

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA
E A MATEMÁTICA

KARLA APARECIDA LOVIS

Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria
Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores

Maringá
2009

KARLA APARECIDA LOVIS

Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria
Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Co-Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros

Maringá
2009

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

L911g Lovis, Karla Aparecida
Geometria Euclidiana e geometria Hiperbólica em um ambiente de geometria dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores. / Karla Aparecida Lovis. -- Maringá, 2009. 148 f. : il. color., figs., graf.

Orientador : Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.
Co-orientador : Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2009.

1. Geometria Euclidiana. 2. Geometria Hiperbólica - Modelo de Poincaré. 3. Geometria Hiperbólica - Obstáculos epistemológicos. 4. Geometria dinâmica - Software GeoGebra. 5. Geometria - Ensino (1° e 2° graus). 6. Geometria e informática. I. Franco, Valdeni Soliani, orient. II. Barros, Rui Marcos de Oliveira, co-orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. IV. Título.

FOLHA DE ROSTO

KARLA APARECIDA LOVIS

Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria
Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática”.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. José Antonio Salvador
Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Profa. Dra. Luzia Marta Bellini
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Aprovada em: 18 de dezembro de 2009.

Local da defesa: Auditório do Departamento da Matemática, sala 217, bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Valdeni Soliani Franco pela orientação, incentivo, dedicação e amizade. Professor, muito obrigada.

Ao professor Rui Marcos de Oliveira Barros pelas suas valiosas críticas e sugestões durante a pesquisa.

Ao professor José Antonio Salvador por ter aceitado participar da banca e pelas contribuições e sugestões no exame de qualificação.

A professora Luzia Marta Bellini, a Marta, pelo apoio, amizade e sugestões durante o Mestrado e a pesquisa.

Aos demais docentes do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática pelas discussões e reflexões realizadas.

Aos colegas do Mestrado, em especial, Evelyn, Mariana e Rosana pela amizade e o companheirismo, pelas experiências acadêmicas e pessoais compartilhadas.

Aos professores que participaram da pesquisa, sem vocês nada disso seria possível...

A nossa querida secretária Tânia por todo o seu apoio e gentileza.

Aos meus familiares, de maneira especial aos meus pais Ivan Lovis e Clarice Lovis, pelo amor e dedicação, pelo apoio e incentivo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que, uma maneira ou outra, contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

RESUMO

Esta pesquisa aborda o ensino de Geometrias Não-Euclidianas, em especial da Geometria Hiperbólica, e o uso do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Os objetivos da pesquisa consistem em averiguar os conhecimentos de um grupo de professores sobre Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica; identificar alguns obstáculos epistemológicos durante a realização das atividades que utilizam o modelo do disco de Poincaré; verificar se o estudo desse modelo permite que os professores abandonem a visão de que a Geometria Euclidiana é a única Geometria possível e, por fim, verificar as possíveis contribuições do *software* GeoGebra para a aprendizagem dos conteúdos das Geometrias. Para atingirmos nossos objetivos recorreremos à pesquisa qualitativa e propomos um minicurso sobre Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica com o auxílio do *software* GeoGebra, para um grupo de quarenta e um professores de Matemática de escolas públicas de cidades do Norte do Paraná. Também realizamos uma discussão histórica, matemática e filosófica sobre a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica; do ensino dessas Geometrias e do uso de novas tecnologias na educação. Por meio das interações e dos relatos dos professores, confirmou-se algumas dificuldades nos conteúdos de Geometrias, bem como a existência de obstáculos epistemológicos – geral e verbal – além do não conhecimento das possibilidades educacionais dos recursos tecnológicos disponíveis nas escolas e das dificuldades em utilizá-los.

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica. Geometria Euclidiana. Obstáculos Epistemológicos. Ensino de Geometrias. Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

This research approaches the teaching of Non-Euclidian Geometries, especially Hyperbolic Geometry and the software use of GeoGebra Dynamic Geometries. The research main goals consist of checking the knowledge from a group of teacher over Euclidian Geometry and Hyperbolic Geometry; identifying some epistemological obstacles during the activities performance that use the Poincaré disc model; verify that the study of this model allows that the teachers abandon the focused view that Euclidian Geometry is the only Geometry possible and, finally, check the possible contributions of GeoGebra software for the learning of Geometry contents. In order to achieve our goals we chose qualitative research type and we proposed a short-term course on Euclidian Geometry and Hyperbolic Geometry with the support from the GeoGebra software for a group of forty Mathematics teachers from public schools in towns from the North of Paraná state. We also had a historical, mathematic and philosophical discussion on Euclidian and Hyperbolic Geometry, concerning the teaching of these kinds of Geometry and the use of new Technologies in the educational field. Starting from interactions and reports from the teachers, some difficulties in the Geometry contents were confirmed, as well as the existence of epistemological obstacles – general and verbal – besides the lack of knowledge on educational possibilities of technological resources available in the schools and the difficulties in using them.

Key words: Hyperbolic Geometry. Euclidian Geometry. Epistemological Obstacles. The Teaching of Geometry. Dynamic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esboço do quinto postulado	29
Figura 2 – Reta paralela no modelo euclidiano	40
Figura 3 – Retas paralelas no modelo hiperbólico	40
Figura 4 – H-retas e horizonte	48
Figura 5 – Ângulo entre h-retas	49
Figura 6 – Distância entre dois pontos	50
Figura 7 – Distância quando A e B se aproximam dos pontos ideais	51
Figura 8 – Distância quando A e B estão próximos entre si.....	51
Figura 9 – H-retas paralelas.....	52
Figura 10 – H-retas paralelas limites.....	52
Figura 11 – Ângulo de paralelismo	53
Figura 12 – H-retas paralelas limites passando por um ponto.....	53
Figura 13 – Esboço construção triângulo equilátero.....	62
Figura 14 – Esboço da construção de triângulo dado três lados quaisquer	64
Figura 15 – Esboço da construção de um quadrado	67
Figura 16 – Esboço da construção de uma reta paralela.....	69
Figura 17 – Esboço da construção para recuperar o centro de uma circunferência	71
Figura 18 – Esboço da construção de uma reta perpendicular por um ponto sobre a circunferência	72
Figura 19 – Esboço da construção de uma reta tangente passando por um ponto	74
Figura 20 – Esboço da construção do ponto inverso (1)	83
Figura 21 – Esboço da construção do ponto inverso (2)	84
Figura 22 – Esboço da construção do ponto inverso (3)	85
Figura 23 – Esboço da construção do ponto A' por meio da reta polar	86
Figura 24 – Esboço da construção de uma h-reta.....	87

Figura 25 – H-reta por um ponto	89
Figura 26 – Esboço da construção de uma h-reta por dois pontos (1).....	92
Figura 27 – Esboço da construção de uma h-reta por dois pontos (2).....	93
Figura 28 – Esboço h-retas paralelas.....	94
Figura 29 – Ângulo entre duas h-retas.....	97
Figura 30 – Esboço construção de um triângulo hiperbólico	98
Figura 31 – Esboço da soma dos ângulos internos de um triângulo (1).....	100
Figura 32 – Esboço da soma dos ângulos internos de um triângulo (2).....	100
Figura 33 – Esboço da construção de uma h-reta perpendicular (1).....	102
Figura 34 – Esboço da construção de uma h-reta perpendicular (2).....	103

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Faixa etária dos professores	20
Gráfico 2 – Formação acadêmica dos professores	21
Gráfico 3 – Ano de formação dos professores	21
Gráfico 4 – Laboratórios de informática	105
Gráfico 5 – Disponibilidade dos laboratórios de informática para ministrar aulas	105
Gráfico 6 – Frequência da utilização do laboratório de informática	106
Gráfico 7 – Recebeu preparo para utilizar os recursos computacionais.....	109
Gráfico 8 – Conhecia o GeoGebra	110
Gráfico 9 – É fácil de ser utilizado	111
Gráfico 10 – O <i>software</i> contribuiu para o aprendizado do conteúdo.....	113
Gráfico 11 – Dificuldades de aprender por meio do <i>software</i>	114
Gráfico 12 – Utilizaria as atividades em sala de aula.....	122

SUMÁRIO

Introdução: dos caminhos percorridos até a presente pesquisa	13
1 Contexto da Pesquisa.....	16
1.1 Apresentação da Pesquisa.....	16
1.2 Problema de Pesquisa	16
1.3 Objetivos.....	17
2 Metodologia.....	19
2.1 Opções Metodológicas	19
2.2 Caracterização dos Sujeitos da Pesquisa	20
2.3 Procedimentos de Pesquisa.....	22
2.4 Análise de Conteúdo.....	23
3 Aspectos Matemáticos, Históricos e Filosóficos das Geometrias: algumas considerações teóricas.....	26
3.1 A origem da Geometria Euclidiana	26
3.2 O Quinto Postulado de Euclides.....	29
3.3 A origem da Geometria Hiperbólica	31
3.4 A Consistência da Geometria de Lobachevsky	33
3.5 Resistências e Obstáculos na Aceitação das Geometrias Não-Euclidianas.....	35
4 O ensino de Geometrias.....	42
4.1 O Ensino de Geometria Euclidiana	42
4.2 O Ensino de Geometrias Não-Euclidianas	45
4.3 Geometria Hiperbólica: Modelo de Poincaré	47
5 Novas Tecnologias na Educação	54
5.1 Os Softwares de Geometria Dinâmica.....	57
6 Análise dos Dados	60

6.1 Geometria Euclidiana	60
6.2 Geometria Hiperbólica	79
6.3 O Uso de Novas Tecnologias	104
6.3.1 O Software GeoGebra	110
6.3.2 A Utilização do Software GeoGebra	117
6.4 Resistências e Dificuldades em Aceitar as Geometrias Não-Euclidianas	125
7 Considerações Finais	133
Referências	138
Apêndices	142

Introdução: dos caminhos percorridos até a presente pesquisa

O interesse pelo estudo de *softwares* de Matemática iniciou durante a graduação, em disciplinas do curso de Matemática e no período que participei do Laboratório de Ensino de Matemática e Novas Tecnologias – LEMAT¹. Antes de ingressar na Universidade não conhecia e nunca tinha ouvido falar de *softwares* que pudessem auxiliar na construção do conhecimento, principalmente do conhecimento matemático. Quando tive o primeiro contato com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra² percebi que ele é um excelente ambiente para ensinar e aprender Geometrias.

Após o contato com o *software* GeoGebra, o interesse em estudar o uso de novas tecnologias na educação e as possibilidades didáticas dos *softwares* de Geometria Dinâmica aumentou. Durante o período que participei do LEMAT desenvolvi alguns projetos que envolviam *softwares* de Matemática.

Para ingressar no Mestrado propus um projeto que envolvia o ensino de Geometria Euclidiana, para alunos do Ensino Fundamental, com o auxílio do GeoGebra. Depois de algumas conversas com o professor orientador e algumas discussões referentes à inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no currículo da Educação Básica no Estado do Paraná e ao ensino dessas Geometrias, optamos por trabalhar com a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica, com um grupo de professores de matemática, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Apesar da importância e das potencialidades do ensino de Geometrias o que se percebe é que a Geometria Euclidiana têm sofrido um abandono nas últimas décadas (PAVANELLO, 1989; BONETE, 2000; NACARATO, 2000; ALMOULOU et al., 2004). Vários são os motivos alegados: a insegurança e o despreparo dos professores, que alegam não ter conhecimento suficiente do assunto devido a sua má formação acadêmica, a falta de tempo para ensinar Geometrias, pois na maioria das vezes o ensino de Geometria é deixado

¹ O laboratório descrito é da Universidade Federal de Santa Catarina.

² O software GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica gratuito. Informações sobre o GeoGebra: <<http://www.geogebra.org>> Acesso em 27 out. 2009.

para o final do ano letivo, as dificuldades dos alunos com relação a este conteúdo, entre outros.

Quando o assunto é ensino de Geometrias Não-Euclidianas o contexto é pior, uma vez que essas Geometrias, muitas vezes, não são abordadas nos cursos de formação de professores de Matemática e a falta de conhecimento por parte dos professores é ainda maior do que da Geometria Euclidiana (CABARITI, 2004).

Ao falarmos de Geometrias Não-Euclidianas os aspectos matemáticos e filosóficos da sua construção se destacam. Por quase dois mil anos os matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado de Euclides, mas não obtiveram sucesso. Somente no final do século XIX que eles compreenderam a situação lógica do quinto postulado e afirmaram que este é independente dos demais postulados de Euclides. Com isso, foi possível construir Geometrias que não estão de acordo com pelo menos um dos cinco postulados de Euclides.

Quando se tenta mostrar a existência dessas Geometrias, em geral, os professores ficam desconfiados, pois o máximo que aprenderam foi a Geometria Euclidiana e para muitos professores essa é a única Geometria existente (SANTOS, 2007). Este fato pode gerar certas dificuldades, resistências e até mesmo obstáculos epistemológicos que impedem e dificultam o aprendizado dessas Geometrias.

Para melhor compreensão do conteúdo deste trabalho, descrevemos a seguir, a divisão que foi estabelecida.

Na seção 1 – *Contexto da pesquisa* – apresentamos a pesquisa, na qual constam os problemas de pesquisa e os objetivos. Na seção 2 – *Metodologia* – abordamos as opções metodológicas, os sujeitos da pesquisa e os procedimentos da pesquisa. A Análise de Conteúdo também é descrita nesta seção.

A seção 3 – *Aspectos Matemáticos e Filosóficos: algumas considerações teóricas* – traz algumas considerações teóricas sobre a origem da Geometria Euclidiana e uma discussão referente ao quinto postulado de Euclides. Descrevemos a origem da Geometria Hiperbólica e

a sua consistência, e ainda nesta seção, apresentamos algumas contribuições da epistemologia de Gaston Bachelard e, de maneira especial, as noções de obstáculo epistemológico, e sua relação com as Geometrias Não-Euclidianas.

O ensino de Geometrias está abordado na Seção 4 – *O ensino de Geometrias* –, na qual constam algumas considerações sobre a situação e o abandono das Geometrias e as indicações das Diretrizes Curriculares de Matemática do Paraná para estes conteúdos. Como o assunto desta seção é o ensino, apresentamos uma descrição de alguns conceitos e resultados da Geometria Hiperbólica que podem ser explorados por meio do modelo do disco de Poincaré.

Na seção 5 – *Novas Tecnologias na Educação* – tecemos algumas considerações teóricas sobre o uso de novas tecnologias na educação e o uso dos *softwares* de Geometria Dinâmica, bem como do *software* GeoGebra.

A seção 6 – *Análise dos Dados* – expomos a descrição dos dados e a análise das transcrições das falas dos professores e do questionário por meio das categorias estabelecidas: Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica, Novas Tecnologias na Educação e o *Software* GeoGebra e Resistências e Dificuldades dos Professores em Aceitar as Geometrias Não-Euclidianas.

Por fim, na seção 7 – *Considerações Finais* – descrevemos nossas conclusões a cerca da pesquisa, assim como algumas reflexões sobre as questões propostas na pesquisa.

1 Contexto da Pesquisa

Nesta seção apresentamos o contexto da pesquisa, os problemas da pesquisa e os seus objetivos.

1.1 Apresentação da Pesquisa

Esta pesquisa está dividida em duas partes: a primeira é constituída por um estudo teórico e a segunda é de cunho qualitativo.

No estudo teórico descrevemos a origem da Geometria Euclidiana e da Geometria Hiperbólica, destacando alguns aspectos matemáticos e filosóficos. Discutimos o ensino de Geometria Euclidiana e de Geometrias Não-Euclidianas, apontando o que as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná sugerem para esses conteúdos. Descrevemos o modelo do disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica e o uso de novas tecnologias na educação e dos *softwares* de Geometria Dinâmica.

Na etapa qualitativa da pesquisa investigamos os conhecimentos sobre Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica dos professores pesquisados. Também identificamos alguns obstáculos epistemológicos e, por fim, tecemos algumas considerações sobre a aprendizagem dos conteúdos de Geometrias por meio do *software* GeoGebra.

1.2 Problema de Pesquisa

Em virtude da construção histórica da Geometria Hiperbólica, dos aspectos matemáticos e filosóficos que envolvem a sua construção, acreditamos que muitos professores não conhecem esta Geometria e encontram dificuldades em aceitar e compreender os conceitos e teoremas da Geometria Hiperbólica. Valendo-se dessas considerações, indagamos que essas dificuldades podem constituir-se em alguns obstáculos epistemológicos.

Outra questão que nos parece pertinente e que tem gerado discussões na escola é como recursos tecnológicos podem ser usados no cotidiano escolar (PONTE, 2000; BORBA, 1999). Dentro dessa temática nos deparamos com os questionamentos referentes ao uso dos *softwares* de Geometria Dinâmica no ensino de Geometrias, em especial a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica.

Dessa forma, ao considerar a construção da Geometria Hiperbólica, a formação dos professores de matemática, o ensino de Geometrias e o uso de novas tecnologias na educação, estabelecemos os seguintes problemas de pesquisa:

- Quais os conhecimentos de Geometria Euclidiana e de Geometria Hiperbólica que o grupo de professores observados nesta pesquisa possui?
- O estudo da Geometria Hiperbólica permite identificar obstáculos epistemológicos na compreensão dessa Geometria? Contribui para que eles aceitem a existência das Geometrias Não-Euclidianas?
- O *software* GeoGebra contribui para a aprendizagem dos conteúdos de Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica?

1.3 Objetivos

De acordo com Pavanello (1989), Nacarato, (2000) e Almouloud et al., (2004) o ensino de Geometrias perdeu seu espaço no contexto escola. No entanto, pensamos que a resistência ao ensino de Geometrias está relacionada, entre outros fatores, com a formação dos professores, seja a acadêmica ou a continuada.

Compreender as Geometrias Não-Euclidianas como um conhecimento geométrico é uma dificuldade que muitos professores apresentam (SANTOS, 2009). Em virtude disso, conjecturamos que os professores encontram obstáculos na compreensão e na aceitação da Geometria Hiperbólica.

Ao considerar o ensino de Geometrias por meio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra acreditamos que ele constitui-se em uma ferramenta importante para auxiliar os professores e alunos no entendimento das Geometrias.

Valendo-se dessas considerações, estabelecemos os seguintes objetivos:

- Averiguar os conhecimentos dos professores sobre Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica, por meio de atividades, com auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.
- Identificar obstáculos epistemológicos durante a realização das atividades que utilizam o modelo do disco de Poincaré, e verificar se o estudo da Geometria Hiperbólica permite que os professores abandonem a visão de que a Geometria Euclidiana é a única geometria possível.
- Verificar possíveis contribuições do uso do *software* GeoGebra para a aprendizagem dos conteúdos de Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica.

2 Metodologia

Nesta seção descrevemos as opções metodológicas adotadas; os procedimentos da pesquisa; apresentamos os sujeitos da pesquisa e abordamos a Análise de Conteúdo, que foi utilizada na identificação e análise do material coletado durante a pesquisa.

2.1 Opções Metodológicas

A pesquisa apóia-se em uma abordagem de natureza qualitativa, uma vez que queremos investigar particularidades que envolvem a observação de um grupo de professores participantes de um minicurso sobre Geometria Hiperbólica em um ambiente computacional. Alves-Mazotti e Gewandszajer (2004) destacam que esse tipo de pesquisa tem se tornado frequente na elaboração de trabalhos no campo das ciências sociais, mas o planejamento da pesquisa qualitativa não é fácil por que “ao contrário do que ocorre com as pesquisas quantitativas, as investigações qualitativas, por sua diversidade e flexibilidade, não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de casos” (ALVES-MAZOTTI e GEWANDSZNAJER, 2004, p. 147).

As pesquisas qualitativas partem do princípio “de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado” (ALVES-MAZOTTI e GEWANDSZNAJER, 2004, p. 131). Neste sentido o pesquisador é o principal instrumento de investigação e, por isso, deve ter contato direto e prolongado no campo, para interpretar adequadamente os fenômenos manifestados. Por isso, esta pesquisadora esteve presente em todos os momentos da realização do minicurso.

A coleta dos dados se deu por meio de dois instrumentos: a) gravação em áudio e vídeo e b) questionário. A gravação em áudio aconteceu durante todo o período do minicurso. Devido ao número de professores optou-se por gravações em vídeo apenas em alguns momentos, nos quais a pesquisadora acreditou ser interessante e prudente. Foram aproveitadas

ainda, para a pesquisa, as observações e anotações da pesquisadora e dos monitores que participaram do minicurso e as respostas do questionário.

2.2 Caracterização dos Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos da pesquisa são professores do Ensino Fundamental e Médio da Rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná, do Núcleo Regional de Maringá – NRE. Esses professores foram convidados a participarem do minicurso “O Modelo de Poincaré e o GeoGebra” oferecido pela Universidade Estadual de Maringá – UEM juntamente com NRE – Maringá. A coordenação pedagógica de matemática do NRE se encarregou de convidar todos os professores do referido Núcleo e ficou a critério de cada professor o interesse em participar ou não do minicurso.

Dos quarenta e um professores participantes da pesquisa oito são do sexo masculino e trinta e três são do sexo feminino. A maioria dos professores tem entre trinta e sessenta anos. Há também um número considerável de professores com mais de cinquenta anos e um número muito pequeno de professores com menos de trinta anos, como mostra o gráfico a seguir:

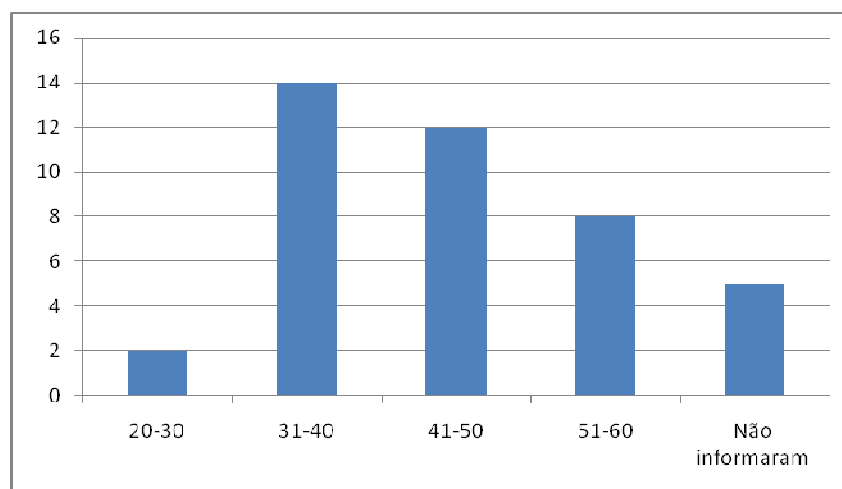


Gráfico 1 – Faixa etária dos professores

Sobre a formação acadêmica desses professores constatamos que a maioria se formou na Faculdade de Ciências e Letras de Mandaguari e o restante em outras universidades da região Norte, como mostra o gráfico a seguir:

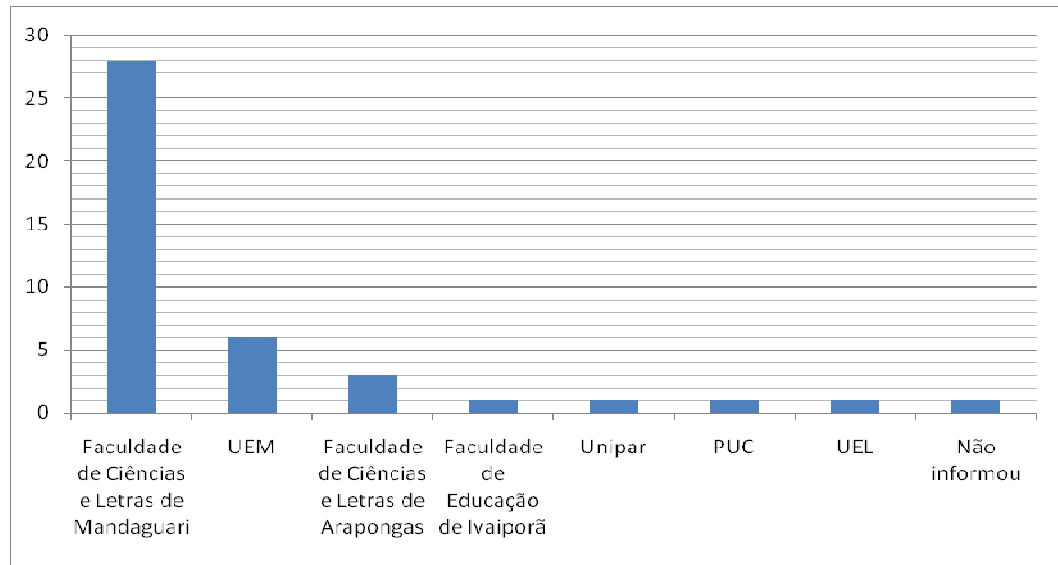


Gráfico 2 – Formação acadêmica dos professores

O ano de formação desses professores variou muito. Temos um longo período de formação entre 1975 até 2004, como observamos no gráfico a seguir:

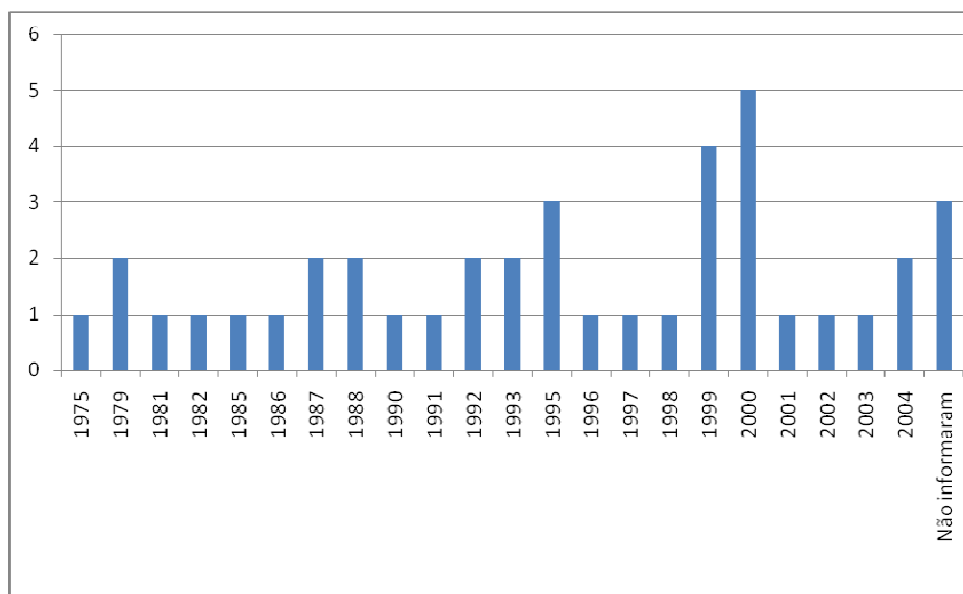


Gráfico 3 – Ano de formação dos professores

2.3 Procedimentos de Pesquisa

Durante o período de março a setembro de 2008 o NRE – Maringá e a UEM ofereceram um curso “Introdução às Geometrias Não-Euclidianas”³ sobre noções de Geometrias Não-Euclidianas a professores da Rede Estadual de Ensino de cidades do norte do Paraná. Os encontros tiveram o objetivo de relembrar alguns conceitos da Geometria Euclidiana para poder introduzir conceitos das Geometrias Não-Euclidianas. Este curso teve duração de vinte e quatro horas, distribuídas em seis encontros de quatro horas cada.

Após o término deste curso foi oferecido o minicurso “O Modelo de Poincaré e o GeoGebra” que durou dezesseis horas, e teve como objetivo estudar a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica por meio do *software* GeoGebra. Ele foi realizado nos laboratórios de informática das escolas Rui Barbosa, em Jandaia do Sul – PR, no Instituto Estadual de Educação e na Escola Estadual Gastão Vidigal, em Maringá – PR. Os computadores dos laboratórios de informática estavam com o *software* GeoGebra instalado.

O minicurso em Jandaia do Sul teve a participação de 13 professores. Por ser o primeiro minicurso ministrado serviu de “piloto” para a nossa pesquisa. Inicialmente pensamos em trabalhar algumas construções geométricas euclidianas no primeiro dia, no turno da manhã, e no restante do dia e no próximo dia do minicurso com construções geométricas hiperbólicas. Mas devido às dificuldades dos professores em Geometria Euclidiana e na própria utilização do computador, decidimos continuar as construções geométricas euclidianas no turno da tarde, e deixamos o segundo dia do minicurso para abordar as construções da Geometria Hiperbólica. Durante o minicurso os professores aprenderam a utilizar as ferramentas do GeoGebra conforme elas apareciam nas construções propostas. No segundo encontro introduzimos alguns conceitos e definições da Geometria Hiperbólica e iniciamos as construções do modelo do disco de Poincaré.

Este “piloto” foi essencial para que pudéssemos definir os procedimentos da pesquisa – minicurso e aplicação do questionário – e iniciamos, em outubro de 2008, a pesquisa após o parecer favorável do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – COPEP.

³ Resultados da pesquisa realizada neste curso podem ser encontrados em Santos (2009).

Com base nas observações durante o “piloto” decidimos seguir o mesmo cronograma para os professores que participariam do minicurso em Maringá: construções geométricas euclidianas⁴ no primeiro dia e, no segundo dia, o estudo de alguns conceitos e definições da Geometria Hiperbólica⁵ e as construções do modelo do disco de Poincaré. No minicurso em Maringá participaram quarenta e um professores distribuídos em duas turmas: uma com dezessete professores e a outra com vinte e quatro professores. No final de cada minicurso os professores responderam ao questionário⁶.

2.4 Análise de Conteúdo

Para analisar e interpretar os questionários utilizamos como referencial teórico, a análise de conteúdo proposta por Bardin (1979). A autora destaca que a análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análises das comunicações usado para descrever e interpretar o conteúdo de textos e documentos.

Segundo Moraes “essa metodologia de pesquisa faz parte de uma busca teórica e prática [...] constitui-se em bem mais do que uma simples técnica de análise de dados, representando uma abordagem metodológica com características e possibilidades próprias” (MORAES, 1999, p. 9). A análise de conteúdo pode servir de base tanto para pesquisas qualitativas como para pesquisas quantitativas. No que se refere à forma qualitativa, parte de uma série de pressupostos que servem para captar seu sentido simbólico que, muitas vezes, não é manifestado e seu significado não é único; ela é uma interpretação por parte do pesquisador com relação aos dados obtidos, podendo ser carregada de múltiplos significados e múltiplas possibilidades de análise (MORAES, 1999).

Esta metodologia permite investigar qualquer material, verbal ou não verbal, como cartas, jornais, revistas, gravações, entrevistas, vídeos, entre outros. Bardin destaca que é possível investigar,

⁴ Construções geométricas euclidianas estão no apêndice 1.

⁵ Construções geométricas hiperbólicas estão no apêndice 2.

⁶ O questionário encontra-se no apêndice 3.

[...] desde mensagens linguísticas em forma de ícones, até comunicações em três dimensões, quando mais o código se torna complexo, ou mal explorado, maior terá de ser o esforço do analista, no sentido de uma inovação com vista à elaboração de técnicas novas (BARDIN, 1979, p. 32).

A análise de conteúdo, segundo Bardin (1979), organiza-se em torno três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. A pré-análise é a fase de organização do material, que deve ser feito de modo que conduza a um esquema preciso de desenvolvimento das operações seguintes. Na primeira fase é feita “a escolha dos documentos a serem submetidos a análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final” (BARDIN, 1979, p. 95). Na segunda fase, se as operações da pré-análise foram concluídas, consiste em administrar as decisões tomadas, em manipular as codificações. Na terceira e última fase, os resultados ganham significados.

As categorias utilizadas na pesquisa foram:

- Geometria Euclidiana.
- Geometria Hiperbólica.
- O Uso de Novas Tecnologias na Educação e o *Software* GeoGebra.
- Resistências e Dificuldades em Aceitar as Geometrias Não-Euclidianas.

