor do “um” que “se pede emprestado” caminhava para a resposta correta. Podemos notar que **A₄** percebia o “1 como 10”, o que pode ser constatado no último parágrafo do fragmento transcrito:

$$\begin{array}{r} \overset{5}{\cancel{6}3} \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3058 \\ - 2379 \\ \hline 0679 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2014 \\ - 1989 \\ \hline 0025 \end{array}$$

P – Esse “um” que nós emprestamos para o 3, é “um” o quê?

A₄ – É um, aqui ó, por exemplo...

P – Porque se eu emprestei “um”... (*tento refazer a pergunta e sou interrompida pela criança*).

A₄ – Fica 4, não é?

P – É!

A₄ – Então, mas aí você tem que somar ao número, não a quantidade do número. Tem que somar ao número, aí vai valer 13, não é?

P – Então esse “um” que eu emprestei não é 1?

A₄ – Não, é 1 tecnicamente. É praticamente 10.

Esse fragmento da entrevista de **A₃** mostra nitidamente que apesar de identificar as ordens e as classes do Sistema de Numeração Decimal, as crianças de quinta série ainda não tinham consciência deste conhecimento matemático que lhes possibilitasse responder corretamente às compensações envolvidas no algoritmo da subtração. **A₃** tentou responder quanto valia o “um” que “se pega emprestado”, contudo, ainda não conseguia obter êxito em sua explicação:

$$\begin{array}{r} \overset{5}{\cancel{6}3} \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}0} \overset{1}{\cancel{5}4} \overset{1}{\cancel{8}8} \\ - 2379 \\ \hline 0679 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{2}0} \overset{1}{\cancel{1}0} \overset{1}{\cancel{4}4} \\ - 1989 \\ \hline 0025 \end{array}$$

P – Esse numerozinho emprestado aqui (*aponto para o 1 ao lado do 3*), vale quanto?

A₃ – É que você corta ele. No caso aqui, você vai dar 1 para unidade, daí, essa dezena fica com 1 a menos, porque emprestou para o outro.

P – Aí, eu empresto quanto para o outro?

A₃ – 1.

P – Uma unidade, uma dezena, uma centena. “Um” o quê? (*A criança já mencionara as ordens anteriormente.*)

A₃ – É uma unidade.

A₂ assegurou que toda dificuldade do cálculo da subtração se devia ao modo como ela estava disposta, com os números menores no minuendo e os maiores no subtraendo, tendo assim que ficar “emprestando” da ordem imediatamente superior para compensar a anterior:

A₂ – [...] essa conta aqui, olha, o maior tá embaixo e o menor tá em cima. O certo seria o menor tá embaixo e o maior tá em cima, daí, dá para fazer a conta certinha. Só que como está aqui vai ter que emprestar [...].

A análise dos protocolos das crianças de quinta série que apresentam desempenho insuficiente em Matemática evidenciou que sua compreensão sobre a compensação na operação de subtração não difere daquelas já relatadas:

$$\begin{array}{r} 5 \\ \cancel{1}3 \\ - 54 \\ \hline 08 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21014 \\ \cancel{3}0\cancel{1}8 \\ - 2379 \\ \hline 0779 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11010 \\ \cancel{2}0\cancel{1}4 \\ - 1989 \\ \hline 0125 \end{array}$$

P – Esse “um” que eu vi você emprestando várias vezes na conta de menos, é “um” o quê?

A₉ – Este 1 aqui?

P – É.

A₉ – É para emprestar para o 0.

P – Por que a gente empresta aqui? (*Aponto para o “um” ao lado do 3.*) Teve uma criança que eu entrevistei que falou assim para mim: esse que a gente empresta aqui é 1, somado com esse 3 dá 4. Não é 4, então?

A₉ – Não.

P – Por que ela falou para mim que dava 4. Daí 4 dá para tirar do outro 4.

A₉ – Não, é aqui olha, você emprestou 1 para o 3, ficou valendo 13, daí, 4 tem que somar até chegar no 13. Olha aqui. Você viu o resultado que deu aqui, deu 1 para o 3, ficou valendo 5. Ficou zero, 5 tira 5, fica zero.