Nas categorias – Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica – apresentamos as dificuldades e os conhecimentos dos professores obtidos durante as gravações feitas nos minicursos, além dos obstáculos epistemológicos identificados durante as transcrições das falas. Também são apresentadas as respostas dos professores, referentes a esses conteúdos, presentes no questionário. Na categoria – O Uso de Novas Tecnologias na Educação e o *Software* GeoGebra – destacamos a formação dos professores, com relação ao uso de novas tecnologias na educação, as dificuldades e as facilidades dos professores ao utilizar o *software* GeoGebra e as potencialidades para aprender este conteúdo. A última categoria – Resistências e Dificuldades em Aceitar as Geometrias Não-Euclidianas – destacamos os obstáculos, as crenças, as dificuldades que eles apresentam quanto à aceitação e entendimento do conteúdo Geometria Hiperbólica.

Para facilitar o entendimento dos dados obtidos estabelecemos alguns códigos. As respostas dos questionários foram identificadas, pela letra Q, e cada professor recebeu um número, por exemplo, Q.1 vai ser o professor 1 e assim por diante. Ao trabalhar com as falas do professores gravadas e posteriormente transcritas, utilizamos a identificação P, por exemplo, P.1 vai caracterizar a fala do professor 1, que não é o mesmo professor do questionário, o Q.1. Os monitores que apresentaram o curso são caracterizados por M, por exemplo, M.1 é o monitor 1. Cinco monitores auxiliaram na pesquisa: o orientador, a pesquisadora, dois alunos de graduação e um professor formado de Matemática.

3 Aspectos Matemáticos, Históricos e Filosóficos das Geometrias: algumas considerações teóricas

Nesta seção destacamos algumas considerações teóricas sobre os aspectos matemáticos, históricos e filosóficos das Geometrias. Descrevemos a origem da Geometria Euclidiana, algumas indagações sobre o quinto postulado de Euclides, a origem da Geometria Hiperbólica e a consistência desta Geometria. Por fim, expomos algumas contribuições da epistemologia de Gaston Bachelard e, de maneira especial, as noções de obstáculo epistemológico, e sua relação com as Geometrias Não-Euclidianas.

3.1 A origem da Geometria Euclidiana

Afirmações sobre a origem da Geometria são um tanto arriscadas, porque segundo Boyer (1999, p. 4) os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Na primeira fase do desenvolvimento da Geometria ela era uma ciência empírica, ou seja, uma ciência em que todos os resultados eram deduzidos diretamente da prática como respostas às necessidades das comunidades (SMOGORZHEVSKI, 1978).

A civilização egípcia foi uma das primeiras a medir as terras para fixar os limites das propriedades. A cada ano as enchentes do rio Nilo derrubavam os marcos das terras fixados nos anos anteriores e, com isso, os proprietários eram obrigados a remarcar os limites territoriais. As reconstruções, muitas vezes, eram feitas com base nos dados dos anos anteriores e no que restava das marcações depois das enchentes. Essas experiências proporcionaram aos egípcios conhecer e elaborar inúmeros princípios relativos às características de linhas, ângulos e figuras (BARKER, 1969, p. 27).

A civilização grega percebendo o que os egípcios eram capazes de fazer assimilaram seus princípios empíricos e deram o nome de Geometria – medida de terra. Barker (1969, p. 28) destaca que “os gregos, porém, ao contrário dos egípcios, apreciavam a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seu interesse teórico”. Os

gregos não se contentaram com os aspectos empíricos, eles procuraram encontrar demonstrações dedutivas que pudessem responder as aplicações práticas da Geometria.

Foi em aproximadamente 300 anos a.C. que Euclides escreveu a obra *Elementos*. Nesta obra Euclides reuniu e apresentou um sistema axiomático com cinco postulados do qual são deduzidas as demais proposições geométricas. A obra *Elementos* está dividida em treze livros ou capítulos; os seis primeiros sobre geometria plana elementar, os quatro seguintes tratam teoria dos números e os três últimos abordam a geometria espacial. Barker (1969) destaca que esta obra é um dos clássicos que exerceu maior influência no pensamento ocidental, e que não foi apenas um livro de geometria, mas “o modelo daquilo que o pensamento científico deveria ser” (BARKER, 1969, p. 28).

Piaget e Garcia expõem que, Euclides, na elaboração da sua obra *Elementos*, apresentou uma das primeiras axiomatizações da história da matemática: “a axiomatização de uma teoria representa um ponto de chegada, o final do seu desenvolvimento; ela constitui uma formulação sistemática de elementos previamente elaborados, através da qual se tenta esclarecer as suas relações lógicas” (PIAGET e GARCIA, 1987, p. 92). Euclides desempenhou um papel importante na formulação do livro, pois ele apresentou alguns conhecimentos dos seus antecessores, também de forma axiomática, além das suas próprias contribuições.

Ao enunciar suas leis, Euclides as fez de forma universal. Ele “não examina se propriedades de uma determinada linha ou figura realmente existem; examina, ao contrário, as propriedades de todas as linhas ou figuras de tal ou qual espécie devem ter” (BARKER, 1969, p. 28-9). Ele formula suas leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas, demonstrando-as de forma dedutiva com o rigor da lógica, portanto de forma totalmente abstrata.

Euclides, no seu Livro I, da obra *Elementos*, definiu alguns objetos geométricos, tais como: ponto, reta, plano, linha e superfície (por exemplo, Euclides definia ponto como “aquilo que não tem partes”); hoje consideramos esses objetos como noções primitivas, ou seja, objetos da Geometria que não são possíveis de serem definidos. Os gregos faziam distinção entre axioma ou noções comuns e postulado. Para eles, axioma era uma suposição

comum a todas as ciências e ao mesmo tempo, óbvio e aceitável por todos. Os postulados eram suposições particulares de uma determinada área de estudo que não são necessariamente aceitáveis nem óbvias para todas as pessoas. Os postulados de Euclides⁷ são:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta ilimitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, como todo centro e distância, descreve um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Barker aponta que as ideias adotadas por Euclides nesses postulados diferem muito das concepções indutivas e empíricas adotadas pelos egípcios. Nos três primeiros postulados, Euclides não está, de maneira direta, discutindo problemas de medição de terras, não está preocupado com os possíveis obstáculos (montanhas, rios, ou outros) que possam impedir seu traçado. As condições práticas não interessavam a Euclides; ele admitia existir “um espaço em que inexistiam obstáculos absolutos e em volta do qual inexistiam fronteiras exteriores absolutas” (BARKER, 1969, p. 31). O quarto postulado parece um tanto evidente, mas Euclides o descreve como uma verdade lógica, uma vez que ele será necessário para demonstrações futuras, por isso ele enunciou na forma de postulado.

Quanto ao quinto postulado, é possível observar que ele não é tão evidente quanto os quatro primeiros. Na figura 1, observamos que se a soma dos ângulos internos $\alpha + \beta < 180^\circ$ as retas s e r irão se encontrar e caso a soma dos ângulos internos $\alpha + \beta = 180^\circ$ as retas s e r serão paralelas.

⁷ A versão descrita está disponível em Euclides (2009), tradução de Irineu Bicudo.

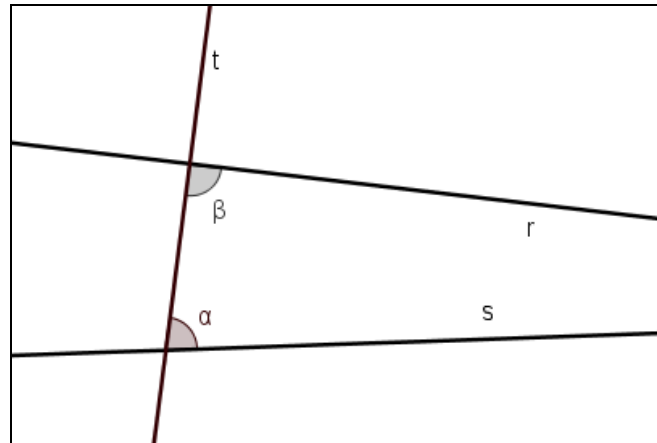


Figura 1 – Esboço do quinto postulado

Os postulados, os axiomas e as definições são o ponto de partida das demonstrações de Euclides tanto da geometria plana quanto da espacial. Barker (1969, p. 38) destaca que “Euclides, nos Elementos, visava aperfeiçoar o nosso conhecimento acerca de pontos, linhas e figuras, tornando mais rigorosas as demonstrações de leis já conhecidas, e visava aumentar esse conhecimento, demonstrando leis novas, até então desconhecidas”. Ele precisava dar à Geometria uma forma dedutiva sistemática para que as demonstrações fossem mais rigorosas e possibilitassem a elaboração de novas leis. Piaget e Garcia (1987) destacam que:

[...] a geometria é, nas matemáticas gregas, o ramo que deu prova de uma tal perfeição que se transformou, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Dois mil anos após Euclides, ela será para Newton o modelo para toda a construção de uma teoria científica e os seus *Principia* inspirar-se-ão neste modelo (PIAGET e GARCIA, 1987, p. 91).

3.2 O Quinto Postulado de Euclides

Durante muito tempo os matemáticos preocuparam-se em questionar a veracidade do quinto postulado. Acreditavam que não se tratava de um postulado, mas sim de um teorema. Muitos esforços foram feitos para demonstrar o quinto postulado de Euclides (o postulado das paralelas) com um fracasso constante. Alguns matemáticos tentaram ao longo dos séculos eliminar o quinto postulado, uma vez que eles estavam insatisfeitos com ele, tentaram diversas maneiras de retirá-lo do sistema. Outros tentaram mostrar que o quinto postulado era

um teorema dedutível dos quatro primeiros postulados, além das definições e dos axiomas. Houve aqueles que tentaram mostrar que o quinto postulado poderia ser substituído por algum princípio mais simples e mais evidente e que poderia ser deduzido como um teorema perdendo, assim, o status de postulado (BARKER, 1969 p. 47-8).

Em meio a essas tentativas de demonstrações percebeu-se que existiam outras formas de enunciar o quinto postulado, das quais a mais conhecida é a do matemático escocês John Playfair (1748-1819). Este foi um geômetra que fez uma tradução dos *Elementos* para o Inglês e, observou que o quinto postulado poderia ser substituído por um resultado equivalente, que afirma: “Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta que não a intercepta” (CARMO, 1987, p. 27). O fato de existir por um ponto P fora de uma reta, uma reta paralela, era conhecido por Euclides e pelos matemáticos que o sucederam, mas o ponto essencial do resultado é o fato dessa paralela ser única. Euclides costumava usar em seus argumentos fatos que eram considerados óbvios e ele não se preocupou em explicar.

Bachelard (1985) destaca que o fato deste teorema corresponder a uma verdade, a um fato matemático, ninguém duvida:

[...] para todos os geômetras até o final do século XVIII, as paralelas *existem*; a experiência usual legitima esta noção diretamente como por suas conseqüências indiretas. O que parece faltar, o que constitui escândalo, é que não se tenha podido ainda coordenar este teorema simples no conjunto dos teoremas demonstrados. Nunca se põe em dúvida a existência das paralelas (BACHELARD, 1985, p. 26).

O que os intrigava era o fato do quinto postulado não poder ser demonstrado. Diante deste suposto teorema a demonstrar, Giovanni Saccheri (1667-1733) e Johann Lambert (1728-1777) no final do século XVIII, se perguntaram o que aconteceria se abandonássemos ou modificássemos a noção de paralelismo euclidiano.

Foi a negação do quinto postulado que desencadeou a construção de novas Geometrias, as Geometrias Não-Euclidianas, assim chamadas porque não estão de acordo com pelo um dos cinco postulados de Euclides. Uma das maneiras de negar o quinto postulado é afirmar que por um ponto fora de uma reta é possível traçar pelo menos duas retas

paralelas. Esse fato acontece na Geometria Hiperbólica. Outra maneira de negar o quinto postulado é afirmar a não existência de retas paralelas, que acontece na Geometria Elíptica.

3.3 A origem da Geometria Hiperbólica

O fracasso nas tentativas de demonstrar o quinto postulado e as indagações referentes ao mesmo possibilitou aos matemáticos construir Geometrias nas quais o quinto postulado de Euclides não é válido.

No final do século XIX os matemáticos compreenderam a situação lógica do quinto postulado e afirmaram que este é independente dos outros postulados de Euclides. Ou seja, que é possível existir sistemas geométricos consistentes nos quais o quinto postulado pode ser substituído por uma afirmação contrária (BARKER, 1969, p. 51).

Boyer (1999) destaca que, durante o primeiro terço do século XIX, encontramos um exemplo de simultaneidade de descobertas relacionadas às Geometrias Não-Euclidianas, a três homens, o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856). Esses três matemáticos, sem qualquer contato mútuo e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Saccheri, desenvolveram, independentemente, um novo tipo de Geometria.

Gauss, durante a segunda década do século XIX, tinha chegado à conclusão que as tentativas de demonstrar o quinto postulado, feitas por alguns matemáticos, foram em vão e que eram possíveis Geometrias diferentes da de Euclides.

Lobachevsky foi um dos matemáticos que mais contribuiu na construção das Geometrias Não-Euclidianas. Durante sua vida acadêmica elaborou vários trabalhos relacionados à Geometria. Em um desses trabalhos “On the Principles of Geometry”, publicado em 1829, Lobachevsky marcou oficialmente o nascimento da Geometria Não-Euclidiana. De acordo com Boyer (1999), esta Geometria ficou sendo chamada de “geometria imaginária”, porque ela parecia contrária ao senso comum. No período de 1835 a 1855,

Lobachevsky escreveu três trabalhos referentes à nova geometria. Um desses trabalhos: *Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas*, de 1840, chegou às mãos de Gauss, que louvou a obra de Lobachevsky, mas nunca lhe deu apoio impresso porque tinha medo dos comentários dos amigos matemáticos (BOYER, 1999, p. 360).

Farkas Bolyai, amigo de Gauss, também tentou demonstrar o postulado das paralelas e acabou por descobrir que seu filho, Janos Bolyai, estava envolvido com o problema das paralelas. Ao saber do fato, Farkas escreve ao filho pedindo que ele desistisse do problema. Janos continuou seus esforços e em 1829 chegou à conclusão a que Lobachevsky chegara e, após suas descobertas Janos escreve ao pai contando-as e Farkas publica no apêndice de um dos seus trabalhos o artigo de Janos (BOYER, 1999).

Gauss ao saber das descobertas de Janos Bolyai teve a mesma reação que tivera no caso de Lobachevsky, aprovação, mas sem apoio impresso. Gauss ao ser questionado, por Farkas, com relação ao artigo do filho, escreve: “não poderia elogiar a obra de Janos, pois isso seria auto-elogio, já que havia tido essas ideias já havia anos” (BOYER, 1999, p. 361). Janos ao saber da resposta de Gauss temeu ser privado da autoridade das descobertas. A publicação da obra de Lobachevsky, em alemão no ano de 1840, deixou Janos tão abalado que ele nada mais publicou. O desenvolvimento da Geometria Não-Euclidiana se deve a Lobachevsky, sendo Bolyai pouco lembrado (BOYER, 1999).

De acordo com Bachelard (1985), “durante vinte e cinco anos, Lobachevsky ocupou-se mais em estender a sua geometria do que em fundá-la. Igualmente, não se podia fundá-la a não ser estendendo-a” (BACHELARD, 1985, p. 29). Os princípios dessa nova geometria eram diferentes dos princípios euclidianos. Nessa nova geometria é possível obter mais de uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto fora dessa reta e a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos (BARKER, 1969, p. 51).

3.4 A Consistência da Geometria de Lobachevsky

O desenvolvimento dessa nova Geometria surgiu como algo revolucionário. Vários filósofos, matemáticos e pensadores de épocas passadas haviam afirmado que só existia uma Geometria verdadeira, a Geometria de Euclides. Poincaré destaca que:

[...] depois dos gritos escandalizados, habituamo-nos ao que elas tem de paradoxal; várias pessoas chegaram até a duvidar do postulado, a se perguntar se o espaço real é plano, como supunha Euclides, ou se apresenta uma ligeira curvatura. Chegaram mesmo a achar que a experiência poderia dar-lhes uma resposta a essa pergunta. É desnecessário acrescentar que isso equivaleria a desconhecer completamente a natureza da geometria, que não é uma ciência experimental (POINCARÉ, 2008, p. 110).

O fato de ter sido construída uma Geometria que contradiz o quinto postulado de Euclides não quer dizer que a Geometria Euclidiana não é verdadeira ou que é mais verdadeira que a nova Geometria. Ambas são verdadeiras e possuem um sistema lógico consistente. Smogorzhevski (1969, p. 22) destaca que ambas são verdadeiras, mas cada uma tem um campo de aplicação: não podemos usar as fórmulas da Geometria Hiperbólica para as figuras planas, assim como não podemos usar as fórmulas da Geometria Plana Euclidiana para as figuras da Geometria Hiperbólica.

Lopes (1996) destaca que no processo de negação, muitas vezes, não é necessário o abandono das teorias anteriormente construídas, mas

[...] trata-se, sim, de reordenar, de ir além de seus pressupostos, por introduzir uma nova racionalidade. Até às novas conquistas neste século, compreendia-se a ciência essencialmente como cumulativa. Uma vez que uma verdade científica era estabelecida com a clareza e a amplitude de uma Teoria Newtoniana ou de uma Geometria Euclidiana, interpretavam-se esses pressupostos como definitivos e universais (LOPES, 1996, p. 266).

Essas descobertas que perturbaram o pensamento matemático a partir do século XVIII desencadearam uma discussão referente aos limites do pensamento geométrico. Para Bachelard (1985, p. 27) “estas simples observações, estas formas iniciais do não-euclidismo já nos permitem destacar a ideia filosófica geral da nova liberdade matemática”. É importante

destacar que novas concepções estavam tomando lugar na história e na filosofia da matemática.

Os pensadores mais conservadores ficaram perturbados diante dos resultados apresentados. Compreendiam as Geometrias Não-Euclidianas como um sistema geométrico logicamente inconsistente. Consistência, no sentido que interessa a matemática, está associada à estrutura lógica abstrata do sistema. Para Barker (1969, p. 63) “dizer que um sistema é inconsistente é dizer que dos axiomas desse sistema podemos deduzir dois teoremas que se contradizem mutuamente”. Os opositores nunca conseguiram mostrar que as Geometrias Não-Euclidianas contradissem requisitos de consistência lógica. Mas a questão da consistência das Geometrias Não-Euclidianas permaneceu no ar durante algum tempo e isso fez com que os matemáticos procurassem procedimentos lógicos mais rigorosos do que os utilizados por Euclides (BARKER, 1969, p. 54).

Após um período perturbado, no qual se alimentou a esperança de tudo demonstrar, Lobachevsky fez importantes observações que contribuíram para a construção das Geometrias Não-Euclidianas. Mas, o conhecimento dessa nova Geometria não foi prontamente difundido.

Matemáticos do fim do século XIX chegaram a resultados importantes sobre a consistência da Geometria de Lobachevsky. Eles descobriram que as Geometrias Não-Euclidianas devem ser consistentes caso seja consistente a Geometria Euclidiana. Lobachevsky rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais postulados e os axiomas da Geometria Euclidiana. O que faltava era construir um modelo matemático para a Geometria de Lobachevsky. Esta Geometria ficou sendo chamada de Geometria Hiperbólica, cuja axiomatização inicia-se de maneira semelhante à axiomatização da Geometria Euclidiana. A diferença está no 5º postulado que passa a ser enunciado como: existe uma reta r e existe um ponto P fora desta reta por onde passam duas retas que não interceptam r .

O matemático Felix Klein (1849-1925) criou um modelo para a Geometria Hiperbólica, que está de acordo com os postulados dessa Geometria. O matemático Henri Poincaré (1864-1912) criou outros dois modelos para a Geometria Hiperbólica axiomática,

que foram desenvolvidos entre 1882 e 1887 e diferem do modelo de Klein, um desses modelos, denominado modelo do disco de Poincaré, será um dos objetos de estudo apresentado neste trabalho.

Após a construção da Geometria Hiperbólica, Riemann construiu outra Geometria, na qual a negação do quinto postulado se dá na não existência de retas paralelas a uma reta dada. Esta geometria é denominada Geometria Elíptica ou Riemanniana.

Pela sua história, quando se fala de Geometrias Não-Euclidianas, em geral, os matemáticos se referem à Geometria Hiperbólica ou à Geometria Elíptica. Mas, após a observação de que existem outras Geometrias que não satisfazem um ou mais dos postulados dos *Elementos*, adota-se o critério que qualquer uma dessas Geometrias é Não-Euclidiana. As Geometrias Não-Euclidianas desenvolveram-se e se mostram tão logicamente consistentes quanto a Geometria Euclidiana. A existência de tais Geometrias derrubou a crença tradicional de que as leis da Geometria Euclidiana seriam as únicas possíveis e verdadeiras.

3.5 Resistências e Obstáculos na Aceitação das Geometrias Não-Euclidianas

Com o advento da Geometria Hiperbólica muitos matemáticos, com mentalidade conversadora, ficaram perturbados e chocados diante das descobertas. A aceitação pela comunidade científica da Geometria Hiperbólica, bem como das Geometrias Não-Euclidianas não foi imediata; passaram-se décadas até que as pessoas conhecessem e aceitassem essas Geometrias (BARKER, 1969 p. 54). Contudo, percebemos que ainda hoje muitas pessoas não têm conhecimento das Geometrias Não-Euclidianas. Eves (2007) afirma que quando se tenta mostrar a existência dessas Geometrias, em geral, as pessoas ficam desconfiadas, pois o máximo que aprenderam foi a Geometria Euclidiana, e essa é a Geometria existente para elas. Este fato pode gerar certas dificuldades, resistências e até mesmo obstáculos que impedem e dificultam o aprendizado dessas Geometrias.

Gaston Bachelard (1996), em sua obra “A formação do espírito científico”, destaca a evolução da ciência, nos períodos que ele chamou de estado pré-científico e estado científico.

Mostra que a ciência evoluiu de forma não linear, que sucessivas retificações ocorreram por meio de erros, descontinuidade, rupturas e contradições. Ao iniciar o plano da sua obra Bachelard (1996, p. 17) escreve: “quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado*”. E ainda:

[...] é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 17).

Andrade (2004, p. 47) aponta que a expressão obstáculo epistemológico foi criada “para caracterizar tudo aquilo que obstrui, impede, dificulta, enfim, limita o progresso da ciência, e podem ser citados como exemplos, o pré-conceito, a ideologia, a idolatria, o senso comum e a opinião”.

Na busca pelo conhecimento científico muitas vezes os cientistas se deparam com obstáculos que podem dificultar o progresso da ciência e o entendimento de teorias. O aparecimento dos obstáculos epistemológicos é algo difícil de ser evitado, uma vez que o conhecimento científico não é alcançado sem que indagações, refutações e críticas sejam feitas; e para que o pensamento científico possa se desenvolver é necessário que esses obstáculos sejam superados.

Para Bachelard (1996, p. 18) o primeiro obstáculo que devemos superar é a opinião: “a opinião *pensa mal*; não *pensa: traduz* necessidades em conhecimento. [...] Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la. Ela é o primeiro obstáculo a ser superado”. O espírito científico não admite que tenhamos uma opinião sobre questões que não conhecemos, não compreendemos. Segundo o autor, os cientistas não devem basear suas pesquisas na experiência comum, na opinião, devem sim, estabelecer um vínculo entre a observação e a experimentação, questionando e discutindo as ideias que são apresentadas.

A noção de obstáculo epistemológico também pode ser usada na educação. Bachelard lecionou as disciplinas de química e física e teve seu pensamento voltado às

questões epistemológicas ligadas ao ensino desses conhecimentos. Observou os vínculos existentes entre o desenvolvimento histórico do pensamento científico e a prática da educação. As experiências como professor o inspiraram para alguns importantes apontamentos pedagógicos encontradas ao longo de seus livros.

Bachelard também questiona as atitudes e o comportamento dos professores de ciências com relação aos erros dos alunos: “acho surpreendente que os professores de ciências, mais do que os outros se possível for, não compreendam que alguém não compreenda. Poucos são os que se detiveram na psicologia do erro, da ignorância e da irreflexão” (BACHELARD, 1996, p. 23). A maneira como os professores têm ensinado essa disciplina e a relação professor/aluno e conhecimento também são questionados por Bachelard:

Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já construídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana (BACHELARD, 1996, p. 23).

O que se percebe é que, muitas vezes, na construção do conhecimento não são considerados os conhecimentos e as crenças que os alunos trazem consigo. Esses conhecimentos podem se constituir em obstáculos, em dificuldades no aprendizado do conhecimento científico. De acordo Bachelard (1996) o professor deve ensinar sempre questionando o seu aluno, procurando romper com os erros, as crenças, as experiências trazidas por eles. É necessário que as aulas não fiquem somente nos fatos, no senso comum, é preciso mudar o conhecimento superficial adotado pelos alunos para que eles possam construir conhecimento científico.

Os erros ocorridos na construção e evolução da ciência podem ajudar a detectar vários obstáculos epistemológicos que surgiram ao longo da história da ciência, possibilitando conhecer melhor os caminhos percorridos pela ciência. O conhecimento científico progride com rupturas. Estas rupturas são sinais de dificuldades no desenvolvimento científico anterior.

Ao analisar a obra de Bachelard (1996) destacamos alguns obstáculos epistemológicos descritos por esse autor ao longo do livro. O primeiro obstáculo Bachelard denomina de a experiência primeira, que é “a experiência colocada antes e acima da crítica – crítica esta que é, necessariamente, elemento integrante do espírito científico” (BACHELARD, 1996, p. 29). A experiência primeira fascina, porque dá preferência mais as imagens do que as ideias, buscam-se experiências curiosas e divertidas que nada acrescentam ao espírito científico; isto porque ela é livre de qualquer espécie de crítica de refutação e não constitui uma forma segura, nítida e clara que possa contribuir para a formação e o fortalecimento do espírito científico.

Bachelard (1996, p. 14) destaca ainda que “a experiência comum não é de fato *construída*; no máximo é feita de observações justapostas [...] Como a experiência comum não é construída, não poderá ser, achamos nós, efetivamente *verificada*. Ela permanece um fato”.

É comum encontrarmos professores que se baseiam em experiências e em observações para descrever um conhecimento geométrico. De acordo com Santos (2009), muitos professores “restringiam a Geometria Euclidiana ao plano, afirmaram inclusive que partes do mundo onde vivemos é plano” (SANTOS, 2009, p. 96). Perceba como conclusões indevidas de uma experiência ou de uma simples observação podem interferir no entendimento dos conhecimentos científicos e, constituir-se assim, em um obstáculo epistemológico. Podemos representar um plano euclidiano por um tampo de uma mesa, por exemplo, mas devemos deixar claro que este objeto somente representa um plano euclidiano. As experiências não devem ser baseadas no senso comum ou na opinião.

O conhecimento geral também foi considerado por Bachelard como um obstáculo ao conhecimento científico. Para Bachelard “nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do *geral*, que dominou de Aristóteles a Bacon, inclusive, e que continua sendo, para muitos, uma doutrina fundamental do saber” (BACHELARD, 1996, p. 69). As generalizações podem, muitas vezes, falsear a realidade comprometendo a veracidade das informações. Frases prontas que expressam uma generalização falseada são

mais simples de difundir, mas essas atitudes acabam retrocedendo o conhecimento científico e muitas vezes, essas afirmações, são tidas como verdades absolutas. Bachelard expõe algumas generalizações do pensamento científico:

Como fundamento da mecânica: todos os corpos caem. Como fundamento da óptica: todos os raios luminosos se propagam em linha reta. Como fundamento da biologia: todos os seres vivos são mortais. Seriam assim colocadas, no limiar de cada ciência, grandes verdades primeiras, definições intocáveis que esclarecem toda doutrina (BACHELARD, 1996, p. 70).

No contexto dessa pesquisa, algumas afirmações podem ser consideradas generalizações abusivas e constituir-se em obstáculos gerais, tais como: a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° ; dada uma reta r e um ponto P fora dessa reta existe somente uma reta que passa por P e é paralela a r ; a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360° ; entre outros. Essas afirmações são verdadeiras, desde que estejamos trabalhando com a Geometria Euclidiana. É preciso ficar claro para o professor/aluno de qual Geometria falamos, para que estes não apresentem essas afirmações como “resultados intocáveis”, “grandes verdades primeiras” que representam todas as verdades do conhecimento geométrico. Bachelard (1996, p. 71) esclarece que “é possível constatar que essas leis gerais *bloqueiam* atualmente as idéias. Respondem de modo global, ou melhor, respondem sem que haja pergunta”. Com o desenvolvimento das Geometrias Não-Euclidianas foi possível romper com essa ideia de um conhecimento geométrico único e acabado.

Outro obstáculo que Bachelard descreve é o obstáculo verbal: “um caso em que uma *única* imagem, ou até uma única palavra, constitui toda a explicação” (BACHELARD, 1996, p. 91). Muitas vezes, uma única palavra, carregada de adjetivos, pode expressar uma explicação suficiente para os mais variados fenômenos. É preciso libertar-se do uso indevido de metáforas, imagens ingênuas e analogias.

Quando falamos de ensino de Geometrias fica difícil ensinar esses conteúdos sem utilizar as figuras geométricas. Mas o que deve ficar claro para o professor/aluno é que a figura geométrica representa apenas uma instância física da representação do objeto. Uma única imagem pode constituir-se em um obstáculo verbal, como destacou Bachelard: “uma

ciência que aceita as imagens é, mais que qualquer outra, vítima das metáforas. Por isso, o espírito científico deve lutar sempre contra as imagens, contra analogias, contra metáforas” (BACHELARD, p. 48).

Ao representar uma reta paralela, no modelo do plano euclidiano – Figura 2 –, a ilustração mostra a existência de uma única reta paralela passando pelo ponto P. E, ao representar retas paralelas, no modelo do plano hiperbólico de Poincaré – Figura 3 – a ilustração mostra três, das infinitas retas paralelas, que passam por Q.

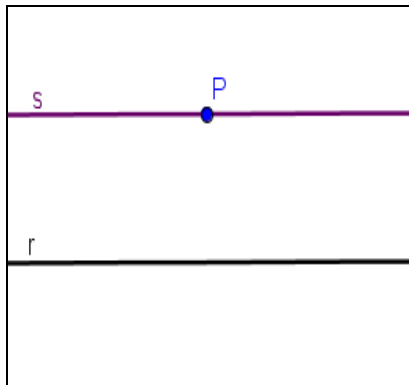


Figura 2 – Reta paralela no modelo euclidiano

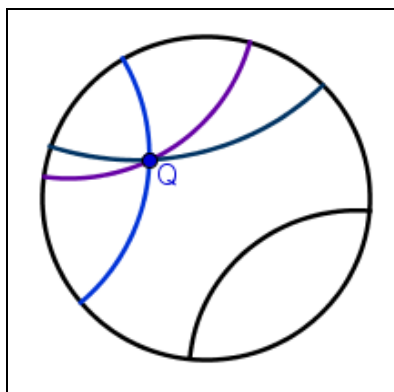


Figura 3 – Retas paralelas no modelo hiperbólico

As generalizações e uso de imagens mal explicadas, mal interpretadas podem conduzir a erros e enganos na compreensão de teorias. Perceba como são distintas as representações das retas paralelas nesses dois modelos.

Analisando a história e trajetória das Geometrias Não-Euclidianas, percebemos que ao longo dos quase dois mil anos, na tentativa de demonstrar o quinto postulado e na construção das Geometrias Não-Euclidianas, os matemáticos e as pessoas envolvidas com esses estudos encontraram obstáculos e resistências que dificultaram o entendimento da Geometria Euclidiana e das Geometrias Não-Euclidianas. Essas dificuldades, esses obstáculos também se manifestam nos professores/alunos quando estudam esses conteúdos.

4 O ensino de Geometrias

Nesta seção destacamos algumas considerações sobre a situação de abandono do ensino das Geometrias na Educação Básica e no Ensino Superior e as indicações das Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Estado do Paraná, para estes conteúdos. Como o assunto desta seção é o ensino, apresentamos uma descrição de alguns conceitos e resultados da Geometria Hiperbólica que podem ser explorados por meio do modelo do disco de Poincaré.