A₉ ainda passava pelo processo de construção do sistema de dezenas, para ela não estava claro que quando o minuendo é menor que o subtraendo tem que compensar essa diferença “emprestando” uma dezena para as unidades já existentes. Ela ainda não compreendia que uma dezena é trocada por dez unidades que são somadas às unidades já existentes, no nosso caso, a 3 unidades. O 1 e o 3 do número 13 são compreendidos como sendo distintos, uma unidade e três unidades, contudo quando juntos passam a ser treze unidades. São algarismos desprovidos de quantidade real. **A₆** e **A₇** também compreendem da mesma forma que **A₉**:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 13 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2914 \\ - 2379 \\ \hline 0794 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1410 \\ 21014 \\ - 1989 \\ \hline 0025 \end{array}$$

P – Esse um que veio do lado de cá, se somar junto do 3, não dá 4? Não é 1 mais 3?

A₆ – Não.

P – A outra criança me falou que dava 4. Que somava os dois e dava 4.

A₆ – Dessa forma soma os dois junto, aqui não, ele é 13.

P – Então não é 4, é 13?

Esse 1 que vem do lado de cá não é 1 para somar com 3?

A₆ – Não, o 3 aqui você soma junto com o 1, que vai dar 13, aí, vai dar (*para fazer a conta*).

P – Esse “um” que a gente emprestou aqui, é “um” o quê?

A₇ – É 1, por exemplo, o 6 está valendo 6, daí, então para eu conseguir diminuir o 3 menos 4 aí, eu tenho que pegar emprestado de um para dar para emprestar, senão não dá.

P – Porque uma outra criança falou para mim que quando a gente empresta 1 aqui, soma com o 3 e ele fica valendo 4, para poder tira o 4!

A₇ – Não, para mim fica valendo 13, daí, 13 tira 4.

Em nenhum momento as crianças de quinta série tiveram dúvidas quanto ao 3 “virar”13, porém, a justificativa para essa alteração de valor não é clara para elas, pois frente a esta questão afirmam apenas “não dá para tirar, então tem que emprestar ‘um’ do seis”.

A análise dos resultados apontam que as crianças entrevistadas, apesar de utilizarem o algoritmo da subtração, não têm conhecimento do conceito necessário para entender o mecanismo que utilizam. As explicações das crianças de terceira e quinta séries não diferem de maneira significativa, apesar de mencionarem a necessidade de pegar uma dezena emprestada para poder operar (como afirmou **C₁**). não conseguiam finalizar a explicação de forma adequada. O algarismo era percebido desvinculado da quantidade que ele representa em cada ordem, ou seja, o valor relativo era totalmente desconsiderado.

Corroboramos com Lerner (1995) quanto à necessidade de mudar o enfoque que a escola tem dado para o trabalho com as operações, visando propiciar às crianças, uma prática pedagógica que possibilite a (real) construção dos conhecimentos matemáticos.

Consideramos importante lembrar que o sistema de dezenas requer um longo período de tempo para que seja sedimentado. É indispensável proporcionar às crianças condições para essa construção visando a compreensão de conceitos que são indispensáveis para que possam entender o valor do “um” que se pede emprestado.

4.5 A prova real

Durante a entrevista com as crianças colaboradoras, indagamos se seria possível conferir o resultado da “conta” e, se a resposta fosse afirmativa, como deveria ser feita essa confirmação. Ao analisar os protocolos das crianças de terceira série que apresentavam desempenho satisfatório em Matemática, verificamos que elas se confundem ao tentar mostrar como fazer a prova real. C₁ só conseguiu definir o que deveria ser feito após a verificação das duas hipóteses por ela apresentadas, indício de que o conceito do Princípio Fundamental da subtração ainda não estava devidamente compreendido por ele.

P – Se chegasse um amiguinho lá da sua sala e falasse assim: essa continha está certa mesmo? Você saberia responder se ela está certa?

C₁ – Aí, eu não ia ter certeza, mas eu acho que tá certa.

P – E tem um jeito de fazer para comprovar, para ter certeza?

C₁ – Fazendo a prova real.

P – Como faz a prova real?

C₁ – Aqui, tem o 9, então, vai ter que fazer 9 mais 54 ou 9 mais 63. Se for 9 mais 63, dá 54, tá certa, se for 9 mais 54, dá 63, tá certo.

P – Vamos fazer uma vez pra gente ver?

C₁ – Assim, faz 9 mais 63. 9 mais 3, 12 sobe “um”. 1 mais 6, 7. 72, tá errado.

$$\begin{array}{r} - 63 \\ - 54 \\ \hline 09 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + 09 \\ + 63 \\ \hline 72 \end{array}$$

P – A outra criança que eu entrevistei me falou que faz com o 54.