4.1 O Ensino de Geometria Euclidiana

As décadas de 1950 e 1960 foram marcadas pelo Movimento da Matemática Moderna – MMM, inspirado em um projeto internacional que provocou mudanças educacionais em vários países: França, Estados Unidos, Alemanha, entre outros. No Brasil, a influência predominante na introdução ao MMM foi francesa, devido aos cursos ministrados por matemáticos franceses, na Universidade de São Paulo, nas décadas de 1940 e 1950.

O Movimento defendia que a matemática deveria ser ensinada por meio da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos e das estruturas algébricas. Durante a década 1960 o Movimento ganhou força devido o lançamento dos primeiros livros didáticos que contemplavam essa nova concepção e com a criação de alguns grupos de estudos para o ensino de matemática⁸ (PAVANELLO, 1989). No entanto, o ensino de Geometria Euclidiana, com ênfase nas estruturas algébricas e linguagem simbólica da teoria dos conjuntos, não ocorreu na prática. Segundo Bertonha (1989), a Geometria lecionada nos cursos de licenciatura não adequava seus currículos as necessidades da disciplina para que os professores formados pudessem ministrá-la no ensino de primeiro e segundo grau.

A falta de preparo, dos professores da época, fez com que muitos docentes deixassem de ensinar Geometria sobre qualquer enfoque. Com a reorganização do ensino pela Lei

⁸ GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), criado em 1961, em São Paulo, e o GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática), de Porto Alegre, criado em 1964.

56.792/71 que dava autonomia para que o professor elaborasse seu programa de acordo com as necessidades dos alunos, muitos professores passaram a valorizar o ensino de Aritmética e Álgebra, e deixavam a Geometria para o final do ano e, desta forma, acabava não sendo ensinada, principalmente sob a alegação da falta de tempo.

Nacarato (2000) aponta que, ainda, na década de 70 iniciou-se um movimento em favor do resgate do ensino de Geometria, que se fez presente nas propostas curriculares oficiais e em algumas pesquisas produzidas na década de 80. Apesar das iniciativas, em resgatar o ensino de geometria, elas ainda não atingiram a maioria das escolas brasileiras, principalmente as públicas e as séries iniciais do Ensino Fundamental. Algumas pesquisas (ALMOULOU, et al., 2004; NACARATO, 2000; PAVANELLO, 1989) apontam que o ensino de Geometria ainda é um problema nas escolas brasileiras e nos cursos de formação de professores.

Um dos problemas destacado por Almouloud (et al., 2004, p. 99) é que muitos professores consideram sua formação em relação a esse conteúdo bastante precária, pois os cursos de formação de professores não contribuem para que seja feita uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e aprendizagem de Geometria. Os professores afirmam não se sentirem preparados para ensinar Geometria por não dominarem tal conteúdo, muitos desconhecem a importância da Geometria na formação e desenvolvimento cognitivo dos alunos e da sua importância na formação intelectual.

Nacarato (2000) destaca que os professores que tiveram suas formações nos anos 80 e 90, em escolas públicas e privadas não vivenciaram o ensino de Geometria, e “quando o vivenciaram, foi um ensino reducionista e simplista, limitado ao reconhecimento e identificação de formas, sem levar em consideração a complexidade do pensamento geométrico” (NACARATO, 2000, p. 159). É possível perceber o abandono que o ensino de Geometria tem sofrido nas últimas décadas, e que esse abandono ainda acontece nas salas de aula.

Alguns livros didáticos também contribuem para a origem de alguns problemas, porque na maioria das vezes eles apresentam os conteúdos de Geometria nos seções finais e

sem ligação com os assuntos abordados anteriormente. Além disso, é comum encontramos nos livros didáticos propostas que reduzem o ensino de geometria a cálculos algébricos, repetidos à exaustão e a apresentação das propriedades aparecem sem as devidas demonstrações:

[...] os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração. E ainda, quase não existe a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, além de poucos trabalhos focarem a leitura e a interpretação de textos matemáticos (ALMOULOUD, et al., 2004, p. 99).

A preocupação com o ensino de Geometria Euclidiana está presente nas propostas curriculares de matemática. Mas, segundo Nacarato (2000) o professor precisa valorizar os conteúdos por meio de atividades interessantes para que estes se tornem importantes para o aluno, pois “o êxito de um projeto de inovação curricular depende de como os professores a colocam em prática” (NACARTO, 2000, p. 256). Além da valorização dos conteúdos é preciso que o professor conheça e compreenda os saberes que elas propõem.

No estado do Paraná as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática – DCE – passaram por reformulações que foram discutidas no período de 2003 a 2008. As DCE propõem que o ensino de geometria seja abordado em todas as séries de ensino. No Ensino Fundamental o aluno deve compreender:

- os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;
- geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões (PARANÁ, 2008, p. 56).

No Ensino Médio as diretrizes apontam que o aluno deve aprofundar os conceitos de geometria plana e espacial, e:

[...] é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera (PARANÁ, 2008. p. 56).

Apesar das considerações feitas pelas DCE sobre o ensino de Geometria é importante destacar que é por meio de uma formação adequada e de formação continuada que os professores conseguirão compreender e ensinar Geometria com qualidade para os seus alunos.

4.2 O Ensino de Geometrias Não-Euclidianas

O ensino de Geometria Euclidiana não tem recebido a devida atenção que merece nos meios escolares. Quando o assunto é Geometrias Não-Euclidianas o contexto é ainda pior, uma vez que estes conteúdos são pouco abordados nos cursos de formação de professores de matemática e, são poucas as instituições de ensino superior que incluem nas suas estruturas curriculares a disciplina ou tópicos relacionados a ela (CABARITI, 2004).

Para compreender as Geometrias Não-Euclidianas é necessário conhecer a Geometria Euclidiana axiomática, pois foi por meio das questões levantadas sobre o modelo axiomático de Euclides que foi possível construir outras Geometrias. De acordo com Santos (2009), muitos professores desconhecem a Geometria Euclidiana axiomática e nunca ouviram falar a palavra axioma, e que, a Geometria Hiperbólica e a Geometria Esférica são as Geometrias que os professores têm maior dificuldade em compreender devido aos conceitos e teoremas que aparecem nessas Geometrias serem diferentes da Geometria Euclidiana. A autora também destaca que, é comum encontrarmos professores que restringem a Geometria Euclidiana ao plano e afirmam que partes do mundo onde vivemos é plana.

As DCE do Paraná trazem o conteúdo noções de Geometrias Não-Euclidianas que devem ser ensinadas no Ensino Fundamental e Médio. No Ensino Fundamental o aluno deve ser capaz de compreender: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte);

geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados); e noção de geometria dos fractais (PARANÁ, 2008).

No Ensino Médio deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Também no Ensino Médio deve-se aprofundar o estudo das Noções de Geometrias Não-Euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais; a Geometria Hiperbólica; e a Geometria Elíptica. Com relação a essas geometrias as Diretrizes recomendam:

Na geometria dos Fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski. Para abordar os conceitos elementares da Geometria Hiperbólica uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da Geometria Elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto a medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: pólos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008. p. 27-8).

A própria Diretriz salienta que o professor não deve se deter somente na abordagem das Geometrias Fractal, Hiperbólica e Elíptica descritas acima. Ele tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens que envolvam os conceitos básicos destas Geometrias, e destaca que esses conteúdos são fundamentais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico (PARANÁ, 2008).

Para trabalhar com os conteúdos propostos, o professor de matemática deve conhecer e compreender esses conteúdos. Sabemos que a grande maioria dos professores utiliza o livro didático para auxiliá-lo nas suas aulas, mas segundo Kaleff e Franca (2007) a grande maioria dos livros didáticos de matemática não apresenta conteúdos relacionados ao assunto. Os livros didáticos do Ensino Médio apresentam o conceito de retas paralelas e as suas propriedades da Geometria Euclidiana e quando abordam outras formas de paralelismo e conceitos não-euclidianos, não apresentam “formas gráficas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos, bem como nenhuma relação ou inferência lógica favorece o estabelecimento dos novos

conceitos” (FRANCA e KALEFF, 2007, p. 5). Na maioria das vezes os livros didáticos não falam sobre a existência de outras Geometrias, ou quando o fazem é como ilustração ou um fato da história.

Os professores apresentam uma resistência ao ensino de Geometrias Não-Euclidianas. Além de muitos não as conhecerem como um conhecimento geométrico também desconhece a importância de ensinar esses conteúdos. De acordo com Santaló (2006), a quantidade de matemática que se conhece é imensa e cresce constantemente e, com isso, fica difícil decidir qual matemática deve ser ensinada e de que maneira deve ser apresentada para maior compreensão dos alunos. Expõe ainda que:

Aos professores de matemática compete selecionar entre toda a matemática existente, a clássica e a moderna, aquela que possa ser útil aos alunos em cada um dos diferentes níveis de educação. Para a seleção temos de levar em conta que a matemática tem um valor formativo, que ajuda estruturar todo o pensamento e a agilizar o raciocínio dedutivo, porém que também é uma ferramenta que serve para atuação diária e para muitas tarefas específicas de quase todas as atividades laborais (SANTALÓ, 2006, p. 15).

Proporcionar aos alunos da Educação Básica o estudo das Geometrias Não-Euclidianas possibilitará que estes ampliem o conhecimento e o pensamento geométrico, resgatem a história das Geometrias, compreendam problemas do cotidiano, aprofundem temas da Geometria Euclidiana, além de mostrar que a Geometria Euclidiana não é a única Geometria que existe.

4.3 Geometria Hiperbólica: Modelo de Poincaré

O francês Henri Poincaré (1864-1912) criou um modelo para a Geometria Hiperbólica axiomática, desenvolvido entre 1882 e 1887. Passaremos a descrever algumas características deste modelo⁹, denominado modelo do disco de Poincaré, que, no decorrer deste texto, chamaremos simplesmente de modelo de Poincaré.

⁹ As características deste modelo serão apresentadas segundo Greenberg (1980).

Poincaré criou o seu modelo baseado na Geometria Euclidiana. Os pontos desse modelo são pontos no sentido habitual que estão em um plano. O plano é, *por definição*, o interior de um círculo euclidiano, ou seja, se O é o centro de uma circunferência euclidiana qualquer e OR um de seus raios, o plano no modelo hiperbólico é constituído por todos os pontos P tais que $\overline{OP} < \overline{OR}$. A circunferência (que por definição não faz parte do plano) é chamada de horizonte.

As retas neste modelo são cordas abertas que passam pelo centro O (ou seja, os diâmetros abertos), e arcos de circunferências abertos ortogonais¹⁰ ao horizonte. No decorrer do texto chamaremos estas retas de retas hiperbólicas, ou simplesmente de h-retas.

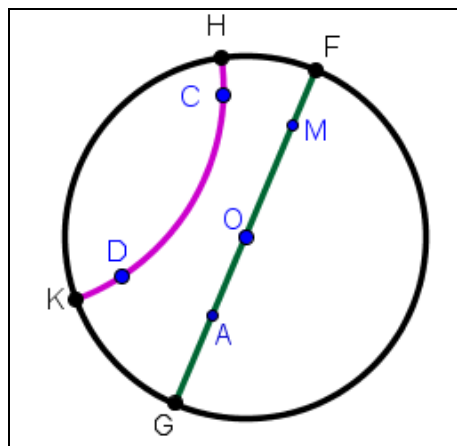


Figura 4 – H-retas e horizonte

Na figura 4 o arco KCH e o diâmetro GF são retas hiperbólicas no modelo de Poincaré. Os pontos de intersecção das retas hiperbólicas com o horizonte (neste caso os pontos F , G , H e K) não pertencem ao plano hiperbólico e são chamados de pontos ideais da h-reta.

Neste modelo, se duas h-retas se interceptam em um ponto J , elas vão determinar um ângulo. A medida do ângulo formado por elas é, *por definição*, a medida do menor ângulo formado pelas semirretas euclidianas que são tangentes aos arcos (retas hiperbólicas) no ponto

¹⁰ Duas circunferências secantes são ortogonais se em cada ponto de intersecção os raios são perpendiculares.

em que estes se interceptam. Portanto, para calcular a medida de ângulo nesse modelo é preciso encontrar as retas euclidianas tangentes aos arcos para depois calcular a medida do ângulo formado por essas duas retas, como mostra a figura a seguir:

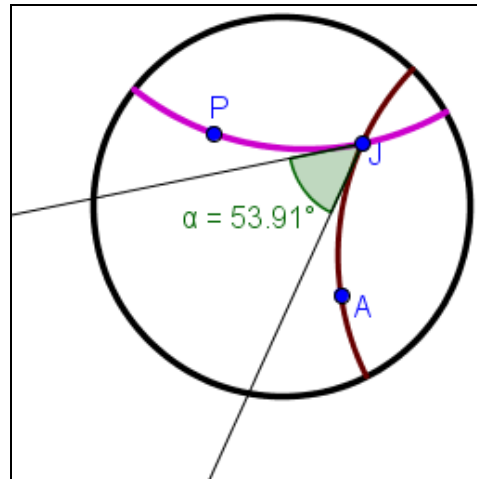


Figura 5 – Ângulo entre h-retas

A distância entre dois pontos neste modelo é dada pela seguinte *definição*:

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{\overline{AU} * \overline{BV}}{\overline{AV} * \overline{BU}} \right|, \text{ na qual U e V são pontos ideais da h-reta AB. A operação definida}$$

por * é a multiplicação usual de números reais, e as medidas dos segmentos \overline{AU} , \overline{BV} , \overline{AV} e \overline{BU} são euclidianas. O esboço encontra-se na figura 6.

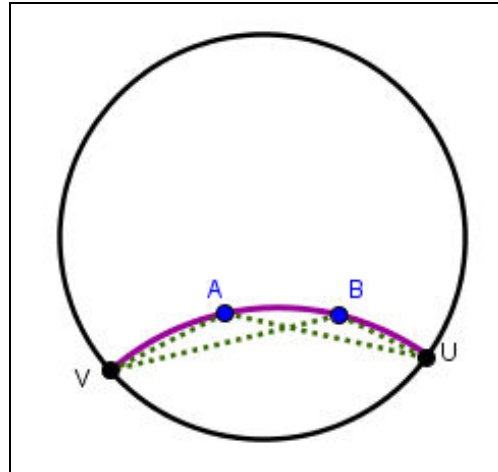


Figura 6 – Distância entre dois pontos

Poincaré usou esta métrica para construir um espaço ilimitado (plano hiperbólico), em um espaço limitado com a métrica euclidiana (circunferência euclidiana). A métrica desenvolvida por Poincaré permite que quando os pontos A e B se aproximam dos pontos ideais o valor das medidas \overline{AV} e \overline{BU} diminuam, conseqüentemente o logaritmando aumenta e, assim, depois da aplicação da função logarítmica a função distância tende ao infinito. Ao aproximar os pontos A e B o valor das medidas \overline{AU} e \overline{BV} diminuam, o que ocasiona, depois da aplicação da função logarítmica uma distância que tende a zero.

Na figura 7 os pontos A e B estão próximos dos pontos ideais e por isso a distância hiperbólica é maior, ou seja, a distância hiperbólica é $g = 43.32$ unidades de comprimento e a distância euclidiana é $h = 5.68$ unidades de comprimento. Na figura 8 os pontos A e B estão próximos e a distância hiperbólica é menor, ou seja, a distância hiperbólica é $g = 1$ unidade de comprimento e a distância euclidiana é $h = 2.88$ unidades de comprimento.

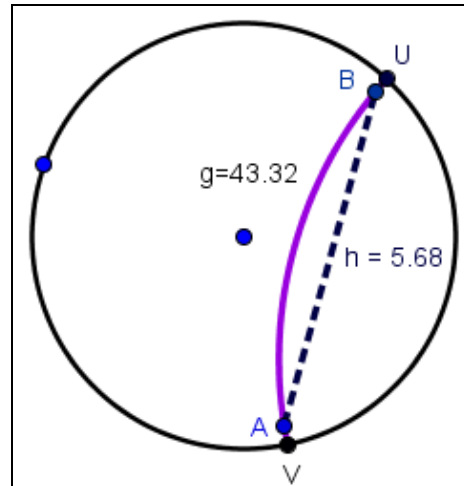


Figura 7 – Distância quando A e B se aproximam dos pontos ideais

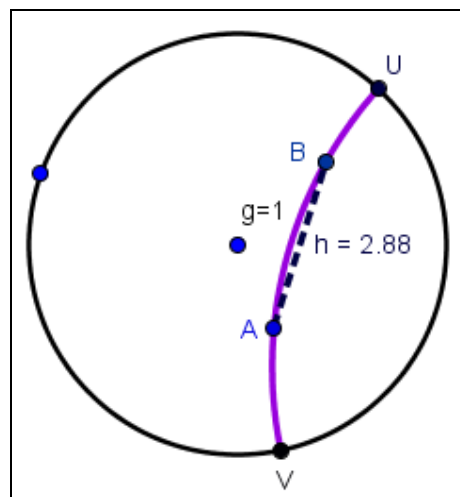


Figura 8 – Distância quando A e B estão próximos entre si

Ao utilizarmos a métrica desenvolvida por Poincaré, obtemos que a distância entre dois pontos quaisquer, quando estes estiverem próximos do horizonte, tenderá ao infinito. Isso acontece porque as h-retas, assim como a reta euclidiana, devem ser ilimitadas.

Retas paralelas neste modelo são retas que, *por definição*, assim como na Geometria Euclidiana, não possuem nenhum ponto em comum. Neste modelo, dado um ponto P, não

pertencente a uma h-reta AB é possível traçar, por P, infinitas h-retas paralelas a h-reta AB. Na figura 9 encontramos o esboço de algumas h-retas paralelas.

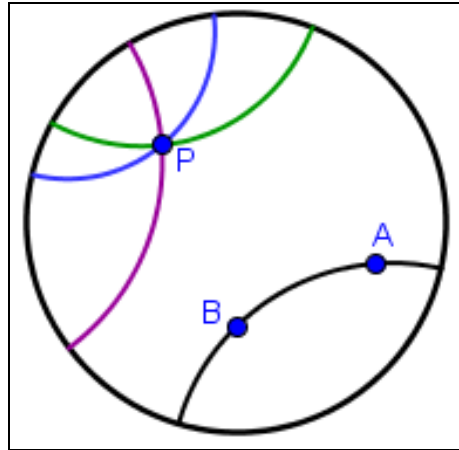


Figura 9 – H-retas paralelas

Dada duas h-retas CP e AB, a h-reta CP, é chamada de h-reta paralela limite da h-reta AB, se ela tiver um ponto ideal em comum com a h-reta AB.

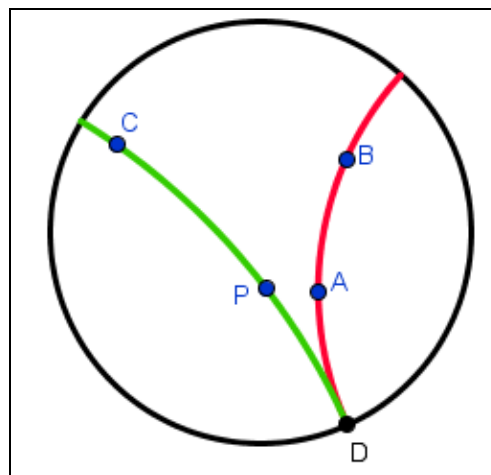


Figura 10 – H-retas paralelas limites

Dada uma h-reta AB e um ponto P fora dela, existem duas h-retas paralelas limites que separam as demais retas hiperbólicas que passam por P. As h-retas que interceptam AB são as retas secantes e as h-retas que não interceptam AB são as não secantes, ou seja, paralelas a h-reta AB. Na figura 11 o ângulo α é o ângulo de paralelismo das h-retas PJ e PI.

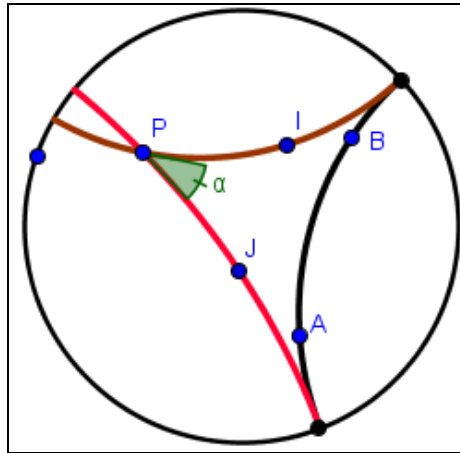


Figura 11 – Ângulo de paralelismo

Na figura 12 as h-retas PI e PJ são paralelas limites à h-reta AB; as h-retas PC e PD são h-retas secantes a h-reta AB; as h-retas PF e PH são as retas que não interceptam a h-reta AB, ou seja, são paralelas a h-reta AB (não secantes a h-reta AB).

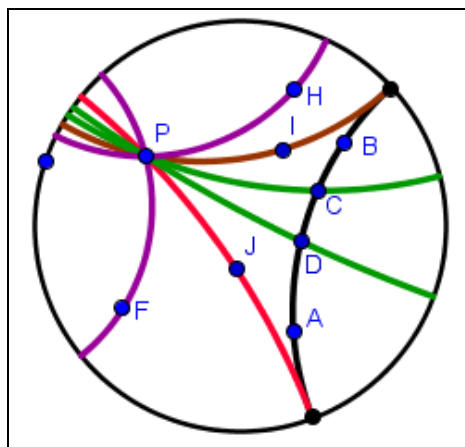


Figura 12 – H-retas paralelas limites passando por um ponto

5 Novas Tecnologias na Educação

A inserção da informática na educação encontra-se em um território no qual se destaca a relação entre as novas tecnologias – computadores, calculadores, *softwares* matemáticos, entre outros – e as novas condições de aprendizagem. A utilização e a implementação de recursos tecnológicos na educação, tanto na escola pública quanto na privada, tem levantado diversas questões, das quais Borba (1999, p. 285) destaca “as preocupações relativas às mudanças curriculares, às novas dinâmicas da sala de aula, ao “novo” papel do professor e o papel do computador nesta sala de aula”.

Incluir as novas tecnologias na educação é algo inevitável nos dias atuais, uma vez que o computador está cada dia mais presente nas nossas funções diárias e, a escola deve apropriar-se dessas tecnologias para contribuir no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, as mudanças que ocorrem na educação são lentas e quase sempre imperceptíveis. Valente (1998) expõe que a educação é quase sempre apresentada no nível do desejo e não do que realmente acontece, e que, proporcionar mudanças na escola, adequando-a as exigências da sociedade atual, é um dos grandes desafios educacionais.

É inegável o fato de que a cada nova geração o uso e a familiarização com as novas tecnologias serão cada vez mais fáceis e mais rápidos. Turkle (1983) destaca que:

As crianças numa cultura de computador são afectadas pela tecnologia de maneiras que as separam das gerações anteriores. Os adultos são mais estáveis. Na pior das hipóteses, estão encerrados no desempenho de papéis, receosos de mudanças e protegendo o que lhes é familiar (TURKLE, 1983, p. 143).

A presença do computador confere nova legitimidade a um conjunto de valores com que muitas pessoas não se sentem a vontade. Esta cultura se caracteriza por formas de pensamento não-lineares que envolvem negociações, abrem caminhos para diferentes estilos cognitivos e emocionais em que os adultos não estão acostumados e terão que criar novos caminhos para ressignificar sua forma de ser e estar no mundo da cultura da computação (TURKLE, 1983).

No início das discussões sobre o uso de tecnologias informáticas na educação, muitos professores temiam ser substituídos pelas máquinas, porém, a ameaça anterior cede lugar ao desconforto gerado pela presença da tecnologia informática (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 53-4).

As tecnologias parecem estar tão distantes da educação que Papert (1994, p. 9), em seu livro “A Máquinas das Crianças”, nos faz refletir sobre a profissão docente e como a escola é antiga nos seus moldes de ensino. Papert compara o trabalho de um médico e o de um professor de um século anterior. Descreve que se um grupo de médicos e um de professores ficasse um século viajando pelo tempo, cada um ficaria ansioso para ver o quanto as coisas mudaram em suas profissões. Após esse período longe, o médico ficaria espantado com as modernas salas de cirurgias e provavelmente pudesse entender o que estaria acontecendo, qual órgão estava sendo manipulado, mas seria incapaz de imaginar o que o cirurgião estava tentando fazer ou qual a finalidade dos muitos aparelhos que estavam sendo utilizados. O professor responderia de uma forma muito diferente a uma sala de aula moderna, pois ele iria encontrá-la praticamente igual com apenas alguns poucos objetos estranhos, mas perceberia a finalidade da maior parte deles e com facilidade poderia assumir a classe. Com essa narrativa, Papert quer nos mostrar que embora tenham ocorrido mudanças e progressos na ciência e na tecnologia, a escola é uma área que quase não mudou.

De acordo com Ponte (2000), encontramos entre os professores atitudes diversas em relação às novas tecnologias. Alguns, desconfiados e inseguros, adiam o máximo possível o uso das novas tecnologias. Outros usam na sua vida diária, mas não sabem muito bem como utilizá-las no contexto escolar. Uma minoria entusiasmada utiliza explorando novos caminhos e ideias.

Borba e Penteado (2001), destacam que o professor prefere permanecer em uma *zona de conforto*, ou seja, o professor procura conduzir a sua prática por um caminho já conhecido. Os professores:

Não se movimentam em direção a um território desconhecido. Muitos reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos a possuem um discurso que indica que gostariam que fosse

diferente. Porém, no nível da sua prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não os agrada (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 53-4).

Para o professor a *zona de conforto* é sempre previsível e ele tem dificuldade em avançar “para o que chamamos de *zona de risco* na qual é preciso avaliar constantemente as consequências das ações propostas (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 54-5). Muitos professores desistem quando percebem a dimensão da *zona de risco* e evitam qualquer tentativa nesse sentido.

Contudo, a simples presença dos recursos tecnológicos na escola não é garantia de maior qualidade de ensino e os recursos não mudam diretamente o ensino ou a aprendizagem. Eles devem servir para enriquecer o ambiente educacional e propiciar a construção do conhecimento de forma crítica e criativa. A verdadeira função do computador não deve ser a de ensinar, mas sim a de criar condições de aprendizagem e para isso acontecer precisamos ter professores capacitados e interessados em trabalhar com os recursos disponíveis.

Uma das necessidades é investir na formação e na preparação do professor para que ocorra uma utilização coerente das novas tecnologias. O professor precisa conhecer as possibilidades de uso dos recursos disponíveis para utilizá-los como instrumento para a aprendizagem, e ainda, é preciso que o professor saiba utilizar as ferramentas do computador (abrir/salvar arquivos, fazer buscar, etc). A formação acadêmica e continuada do professor é um alicerce fundamental para que isso possa ocorrer.

O uso do computador na educação depende também da existência de *software* educacional de qualidade e que atenda as necessidades do professor na hora de elaborar atividades sobre um assunto específico. No âmbito da Educação Matemática, o desenvolvimento de *softwares* educacionais envolvendo conteúdos de Matemática levou muitos pesquisadores a estudar as implicações dos recursos desses *softwares* na aprendizagem de conceitos matemáticos. Muitas pesquisas foram e estão sendo realizadas com *softwares* de matemática e o uso desses tem sido recomendado e discutido em diversos trabalhos (BORBA, 1999; PENTEADO, 1999; ZULATTO, 2002; CANDEIAS, 2005).

É preciso destacar que embora sejam muitas as potencialidades que os *softwares* de matemática oferecem à educação, é necessário ficar atento que a qualidade da utilização dos mesmos depende da forma como eles são utilizados pelos professores. Não podemos deixar de destacar o papel do professor durante as aulas com o auxílio computacional, que deve ser o de “vigiar” as hipóteses e conjecturas dos alunos para que estes não se precipitem em fazer generalizações incorretas dos conteúdos estudados.

5.1 O *Software* de Geometria Dinâmica GeoGebra

Os *softwares* de Geometria Dinâmica são ferramentas que auxiliam o professor/aluno no aprendizado de Geometrias. Uma das funções disponibilizada por esses *softwares* é a possibilidade de “arrastar” figuras ou partes de figuras na tela do computador, sem perder os vínculos estabelecidos inicialmente. Esta função é uma ferramenta que enfatiza a diferença entre desenhar e construir figuras, contribuindo para a aprendizagem dos conceitos geométricos. Diferentes de outros *softwares* de Geometria, os *softwares* de Geometria Dinâmica possuem um recurso que Gravina (1996) chamou de “régua e compasso eletrônicos” que possibilitam a construção em tempo real, mantendo as propriedades geométricas que caracterizam a situação. As construções são realizadas de modo que:

[...] desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema (GRAVINA, 1996, p. 4).

O *software* de geometria dinâmica que utilizamos nesta pesquisa foi o GeoGebra. Este *software* foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, no ano de 2002, e é de distribuição gratuita. O GeoGebra propicia ao professor/aluno trabalhar com conteúdos de Geometria, Álgebra e Cálculo. Com ele é possível fazer construções de: pontos, retas, circunferências ou círculos, segmentos, vetores, gráficos de funções, entre muitos outros recursos, e mudá-los posteriormente. Ele também possui a janela de álgebra e a janela geométrica, equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente no campo de

entrada. As construções feitas no GeoGebra são dinâmicas e interativas, o que faz do *software* um excelente laboratório de aprendizagem de Geometria.

Quando falarmos de Geometria muitos são os fatores envolvidos: as construções, as figuras, os conceitos geométricos, entre outros. Gravina (1996) expõe que na formação mental da imagem, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha papel fundamental, o que, muitas vezes, não fica muito claro para o aluno é que o desenho representa apenas uma instância física de representação do objeto. O aluno ou até mesmo os professores, têm dificuldades de abstrair o conjunto de condições geométricas que definem esse objeto. Ao construir um triângulo equilátero, por exemplo, o professor tem a possibilidade de explorar com o seu aluno a sua construção passo-a-passo, mostrar as propriedades que envolvem o triângulo, tais como: congruência (lados e ângulos), a soma dos ângulos internos, entre outras. Com esse tipo de construção o aluno poderá aumentar e diminuir o lado desse triângulo e este continuará sendo um triângulo equilátero, ou seja, as propriedades vão se manter.

Contudo, a construção dos objetos geométricos raramente é abordada em sala de aula. Dificilmente encontramos em livros exercícios que solicitem ao aluno construir objetos geométricos, mais raro ainda é encontrar questões do tipo “o que concluímos nesta situação?”, “e se rotacionarmos ou transladarmos o desenho, o que aconteceria?” ou “é possível fazer generalizações?”, com esse tipo de atividade, estratégias de investigações seriam estabelecidas e desenvolvidas. Com relação aos aspectos estáticos do desenho é importante destacar que:

[...] tanto no caso de formação de conceitos, quanto de dedução de propriedades, podemos concluir que grande parte das dificuldades se originam no aspecto estático do desenho. Se passamos para um tratamento de “desenhos em movimento”, as particularidades da contingência de representação física mudam, e o que emerge são os invariantes, ou seja, as reais propriedades geométricas da configuração (GRAVINA, 1996, p. 6).

Ensinar Geometria em uma sala de aula convencional é praticamente impossível se não utilizarmos o aspecto estático dos desenhos geométricos. Nesse contexto os recursos disponíveis nos *software* GeoGebra desempenham papel fundamental para a realização das atividades envolvendo “desenhos em movimento”.

Ao desenvolver atividades com o auxílio do GeoGebra, o aluno tem a possibilidade de construir figuras e analisar se suas propriedades de fato são verificadas, formular argumentos válidos para descrever essas propriedades, fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios. As figuras podem ser arrastadas na tela do computador sem perder os vínculos estabelecidos na construção. Além disso, é possível realizar construções que com lápis, papel, régua e compasso seriam difíceis, ou no mínimo gerariam imprecisões.

6 Análise dos Dados

Nesta seção apresentamos a análise dos dados obtidos na pesquisa, por meio das categorias estabelecidas: Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica, Novas Tecnologias na Educação e o *Software* GeoGebra e Resistências e Dificuldades em Aceitar as Geometrias Não-Euclidianas.

6.1 Geometria Euclidiana

O objetivo do minicurso “O Modelo de Poincaré e o GeoGebra” foi propor aos professores um estudo sobre a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica, enfatizando tanto a parte teórica quanto as construções geométricas.

Para averiguar as dificuldades e os conhecimentos dos professores em Geometria Euclidiana vamos analisar as falas, enquanto os professores eram questionados pelos monitores, e as respostas obtidas por meio do questionário.

Queremos ressaltar que em alguns momentos não será possível saber com clareza quantos professores responderam as perguntas feitas, devido à sobreposição das falas. Durante a transcrição utilizamos alguns códigos: (...) pausa curta; (0.40) pausa de quarenta segundos; (2.0) pausa de dois minutos; o código MDP significa que mais de um professor falou ao mesmo tempo.

A nossa preocupação foi que os professores conseguissem realizar as construções sugeridas, mas também compreendessem os seus conceitos e propriedades das Geometrias. A primeira construção realizada foi um triângulo equilátero. Antes de iniciar a atividade perguntamos aos professores qual era a definição de triângulo equilátero.

M1: o que é um triângulo equilátero?

(...)

M1: quais são as propriedades do triângulo equilátero?

P1: três lados congruentes e...

(...)

P2: três lados congruentes e três ângulos congruentes.

M1: isso, três lados congruentes e três ângulos congruentes. Pergunto pra vocês: o que é o lado de um triângulo equilátero?

P2: um segmento de reta.

M1 pergunta aos professores qual a definição de um triângulo equilátero e a maioria dos professores teve dificuldades em responder a pergunta. O professor P1 não conseguiu concluir a sua frase; o professor P2 não teve dificuldade em dizer as propriedades do triângulo equilátero. Nessa atividade, e nas demais atividades que foram propostas, observamos que os professores, muitas vezes, encontraram dificuldades em expressar as definições e propriedades que justificam as construções realizadas. Na continuação da atividade, M1 pergunta aos professores como eles construiriam um triângulo equilátero com régua e compasso.

M1: com régua e compasso, como que eu construo um triângulo equilátero?

(0.40)

P3: eu pegaria um lado sobre aquela reta e construiria o ponto médio.

M1: ponto médio?

P3: é, e levantava uma perpendicular por ali.

(0.40)

P4: com centro do compasso em A e abertura do tamanho do lado eu vou achar um ponto B e com a mesma abertura do lado, eu traço outra circunferência e o encontro das duas circunferências me dá o ponto C.

(o esboço da construção encontra-se na figura 13)

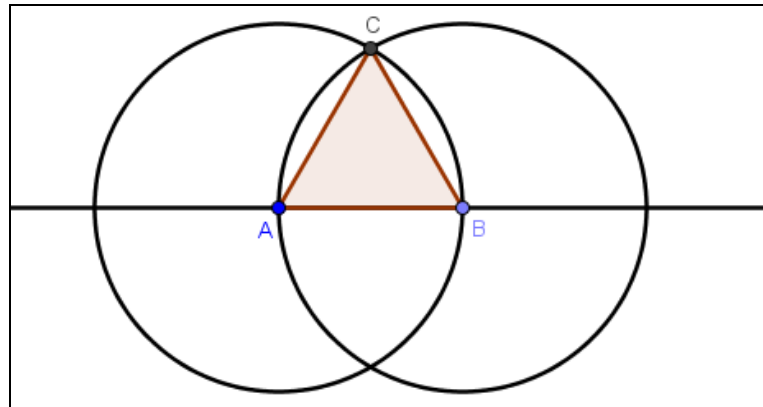


Figura 13 – Esboço construção triângulo equilátero.

Na fala do professor P3, tudo indica que ele estava pensando na construção de um triângulo isósceles pelo fato de ter sugerido que encontrássemos o ponto médio e depois construíssemos uma reta perpendicular passando por esse ponto. A professora P4 não teve dificuldades em relatar a maneira como ela fazia a construção do triângulo equilátero. O restante dos professores não respondeu à pergunta. Nos diálogos com os professores, percebemos que a maioria não conhecia os procedimentos utilizados para realizar as construções geométricas.

No decorrer da atividade M1 auxilia uma professora que não conseguiu construir um segmento de reta:

M1: você tem que construir um segmento.

(...)

P5: é esse aqui? (nesse momento a professora clica sobre a opção “reta definida por dois pontos”)

M1: não, você selecionou reta. O que você ta selecionando?

P5: ah, ta.

Durante o minicurso muitos professores mostraram dificuldades em saber a diferença entre reta, semirreta, segmento de reta. Somente depois que M1 questiona a professora P5 ela se dá conta do que tinha construído. A professora P6 ao construir os segmentos de reta do triângulo equilátero teve a mesma dificuldade da professora P5:

P6: agora falta ligar?

M1: isso, com segmentos de reta.

P6: esse? (a professora mostra a opção “reta definida por dois pontos”)

M1: segmento de reta!

P6: ah tá. (nesse momento a professora seleciona a opção reta definida por dois pontos)

M1: foi segmento definido por dois pontos que você selecionou?

P6: foi!

M1: foi? (nesse momento a professora já tinha clicado em um dos pontos e aparece uma reta na tela)

P6: ah, não foi.

As professoras P5 e P6 tiveram que ser questionadas por M1 para perceberem a diferença entre reta e segmento de reta. A atividade seguinte foi à construção de um triângulo dado três lados quaisquer.

M1: agora como que eu vou fazer então pra construir um triângulo que vai ter esses três segmentos como lado do triângulo?

P7: circunferência dado centro e raio?

M1: isso! Vou usar o compasso do GeoGebra.

Nesta atividade, os professores que já conheciam o *software* GeoGebra, que tinham mais facilidades em Geometria Euclidiana e que sabiam utilizar as ferramentas do computador, conseguiram acompanhar melhor as construções. Para iniciar a construção construímos três segmentos quaisquer, uma reta qualquer, um ponto sobre essa reta e depois uma circunferência com centro no ponto e raio igual ao tamanho de um dos segmentos construídos anteriormente. Depois de M1 ter feito essa construção, ele pergunta para os professores:

M1: vocês concordam comigo que esse ponto de intersecção vai ser o meu segundo ponto, sim ou não?

P9: sim.

P10: como que você perguntou?

M1: esse ponto aqui, de intersecção?

P10: vai ser o segundo vértice.

(...)

M1: e agora como que eu vou fazer pra construir o terceiro vértice? (...) Como que eu faria com régua e compasso?

(...)

P11: faz uma circunferência saindo de B com raio “b” e outra saindo de A com raio “c”, a intersecção dos dois dá o vértice C.

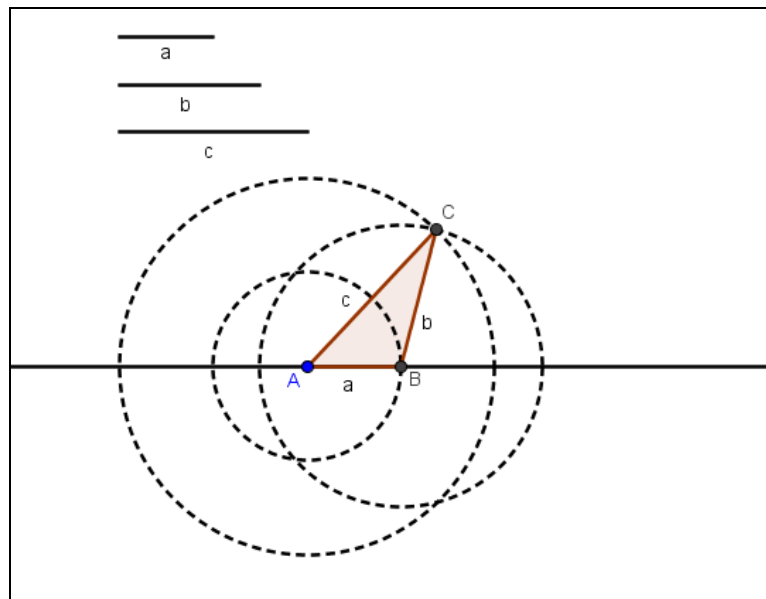


Figura 14 – Esboço da construção de triângulo dado três lados quaisquer

A professora P11 ao explicar como faria para construir o terceiro vértice do triângulo utiliza a expressão: “circunferência saindo de B”, fato este que nos parece um tanto estranha, uma vez que a circunferência não sai de um ponto. Para construir uma circunferência é necessário uma distância – o raio da circunferência – e um ponto – o centro da circunferência. Perceba que a professora P11 utiliza uma linguagem que não expressa corretamente à maneira como se constrói uma circunferência.

No decorrer da atividade, alguns professores estavam atrasados e não conseguiam acompanhar as instruções do monitor. Depois de terminada a construção M2 pergunta aos professores:

M2: se a gente fizesse outra construção com os mesmos segmentos ia ser o mesmo triângulo de mesma área, com os mesmos lados, com os ângulos congruentes, com os lados congruentes. Por quê?

(0.30)

M1: eu construí aquele triângulo meu lá, e se eu construísse um outro?

P2: com os mesmos segmentos?

M1: isso, com os mesmos segmentos, mas poderia ser em outro lugar”.

M2: ia sair outro triângulo.

P2: com as mesmas medidas.

M2: por quê?

P12: não é pelo teorema dos ângulos externos?

M2: ângulos externos não.

P19: porque seria lado, lado, lado.

P1: é ângulo, lado, lado.

M2: é lado, lado, lado. E aí isso é o que?

P19: semelhança.

M2: semelhança?

P18: congruência.

M2: congruência de triângulos.

O objetivo dessa pergunta foi verificar se os professores sabiam qual era a propriedade que justificava a construção realizada. O professor P1 tenta justificar a construção por um caso de congruência que não existe: ângulo, lado, lado. A professora P19 justifica corretamente o caso de congruência, mas ela diz que é um caso de semelhança de triângulos. Isso mostra que os professores têm dificuldades em conceitos de congruência e semelhança de triângulos.

A próxima atividade foi a construção de um quadrado. M2 pede para os professores construírem um segmento qualquer, que será um dos lados do quadrado, e uma reta suporte para iniciar a construção.

M2: como que a gente poderia construir o quadrado com lado de medida “a”, que é a medida desse segmento que a gente tem aqui?

(3.0)

M1: e aí deu certo?

P1: eu tentei fazer aqui ó, o quadrado com essa medida de segmento aqui “a”.

M1: essa medida aí, daquele ponto lá até a intersecção da perpendicular é um lado né?

P1: é um lado, mas esse lado aqui é o “a”? Como que eu vou saber que é o “a” esse aqui?

M1: por quê? Porque você construiu uma circunferência com raio “a”, não foi?

(...)

P1: é eu fiz... (o professor P1 construiu um segmento qualquer)

P9: eu fiz a minha circunferência com raio “a”.

M1: então agora você vai marcar o ponto de intersecção da circunferência com a reta. Vem aqui na opção (...) aí intersecção de dois objetos, aí clica na circunferência e na reta (...) agora esse aqui é um lado.

P1: o tamanho do segmento.

M1: esse lado aqui é “a”, mas eu preciso “a” aqui, aqui e aqui. Como que eu faço?

P1: reta perpendicular.

P9: faz reta perpendicular aqui.

M1: isso, agora eu venho aqui e seleciono reta perpendicular (...) clica no ponto preto e na reta (...) marco? (...) então agora o que acontece: você tem uma reta perpendicular e você tem que marcar “a” aqui. Como que você vai fazer isso?

P9: eu ia pega o compasso aqui com essa medida e ponta seca aqui (...) aonde ta o compasso?

M1: o compasso ta aqui (...) clica nesse ponto e o raio vai ser “a”. Então essa intersecção dessa perpendicular com essa circunferência vai ser o vértice. Agora você marca ele.

P9: agora tem passar uma paralela aqui?

M1: pode ser, ou uma outra perpendicular aqui.

(o esboço da construção encontra-se na figura 15)

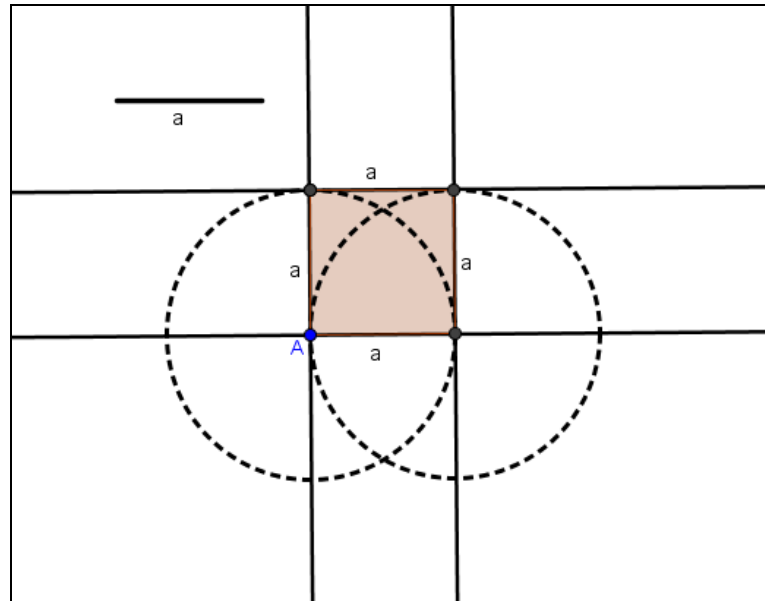


Figura 15 – Esboço da construção de um quadrado

O professor P1 inicia a construção com um segmento que não foi o que ele tinha definido inicialmente, por isso ele pergunta como que ele vai ter certeza que o segmento que ele construiu, na reta suporte, era igual o segmento construído no início. A professora P9 inicia a construção corretamente, mas na hora de construir a perpendicular fica com dúvida e M1 a auxilia. Percebe-se que além da dificuldade em utilizar as ferramentas do *software*, a professora não tinha certeza de como ela usaria as retas perpendiculares ou paralelas para construir um quadrado. M2 pergunta aos professores qual a definição de um quadrado:

M2: gente o que é um quadrado?

(0.30)

P1: polígono que possui quatro lados congruentes.

P9: quatro lados congruentes e...

M2: quatro lados congruentes e?

(...)

P2: quatro lados congruentes e quatro ângulos congruentes.

P1: quatro ângulos retos, senão vai ficar um losango.

M2: isso.

A dificuldade em responder a pergunta demonstra que os professores, muitas vezes, trabalham com uma das propriedades do quadrado – lados congruentes – e esquecem de citar a outra propriedade, a saber, que os quatro ângulos são congruentes. Observamos, em alguns momentos, que os professores apropriam-se das conclusões provisórias uns dos outros, ou seja, quando um professor responde a uma pergunta os demais ajustam a sua fala com base na fala desse professor, mesmo sem saber se a resposta está correta ou não.

A atividade seguinte foi: dada uma reta qualquer, construir as retas paralelas a reta dada tal que a distância entre essas retas seja igual a medida de um segmento qualquer dado.

M2: alguém tem alguma ideia de como que faz?

P1: faz uma reta suporte.

M2: uma reta suporte?

P10: uma reta perpendicular.

M2: uma reta perpendicular.

(1.0)

P7: eu fiz uma reta perpendicular e fiz a circunferência com raio igual o segmento e fiz a paralela na intersecção.

M2: deu uma só?

P7: uma só o que?

M2: uma reta paralela (...) da uma olhada se só tem uma?

P7: eu só fiz essa de baixo.

M2: mas tem quantas paralelas com essa medida aqui?

P7: eu fiz uma só.

M2: dá uma olhada, tem quantas que é paralela a essa e tem essa medida?

(...)

P7: a ta, eu tenho uma superior e uma inferior.

(o esboço da construção encontra-se na figura 16)

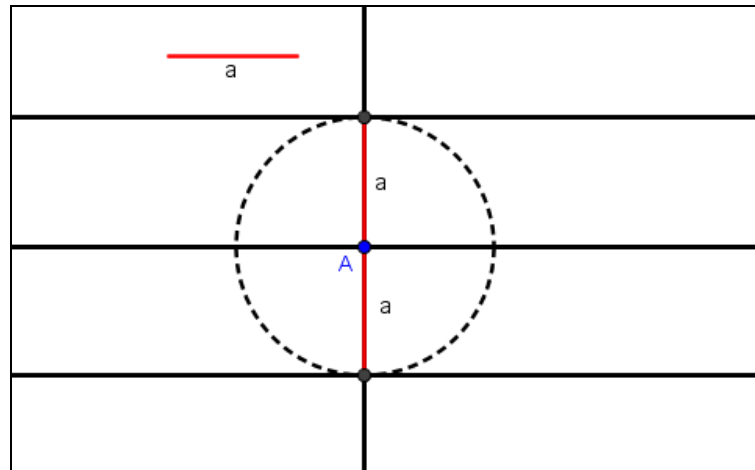


Figura 16 – Esboço da construção de uma reta paralela

Os professores P1 e P10 dão uma sugestão para começar a atividade, mas não conseguem resolvê-la; a professora P7, a princípio, não teve dificuldades na construção. Após o término da atividade M2 pergunta a professora P7 quantas retas paralelas é possível encontrar e a professora se detém somente a reta que ela construiu. Aqui a professora trabalha com a hipótese de só existir uma reta paralela a uma reta dada, cuja distância entre elas seja a medida de um segmento dado. Ela só percebe que são duas retas paralelas depois que foi questionada por M2. Perguntamos aos professores:

M2: é sempre possível medir distância entre duas retas?

(...)

P2: só se forem paralelas.

M2: por que será? Duas retas concorrentes eu consigo medir distância entre elas?

P2: não porque elas têm um ponto em comum, não vai conseguir.

M2: não porque elas têm um ponto em comum. E como que eu calculo a distância de um ponto a reta?

(0.30)

M2: como?

P19: d é igual a distância de... (professor se refere a fórmula da distância entre ponto e reta).

M2: sem usar a geometria analítica.

(...)

P2: a gente pega uma perpendicular, acha a intersecção e aí eu calculo a distância desse ponto até o ponto de intersecção.

O professor P19 tenta responder à pergunta mencionando a fórmula da distância, utilizada na Geometria Analítica, mas não a conclui. Sua resposta evidencia a preocupação que os professores têm com a resolução algébrica dos problemas geométricos e com os processos mecânicos que exigem pouco raciocínio dedutivo ou demonstrações como descrevem Almouloud et al. (2004).

Passamos para a próxima atividade. Esta foi a de recuperar o centro desconhecido de uma circunferência dada. Durante a atividade os professores fizeram algumas tentativas para resolver o problema.

P2: não daria pra definir o centro por baricentro ou ortocentro?

M2: opa.

P8: o ortocentro é o encontro de alturas, não é?

M1: isso.

P8: baricentro é encontro de mediatrizes e ortocentro é encontro de bissetrizes, não é?

M2: não, o baricentro é o encontro de medianas.

P8: mediana ou bissetriz?

M2: mediana.

(...)

M2: e como que chama o encontro de mediatrizes?

(...)

P17: é circuncentro.

M1: circuncentro.

P8: e o encontro de bissetrizes como é que chama?

M2: bissetriz é incentro.

(...)

M2: e o que é o circuncentro?

P2: circunscribe o triângulo.

M2: a circunferência circunscribe o triângulo, significa que se eu achar a mediatriz (...) se eu achar o, se eu achar o circuncentro aqui, eu acho o centro da circunferência.

P10: então eu tenho que fazer um triângulo equilátero aqui.

M2: não precisa ser um triângulo equilátero pode ser um triângulo qualquer. Olha que interessante eu pego três pontos sobre essa circunferência aqui. Aqui eu não tenho um triângulo?

(...)

MDP: sim.

M2: então é só eu encontrar as mediatrizes desses segmentos aqui.

P10: a mediatriz forma 90° com a reta?

P8: é 90° com a reta.

M1: isso, a mediatriz passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular.

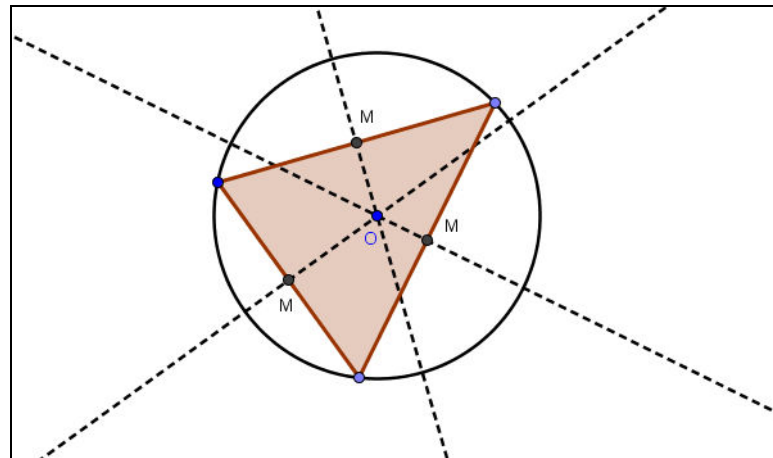


Figura 17 – Esboço da construção para recuperar o centro de uma circunferência

Os professores apresentaram dificuldades em argumentar qual o processo que deve ser feito para recuperar o centro desconhecido de uma circunferência. O professor P2 pergunta se daria para encontrar por baricentro ou ortocentro, mas, como vimos nem o baricentro nem o ortocentro justificam a solução do problema, o que mostra que os professores não tinham muito claro as definições de ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro. Para recuperar o centro de uma circunferência qualquer basta marcar três pontos quaisquer no círculo e encontrar a mediatriz dos segmentos que unem esses pontos. Quando unimos esses três pontos obtemos um triângulo qualquer. Não é necessário construirmos um triângulo equilátero como a professora P10 sugeriu.

A próxima atividade foi a construção de uma reta tangente à circunferência.

M1: qual é a definição de reta tangente a uma circunferência, o que vai ter que acontecer?

(...)

P17: passa por um único ponto.

M1: isso.

(...)

M1: eu tenho uma circunferência, tenho um ponto A sobre a circunferência, e o centro O e eu quero construir uma reta tangente a essa circunferência passando por esse ponto A. Como que eu faço?

(...)

P1: perpendicular, traça uma perpendicular.

P10: faz uma reta ligando esses dois pontos e depois perpendicular.

M1: isso.

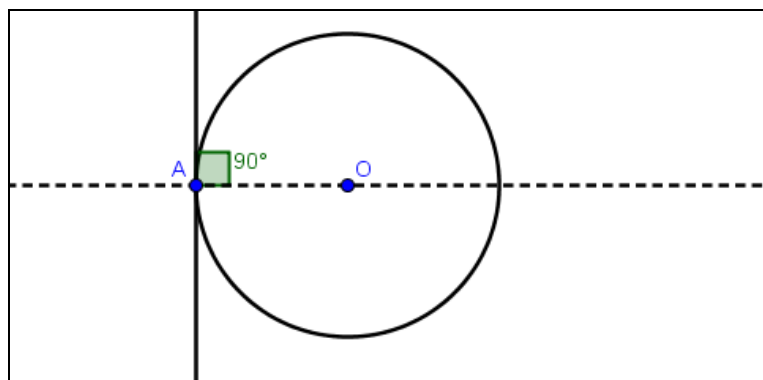


Figura 18 – Esboço da construção de uma reta perpendicular por um ponto sobre a circunferência

Nessa atividade os professores não encontraram dificuldades. Eles já estavam mais familiarizados com as ferramentas do GeoGebra e isso também facilitou a construção. Depois, pedimos para construírem um ponto fora da circunferência e encontrarem as retas tangentes à circunferência que passam por esse ponto.

M1: agora nós vamos encontrar a tangente só que o ponto vai estar fora. Alguma idéia?

(...)

M1: primeiro: quantas têm?

P1: duas.

P10: quantas retas que passa por aquele ponto de fora e é tangente?

M1: isso.

P10: duas.

M1: e como que eu faço pra encontrar?

Inicialmente perguntamos aos professores quantas retas tangentes haveriam. Estes não tiveram dificuldades para responder, mas quando perguntamos como são construídas, não souberam explicar. O professor P3 faz uma tentativa:

P3: você pode traçar uma reta pelo AO.

M1: ta.

P3: levantar uma perpendicular em O.

M1: ponto em O.

P3: é pelo O. E essa perpendicular vai me dar dois pontos de intersecção com a circunferência (...) e quando você uni os pontos com o ponto A você vai achar.

M1: será? Faz aí.

O professor P3 fez uma perpendicular passando pelo centro da circunferência. Disse que os pontos de intersecção da perpendicular com a circunferência seriam os pontos de tangência, o que não acontece. O professor P2 fez da seguinte maneira:

P2: não tem como fazer um segmento do ponto externo até o centro?

M1: como?

P2: segmento do ponto externo até o centro.

M1: do ponto P até o O.

P2: aí define o ponto médio (...) aí você define uma circunferência com centro no ponto médio e aí você vai ter o ângulo de 90° que é a aonde vai tangencia com aquele de baixo.

M1: esse ponto?

P2: esse ponto aí e o debaixo vai ser 90° .

P10: eu acho que não vai ser tangente não.

M1: é ou não é? (...) esse ângulo aqui.

P3: é 90° aquele ângulo ali.

M1: é 90° .

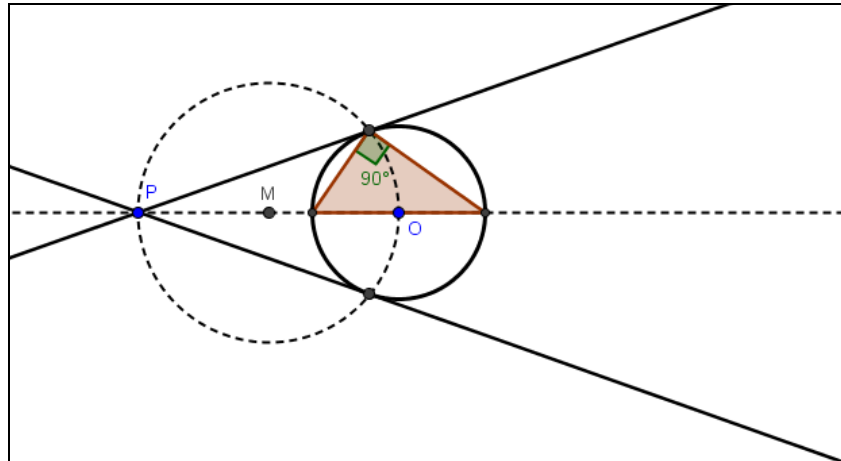


Figura 19 – Esboço da construção de uma reta tangente passando por um ponto

A sua construção estava correta, mas o professor P10 fica com dúvida se o ângulo encontrado é 90° . M1 questiona os professores:

M1: esse ângulo aqui deu 90° . Por quê?

(...)

P4: por quê?

M1: é, por quê?

(...)

P4: é um triângulo.

M1: é um triângulo (...) o que tem esse triângulo, qual é a propriedade?

P4: é porque (...) é a hipotenusa desse triângulo, por que ele é um triângulo retângulo.

Durante o minicurso, percebemos que os professores têm dificuldades em argumentar e em justificar as construções realizadas; algumas respostas não apresentam fundamento matemático e a linguagem utilizada não é coerente com a linguagem matemática.

Na tentativa de justificar as perguntas dos monitores, os professores mencionavam fórmulas utilizadas na Geometria Analítica.

As principais dificuldades observadas com relação à teoria foram: sobre os casos de congruência e semelhança de triângulos, nas noções de retas, semirretas, segmentos de retas, nas propriedades das retas tangentes e paralelas e nas construções geométricas.

A análise descrita acima foi com base nas transcrições das falas dos professores. A análise que segue é com base nas respostas dos questionários.

Sabemos que a atual situação do ensino de Geometrias em nossas escolas não é das melhores. Com o intuito de averiguar quais as dificuldades que os professores apresentam sobre a Geometria Euclidiana perguntamos: *Que dificuldades você encontra com os conteúdos de Geometria Euclidiana? Comente.*

Para alguns professores a dificuldade está na carga horária da disciplina de matemática. Os professores alegam que o número de aulas não é suficiente para ensinar todos os conteúdos programados e a Geometria acaba sem ser ensinada ou então é feita de forma superficial.

➤ Professor P.22: “com 4 aulas semanais de matemática na rede pública não conseguimos ensinar todos conteúdos e a geometria é um que é pouco trabalhado em sala”. Observe que este professor nos relata algo que acontece há muito tempo na escola: muitos conteúdos a serem ensinados e devido à falta de tempo a Geometria muitas vezes não é ensinada pelos professores.

➤ Professora P.2: “a dificuldade em desenvolver os conteúdos de Geometria Euclidiana (como deveríamos) é a questão do nosso número de aulas que foi reduzido de 5 ou 6 aulas para 4 aulas por semana e da proposta da escola que segue o livro didático com os conteúdos referentes ao proposto pelo Núcleo que para as 6^a e 7^a séries é extenso. Penso que da forma como era dividido anteriormente com maior carga horária possibilitava um trabalho bem mais amplo com tais conceitos”.

- Professora P.32: “os conteúdos propostos para trabalhar durante o ano são muitos e a geometria acaba sendo pouco contemplada em detrimento da álgebra”. Esta fala ajuda a esclarecer as falas anteriores. Mais uma vez percebemos que o conteúdo Geometria deixa de ser ensinado para que outros conteúdos sejam.

- Professora P.35: “os alunos gostam muito das aulas de geometria. O maior problema encontrado é no quesito tempo e material, pois, é muito comum nossos alunos não terem nem régua”. Essa professora além de destacar a falta de tempo ela aponta as dificuldades em trabalhar construções geométricas, pois os alunos não possuem os materiais apropriados.

- As professoras P.1, P.7, P.23, P.25 e P.31 e o professor P.33 também destacam que suas dificuldades estão na carga horária. Para o professor P.33: “o tempo de aula para trabalhar os conteúdos na íntegra e com a parte teórica é pouco”; para professora P.1: “dificuldades relacionadas com o número de aulas para demonstrar na prática os conceitos trabalhados”. A resposta desses professores evidencia um fato que acontece com o ensino de Geometria desde o Movimento da Matemática Moderna. O ensino deste conteúdo é deixado de lado pelo professor, que alega não ter tempo para ensiná-lo ou até mesmo não ter conhecimento teórico do conteúdo (PAVANELLO, 1989). Os livros didáticos apresentam esses conteúdos nos capítulos finais e não abordam o ensino de Geometria satisfatoriamente (ALMOULOUD et al., 2004).

Outra dificuldade que os professores encontram é com relação à teoria, com as definições, construções e até mesmo na visualização das figuras geométricas.

- Professora P.15: “as construções, quando precisa-se mostrar alguma definição, teorema, etc.” Percebemos que essa professora não sente-se segura em ensinar Geometria Euclidiana usando as construções geométricas e relata ter dificuldades nas definições e teoremas.

➤ Professora P.11: “a visualização e a imaginação é muito complicada, pois no papel não conseguimos colocar nossa imaginação”. A professora P.11 tem dificuldades em visualizar os objetos geométricos. A professora P.17 destaca que a sua dificuldade está no “uso das propriedades e suas consequências”. Percebemos que a professora P.17 não se sente segura com relação às teorias da Geometria Euclidiana.

➤ As professoras P.10, P.12, P.24 e P.34 relatam que suas dificuldades estão na parte teórica da Geometria. Para a professora P.34: “conteúdos não-claros. É mais atraente para os alunos trabalhar com o concreto”. A professora P.34 aparenta ter dificuldades em compreender a complexidade dos objetos geométricos. Ao mencionar que é mais atraente trabalhar com o concreto, fica a pergunta: será que a professora concebe a Geometria Euclidiana como algo empírico? Será que ele percebe que o objeto geométrico é apenas uma representação de algo abstrato? De acordo com Ruiz e Bellini (2001, p. 57), “a matemática não é uma cópia da realidade; é, isto sim, um instrumento – de natureza intelectual – para a compreensão da realidade”.

Uma dificuldade apontada por alguns professores foi com relação ao uso das novas tecnologias no ensino de Geometria.