C₁ – Talvez. Tá certo. 54 mais. 9 mais 4, 13. 1 mais.5. 63, tá certo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 09 \\ + 54 \\ \hline 63 \end{array}$$

Em um primeiro momento, C_2 deu indícios de não saber da existência da prova real e afirmou que para saber se a “conta” estava certa teríamos de refazê-la. Entretanto, quando lhe indagamos se havia outro jeito de comprovar, respondeu que deveríamos “desenhar a prova real”:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 135 \\ + 99 \\ \hline 234 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ 234 \\ - 99 \\ \hline 135 \end{array}$$

P – Se chegasse um coleginha seu lá da sua sala e olhasse a gente fazendo essas contas, e visse essa conta aqui, e falasse: essa continha sua está certa mesmo?

C_2 – Tá, porque 9 mais 5 dá 14. Daí, você não pode colocar o 14 tudo junto, tem que empresta 1 lá na dezena. Daí, você conta tudo junto, 1 mais 3 mais 9 daí, 1 mais 3 dá 4. 4 mais 9 dá 13. Bota o 3 e empresta 1 lá na centena. 1 mais 1 da 2, aí, abaixa o 2 e fica 234.

P – E tem outro jeito da gente comprovar se a continha está certa mesmo?

C_2 – Desenha a prova real.

P – Que jeito é a prova real?

C_2 – É assim, ó: você pega 234, só que é de menos agora, daí, menos 99. Faz de ponta cabeça. Daí, se o resultado der 135, quer dizer que a conta está certa.

4 empresta 1 aqui, 14. 4, daí aqui dá 5, aqui ficou 2. 2 não dá para tirar 9, aí empresta 1 lá da centena, daí fica 13, 13 menos 9 dá, 13 menos 9, aha. Não, é 12 aqui, 12 – 9 dá 3. Daí aqui tinha emprestado 1 para dezena fica 1, daí agora abaixou o 1 porque não tem nada para diminuir, daí fica 135, quer dizer que o resultado deu certo.

P – Ah! Assim que é a prova real? E dá para fazer com continha de menos também?

C₂ – Dá só que daí é de mais, é ao contrário.

Diferentemente das demais crianças de terceira série, C₃ demonstrou compreender o Princípio Fundamental da subtração²⁵, pois em sua hipótese explicativa definiu todos os passos da técnica, e durante a resolução, conseguiu perceber seu erro de cálculo, reorganizando-o sem a interferência da pesquisadora:

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad 3058 \\ - 2379 \\ \hline + 0679 \\ + 2379 \\ \hline 3058 \end{array}$$

P – Se chegasse um amigo seu e dissesse: eu estou achando que essa continha não está certa. Você tem certeza que ela está certa? O que você responderia pra ele?

C₃ – Daí eu faço a conta para ver se está certa.

P – Como que a gente faz para ver se está certa?

C₃ – Daí você coloca “mais”. Você não pode coloca esse (*referindo-se a 3058*), porque daí dá mais (*o resultado passa a ser maior do que o minuendo*), então você tem que colocar o resultado e o que tirou aqui (*referindo-se a 2379*), fazer uma continha de mais pra ver se vai dar.

P – (*Depois de algum tempo apenas calculando, ele apaga a conta*) Porque apagou o que aconteceu?

C₃ – Eu fiz a conta errada.

[...] Pronto, agora deu.

A análise dos protocolos das crianças de terceira séries que apresentavam desempenho insuficiente em Matemática apontou que apenas C₉ conseguia explicar como fazer a prova real e resolver a conta corretamente:

²⁵ Em uma subtração de dois números naturais, somando-se a diferença ao subtraendo obtém-se o minuendo.

P – Se chegasse uma coleginha sua lá da sala e visse o que a gente está fazendo e perguntasse: essa conta está certa mesmo? Você tem certeza que ela está certa?

C₉ – Tenho.

P – Se fosse para você comprovar para sua colega que a conta está certa, com você comprovaria?

C₉ – Hum... Agora tá difícil. Ah! Eu comprovaria porque a professora do pré ou da primeira, eu acho, me ensinou que tem que colocar aqui (*referindo-se à organização do algoritmo*).

P – E só isso garante que o resultado está certo?

C₉ – Aí, a gente tira a prova real.