➤ Professor P.18: “dificuldades de utilização da linguagem da máquina no estudo da geometria”; para a professora P.19 a dificuldade está em: “aplicar o conteúdo usando a nova tecnologia” e para a professora P.36: “gosto muito de trabalhar a geometria euclidiana. Nas construções manuais com lápis, régua e compasso, tudo bem, porém, na dinâmica, com uso dos *softwares*, ainda tenho muitas dificuldades”. Percebemos que esses três professores não se sentem preparados para trabalhar com os *softwares* de Geometria nas suas aulas. O professor P.18 relatou ter dificuldade na utilização do computador, as professoras P.19 e P.36 não sabem muito bem como integrar as novas tecnologias na sua prática profissional. Ponte (2000) destaca que a maioria dos professores encontra-se nessa fase: não têm conhecimento de como os recursos tecnológicos podem ser utilizados na sala de aula.

Algumas professoras alegaram dificuldades devido à falta de contato constante com a Geometria.

➤ Professora P.6: “geralmente não encontro dificuldades com os conteúdos, talvez o que atrapalha é não estar em contato constante com tudo e acaba havendo um esquecimento de alguns conceitos”. Para a professora P.27 a Geometria é “pouco trabalhada em sala de aula, gera esquecimento”. Para a professora P.25, o que gera dificuldades, além da carga horária, é a “falta de oportunidades de aperfeiçoamento”. Para ela é importante que existam cursos de aperfeiçoamento para que os professores possam permanecer atualizados.

As respostas dos demais professores foram:

➤ Professora P.7: “não tenho muitas dificuldades com a geometria euclidiana, mas confesso que ao término de cada ano letivo sinto uma frustração por não ter trabalhado com meus alunos como gostaria”. Professor P.16: “não tenho dificuldades com o conteúdo de 5^a a 8^a. Já tive no ensino médio”. Observamos que o professor P.16, apesar de se sentir preparado para ensinar Geometria no ensino fundamental, sente dificuldades com os conteúdos do ensino médio. O professor P.41 sente a mesma dificuldade do professor P.16: “dentro dos conteúdos ministrados, junto ao ensino fundamental eu não tenho dificuldade”. Essa dificuldade em trabalhar com os conteúdos do Ensino Médio pode estar relacionada ao conteúdo Geometria Espacial, tema que é visto com mais detalhes no Ensino Médio. Segundo Santos (2009) um dos conteúdos que os professores encontram mais dificuldades é a Geometria Euclidiana Espacial.

As professoras P.5, P.26, P.30, P.39 e P.40 e os professores P.9, P.13 e P.28 relatam que não têm nenhuma dificuldade com os conteúdos de Geometria Euclidiana. As professoras P.4 e P.38 descreveram que ainda encontram dificuldades, mas não relataram quais. As professoras P.3, P.8, P.14, P.20, P.21, P.29 e P.37 não responderam a pergunta.

Valendo-se das respostas dos professores, observamos as seguintes dificuldades: devido a quantidade de aulas disponíveis a Geometria acaba sem ser ensinada ou então é feita de forma superficial; dificuldades teóricas, nas definições, nas construções e até mesmo na visualização das figuras geométricas; ensinar Geometria utilizando os recursos tecnológicos disponíveis e a falta de contato com os conteúdos de Geometria. Alguns professores responderam que não têm dificuldades com os conteúdos de Geometria Euclidiana.

6.2 Geometria Hiperbólica

Para conhecer um pouco da formação acadêmica dos professores com relação às Geometrias Não-Euclidianas perguntamos: *Durante a sua formação você teve disciplinas relacionadas ao assunto?*

Dos quarenta e um professores, somente cinco responderam que tiveram disciplinas relacionadas ao assunto. Vinte e nove professores responderam que não tiveram conteúdos relacionados a Geometrias Não-Euclidianas e sete professores responderam que não lembram se tiveram ou não disciplinas relacionadas ao conteúdo.

Com o intuito de saber se eles conheciam ou não a Geometria Hiperbólica, perguntamos: *Você conhecia a Geometria Hiperbólica?*

Dezenove professores responderam que conheciam a Geometria Hiperbólica e vinte e dois responderam que não a conheciam. Esta questão nos causou surpresa, porque todos os professores que participaram da pesquisa fizeram o curso “Introdução às Geometrias Não-Euclidianas”, no qual já haviam estudado alguns conceitos da Geometria Hiperbólica. Mesmo assim, vinte e dois professores responderam que não conheciam esta Geometria.

No segundo dia do minicurso relembramos alguns conceitos e propriedades da Geometria Hiperbólica e iniciamos as construções geométricas nesta Geometria. Cabe ressaltar que durante o estudo da Geometria Hiperbólica percebemos algumas dificuldades em Geometria Euclidiana, mas estas, só serão enfatizadas quando forem importantes para a

pesquisa, já que o nosso objetivo agora é averiguar os conhecimentos de Geometria Hiperbólica e os possíveis obstáculos epistemológicos e dificuldades dos professores nesta Geometria.

No início do minicurso M1 expõe para os professores o que são retas no modelo de Poincaré e pergunta aos professores:

M1: o que são os arcos ortogonais a essa circunferência aqui?

(...)

P18: são da circunferência, um ângulo de 90, não é?

M1: Oi?

(...)

M1: eu perguntei por que esse arco aqui é ortogonal a circunferência? O que é ser ortogonal?

(...)

P18: seria um ângulo, forma ângulo de 90° da corda com o círculo, com o círculo não, com a tangente ao círculo.

M1: isso, então se eu faço uma tangente por esse ponto a esse círculo e eu faço uma tangente por esse ponto a esse arco e eu meço o ângulo tem que dar 90° .

Para realizarmos as construções da Geometria Hiperbólica utilizamos elementos da Geometria Euclidiana, ou seja, para que os professores compreendessem o modelo da Geometria Hiperbólica, que estava sendo construído naquele momento, eles deveriam compreender alguns dos conceitos e resultados da Geometria Euclidiana. Dessa forma, acreditamos que em vários momentos do curso, o que dificultou o entendimento da Geometria Hiperbólica foi o desconhecimento, por parte dos professores, de conceitos e resultados da Geometria Euclidiana.

M1 pergunta aos professores como fazemos para encontrar a distância entre dois pontos na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica:

M1: como que a gente encontra a distância entre dois pontos na geometria euclidiana?

(...)

P24: é a raiz quadrada de...

M1: sem usar a fórmula.

O professor P24 tenta justificar a pergunta feita por M1 utilizando a Geometria Analítica. Veja como a questão da transformação de objetos geométricos em objetos algébricos criada por Descartes acabou constituindo um obstáculo epistemológico para a própria Geometria Euclidiana. Percebemos que muitos professores deixam de compreender a Geometria Euclidiana e tentar buscar nas fórmulas os conhecimentos geométricos. A aula continua...

P19: é a menor medida, um segmento de reta no caso.

M1: isso, é um segmento de reta.

(...)

M1: na Geometria Hiperbólica ela é dada pela fórmula: $d(A, B) = \left| \ln \frac{\overline{AU} * \overline{BV}}{\overline{AV} * \overline{BU}} \right|$.

Eu tenho os pontos U e V que são pontos ideais que estão aqui sobre o meu plano, e o meu objetivo é encontrar a distância entre esses dois pontos aqui: A e B. Não vai ser um segmento euclidiano. Como que eu faço pra encontrar? Eu tenho que pegar a medida dos segmentos euclidianos de AU, depois de BV, de AV e de BU. Depois eu vou lá no campo de entrada do GeoGebra e digito a fórmula. Alguma dúvida?

P18: não seria mais fácil encontrar essa reta aí, de B até U, é no caso é uma reta?

M1: sim.

P18: ela não vai ser a parte de uma circunferência, é não é? Não daria para nós encontrarmos o centro dessa circunferência através de dois pontos e aí trabalha com o glorioso Pi? Não ficaria mais simples?

M4: aí que ta a questão, isso aqui é uma reta e reta é infinita, ta certo? Então aparentemente nós estamos vendo a reta, mas a distância que a gente calcula entre dois pontos não é a distância euclidiana. Então quanto mais próximo você estiver dos pontos ideais, a mesma distância euclidiana quando eu aproximo esses pontos dos pontos ideais ela vai ser muito maior. Caminhando mais perto agora aqui do ponto ideal naquilo lá ela vai aumentando, então ela tende pro infinito, quando eu uso aquela fórmula.

Quando questionados sobre a distância entre dois pontos na Geometria Hiperbólica o professor P18 pergunta se não poderíamos encontrar a medida usando a ideia do comprimento de um arco. M4 explica que não poderíamos fazer isso, pois os pontos A e B são pontos da h-reta e quando os pontos se aproximam do horizonte a distância deve tender ao infinito, uma vez que nesta Geometria deve valer o segundo postulando de Euclides que garante que uma reta é infinita. Nesse momento, fica evidente a dificuldade dos professores em compreender que o arco de circunferência representado é uma h-reta. Para o professor P18 esse arco era um arco euclidiano e nós poderíamos perfeitamente calcular o comprimento do arco para saber a distância entre os pontos A e B. Perceba que existe uma “contaminação” da representação e dos conceitos da Geometria Euclidiana que, neste caso, constitui-se em um obstáculo epistemológico – conhecimento geral – no entendimento da Geometria Hiperbólica.

Enquanto, na representação da Geometria Euclidiana é impossível “ver” pontos no infinito, na representação do disco de Poincaré existem elementos visíveis que representam o inatingível, o infinito. Os pontos ideais, assim como o horizonte – a circunferência – não pertencem ao plano hiperbólico, mas podemos “vê-los”. Ao desenhar uma h-reta, é possível encontrar os pontos de intersecção da reta com o plano hiperbólico – os pontos ideais – e esses pontos são necessários para que possamos medir a distância entre dois pontos, por exemplo.

Para construir uma h-reta por um ponto precisamos construir arcos ortogonais a uma circunferência. Ao iniciar a construção os professores constroem uma circunferência qualquer e um ponto qualquer no seu interior; o centro da circunferência chamamos de O e o ponto no interior de A. Depois M4 apresentou aos professores o conceito de ponto inverso e pediu para eles escreverem as seguintes equações: $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA'}}{r} = \frac{r}{\overline{OA}}$, em uma folha. O objetivo foi encontrar o ponto A'. Este ponto está na semirreta OA e foi encontrado geometricamente. Para isso M4 pede para que os professores marquem um ponto B, fora do plano hiperbólico, e construam duas semirretas quaisquer com origem no ponto B, como mostra a figura a seguir:

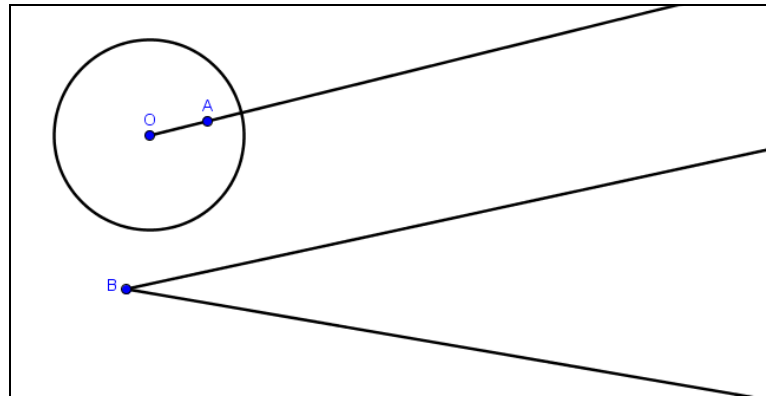


Figura 20 – Esboço da construção do ponto inverso (1)

M4: agora nós vamos abrir o compasso com a medida de OA. Primeiro nós vamos construir o segmento OA.

(0.50)

M4: centro do compasso no ponto B e como eu quero o raio OA, que o meu é “b”, aí eu aplico. Agora eu vou marcar esse ponto de intersecção da semirreta de cima com a circunferência, vou chamar de P (...) agora eu vou ocultar essa circunferência.

(...)

M4: pergunto: qual a distância de B até P?

(...)

P12: “b”.

M4: e o que que é “b”?

P12: é o segmento OA.

M4: é o tamanho, a distância de O até A, é o tamanho do segmento OA.

(...)

M4: dêem uma olhadinha na fórmula de vocês, na segunda fórmula, que é a fração. Em cima tá o segmento OA, em baixo, do lado esquerdo da igualdade, o que que tem?

MDP: raio.

M4: raio. Então nós vamos colocar na semirreta de baixo o raio (...) quem que é o raio? Nós temos que construir um segmento daqui até aqui (...) no meu caso é “e” (...) eu vou fazer exatamente a mesma coisa: ponto seca em B e raio “e” (...) e vou marcar esse ponto aqui.

(1.0)

M4: qual que é a distância de B até R?

MDP: o raio.

M4: o raio da circunferência (...) agora, o que tá em cima da igualdade, na segunda fórmula?

MDP: r.

M4: r. Agora nós vamos colocar r na semirreta de cima, mas a partir do ponto P (...) nós vamos pegar o compasso com centro em P e raio r, que no meu caso é segmento “e”.

(0.30)

M4: agora construa uma reta que passa por P e por R.

(0.30)

M4: agora reta paralela (...) pegue uma reta paralela passando por esse ponto S e essa reta.

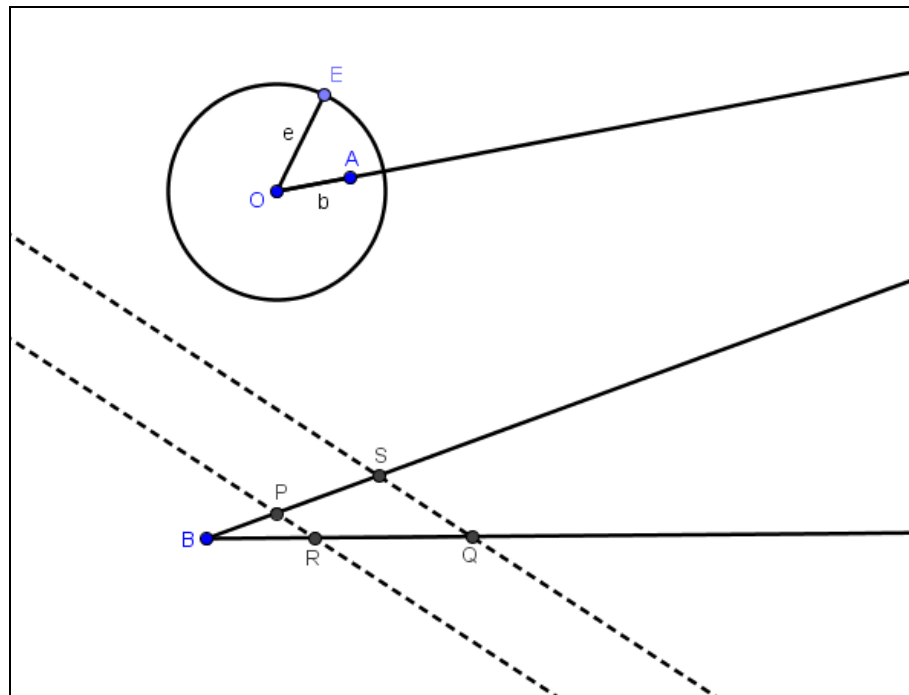


Figura 21 – Esboço da construção do ponto inverso (2)

Na continuação da atividade, M4 questiona os professores se o segmento RQ é igual ao segmento AO'.

M4: eu pergunto pra vocês: olhando pra essa fórmula aí, o que é a distância de R até Q?

(...)

P11: não vai falar que é o A'?

M4: você acha que é?

(...)

P17: acho que é.

M4: mas porque que é?

P17: porque ele é proporcional a...

M4: mas por quê? Quem garante?

P17: por causa do feixe de retas (...) de Tales.

M4: Tales! não é o teorema de Tales?

MDP: é.

Antes de encontrar a h-reta foi preciso fazer algumas construções usando a noção de ponto inverso e o teorema de Tales. Depois de terem encontrado o segmento RQ, M4 pediu para que os professores o marcassem na semirreta OA. A intersecção da semirreta com a circunferência é o ponto A' procurado.

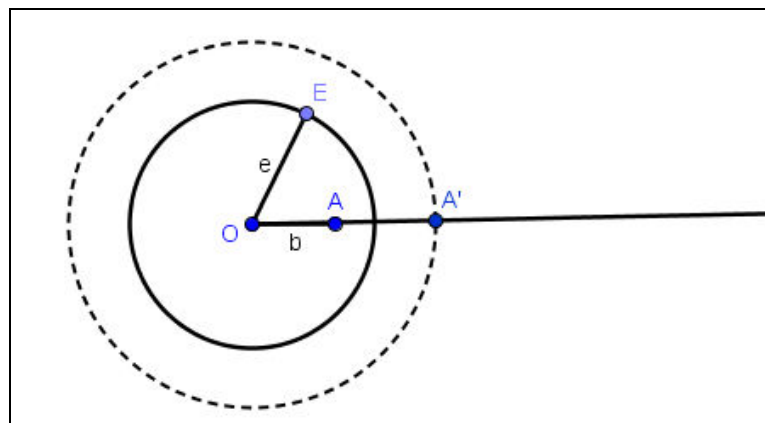


Figura 22 – Esboço da construção do ponto inverso (3)

Também é possível encontrar o ponto A' usando o conceito de reta polar, que está disponível nas ferramentas do *software* GeoGebra. Para ensinar aos professores o uso dessa ferramenta, M4 pede para eles construírem uma circunferência qualquer e um ponto no interior da circunferência – o centro da circunferência ele chamou de O e o ponto de A – e uma semirreta com origem em O e passando por A .

M4: seleciona a reta polar (...) clica no ponto A e na circunferência. Ele vai desenhar a reta polar (...) agora acha o ponto de intersecção da reta polar com a semirreta e chama de A' .

(2.0)

M4: agora vocês vão construir a mediatriz do segmento AA' . Seleciona a opção mediatriz e clica no ponto A e depois no ponto A' (...) agora eu construo um ponto qualquer na mediatriz e chamo de P .

(3.0)

M4: construam uma circunferência com centro em P e passando por A .

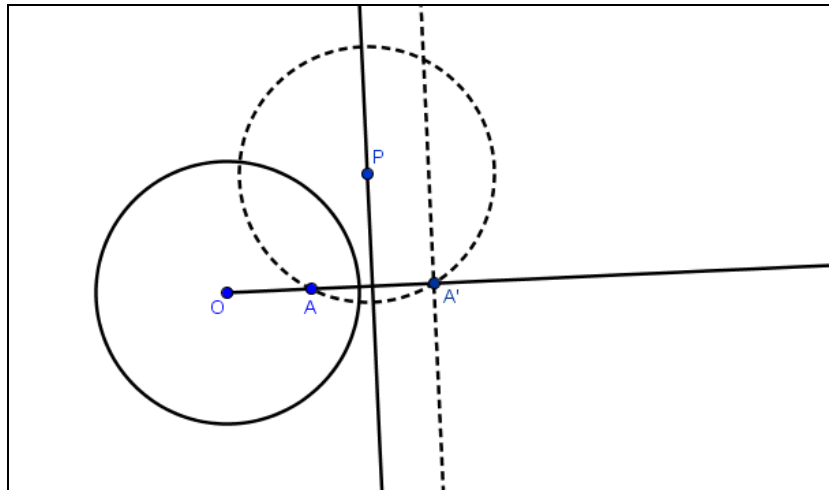


Figura 23 – Esboço da construção do ponto A' por meio da reta polar

Depois que os professores construíram a circunferência com centro no ponto P , M4 pediu para que eles encontrassem os pontos de intersecção das duas circunferências e quatro segmentos: um segmento do ponto O até uma intersecção, outro de O até o outro ponto de

intersecção, de P até uma das intersecções e novamente de P até a outra intersecção. Para mostrar que as circunferências são ortogonais M4 pede para que os professores calculem os ângulos que tem sua origem nos pontos de intersecção.

M4: deu 90?

MDP: sim.

M4: agora arrastem esse ponto P sobre a mediatriz e vê se continua dando 90.

(0.30)

M4: se você arrastar esse ponto P sobre a mediatriz vai dar sempre 90 (...) quando que duas circunferências são ortogonais?

(...)

M4: quando eu pego do centro de uma até o ponto de intersecção, do centro da outra até o ponto de intersecção e der 90°. Não importa aonde vai estar o centro nesta mediatriz sempre vai dar 90°.

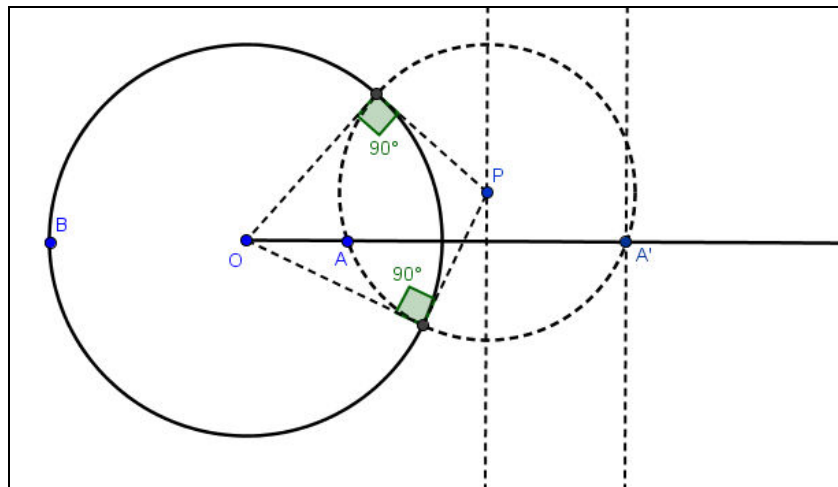


Figura 24 – Esboço da construção de uma h-reta

Nesse momento M4 pergunta para os professores quando que duas circunferências são ortogonais, mas os professores não respondem. Então M4 explica a propriedade. Na construção das circunferências ortogonais as professoras P25, P21 e P14 acham estranho o fato de ter dado 90°.

P25: ficou quase um quadradinho. Mas é estranho né, olha aqui, não é estranho ficar 90° ali?

M1: é estranho?

P25: é não é? Mas é tangente né.

P21: esse ângulo vai ser 90° ?

M1: isso. Esse arco aí, na verdade, é aquela circunferência toda que a gente fez.

P21: nossa, mas não parece.

(...)

M1: essa é uma h-reta.

P21: nossa é tão diferente do que a gente imagina, é acostumado.

P14: não parece, mas é 90° .

M1: não parece?

P14: não parece, se a gente olhar só o segmento você fala: nunca que vai dar 90° !

(...)

P10: sabe o que confunde: esse ângulo tá estranho. Ele alongou, dá a impressão que não é 90° .

P14: aqui no meu eu diria que dava uns 92° (...) dá a impressão que não dá 90° de jeito nenhum.

Perceba a dificuldade das professoras P25, P21 e P14 em aceitar o fato das duas circunferências serem ortogonais. Elas observam a figura construída e a representação de ortogonalidade não é a que elas estão habitualmente acostumadas, ou seja, duas retas euclidianas. Neste caso percebemos como uma “nova representação”, diferente da usual constitui-se em um obstáculo epistemológico que Bachelard chamou de obstáculo verbal: “um caso em que uma *única* imagem, ou até uma única palavra, constitui toda a explicação” (BACHELARD, 1996, p. 91).

Após a realização dessa construção e de ter marcado os pontos de intersecção das duas circunferências, M4 explica como utilizar a ferramenta arco por três pontos e constrói um arco por um dos pontos de intersecção, pelo ponto A e pelo outro ponto de intersecção, como mostra a figura a seguir:

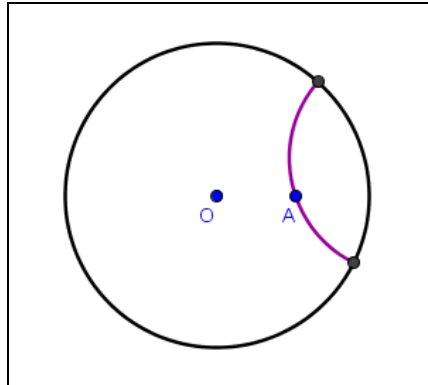


Figura 25 – H-reta por um ponto

As professoras P14 e P19 questionam M1 se a h-reta construída era uma reta.

M1: o que é isso que vocês acabaram de construir?

P14: uma circunferência.

M1: se eu pegar só o arco o que é?

P14: uma parte da circunferência.

(...)

M1: e na geometria hiperbólica?

P14: é a reta?

M1: “isso. É a reta hiperbólica”.

P19: isso é reta?

M1: oi?

P19: isso é reta?

M1: essa é a h-reta no modelo de Poincaré.

P19: é uma reta que não é “reta”.

(...)

P19: a gente que chama ela de reta, mas na verdade não existe isso no espaço dele.

M1: de quem?

P19: do...

M1: do Poincaré?

P19: é.

M1: não, reta por definição é isso. São arcos ortogonais ao círculo euclidiano.

(...)

P19: é muito legal isso.

A professora P14 quando questionada por M1 responde as perguntas como se estivesse trabalhando com a Geometria Euclidiana. Perceba como um conhecimento geral constitui-se em um obstáculo epistemológico no entendimento da Geometria Hiperbólica: “é possível constatar que essas leis gerais *bloqueiam* atualmente as idéias. Respondem de modo global, ou melhor, respondem sem que haja pergunta” (BACHELARD, 1996, p. 71).

Para a professora P19 as figuras que representam elementos da Geometria Euclidiana devem “realmente” pertencer a Geometria Euclidiana, ou seja, ela acredita e entende que elementos da Geometria Euclidiana são reais, o que demonstra uma concepção empírica da Geometria, fato este que não é verdade. A Geometria Euclidiana discorre rigorosamente sobre qualquer traçado; não se refere a um desenho particular, mas de qualquer desenho que possua as propriedades consideradas no enunciado. Gálvez destaca que a versão empírica da Geometria Euclidiana:

[...] está baseada uma série de atividades humanas que requerem o controle das relações espaciais e de cuja vigência atual ninguém duvida, entre as quais se pode mencionar o desenhar e a construção de todo o tipo de objetos físicos (desde produtos e máquinas industriais até prédios, cidades e estradas), a elaboração de mapas, o cálculo de distâncias astronômicas, etc (GÁLVEZ, 2006, p. 237).

Esta geometria empírica, ou física, constitui uma teoria da estrutura do espaço físico, mas nunca poderá dar-se válida como certeza matemática. Ao falar que “é uma reta que não é “reta”, a professora P19 usa a noção de reta do senso comum, ou seja, para ela a palavra reta expressa todo o significado de um objeto geométrico. Neste caso, identificamos mais um obstáculo epistemológico – obstáculo verbal – no qual um única palavra estabelece toda uma explicação. Sobre as retas, Poincaré (1995) expõe que:

No espaço, conhecemos triângulos retilíneos dos quais a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos; mas conhecemos igualmente triângulos curvilíneos dos quais a soma dos ângulos é menor que dois ângulos retos. A existência de uns não é mais duvidosa que a dos outros. Dar aos lados dos primeiros o nome de retas é adotar a geometria euclidiana; dar aos lados dos últimos o nome de retas é adotar a geometria não euclidiana. Assim,

perguntar que geometria convém adotar é perguntar a que linha convém dar o nome de reta. (POINCARÉ, 1995, p. 41)

Poincaré (1995) destaca ainda que a experiência não pode resolver tal questão e que quando dizemos que a reta euclidiana “é uma reta verdadeira”, e que a reta não-euclidiana “não é uma reta verdadeira”, queremos dizer simplesmente que a primeira ideia intuitiva de reta corresponde a um objeto mais notável do que a segunda. É uma simples observação que procura responder as indagações dos objetos geométricos.

Retomando o diálogo da professora P19 com M1, percebemos que a professora teve dificuldades em aceitar que a representação da reta hiperbólica, *por definição*, uma reta. Novamente, uma “nova representação” constitui-se em um obstáculo epistemológico denominado por Bachelard (1996) de obstáculo verbal.

Ao darmos continuidade ao minicurso, o professor P10 questiona o que aconteceria se marcássemos um ponto qualquer sobre uma h-reta e o trouxéssemos para fora do plano hiperbólico:

P10: se eu seguir essa reta aqui, ele vai voltar a encontrar ali?

M1: a reta é só o que está dentro do plano hiperbólico, é só esse arco aqui.

Veja como o professor P10 tem dificuldades de perceber que o arco construído é uma h-reta. O professor utiliza da hipótese que o arco construído é uma parte da circunferência, e ao mover um ponto, que está sobre a circunferência, para fora do plano hiperbólico ele vai “retornar” para esse plano. Este fato acontece na Geometria Euclidiana, mas não na Geometria Hiperbólica, uma vez que o plano é somente o interior da circunferência. O próximo passo foi construir um h-reta por dois pontos.

M4: agora nós vamos construir uma h-reta que passe não por um ponto, mas por dois pontos. Na Geometria Hiperbólica é a mesma coisa que na geometria euclidiana, se eu tenho um ponto quantas retas passam por esse ponto?

P12: infinitas retas.

M4: infinitas (...) aqui também, por esse ponto A estão passando infinitas retas hiperbólicas. Agora eu vou pegar outro ponto B e vou fazer a mesma construção que eu fiz pro ponto A.

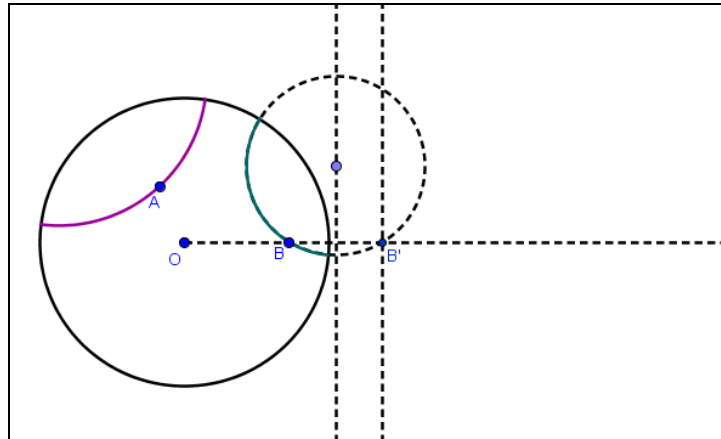


Figura 26 – Esboço da construção de uma h-reta por dois pontos (1)

M4 faz a construção análoga para o ponto B. Depois de feita a construção, o objetivo era encontrar a única h-reta que passa pelos pontos A e B.

M4: por A passam infinitas retas hiperbólicas, por B passam infinitas retas hiperbólicas, na geometria euclidiana, o primeiro axioma de Euclides fala que por dois pontos determina uma única reta. Na Geometria Hiperbólica esse axioma também é verdadeiro. (...) Eu quero que vocês observem o seguinte: quando a gente vai caminhando com esse ponto sobre a mediatriz, chega um determinado momento que essa h-reta ela passa pelo ponto A e pelo ponto B. (...) Como será que eu acho exatamente essa reta?

(0.30)

M4: o que acontecia com os pontos na mediatriz de AA' com relação à circunferência pra dar o arco hiperbólico?

P11: ele é o centro da circunferência.

M4: muito bem! E a mediatriz de BB', qual a importância dela?

P11: a mesma coisa.

M4: é análogo (...) agora eu quero uma h-reta que passa pelo ponto A e pelo ponto B, onde que estaria o centro dessa circunferência?

P1: mediatriz de $A'B'$?

M4: não! Atenção, vou mudar um pouco a pergunta: onde estão todas as circunferências, alias, todos os centros das circunferências que são perpendiculares a circunferência dada que passam pelo ponto A?

P8: no ponto P.

M4: e onde P está?

P8: na mediatriz.

M4: na mediatriz. Então os centros da circunferência que são perpendiculares a circunferência dada e passa pelo ponto A moram aonde? Na mediatriz de AA' . Se eu quiser todas as circunferências, os centros de circunferências que são perpendiculares a circunferência dada e passem pelo ponto B. Onde é que estão?"

MDP: na mediatriz.

M4: na mediatriz de quem?

MDP: de BB' (...) agora eu quero o centro da circunferência que é perpendicular a circunferência dada e que passa simultaneamente por A e por B, onde que estão?"

MDP: na intersecção das duas mediatrizes.

M4: na intersecção das duas mediatrizes, então aqui (...) é esse ponto aqui é o ponto Q.

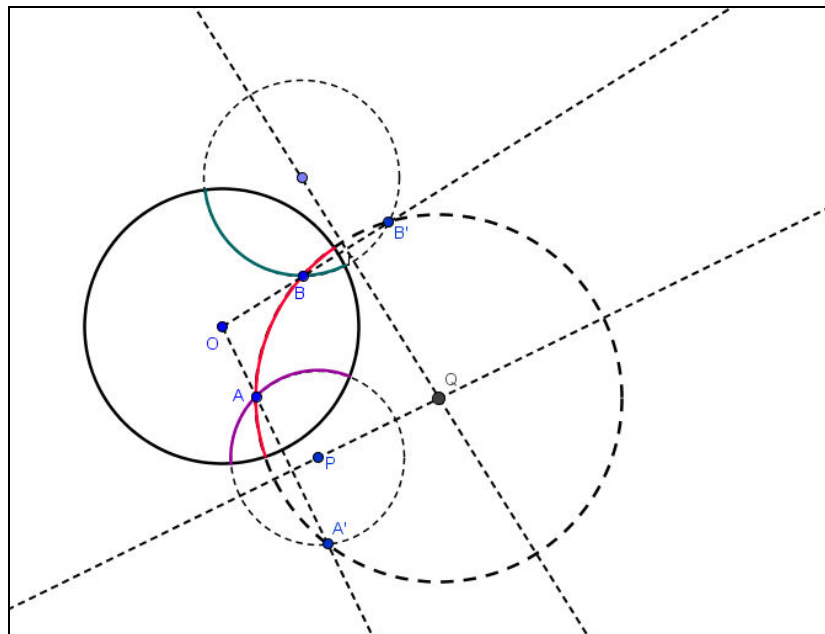


Figura 27 – Esboço da construção de uma h-reta por dois pontos (2)

No diálogo acima percebemos que os monitores falam mais do que os professores. Isso demonstra as dificuldades que eles tiveram em dialogar com os monitores. Depois da construção de uma h-reta passando por dois pontos, construímos uma ferramenta para h-reta. Na sequência os professores construíram algumas h-retas e analisaram quais eram paralelas, como mostra a figura 28.

M1: fez as paralelas?

P20: maravilha, ó.

M1: quem que é paralela a quem aí?

P20: quem que é paralela?

M1: é.

P20: é sempre o... essa aqui é paralela a essa, esse é paralela a essa. (a professora mostra com quais retas são paralelas).

M1: isso (...) essa aqui é uma paralela, essa, essa (...) já tem três.

P20: tem bastante né.

M1: infinitas?.

P20: infinitas retas paralelas.

M1: o que na euclidiana não acontece.

P20: é, lá ele diz que só tem uma reta paralela. Gostei.

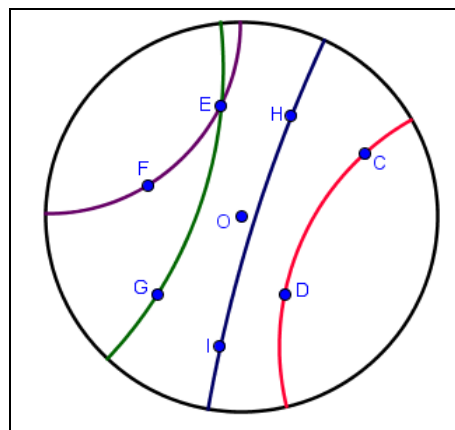


Figura 28 – Esboço h-retas paralelas

A professora P20 constrói algumas retas hiperbólicas e é questionada por M1 para expor quais h-retas eram paralelas; ela não teve dificuldade em destacar as retas paralelas e surpreende-se com a quantidade de retas. M1 pergunta a professora P17 se o plano hiperbólico é limitado ou ilimitado.

M1: e esse plano é limitado ou ilimitado?

P17: qual?

M1: o plano hiperbólico.

P17: finito.

M1: finito?

P17: sim.

M1: um plano é limitado ou ilimitado? (...) Na geometria euclidiana?

P17: infinito.

M1: e na Geometria Hiperbólica ele também vai ser infinito.

Nota-se a que a professora P17 tem dificuldade em assimilar a conceito de que o plano hiperbólico é ilimitado. Esse obstáculo foi percebido em alguns professores, pois achavam que pelo fato do plano ser o plano o interior de um círculo euclidiano ele era limitado e também por na Geometria Hiperbólica podermos “ver” os pontos no infinito. Mais uma vez percebemos que um conhecimento geral, um conhecimento anterior e a representação de um novo objeto geométrico constituem-se em um obstáculo verbal para o entendimento de um novo conceito como descreve Bachelard (1996).

Os professores também construíram uma ferramenta para segmento hiperbólico. As ferramentas “h-reta” e “segmento hiperbólico” foram utilizadas nas construções seguintes. A próxima atividade foi encontrar o ângulo entre duas h-retas.

M1: agora a gente vai calcular o ângulo entre essas duas retas aqui. Como que a gente faz, alguém tem alguma idéia de como vai calcular o ângulo?

P8: ângulo.

M1: eu quero calcular o ângulo formado por essas duas retas hiperbólicas.

MDP: seleciona ângulo.

P8: E, C, D.

M1: E, C, D?

P8: é E, C, D (...) é sentido horário.

(...)

M1: é isso será? É esse ângulo que eu acabei de calcular?

(...)

P10: esse tem que ser hiperbólico mesmo.

M1: e aqui é o que?

P10: euclidiano.

M1: ele é euclidiano, eu não posso calcular esse ângulo assim.

Observe que os professores mesmo depois de terem visto a definição de ângulo no modelo de Poincaré eles ainda não conseguiam assimilar esse conhecimento. No momento que M1 pede para eles encontrarem o ângulo entre duas h-retas eles respondem como se fosse à Geometria Euclidiana. Novamente percebemos a dificuldade dos professores em desprenderem-se dos conceitos e definições da Geometria Euclidiana como um conhecimento geral, um conhecimento tido como único e acabado o que constitui-se em um obstáculo no entendimento de novos conceitos.

M1 continua questionando os professores sobre o que tem que ser feito para encontrar ângulo no modelo de Poincaré.

M1: lembram no começo que eu falei como que faz pra calcular?

(...)

P7: coloca a reta tangente no ponto C, do lado e do outro e calcula o ângulo, da reta tangente aí no ponto C.

M4: isso. Não sei se vocês lembram, hoje de amanhã a hora que eu falei que pra calcular ângulo entre duas retas hiperbólicas, por definição, vocês têm que encontrar a tangente por esse ponto a esse arco, tangente por esse ponto e esse arco. Aí sim eu consigo calcular esse ângulo.

(O esboço da construção encontra-se na figura 29)

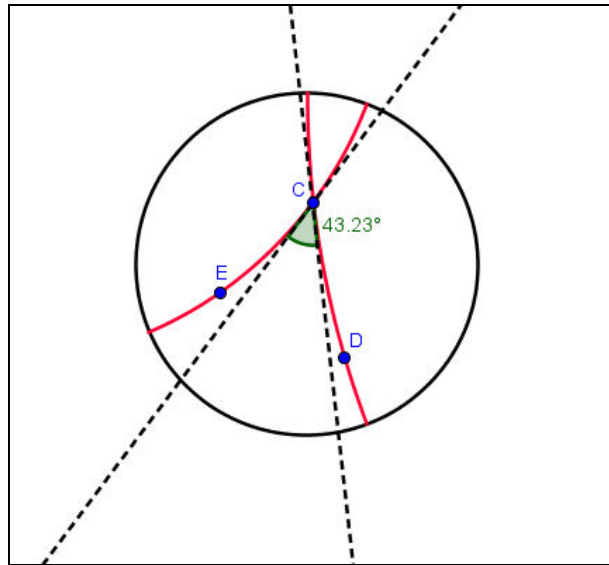


Figura 29 – Ângulo entre duas h-retas

Após terem encontrado o ângulo entre duas h-retas, pedimos para que os professores construíssem um triângulo hiperbólico.

M1: a nossa atividade vai ser construir um triângulo hiperbólico e os vértices vão ser esses pontos. Como que eu faço isso?

P13: constrói três retas (...) como que chama essas retas? (...) hiperbólicas.

M1: qual a definição de triângulo?

(0.30)

M1: pra eu construir um triângulo o que eu preciso?

P13: três pontos.

M1: retas, semirreta, segmentos?

MDP: segmento.

M1: segmentos de reta. Na Geometria Hiperbólica a gente também vai precisar de segmentos de reta, só que vão ser segmentos hiperbólicos. Então a gente vai usar a ferramenta segmento hiperbólico pra construir um triângulo que tem os vértices A, C e D.

(0.30)

M1: é segmento hiperbólico, não é euclidiano.

P14: a ata. (ela estava fazendo segmento euclidiano)

(O esboço da construção encontra-se na figura 30)

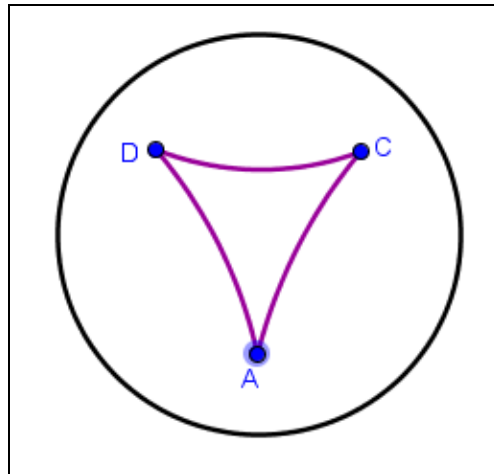


Figura 30 – Esboço construção de um triângulo hiperbólico

Na construção do triângulo hiperbólico, alguns professores utilizaram as opções do modelo euclidiano, mantendo assim as hipóteses da Geometria Euclidiana.

M1: aqueles que já construíram o triângulo podem achar os ângulos.

P11: mas através da tangente?

M1: isso, faz o mesmo processo que a gente fez anteriormente.

Quando solicitados a encontrar a medida dos ângulos, muitos professores utilizavam a opção ângulo da Geometria Euclidiana, disponível nas ferramentas do GeoGebra, bem como na construção do triângulo hiperbólico, utilizavam segmentos euclidianos. A professora P21 fez a construção Hiperbólica como se fosse construir um triângulo na Geometria Euclidiana.

P21: é só fazer isso?

M3: isso daí é na geometria euclidiana. Se fosse na geometria euclidiana você poderia.

P14: você tem que fazer as tangentes.

M3: isso mesmo. Tem que encontrar a tangentes.

Ainda na construção do triângulo hiperbólico, M4 pergunta para os professores qual é a soma dos ângulos internos do triângulo.

M1: uma pergunta pra vocês: a soma dos ângulos que vocês calcularam aí é maior, menor ou igual a 180° ?

MDP: menor.

P12: acho que é menor.

M1: vamos calcular pra ver quanto que deu.

Depois de encontrarem a medida dos ângulos, os professores somaram esses ângulos e puderam observar que ao aproximar os vértices do triângulo o valor dos ângulos aumenta e a soma se aproxima a 180° (Figura 31). Quando aproximamos os pontos do horizonte os valores dos ângulos diminuem e a soma se aproxima de zero (Figura 32). A professora P14 move os vértices para analisar o que acontece.

M4: o que acontece com os nossos ângulos quando eu aproximo os vértices da circunferência?

(...)

P11: diminui.

M1: ele diminui e a soma vai diminuir (...) e se eu aproximar do centro esses pontos o que acontece?

P11: aumenta.

P8: os ângulos aumentam e a soma aumenta.

P14: agora ficou legal mexer.

M3: se você for mexendo ele vai aumentando.

P14: mas nunca vai dar 180. Vamos ver.

(0.30)

M3: achou o 180?

P14: 179.1.

M3: será que chega até 180?

P14: não, eu sei que não chega.

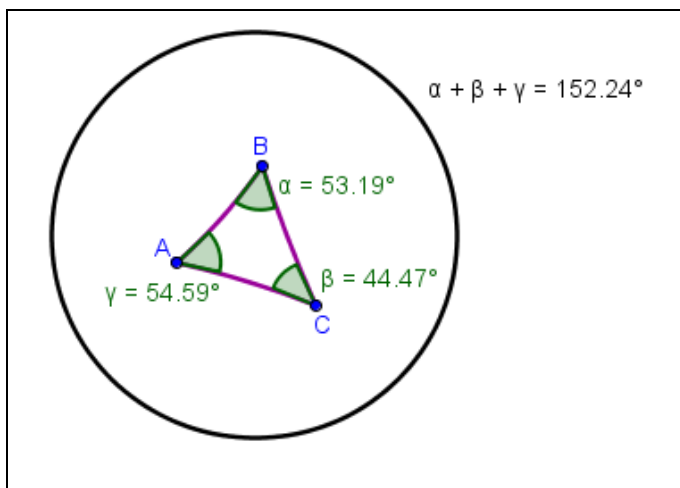


Figura 31 – Esboço da soma dos ângulos internos de um triângulo (1)

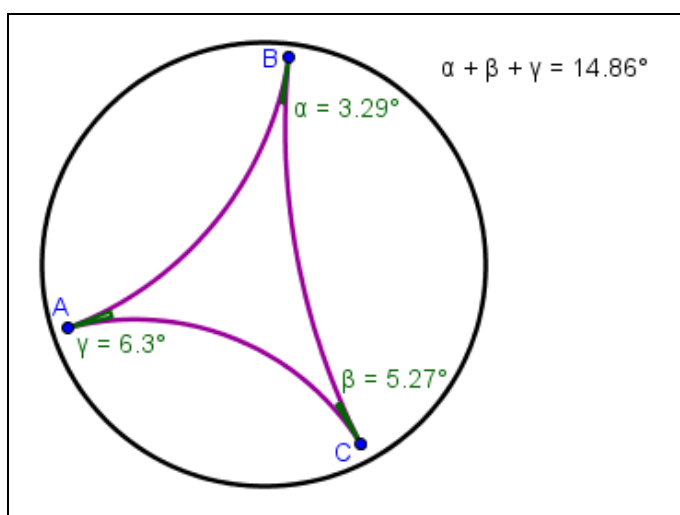


Figura 32 – Esboço da soma dos ângulos internos de um triângulo (2)

A atividade seguinte foi calcular a distância entre dois quaisquer. Para iniciar a construção os professores construíram uma h-reta qualquer. A professora P14 não construiu uma h-reta.

M2: não tem alguma coisa errada aí?

P14: não.

M2: essa reta é hiperbólica?

(...)

M2: olha o desenho dela (...) você pode apagar essa reta.

P14: eu vou apagar essa daqui?

M2: a gente ta trabalhando no modelo hiperbólico.

P14: é segmento definido por dois pontos?

M2: não, é uma reta hiperbólica!

A professora P14 inicialmente constrói uma reta euclidiana e só identifica isso depois que M2 questiona a sua construção. Porém, mesmo depois de M2 lembrar que estamos trabalhando no modelo hiperbólico, a professora P14 pergunta se o que ela tem que fazer é um segmento definido por dois pontos.

A última construção foi uma h-reta perpendicular a outra h-reta passando por um ponto qualquer.

M4: eu to querendo construir uma h-reta que seja perpendicular aquela h-reta (...) e que passa pelo ponto P. Se ela é uma h-reta o que ela tem de especial?

(...)

M4: quando que uma reta é hiperbólica? Tem que acontecer o que com ela?

(...)

M4: por que isso aqui é uma h-reta? É um arco qualquer esse aqui?"

P13: não, ele é perpendicular.

M4: isso. Ela tem que ser perpendicular a essa circunferência ali. As retas hiperbólicas que passam por P tem que ser o que?

P12: ortogonais.

M4 pergunta para os professores o que é preciso acontecer com um arco ou um diâmetro para que eles sejam uma h-reta; estes tiveram dificuldade de responder a pergunta. Foi preciso lembrar com os professores como se constrói uma h-reta passando por um ponto para dar continuidade a atividade: primeiro constrói-se uma circunferência com centro em O e raio qualquer, depois uma h-reta passando por dois pontos, no nosso caso C e D, marca-se um ponto P no interior da circunferência, que tem centro em O, e por fim, a semirreta OP.

Para construir uma h-reta passando por P , M1 utiliza a ferramenta reta polar: encontra o ponto P' , que é ponto inverso de P em relação ao plano hiperbólico, e a mediatriz de PP' . Marca um ponto qualquer sobre a mediatriz e faz uma circunferência com centro nesse ponto e que passa pelo ponto P . Depois encontra os pontos de intersecção e faz uma h-reta passando por P , como mostra a figura a seguir:

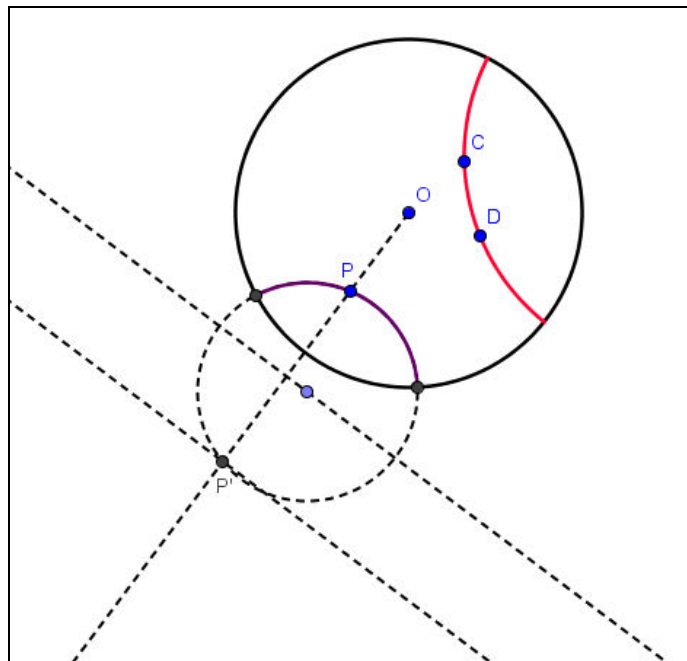


Figura 33 – Esboço da construção de uma h-reta perpendicular (1)

De todas as possíveis h-retas assim construídas, era preciso encontrar a que fosse perpendicular a h-reta CD . Para isso, foi preciso encontrar o ponto P'' , que é o inverso de P em relação a h-reta CD , e depois a mediatriz de PP'' . A h-reta procura (reta perpendicular) deve passar por P e ser perpendicular, simultaneamente, ao plano hiperbólico e a h-reta CD :

M4: o que dá a mediatriz de PP'' ? Todas as circunferências que são ortogonais a circunferência, ao plano hiperbólico. O que dá a mediatriz de PP'' ?

(...)

M4: o centro de todas as circunferências que são ortogonais ao arco.

(1.0)

M4: qual é o centro que nós estamos procurando?

(...)

P16: a intersecção das duas mediatrizes.

M4: isso mesmo.

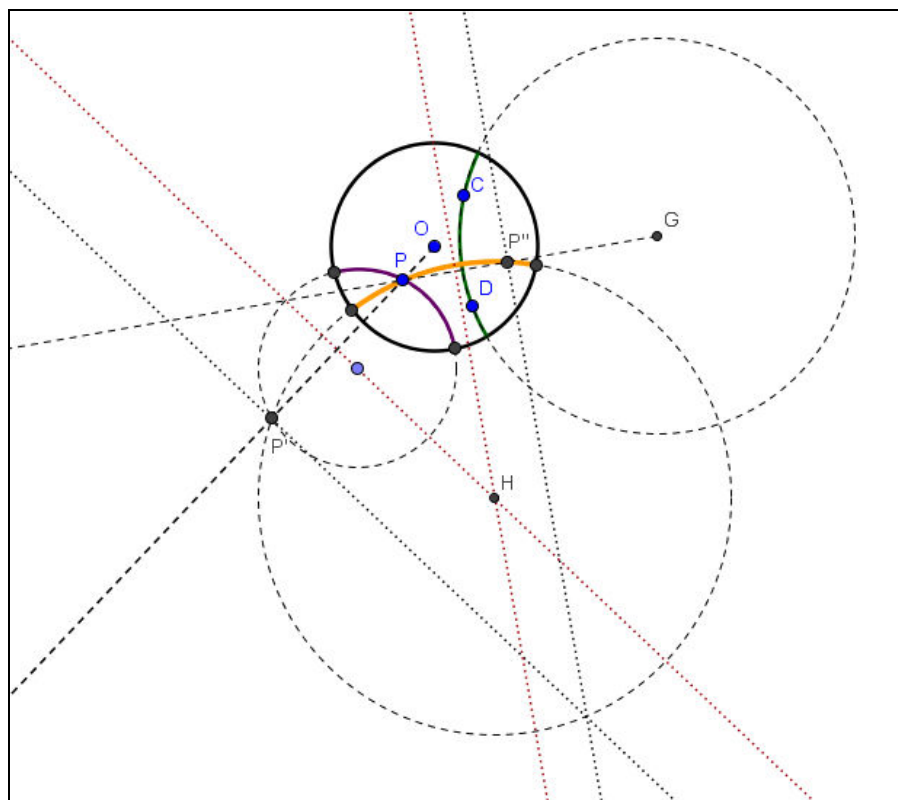


Figura 34 – Esboço da construção de uma h-reta perpendicular (2)

A figura 34 mostra o esboço da construção. O ponto H é o ponto de intersecção das mediatrizes de PP' e PP'' . Esse ponto é centro da circunferência que define a h-reta perpendicular procurada.

Nesta atividade os professores tiveram mais dificuldades do que nas anteriores, uma vez que foi necessário lembrar as etapas da construção de uma h-reta e, ainda, construir uma h-reta que passava pelo ponto P e fosse perpendicular a h-reta e ao plano hiperbólico.

Para muitos professores o *software* GeoGebra foi novidade, uma vez que eles nunca tinham trabalhado com ele. Por isso, acreditamos que, em alguns momentos, os professores ficaram mais preocupados em aprender a utilizar as ferramentas do *software*, do que com a parte teórica das Geometrias.

Talvez o tempo de curso não tenha sido suficiente para abordarmos a técnica para o uso do *software* e os conceitos da Geometria. Houve problemas que não esperávamos encontrar, como, por exemplo, as dificuldades em manusear o mouse, ou em conhecer as ferramentas do computador, que muitos professores apresentaram.

Das considerações sobre a Geometria Hiperbólica, destacamos a forte influência e a “contaminação” da representação da Geometria Euclidiana no entendimento da Geometria Hiperbólica. Os professores tiveram dificuldades em assimilar o que é uma h-reta, um segmento hiperbólico, um plano e as demais propriedades da Geometria Hiperbólica

Identificamos alguns obstáculos epistemológicos segundo as descrições de Bachelard: obstáculo geral e obstáculo verbal, que inclui imagens e palavras.

Observamos que alguns professores demonstraram uma concepção empírica da Geometria, uma vez que eles demonstram acreditar e entender que elementos da Geometria são reais.

6.3 O Uso de Novas Tecnologias

Com o objetivo de conhecer a prática dos professores participantes da pesquisa, com relação ao uso de novas tecnologias, perguntamos: *Na sua escola tem laboratório de informática?* ()*Sim* ()*Não*. As respostas dos professores encontra-se no gráfico a seguir:

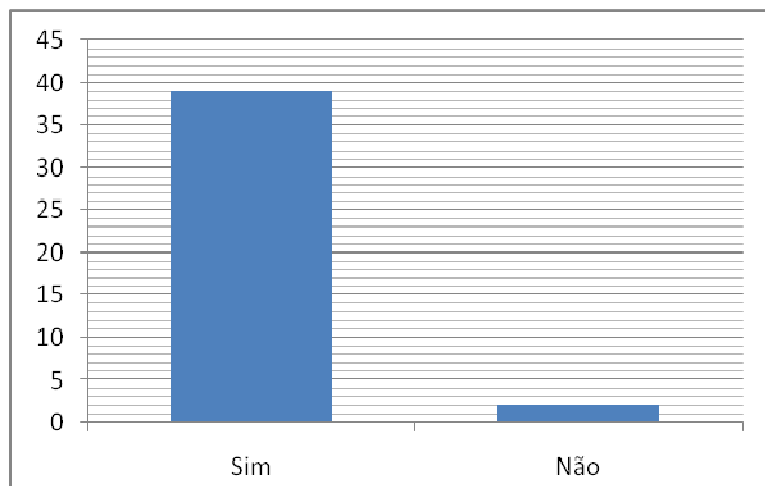


Gráfico 4 – Laboratórios de informática

Dos quarenta e um professores, somente dois professores responderam que nas suas escolas não tem laboratório de informática, os demais professores responderam que sim.

Perguntamos também se: *É possível utilizá-lo para ministrar aulas?* () *Só com agendamento* () *Basta estar livre* () *Não é permitido* () *Outra opção*.

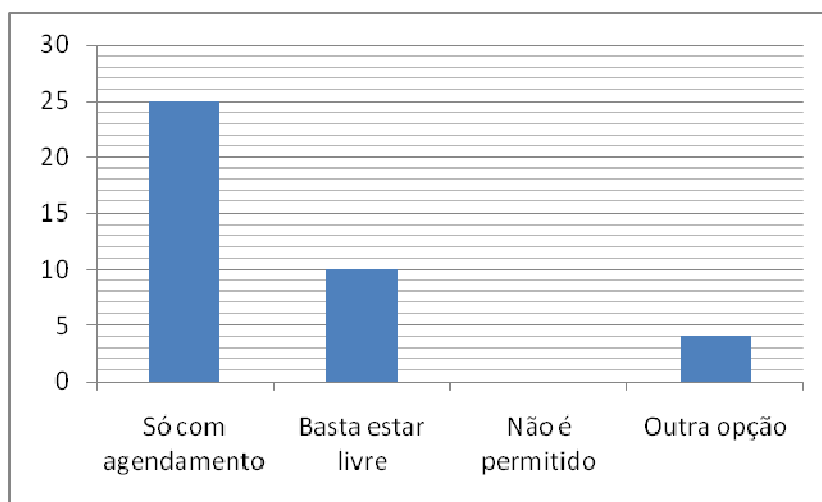


Gráfico 5 – Disponibilidade dos laboratórios de informática para ministrar aulas

Nenhum professor respondeu que não é permitido utilizar o laboratório de informática para ministrar aulas. Vinte e cinco professores responderam que para utilizar o laboratório é necessário reservá-lo; dez professores responderam que basta o laboratório estar livre e quatro professores responderam outra opção. Os professores que responderam outra opção foram:

- Professora Q.6: “por enquanto não conseguimos utilizar todos os computadores por algum problema técnico”.
- Professor Q.16: “neste ano não é permitido, temos promessas que no ano que vem vamos poder usar”.
- Professor Q.22: “ainda está sendo preparado para trabalhar com os alunos”.
- Professora Q.38: “só com alunos das 7^a e 8^a séries”.

O professor Q.22 relatou que os computadores ainda não estão disponíveis para trabalhar com os alunos, e a professora Q.38 respondeu que só é possível utilizar com alunos de 7^a e 8^a séries, fato este um tanto curioso já que em todas as séries é possível trabalhar com os recursos tecnológicos.

Para os professores que responderam que é permitido o uso do laboratório de informática, perguntamos: *Com que frequência você utiliza o laboratório em suas aulas de matemática?* ()Nunca ()Raramente ()Frequentemente.

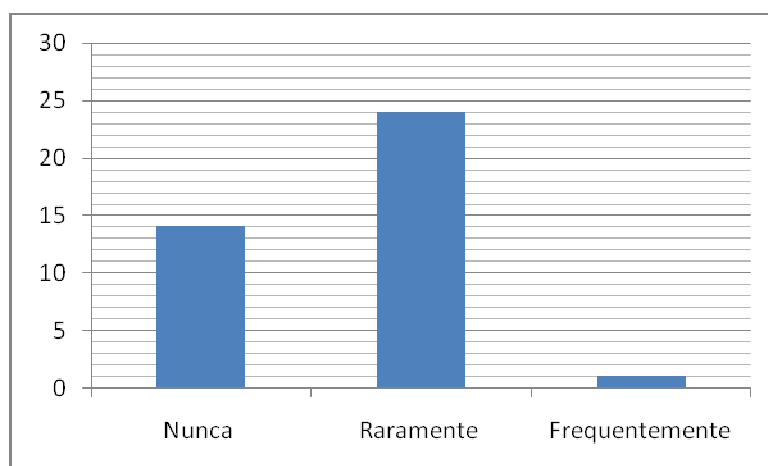


Gráfico 6 – Frequência da utilização do laboratório de informática

Percebemos que mais da metade dos professores – vinte e quatro – utilizam raramente o laboratório de informática para ministrar aulas. Um número significativo de professores – quatorze – nunca utilizou o laboratório. Apenas um professor respondeu que utiliza frequentemente.

Embora esforços tenham sido feitos para equipar as escolas com computadores e outras tecnologias, são poucos os professores que os utilizam, seja para ministrar aulas ou até mesmo para preparar aulas, provas, etc. Penteado (1999) expõe que:

Acreditamos que, em geral, o professor enfrenta os desafios impostos pela profissão e busca criar alternativas, porém a introdução do computador na escola altera os padrões nos quais ele usualmente desenvolve sua prática. São alterações no âmbito das emoções, das relações e condições de trabalho, da dinâmica da aula, da reorganização do currículo, entre outras (PENTEADO, 1999, p. 298)

Acreditamos que o fato do professor não utilizar os recursos disponíveis está relacionado, entre outros fatores, com a falta de formação adequada, uma vez que, muitos professores ainda não se sentem preparados para enfrentar todas essas mudanças no ambiente escolar e por isso adiam cada vez mais a introdução dos recursos tecnológicos na prática em sala de aula.

Também perguntamos aos professores sobre os *softwares* que eles costumam usar: *Quais softwares você costuma utilizar e com qual finalidade?* Segue as respostas dos professores:

- Professora Q.2: “os programas de criação de gráficos (Word e Excel), os programas de elaboração de filmes – Movie Maker, os programas de criação de figuras”.
- Professora Q.7: “Cabri geometric e Geogebra, na preparação de aulas e provas”.
- Professora Q.9: “capturo imagens do Google e importo para minha pasta”.
- Professor Q.13: “Explorer, Paint, Word, Excel, Power Point, Internet para ministrar aulas de informática”.

- Professor Q.18: “Linux, com a finalidade da utilização da calculadora científica e o Geogebra direcionado para o estudo das funções”.
- Professora Q.25: “Word, Google”.
- Professora Q.26: “uso para digitar as avaliações e atividades”.
- Professora Q.31: “usei o Geogebra aplicando conhecimento adquirido em curso recente”.
- Professora Q.32: “o Geogebra para iniciar conceitos de pontos, retas, semirretas e segmento de reta”.
- Professor Q.33: “Tv pendrive, Linux”.
- Professora Q.35: “utilizei o *software* GeoGebra”.
- Professora Q.36: “Cabri Geometri, Igeom e Geogebra (instalado no meu computador).
- Professora Q.37: “Linux”.

Os demais professores não responderam a pergunta. Dos programas descritos pelos professores nem todos estão relacionados ao ensino da matemática. Os descritos pelas professoras Q.9, Q.25 e Q.26 não são programas voltados para o ensino de matemática. A professora Q.7 respondeu que utiliza o *software* Cabri Géomètre e o *software* GeoGebra para elaborar provas, mas em nenhum momento cita que ela ministrou aulas com estes *softwares*. O professor Q.18 utiliza o GeoGebra para ministrar aulas sobre funções, outra possibilidade que o *software* apresenta. A professora Q.31 e a professora Q.35 responderam que utilizam o GeoGebra, mas não citaram para qual finalidade. A professora Q.32 utilizou o GeoGebra para expor aos alunos os conceitos de ponto, reta, semirretas e segmentos de retas. O professor Q.33 citou a Tv Pendrive. Este equipamento é um televisor de 29 polegadas com entradas para VHS, DVD, cartão de memória e *pen drive* e saídas para caixas de som e projetor multimídia. Por meio dos dispositivos, citados acima, é possível transferir dados e informações que podem ser visualizados na tela da TV e de microcomputadores. A professora Q.36 cita que o Cabri, o Geogebra e o Igeom estão instalados no seu computador, mas não relata se utiliza em sala de aula.