P – Como que é isso? Eu não sei fazer prova real.

$$\begin{array}{r}
 1035 \\
 - 999 \\
 \hline
 999 \\
 \hline
 1035
 \end{array}$$

C₉ – Assim ó o 9 de novo embaixo. Daí, a gente faz agora de menos, 5 menos 9, não dá né, tem que emprestar (*organiza todos os empréstimos*). 15 menos 9 sobra 5. Não, não sobra 5 não. Sobram quantos? É sobra 5. Aqui sobra 5. Daí não dá, não dá para emprestar desse (*se referindo ao 0*) tem que emprestar desse (*referindo-se ao 2 da unidade de milhar*), esse fica valendo 1, esse 10. Faz um tracinho e põe o 9 em cima, esse daqui fica valendo 13, 13 menos 9 sobra 4. Ah! não, não sobra 4 não, sobra 3. O 9 menos 9 vai sobrar 0, e aqui, 1 menos nada, 1. Daí, a gente olha, se aqui embaixo der o mesmo daqui de cima, a conta está correta.

Das crianças de terceira série que apresentavam desempenho insuficiente, três sabiam que para comprovar se a “conta” estava certa precisavam fazer a prova real, mas ao tentarem demonstrar como deveria ser feito, não conseguiam obter o resultado adequado. No caso de **C₇**, percebemos sua preocupação, o que atrapalhou seu desempenho:

P – Se chegasse alguém lá da sua sala agora e olhasse essas contas e falasse assim: essa conta está certa mesmo? Você saberia dizer se essa conta está certa mesmo?

C₇ – Não.

P – Não? E tem algum jeito da gente comprovar para ver se ela está certa?

C₇ – Faz a prova real, aí dá.

P – A prova real? Como é que faz a prova real?

C₇ – É quando esse (*aponta para o 1989*), daí soma com esse aqui (*aponta para o resultado*), se não der esse (*aponta para 2014*), daí, tá errada a conta.

P – Vamos fazer?

$$\begin{array}{r} 2014 \\ - 1989 \\ \hline 0185 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1989 \\ + 185 \\ \hline 2174 \end{array}$$

C₇ – [...]

P – Daí, quando é a prova real muda o sinal?

C₇ – (*Balança a cabeça afirmando*).

[...] (*continua fazendo quieta até terminar. Depois pára e observa que errou*).

P – Está errada? (*Balança a cabeça, confirmando*). Não deu o mesmo resultado de cima? Por que será que deu resultado errado?

C₇ – Eu acho que eu errei na conta.

P – Será que se a gente refizer ela fica certa? Faz lá no canto (*refez a conta e encontrou outro resultado, também incorreto*).

C₇ – [...]

P – Agora vamos fazer a prova real?

$$\begin{array}{r} 2014 \\ - 1989 \\ \hline 0135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1989 \\ + 135 \\ \hline 2124 \end{array}$$

C₇ – Tá errado de novo (*afirma, ao terminar a prova real*).

P – Está errado de novo! O que será que aconteceu?

C₇ – [...]

P - *(Como não obtive resposta alguma e percebendo que a criança estava nervosa ou preocupada, pedi para que passasse a resolver a outra conta).
Vamos fazer essa última aqui então?*

C₇ quase não conseguiu se concentrar nos cálculos que fazia, devido à preocupação em saber se iríamos corrigir e mostrar para sua professora. Talvez essa preocupação tenha contribuído para os seguidos erros da criança. Essa preocupação e os erros, além de indicarem que possivelmente o conceito não era compreendido por ela, demonstram a dependência da aprovação da professora.

A mesma pergunta sobre como conferir a conta foi feita para as crianças de quinta séries que apresentavam bom desempenho em Matemática, e percebemos que elas tinham maior segurança ao responder à questão proposta:

P – Se chegasse um amigo seu lá da sala e falasse assim: essa conta que você fez aí está certa mesmo?

A₂ – Tá.

P – Tem algum jeito que a gente pode fazer para comprovar se a conta está certa mesmo?

A₂ – Tem.

P – Que jeito que é?

A₂ – Olha aqui embaixo. É 679 mais 2379. Vai dar 5, vai dar 15, vai dar 10, 3058.

$$\begin{array}{r} d) \overset{9}{2} \overset{10}{10} \overset{18}{38} \\ - 2379 \\ \hline 0679 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d, , , \\ 2379 \\ 679 \\ \hline 3058 \end{array}$$

P – Ah!

A₂ - A prova real.

A₁ se atrapalhou um pouco ao tentar explicar como deveria ser feita a prova real, mas efetuou o cálculo corretamente.