Com base nos relatos dos professores percebemos que uma minoria utiliza *softwares* de matemática para ministrar as suas aulas. Para que o professor possa utilizar os recursos

tecnológicos presente nas escolas é preciso que ele conheça as possibilidades educacionais destes recursos, uma vez que só a sua disponibilização não garante que o professor irá utilizá-lo e se essa utilização estará trazendo benefícios para a educação.

Com o objetivo de saber se os professores tinham tido algum preparo para utilizar os recursos tecnológicos disponíveis perguntamos: *Você recebeu algum preparo para utilizar recursos computacionais em sala de aula?* () Sim () Não **Se sim, qual.**

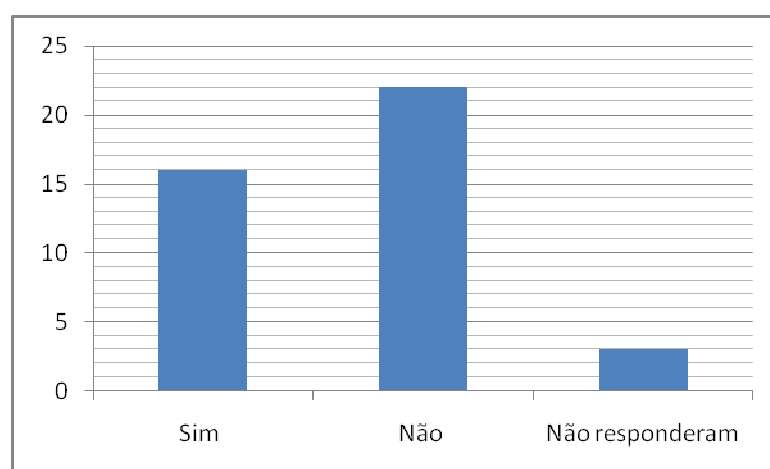


Gráfico 7 – Recebeu preparo para utilizar os recursos computacionais

Constatamos que vinte e dois professores nunca tiveram nenhum curso ou treinamento que os ensinasse a utilizar os recursos tecnológicos disponíveis nas escolas. Dezesesseis professores responderam que receberam algum curso e três professores não responderam a pergunta. Os cursos que os professores tiveram foram: capacitações e treinamentos oferecidos pelo Núcleo Regional de Educação, principalmente para aprender a utilizar a Tv Pendrive. Somente o professor Q.13 fez uma especialização em ambientes computacionais. De acordo com Valente (1999):

A formação do professor deve prover condições para que ele construa conhecimento sobre as técnicas computacionais, entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e seja capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica (VALENTE, 1999, p. 27)

Acreditamos que muita coisa tem de ser feita. Os professores, em parceria com os Núcleos Regionais de Educação e com as Instituições de Ensino Superior devem estudar e procurar introduzir novas metodologias que os auxiliem na prática em sala de aula.

6.3.1 O *Software* GeoGebra

Com relação ao *software* GeoGebra queríamos saber se ele contribuiu ou não para o aprendizado das Geometrias, quais foram as dificuldades dos professores e o que eles pensam sobre o *software*.

Baseado nisso perguntamos aos professores: *Você já conhecia o GeoGebra?* () *Sim*
() *Não*.

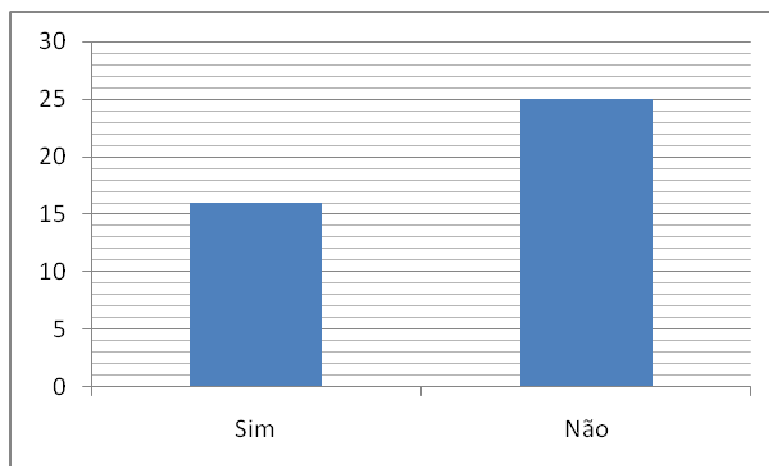


Gráfico 8 – Conhecia o GeoGebra

Constatamos que mais da metade dos professores – vinte e cinco – não conheciam o *software* GeoGebra. Dezesesseis professores responderam que o conheciam.

Além de saber se os professores conheciam o GeoGebra, perguntamos se: *É fácil de ser utilizado?* () Sim () Não *Comente sua resposta.*

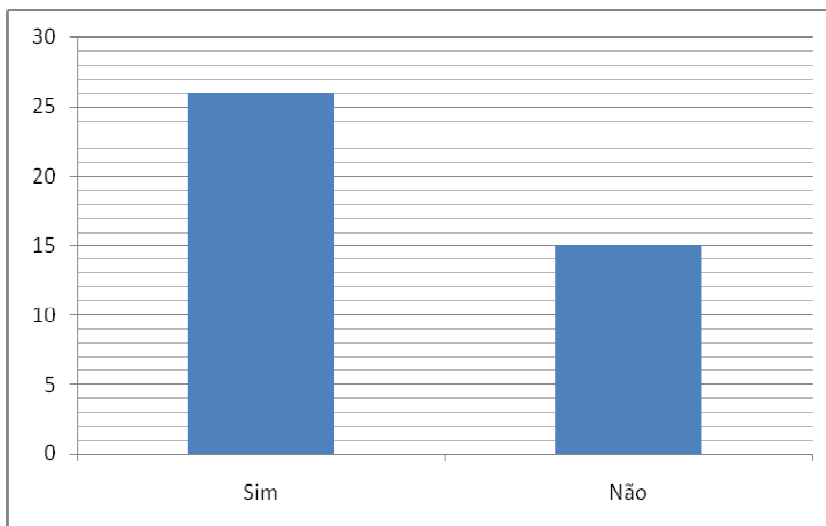


Gráfico 9 – É fácil de ser utilizado

Dos quarenta e um professores, vinte e seis responderam que o *software* GeoGebra é fácil de ser utilizado e os demais professores – quinze – responderam que ele não é fácil de ser utilizado.

Essa pergunta complementa a pergunta anterior, pois acreditamos que os dezesseis professores que responderam que não conheciam o GeoGebra também foram aqueles que tiveram mais dificuldades na sua utilização. Foi possível observarmos que muitos professores têm dificuldades em utilizar as ferramentas do computador.

Com a finalidade de saber quais foram às dificuldades dos professores pedimos para que comentassem a resposta. Uma das respostas dos professores foi a insegurança, a familiarização com o *software* e a falta de prática.

- A professora Q.7 sente um pouco de insegurança: “ainda não domino os inúmeros recursos do mesmo, este fato é também o responsável pela insegurança que

sinto em levar com mais frequência os alunos no laboratório”. Para a professora Q.21 “é preciso muito treinamento e ter confiança no que vou fazer”.

➤ Professora Q.3: “precisamos nos familiarizar melhor para depois utilizar com mais segurança”. Professora Q.11: “para que se torne fácil é preciso familiarizar com os ícones de comandos”. As professoras Q.32 e Q.37 também têm a mesma opinião das professoras Q.3 e Q.11.

➤ Professora Q.5: “em minha opinião basta praticá-lo para tornar fácil sua utilização”. As professoras Q.4, Q.6, Q.8, Q.19, Q.23, Q.24, Q.25, Q.27 e Q.30 e os professores Q.16, Q.18, Q.28 e Q.41 descreveram que precisam praticar mais e conhecer melhor o *software*.

Os professores também destacaram o pouco tempo de curso e a falta de outros cursos que os auxiliem no aprendizado dos recursos tecnológicos.

➤ Professor Q.33: “tivemos pouco tempo de curso, precisamos de mais aulas para que possamos trabalhar com nossos alunos”. Para a professora Q.1: “precisamos de um preparo bem adequado para o professor antes de se iniciar em sala”. A professora Q.17: “desde que tenhamos um preparo maior, pois a prática constante de uso deve ser orientada, por falta de conhecimento teórico”. As professoras Q.39 e Q.40 relataram que o tempo de curso foi pouco e que elas terão que estudar mais o *software*.

Alguns professores relataram que acharam difícil utilizar o *software* devido a falta de conhecimento em informática.

➤ Professora Q.38: “não pelo curso, por mim que tenho dificuldade de manusear mouse, sinto muita dificuldade”. As professoras Q.10, Q.26 e Q.31 descrevem que tem dificuldades com as ferramentas do computador e que é necessário ter uma base de informática.

Os professores também destacaram que o *software* é fácil de ser utilizado e que pode ajudar os alunos no entendimento dos conteúdos de Geometrias.

➤ Professora Q.2: “é fácil, prático e auxilia o aluno até mesmo no problema que citei dos alunos a respeito da visualização de conceitos”. Para a professora Q.35: “é um *software* de fácil utilização pois contém ferramentas explicativas que podemos descobrir como se usa sozinhos”. Os professores Q.9, Q.13 e Q.22 e as professoras Q.15, Q.29 e Q.36 descaram que o *software* é fácil de ser utilizado.

As professoras Q.12, Q.14, Q.20 e Q.34 não responderam a pergunta.

Com a intenção de averiguar se o *software* GeoGebra contribuiu/auxiliou no aprendizado da Geometria Hiperbólica perguntamos: *O software utilizado contribuiu para o aprendizado do conteúdo?* () Sim () Muito pouco () Não.

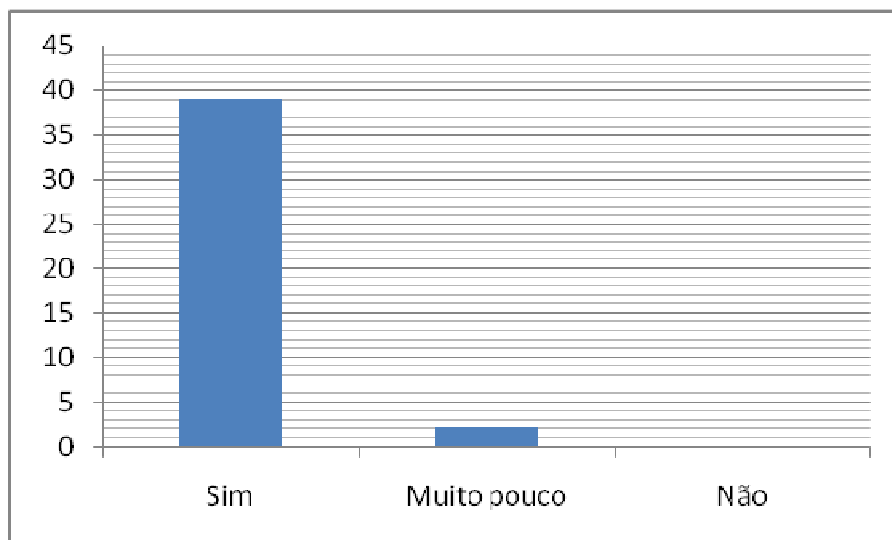


Gráfico 10 – O *software* contribuiu para o aprendizado do conteúdo

Apesar das dificuldades descritas pelos professores, trinta e nove responderam que o *software* contribuiu para o aprendizado das Geometrias. Apenas dois professores responderam que o *software* não contribuiu para o aprendizado.

Embora trinta e nove professores tenham respondido que o *software* contribuiu para o aprendizado da Geometria, nas páginas anteriores observamos que vários professores não conseguiram elaborar as construções propostas e mostraram dificuldades nos conteúdos de Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica.

Perguntamos também se: *Você teve dificuldades de aprender o conteúdo por meio do software?* () *Sim* () *Não*.

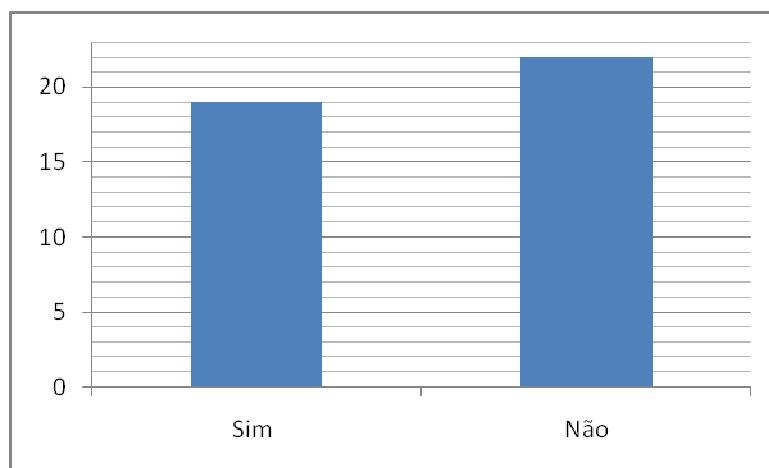


Gráfico 11 – Dificuldades de aprender por meio do *software*

Constamos que dezenove professores responderam que tiveram dificuldades em aprender os conteúdos por meio do *software*. O restante dos professores – vinte e dois – responderam que não tiveram dificuldades em aprender por meio do *software*.

Ainda que a resposta da maioria dos professores tenha sido afirmativa, nas duas questões anteriores, constatamos nas categorias Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica que muitos não conseguiram se desvencilhar dos obstáculos advindos da “contaminação” dos conceitos e das representações geométricas da Geometria Euclidiana. Como foi mostrado nessas categorias, os professores tem dificuldades em compreender os conteúdos de Geometria Hiperbólica como um conhecimento geométrico. Em vários

momentos os professores utilizavam-se das representações e dos conceitos da Geometria Euclidiana para tentar justificar a Geometria Hiperbólica.

Com o intuito de saber quais foram às dificuldades dos professores perguntamos: *Quais as dificuldades que você teve em relação a aprendizagem da Geometria Hiperbólica?*

Uma das dificuldades que os professores relataram em relação ao aprendizado da Geometria Hiperbólica foi à falta de conhecimento da própria Geometria Hiperbólica.

- Professora Q.24: “falta de aprofundamento do conteúdo, pois só vi na faculdade e hoje não tenho ensino médio. Preciso estudar”. A professora Q.29 destacou que: “por ter pouco conhecimento foi um pouco difícil de início, mas é possível tranquilamente ser aplicado”. Para a professora Q.35: “é um assunto novo, o meu conhecimento sobre essa geometria era muito pequeno”.
- O professor Q.9 relatou que a sua dificuldade está em: “descobrir diferenças entre as geometrias”. Professora Q.6: “o entendimento das circunferências ortogonais, algo feito no início; quanto aos ângulos ortogonais ficou fácil, pela visualização, por meio das tangentes e ângulos”.
- O professor Q.16 relatou que: “tudo que é novo é um pouco difícil”. As professoras Q.5, Q.7 e Q.21 e o professor Q.13 e Q.22 destacaram que as suas dificuldades foram à falta de conhecimentos da Geometria Hiperbólica e a visualização dos conceitos nessa Geometria.

O fato dos professores só pensarem na Geometria Euclidiana ou até mesmo só conhecerem essa Geometria foi uma dificuldade no entendimento da Geometria Hiperbólica.

- Professora Q.1: “visualizar alguns conceitos que só tinha com a geometria euclidiana”. Professora Q.17: “relembrar as teorias e propriedades da geometria euclidiana”. Ambas as professoras relataram que as suas dificuldades foram devido aos conceitos que tinham, ou a falta deles, da Geometria Euclidiana.

Alguns professores tiveram dificuldades de aprender a Geometria Hiperbólica e o GeoGebra ao mesmo tempo.

➤ Professora Q.26: “é que estávamos associando as duas coisas: conteúdo e informática”. Professora Q.34: “não tenho facilidades em utilizar a informática”. A professora Q.36 relatou que: “não tive quando fui orientada pelos alunos do curso, pois o novo sempre nos assusta, estamos como que nos “alfabetizando”, não é mesmo!”. A dificuldade das professoras Q.32, Q.39 e Q.40 e do professor Q.41 foi a falta de conhecimento do GeoGebra e por não conseguirem manipular as ferramentas do *software*.

Os professores também destacaram que o tempo do minicurso foi pouco para a quantidade de informações.

➤ Professora Q.8: “muitos conceitos, pouco tempo”. Para a professora Q.25: “pouco tempo para obter todo conhecimento sobre a mesma”. A professora Q.30 descreveu que: “ainda apresento dificuldades por ter tido apenas esse primeiro contato”. As professoras Q.2, Q.12, Q.19, Q.20 e Q.38 o professor Q.33 relataram que o curso foi muito rápido e isso dificultou o entendimento da Geometria.

Alguns professores destacaram que não tiveram dificuldades.

➤ Professora Q.27: “nenhuma já havíamos tido um pequeno contato no curso geometria não-euclidiana e para o uso deste curso foi necessário”. Para a professora Q.37: “com o GeoGebra fica mais claro e acredito que para o aluno também ficará”. A professora Q.15 e o professor Q.18 não encontraram dificuldades.

As professoras Q.3, Q.4, Q.10, Q.11, Q.14, Q.23, Q.31 e o professor Q.28 não responderam a pergunta.

Valendo-se das respostas dos professores, constatamos que vinte e seis professores acharam que o *software* GeoGebra é fácil de ser utilizado e quinze responderam que ele não é fácil de ser utilizado. As dificuldades que os professores relataram com relação ao uso do *software* foram: insegurança, falta de familiarização com o *software*; o tempo do minicurso foi curto e a falta de conhecimento em informática. Para alguns professores o *software* é fácil não houve dificuldades e o *software* pode auxiliar os alunos no entendimento dos conteúdos de Geometrias.

O *software* GeoGebra, segundo os professores, contribuiu para o aprendizado dos conteúdos de Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica. Apesar da resposta afirmativa da maioria dos professores, o que percebemos foi que eles não conseguiram elaborar as construções propostas e mostraram dificuldades teóricas nesses conteúdos.

Para os professores, as dificuldades com a Geometria Hiperbólica estão relacionadas à falta de conhecimento da própria Geometria; só pensarem na Geometria Euclidiana ou até mesmo só conhecerem essa Geometria; aprender a Geometria Hiperbólica e o GeoGebra ao mesmo tempo e o tempo do minicurso não foi suficiente para a quantidade de informações. Vale ressaltar que alguns professores destacaram que não tiveram dificuldades.

6.3.2 A Utilização do *Software* GeoGebra

Durante o minicurso observamos algumas dificuldades e facilidades dos professores em utilizar o computador e o *software* GeoGebra. No início a maioria dos professores só conseguia realizar as construções com a ajuda dos monitores e, depois, com um pouco de prática, que eles adquiriram durante o minicurso, começaram a ter mais segurança para trabalharem sozinhos.

As principais dificuldades apresentadas no início das construções foram principalmente nas opções: renomear, exibir/esconder objeto, selecionar um objeto, salvar um arquivo, entre outras. Observe alguns casos:

P21: o problema é que eu me confundo com o lado do botão, quando que eu clico com o botão esquerdo?

M3: pra renomear, exibir/esconder é sempre com o direito.

P21: o problema é o lado, sempre a primeira vez é o direito?

M3: se você quiser renomear, se você quiser fazer qualquer troca é com o direito.

A professora construiu um segmento e M3 pede para ela exibir a medida do segmento.

M3: agora você vai colocar a medida aqui (mostra o segmento).

P22: e agora eu venho aqui? (mostra a opção mover)

M3: agora você clica com o botão direito sobre o segmento.

P22: cadê que eu não to achando?

M3: o que? (...) é no segmento, clica com o botão direito sobre o segmento, propriedades.

P22: com o direito também?

M3: não, com o esquerdo.

P22: isso que eu não sei, por que é um botão pra lá e um pra cá.

Alguns professores apresentaram dificuldades nas ferramentas do computador: salvar os arquivos, utilizar a plataforma Linux, o BrOffice, entre outros.

M1: então pra salvar isso no GeoGebra, eu venho aqui em arquivo, gravar como, clico, vai aparecer de novo uma janela e como vocês já fizeram aquela pasta anterior, vocês procurem aí a pasta com o nome de vocês.

(0.30)

P9: aonde que você foi? (...) Eu to aqui, e você fez o que? (...) arquivo, não é gravar? (...) eu não consigo (...) é gravar como? (...) eu não gravei, não fiz aqui (...) que que se fez?

M2: é pra salvar no arquivo do GeoGebra.

P9: é isso que eu quero saber.

M2: então você vem aqui: gravar como.

P9: agora digita aqui?

M2: isso, digita o nome (...) já tava naquela pasta, você já tinha salvo.

Os diálogos transcritos acima mostram as dificuldades dos professores têm em utilizar as ferramentas do computador. A professora P8 expôs que não utiliza e não gostam de utilizar as novas tecnologias.

P8: sabe o que é? Eu não gosto de computador, eu não gosto de celular, agora imagina que você é obrigada a aprender.

M5: verdade. Mas a gente usa no dia-a-dia.

P8: a sua geração isso é uma coisa normal. A nossa geração não é.

Na fala da professora P8, percebemos a resistência da professora em utilizar o computador, o celular, por exemplo, e ela diz sentir-se obrigada a utilizar esses “objetos informáticos” que não são nada familiares.

Com base nos relatos dos professores, nas idades e no ano de formação, consideramos que estes não tiveram contato com microcomputadores durante a sua formação inicial e até mesmo na suas atividades diárias, uma vez que a popularização da interface Windows, por exemplo, no Brasil, aconteceu a partir da década de 1990 com a versão Windows-3. Os computadores pessoais tornaram-se mais populares e acessíveis há poucos anos, o que nos faz pensar que a maioria dos professores não tiveram contato com essa máquina e isso faz com que eles sintam-se intimidados pelo computador e mantêm-se distantes.

Durante um diálogo entre a professora P15 e do professor P10 eles comentam que o *software* é uma ferramenta importante, mas que ainda não estão preparados para utilizá-lo com os alunos.

P10: é uma ferramenta a mais, mas não estamos prontos pra usar, nós não estamos prontos pra usar.

P15: não, não estamos.

P10: mas ta melhorando, estamos se aperfeiçoando.

A preocupação e o interesse em utilizar as novas tecnologias estão presentes no cotidiano escolar do professor. A dificuldade dessa abertura para novas práticas é o não

conhecimento de como usar essas ferramentas e a dificuldade de sair da *zona de conforto* como descrevem Borba e Penteadó (2001).

Para a professora P25 o software é uma ferramenta importante e pode substituir o lápis e o papel.

M1: e se isso fosse feito com lápis e papel, você acha que seria mais interessante ou...

P25: não, de maneira alguma. Eu acho que o aluno jamais vai aprender igual ta aprendendo. Aqui mexe! Lápis e papel vai ficar muito mecânico, só pra fazer mesmo.

Na opinião da professora seria mais difícil o aluno aprender a Geometria Hiperbólica se as construções fossem feitas com lápis e papel. Ela destaca a importância do aluno poder realizar as construções e depois movimentá-las sem perder os vínculos estabelecidos inicialmente.

A possibilidade de “arrastar” as figuras ou partes de figuras na tela do computador foi um fator importante na verificação das propriedades geométricas e se as construções foram realizadas corretamente. No decorrer das atividades, os professores puderam mover os pontos, as retas, as semi-retas, utilizar a ferramenta do GeoGebra que descreve a relação entre os objetos, para averiguar se as propriedades iniciais se mantinham, mesmo depois de mover um dos objetos presentes na construção.

Durante a construção do triângulo equilátero, após ter encontrado os três vértices do triângulo, a professora P9 pergunta se pode construir o polígono.

P9: agora eu vou em polígono?

M1: isso, e clica sobre os vértices.

(0.30)

P9: quando eu cliquei aqui não ficou bem certinho.

M1: tem que desfazer e fazer de novo.

P9: como que eu faço? Vou no mover?

M1: não, tem que fazer de novo.

(1.0)

P9: qual dos dois eu tenho que apagar agora...

(1.0)

P9: eu não consegui, eu não quero apagar os dois pontinhos, só um. Como que eu faço, eu tenho medo de mexer e apagar tudo.

M1: o ponto, esse mais clarinho é o A, você clica com o direito sobre ele (...) e apagar.

Percebemos aqui uma dificuldade da professora P9, quando ela construiu o triângulo ela não clicou sobre os vértices, clicou muito próximo, mas não foi sobre o ponto, e por causa disso a construção do seu polígono não deu certo. Na construção da reta tangente o professor P2 não a construiu corretamente.

M1: certo, todo mundo conseguiu construir as tangentes?

P2: só na hora de pedi pro GeoGebra não ta dando.

P23: é aqui ó, no último, aqui ó. (a professora P23 mostra para o professor P2 qual ferramenta ele deve usar)

P2: ele ta falando que não é tangente.

M1: não é?

P23: ele fala que é intersecção com o círculo.

M1: ah, então você fez alguma coisa errada.

Ao construir a reta tangente o professor P2 não clicou exatamente no ponto de tangência e teve que refazer a construção. A professora P14, na construção dos arcos ortogonais não encontrou 90° .

M4: vamos testar se esse ângulo é 90° .

(...)

M1: não deu?

P14: deu 89.

M1: talvez pode ter sido na hora de fazer a intersecção (...) vamos ver (...) foi alguma coisa na construção.

P14: tem que dar obrigatoriamente 90° ?

M1: tem que dar 90° , é ortogonal.

(0.40)

M1: ah, você não pegou o ponto na intersecção das mediatrizes.

A professora P24 teve dificuldades em marcar o ângulo. A maior dificuldade dos professores na hora de encontrar o ângulo foi que eles não clicavam no sentido horário ou não clicavam nos pontos necessários para que o ângulo aparecesse.

P24: o que aconteceu aqui?

M3: você calculou o ângulo de fora (...) vai no desfazer, na seta amarela.

P24: ah, aqui desfaz?

M3: isso. Agora você clica no ângulo (...) agora você clica no A, no B e no C.

O *software* GeoGebra mostrou-se uma ferramenta importante de construção, exploração e verificação das construções, por meio das suas ferramentas. Os professores puderam “arrastar” as construções realizadas e perceber, por exemplo, quando a erravam. Para solucionar os problemas propostos, foi necessário tanto o domínio teórico quanto o geométrico.

Depois das atividades propostas e do contato dos professores com o *software*, perguntamos: *Você utilizaria as atividades feitas neste curso com seus alunos em sala de aula?* () Sim () Não *Comente sua resposta.*

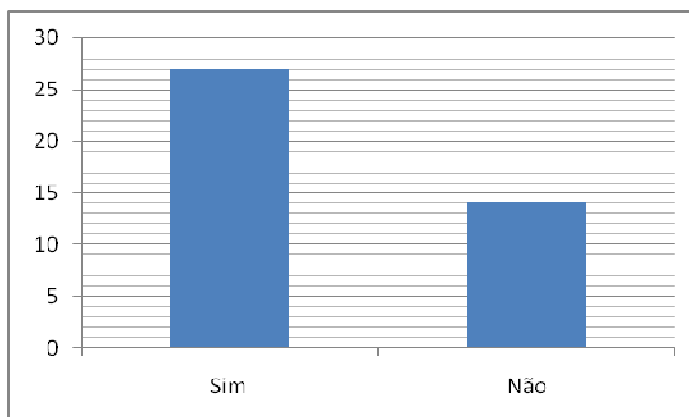


Gráfico 12 – Utilizaria as atividades em sala de aula

A maioria dos professores – vinte e sete – responderam que utilizariam as atividades em sala de aula, os demais professores – quatorze – responderam que não utilizariam as atividades.

Apesar de mais da metade dos professores responderem que utilizariam as atividades, um número considerável de professores respondeu que não utilizaria. Isso nos remete ao que Borba e Penteado (2001) chamam de *zona de conforto*, ou seja, o professor procura conduzir a sua prática por um caminho que é conhecido, previsível e controlável e quase nunca avançam para o que chamamos de *zona de risco*.

Uma justificativa dos professores que responderam que não utilizariam as atividades realizadas foi a falta de segurança em utilizar o *software*.

➤ Professora Q.17: “somente depois de ter segurança de seu uso por mim”. Professora Q.10: “não, pois ainda estou muito insegura”. Professora Q.34: “para utilizar com os alunos é preciso estar muito segura”. Professora Q.14: “porque não tenho habilidades com computador”. As professoras Q.4, Q.7, Q.10, Q.17, Q.26 e Q.34 e os professores Q.18 e Q.41 responderam que ainda não estão seguros quanto a utilização do *software*.

Mesmo os professores que responderam que utilizariam as atividades realizadas com os seus alunos, eles só as fariam depois de praticar e aprender mais sobre o *software* e a Geometria Hiperbólica.

➤ Professora Q.1: “somente se estiver bem preparada para resolver possíveis dúvidas dos alunos no momento das construções e estiver convicta do que transmitir para os alunos”. Para a professora Q.5: “com certeza faria com os alunos mas para isso nós professores precisamos praticar as atividades e as escolas precisam de melhores computadores”. A professora Q.22 respondeu que utilizaria as atividades: “porém tenho que estudar mais e esclarecer as minhas dúvidas sobre este recurso”. Professora Q.37: “com muito treinamento durante as férias pois os alunos sabem melhor, que eu, lidar em computador”. As professoras Q.8, Q.19, Q.25, Q.27, Q.28 e

Q.30 responderam que precisam conhecer melhor o *software* para aplicá-lo com os alunos. Percebe como os professores estão inseguras em abordar os conteúdos de Geometrias utilizando o *software* GeoGebra.

Outra justificativa, dos professores que utilizariam as atividades, foi que elas auxiliariam os alunos no entendimento dos conteúdos de Geometrias.

➤ Professora Q.2: “acho que auxiliará no desenvolvimento dos conteúdos”. A professora Q.6 destacou que: “é possível de se utilizar e ajuda no raciocínio do aluno, também na revisão de conteúdos de geometria euclidiana ou até na aprendizagem da mesma”. Para a professora Q.15: “as construções de retas hiperbólicas, triângulos, quadriláteros são conceitos fáceis de trabalhar com os alunos”. A professora Q.29 destacou que: “com certeza seria muito bem vindo e os alunos iriam adorar, pois os mesmos encaram essas atividades (no computador) muito tranquilamente”. A professora Q.32 respondeu que: “é uma forma de significar conceitos tão abstratos”. A professora Q.35: “utilizaria porque essas novas geometrias existem e nós professores devemos passar essas informações a nossos alunos”. Os professores descritos destacaram que o *software* GeoGebra pode auxiliar os alunos no entendimento da Geometria Hiperbólica e na Geometria Euclidiana.

Alguns professores responderam que utilizariam somente algumas atividades e que não as fariam em todas as turmas.

➤ Professora Q.3: “somente com o ensino médio, pois eles no meu ponto de vista eles já possuem um conhecimento “maior” sobre geometria euclidiana, facilitando, portanto a aprendizagem da não-euclidiana”. O professor Q.9: “somente as atividades menos complexas”. A professora Q.20 utilizaria: “construção da euclidiana” e a professora Q.21: “com a 5ª e 6ª séries – construção de ângulos e polígonos”. A professora Q.39 respondeu que “algumas atividades serão possível de ser trabalhado com os alunos”.