P – Tem algum jeito de saber se as contas estão certas ou não?

A₁ – A gente pode pegar esse aqui (234), menos esse aqui (99), ou você pega... ou... inverte a continha, faz de menos.

P – Faz uma para gente ver como é que fica. Para eu poder ensinar para as crianças, eu tenho que aprender também.

$$\begin{array}{r} 234 \\ - 99 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 234 \\ - 99 \\ \hline 135 \end{array}$$

A₁ – Tá certo. Tem que dar número aqui de cima, aí, tá certa a conta.

A₃ foi a única criança desse grupo que afirmou ter que refazer a conta para saber se ela realmente estava correta, não fez menção, em nenhum momento, à prova real, o que nos levou a deduzir que para ela aquela era a única forma de saber se o resultado estava correto.

Ao analisar os protocolos das crianças de quinta série que apresentam desempenho insuficiente em Matemática, verificamos que elas não compreendiam o Princípio Fundamental da subtração, chegando inclusive a afirmar que não sabiam o que fazer para verificar se o cálculo estava correto ou não, como é o caso de **A₆**:

P – Se chegasse um amigo seu da sua sala e falasse assim: essa conta está certa mesmo?

A₆ – Não sei.

P – Não tem algum jeito de saber se as contas estão certas?

A₆ – Não sei.

Dois crianças desse grupo asseguraram que a única maneira de saber se o resultado estava certo seria fazer a conta novamente:

P – E se viesse alguém da sua sala, uma amiga sua e falasse: essas contas estão certas mesmo? Tem jeito de saber?

A₇ – A pessoa tem que conferir, para saber se está certa.

P – Não tem outro jeito da gente saber, só conferindo?

A₇ – É. Para mim eu só sei conferindo.

Apenas **A₈** explicou que para comprovar o resultado da “conta” de subtração deveríamos somar a diferença ao subtraendo para obter o minuendo, e que, caso isso não ocorresse, a operação estaria errada.

Ao analisar o exposto evidenciamos que a compreensão da relação inversa entre adição e subtração ainda se constituía em um obstáculo a ser transposto pelas crianças, que necessitavam de reflexão acerca das ações para que percebessem a reversibilidade existente entre as operações, em outras palavras, elas precisavam perceber que retornaríamos ao ponto de saída se invertêssemos a ordem do caminho percorrido.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diversas pesquisas descritas na seção 2 mostraram que o Sistema de Numeração Decimal não é um conhecimento estritamente social, o que significa, em outras palavras, que o mesmo é construído, e mais, mostraram, também, que esta construção se inicia pelo sistema de unidades, depois pelo sistema de dezenas, culminando com o Sistema de Numeração Decimal, com todas suas classes e ordens. Ainda segundo as pesquisas descritas na seção 2, a construção do sistema de dezenas acontece dos 8 aos 12 anos de idade aproximadamente, isto é, durante o período que compreende a 2^a à 5^a série, razão pela qual nossa pesquisa, que investigou se o ensino da aritmética, com ênfase nos algoritmos convencionais, contribui para a construção do Sistema de Numeração Decimal entrevistou crianças de 3^a série do Ensino Fundamental, fase em que elas já iniciaram a construção do sistema de dezenas, e crianças de 5^a série do Ensino Fundamental, momento de fechamento e consolidação dessa construção.

Os resultados de nossa pesquisa apontam que não houve diferença significativa nas respostas das crianças de 3^a e 5^a séries, pois as mesmas dificuldades de argumentação encontradas pelo primeiro grupo também foram observadas nas respostas do segundo. Percebemos que mesmo quando conseguem resolver as “contas” de adição e de subtração com reserva, parecem apenas ter memorizado as regras mecanicamente, sem entender que os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal estão na base das técnicas operatórias dessas operações. A atuação das crianças indica que o Sistema de Numeração Decimal não está consolidado, e assim, podemos constatar que o ensino da aritmética centrado nos algoritmos não possibilitou avanços significativos no que se refere à efetiva construção do Sistema de Numeração Decimal.

Por outro lado, podemos observar também que, apesar de haverem cursado no mínimo quatro anos do Ensino Fundamental, quando chegam à quinta série, algumas crianças apresentam dificuldades, ou mesmo não sabem como utilizar as técnicas operatórias de resolução das operações aritméticas de adição e de subtração, indicio de que o objetivo da aprendizagem dos procedimentos algorítmicos não foi atingido.

Enfim, se pesquisas anteriores demonstraram que o ensino, com ênfase nos algoritmos, não contribui para o desenvolvimento da autonomia do educando e nem promove o desenvolvimento da capacidade de argumentação, nossa pesquisa aponta que esta ênfase não colabora sequer com a construção do conhecimento matemático, particularmente o que se refere ao Sistema de Numeração Decimal.

Constatamos o distanciamento quase que total entre a aprendizagem dos algoritmos convencionais e os princípios e propriedades do Sistema de Numeração Decimal, o que é, certamente, uma conclusão preocupante considerando-se que a conexão entre essas duas habilidades não se desenvolve espontaneamente, ou seja, a criança que opera adequadamente os algoritmos convencionais da adição e da subtração pode não perceber a sua relação com o Sistema de Numeração Decimal.

Não estamos recomendando, aqui, que o estudo dos algoritmos convencionais seja abandonado, afinal, eles são muito úteis para simplificar as operações matemáticas. Porém, discordamos do ensino que priorize a memorização inexpressiva dos procedimentos, em detrimento da compreensão dos princípios e propriedades que possibilitam seu funcionamento lógico-matemático.

Promover conexão entre procedimento e conceito deve ser um dos principais objetivos da Educação Matemática, entretanto, para que ele seja alcançado, devem-se dispensar atenção especial às variáveis envolvidas nesse processo educativo, como: Qual metodologia deve ser utilizada para promover essa conexão? O livro didático, por ser um instrumento muito utilizado pelo professor, não deveria contemplar as orientações dos PCNs e das atuais pesquisas? O professor, como mediador do conhecimento, não deveria ser munido de subsídios indispensáveis a uma prática escolar que vise à autonomia do conhecimento?

É evidente que essas questões já foram discutidas por outros pesquisadores e muitas propostas já foram feitas, porém, ao detectarmos que as crianças não percebem a relação existente entre o algoritmo convencional e os princípios e propriedades do Sistema de Numeração Decimal, entendemos que essas propostas não foram incorporadas pelo processo educativo. Frente a essa realidade, indagamos o que ainda é necessário fazer para levá-las até os limites das escolas, para que não se tornem estudos cujo objetivo sejam unicamente a obtenção de uma

titulação. Esta é uma questão importante, que nosso estudo não dá conta de responder, porém, pode subsidiar outras pesquisas.

Quanto ao desempenho na aprendizagem da disciplina, segundo avaliação das professoras, das crianças colaboradoras desta pesquisa, não podemos afirmar que ele esteja relacionado com a compreensão do Sistema de Numeração Decimal, o que nos parece é que a classificação das crianças (bom desempenho e desempenho insuficiente), feitas por elas, está voltada para outras variáveis do processo educativo, tais como: “bom comportamento durante a aula”; “organização do caderno”; “conclusão de atividades propostas”; etc.

Urge romper com as concepções equivocadas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática escolar, que têm como conseqüências a reprovação e a evasão escolar. Conforme evidenciou nossa pesquisa, o grande desafio é equilibrar ensino e aprendizagem, a fim de oportunizar a criança as condições para que, tanto os procedimentos convencionais como os conceitos que os fundamentam, possam se constituir em conhecimento real.

Apesar das limitações de nossa pesquisa, em virtude da abrangência do tema abordado, esperamos que ela possa juntar-se a várias outras, relacionadas à mesma temática, com o intuito de fornecer subsídios que fomentem as discussões em torno das questões por nós ressaltadas, despertando o interesse pelo estudo do tema, principalmente no que se refere ao dispositivo convencional e sua utilização de forma consciente e com compreensão.

REFERÊNCIA

- ANDRADE, D.; NOGUEIRA, C. M. I. **Educação Matemática e as Operações Fundamentais**. Maringá: EDUEM, 2005. (Formação de Professores. EAD, 21)
- BARICCATTI, K. H. G. **A Construção Dialética das Operações de Adição e Subtração no jogo de regras Fan Tan**. 2003. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2003.
- BECKER, F. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2003.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. de L. (Orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BONJORNO, R. A.; BONJORNO, J. R. **Matemática: pode contar comigo**. São Paulo: FTD, 2001. v. 3.
- BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. de L. (ORGs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Tendências em Educação Matemática, 9).
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática** - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC: SEF, 1997.
- _____. Programa Nacional do Livro Didático: matemática – Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC: SEF, 2003.
- CALSA, G. C. **Intervenção psicopedagogia e problemas aritméticos no ensino fundamental**. 2002. 297 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2002.
- CARRAHER, T. N.; SHLIEMANN, A. L. A adição e a subtração na escola: algoritmos ensinados e estratégias aprendidas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 64, n. 148, p. 234-242, set./dez.1983.
- CARRAHER, T. N. **O método clínico: usando os exames de Piaget**. São Paulo: Cortes, 1989.
- CARRAHER, T. N. O desenvolvimento mental e o SND. In: CARRAHER, T. N. (Org.). **Aprender pensando** [:] Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 1990.
- CARRAHER, T. N. A matemática na vida cotidiana: psicologia, matemática e educação. In: SCHILIEMANN, Ana Lúcia e CARRAHER, David W. e CARRAHER, Terezinha Nunes. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1995. p. 11-22.
- CASTRO, M. F. P. de (Org.). **O método e o dado no estudo da linguagem**. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 1996.

CURTY, M. G.; CRUZ, A. da C.; MENDES, M. T. **Apresentação de trabalhos acadêmicos, dissertações e teses:** (NBR14724/2002). Maringá: Dental Press, 2002.

D'AMBROSIO, U. Prefácio In: BORBA, M de C; ARAÚJO, J de L. (Orgs). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 11-23.

DELLA NINA, C. T. [et. Al.]; Portanova, R. (Org.) **Um currículo de matemática em movimento.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.

FREITAS, J. L. M. de; BITTAR, M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental.** Campo Grande: Ed. da UFMS, 2004.

GOLBERT, C.S. **Novos rumos na aprendizagem da matemática.** Porto Alegre: Mediação, 2002

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TALCHUUSK, L. **Além da alfabetização.** São Paulo: Ática, 1997.

IMENES, L. M. P. **Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática.** 1989. 304 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1989.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 1988.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética:** Novas Perspectivas [-] implicações da teoria de Piaget. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 1995b.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP: Papirus, 1995a.

KOCH, N. T. O.; SOARES, M. T. C. O professor, seus alunos e a resolução de problemas de estrutura aditiva. In: MORO, M. L. F., SOARES, M. T. C. (Orgs) **Desenhos, palavras e números:** as marcas da matemática na escola. Curitiba: UFTD, 2005.

LEITE, L. B. (Og) **Piaget e a escola em genebra.** São Paulo: Cortez, 1987.

LERNER, D. de Z. **A matemática na escola:** aqui e agora; Trad. Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

LERNER, D.; SADOVISKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (ORGs). **Didática da Matemática[:]** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 73-155.

LIMA, R. N, de S.; VILA, M. do C. **Contatos Matemáticos do primeiro grau:** com Sistema de Numeração. 2. ed. rev. Cuiabá: UFMT, 2002.

LOPES, S. V. de A. **A construção dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos.** 2002. 181 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2002.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** Campinas, SP: Autores associados, 2006a.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática**. Campinas, SP: Autores associados, 2006b.

MACEDO, L. **Ensaaios construtivistas**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990. (Coleção contemporânea, 59).

MAGINA, S., CAMPOS, T., NUNES, T. E GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração**. São Paulo: Ed. PROEM, 2001.

MATUÍ, J. **Construtivismo**: teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino. São Paulo: Moderna, 1995.

MAURI, T. O que faz com que os alunos e alunas aprendam os conteúdos escolares? In: COLL, C. et. Al. (Orgs.). **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 1999.

MORETTI, M. T. **Dos sistemas de numeração às operações básicas com números naturais**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1999.

NOGUEIRA, C. M. I.; ANDRADE, D. Você quer discutir com o computador?. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. São Paulo, maio 2004. ano 11 - n. 16.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. et. al. **Educação Matemática**[:] números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autentica, 2006.

PARRA, C. Cálculo Mental na escola primaria. In: PARRA, C.; SAIS, I. (Orgs). **Didática da Matemática** [:] Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

PIAGET, J., GRÉCO, P. **Aprendizagem e Conhecimento**. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIRES, C. M. C., CAMPOS, T. M. M. **Matemática e sua inserção curricular**. São Paulo: PROEM, 2006.

RESULTADO DO SAEB 2003. Brasília, 2004. Disponível em: <<http://www.inep.gov.br>> . Acesso em: 01 maio 2005.

SCHILEMANN, A. D., SANTOS, C. M., COSTA, S. C. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In: ALENCAR, E. S. (Org.) **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem**. 3 ed. São Paulo: Cortez, 1995. p. 99 - 117.

WARDWORTH, B. **Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau**. São Paulo: Pioneira, 1984.

ANEXO A

TERMO DE CONSENTIMENTO

Título do projeto: As relações estabelecidas pelas crianças entre os algoritmos das operações aritméticas elementares e o sistema de numeração decimal: subsídios ao ensino de matemática. Seguem, abaixo, os esclarecimentos necessários aos responsáveis pela criança que participará da pesquisa:

Estamos convidando-o (a) para uma conversa cuja finalidade é pedir a autorização para que seu(sua) filho(a) participe de uma pesquisa com o objetivo de investigar se o ensino da aritmética, com ênfase nas operações contribui para construção do conhecimento matemático. O envolvimento das crianças será em entrevista e a partir destas, esperamos além de atender ao objetivo descrito, identificar: se a criança percebe a relação que há entre o algoritmo da adição e/ou subtração e o sistema de numeração decimal; que estratégias são utilizadas por elas para resolução dos mesmos. Pretendemos também que a pesquisa abra um “leque” de possibilidades para novas formas de encaminhar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Prestaremos esclarecimentos, antes e durante a realização da pesquisa, sobre a metodologia utilizada ou qualquer outra dúvida. Para tanto, entre em contato com a prof^a Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira ou a pós-graduanda Marcela Boccoli Signorini, pelo telefone 261- 4933 / ramal 209.

Destacamos alguns aspectos importantes sobre a participação de seu (sua) filho(a) na pesquisa: durante o desenvolvimento da mesma o(a) senhor(a) tem toda a liberdade de recusar ou retirar o consentimento sem penalização; a identidade da criança será reservada, garantindo assim sigilo e privacidade, bem como que os dados coletados serão restritamente utilizados para responder aos objetivos da pesquisa.

Eu, _____, responsável pela criança, após ter lido e entendido as informações e esclarecido todas as minhas dúvidas

referentes a este estudo com a Pós-graduanda Marcela Boccoli Signorini CONCORDO VOLUNTARIAMENTE que o(a) meu(minha) filho(a), _____, participe do mesmo.

_____ Data: ____/____/____

Assinatura do responsável

Eu, Pós-graduanda, Marcela Boccoli Signorini, declaro que forneci todas as informações referentes ao estudo ao responsável pela criança.

_____ Data: ____/____/____

Assinatura da pesquisadora

Equipe:

1- Nome: Prof^a Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira Telefone: 261-4933/ramal 209
Endereço Completo: UEM, Avenida Colombo, Bloco F67 – Secretaria CCE/PCM.

2- Nome: Marcela Boccoli Signorini Telefone: 261- 4827
Endereço Completo: UEM, Avenida Colombo, Bloco F67 – Secretaria CCE/PCM.

Qualquer dúvida ou maiores esclarecimentos, procurar um dos membros da equipe do projeto ou o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos (COPEP) da Universidade Estadual de Maringá – Bloco 10 – Campus Central – Telefone: (44) 261-4444.

ANEXO B**AUTORIZAÇÃO**

Eu, _____, diretora da _____, autorizo a pós-graduanda da Universidade Estadual de Maringá, Marcela Boccoli Signorini, RA nº 42502, do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática, desenvolver sua pesquisa de campo nesta instituição de ensino, realizando entrevistas com crianças do Ensino Fundamental - 1º ano do 2º ciclo.

Atenciosamente

Diretora:
RG:
Portaria:

ANEXO C

SOLICITAÇÃO

Eu, Marcela Boccoli Signorini, RA nº 42502, acadêmica da Universidade Estadual de Maringá, no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática, solicito ao exmo. diretor do Colégio Estadual Dr. Gastão Vidigal – Ensino Fundamental e Médio, a permissão para desenvolver minha pesquisa de campo nesta instituição de ensino, realizando entrevistas com 10 crianças do 1º ano do 2º ciclo (3ª série) e 10 do 1º ano do 3º ciclo (5ª série) do Ensino Fundamental.

Comprometo-me, ao término do desenvolvimento da pesquisa, entregar uma cópia do trabalho para que os profissionais da instituição possam conhecer como os dados coletados foram por mim utilizados.

Atenciosamente

Marcela Boccoli Signorini

Ao diretor

Francisco Lopes Teixeira