As justificativas dos demais professores foram:

➤ Professora Q.11: “desde que selecione alguns alunos mais interessados”. Professora Q.12: “penso em que eles não acompanhariam o processo das construções, ou então, não identificariam os elementos envolvidos”. O professor Q.13 respondeu que: “no momento não estou trabalhando Geometria, mas acredito que vou conseguir”. Para a professora Q.23: “basta reorganizar o tempo de estudo com os alunos”. A professora Q.31: “desde que eu tivesse trabalhado o conteúdo em sala”. O professor Q.33 respondeu que: “não trabalhamos com outra geometria em sala de aula, a não ser a euclidiana”. A professora Q.40: “assim que o colégio oferecer sala de informática, espero ter segurança para utilizar algumas atividades”. A professora Q.36 e o professor Q.28 responderam que da para ser utilizado. O professor Q.16 e a professora Q.24 responderam que ainda não tiveram oportunidade de utilizar as atividades.

Mais uma vez, percebemos como o professor ainda sente insegurança em utilizar os recursos tecnológicos disponíveis nas escolas. Os professores precisam estudar e conhecer mais sobre o GeoGebra e os demais recursos. O ensino da Geometria Hiperbólica também causa insegurança nos professores, uma vez que eles relataram não ter conhecimento suficiente do conteúdo e de como ensinar seus alunos.

Alguns professores mostram-se interessados em utilizar as atividades propostas por meio do *software* GeoGebra e que elas auxiliariam os alunos a compreender os conteúdos de Geometrias.

6.4 Resistências e Dificuldades em Aceitar as Geometrias Não-Euclidianas

Por mais de dois mil anos os matemáticos, e as pessoas em geral, acreditavam que a Geometria Euclidiana era o único conhecimento geométrico possível e que responderia a todos os problemas do mundo físico e matemático. O desenvolvimento das Geometrias Não-Euclidianas derrubou essa crença, mas mesmo assim muitos professores de matemática desconhecem a existências dessas Geometrias e muitos têm dificuldade em aceitá-las e

compreendê-las. Os conceitos e definições da Geometria Euclidiana exercem forte influência no ensino de Geometrias Não-Euclidianas.

Com o intuito de saber se os professores aceitam o fato de existirem outras Geometrias perguntamos: *Para você já ficou tranquilo que existem outras geometrias além da geometria euclidiana? Comente.*

Os professores destacaram que esse curso, e os demais que eles haviam feito, ajudaram a esclarecer a existência de outras Geometrias.

➤ Professora Q.2: “aprendi coisas que não sabia e foi muito bom!”. Professora Q.5: “já tinha estudado alguma coisa sobre, mas com certeza ficou bem mais claro”. Professora Q.6: “agora já posso compreender melhor, o contato e as reflexões, além da utilização da geometria euclidiana ajudam muito”. Para a professora Q.10: “após os dois cursos que participei ficou claro a existência de outra geometria que não a euclidiana”. Professora Q.29: “em vários encontros já observamos a existência de outras geometrias, através de experimentos (tipo triângulo com a bexiga cheia)”. O professor Q.41 diz não ter dificuldades: “visto que já fiz outro curso das geometrias não-euclidianas”.

Valendo-se das respostas dos professores percebemos como a formação inicial e continuada é importante para que eles possam rever e aprender novos conceitos. Ponte (1998) destaca que:

Para responder aos desafios constantemente renovados que se colocam à escola pela evolução tecnológica, pelo progresso científico e pela mudança social, o professor tem de estar sempre a aprender. O desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente. O desenvolvimento profissional permanente é uma necessidade incontornável mas não deve ser visto como uma mera fatalidade. Pelo contrário, deve ser encarado de modo positivo: a finalidade do desenvolvimento profissional é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente (PONTE, 1998, p. 3-4)

Muitos professores, durante o minicurso e nas respostas dos questionários, mostraram-se “afastados” do conhecimento matemático e, a formação continuada pode contribuir para que os professores aprendam novos conteúdos, novas metodologias e reflitam sobre a prática docente.

Para alguns professores a dificuldade em aceitar outras Geometrias já foi superada, mas eles ainda têm dificuldades em compreendê-las como um conhecimento geométrico.

- Professora Q.12: “ainda me faltam conhecimento mais detalhado sobre cada uma delas. Gostaria de me aperfeiçoar mais sobre elas”. Para o professor Q.13 está tranquila a existências de outras Geometrias, mas: “com muitas dúvidas, mas que existe existe”. Professora Q.25: “sim em saber que existem outras além, mas precisamos nos interar de todas com maior espaço de tempo”. A professora Q.31: “já, mas ainda preciso de muito estudo para entendê-las”.

O fato de muitos professores não conhecerem a Geometria Hiperbólica como um conhecimento geométrico, que possui um conjunto de axiomas e postulados consistente, dificulta ainda mais o entendimento dessa Geometria.

As professoras Q.1 e Q.34 mostraram-se preocupadas com a educação que as novas gerações terão que vivenciar:

- Professora Q.1: “o mundo está numa dinâmica acelerada os alunos estão com pensamentos acelerados devido as multimídias e descobrir novas geometrias torna-se um desafio para a mente”. Professora Q.34: “tenho apresentado aos alunos outros conhecimentos além da euclidiana. Fractais, por exemplo”.

Sem dúvida, preparar as novas gerações para o mundo que terão que vivenciar é uma tarefa difícil que os educadores enfrentam. Santaló (2006) expõe que “isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade (SANTALÓ, 2006, p. 11). O mundo é rapidamente

mutável, e a escola deve estar preparada para adaptar seu ensino as mudanças – de conteúdos, metodologias, culturais, etc.

Entre os professores, encontramos alguns que não têm dificuldades em aceitar as Geometrias Não-Euclidianas.

- Professora Q.7: “não encontro mais dúvidas com relação a aceitar o fato”. Professor Q.9: “mesmo fazendo pouco tempo que conheci as geometrias não tive dificuldades”. As professoras Q.23, Q.27 e Q.36 destacaram que não têm dificuldades em aceitar.

Para alguns professores a aceitação e a compreensão das Geometrias Não-Euclidianas ainda não aconteceram.

- Professora Q.8: “não é fácil aceitar, mas necessário”. Para a professora Q.11: “tranquilo não, mas é bom saber da existência de outras geometrias”. A professora Q.15: “mais ou menos, pois frequentei os dois cursos sobre geometria não-euclidiana, porém ainda preciso estudar muito”. O professor Q.18 destaca que: “é muito difícil a aceitação, mas já me sinto mais tranquilo em aceitar”. Para a professora Q.19: “ainda não, necessito de aprofundar mais meus conhecimentos”. A professora Q.32: “na verdade é preciso uma fundamentação maior para depois haver maior compreensão dos termos utilizados, pois a base sobre o assunto está muito distante das colocações feitas”.

Apesar dos cursos que os professores participaram, a compreensão e a aceitação das Geometrias Não-Euclidianas não é garantida. Os conteúdos de Geometrias, assim como outros conhecimentos matemáticos, sofrem uma transposição passando do conhecimento científico para o conhecimento escolar. Mazzotti (2008) destaca o professor durante a sua vivência acadêmica, também tem contato com diferentes representações, opiniões e condutas que o influenciarão na construção do conhecimento e, posteriormente, na maneira como ele ensinará esses conteúdos para os seus alunos.

As justificativas dos demais professores foram:

- Professora Q.17: “é possível com esse *software* que ela se torne dinâmica, não fica só na teoria”. O professor Q.33: “preocupado de como trabalhar isso em sala de aula”. Professora Q.4: “acha que ela deve ser melhor trabalhada nas graduações”.

As professoras Q.3, Q.20, Q.21, Q.24, Q.26, Q.30, Q.35, Q.37, Q.38, Q.39 e Q.40 e os professores Q.16, Q.22 e Q.28 respondem que ficou tranquilo a existência de outras Geometrias, mas não comentaram suas respostas. A professora Q.14 não respondeu a pergunta.

Em virtude das respostas dos professores, destacamos a importância da formação continuada e de minicursos que apresentem novas metodologias e conteúdos, e que relembre conteúdos já vistos pelos professores, para que possam sanar suas dúvidas e compreender melhor os conteúdos matemáticos.

Também perguntamos aos professores: *Quais dificuldades que você tem que não permitem que você aceite outras Geometrias? Comente.*

Uma das dificuldades que os professores apontaram foi conhecer somente a Geometria Euclidiana.

- Professora Q.1: “no fato dos conceitos terem sido fixados desde a pré-escola com ênfases do tipo: “isso não existe”, “só isso é certo”. Para a professora Q.8: “na minha formação acadêmica não lembro de ter visto outra geometria, daí a dificuldade”. A professora Q.11: “foram tantos anos acreditando na geometria euclidiana que agora é muito difícil compreender a não-euclidiana”. Para o professor Q.18: “a principal dificuldade é ter sempre trabalhado com a geometria euclidiana”. Professor Q.33: “fui preparado somente com a geometria euclidiana, mas eu aceito outras sim”. Para as professoras Q.21 e Q.26 a dificuldade está em pensar somente na Geometria Euclidiana.

Esses professores ao relatarem que conhecer somente a Geometria Euclidiana dificultou o entendimento da Geometria Hiperbólica, nos remete ao obstáculo epistemológico – conhecimento geral – descrito por Bachelard. De acordo com Bachelard nada prejudicou tanto a evolução do conhecimento científico “quanto a falsa doutrina do *geral* [...] e que continua sendo, para muitos, uma doutrina fundamental do saber” (BACHELARD, 1996, p. 69). As professoras Q.1 e Q.11 relatam que durante muito tempo elas acreditaram que a Geometria Euclidiana é a única Geometria possível.

Alguns professores apontaram que a dificuldade está na falta de conhecimentos e de cursos que apresentem outras Geometrias, além da Geometria Euclidiana.

➤ Professora Q.6: “provavelmente eu preciso de muitos mais conhecimentos para perceber se tenho ainda alguma dificuldade”. Para a professora Q.12: “ainda me faltam conhecimentos mais detalhados sobre cada uma delas”. Professora Q.19: “a falta de conhecimentos que gera insegurança”. A professora Q.17 destaca que: “falta na verdade estudarmos essas geometrias na nossa graduação e as utilizarmos em currículo”. Para a professora Q.31: “não é o caso de aceitar, o problema é a falta de conhecimento”. A professora Q.32 destaca que: “não ter abstraído essas informações em meu curso de formação acadêmica”. Professora Q.37: “a principio a gente se esquece das outras geometrias por não fazer parte do aprendizado, nas escolas durante os meus estudos”. Para as professoras Q.20 e Q.24 a dificuldade está na falta de cursos.

Durante a atividade docente, o professor sente necessidade de cursos que abordem os conteúdos de matemática e de metodologias que os ajude a melhorar a prática em sala de aula. A formação matemática de muitos professores, ao longo da sua formação inicial, foi deficiente e segundo Ponte (1998, p. 5), muitos professores “não tiveram oportunidade durante esta formação de percorrer um leque variado de experiências matemáticas, incluindo a resolução de problemas, a realização de trabalho investigativo, a construção de modelos de situações reais, etc.”

No final do questionário, pedimos para que os professores fizessem observações que não estivessem nas questões do questionário. As observações dos treze professores que responderam a pergunta foram para que mais cursos fossem oferecidos no ano de 2009 e nos anos seguintes. Os cursos deveriam abordar, além dos conteúdos de Geometrias, outros conteúdos de matemática. As observações de alguns professores foram:

- Professora Q.19: “gostaria de continuar com outros cursos para ampliar e aprofundar meus conhecimentos”.
- Professora Q. 29: “que no ano de 2009 haja continuidade dos cursos para aperfeiçoamento dos professores”.
- Professora Q.37: “proporcionar mais cursos de geometria não-euclidiana em parceria com o NRE Maringá e até mesmo só UEM com convite aos professores das escolas públicas e nos dias de sua hora/atividade, 2009 terça-feira. Curso semi-presencial”.
- Professora Q.39: “seria bom para o próximo ano ter novamente o curso voltado para a geometria do ensino fundamental”.
- Professora Q.40: “seria interessante os alunos do mestrado, etc, da UEM, planejassem cursos básicos direcionados aos professores de cada município e se possível fossem ministrar tais cursos no próprio município. Motivo: atingir todos os professores do município”.

A formação matemática dos professores (tanto ao concluir a sua formação inicial como já em serviço) é certamente boa se estes mostram interesse pela sua disciplina, ao conhecer os seus desenvolvimentos e aplicações e, principalmente, resolvendo problemas, pesquisando situações para propor aos seus alunos, e estudando obras e materiais onde se apresentam novas ideias relativas à Matemática, ao seu percurso histórico e ao seu papel na sociedade atual (PONTE, 1998).

As professoras Q.5 e Q.34 estão preocupadas em como irão ensinar as Geometrias Não-Euclidianas se o a carga horária não é suficiente e pelo discurso da professora Q.5 a escola exerce certa resistência com relação ao fato.

- Professora Q.5: “o complicado é a escola entender que temos que passar este conteúdo aos alunos”. Professora Q.34: “não tenho dificuldades em aceitar, apenas não é tão simples desenvolvê-las em detrimento ao tempo”.

O professor Q.9 respondeu que: “só acho ainda meio novidade”. As professoras Q.25, Q.29 e Q.35 responderam que não tem nenhuma dificuldade e que estão abertas a novas informações. A professora Q.38 também não tem nenhuma dificuldade em aceitar as Geometrias Não-Euclidianas, mas “gostaria muito de fazer mais cursos para melhorar a aprendizagem”. As professoras Q.2, Q.10, Q.15, Q.27, Q.36, Q.39 e Q.40 e os professores Q.13, Q.22 e Q.41 responderam que não possuem nenhuma dificuldade.

As professoras Q.3, Q.4, Q.7, Q.14, Q.23 e Q.30 e os professores Q.16 e Q.28 não responderam a pergunta.

Conhecer somente a Geometria Euclidiana, segundo as respostas dos professores, impede a aceitação das Geometrias Não-Euclidianas. Os professores também tiveram dificuldades em compreender os conceitos e propriedades da Geometria Hiperbólica.

7 Considerações Finais

Ao iniciarmos este trabalho, nos deparamos com duas questões que têm gerado algumas discussões no meio acadêmico e escolar: o ensino de Geometrias Não-Euclidianas e o uso de novas tecnologias na educação, no nosso caso do *software* GeoGebra.

O ensino de Geometrias Não-Euclidianas, além de recomendado pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná, é discutido e indicado por diversos pesquisadores na área (CABARITI, 2004; SANTOS, 2009; SANTALÓ, 2006; BONETE, 2004). Sabemos das dificuldades do professor em ensinar esses conteúdos devido à falta de conhecimento do assunto e de formação necessária. Contudo, destacamos que o professor deve refletir sobre a importância do estudo desses conteúdos e de qual matemática deve ser ensinada aos alunos.

O GeoGebra é uma ferramenta que pode auxiliar o professor no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de Geometrias. Acreditamos que a tendência em utilizar os recursos tecnológicos na educação será cada vez maior e o professor precisa inserir esses recursos nas suas aulas e ajudar a preparar os alunos para o mundo que terão que enfrentar quando saírem da escola. Santaló (2006) defende que a introdução de recursos tecnológicos deve acontecer o mais cedo possível, uma vez que “é preciso educar também no pensar informático, já que não é o mesmo atuar em um mundo sem computadores se no mundo atual, cheio de botões e teclados para apertar e telas para ver, é mais do que livros, catálogos ou formulários para ler” (SANTALÓ, 2006, p. 18).

Valendo-se dessas considerações, nos propomos a investigar as particularidades que envolvem a observação de um grupo de professores participantes de um minicurso sobre Geometria Hiperbólica em um ambiente computacional.

Definido o tema central da pesquisa, formulamos os objetivos e os problemas de pesquisa. Para buscar respostas às nossas indagações propusemos um estudo sobre Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica por meio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

A descrição e a análise dos resultados desse estudo foram feitas segundo a Análise de Conteúdo e de categorias pré-definidas.

Retomando os problemas da pesquisa, achamos pertinente sintetizá-los neste momento. Sobre a Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica, os professores apresentaram dificuldades em expressar as definições e propriedades que justificam as construções realizadas.

Nos conteúdos de Geometria Euclidiana, alguns dos professores pesquisados tiveram dificuldades para estabelecer a diferença entre uma reta, uma semirreta e um segmento de reta, além de utilizarem linguagem incorreta na elaboração de suas respostas, tal como, uma circunferência “saindo” de um ponto; confundiram conceitos de congruência e semelhança de triângulos e a grande maioria desconhecia as construções geométricas com régua e compasso, ou seja, o desenho geométrico.

O que dificultou o entendimento da Geometria Hiperbólica foi o desconhecimento de conceitos e resultados da Geometria Euclidiana, bem como os conceitos e propriedades da Geometria Hiperbólica. Alguns conceitos da Geometria Euclidiana são utilizados na Geometria Hiperbólica, mas o que muitas vezes não ficou claro para o professor é que esses conceitos têm um significado diferente na Geometria Hiperbólica. Durante o minicurso, alguns professores utilizaram uma linguagem que não é coerente com a linguagem matemática; respondiam por responder as perguntas, sem se preocupar com a maneira como estavam fazendo.

Algo que ficou evidente em alguns momentos foi que os conhecimentos geométricos de alguns professores são do senso comum, ou seja, afirmam que alguns objetos geométricos são reais. Observamos que muitos professores desconhecem as Geometrias como um conhecimento geométrico abstrato e que a matemática não é “uma cópia da realidade; é, isto sim, um instrumental – de natureza intelectual – para a compreensão da realidade. Ela permite a coordenação intelectual que estabelece vínculos entre ações reais ou possíveis, sem, contudo, que a coordenação seja extraída da experiência” (RUIZ e BELLINI, 2001, p. 57). O

que demonstra que esses professores estão “afastados” do conhecimento matemático e do conhecimento científico.

Para que esta situação de abandono teórico das Geometrias possa reverter-se, salientamos que serão necessários mais estudos e discussões referentes ao assunto. O professor precisa refletir sobre a importância de abordar os conhecimentos geométricos na sala de aula e as diferentes metodologias que podem ser utilizadas.

O estudo da Geometria Hiperbólica permitiu identificar alguns obstáculos epistemológicos, que segundo Bachelard (1996): “aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão (...) às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 17). Ou seja, o obstáculo epistemológico aparece todas as vezes que uma organização do pensamento preexistente encontra-se ameaçada.

As representações dos objetos geométricos – retas, triângulos, retas paralelas, ângulos etc. – na Geometria Hiperbólica são diferentes da Geometria Euclidiana. Os professores estão acostumados com as representações euclidianas e uma “nova representação”, constituiu-se em um obstáculo epistemológico que Bachelard chamou de obstáculo verbal: “a falsa explicação obtida com a ajuda de uma palavra explicativa” (BACHELARD, 1996, p. 27). E ainda “um caso em que uma *única* imagem, ou até uma única palavra, constitui toda a explicação” (BACHELARD, 1996, p. 91).

Os usos de palavras, que acreditamos expressarem toda explicação do objeto geométrico, também permitiram identificar obstáculo epistemológico. Os professores usaram a noção da palavra “reta”, por exemplo, do senso comum. Para eles uma reta deve ser sempre um “objeto geométrico reto”. O fato dos professores conhecerem somente a Geometria Euclidiana e acreditarem que esta Geometria é a única possível também se constitui em um obstáculo epistemológico. Os professores tiveram dificuldades de abandonar os conceitos e definições da Geometria Euclidiana, como um conhecimento geral, tido como único e acabado. Bachelard expõe que “há de fato um perigoso prazer intelectual na generalização apressada e fácil (BACHELARD, 1996, p. 69)

Acreditamos que estas dificuldades acontecem pelo fato dos professores não terem conhecimento a respeito das definições e propriedades da Geometria Euclidiana e conseqüentemente das Geometrias Não-Euclidianas. Contudo, para compreender as Geometrias, será necessário que o professor rompa com a concepção de conhecimento geral e advindo da experiência, uma vez que, “o progresso do espírito científico se faz por rupturas com o senso comum, com as opiniões primeiras ou as pré-noções de nossa filosofia espontânea” (JAPIASSU, 1986, p. 70).

Apesar das dificuldades apresentadas pelos professores, acreditamos que o *software* GeoGebra foi fundamental para o desenvolvimento das atividades, pois permitiu a realização das construções de forma dinâmica e interativa e favoreceu a compreensão dos conceitos e relações entre os objetos geométricos. As possibilidades do modo “arrastar” foram importante no momento de verificação se as propriedades iniciais foram mantidas. Salientamos que a falta de conhecimento das ferramentas do computador e as dificuldades no seu manuseio podem ter dificultado o aprendizado das ferramentas do *software* GeoGebra e conseqüentemente a aprendizagem das Geometrias.

Para que mudanças possam ocorrer com relação ao uso de tecnologias, é preciso que o professor esteja envolvido nesse processo e sinta a necessidade de mudar, seja por motivação pessoal ou profissional.

Diante das considerações feitas, ficam algumas indagações: os professores conseguirão ensinar Geometrias Não-Euclidianas? Conseguirão superar a insegurança na utilização dos recursos tecnológicos em suas salas de aula?

Sem dúvida, essas questões geram muitas discussões e acreditamos que essas mudanças poderão ocorrer, mas não serão de forma imediata. É preciso iniciar algumas alterações nos cursos de formação de professores para que os acadêmicos recém formados sintam-se familiarizados com os recursos tecnológicos e saibam como utilizá-los em sala de aula; também é necessário resgatar o ensino de Geometria Euclidiana e introduzir o ensino de Geometrias Não-Euclidianas, resgatando o contexto histórico, matemático e filosófico. Para

os professores que já estão atuando, a formação continuada e a reflexão constante da sua prática é o principal caminho para que as mudanças possam ocorrer.

Para finalizar, acreditamos ter colaborado para a formação matemática desses professores, uma vez que tiveram acesso a conceitos da Geometria Hiperbólica, por meio do modelo do disco de Poincaré, além de terem revisto conceitos da Geometria Euclidiana e a oportunidade de conhecer ou em alguns casos aprimorar seus conhecimentos do *software* GeoGebra.

Esperamos ter contribuído para que os professores abandonem a ideia de que a Geometria Euclidiana é a única Geometria possível, bem como desestabilizar os conhecimentos geométricos, e que eles possam refletir sobre o uso de novas tecnologias na educação.

Referências

- ALMOULOUD, Saddo Ag et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. In: Revista Brasileira de Educação, n.27, 2004.
- ALVES-MAZOTTI, Alda J.; GEWANDSZNAJER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2ª ed. São Paulo: Thomson, 2004.
- ANDRADE, Denise A. **A importância dos obstáculos epistemológicos para o desenvolvimento da ciência: a contribuição de Gaston Bachelard**. In: Pensar, v.9, 2004.
- ANDRADE, Plácido F. A. **De Euclides a Poincaré**. 2007. Disponível em: <<https://apache.mat.ufc.br/gmat/livros/euclides.pdf>>. Acesso em: 5 nov. 2009.
- BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. Tradução: Estela dos S. Abreu. 3ª reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- _____. **O Novo Espírito Científico**. Tradução: Juvenal J. Marchevsky. 2ª ed. Rio de Janeiro: Edições Tempo Brasileiro, 1985.
- BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.
- BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática**. Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.
- BARROS, Rui Marcos de O.; FRANCO, Valdeni S. **Espaço e Forma**. Maringá: EDUEM, 2005.
- BAUER, Martin W.; GASKELL, George. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**. Tradução: Pedrinho A. Guareschi. 5ª ed. Petrópolis: Vozes, 2002.
- BERTONHA, Regina A. **O ensino de Geometria e o dia-a-dia na sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 1989. 239 f.
- BONETE, Izabel P. **As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 240 f.
- BORBA, Marcelo C. Tecnologias informática na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.
- BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Mirian G. **Informática e Educação Matemática**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1999.

CABARITI, Eliane. **Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. 181 f.

CANDEIAS, Nuno de J. C. **Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica (8º Ano)**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2005. 321f.

CARMO, Manfredo P. do. **Geometrias Não-Euclidianas**. In: Matemática Universitária; nº 6. SBM.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 2ª ed. Campinas: Editora Unicamp, 2007.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FRANCA, Jasias C.; KALEFF, Ana Maria M. R. **A História, as Geometrias Não-Euclidianas e os Livros Didáticos do Ensino Médio: uma análise da apresentação de retas paralelas**. Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências – LIMC. Disponível em: <<http://www.limc.ufjf.br/hitem4/papers/5.pdf>>. Acesso em: 5 nov. 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática Percursos Teóricos e Metodológicos**. 1ª ed. São Paulo: Autores Associados, 2006.

GÁLVEZ, Delia. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: SAIZ, Cecilia Parra Irma (Org.). **Didática da Matemática**. São Paulo: Artmed Editora, 2006.

GERÔNIMO, João R.; BARROS, Rui Marcos de O.; FRANCO, Valdeni S. **Geometria Euclidiana Plana um estudo com Cabri-Géomètre**. Maringá: EDUEM, 2007.

GIORDAN, Marcelo. **Computadores e linguagem nas aulas de Ciências**. Ijuí: Editora Unijuí, 2008.

GOMES, Maristela G. **Obstáculos na aprendizagem matemática: identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais**. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – UFSC, Florianópolis, 2006. 161 f.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria Dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**. In: VII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 1996, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 1996, p.1-13.

GREENBERG, Marvin J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

JAPIASSÚ, Hilton. **Introdução ao pensamento epistemológico**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1986.

_____. **Para ler Bachelard**. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1976.

LOPES, Alice R. C. **Bachelard: o filósofo da desilusão**. In: Caderno Catarinense de Ensino de Física. v. 13, n. 3. 1996.

MAZZOTTI, Tarso. **Para uma “pedagogia das representações sociais”**. In: Revista Educação e Cultura Contemporânea, v. 6 – Nº 11, 2008.

MORAES, Roque. **Análise de Conteúdo**. In: Educação epistemologia e ciências da educação, v. 21. Porto Alegre: PUC, 1998.

NACARATO, Adair M. **Educação Continuada sob a Perspectiva da Pesquisa-Ação: Currículo em ação de um grupo de professores ao aprender ensinando Geometria**. Tese (Doutorado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 223f.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação Escolar e as Tecnologias da informática**. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PAPERT, Seymour. **A Família em Rede Ultrapassando a barreira digital entre gerações**. Tradução: Fernando J. S. Nunes e Fernando A. B. Lacerda e Melo. 1ª ed. Lisboa: Relógio D'Água, 1996.

_____. **A Máquina das Crianças: repensando a escola na era da informática**. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2008.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 1989. 164f.

PENTEADO, Miriam G. **Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção do computador no profissão docente**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando. **Psicogênese e História das Ciências**. Tradução: Maria Fernanda de M. R. Jesuíno. 1ª ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

POINCARÉ, Henri. **A Ciência e a Hipótese**. Tradução: Maria A. Kneipp. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985

_____. **Ensaio fundamentais**. Tradução: Vera Ribeiro. 1ª ed. Rio de Janeiro: Contraponto e PUC Rio, 2008.

_____. **O valor da Ciência**. Tradução: Maria Helena F. Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PONTE, João Pedro da. **Da formação ao desenvolvimento profissional**. Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat, Lisboa, 1998. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte%28Profmat%29>>. Acesso em: 5 nov. 2009.

_____. **Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios?** Revista Ibero-americana de Educação. n. 24, p. 63-90, 2000.

RUIZ, Adriano R.; BELLINI, Luzia M. **Matemática epistemologia genética e escola**. Londrina: Ed. UEL, 2001.

SANTALÓ, Luis A. **La Geometría en la formación de profesores**. Buenos Aires: Red Olimpica, 1993.

_____. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Tradução: Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

SANTOS, Talita S. **A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá, 2009. 138f.

SMOGORZHEVSKI, A. S. **Acerca de la geometria de Lobachevsky**. Tradução: Virgilio L. Más. Editora Mir, 1978.

Software GeoGebra. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 5 nov. 2009.

SOUZA, Simone. **Geometria na educação infantil: da manipulação empirista ao concreto piagetiano**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá, 2007. 146 f.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

TRINDADE, José A. de O. **Os obstáculos epistemológicos e a Educação Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFSC, Florianópolis, 1996. 164f.

TURKLE, Sherry. **O segundo eu – os computadores e o espírito humano**. Tradução: Manuela Madureira. 1ª ed. Lisboa: Editorial Presença, 1989.

VALENTE, José Armando. **Computadores e Conhecimento Repensando a Educação**. 2ª ed. Campinas: UNICAMP, 1998.

_____. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. 1ª ed. Campinas: UNICAMP, 1999.

ZULATTO, Rúbia B. A. **Professores de Matemática que Utilizam Softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Unesp, 2002. 316 f.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

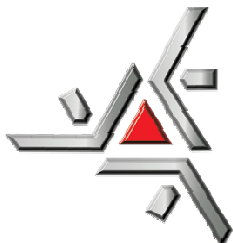
Construções Geométricas – Geometria Euclidiana

1. Construa um triângulo equilátero ABC. Calcule os ângulos do triângulo.
2. Construa um triângulo com lados medidas quaisquer.
3. Transportar um ângulo (dado), para uma semirreta (dada).
4. Construa um quadrado.
5. Traçar uma paralela a uma reta r à distância d (dada) de r .
6. Construir ângulos múltiplos de 15° .
7. Recuperar o centro de uma circunferência já traçada.
8. Traçar a reta tangente a uma circunferência por um ponto P dado na circunferência; e por um ponto Q fora da circunferência.

APÊNDICE 2

Construções Geométricas – Geometria Hiperbólica: modelo de Poincaré

- 1) Construa uma reta hiperbólica passando por dois pontos quaisquer do plano. Crie uma nova ferramenta para esta reta.
- 2) Construa um segmento hiperbólico. Crie uma nova ferramenta para este segmento.
- 3) Construa retas paralelas.
- 4) Dado um ponto P e duas retas distintas passando por P calcule o ângulo entre as retas.
- 5) Construa um triângulo hiperbólico e encontre a medida dos ângulos internos deste triângulo.
- 6) Construa um quadrilátero hiperbólico e encontre a medida dos ângulos internos deste triângulo.
- 7) Calcule a distância entre dois pontos quaisquer de uma reta hiperbólica. Crie uma nova ferramenta para esta reta.
- 8) Dado um ponto P e uma h -reta, encontra uma h -reta passando por P e que seja perpendicular a reta dada.

APÊNDICE 3

Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e
o Ensino de Matemática

Questionário

Nome: _____

Local: _____

Data de nascimento: ____ / ____ / ____

Escola em que trabalha: _____

Séries em que trabalha: _____

Sobre a sua formação:

Faculdade em que se formou: _____

Ano em que se formou: _____

QUANTO AO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA:

Que dificuldades você encontra com os conteúdos de Geometria Euclidiana? Comente:

Quais as dificuldades dos seus alunos? Comente:

QUANTO A GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS:

Durante a sua formação você teve disciplinas relacionadas ao assunto?

() Sim () Não () Não lembro

Você conhecia a Geometria Hiperbólica? () Sim () Não

EM RELAÇÃO AO USO DE NOVAS TECNOLOGIAS:

Na sua escola tem laboratório de informática? () Sim () Não

Se sim,

É possível utilizá-lo para ministrar aulas?

() Só com agendamento () Basta estar livre () Não é permitido

() Outra opção: _____

Se permitido,

Com que frequência você utiliza o laboratório em suas aulas de matemática?

() Nunca () Raramente () Frequentemente

Quais *softwares* você costuma utilizar e com qual finalidade?

Você recebeu algum preparo para utilizar recursos computacionais em sala de aula?

() Sim () Não

Se sim, qual: _____.

SOBRE O *SOFTWARE* GEOGEBRA:

Você já conhecia o GeoGebra? () Sim () Não

É fácil de ser utilizado? () Sim () Não

Comente sua resposta:

SOBRE A GEOMETRIA HIPERBÓLICA:

O *software* utilizado contribuiu para o aprendizado do conteúdo?

() Sim () Muito pouco () Não

Você teve dificuldades de aprender o conteúdo por meio do *software*:

() Sim () Não

Quais as dificuldades que você teve em relação a aprendizagem da Geometria Hiperbólica?

Você utilizaria as atividades feitas neste curso com seus alunos em sala de aula?

() Sim () Não

Comente sua resposta:
