UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

JOÃO DEBASTIANI NETO

GEOMETRIAS NA SEGUNDA FASE DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO APOIADO NA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

MARINGÁ - PR

2012

JOÃO DEBASTIANI NETO

GEOMETRIAS NA SEGUNDA FASE DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO APOIADO NA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira

Co-Orientador: Profª. Dr. Valdeni Soliani Franco

MARINGÁ – PR

2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Debastiani Neto, João
D286g Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética/ João Debastiani Neto. -- Maringá, 2012.
201 f.: figs., tabs.

Orientador: Prof.ª Dr.ª Clélia Maria Ignatius Nogueira. Co-orientador: Prof.º Dr. Valdeni Soliani Franco.

Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2012.

1. Educação matemática. 2. Geometria euclidiana. 3. Geometrias não euclidiana. 4. Epistemologia genética. I. Nogueira, Clélia Maria Ignatius, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. III. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDD 21.ed. 372.7

JOÃO DEBASTIANI NETO

Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na Epistemologia Genética

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira
Universidade Estadual de Maringá - UEM

____

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

____

Prof. Dra. Patrícia Unger Raphael Bataglia
Universidade Estadual Paulista – UNESP

____

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 02 de março de 2012.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais João e Maria, a quem considero os responsáveis por tudo que conquistei, a minhas irmãs Gisele e Jesiane, que me acompanharam nos momentos de dificuldade, e a todos os meus familiares e amigos sem os quais não chegaria a esta etapa.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de declarar meu profundo agradecimento aos que me ajudaram a realizar este trabalho:

- Primeiramente a Deus por ter me dado esta oportunidade de Mestrado e por estar em todos os momentos ao meu lado.
- Aos meus pais, que sempre se dedicaram para que todos os aspectos da minha vida fossem os mais felizes, os mais corretos, se preocupando integralmente com o meu futuro e bem estar.
- À minha orientadora Professora Doutora Clélia Maria Ignatius Nogueira e co-orientador Professor Doutor Valdeni Soliani Franco que, mais do que orientar um trabalho, acreditaram em meu potencial proporcionando no decorrer desta dissertação, muitos momentos de aprendizado.
- A direção da escola onde foi realizada a pesquisa, por consentirem a coleta dos dados juntos aos alunos.
- Aos alunos dessas escolas, por aceitarem o convite de participação como voluntários para a pesquisa, e aos seus pais, por concordarem que seus filhos participassem deste estudo.
- Aos professores da banca examinadora, pela disponibilidade para ler este estudo e contribuir com sugestões.
- Ao Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da UEM como um todo, por ter me oportunizado esses dois anos de crescimento acadêmico, profissional e pessoal.
- As minhas irmãs, Gisele, Jesiane, ao meu cunhado André Guidio, pelo apoio e por fazer parte da minha vida.
- Aos meus avós, João Debastiani (*in memorian*) e Emilia Marcon Debastiani (*in memorian*), que sempre me educaram com amor, carinho e dedicação.
- Aos amigos Jorge Luis Deolindo, Thiago Henrique de Freitas, Alex Carrazedo, Camila de Oliveira Vieira, e Laís Viel Gereti que proporcionaram momentos de troca de saberes, diálogos, aprendizagem e a conquista de grandes amizades.
- A CAPES pelo apoio financeiro.
- Pelo muito que lhes devo, obrigado.

RESUMO

A teoria de Piaget se destaca pelo esforço na investigação da construção do espaço pela criança, incluindo como ela o percebe e o representa. Segundo Piaget e Inhelder (1993), no domínio das geometrias, a criança estabelece primeiro as relações topológicas para, posteriormente, construir as relações projetivas e euclidianas, que ocorrem de maneira simultânea. Contudo, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (2008), o Conteúdo Estruturante de geometria se desdobra nos seguintes tópicos: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de geometrias não euclidianas, sendo apresentadas aos alunos da Educação Básica, na ordem descrita. Assim, o presente projeto tem como objetivo identificar como crianças entre oito e doze anos, que cursam o Ensino Fundamental mobilizam algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema. Acreditamos que esta pesquisa, além do objetivo já citado, vem dar subsídios para confirmar a inclusão das geometrias não euclidianas nas Diretrizes Curriculares. Nossa fundamentação teórica advém da Teoria da Construção do Espaço de Jean Piaget e Barbel Inhelder e da Teoria dos Campos Conceituais. A metodologia de pesquisa adotada é o Método Clínico Piagetiano tendo como instrumento diferentes situações-problema.

Palavras-chave: Construção do espaço. Relações topológicas. Relações projetivas. Relações euclidianas. Geometrias não euclidianas. Conteúdo estruturante de geometria. Ensino de matemática.

ABSTRACT

Piaget's theory is notable for the research effort in the construction of space for the child, including how it perceives and represents. According to Piaget and Inhelder (1993), in the field of geometry, the first child establishes topological relationships to later build the projective and Euclidean relations, which occur simultaneously. However, according to the Basic Education Curriculum Guidelines for Mathematics in the State of Paraná (2008), Content Structuring geometry unfolds in the following topics: plane geometry, spatial geometry, analytic geometry and basic non-Euclidean geometries, being presented students of Basic Education, in the order described. Thus, this project aims to identify how children between eight and twelve years, who attend elementary school mobilize some of the basic ideas for the construction of geometrical concepts during the resolution of problem situations. We believe that this research, besides the aforementioned objective, is to give subsidies to confirm the inclusion of non-Euclidean geometries Curriculum Guidelines. Our theoretical results from the Theory of Construction of the Jean Piaget and Barbel Inhelder and Conceptual Fields Theory. The research methodology adopted Piaget's Clinical Method as an instrument with different problem situations.

Keywords: Construction of the space. relations topological. relations projective. Euclidean Relations. non-Euclidean geometries. Content Structuring geometry. Teaching Math.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Durante os anos de 2008 e 2009, ainda cursando a Licenciatura em Matemática desenvolvi, como bolsista PIBIC–CNPq[1], um projeto sobre a construção do espaço geométrico com crianças de três a dez anos de idade. Este projeto foi consequência de outro, iniciado em 2007, no Programa de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Maringá. O projeto de 2007 teve como objetivo geral buscar subsídios teóricos para a atuação pedagógica do futuro professor no ensino de geometria, particularmente sobre o que e como ensinar de geometrias não euclidianas para crianças da referida faixa etária. Para isso, foram desenvolvidos estudos de conteúdos específicos de topologia e geometria projetiva e de como ocorre a construção do espaço pela criança segundo a teoria piagetiana.

Nos estudos teóricos acerca da psicogenética, particularmente os referentes à construção do espaço pela criança, iniciamos pela leitura do capítulo II – O campo espacial e a elaboração dos grupos de deslocamentos, do livro "*A construção do Real na Criança"* de Piaget (1979). Pude me aprofundar nos estudos acerca da Epistemologia Genética de Piaget por meio do Grupo de Estudos e Pesquisa em Epistemologia Genética e Educação (GEPEGE), vinculado ao departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, do qual faço parte. Foi neste grupo que comecei a ter contato com as pesquisas sobre a construção do conhecimento, que despertaram em mim não apenas o gosto pela investigação, mas a definição pela área de continuidade de meus estudos, até então transitando ora pela pós-graduação em Matemática Pura, ora na Educação Matemática.

A investigação realizada durante o PIBIC (com a replicação de algumas das provas realizadas por Piaget e Inhelder) me permitiu observar que as relações topológicas são as primeiras a serem estabelecidas pelas crianças, seguidas das projetivas e euclidianas, constatando, empiricamente, os resultados descritos pelos pesquisadores, dos quais, confesso, durante meus estudos teóricos, desconfiava. Afinal, é mesmo difícil de acreditar que as crianças muito pequenas, por exemplo, não conseguem identificar o que é direita ou esquerda, por mais que lhes seja explicado.

---

[1] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica- PIBIC/CNPq

Identificar a descrição de comportamentos sequenciais, de crianças dos três aos dez anos tornou evidente o processo de construção do conhecimento em questão, que as estruturas cognitivas do sujeito se desenvolvem continuamente, por meio de uma "troca" entre o próprio sujeito e o objeto, evidenciando, para mim, o importante papel do professor nesta construção.

Outra questão que emergiu dos estudos que realizei, se referia à ordem de apresentação dos conteúdos geométricos na escola. Para mim, o ensino de geometria deveria ser iniciado pelas relações topológicas, seguidas das projetivas e euclidianas, já na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental, contrariando as propostas curriculares que, normalmente, apresentam esses conteúdos apenas a partir da segunda fase do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Em se tratando das geometrias não euclidianas, mesmo estas constando nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná para o Ensino Fundamental e Médio, pouco se verifica sua apresentação em salas de aula, seja pelo despreparo dos professores, seja pelo desconhecimento da importância de tais conteúdos.

Pude acompanhar o período final do processo de implantação das Diretrizes, que teve sua idealização em 2003 e foi concluída em 2008. Também procurei conhecer vários estudos realizados acerca das Diretrizes Curriculares paranaenses, particularmente os que abordavam questões sobre a propriedade ou não do estudo de geometrias não euclidianas por crianças.

Segundo Lovis (2009) muitas opiniões emitidas por professores do Ensino Fundamental, durante a implantação e mesmo atualmente, são contrárias à introdução das geometrias não euclidianas nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, com a justificativa mais comum a de que as crianças tinham dificuldades em compreender a geometria euclidiana, portanto, com muito mais razão não compreenderiam as não euclidianas. Entretanto, essas argumentações não eram acompanhadas de comprovações científicas. Portanto, é legítimo indagar se os conceitos das geometrias não euclidianas seriam mais complexos que os da geometria euclidiana? Possuiriam gênese diferente? As crianças teriam estruturas cognitivas prontas para a compreenderem noções básicas das geometrias não euclidianas?

Outro aspecto que me incomodava nas Diretrizes, em decorrência dos estudos e das discussões no GEPEGE/UEM, era a apresentação das noções básicas da geometria esférica e hiperbólica somente no Ensino Médio. Afinal, porque não apresentá-los já no Ensino Fundamental? Não seriam as crianças da segunda fase do Ensino Fundamental capazes de compreender tais conceitos? Até o momento não encontrei esse tipo de questionamento em pesquisas já realizadas.

Os estudos piagetianos que realizei na Iniciação Científica não abordavam especificamente as geometrias, mas tratavam de espaço topológico, projetivo e euclidiano. Em estudos realizados com Inhelder e Szeminska, Piaget (1960, 1979, 1982, 1993) identificou-se que as primeiras intuições geométricas nas crianças são topológicas e, assim, desde muito cedo, a criança pode reconhecer e representar graficamente relações de vizinhança, interior e exterior, fronteira, continuidade etc. Ainda como resultado de suas investigações, Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) afirmam que por volta dos seis e sete anos de idade as crianças já começam a adquirir domínio das relações projetivas e euclidianas e, a partir dessa fase, sua percepção permite a constituição do espaço exterior ao sujeito e assim ele passa a observar as transformações das figuras por meio de suas várias projeções, isto é, um mesmo objeto observado sob pontos de vista diferentes e se vale das noções métricas para identificar uma figura em seus vários deslocamentos no espaço sem que haja qualquer tipo de deformações.

No entanto, nas Propostas Curriculares observamos que a primeira das geometrias a terem seus conteúdos expostos na Educação Básica, é a euclidiana; a topológica e a projetiva aparecem em momentos posteriores. Tem-se assim que a ordem da psicogênese das estruturas geométricas na criança, iniciando pelas relações topológicas, e posteriormente, as relações euclidianas e projetivas, de maneira simultânea, é contrária às Propostas Curriculares.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (2008) entende-se por Conteúdos Estruturantes: “os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais”.

Os Conteúdos Estruturantes propostos nas Diretrizes Curriculares, para a Educação Básica da Rede Pública Estadual, são: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções, e Tratamento da Informação. Para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos:

- Geometria plana;
- Geometria espacial;
- Geometria analítica;
- Noções básicas de geometrias não euclidianas;

As geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Segundo as Diretrizes Curriculares do Paraná (2008), neste nível de ensino, o aluno deve compreender:

- Os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;

- Geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões;

- Geometria analítica: noções de geometria analítica utilizando o sistema cartesiano;

- Noções de geometrias não euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.

No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria hiperbólica e elíptica.

Nota-se então que, de acordo com estas Diretrizes Curriculares, a primeira das geometrias a ser trabalhada nas escolas é a euclidiana, contrariando a ordem genética das geometrias estabelecida por Piaget, para quem, conforme já citado anteriormente, as primeiras intuições geométricas nas crianças são as topológicas (uma das geometrias não euclidianas).

Dessa forma, formulamos nosso questionamento, a partir da hipótese inicial de que, crianças de oito a doze anos, identificam, compreendem e mobilizam as ideias básicas para a construção de conceitos geométricos euclidianos ou não. Concordamos com Vergnaud quando estabelece que um conceito demora muito tempo para ser construído e assim, nossa intenção foi mostrar que as ideias básicas de geometrias podem e devem ser exploradas, ainda que de maneira implícita ou informal, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A questão que se apresenta então é: como trabalhar pedagogicamente essas ideias de maneira a favorecer a construção de conceitos geométricos mais complexos, sejam eles euclidianos ou não? Para isto é necessário identificar como as crianças mobilizam tais ideias em situações-problemas, o que se transformou em nosso objetivo geral.

Acreditamos que muitos conceitos podem ser informalmente apresentados aos alunos muito antes do que está previsto nas programações curriculares, quando os mesmos são abordados em sua forma final e formalizada. Isto é, inclusive, recomendado, pois conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (1990), o conhecimento se constrói e se desenvolve ao longo do tempo, em interação do indivíduo com as diferentes situações em que experimenta.

Com base no pressuposto básico da teoria de Vergnaud, de que o processo de construção de conceitos não acontece de imediato, se desenvolvendo gradativamente a partir da interação adaptativa do sujeito com as situações que vivencia, entendemos que a construção dos conceitos é algo que ocorre durante um longo período. Seríamos muito otimistas ao imaginar que conceitos pudessem ser construídos apenas com a quantidade de horas aula que lhes são destinadas. A complexidade do cenário educacional advém do fato de que muitos conceitos, em particular conceitos matemáticos, traçam seus sentidos utilizando uma variedade de situações e a cada situação temos vários conceitos a serem analisados. Assim ao estudar um conceito, devemos considerar que em uma situação problema dada, o conceito não aparece isolado, levando muito mais tempo do que o destinado em sala de aula.

Considerando a importância das geometrias para a matemática e para outras áreas, e as nossas teorias de sustentação (Piaget e Vergnaud), nossa hipótese é que ideias básicas dessas geometrias podem, e devem ser construídas bem antes do momento em que são apresentadas oficialmente aos alunos. Entendemos também que esta pesquisa oferece subsídios que justificam a inclusão de geometrias não euclidianas nas Diretrizes Curriculares, comprovando que estas podem ser apresentadas no nível de ensino que nos propusemos investigar.

A presente dissertação, além desta introdução, foi dividida em quatro seções. Na seção I fazemos um resumo dos estudos teóricos realizados sobre a Construção do Espaço na criança desenvolvida pelo epistemólogo francês Jean Piaget. Finalizamos esta seção apresentando algumas ideias da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo psicólogo francês Gerard Vergnaud. Na seção II discorremos sobre a história da geometria euclidiana e das geometrias não euclidianas, além de alguns conceitos e propriedades destas geometrias. Na seção III tratamos dos objetivos, dos procedimentos metodológicos, a problemática da pesquisa, os sujeitos da pesquisa, e da fundamentação metodológica, e finalmente na seção IV apresentamos e analisamos as informações coletadas com os exames aplicados, bem como algumas reflexões sobre cada atividade. Em seguida apresentamos as considerações finais da dissertação, e as referências.

SEÇÃO I

SOBRE A CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO NA CRIANÇA

1.1 A NATUREZA DO ESPAÇO

A construção da noção de espaço na criança é uma temática ampla e complexa. Inicialmente, na medida em que a evolução das diversas formas de pensamento da criança é de natureza a nos informar sobre o mecanismo da inteligência e sobre a formação da razão humana em geral, o problema do espaço apresenta uma importância primordial. Há séculos, filósofos e psicólogos discutem sobre a natureza do espaço, chegando a diferentes respostas. Para alguns, a natureza do espaço é empírica, devido à intuição perceptiva e figurada, para outros, natureza é *a priori*, ou ainda, operatória etc..

Nessas discussões, encontramos diferenças entre as diversas interpretações da percepção espacial. Por um lado, existem epistemologias que consideram o espaço como uma "forma da sensibilidade" e por outro, teorias que consideram que o espaço é elaborado por meio da dedução geométrica, abordada como atividade puramente do intelecto do sujeito.

A questão da natureza do espaço é destacada nos mais importantes sistemas filosóficos, sempre procurando compreender qual o papel do sujeito e o do objeto físico constituinte do espaço exterior. Durante quase todo o século XIX, as explicações sobre a natureza do espaço se sustentavam nas diferentes formas de se compreender como o sujeito percebe o objeto físico, oscilando entre o apriorismo e o empirismo. Existiram outras orientações filosóficas sobre a construção do espaço, que não abordaremos aqui, por optarmos em apresentar aquelas que ocupam posições extremas com relação à natureza do espaço e que são contestadas pela teoria piagetiana, e o interacionismo kantiano, citado inúmeras vezes por Piaget.

De acordo com Becker (1994), o empirismo, é a doutrina segundo a qual todo o conhecimento tem sua origem no domínio sensorial, na experiência. Assim os empiristas afirmam que a única fonte de conhecimento do ser humano é adquirida pela experiência resultante das percepções sensoriais como a visão, a audição, o tato, o paladar e o olfato.

Ainda segundo Becker (1994), epistemologicamente, o empirismo caracteriza-se pela unidirecionalidade nas relações sujeito-objeto, na qual é admitida como determinante a interferência do objeto sobre o sujeito e não o contrário. O sujeito torna-se passivo, e a atividade é propriedade do objeto. O objeto aqui é constituído pelo meio social que, por sua vez inclui o meio físico.

O conhecimento, nessa concepção, viria do objeto, e o sujeito apenas o receberia passivamente pelas sensações ou experiências. Todos os novos conceitos, mesmo os mais universais e abstratos, segundo o empirismo, provêm da experiência. Podemos representar esta relação da seguinte forma:

$$\mathbf{S \leftarrow O}$$

Em seus estudos, o principal filósofo empirista Hume (2004) divide os objetos da razão em relações de ideias e questões de fato. As relações de ideias são auto-evidentes. Já as questões de fato parecem fundar-se na relação de causa e efeito, sendo somente possíveis a partir de nossa memória e de nossos sentidos. Acreditando que o espaço é uma questão de fato, de acordo com Hume (2004), não podemos conhecê-lo de outra forma a não ser pela experiência.

Para Hessen:

> O empirismo aponta o desenvolvimento do pensamento e do conhecimento humano. Primeiramente, a criança tem percepções concretas. Com base nessas percepções, vai aos poucos formando representações e conceitos gerais. Estas, portanto, desenvolvem-se organicamente a partir da experiência. Seria inútil procurar por conceitos que já estivessem prontos no espírito ou que se formassem independentemente da experiência (HESSEN, 1999, p.55).

A epistemologia apriorista, por considerar que o indivíduo ao nascer, traz consigo, já determinadas, as condições do conhecimento e da aprendizagem que se manifestarão ou imediatamente ou progressivamente pelo processo geral de maturação, opõe-se à empirista na medida em que relativiza a experiência, absolutizando o sujeito. O modelo epistemológico que expressa esta relação é representado por:

S → O

Segundo a filosofia kantiana, o conhecimento não pode fundamentar-se unicamente na razão, mas também não pode reduzir-se simplesmente aos dados da experiência. Esta é fonte dos dados recebidos pela nossa sensibilidade, mas que são devidamente organizados por determinados conceitos existentes no nosso conhecimento, conceitos estes que não derivam da experiência, pois são puros do entendimento, *a priori*.

Kant (1980) afirma que apesar do conhecimento ter início na experiência, não significa que tenha nela a sua origem, porém, de acordo com o sistema kantiano, o espaço é uma forma *a priori* da sensibilidade que existe em nós, uma categoria da razão, sendo uma forma subjetiva. Postula ainda o espaço como sendo uma forma de representação das coisas externas, uma intuição intimamente ligada à natureza subjetiva da nossa mente, que possibilita dar predicados aos objetos. Embora Kant possa ser considerado um interacionista na explicação da possibilidade do conhecimento, no que se refere ao espaço, ele é apriorista.

Segundo Kant:

> O espaço não é um conceito empírico abstraído da experiência externa. Pois uma representação do espaço já tem que estar subjacente para certas sensações se referirem a algo fora de mim (isto é, a algum lugar do espaço diverso daquele que me encontro), e igualmente para eu representá-las fora de mim e uma ao lado da outra e, por conseguinte não simplesmente como diferentes, mas situadas em lugares diferentes. Logo, a representação do espaço não pode ser tomada emprestada, mediante a experiência, das relações do fenômeno externo, mas esta própria experiência externa é primeiramente possível só mediante referida representação (KANT, 1987, *apud* YAMASHITA, KOBAYASHI, YAMADA, 2004, p.47)[2].

Piaget (1982) faz objeções à teoria empirista e à apriorista. Discorda da primeira delas, pois esta tende a considerar a experiência como algo que se impõe por si mesma, como se fosse impressa diretamente no organismo sem que uma atividade do sujeito fosse necessária à sua constituição. No entanto, concorda com o empirismo no fato de afirmar que o conhecimento depende (mas não se origina) da experiência, e que sem o contato com o mundo externo não há como produzir conhecimento.

---

[2] KANT, I. **Crítica da razão pura**. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

Com relação à segunda epistemologia, Piaget concorda em relação ao conceito de totalidade. O conceito de esquema que pode ser comparado a uma *forma* ou gestalt, mas como gênese são opostos, pois o esquema de Piaget é construído e a estrutura da gestalt é dada. Outro ponto de concordância tem relação com as raízes biológicas: as raízes do intelecto não estão numa faculdade qualquer, mas na organização biológica.

Porém discorda em vários aspectos, tais como:

a) A gênese de uma estrutura: a estrutura é construída num longo processo histórico, onde um esquema resume em si o passado e consiste sempre numa organização ativa da experiência vivida, ao passo que em uma gestalt, a estrutura não tem história, pois não considera a experiência anterior.

b) A generalização de um esquema: os esquemas aplicam-se a diversidade do meio exterior e generalizam-se, diferentemente de uma gestalt que não se generaliza.

c) A atividade ou a ação: a gênese e o desenvolvimento do conhecimento, segundo a teoria piagetiana, estão na ação; ação esta que é considerada o verdadeiro elemento constituinte do sujeito epistêmico. No entanto, as *formas,* não possuem história, nem poder generalizador e nem têm intrinsecamente, atividade alguma.

Observa-se então que, na visão de Piaget, o conhecimento não pode ser visto como centrado, *a priori*, no sujeito, ou mais precisamente nas suas estruturas cognitivas, pois estas são o resultado de uma construção contínua e nem tampouco no objeto, pois a percepção destes depende daquelas. Este é um ponto chave para o entendimento da obra piagetiana. Só existe conhecimento porque existe uma construção por parte do sujeito que conhece. Mas essa construção não acontece no sentido idealista nem no sentido empirista. Não se deve negar a existência de uma realidade externa ao sujeito que pensa (como fazem os idealistas) nem tampouco afirmar ser essa realidade independente (sob o ponto de vista do sujeito que conhece) do sujeito cognoscitivo (como fazem os empiristas). O que é chamado de realidade depende do modo como a informação proveniente do mundo exterior (ao sujeito) é interpretada (desconstruída/reconstruída) pelo indivíduo.

Na explicação piagetiana, o conhecimento não é consequência direta da percepção dos objetos, e nem está determinado pelo sujeito consciente que se apropria dele, não sendo, portanto, propriedade dos objetos nem dos sujeitos, mas sim o produto de relações estabelecidas entre sujeito e objeto.

Podemos dizer que Piaget concorda com o interacionismo proposto por Kant para explicar a possibilidade do conhecimento, entretanto, na concepção piagetiana as relações entre sujeito e o meio consistem em uma interação tão intensa, de modo tal que a consciência não começa nem pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas sim por um estado indiferenciado. E é deste estado indiferenciado que derivam dois movimentos complementares; um de incorporação das coisas ao sujeito (assimilação) e o outro de acomodação do sujeito às próprias coisas, num constante processo de interpenetração que estabelece então ser o conhecimento não um estado, mas um processo.

Nesta concepção construtivista, o sujeito é ativo em sua essência. Segundo Becker:

> Falar em sujeito é falar em atividade, fundamentalmente assimiladora. O sujeito epistêmico só o é na medida em que ele se constitui como tal. E ele se constitui como tal pela assimilação e pela acomodação combinadas. Rejeita-se, portanto, da forma mais radical que se possa imaginar, um sujeito passivo, tanto no que se refere à hipótese apriorista, quanto à hipótese empirista. O sujeito em geral e, por consequência, o sujeito epistêmico, é sujeito na medida em que ele se faz, na medida em que ele se constitui como um conjunto de relações, e não na medida em que é dado (BECKER, 1994, p.21).

Ao conceber a possibilidade do conhecimento como um interacionismo construtivista, Piaget concorda em parte com a tese kantiana, entretanto, discorda que o espaço seja *a priori*, como acreditava Kant. Para o mestre genebrino, não existiriam as categorias da razão estabelecidas no kantismo. Espaço, tempo, objeto e causalidade seriam condições de compreensão do mundo, mas não dados a priori, e sim, construídos pelo sujeito.

Para confirmar sua tese, Piaget (1973) recorre à psicologia infantil. Ao nascer, o bebê inicia o processo de adaptação ao mundo real. O mundo dos primeiros dias e meses é uma totalidade caótica que lhe impõe estímulos sonoros, luminosos, corporais etc.. É no funcionamento dos reflexos que o bebê organiza esta realidade: o que é para sugar, para prender, para olhar etc.. É a partir de esquemas muito primitivos, quase puramente orgânicos, que irão se desenvolver as relações espaciais, temporais, causais e de conservação.

Piaget (1979) estuda, a partir da perspectiva de construção do objeto, do espaço, da causalidade, e do tempo, as reações das crianças durante os dois primeiros anos de vida. Neste período, ele observou o vínculo estreito existente entre a percepção do espaço e os próprios movimentos do corpo do sujeito, já que para a criança, nessa fase, ainda não há uma indiferenciação completa entre espaço e sujeito. Não há ainda a ideia de permanência do objeto, ou seja, os objetos, ao sumirem do campo perceptivo (visão, audição, olfato, paladar, tato), deixam de existir. Além disso, não há ainda uma coordenação dos sentidos, ora o mundo é visual, ora auditivo e assim por diante, não havendo, uma diferenciação entre o eu e o mundo. Só após um longo processo de coordenação das ações é que o sujeito constrói progressivamente um objeto permanente e um espaço onde ele seja um entre outros elementos. No entanto, tal espaço ainda é de caráter sensório-motor, ou perceptivo, e está ligado às possíveis ações dos esquemas sensório-motores sobre ele.

É apenas com o desenvolvimento da função simbólica, à partir da segunda metade do segundo ano de vida, a criança se torna capaz de representação. Os estudos piagetianos permitem identificar que a construção do espaço, acompanha o desenvolvimento cognitivo da criança como um todo.

1.2 AS RELAÇÕES ESPACIAIS

Segundo Piaget (1975) a construção do espaço ocorre simultaneamente ao desenvolvimento cognitivo da criança, e da sua evolução biológica. Para Piaget e Inhelder (1993), as primeiras relações espaciais estabelecidas pela criança são topológicas, e a partir delas é que são estabelecidas simultaneamente as relações projetivas e euclidianas.

As relações topológicas se referem às noções de vizinhança, separação, interior e exterior, com a utilização de expressões como “dentro”, “fora”, “ao lado de”, “vizinho de”, “região”, “contínuo” e “descontínuo”. As localizações que são possíveis de serem feitas utilizando essas relações não variam de acordo com o ponto de vista do observador. Por exemplo, se uma criança está dentro de uma roda de crianças, ela está no interior da roda tanto para ela quanto para seus companheiros (NOGUEIRA, 2005).

Ainda de acordo com Nogueira (2005) como desdobramentos das relações topológicas, surgem as projetivas, que requerem um grau maior de sofisticação. As noções de “direita”, “esquerda”, “em cima”, “embaixo”, “na frente”, “atrás”, etc., exigem que a criança seja capaz de fixar um ponto de referência para localizar os elementos. Essas relações são variam de acordo com o observador, ou seja, são relativas.

> Ao contrário do que parecem, as noções de direita e esquerda não constituem um conhecimento social, isto é, um conteúdo a ser ensinado, mas uma operação mental que exige a reversibilidade do pensamento, dependendo, portanto, de diversas ações para serem adquiridas (NOGUEIRA, 2005, p.88 e 89).

As relações euclidianas (que são estabelecidas em conjunto com as projetivas) referem-se às localizações e medidas, envolvendo noções de comprimento, área e volume. Essas três categorias de relações espaciais complementam-se umas às outras em um constante processo de interpenetração. Começando pelas topológicas, que são construídas pelas crianças desde muito pequenas, estas vão se tornando capazes de estabelecer relações muito mais complexas até chegar às euclidianas, que exigem um alto grau de abstração. Além disso, dentro de um mesmo tipo de relação os conceitos obedecem à determinada gradação. Assim é que nas euclidianas, por exemplo, primeiramente são construídos os conceitos de comprimento e medida, depois o de área e, finalmente, o de volume (NOGUEIRA, 2005).

Algumas características da topologia aplicam-se bem ao espaço primitivo da criança. Aspectos como o de ignorar distâncias, e ângulos, se preocupando com corpos deformáveis, mas sem rupturas, são observados nos primeiros meses de vida do sujeito. Geneticamente, o espaço topológico é o primeiro a se constituir. Dele derivam tanto o espaço euclidiano quanto o espaço projetivo. Estes se constroem paralelamente um ao outro, sendo simultaneamente distintos e solidários.

As primeiras intuições geométricas nas crianças são constituídas, de acordo com Kobayashi (2001), por relações de:

- Vizinhança: desde o seu do nascimento, o bebê percebe o mamilo da mãe em sua boca, virando o rosto em sua direção.

- Separação: está relacionado com a vizinhança, pois a criança tende a unir dois objetos distintos que irão sendo diferenciados com maior facilidade no transcorrer de seu desenvolvimento.

- Ordem: também relacionado com as relações de vizinhança e separação, pois com estas intuições, as crianças poderão ordenar os objetos ao mesmo tempo no espaço.

- Envolvimento: ocorre na percepção e apresenta três dimensões. A primeira dimensão se refere a ordenação na qual o objeto é posto; a segunda dimensão é descrita como elementos próximos, estarão constituídos dentro de um limiar; e a terceira dimensão é uma relação de interioridade.

- Continuidade: síntese das relações anteriores (quando um sujeito reconhece e representa uma sequência de pontos, continuidade de linhas e superfícies).

Todas essas relações descritas anteriormente constituem-se passo a passo entre elementos de uma mesma figura ou de uma mesma configuração estruturada por elas, e são independentes das deformações das formas em jogo, as quais não comportam conservação, nem distâncias, nem mesmo retas e ângulos.

Segundo Piaget e Inhelder (1993) o espaço topológico é interior a figura. Ele exprime suas propriedades intrínsecas. Esse espaço não é, portanto, um espaço total englobando todas as figuras. A construção deste espaço começa pela constituição dos objetos mesmo com seu espaço interior antes de se estender até às relações dos objetos entre si num quadro mais vasto.

Ainda como resultado de suas investigações, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que por volta dos seis e sete anos de idade as crianças já começam a adquirir domínio das relações projetivas e euclidianas, ou seja, a partir dessa fase, sua percepção permite a constituição de geometrias que contemplam o espaço exterior ao sujeito e assim ele passa a observar as transformações das figuras em suas várias projeções.

Com o espaço projetivo e euclidiano, o grande desafio para o sujeito está em situar os objetos e suas configurações uns com relações aos outros, segundo sistemas de conjunto, seja em projeções e perspectivas, ou em coordenadas dependentes de certos eixos, implicando a conservação das retas, dos ângulos, ou das distâncias.

O espaço projetivo se constitui quando o objeto ou sua figura não são mais encarados em si mesmos, mas segundo o ponto de vista do sujeito. As relações projetivas, segundo Piaget e Inhelder (1993), são as que permitem a coordenação dos objetos entre si relativamente a pontos de vista determinados. As noções de espaço (esquerda ou direita, acima ou abaixo, frente ou trás) vão se desenvolvendo na criança progressivamente até a liberação do egocentrismo. Com isso ela consegue uma coordenação dos pontos de vista, por meio de um agrupamento das relações características das três dimensões do espaço projetivo, ou seja, ela consegue simultaneamente reconstruir o ponto de vista dos outros e diferenciar do seu próprio.

O espaço euclidiano também deriva do espaço topológico, e constrói-se paralelamente ao espaço projetivo. Ele coordena os objetos entre si com relação a um quadro de conjunto ou com relação a um sistema de referência estável que exige, desde o início, a conservação tanto das distâncias quanto das superfícies. As relações euclidianas, para Piaget e Inhelder (1993), são as relações que permitem localizar objetos em um sistema de referência, levando em consideração a conservação das distâncias e das dimensões. Apesar de haver diferenças entre os espaços projetivo e euclidiano, as relações projetivas (perspectivas) não precedem as relações euclidianas (medidas, coordenadas e proporções), nem o inverso. Ou seja, os dois sistemas são construídos simultaneamente, pois quando a criança consegue coordenar os pontos de vista de um objeto é que ela chega a coordenar as distâncias e, portanto, localizar objetos, tendo como referência um sistema de coordenadas.

Sendo assim, a organização gradativa das ideias geométricas segue uma ordem definida, iniciando-se pelas relações topológicas de uma figura, para mais tarde, construir, de maneira simultânea as projetivas e euclidianas.

Durante o desenvolvimento da criança, é possível “enxergar” as manifestações dessas três geometrias desde o estádio sensório-motor. Por exemplo, a capacidade de distinguir um objeto de outro, que é necessária para qualquer outra construção espacial (topológica). Mais tarde, quando começa a construção do objeto permanente, o bebê aprende que uma mamadeira vista de várias perspectivas é na realidade o mesmo objeto (geometria projetiva) e ele torna-se capaz de estimar a distância necessária para pegá-la (geometria euclidiana).

Para confirmar a validade dessa proposta de ordenação de conteúdos, citamos um experimento feito com crianças no período pré-operatório, com idade entre dois e sete anos aproximadamente, realizado por Jean Piaget, e relatado em *A representação do espaço na criança*. Foram preparadas várias figuras geométricas clássicas, como círculos, quadrados, losangos etc., e outras de caráter topológico, como anéis com um ou dois furos. A criança tinha sua visão obstruída com um anteparo e, pedia-se que ela examinasse as figuras com as mãos e, depois as reconhecessem em um conjunto de figuras dispostas em uma mesa.

No primeiro nível, a criança não estabelece diferenciação entre as figuras tateadas e as desenhadas. Entretanto, logo em seguida os sujeitos começam a distinguir as figuras com furos das demais. Por exemplo, um anel não era confundido com um círculo, mas esse, por sua vez, podia ser confundido com um quadrado. No estádio seguinte, as crianças, progressivamente, começam a distinguir objetos com grandes diferenças angulares, como círculos de quadrados, mas ainda são incapazes de levar em conta, por exemplo, o número de lados ou seus tamanhos. Nesse sentido, um quadrado é igual a um retângulo ou a um triângulo. Após algum tempo, o número de lados, de vértices (pontas) e, mais tarde, seus tamanhos começam a fazer diferença para o sujeito, mas as inclinações leves são ignoradas. Um losango pode ser um quadrado ou um retângulo. Só no final do estádio pré-operatório, que a criança torna-se capaz de distinguir os objetos de forma mais clara e objetiva. Assim, no estádio operatório concreto a criança já teria condições de construir conhecimentos da geometria projetiva e geometria euclidiana.

1.3 DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DO SUJEITO E A CONSTRUÇÃO E REPRESENTAÇÃO DO ESPAÇO

De acordo com Piaget e Inhelder (1993) a construção do espaço ocorre desde o nascimento do sujeito e é conjunta às demais construções cognitivas, estabelecendo-se com a própria inteligência. Esta construção se processa progressivamente, nos planos perceptivo e representativo. Com relação ao estudo da construção do conhecimento espacial, Piaget (1979) postula que o espaço é uma propriedade pela qual se enquadram o sujeito, os objetos e seus deslocamentos possibilitados pelas ações deste, e por meio desta relação, é que este consegue construir o conhecimento espacial.

Para Piaget (1982) a inteligência é a adaptação do sujeito ao meio físico e social. Assim, a inteligência é concebida como um sistema de operações vivas e atuantes; o que a caracteriza como um processo; é uma tendência para as formas superiores de organização e equilíbrio. Assim posto, o desenvolvimento cognitivo é uma construção que se processa por meio de sucessivas adaptações entre o indivíduo e o meio, e que evolui por etapas sequenciais. A adaptação intelectual deve ser encarada como equilíbrio entre as ações do indivíduo sobre o meio e deste sobre aquele, e é uma função intelectual constituída por dois processos: a assimilação e a acomodação.

Piaget (2007) considera que todo movimento, pensamento ou sentimento corresponde a uma necessidade. A cada instante o equilíbrio é rompido por transformações que têm origem no mundo exterior ou interior e uma nova conduta tenta restabelecer o equilíbrio. A ação humana consiste, portanto, no movimento contínuo de adaptação e equilibração. Em cada momento do seu desenvolvimento, a criança conta com uma estrutura intelectual que a auxilia no restabelecimento deste equilíbrio que, entretanto, não é duradouro, porque novas necessidades surgem. Assim, toda necessidade tende a incorporar as coisas à atividade própria do sujeito, isto é, assimilar o mundo exterior às estruturas já construídas. Ao mesmo tempo, toda necessidade tende a reajustar essas estruturas em função das transformações ocorridas e acomodá-las aos objetos externos. O equilíbrio entre as assimilações e acomodações é a equilibração, e este é o processo de como ocorre a organização progressiva do desenvolvimento cognitivo.

Assim, a assimilação consiste na ação do indivíduo sobre os objetos do seu meio, no sentido de procurar incorporá-los aos seus esquemas de ação: o indivíduo impõe sua organização, agindo ativamente sobre o meio. Na acomodação, é o meio que age sobre o indivíduo, isto é, é o processo pelo qual o sujeito se acomoda ao objeto, modificando os seus esquemas de assimilação, o que lhe permite enfrentar o meio exterior. Mas ao mesmo tempo em que o indivíduo se acomoda, ele também assimila, pois os elementos novos são incorporados a esquemas que já existem, os quais a inteligência modifica para poder ajustá-los às novas informações, construindo novas estruturas do pensamento.

Essas novas estruturas construídas são uma reconstrução da precedente, porém ampliada, generalizada, por combinação com os elementos do novo plano de reflexão. Nesse sentido, a reflexão é um novo arranjo da matéria oferecida pelo pensamento, e a abstração reflexionante é a reconstrução, com novas combinações, que permite a integração de uma estrutura anterior em outra, mais rica, em um nível superior (PIAGET, 2007).

A construção das estruturas lógico-matemáticas procede por meio destas abstrações reflexionantes, que é um dos principais processos de equilibração. Qualquer conhecimento novo supõe uma abstração, pois, mesmo com a reorganização que ele impõe, esta jamais constitui um início absoluto, uma vez que retira seus elementos de uma realidade anterior (PIAGET, 1995).

A abstração reflexionante se efetiva mediante a coordenação de dois aspectos inseparáveis: o reflexionamento e a reflexão. Nas palavras de Piaget:

> ela é reflexionante em dois sentidos complementares, a que nós designaremos como segue. Em primeiro lugar, ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo “reflexionamento” (réfléchissement). Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou por em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante será designada por “reflexão” (reflexion) (PIAGET, 1995, p.6).

A abstração reflexionante é encontrada em todos os estádios de desenvolvimento do sujeito, com seus dois componentes de reflexionamento e de reflexão. Nos níveis sensório-motores, o bebê, para resolver um problema novo, vale-se de coordenações de estruturas já construídas e reorganiza-as em função de novos dados. Nos níveis superiores, quando a reflexão é obra do pensamento, cabe distinguir o processo enquanto construção de uma temática retroativa. Trata-se de uma reflexão sobre a reflexão, ou seja, um pensamento reflexivo.

Nos níveis pré-operatórios, o sujeito só efetua construções apoiando-se sobre resultados constatáveis. São as abstrações pseudo-empíricas, nas quais a leitura dos resultados se faz a partir de objetos materiais. Entretanto, as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nos objetos pela atividade do sujeito.

As abstrações pseudo-empíricas são de fundamental importância nos níveis elementares, no nível das operações concretas, porque o sujeito tem necessidade de usar objetos para fazer uma operação e julgar seus resultados. O resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente é a abstração refletida. À medida que a abstração reflexionante progride, o pensamento se distancia dos apoios concretos, e a abstração refletida cresce em importância. Com o progresso da abstração reflexionante, o pensamento dispensa, ainda que nunca totalmente, os apoios concretos, e a abstração refletida torna-se cada vez mais frequente, acarretando em construções de estruturas cognitivas cada vez mais complexas. Isto não quer dizer que o desenvolvimento das funções do conhecimento serão distintas, mas que pode-se encontrar de sujeito para sujeito, diferenças em suas ordens cronológicas.

Segundo Piaget (1982), o desenvolvimento cognitivo do sujeito é um caminho único ou universal para todos os seres humanos em qualquer cultura ou momento histórico. Este desenvolvimento é formado por diferentes estágios que apresentam características particulares. Além disso, cada estágio se caracteriza por uma "estrutura de conjunto" que determina as diferentes operações do sujeito e comporta um "nível de preparação e de acabamento" desta estrutura.

A criança nasce com determinado número de reflexos, sendo alguns passíveis de transformação; por exemplo, os reflexos de sucção, de preensão, de visão e de audição. São eles as primeiras estruturas que, com o uso, irão se transformar nos primeiros esquemas de ação, que também são estruturas. A formação, transformação e consequente ampliação dos esquemas se devem a duas capacidades próprias de todo ser vivo que são a assimilação e a acomodação que fazem parte do processo de equilibração ou auto-regulação (PIAGET, 1973).

Posteriormente, estes esquemas se coordenam formando um esquema único e mais amplo que os anteriores. Em suma, o bebê nasce com estruturas iniciais, os reflexos, que, ao sofrerem perturbações do mundo externo, se transformam e se coordenam para se adaptarem a suas estruturas já construídas. E isto é válido para todos os níveis de desenvolvimento, e não apenas para este nível inicial. Toda vez que a criança se depara com um problema que não sabe resolver, ela se encontra em um estado de desequilíbrio que irá procurar compensar. Agindo, lançando mão e coordenando esquemas cognitivos que já possui, a criança irá tentar se reequilibrar. Quando conseguir, terá dado um passo adiante e construído uma nova forma de lidar com a realidade; terá atingido, nas palavras de Piaget, um novo patamar de equilíbrio. É esta procura de um equilíbrio mais estável que provoca o desenvolvimento. Pode-se dizer que cada vez que a criança atinge um novo estágio de desenvolvimento, atingindo uma forma mais adaptada de lidar com a realidade, uma forma mais equilibrada.

Para Goulart:

> Durante um estágio, o comportamento humano se mostra diferente do período que o antecedeu e do período que virá a seguir. Isto se deve, segundo Piaget, à existência de uma estrutura mental qualitativamente diferente das anteriores e das posteriores; ao mesmo tempo, a estrutura mental própria de um estágio tem como infraestrutura a que é específica do estádio precedente e prepara o indivíduo para o estádio seguinte (GOULART, 1983, p.24).

O desenvolvimento cognitivo em geral e a construção e representação do espaço em particular, segundo Piaget (1982), podem ser resumidos e caracterizados em quatro estádios que são: estádio sensório-motor, estádio pré-operatório, estádio operatório concreto e estádio operatório formal.

- **Estádio sensório-motor:** Estende-se desde o nascimento até a aparição da linguagem, compreendendo, pois, mais ou menos os dois primeiros anos de vida. A inteligência sensório-motora é a ação prática do sujeito sobre a própria realidade e não comporta distâncias muito longas entre a ação e a realidade. A principal conquista em relação ao espaço é a sua diferenciação em relação ao sujeito.

Neste estádio, a criança não possui uma forma de pensamento que lhe permita evocar pessoas ou objetos em sua ausência. Assim, o rápido desenvolvimento, característico deste estádio, é marcado por construções apoiadas exclusivamente em movimentos ligados ao seu corpo.

No estádio sensório-motor não existe um espaço único que englobe os objetos. Ao contrário, existem "espaços" separados, heterogêneos, todos centrados no próprio corpo da criança: espaço bucal, tátil, visual, auditivo, postural. Em seguida, esses espaços vão se coordenando progressivamente, até que, no final do estádio sensório-motor, constitui-se um espaço único e objetivo, no qual todos os objetos e a própria criança estão incluídos e inter-relacionados. A criança torna-se então, capaz de controlar seus movimentos no espaço, representando internamente seus próprios deslocamentos anteriores em relação aos deslocamentos dos outros corpos. Além disso, ela também se torna capaz de representar os deslocamentos invisíveis dos objetos. Desta forma, a criança que se afasta de casa e a perde de vista, é capaz de apontar corretamente o ponto em que ela se localiza. Assim também quando a criança encontra um obstáculo que a impede de alcançar um objeto perdido, ela faz outro caminho e consegue pegar o objeto. Isso acontece porque a criança foi capaz de representar o deslocamento invisível do objeto perdido e o desvio que precisava ser feito para encontrá-lo novamente.

No desenvolvimento da noção do espaço faz-se necessário obter a compreensão da elaboração dos grupos de deslocamento como modelo na construção da noção do espaço. Para Piaget (1979), os grupos consistem em qualquer sistema de operações suscetível de possibilitar uma volta ao ponto de partida. Este autor discrimina quatro tipos de grupos espaciais: prático, subjetivo, objetivo, e representativo.

O grupo prático se caracteriza por uma organização de ações sensório-motoras relacionadas com os objetos localizados no espaço. A criança não tem consciência nem da ação nem do objeto como domínios separados. Cronologicamente, abrange o bebê desde o nascimento até por volta dos quatro meses.

Segundo Flavell (1975), o grupo subjetivo ocupa uma posição intermediária entre os grupos prático e objetivo. Neste grupo a criança percebe suas ações em relações aos objetos no espaço, porém estas ações ainda se associam à manipulação dos objetos. O bebê percebe parcialmente a função cumprida por suas próprias ações em relação aos variados resultados.

No grupo objetivo, os objetos localizados no espaço são vistos como relacionados entre si diretamente, com independência da criança. Esta agora percebe-se separada do objeto, em um espaço organizado, diferente dela, mas que a inclui. Segundo Dolle (2000), a criança compreende que está situada no espaço e que todos os deslocamentos dela bem como de outros, estão incluídos neste espaço. Compreende também que os objetos se relacionam entre si e ela e que estes deslocamentos são ordenados variavelmente.

Os grupos representativos são aplicados cada vez mais em estabelecer as relações dos objetos entre si, com a criança inserida enquanto um objeto entre outros, o espaço torna-se representativo e há constância de formas e grandezas dos objetos.

Piaget (1979) descreve a construção do espaço no estádio sensório-motor seguindo o desenvolvimento de seis estágios da inteligência sensório-motora, que são 1º) os grupos práticos, 2º) os grupos heterogêneos, 3º) a coordenação dos grupos práticos e a constituição dos grupos subjetivos, 4º) a passagem dos grupos subjetivos aos grupos objetivos e a descoberta das operações reversíveis, 5º) os grupos objetivos, e 6º) os grupos representativos.

Para Piaget e Inhelder (1993), a construção do espaço neste estádio sensório-motor pode ser divido em três períodos:

I) <u>Primeiro Período:</u> correspondem aos estágios I e II (os grupos práticos e heterogêneos).

Este período é caracterizado pela não coordenação dos diversos espaços sensoriais entre si: em particular, por falta de coordenação entre a visão e a preensão, o espaço visual e o espaço tátil-cinestésico não estão ainda ligados em uma totalidade única. Assim nesse nível ainda não existe a permanência de objeto sólido, nem a constância perceptiva das formas ou grandezas.

As relações espaciais mais elementares neste primeiro período são as de vizinhança, separação, ordem, circunscrição, e por fim a de continuidade. De um modo geral, as relações perceptivas citadas anteriormente são aquelas nas quais os geômetras caracterizam como "topologia".

De acordo com Piaget e Inhelder (1993), o espaço deste primeiro período parece não comportar senão relações pré-perspectivas e pré-euclidianas, que se assemelham às relações topológicas elementares. Mas trata-se de uma topologia perceptiva e motriz e, sobretudo egocêntrica no sentido de que as relações percebidas não se dissociam da atividade do sujeito.

II) <u>Segundo Período:</u> correspondem ao terceiro e quarto estágios do desenvolvimento sensório motor. Neste período o objeto adquire a consistência de um sólido, em oposição às figuras elásticas e deformáveis do primeiro período. Na medida em que é elaborada a permanência do objeto, em função da coordenação das ações, há a partir desse momento, construção simultânea das figuras euclidianas (pela constância das dimensões atribuídas ao objeto) e projetivas (pela coordenação dos pontos de vista sobre o objeto, isto é, das perspectivas). Além da construção das principais formas perceptivas (retas, círculos, e ângulos), a aquisição mais importante desse período é a das constâncias da forma e da grandeza. Estas duas aquisições pressupõem a organização simultânea das relações projetivas e das relações métricas.

Em resumo, neste segundo período, a descentralização progressiva do espaço sensório-motriz devida à coordenação crescente das ações do sujeito, acaba na constituição de relações projetivas e de relações métricas, cuja síntese constitui as constâncias da forma e da grandeza.

III) <u>Terceiro Período:</u> corresponde ao quinto e sexto estágios do desenvolvimento sensório motor. Neste período a atividade sensório-motriz se enriquece com condutas de pesquisa dirigida e de experimentação tateante.

Enquanto as aquisições do segundo período são essencialmente relativas à forma e às dimensões dos objetos, as do terceiro período consistem em liberar as relações dos objetos entre si (movimentação dos objetos uns em relação aos outros e não só relativamente ao corpo próprio). Além disso, neste período observa-se o aparecimento da imagem mental em prolongamento da imitação diferenciada e os primeiros esboços de representação. De puramente perceptivo, o espaço torna-se, pois, em parte representativo.

Concluindo, para Piaget (1982), os dois primeiros anos de vida do ser humano são extremamente essenciais, do ponto de vista do desenvolvimento, porque neste período a criança percorre uma evolução absolutamente complexa. Parece-lhe que a criança quando nasce não tem noção de que o universo em que ela se encontra é feito de objetos, e que inclusive ela é um objeto entre esses objetos. Um bebê com cinco ou seis meses de idade, não apresenta nenhuma conduta de busca de objeto que desaparece de seu campo visual. Com esse tempo de vida a criança ainda não construiu a ideia de *objeto permanente*, ou seja, ela ainda não atribuiu a noção de existência aos objetos que não estão no seu campo perceptivo. A construção da ideia de que o universo tem uma objetividade própria começa por volta dos nove meses de idade, e entre os doze a dezoito meses aproximadamente, o objeto se tornou permanente e dá lugar a uma conduta de busca sistemática dos objetos que não se encontram ao alcance da sua visão. É somente no final deste estádio que surge a capacidade de representação mental e de simbolização, isto é, tem-se a representação mental não só da permanência do objeto, mas também das relações que se estabelecem entre eles.

Neste estádio sensório-motor, a criança vai explorar o ambiente que a cerca por meio dos sentidos como a visão, a audição, o tato e até mesmo de seus pequenos e iniciais movimentos, interpretando-o, assim, antes mesmo de utilizar a linguagem. Conhece deste modo o espaço e as formas nele presentes, por meio do manuseio de objetos; descobre fatos sobre o objeto, o tempo e o espaço ocupado por ele. Tudo isso, por meio das experiências de deslocamento do sujeito e do objeto.

> Progressivamente, a criança vai conseguindo uma maior coordenação de suas atividades no espaço: pode pegar um objeto que deixou cair, reiniciar uma atividade interrompida, antecipar o deslocamento de um objeto móvel oculto atrás de um biombo, diferenciar os objetos que estão ao seu alcance dos que não estão (GÁLVEZ, 2001, p. 240).

Os esquemas do período sensório-motor não constituem ainda conceitos, pois não são concebidos em pensamentos, não podendo, portanto, ser manipulado por este, só sendo acionados no momento de sua utilização prática e material, sem que se tenha consciência sequer de sua existência, pela ausência de um sistema de representações.

Nessa fase, a criança não consegue, ainda, por exemplo, ordenar mentalmente alguns objetos sem antes manipular e ordená-los concretamente. Por não conseguir entender o espaço representativo é que, nesta fase, a criança precisa vivenciar diversas situações ligadas à localização espacial, desenvolvidas por meio de esquemas corporais, sempre acompanhadas de verbalização, ou seja, tudo muito bem explicado com palavras, não só gestos.

No final desse período, a criança sabe que o "eu" também é um objeto, inter-relaciona a apreensão do espaço em que está incluída, externalizando o objeto e o espaço. Dá-se o início da simbolização que é a compreensão de símbolos e linguagens. Aos poucos, a criança internaliza as ações percebendo seus movimentos e deslocamentos como sendo também um objeto no meio. A criança exterioriza a noção de espaço e ele em si, passando-o para um ambiente estático em que aparecem sujeito e objeto. Assim, a compreensão do espaço inicialmente é de forma perceptiva, em que a criança o constrói por meio do contato direto. Em seguida, a compreensão do espaço torna-se representativa, a criança consegue entender o objeto mesmo com sua ausência.

- **Estádio pré-operatório:** Apresenta-se como uma etapa de preparação e organização das operações concretas de classes, relações e números. Este período se inicia com o aparecimento da função simbólica, que permite o uso das palavras de maneira simbólica, e termina quando a criança é capaz de organizar seu pensamento mediante operações concretas. O espaço torna-se representativo e se caracteriza como sendo a fase em que a criança interioriza as ações executadas, entretanto, não consegue representá-las sem executá-las de fato.

Este período apresenta duas etapas distintas: a) pensamento representativo, que se estende até ao redor dos quatro anos e se caracteriza pelas funções simbólica e representativa, e b) pensamento intuitivo, dominado pelas percepções imediatas, isto é, pelo aspecto ao qual se prende a atenção, e se caracteriza pela incapacidade de guardar mais do que uma relação ao mesmo tempo. Este é o período de elaboração de noções tais como classes, séries e relações, que permitirão à criança, no período seguinte, operar com as noções de número e espaço.

Neste estádio, a linguagem provoca mudanças na afetividade e no intelecto da criança. Por meio da aquisição de uma inteligência representativa, a criança não só registra empiricamente sucesso ou fracasso, mas reflete sobre a organização de seus atos ao aplicá-los aos objetos. Ocorre a socialização advinda dos símbolos, pois, ocorreu a plena aquisição da linguagem, contribuindo para uma formação egocêntrica do sujeito, este sendo, pois, a principal característica da criança que se encontra neste estádio.

Deve-se ressaltar que o termo egocentrismo não deve ser encarado como o da forma habitualmente utilizado. Para Piaget, dizer que uma criança é egocêntrica não quer dizer que ela se comporte como estivesse totalmente centrada nela, mas sim que ela tem dificuldades de perceber o ponto de vista do outro.

A criança deste nível difere do sujeito do estádio sensório-motor devido ao surgimento da capacidade de representação. A partir dos dois anos de idade, a criança passa a compreender a possibilidade de substituir uma ação ou objeto por uma imagem ou palavra, isto é, o emprego de símbolos. Com a função simbólica o espaço torna-se representativo.

O pensamento, nessa fase, é extremamente concreto e real, pois a compreensão da reversão dos fatos torna-se clara. Ocorre, também, a compreensão das relações de tamanho, comprimento que possibilita a visualização do espaço e dos objetos. No entanto, um fato muito interessante é que, embora as operações de seriação (coordenação das relações assimétricas) sejam descobertas assim, por volta dos sete anos, em relação aos comprimentos ou tamanhos, dependentes da quantidade de matéria, é preciso esperar os nove anos, em média, para se obter uma seriação análoga dos pesos (de tamanhos iguais: por exemplo, bolas do mesmo tamanho, mas com pesos diferentes), e onze ou doze anos para se obter a dos volumes (pela medida da imersão na água), segundo Piaget, Inhelder e Szemisnka (1960).

No que se refere às noções espaciais, neste estádio ocorre a compreensão de uma geometria projetiva; a noção de projeção surge entre cinco e seis anos, com a ideia de antes, depois, primeiro, segundo, ao lado e último. Nesta fase, adquirem-se os conceitos por meio da noção dos objetos no espaço, projeta-se o espaço no plano, visualiza-se a ideia do objeto. Assim sendo, a compreensão de uma geometria planificada e projetada só aparecem mais tarde com um raciocínio mais elaborado e com a ideia adulta das representações manipuladas, pois ela não pode surgir por meio de leituras imediatas feitas apenas por meio dos objetos e do meio.

Quanto a noções elementares topológicas, em particular a noção de ordem, neste estádio ela é construída por meio ou de uma sucessão linear de elementos, ou de uma sucessão de envolvimentos (linhas que formam uma superfície ou superfícies que fecham um volume). O contínuo aparece nessa fase sob uma forma intermediária entre o contínuo perceptivo e o contínuo matemático.

A criança percebe o espaço topológico por meio das ideias de localização, direção, dentro, fora, ao lado e de vizinhança. A compreensão e construção de um conceito de medidas, por exemplo, é um processo longo e demorado. Inicia-se com a construção de medidas espontâneas, com a conservação de distância e comprimento. Logo, a partir da compreensão da noção de distância, surgem, então, as relações euclidianas.

- **Estádio operatório concreto:** Inicia-se ao redor de seis anos, com o aparecimento da noção de invariância. Sucessivamente, aparecem as noções de conservação de substância, de peso e de volume. Quando a criança domina estas três conservações, mais ou menos aos doze anos de idade, atinge a etapa final deste período. Neste estádio as referências espaciais (sistemas de coordenadas) se completam.

Assim, o estádio possui dois subperíodos: a) das operações concretas, quando a criança opera sobre os objetos ou sobre as ações exercidas sobre os objetos, e b) das operações lógicas, quando o indivíduo opera sobre operações, prescindindo da presença concreta do objeto.

A inteligência operatória concreta permite à criança acompanhar as transformações sucessivas do objeto, descentrando sua atenção e estabelecendo caminhos de ida e volta para poder apreendê-lo como um todo, atingindo assim um nível de equilíbrio mais estável entre a acomodação e a assimilação. A operação é a interiorização da ação e possui propriedades como: reversibilidade, transitividade, mobilidade e associatividade. Porém o sujeito, em suas relações com o meio, ainda se prende ao objeto ou, às ações exercidas sobre o mesmo.

A criança do período das operações concretas está ultrapassando o egocentrismo que caracterizou o estádio anterior, apresentando assim, a capacidade de assumir a posição de outra pessoa compreendendo diferentes pontos de vista. Se a criança do período pré-operacional só era capaz de centrar atenção em um único aspecto de uma situação, neste período concreto, já se consegue levar em conta diferente aspectos, considerando estados de transformações.

No que se refere ao domínio do espaço, este é o período em que, apesar de não se importar com medidas até os nove anos de idade, a criança, antes disso, vive envolvida com medidas: faz comparações entre as alturas de si mesma e a dos colegas e caracteriza o processo de construção do conceito de medida, partindo de algo muito informal. Inicia-se com a construção de medidas espontâneas, com a conservação de distância e comprimento, para só mais tarde surgir a necessidade de um sistema de coordenadas. Esse processo ocorre entre nove e dez anos, quando a criança coordena as medidas de duas ou três dimensões, utilizando referências naturais como vertical e horizontal.

Embora as operações de seriação (coordenação das relações assimétricas) sejam descobertas assim, por volta de sete anos, em relação aos comprimentos ou tamanhos dependentes da quantidade de matéria, é preciso esperar os nove anos em média, para se obter uma seriação análoga dos pesos (tamanhos iguais: por exemplo, bolas do mesmo tamanho, mas com pesos diferentes), e onze para se obter a dos volumes (pela medida da imersão da água). Para Piaget e Inhelder (1993) é preciso que a criança chegue aos nove anos para que possa concluir que A = C, se A = B e B = C no campo do peso, e que alcança os onze anos para se chegar a mesma conclusão quanto ao volume.

Com sete anos em média, as crianças também já construíram outras noções espaciais tais como a partição e adição primitiva (dissociação de um contínuo em elementos vizinhos, que adicionados reconstituem o todo), a ordem de colocação (noção de uma ordem linear pela composição gradual das vizinhanças), relações simétricas de intervalos (relações de estar “entre”), a perspectiva no grafismo espontâneo, e a noção euclidiana das dimensões orientadas segundo os eixos de um sistema de coordenadas.

Embora o pensamento operatório concreto apresente um grande progresso em relação aos estádios anteriores, a criança ainda precisa de uma situação concreta para pensar. Ela só será capaz de abstraí-la no estádio seguinte, o das operações formais que se inicia por volta dos doze anos de idade.

- **Estádio operatório formal:** Neste estádio, a criança é capaz de pensar por proposições e poderá lidar com uma realidade apenas imaginada possível, a partir do pensamento hipotético-dedutivo (PIAGET, INHELDER e SZEMINSKA, 1960). O pensamento formal é fundamentalmente hipotético-dedutivo e procura determinar a realidade em um contexto de possibilidade. Além disso, ele é, acima de tudo, um pensamento proposicional; o pensamento do adolescente, não se prende unicamente aos dados brutos, mas manipula enunciados e suposições.

É somente a inteligência operatória formal que permite ao indivíduo desprender-se do objeto e pensar em todas as possíveis relações entre o sujeito e o objeto. A principal característica dessa fase é a distinção entre o real e o possível. Diante de um problema, o adolescente procura imaginar todas as relações possíveis para resolvê-lo, escolhe procedimentos, analisa logicamente e experimenta. Tudo isso mostra um pensamento elaborado, científico, e não só empírico. As conquistas do desenvolvimento acontecem do geral para o específico, enquanto a criança percebe “o aqui” e “o agora”, o adolescente visa generalizações para um futuro remoto.

No que concerne a noções espaciais, todas as relações elaboradas em estádios anteriores (sistemas de coordenadas, projeção, etc..), nesta fase estão prontas para serem formalizadas. Alguns conceitos, tais como, os de construção dos sistemas convencionais de referencias (permitem julgar simultaneamente posições e distâncias), interação e colaboração entre as operações de projeção e de secção perspectiva, e passagem do natural ao formal com relação aos eixos de coordenadas (mistura de noções elaboradas individualmente e de noções adquiridas), são construídas no operatório formal.

Segundo Piaget e Garcia (1987), esse último nível apresenta uma continuidade com tudo o que é mostrado pela psicogênese dos conhecimentos, a partir das indiferenciações iniciais do sensório-motor. O mundo físico, o real, em suas dimensões espaço-temporais do qual o sujeito é parte integrante, começa a ser entendido conforme as operações lógico-matemáticas vão se interiorizando, possibilitando a construção de operações sobre operações, culminando com a conquista inesperada das transformações possíveis.

Em resumo: a cada estádio a criança lida com a realidade de uma maneira diferente, que vai tornando-se cada vez mais adaptada, cada vez mais equilibrada. É este fator endógeno de equilibração, responsável pela transformação das estruturas, associado às ações da criança, que permite o desenvolvimento.

Assim, a intuição do espaço, não é uma mera leitura das propriedades dos objetos, mas sim uma ação exercida sobre eles; e é por que essa ação enriquece a realidade física, ao invés de extrair dela estruturas completamente formadas, que ela consegue ultrapassá-la gradualmente, até constituir esquemas operatórios suscetíveis de serem formalizados e de funcionarem dedutivamente por si mesmos. Da ação sensório-motriz elementar à operação formal, a história das intuições é, portanto, a de uma atividade propriamente dita, inicialmente ligada ao objeto ao qual se acomoda, mas assimilando-a ao seu próprio funcionamento.

Portanto, os estudos realizados por Piaget e Inhelder (1993) mostram que não apenas o espaço, mas todo o conhecimento é construído progressivamente. Isso tem implicações pedagógicas além das epistemológicas, porque indica que o conhecimento não é simplesmente transmitido, mas sim, que se constrói e se desenvolve ao longo do tempo, em interação do indivíduo com as diferentes situações em que experimenta.

1.4 A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Outra teoria que contribui para justificar nossa investigação é a Teoria dos Campos Conceituais. Ela foi desenvolvida pelo psicólogo e pesquisador “pós-piagetiano” Gerard Vergnaud, discípulo e aluno de Jean Piaget. É considerada uma teoria cognitivista que busca compreender os processos de conceitualização, situando e estudando as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual.

Para Vergnaud (1982) o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, por meio de experiência, maturidade e aprendizagem. Campo conceitual é, para ele, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. Para Vergnaud (1990) o domínio de um campo conceitual não ocorre em alguns meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos se quisermos que os alunos progressivamente os dominem. De nada serve tentar contornar as dificuldades conceituais; elas são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas.

Nesta teoria, o funcionamento cognitivo do sujeito em situação repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados; ao mesmo tempo, o sujeito incorpora novos aspectos a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas. Ao mesmo tempo em que estas teorias parecem ser tão próximas, com relação à construção do conhecimento, elas se diferenciam na maneira de abordar a inteligência. Segundo Grossi (2003) enquanto Piaget concebia o processo cognitivo das crianças com modelos teóricos gerais da lógica, os Campos Conceituais toma como referência o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio desse conhecimento.

Para Vergnaud (1994), Piaget não percebeu o infrutífero que é tentar reduzir a complexidade conceitual, progressivamente dominada pelas crianças, a algum tipo de complexidade lógica geral. Vergnaud argumenta que embora Piaget tenha feito um trabalho muito importante para a educação, ele não trabalhou dentro da sala de aula ensinando matemática e ciências. No que se refere à matemática, Vergnaud se interessou muito mais do que Piaget por questões como as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas para estudar as dificuldades dos alunos nessas áreas. Por outro lado, Vergnaud reconhece a importância da teoria de Piaget, destacando as ideias de adaptação, desequilibração e reequilibração como pedras angulares para a investigação em didática das ciências e da matemática.

A Teoria dos Campos Conceituais considera "que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problemas"

(MAGINA,CAMPOS, NUNES, GITIRANA 2001), pois ao tentar resolver uma situação-problema o aluno passa por vários processos que envolvem conceitos, conteúdos, estruturas e representações simbólicas, os quais favorecem o desenvolvimento de competências. Além disso, ao oportunizar diferentes tipos de situações-problema aos alunos estará, em última instância, oportunizando a ampliação do conhecimento matemático destes alunos.

O comportamento cognitivo do sujeito frente a uma situação é explicado em termos de esquemas, que são a forma como o sujeito organiza seus invariantes. Os esquemas explicitam os conhecimentos em ação dos sujeitos, e são os elementos cognitivos responsáveis para que a ação do sujeito seja operatória (VERGNAUD, 1990). Ao resolver uma situação-problema sem o conhecimento de definições, resultados e fórmulas, o sujeito utiliza os seus esquemas de ação para encontrar a solução, isso faz com que sua aprendizagem se torne mais efetiva.

Isso significa que situações de resolução de problemas são essenciais para a conceitualização, mas, como chama atenção Vergnaud (1994), um problema não é um problema para um indivíduo a menos que ele ou ela tenha conceitos que o tornem capaz de considerá-lo como um problema para si mesmo. Para Vergnaud, a problematização vai muito além da abstração de regularidades do mundo observável. Problemas são teóricos e práticos, não meramente empíricos, mesmo para crianças pequenas. Quando uma classe de problemas é resolvida por um indivíduo (o que significa que ela ou ele desenvolve um esquema eficiente para lidar com todos ou quase todos os problemas dessa classe), o caráter problemático dessa classe específica desaparece (Vergnaud, 1994). Mas essa competência desenvolvida pelo indivíduo o habilita a reconhecer ou considerar novos problemas para si mesmo; trata-se então, de um processo cíclico.

Acreditando que muitos conceitos podem ser informalmente apresentados aos alunos muito antes de sua programação curricular, e que isto deveria ser recomendado, pois segundo a Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento se constrói e se desenvolve ao longo do tempo, em interação do indivíduo com as diferentes situações em que experimenta, a nossa hipótese é que ideias básicas das geometrias estão presentes em crianças muito antes do momento em que são apresentadas aos alunos e assim, situações-problema que as contemplem lhes deveriam ser propostas de maneira recorrente, para proporcionar a construção efetiva dos conceitos em questão. Mostrar esta possibilidade é o escopo desta investigação.

SEÇÃO II

SOBRE A HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS

Como em nossa pesquisa são trabalhados conceitos básicos tanto da geometria euclidiana, quanto das geometrias não euclidianas, nesta seção fazemos uma breve incursão na história das geometrias, desde VII a.C. até o momento em que são construídas as novas geometrias no século XIX.

2.1 GEOMETRIA EUCLIDIANA

A palavra geometria possui alguns significados, entre os quais o que é quase uma unanimidade na comunidade científica: “medida da terra”, o que indica uma possível origem empírica.

Não é fácil precisar em que momento o homem começou a desenvolver conhecimentos de natureza geométrica. Segundo Eves (1992), as primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são muito antigas.

A geometria tem sua origem no Egito antigo. Os gregos, sedentos por conhecimento, por volta do século VII a.C., começam a procurar os sacerdotes egípcios para se instruírem (CAJORI, 2007).

> Tales, Pitágoras, Cenópides, Platão , Demócrito, Eudoxo, todos visitaram a terra das pirâmides. As idéias egípcias eram então transportadas por mar e, ao chegarem ao destino, estimularam o pensamento grego, direcionando-o para novas linhas de pensamento, dando, assim, aos gregos, uma base em que pudessem trabalhar. [...] A Grécia está em débito com o Egito, entre outras coisas, no que diz respeito a geometria elementar. [...] A partir do momento em que os filósofos helênicos predispuseram-se ao estudo da geometria egípcia, esta ciência adquiriu radicalmente um aspecto diferente. (CAJORI, 2007, p.43).

Muito conhecimento geométrico já havia sido produzido pelos gregos, a partir das bases egípcias, até que Euclides no século III a. C. abriu a escola de matemática na grande biblioteca de Alexandria. Para o cumprimento de suas funções, Euclides escreveu, entre 330 e 320 a.C, os *Elementos*, obra composta por treze livros, nem todos referentes ao conhecimento geométrico, nos quais Euclides não apenas compilou todo o conhecimento até então produzido, como ordenou e completou muito do que foi produzido por Eudoxo e Teeteto. Euclides "foi o primeiro a produzir provas irrepreensíveis as tentativas imperfeitas de seus predecessores" dando à geometria o caráter formal de um conhecimento pronto e acabado que perdura até hoje (CAJORI, 2007, p.61).

Este livro, escrito a mais de 2000 anos, ainda é considerado por muitos matemáticos como a melhor introdução, não apenas à geometria, mas à própria matemática. A denominação de euclidiana é conferida à geometria em homenagem a Euclides.

Ao falarmos de Euclides, lembramos sempre da apresentação axiomática da geometria. Mas a maneira de se apresentar uma área da ciência como um sistema axiomático não surgiu com Euclides. Para Brito (1995) esse sistema deriva do método dedutivo e do esquema de organização local, ou seja, daquele que estabelece a validade de um resultado a partir de outros fatos conhecidos de antemão. Ainda segundo este autor, Hipócrates de Quios estabeleceu este sistema em 430 a.C.

Os *Elementos* de Euclides, ainda no começo do século XX, já havia atingido mais de 1500 edições, sendo considerada a obra mais difundida no mundo depois da Bíblia. Este tratado compõe-se de 13 livros os quais contém 465 proposições, 93 problemas e 372 teoremas. A esses livros, na parte final, foram acrescentados mais dois – atribuídos ao astrônomo Hipsiclas de Alexandria – o XIV e o XV, que tratam dos poliedros regulares. Os livros I e II são atribuídos a Pitágoras, o livro III é de Hipócrates; os livros IV, VI, XII, e XI foram elaborados por diversos autores atenienses; os Livros VII, VII e IX são consagrados à teoria dos números e na obra V retrilha Euclides a obra de Eudóxio. Desse último geômetra, e de Pitágoras, são todos os outros capítulos da obra de Euclides.

Segundo Bicudo (2009) ao escrever os *Elementos*, Euclides apresentou primeiramente uma lista de definições, esclarecendo os conceitos que iria empregar. Em seguida, postulou cinco princípios especificamente geométricos, isto é, pediu que eles fossem aceitos sem prova (postular é pedir aceitação), para assim apresentar uma lista de nove noções comuns (ou axiomas). Os axiomas são verdades (supostamente) simples, consideradas evidentes. Axiomas não precisariam ser provados, por serem verdades óbvias. Tampouco eles seriam passíveis de prova, pois isso exigiria teses mais simples ainda, o que seria impossível.

Neste contexto, a diferença entre postulados e axiomas poderia ser expressa da seguinte maneira: postulados são sentenças geométricas, cuja aceitação é pedida, para fins de demonstração; axiomas são sentenças mais gerais, cuja verdade estaria acima de qualquer dúvida. Tanto postulados quanto axiomas seriam aceitos sem prova, e estariam na base de todas as provas que vieram a ser desenvolvidas.

POSTULADOS:

I) Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

II) Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

III) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

IV) Todos os ângulos retos são iguais.

V) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

AXIOMAS

I) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.

II) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

III) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

IV) E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.

V) Os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

VI) As metades da mesma coisa são iguais entre si.

VII) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

VIII) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

IX) Duas retas não contem uma reta.

Segundo Mello e Souza (1940) o quinto postulado só é utilizado a partir da proposição 29, por não possuir uma evidência intuitiva. As primeiras 28 proposições são válidas em qualquer geometria em que sejam assumidos os quatro primeiros postulados.

Durante muito tempo, inúmeros matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado, também conhecido como Postulado das Paralelas. Uma das grandes consequências da busca de sua prova foi a produção de grande número de afirmações a ele equivalentes. A mais conhecida é atribuída ao geômetra Playfair (1748-1819):

Postulado V (Axioma de Playfair): *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*

Dezoito séculos depois da publicação dos *Elementos* começaram a surgir suas primeiras traduções para as línguas européias modernas, passando aquela obra a receber um estudo crítico.

Os matemáticos daquela época começaram a estudar a consistência dos postulados de Euclides, e logo perceberam que eles eram insuficientes para provar os teoremas até então conhecidos. Ao analisar os *Elementos* desse novo ponto de vista, eles descobriram que a axiomática euclidiana era incompleta e continha algumas falhas. Era necessário reorganizar a própria geometria euclidiana, suprindo-a, inclusive, de postulados que estavam faltando. Isso foi feito por vários matemáticos no final do século XIX, dentre eles *David Hilbert* (1862-1943), que, em 1889, publicou o livro *Fundamentos da Geometria*.

Nesse livro, Hilbert apresentou um sistema de axiomas completo para a geometria euclidiana plana e espacial em que todos os resultados dos *Elementos* permanecem válidos. Seu sistema axiomático é um dos marcos na história da matemática, pois organiza os fundamentos da geometria e análise.

2.2 TENTATIVAS DE DEMONSTRAÇÃO DO QUINTO POSTULADO

As tentativas de deduzir o Postulado das paralelas dos demais postulados dos Elementos de Euclides ocuparam geômetras por mais de dois milênios promovendo o desenvolvimento da matemática. Muitas "provas" do postulado foram dadas, mas, mais cedo ou mais tarde, mostrou-se que todas se estavam equivocadas, seja por erros de demonstração ou por se apoiarem numa suposição implicitamente equivalente ao próprio postulado.

Segundo Bonola (1951) ao longo dos séculos, essas tentativas continuaram com a participação de praticamente todos os grandes matemáticos que viveram até o século XIX.

Ptolomeu (90 - 168) inicia sua tentativa de demonstração, considerando duas retas cortadas por uma transversal, formando ângulos como na Figura 1.

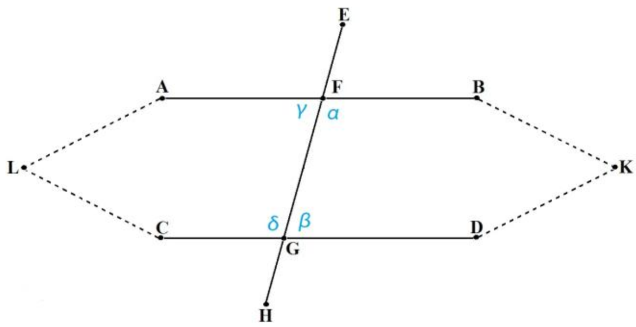

Figura 1: Raciocínio de Ptolomeu

Inicialmente sejam AB e CD dois segmentos de retas cortados por outro segmento de reta EH. Sejam F e G os pontos de intersecção dos segmentos AB com EH, e de CD com EH respectivamente. Se o segmento EH é construído de modo a fazer os ângulos BFG (α) e FGD (β) iguais a dois ângulos retos, então os segmentos de reta AB e CD são paralelos.

De fato: suponha que FB e GD sejam prolongadas até se encontrarem em um ponto K. Então, como a reta GF corta o segmento AB, ela forma com este segmento os ângulos AFG (γ) e α, respectivamente, cuja soma é igual a dois ângulos retos. De forma análoga, como GF corta o segmento CD, ela faz os ângulos CGF (δ) e β, respectivamente, cuja soma é igual a dois ângulos retos. Temos ainda, por hipótese, que a soma dos ângulos α e β é igual a dois ângulos retos. Assim:

i) $\alpha + \beta = 180^\circ$

ii) $\beta + \delta = 180^\circ$

iii) $\alpha + \gamma = 180^\circ$

De i, ii e iii temos:

iv) $\delta + \beta = 180^\circ$

De i e iv obtemos que $\alpha = \delta$, e de ii e iv obtemos que $\beta = \gamma$. Podemos utilizar um raciocínio análogo para o semi-plano obtido por meio das semirretas FA e GC, e pelo segmento de reta FG. De fato, quando prolongados os segmentos FB e GD, estes se interceptarão em um ponto L, pois a soma dos ângulos γ e δ também é igual a dois ângulos retos. Logo, a figura $J_{\alpha\beta}$, formada pelas semirretas S_{FB} e S_{GD} e pelo segmento FG, é congruente[3] à figura $J_{\gamma\delta}$, formada pelas semirretas S_{FA} e S_{GC} e pelo segmento FG Segue que, se as duas retas se interceptam de um lado da reta que passa por FG, então, também se interceptam do outro lado. Neste caso, teríamos duas retas distintas com dois pontos comuns, o que é absurdo.

Esta parte do raciocínio de Ptolomeu é perfeita. Seguindo a mesma ideia, ele tentou oferecer a demonstração para o quinto postulado. Para isso, Ptolomeu considera inicialmente duas retas cortadas por uma transversal, como na Figura 2. Agora suponha que as duas retas são paralelas. Segue-se daí que as figuras $J_{\alpha\beta}$ e $J_{\gamma\delta}$ são congruentes, já que não pode haver diferença entre o paralelismo em uma direção do paralelismo na

[3] Duas figuras planas são congruentes quando uma pode ser obtida da outra por meio de uma translação, rotação, reflexão, ou de uma combinação entre elas.

outra direção. Como consequência, conclui-se que $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ e daí, trivialmente, que qualquer uma destas somas vale 180º.

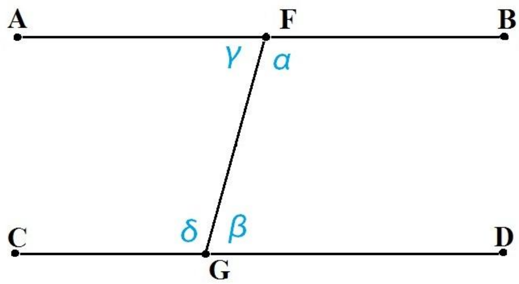

Figura 2: Retas cortadas por uma transversal

Neste raciocínio, Ptolomeu errou em assumir que o paralelismo acarreta na congruência das duas figuras.

Proclus (410 - 485) apontou o equívoco no argumento de Ptolomeu e propôs uma demonstração. Sua ideia era provar que, se uma transversal corta uma de duas paralelas, então, corta também a segunda. O raciocínio de Proclus foi o seguinte:

Sejam duas retas paralelas m e n. Considere uma reta que corta m no ponto E, e seja F um ponto desta reta na região limitada pelas duas retas paralelas (Figura 3).

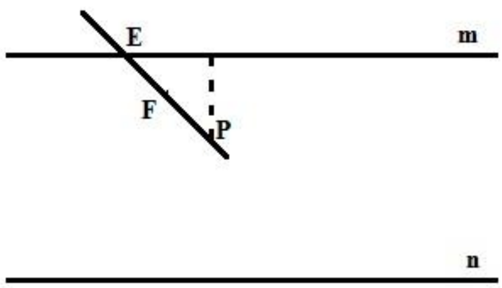

Figura 3: Raciocínio de Proclus

Seja P um ponto da semirreta S_{EF}. Designaremos por d(P,m) a distância deste ponto à reta m. Esta é uma função do ponto P, que cresce a proporção que PE cresce. De fato, esta distância pode tornar-se maior do que qualquer número prefixado e, portanto, eventualmente, torna-se maior do que a distância entre as retas m e n. Mas, então, S_{EF}

corta n. Este raciocínio está correto, desde que admitamos que retas paralelas são equidistantes. No entanto, a existência de retas equidistantes é equivalente à adoção do quinto postulado.

Assim como os gregos, os árabes também buscaram demonstrar o quinto postulado.

Nasiredin (1201 – 1274), astrônomo e matemático persa, em sua tentativa de prova supôs primeiramente, sem demonstração, a validade da seguinte afirmação:

AXIOMA: Sejam m e n duas retas, A um ponto de m, B um ponto de n, tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m. Então as perpendiculares cortadas de m à reta n, do mesmo lado do semiplano com o ângulo agudo, são menores do que AB e as que ficam no outro semiplano são maiores do que AB.

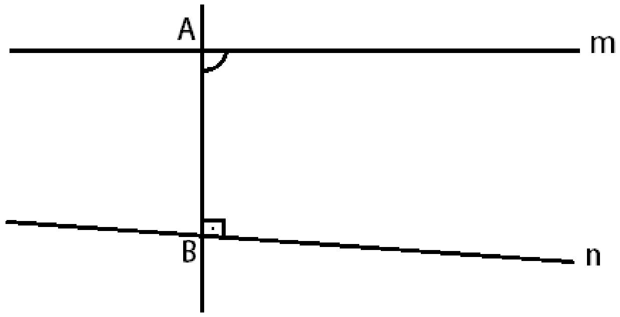

Figura 4: Raciocínio de Nasiredin

Nasiredin usou então este axioma para deduzir o quinto postulado. Para isto, utilizou-se de uma figura que veio a se tornar famosa, associada ao matemático jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733), pois esta sugere a não existência de retângulos na geometria hiperbólica.

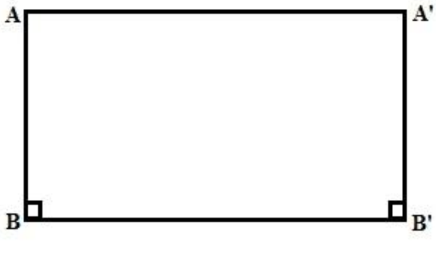

Figura 5: Quadrilátero ABB'A'

Nasiredin considerou um quadrilátero ABB'A' em que os ângulos B e B' são retos e em que AB = A'B' (Figura 5). Utilizando o método de redução ao absurdo e o axioma anterior, ele concluiu que os ângulos Â e Â' são também retos. Para isto, supôs inicialmente que o ângulo Â fosse agudo, deduzindo então que AB > A'B', o que é absurdo. O mesmo tipo de prova mostra que este ângulo não pode ser obtuso. O quadrilátero ABB'A' tem os quatro ângulos internos retos e os lados opostos congruentes. É, portanto, um retângulo. Traçando uma diagonal, o dividimos em dois triângulos retângulos congruentes. Daí ele conclui pela existência de um triângulo cuja soma dos ângulos é 180º, fato que acarreta na validade do quinto postulado (assumir a existência de triângulos cuja soma dos ângulos internos é 180˚ é equivalente ao quinto postulado).

Nos séculos XVI e XVII, entre os que escreveram trabalhos críticos sobre o quinto postulado, e que tentaram prová-lo, deve-se citar F. Comandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537-1612), P. A. Cataldi (?-1626), G. A. Boreli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), e J. Wallis (1616-1703). Todos eles, excetuando Wallis, trabalharam a ideia de retas equidistantes.

J. Wallis abandonou a ideia de equidistância, empregada sem sucesso pelos matemáticos que o precederam, e apresentou uma nova demonstração do quinto postulado. No entanto, a suposta demonstração não foi aceita, pois para demonstrar a proposição de Euclides, admitiu em substituição ao postulado euclidiano, um princípio equivalente assim enunciado: "Dado um triângulo plano, é sempre possível obter outro triângulo semelhante e de área tão grande quanto se queira".

Muitos foram os que tentaram demonstrar o quinto postulado. Em 1733, foi publicado o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus,* escrito pelo padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1773). Neste livro, Saccheri apresentava uma tentativa de prova do quinto postulado. Sua contribuição é considerada mais importante do que todas as anteriores, por ter sido a primeira a contemplar a possibilidade de hipóteses outras que a de Euclides e por trabalhar um grande número de consequências.

O jesuíta Saccheri tentou para o quinto postulado uma demonstração por absurdo e, na esperança de chegar a uma contradição, admitia uma hipótese diferente da de Euclides. Ele considerou um quadrilátero ABCD, em que os lados AB e DC são congruentes e perpendiculares ao lado BC. Usando apenas os quatro primeiros postulados, provou que os ângulos em C e D são congruentes. A validade do quinto postulado é equivalente a assumir que estes ângulos são retos. Assim, existem três hipóteses para estes ângulos:

a) Retos

b) Obtusos

c) Agudos

Saccheri assumiu a negação da hipótese a, e estudou as consequências das duas outras, na busca por contradições. Entre suas conclusões destacam-se:

1. Se uma das hipóteses é verdadeira para um único quadrilátero do tipo considerado, então, é verdade para todos tais quadriláteros;

2. Nas hipóteses a, b, e c consideradas, a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos é, respectivamente, igual, maior e menor que 180º;

3. Se existe um único triângulo para o qual a soma dos ângulos é igual a, maior do que, ou menor do que 180º, então, vale respectivamente, a hipótese a, b ou c;

4. Duas retas coplanares ou têm uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas.

Assumindo, como Euclides, que a reta é ilimitada, Saccheri não teve dificuldades em descartar a hipótese b. Entretanto, ao procurar uma contradição no caso da hipótese c, provou uma longa série de resultados, alguns dos quais viriam a se tornar teoremas clássicos da geometria não euclidiana (geometria hiperbólica). No final Saccheri concluiu que aquela hipótese acarretava a existência de duas retas assintóticas possuidoras de uma perpendicular comum em um ponto ideal no infinito. Aparentemente, ele não estava convencido de que havia chegado realmente a uma contradição, tanto que tentou uma segunda prova, também sem sucesso.

Para Greenberg (1973) se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, simplesmente porque não havia uma contradição para ser encontrada, a constatação da possibilidade de geometrias não euclidianas teria ocorrido quase um século antes. Assim, este jesuíta foi o primeiro a ter um vislumbre das geometrias possíveis, mesmo sem se conscientizar disto.

G. S. Klugel publicou, em 1763, um trabalho em que examinava trinta pseudo-demonstrações do quinto postulado. Esta obra teve o grande mérito de ter chamado a atenção de Johann Heinrich Lambert (1728-1777) para a teoria das paralelas. Seu trabalho *Theorie der Parallellinien* foi escrito em 1766 e publicado, após sua morte por G. Bernoulli e C. F. Hindenburg.

Há uma grande semelhança entre este trabalho e o de Saccheri. Lambert escolheu para sua figura fundamental um quadrilátero com três ângulos retos. Ele considerou três hipóteses a respeito do quarto ângulo: (1) hipótese do ângulo reto, (2) hipótese do ângulo obtuso, e (3) hipótese do ângulo agudo. Como a hipótese (1) é equivalente ao quinto postulado, estudou as consequências das outras duas, tendo ido muito mais longe do que Saccheri na dedução de novas proposições. Entre elas, destaca-se:

"*A área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos*".

Essa diferença, conhecida como deficiência do triângulo, tem um papel muito importante na geometria hiperbólica e seu valor é igual a zero na geometria euclidiana, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

As observações de Lambert foram confirmadas posteriormente pelos matemáticos Riemann e Lobachevsky. Como Saccheri, ele foi capaz de eliminar a hipótese do ângulo obtuso ao assumir que a reta é ilimitada. Todavia, suas conclusões finais sobre a hipótese do ângulo agudo são insatisfatórias. Ele pareceu perceber que os argumentos contra a geometria baseada nesta hipótese eram muito mais resultado de noções preconcebidas sobre a validade da geometria euclidiana.

No século XIX, a figura dominante no mundo matemático era o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Poucos dos seus resultados, oriundos de muitos anos de pesquisa sobre os problemas associados ao quinto postulado, se tornaram públicos durante sua vida. Apesar da prudência de Gauss na divulgação de seus resultados ter permitido que outros viessem com ele dividir a glória da criação de uma nova geometria, sua atitude é compreensível, visto que, nos seus dias a filosofia kantiana havia sido assimilada pela Igreja Católica Romana e assumida como dogma. Era a época em que as sombras da Inquisição assustavam todos, particularmente as pessoas que adquiriam o domínio de qualquer conhecimento que pudesse ser considerado, de qualquer forma, contrário à doutrina. Na base da explicação do universo naqueles dias estava a geometria euclidiana.

No fim da primeira década do século XIX, Gauss ainda estava tentando provar o quinto postulado pelo método de redução a um absurdo. Este foi o processo que Saccheri e Lambert tentaram no passado e cujas obras lhes eram familiares. Foi somente durante a segunda década daquele século que ele começou a desenvolver as ideias de uma nova geometria, formulando os seus teoremas.

Enquanto estudava em Gottingen, Gauss incluiu entre seus amigos o húngaro Wolfgang Bolyai (1775-1856). Os dois frequentemente discutiam problemas relacionados à teoria das paralelas, e mesmo após deixarem a universidade, continuaram esta discussão por correspondência. Wolfgang Bolyai foi um homem talentoso, mas ficou mais conhecido por ser o pai de Johann Bolyai (1802-1860).

Aos nove anos de idade, Johann Bolyai mal sabia ler e era incapaz de efetuar a adição de dois números inteiros. Aos treze anos de idade, isto é, quatro anos depois, conhecia o cálculo integral e a mecânica a ponto de maravilhar, com suas conclusões e respostas, aqueles que o questionavam em tão difíceis assuntos. Em 1816, notando que seu filho possuía notável aptidão para a matemática, escreveu Wolfgang uma carta a Gauss, pedindo ao grande geômetra alemão que aceitasse, em casa, o jovem Johann como discípulo e que o orientasse nos estudos da ciência. Gauss não respondeu a esta carta, e essa desconsideração do filósofo fez com que o velho Bolyai, sem recurso para custear a educação do jovem, o encaminhasse para a carreira militar. Até o ano de 1817, Johann já tinha devotado muito esforço ao problema de provar o quinto postulado, apesar de seu pai ter expressamente recomendado que este problema devesse ser deixado de lado.

Por volta do ano 1820, seus esforços para provar o postulado, por meio da sua substituição por uma afirmação que lhe fosse contraditória, começaram a fornecer resultados de uma natureza especial. Sua atenção foi gradualmente mudando na direção da possibilidade de formular uma geometria geral, uma ciência absoluta do espaço, com a geometria euclidiana como caso particular.

Ao negar o quinto postulado, havia duas hipóteses possíveis a considerar. Primeiramente, poderia não existir qualquer reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora desta reta. Entretanto, a existência de tais retas paralelas é uma consequência dos quatro primeiros postulados. Segundo, poderia existir mais de uma reta paralela à reta dada passando pelo ponto. Iniciando deste ponto, Bolyai observou que a existência de duas tais retas acarreta na existência de uma infinidade delas. Os resultados que se seguiam desta observação constituíam o cerne de uma nova geometria.

Suas ideias tinham começado a tomar forma por volta de 1823, quando tinha apenas 21 anos. Naquele momento o jovem Bolyai escreveu uma carta a seu pai informando suas novas descobertas. Em resposta, Wolfgang sugeriu que o trabalho fosse publicado como um apêndice de seu *Tentamen*, e comunicou que isto fosse feito no menor espaço de tempo possível. Mas, foi apenas em 1829 que o manuscrito foi submetido, tendo sido publicado em 1832. Um exemplar do *Tentamen* foi enviado a Gauss, que em carta manifestou uma grande surpresa, pois as conclusões de Johann Bolyai e os seus resultados apresentavam grandes coincidências.

No ano de 1826, o russo Lobachevsky (1793-1856) fez uma conferência ao Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kasan em que negava o quinto postulado. Lobachevsky afirmava que por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela e submeteu um artigo pela Academia de Ciências de S. Petersburgo.

Na realidade, Lobachevsky, Gauss e J. Boylai desenvolveram uma geometria não euclidiana simultaneamente, mas Lobachevsky foi o primeiro a comunicar suas descobertas e não temeu o impacto que seu trabalho poderia causar na teoria kantiana. O reconhecimento de seu trabalho veio apenas após sua morte. Em 1871, Klein deu o nome de geometria hiperbólica ou geometria da pseudo-esfera à nova geometria construída por esses três matemáticos.

2.3 A GEOMETRIA DA PSEUDO-ESFERA

Para falarmos da pseudo-esfera, faz-se necessário uma pequena introdução sobre a Tractrix ou Tractória.

A tractrix foi imaginada por um médico francês, Cláudio Perrault (1613-1688), que a apresentou como um problema, a vários matemáticos de renome, inclusive a Leibniz (1646-1716). O problema apresentado era o seguinte:

> “Qual seria a curva descrita, sobre um plano horizontal, por um ponto pesado preso ao extremo de um fio, supondo que o outro extremo desse fio percorresse uma reta fixa”. (Mello e Souza, 1940, p. 52)

A análise do lugar geométrico de Perrault foi feita, por Huygens (1629-1695) que, depois de generalizar o problema, atribuiu à curva resultante o nome de tractória. Tal denominação foi mais tarde substituída por tractrix. A Figura 6 apresenta a representação de uma tractrix.

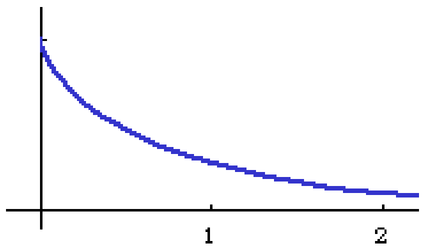

Figura 6: Representação de uma tractrix

Segundo Coutinho (2001) admita que essa curva gire em torno de suas assíntotas[4]. No fim de uma rotação completa, essa curva vai gerar uma superfície de revolução. Essa superfície lembra, por sua forma, duas trombetas opostas pelas bocas e que se prolongam pelo espaço. Estas “trombetas” vão se estreitando cada vez mais, mas só no infinito apresentarão a “ponta” final fechada. Observe a representação de uma parte desta superfície na Figura 7:

[4] Assíntotas são retas das quais o gráfico de uma função aproxima-se cada vez mais, sem nunca tocá-las.

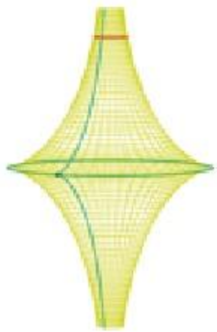

Figura 7: Representação de uma pseudo-esfera

Ao primeiro exame essa superfície em nada se assemelha à esfera. No entanto, realizando um estudo mais aprofundado, podemos afirmar que existem analogias notáveis entre a esfera e essas trombetas infinitas. Por esse motivo a superfície gerada pela tractrix recebeu a denominação de falsa esfera ou pseudo-esfera e foi revelada em 1866 pelo matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900).

Imaginemos agora que algumas figuras geométricas elementares, tais como, triângulo, círculo e quadrados, não sejam mais representadas sobre o plano, mas sim sobre a superfície de uma pseudo-esfera. Teremos de estudar uma nova geometria, pois as figuras apresentam novas propriedades e os princípios euclidianos deixam de ser válidos.

Essa nova geometria foi chamada de hiperbólica e admite, como verdadeiro, o seguinte postulado, conhecido como o Postulado de Lobachevsky (substituindo o Quinto Postulado de Euclides): “Por um ponto tomado fora de uma reta, podemos tirar ao menos duas paralelas a essa reta, uma infinidade de secantes e uma infinidade de não secantes.”

Nesta geometria, as noções de reta e de plano são mantidas como no espaço euclidiano. Três foram os princípios que serviram de base para a construção desta geometria: a noção de reta, a noção de plano, e o princípio de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois retos.

Lobachevsky construiu essa nova geometria tomando por modelo a geometria euclidiana com todas as suas proposições, e propriedades. Logicamente alguns resultados foram mantidos, outros rejeitados, e modificados dentro dos princípios lógicos agora admitidos, tais como, o lugar dos pontos do plano equidistante de uma reta fixa é uma curva; o paralelismo de duas retas é recíproco e transitivo; se um quadrilátero tiver três ângulos retos, o quarto ângulo é, forçosamente, agudo. No entanto, existem algumas singularidades que as distinguem profundamente da geometria euclidiana. Sobre um plano, representamos com facilidade figuras planas euclidianas, pois tal plano está no espaço euclidiano. Na representação de figuras da geometria hiperbólica, surge uma grande dificuldade: não concebemos o plano do espaço hiperbólico, e mais, não imaginamos as linhas e superfícies desse novo espaço. Lembremos que nesta geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180º, e que o lugar dos pontos equidistantes de uma reta é uma curva. Vivendo em um espaço determinado, o homem não consegue representar figuras de outro espaço. Sobre a superfície de uma pseudo-esfera, por exemplo, não seria possível traçar um quadrado plano.

2.4 O PSEUDO-PLANO DE RIEMANN

Em 1854 Bernhard Riemann (1826-1866) proferiu uma conferência ("Sobre as hipóteses subjacentes aos fundamentos da geometria") para os docentes da faculdade de filosofia da Universidade de Göttingen, com intuito da sua admissão como professor adjunto desta Universidade. Tal conferência foi um sucesso e Gauss, diretor da Universidade, preocupou-se em felicitá-lo pessoalmente.

Segundo Mello e Souza (1940), aparentemente Riemann não sabia nada sobre os trabalhos de Lobachevski e Bolyai e tinha somente uma vaga ideia do interesse de Gauss pelo assunto. Esse trabalho de Riemann introduz um conceito totalmente original até então: a variedade multidimensional, ou seja, objetos geométricos com múltiplas dimensões.

Afastando-se igualmente do modelo euclidiano de geometria, Bernhard Riemann, apresentou seus estudos sobre curvaturas de uma superfície e métricas, chegando assim a novos modelos de geometrias não euclidianas.

Em um desses modelos, partindo da negação do Quinto Postulado de Euclides, admitiu a não existência de retas paralelas. Riemann admitindo um pseudo-plano (superfície de uma esfera) cuja curvatura deste espaço é constantemente positiva, parte da hipótese de que se a reta é ilimitada (como ilimitada é a superfície da esfera desta geometria), mas é finita, para concluir que, por um ponto, tomado fora de uma reta, não se pode tirar nenhuma paralela a essa reta. A partir disto, constrói uma geometria inteiramente dedutiva, em que chega a resultados como o de que a reta tem um comprimento finito, e a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que dois retos.

Nesta geometria da superfície esférica, as noções de ponto, reta e plano da geometria euclidiana foram considerados como ponto, geodésica (círculo máximo ou grande círculo), e superfície esférica. Grandes círculos são obtidos por meio da intersecção de uma esfera, com um plano que contém o seu centro. Mais ainda, dois pontos são chamados de antípodas se o segmento que os une tem o centro da esfera como ponto médio.

Nessa superfície, quaisquer dois grandes círculos se interceptam, aliás, em mais de um ponto. Considerando uma esfera qualquer e dois grandes círculos, deu-se a denominação de cunha esférica a uma das regiões determinadas por estes grandes círculos e os pontos antípodas que eles cruzam. Os triângulos esféricos são obtidos por meio da intersecção de três cunhas[5] α_1, α_2, α_3, na qual pelo menos uma delas possui pontos antípodas distintos das outras duas cunhas. A seguir temos uma representação de um triângulo esférico:

[5] Considerando uma esfera S e dois grandes círculos C_1 e C_2 chamamos de cunha esférica a uma das regiões determinadas por C_1 e C_2 e os pontos antípodas que eles cruzam.

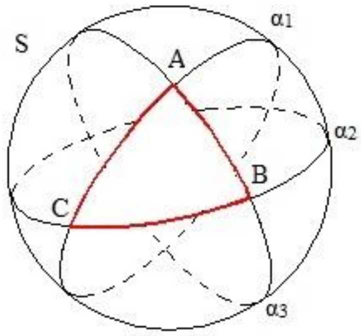

Figura 8: Triângulo esférico

2.5 OS ESPAÇOS GEOMÉTRICOS

Essas geometrias tão estranhamente distintas de nossa imaginação imediata não conduzirão a consequências contraditórias no decorrer dos teoremas? E mesmo para a geometria euclidiana, que não repousa unicamente em bases lógicas?

Beltrami resolveu tal questionamento demonstrando que entre as três geometrias há uma correspondência biunívoca, de modo que a cada contradição em uma das geometrias não euclidianas corresponderia a mesma contradição lógica na geometria de Euclides. Beltrami prova que a geometria de Euclides para poder usar a noção de deslocamento, que é a base da congruência das figuras, precisa supor apenas um espaço de curvatura nula.

Para entendermos o que é curvatura, imaginemos três superfícies nas quais se pode representar as três geometrias que estamos estudando:

I) Um plano;

II) Uma superfície esférica;

III) Uma superfície da pseudo-esfera.

No plano, a curvatura é nula (raio de curvatura é infinito); na superfície esférica, a curvatura é constante e positiva; e na superfície da pseudo-esfera a curvatura é constante e negativa. Estes três casos de curvatura correspondem respectivamente a geometria de Euclides, a geometria esférica (Riemann), e a geometria hiperbólica (Lobatschewsky).

Mas qual destas três geometrias melhor se aplica ao mundo em que vivemos? Para um geômetra puro, não interessa se o espaço físico é euclidiano ou não euclidiano. Para estes, todos os tipos de curvaturas são estudados da mesma forma.

2.6 QUAL A GEOMETRIA QUE DEVEMOS UTILIZAR?

Mas dentre estas geometrias aqui apresentadas (geometria euclidiana e geometrias não euclidianas), qual seria a verdadeira? Podemos dizer que esta é uma pergunta sem sentido.

Os defensores do ponto de vista de que a geometria euclidiana descreve a natureza do mundo tentaram por vezes questionar a própria consistência lógica das geometrias não euclidianas. Esta estratégia fracassou logo que se construíram demonstrações de consistência relativa para as geometrias axiomáticas não euclidianas. Estas demonstrações mostravam que a lógica pura podia assegurar que, se as geometrias não euclidianas fossem inconsistentes, o mesmo aconteceria com a geometria euclidiana. Logo, as geometrias não euclidianas eram pelo menos tão respeitáveis de um ponto de vista lógico como a geometria euclidiana.

O matemático Henri Poincaré (1854-1912) sugeriu que as coisas não são assim tão simples. O seu estudo precedeu as revoluções da relatividade, sendo que só não chegou na Teoria da Relatividade, pois insistia inicialmente em afirmar qual era a geometria mais correta. Numa série de ensaios, Poincaré começa por apresentar uma demonstração da consistência relativa de uma geometria não euclidiana, refutando qualquer afirmação que defenda que as novas geometrias devem ser abandonadas por serem logicamente inconsistentes. Em seguida, enfrenta a tese kantiana de que a geometria euclidiana é a geometria do mundo necessariamente correta. Segundo essa tese, a necessidade da geometria reside no fato do espaço ser uma componente da nossa percepção do mundo. Poincaré defende que se deve distinguir o espaço da física, espaço este em que decorrem os acontecimentos materiais, de qualquer espaço perceptivo, como o chamado campo visual, da percepção visual. A sugestão de Poincaré é a de que não há nada nos fatos da questão que determine qual a geometria correta. Cabe a nós escolher a descrição do mundo. A "verdadeira" geometria do mundo seria uma questão de decisão ou convenção da nossa parte.

As geometrias são apenas quadros formais, isto é, elas podem oferecer ou não praticidades aos fenômenos do mundo físico, sem que diminua a coerência lógica e a legitimidade no corpo de ciência da matemática. Na realidade o emprego destas geometrias dependerá do pesquisador, segundo sua adequação aos fenômenos estudados. Por exemplo, Einstein (1879-1955) escolheu em casos determinados a geometria esférica para a interpretação dos fenômenos de física matemática. Outro exemplo foi quando Poincaré descobriu as funções fuchsianas[6] por meio da geometria hiperbólica, abrindo assim novos horizontes para a teoria das funções algébricas e o estudo da integração das equações diferenciais.

A geometria de Euclides foi a "porta de entrada" para que pudessem surgir novas geometrias. Lobachevsky, quando aboliu o dogma de verdade absoluta de que aparecia revestida a geometria euclidiana, abriu um caminho para a construção de outras geometrias. Assim, para certos problemas a geometria de Euclides é a mais indicada e também suficiente, no entanto, existem outras situações na ciência em que as geometrias não euclidianas sao mais adequadas para explicar os fenômenos estudados.

[6] Funções fuchsianas são aquelas funções que f(z) voltam a tomar o mesmo valor quando a variável z sofre uma substituição da forma: (az+b)/(cz+d) em que a,b,c,d são constantes determinadas, formando assim um grupo descontínuo: f((az+b)/(cz+d))=f(z).

SEÇÃO III

SOBRE A PESQUISA

Nesta seção, descrevemos o porquê adotamos esta temática para nossa pesquisa, as escolhas metodológicas realizadas, o local e os sujeitos da pesquisa e os procedimentos adotados. A pesquisa foi realizada com dez crianças de oito a doze anos de idade que cursam o Ensino Fundamental em um colégio particular, localizado no município de Maringá, norte do Paraná, e teve como objetivo identificar como crianças entre oito e doze anos, que cursam o Ensino Fundamental mobilizam algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema.

A escolha do número de dez sujeitos colaboradores para nossa pesquisa se deve ao fato de que esta pesquisa é de cunho qualitativo visando identificar como crianças entre oito e doze anos, que cursam o Ensino Fundamental mobilizam algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema. Desta forma acreditamos que com um número demasiadamente grande de sujeitos colaboradores, os dados obtidos irão somente indicar uma regularidade de informações, acarretando numa repetição de respostas já coletadas com um número menor de crianças.

O instrumento para a coleta de informações foram situações-problema aplicadas em entrevistas realizadas segundo o Método Clínico Crítico Piagetiano.

3.1 A INVESTIGAÇÃO

Na seção I, em que apresentamos nosso arcabouço teórico, vimos que os resultados dos estudos realizados por Piaget e Inhelder (1993) mostraram que não apenas o espaço, mas todo o conhecimento é construído progressivamente. Constataram também, que é por meio de relações estabelecidas pela criança que o espaço é percebido e representado. Essas relações são de natureza topológica, projetiva e euclidiana, isto é, a criança antes dos seis anos de idade pode reconhecer e representar graficamente relações de vizinhança, interior e exterior, fronteira, continuidade. Por volta dos seis ou sete anos de idade as crianças já começam a estabelecer relações projetivas e euclidianas.

Isso tem implicações pedagógicas além das epistemológicas, porque indica que o conhecimento não é simplesmente transmitido, e sim construído, exigindo ações pedagógicas que privilegiem esta construção.

Como observamos na introdução deste trabalho, nas Diretrizes Curriculares paranaenses (e, em outras propostas curriculares, sobretudo nos cursos superiores), esses conteúdos são apresentados a partir da segunda fase do Ensino Fundamental e enfatizado no Ensino Médio, em uma ordem distinta da ordem de construção constatada pela psicogenética. Entretanto, por causa da sua importância para a matemática, e por envolver ideias básicas que são passíveis de serem construídas bem antes do nível superior, como a de interioridade ou projeção, é possível entender que a ação pedagógica acerca dos conteúdos geométricos pode e deve ser iniciada muito antes até do previsto pelas diretrizes paranaenses.

Dessas considerações emergiram as seguintes indagações que contribuíram para o estabelecimento dos objetivos de nossa investigação:

- Os conteúdos das geometrias (euclidianas e não euclidianas), que são aprofundados no Ensino Médio, podem ter suas ideias básicas introduzidas já na primeira fase do Ensino Fundamental?

- Quais ideias básicas de geometrias do Ensino Médio podemos apresentar no Ensino Fundamental?

- É possível falar em geometrias não euclidianas já no Ensino Fundamental, assim como proposto pelas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná?

- Qual a maneira mais adequada de apresentar as idéias básicas de geometrias no Ensino Fundamental?

Dessa forma, estabeleceu-se como objetivo para essa investigação identificar como crianças entre oito e doze anos, que cursam o Ensino Fundamental, mobilizam as ideias básicas para a construção de conceitos geométricos mais complexos por meio de situações-problema, que poderão se constituir em sugestões de atividades para o fazer pedagógico com tais conteúdos.

Entende-se que os resultados deste estudo fornecerão informações importantes para os processos de ensinar e aprender geometria pelos alunos do Ensino Fundamental e Médio, além de que poderão servir de base para novas pesquisas com essa temática.

Para a consecução desse objetivo foi necessário: estabelecer algumas das ideias básicas envolvidas em conceitos essenciais de geometria para assim formular situações-problema envolvendo tais ideias. Após a análise dos dados obtidos, foi possível estabelecer, entre outras coisas, se e quais conteúdos de geometria do Ensino Médio e Superior podem ser apresentados, de maneira ampla, ou seja, em sentido lato, aos estudantes do Ensino Fundamental.

Por meio de nossos estudos, estabelecemos o que entendemos constituir algumas das ideias básicas para a construção de conceitos geométricos, sejam as geometrias em questão euclidianas ou não:

- As noções de ponto e do contínuo: Piaget e Inhelder (1993) afirmam que a percepção do contínuo e apreensão do conceito de ponto constituem complemento indispensável para a compreensão das relações de vizinhança, relações de separação, e não poderiam ser omitidas em um estudo da representação topológica da criança. E ainda mais, as noções de ponto e de contínuo são intrínsecas a quaisquer das diferentes geometrias. Portanto, investigar essas noções é indispensável a este trabalho.

- As operações de secção: as operações de secção são comuns tanto à geometria projetiva quanto à euclidiana, na medida em que consistem em uma partição efetuada segundo uma forma determinada (em oposição às partições aplicadas às estruturas deformáveis elementares caracterizadas unicamente pelas suas relações topológicas).

- Distâncias: noção essencial para o estabelecimento de relações euclidianas (que envolvem medidas) e também presente em qualquer geometria, embora as distâncias sejam obtidas de maneiras diferentes em cada uma delas.

- Ângulos e triângulos: cujas propriedades constituem-se nos elementos essenciais para estabelecer as diferenças entre as geometrias.

- Conservação de área: a quantificação de grandezas contínuas, independentemente de qualquer métrica é precedida, certamente pela conservação desta grandeza. Para Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) a conservação é, ao mesmo tempo, a condição e o resultado da quantificação.

3.2 A PESQUISA

A pesquisa foi realizada com dez crianças de oito a doze anos de idade, de uma escola particular, localizada no município de Maringá, norte do Paraná. Foi escolhido tal colégio devido a facilidade de contato com sua direção, uma vez que o pesquisador deste trabalho já atuou como professor no início do ano de 2010. Trata-se de uma pesquisa qualitativa na qual se empregou o Método Clínico Crítico Piagetiano e a entrevista semi-estruturada por entendermos esse encaminhamento como viável para a consecução de nossos objetivos.

3.3 LOCAL E SELEÇÃO DAS CRIANÇAS COLABORADORAS DA PESQUISA

Após explicarmos como seria a pesquisa, seus objetivos e como ocorreria cada exame, a seleção das crianças foi feita em conjunto com a diretora do colégio. Foram entregues à diretora os termos de consentimento que seriam posteriormente repassados aos responsáveis das crianças, para a eventual filmagem. A seleção foi realizada de acordo com os seguintes critérios:

- Ter idade entre oito e doze anos;

- Crianças que frequentassem diariamente a escola;

- Crianças que não apresentassem laudo médico relativos a problemas cognitivos;

- Crianças que não tiveram contato com as geometrias não euclidianas formalmente como conteúdo escolar.

Devido ao fato dos exames serem filmados, alguns pais recuaram, não autorizando que seus filhos colaborassem com a pesquisa, sendo que outros alunos vieram substituir tais desfalques possibilitando assim a realização dos exames.

A opção pela faixa etária dos oito aos doze anos se deu em razão de que as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná estabelece que conteúdos básicos de geometrias não euclidianas, particularmente noções topológicas devem ser apresentados às crianças na segunda fase do Ensino Fundamental, aprofundando-os e complementando-os com alguns conteúdos pertinentes a outras geometrias no Ensino Médio. Entretanto, a psicogenética afirma que os sujeitos começam a construir e representar o espaço estabelecendo relações topológicas bem antes dessa idade. As estruturas cognitivas acerca dos sistemas de coordenadas que são essenciais ao estabelecimento das relações projetivas são construídas por volta dos oito anos de idade, e com doze anos (inicio do estádio operatório formal) ocorre a colaboração de noções euclidianas e projetivas afim da formalização das noções já construídas nos estádios anteriores.

Utilizamos neste trabalho para representar uma criança, as três letras iniciais do seu nome e entre parêntesis a sua idade, por exemplo, se uma criança se chama Maria e têm nove anos e quatro meses, ela será representada pelo símbolo MAR(9:4).

A tabela a seguir apresenta a descrição geral das crianças colaboradoras da pesquisa.

Nome	**Idade ANOS: MESES**
MAR	8:6
JUL	8:10
CAM	10:4
ING	10:9
ANA	10:11
RAF	10:11
RIC	11:8
GAB	11:10
FER	12:6
BEA	12:11

Tabela 1: Descrição geral das crianças colaboradoras da pesquisa

3.4 O MÉTODO CLÍNICO CRÍTICO DE PIAGET

Para a consecução dos objetivos propostos e, em consonância com o referencial teórico adotado optou-se pelo Método Clínico Crítico de Piaget. Este método consiste na realização de entrevistas, nas quais o entrevistador faz perguntas a uma criança e baseado nas reações dela, observa, levanta hipóteses a respeito de sua capacidade conceitual e continua a fazer mais perguntas de acordo com as hipóteses que ela formulou. O Método Clínico surgiu da necessidade, identificada por Piaget, de elaborar uma técnica de pesquisa que não fosse extremamente rígida como o teste padronizado e ao mesmo tempo, utilizasse os benefícios da observação, facilitando a realização de experiências, de avaliação da inteligência das crianças, que integravam seu universo de pesquisa (WADSWORTH, 1984). Esse procedimento é conhecido como "Método Clínico Crítico" ou "método de exploração crítica", por utilizar argumentações contrárias às afirmações do sujeito, captando não apenas a firmeza de suas convicções, mas também seu processo de pensamento e a estrutura característica de certo estádio de desenvolvimento.

A viabilidade deste método em pesquisas empíricas ocorre pelo fato de promover um "diálogo" na situação experimental, mediante o qual a criança tem de formular sua resposta em função da contra-argumentação do entrevistador. As conversas são encaminhadas por meio de interrogatórios, e da observação direta. Porém, ultrapassa a simples observação, uma vez que há interação entre os envolvidos, ou seja, o entrevistador participa da experiência do sujeito de maneira a oportunizar que haja um diálogo constante entre ambos.

A validade deste método se justifica porque ele se destina a decifrar os domínios do pensamento infantil, ao mesmo tempo em que possibilita uma sistematização das condutas originais, muitas vezes imprevisíveis, do pensamento da criança. É por meio do Método Clínico Crítico que temos a possibilidade de investigar a forma como a criança está pensando sobre uma determinada situação, o que outros testes e a pura observação não permitem. É característica fundamental do método, como já mencionamos, o fato de não ser padronizado por meio de um vocabulário fixo, pois ele parte das ideias e adapta-se às expressões, às respostas, às atitudes e ao vocabulário do sujeito, possibilitando a livre conversação, motivos pelos quais se adapta a cada criança, permitindo que ela reflita sobre suas ações e afirmações. Por ser possível adaptá-lo ao vocabulário da criança, podemos atribuir à situação um caráter de entretenimento, o que favorece a sua utilização.

O Método Clínico Crítico de Jean Piaget permite a livre conversação entre o pesquisador e a criança sobre o tema a que se objetiva investigar. A entrevista é apoiada por roteiro flexível, adaptável a cada criança, que serve apenas para orientar o pesquisador, evitando que este se desvie do foco de estudo. A cada resposta dada pela criança, surge uma nova hipótese, e é essa sequência de perguntas e respostas que torna a entrevista coerente (LEITE, 1987). É um método de observação que consiste em propor uma atividade ao sujeito e discutir com ele suas soluções, sem que o sujeito interprete a ação do observador como aprovação ou desaprovação das suas soluções.

Os protocolos que utilizamos foram elaborados depois do estudo teórico e das diversas correções de percursos realizadas após aplicação de “pré-testes” ou pilotos aplicados com algumas crianças. Esclarecemos que, pela própria natureza do Método Clínico, os protocolos não foram rígidos; houve alterações sempre que o sujeito indicou caminhos não previstos inicialmente. Há, contudo, o direcionamento contínuo do desenvolvimento das entrevistas, de maneira a ser possível investigar o que se pretende. Algumas provas aplicadas foram retiradas dos livros que utilizamos como base teórica, no entanto, duas destas provas foram elaboradas em conjunto pelos pesquisadores.

Adotamos o Método Clínico Crítico Piagetiano, por acreditarmos que esse método permite ir além das informações contidas em um instrumento de coleta de dados, possibilitando a livre conversação entre o entrevistador e o entrevistado. Como nosso objeto de estudo era identificar relações estabelecidas pela criança, era fundamental que a mesma descrevesse, da maneira mais fiel possível, os raciocínios utilizados na solução das situações propostas, o que não seria possível mediante apenas a observação e a análise da produção escrita. Dito de outra forma, fizemos essa opção, pela necessidade de englobar a ideia do subjetivo, considerando não apenas o que é verbalizado pelo entrevistado, mas também, aquilo que é omitido por ele.

3.5 O PROBLEMA DE PESQUISA

Sustentados teoricamente em Piaget e Inhelder, formulamos nosso questionamento, a partir da hipótese inicial de que, crianças da referida faixa etária, identificam, compreendem e mobilizam as ideias básicas para a construção de conceitos geométricos euclidianos ou não. Concordamos com Vergnaud quando estabelece que um conceito demora muito tempo para ser construído e assim, nossa intenção foi mostrar que as ideias básicas de geometrias podem e devem ser exploradas, ainda que de maneira implícita ou informal, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A questão que se apresenta então é: como trabalhar pedagogicamente essas ideias de maneira a favorecer a construção de conceitos geométricos mais complexos, sejam eles euclidianos ou não? Para isto é necessário identificar como as crianças mobilizam tais ideias em situações-problemas, o que se transformou em nosso objetivo geral.

3.6 OBJETIVO GERAL

Identificar como crianças entre oito e doze anos, que cursam o Ensino Fundamental mobilizam algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema.

3.7 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estabelecer algumas das ideias básicas que são necessárias à construção de conceitos geométricos mais complexos;

- Apresentar sugestões para o fazer pedagógico com ideias básicas para a construção de conceitos geométricos como: ponto e contínuo, operações de secção, distâncias, ângulos e triângulos, e conservação de área com crianças de oito a doze anos.

Para tanto, foram elaborados cinco situações-problema que se constituíram nos instrumentos de coleta de informações.

3.8 EXAMES APLICADOS

Exame I: As noções de ponto e do contínuo

Quando se sabe com que sutilidade os matemáticos colocaram em evidência a complexidade da noção de contínuo, pode parecer absurdo abordar tal problema com crianças. No entanto, temos por objetivo mostrar que a intuição do contínuo, está longe de constituir uma realidade simples, que se inicia com a percepção e se completa com as operações concretas. Com efeito, a passagem da noção perceptiva do contínuo aos esquemas axiomáticos não se dá de repente, ao contrário, é necessária uma elaboração intelectual para chegar aos esquemas complementares da decomposição e da recomposição de uma figura plana, por exemplo.

Objetivos da Atividade:

- Identificar quais as noções que a criança tem sobre o ponto e o contínuo;
- Compreender o modo como a criança concebe o seccionamento de uma figura ou de uma reta até seus contornos últimos;
- Identificar quais são os procedimentos das crianças, referentes à representação da composição e recomposição de figuras geométricas.

Procedimentos:

Foi entregue a cada criança uma folha de sulfite branco em que havia um quadrado representado. Em seguida solicitamos a criança que desenhasse em outra folha, agora em branco, um quadrado tão pequeno que não fosse possível desenhar outro menor. A seguir, em outra folha de sulfite em branco, solicitou-se a criança que fizesse o maior quadrado possível.

A intenção dessas primeiras questões, sem referenciar ainda nem o contínuo nem o ponto, era orientar o pesquisador sobre a capacidade do sujeito em seriar ou encaixar grandezas.

O mesmo procedimento foi adotado em relação a um segmento de reta que foi apresentado ao sujeito, impresso em uma folha de sulfite branca. Inicialmente foi solicitado que desenhasse um segmento de reta medindo a metade da medida do segmento inicial e depois a metade da metade, e assim por diante. Quando ele atinge tamanhos tão pequenos, impossíveis de ultrapassar pela representação gráfica, era indagado se não se poderia continuar esses desenhos indefinidamente.

Trata-se, pois, essencialmente, em questionar à criança se existe ou não o último termo da partição e, se existe, qual a sua configuração.

Como contraprova, investigou-se a capacidade da criança na recomposição do todo a partir de seus elementos. Para isto, questionava-se a criança se ela poderia imaginar uma reta como constituída por um conjunto de pontos. Para auxiliar o sujeito, sempre que necessário era indicado que intercalasse um ponto entre dois pontos marcados pelo pesquisador, que indagava se desta forma seria possível construir um segmento de reta.

Exame II: As operações de secção

São pelas operações de secção que se podem conceber as secções de um cone, tanto como devidas a um plano que corta um feixe de retas, à maneira de uma folha de papel que intercepta um cone de sombra ou de luz (secções projetivas), ou como devidas à divisão segundo um plano de um volume cônico considerado em suas propriedades euclidianas, tal como um cone de massa de modelar cortada por meio de uma lâmina plana (secções euclidianas).

<u>Objetivo da Atividade:</u>

- Identificar como a criança estabelece propriedades de um determinado sólido geométrico a partir de um ponto de vista afastado, isto é, estando situada em uma posição da qual considera os sólidos geométricos tais como eles parecem deste ponto de vista determinado.

Procedimentos:

Foi apresentado à criança um cilindro em massa de modelar (ou um prisma) e uma faca grande e, antes de cortá-lo transversalmente, isto é, segundo um plano paralelo a base, foi solicitado que desenhasse em uma folha de sulfite branca a forma que tomaria a superfície de cada secção. Para tanto, encostamos a lâmina da faca na massa, sem cortá-la, mas indicando com precisão tanto o lugar em que se faria a secção como a direção desta.

Não imediatamente após, mas durante o interrogatório, o pesquisador formulava as mesmas questões e adotava os mesmos procedimentos para uma secção longitudinal (perpendicular a base do cilindro, do prisma etc.).

Os sólidos geométricos de massa de modelar apresentados às crianças foram:

1) Um cilindro;

2) Um prisma triangular;

3) Uma esfera;

4) Um anel formado por um cordão cilíndrico de massa de modelar, mas fechando-se em si mesmo (Figura 9);

Figura 9: A representação de um anel cilíndrico de massa de modelar.

5) Uma estrela de quatro pontas com secção, seja de uma das pontas, seja da extremidade de uma ponta à extremidade da ponta oposta;

Figura 10: A representação de uma estrela
de quatro pontas de massa de modelar

6) Um helicóide formado de um cordão de massa de modelar enrolado à maneira de um caracol alongado ou de um saca-rolha;

Figura 11: A representação de um
helicóide em massa de modelar

Exame III: Distâncias, ângulos e triângulos (geometria hiperbólica)

Com esta atividade, investigamos os conceitos de reta, distância, ângulo, triângulo e suas propriedades, quando contidos no plano euclidiano e na superfície da pseudo-esfera.

Uma das ideias básicas da geometria hiperbólica é a de que objetos da geometria euclidiana como reta e plano possuem, neste contexto, curvatura menor do que zero. Dessa forma, muitos dos resultados da geometria euclidiana, como o da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ser sempre igual a dois retos (180º) não se aplicam em triângulos traçados sobre a superfície hiperbólica (triângulos hiperbólicos).

Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (2008), para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade seria por meio do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Como entendemos que, para uma melhor visualização das diferenças entre superfícies distintas é necessário o aparato de materiais concretos, realizamos uma atividade que visa à comparação de objetos (retas e triângulos) em uma superfície plana e em uma superfície não plana (uma trombeta representando uma pseudo-esfera).

Objetivos da atividade:

- Identificar se os alunos conseguem diferenciar distâncias em uma superfície plana de uma não plana;

- Investigar se e como os alunos compreendem que a área de um triângulo plano é diferente da área de um triângulo hiperbólico.

Procedimentos:

É apresentado para a criança um objeto representando uma pseudo-esfera como ilustra a Figura 12:

Figura 12: Objeto representando uma pseudo-esfera

Em uma das trombetas existe uma fita amarela, que representa a distância entre dois pontos quaisquer nesta superfície. Em seguida é colocada embaixo deste objeto uma folha sulfite branca, para assim questionarmos: "*Se tomarmos estes dois pontos, que utilizamos para medir o comprimento da fita amarela, e fizermos dois furos na trombeta, perpendiculares a superfície da folha sulfite, projetando-os nesta, e depois medirmos a distância entre eles (na superfície plana), o comprimento da fita amarela* *que vamos utilizar para ligá-los na folha sulfite é a mesma, ou diferente da quantidade de fita utilizada na trombeta?"*

Na outra parte da trombeta existe uma representação de um triângulo, conforme a Figura 13:

Figura 13: A representação de um triângulo na superfície da pseudo-esfera

Primeiramente solicitamos à criança que represente em uma folha sulfite, exatamente o triângulo que ela observa. Em seguida é questionado: "*Quais as diferenças entre o triângulo que você acabou de representar, com um triângulo plano?" "Você poderia dizer qual deles possui região interna maior?" "Por quê?*" "*E o que acontece com os ângulos internos deste triângulo*?"

Exame IV: Ângulos e triângulos (geometria esférica)

Uma das ideias básicas da geometria da esférica é a de que conceitos da geometria euclidiana como reta e plano possuem, neste contexto, curvatura maior do que zero. Dessa forma, muitos dos resultados da geometria euclidiana, como o estabelecido no teorema 5.6 de Gerônimo e Franco (2005) de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois retos (180º) não se aplicam em triângulos traçados sobre a superfície esférica (triângulos esféricos).

Uma dúvida bastante comum em relação à geometria da superfície esférica é que se a geometria euclidiana funciona na Terra e esta é uma (quase) esfera, então por que alguns resultados da geometria de Euclides não funcionam na geometria esférica? Ocorre que, localmente, podemos considerar que estamos trabalhando em um plano e daí, os resultados euclidianos se aplicam perfeitamente.

Entretanto, quando precisamos considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra, muitos dos resultados da geometria euclidiana não são verdadeiros. Isso acontece, por exemplo, em viagens terrestres de longa distância, viagens de avião, em navegações de longo curso, em viagens espaciais, porque nestas viagens, a curvatura da Terra não pode ser desprezada. Outras situações em que a curvatura da Terra não pode ser desprezada são as geográficas e assim, em uma perspectiva interdisciplinar o estudo da superfície da esfera e seus elementos permitem uma associação com o globo terrestre. Logo, pode-se fazer um estudo da superfície terrestre estabelecendo relações entre as disciplinas de matemática e de geografia. Para isto, a geometria mais adequada é a geometria da superfície esférica.

Como um dos nossos objetivos específicos é apresentar sugestões para o fazer pedagógico com ideias básicas para a construção de conceitos geométricos no que se refere à geometria da superfície esférica, optamos por uma atividade que costuma ser bastante utilizada para exemplificar relações que podem ser estabelecidas entre a matemática e a geografia, e que permite identificar se os sujeitos percebem a influência da curvatura da superfície esférica no traçado de um triângulo.

<u>Objetivo da atividade:</u>

- Investigar se crianças percebem que em uma superfície esférica é possível o retorno ao ponto de partida após caminhar x metros em direção ao sul; x metros na direção leste e mais x metros na direção norte, enquanto que na superfície plana isto plana não é possível.

<u>Procedimentos:</u>

É apresentada para a criança a seguinte estória:

"*Um urso saiu de sua casa e caminhou cem quilômetros ao sul. Depois virou a leste e caminhou mais cem quilômetros. Então virou novamente e caminhou por mais cem quilômetros ao norte*".

Em seguida são entregues folhas de sulfite e uma esfera de isopor, juntamente com uma caneta esferográfica. Solicita-se a criança que esboce na folha de sulfite e na esfera de isopor o percurso do urso. Indaga-se então: "*Seria possível em alguma das superfícies o urso voltar à sua casa?". "Por que?".*

Exame V: A conservação da área

Considerando a idade dos sujeitos da nossa pesquisa, optamos por investigar se eles consideram área como um atributo estável que pode ser conservado até mesmo quando a forma da superfície é alterada. Para isso realizamos uma prova sobre a composição de áreas.

De acordo com um axioma euclidiano bem conhecido, dadas duas regiões congruentes, se duas partes iguais são retiradas de cada uma dessas regiões, o restante de cada região será também igual. Esta investigação procura determinar se esta proposição aparece em algum momento na criança (se não aparecer, por qual motivo).

Para estudar as relações métricas envolvidas nas medidas de áreas, nos propusemos a investigar como a conservação de área é construída pelas crianças. Segundo Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) a habilidade de analisar um inteiro em sua forma é um pré-requisito para a medição de uma área, pois em tal tarefa se assume que as unidades parciais são conservadas e podem ser compostas com uma variedade de formas, que constituem os inteiros invariantes.

Para descobrir os tipos de noção que as crianças apresentam em relação a conservação de área, aplicamos duas atividades complementares. Na primeira o objetivo é verificar se áreas inicialmente estabelecidas como iguais se conservam após a alteração da aparência das figuras. Na segunda, o objetivo é mostrar que figuras diferentes podem ter mesma área.

Objetivo da atividade:

- Investigar em que momento as crianças percebem que há conservação da área, isto é, independentemente da disposição das “casas”, ou do posicionamento dos cartões, a área permanece inalterada. Entendemos que com base nestes dados, poderemos compreender como as crianças mobilizam a ideia de conservação de área e se atividades destes tipos podem favorecer a construção da conservação para os que ainda não manifestaram a conservação.

EXAME V: PRIMEIRA ATIVIDADE

A atividade consiste em mostrar às crianças duas placas de isopor representando duas pastagens. Em cada um destes campos são colocadas uma vaca, que irá usufruir dos pastos e algumas casas, também de isopor, dispostas em cada campo de maneira diferente. Em seguida, alteramos a estrutura aparente dos campos, retirando ou rearranjando a posição das casas. Será que a criança reconhece a conservação da área (quantidade de pasto), apesar das casas estarem dispostas de formas distintas, porém estando em mesma quantidade em ambos os campos?

Procedimentos:

Inicialmente colocamos uma vaca em miniatura de plástico em cada campo (duas placas de isopor com as mesmas dimensões), e questionamos qual dos dois pastos possuía mais grama para a vaca comer. Em seguida, contamos a seguinte estória:

Com o passar dos anos, ambos os campos foram sendo povoados, e algumas casas foram construídas, porém, a disposição com que as casas foram construídas é diferente em cada campo (Figura 14).

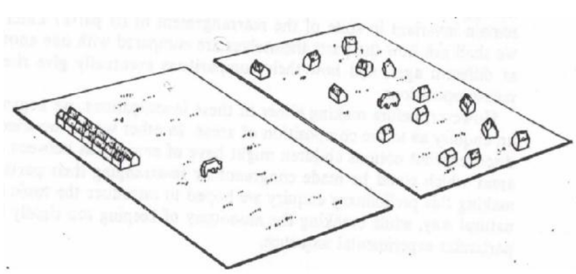

Figura 14: Disposição das casas nos campos de isopor

Pergunta-se novamente, onde possui mais grama para a vaca comer? E por quê? Com base nas repostas obtidas, vamos modificando a disposição das casas, e sempre questionando sobre a quantidade de grama dos dois campos.

EXAME V: SEGUNDA ATIVIDADE

No segundo exame, são apresentadas para as crianças, duas figuras em papel cartão, uma representando um trapézio isósceles (cor preta), e o outro, um polígono seccionado em quatro partes (cor vermelha). O primeiro objeto, de cor preta, é um recorte único, isto é, que não apresenta secções, e o segundo, de cor vermelha, é seccionado em quatro partes distintas. Primeiramente apresentamos simultaneamente, a representação do trapézio preto, e um arranjo das quatro partes do polígono de cor vermelha, de forma que este forme uma representação de um polígono diferente do trapézio isósceles. Em seguida questionarmos qual dos dois objetos apresenta maior área. Após esta primeira parte, rearranjamos as partes do polígono vermelho de forma que este apresente dimensões iguais à representação do trapézio preto, e assim fazemos os mesmos questionamentos aos sujeitos. Queremos analisar, por meio destes questionamentos, se a criança compreende que mesmo formando figuras distintas, a área total dos dois trapézios continua sendo a mesma.

<u>Procedimentos:</u>

São apresentadas para as crianças duas figuras em papel cartão que representam uma um trapézio isósceles de cor preta, e a segunda um polígono formado por quatro partes de papel cartão de cor vermelha, conforme ilustra a Figura 15:

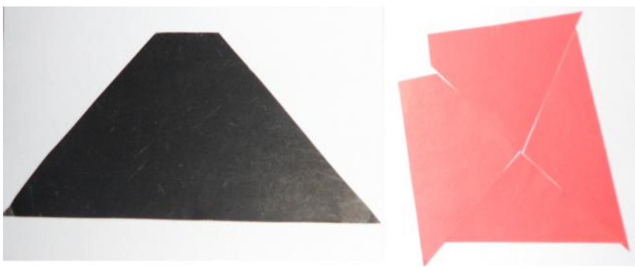

Figura 15: Rearranjo das partes em vermelho para a comparação das áreas

Primeiro Momento:

Após esta apresentação, perguntaremos qual das duas formas geométricas (trapézio isósceles e um polígono formado com as quatro partes do papel cartão) possui maior área.

Segundo Momento:

Em seguida, posicionaremos as quatro peças do papel cartão em vermelho de forma que esta seja idêntica (mesmas dimensões) ao trapézio isósceles não seccionado preto, segundo a Figura 16. Com base nisso, questionaremos qual dos dois apresenta maior área.

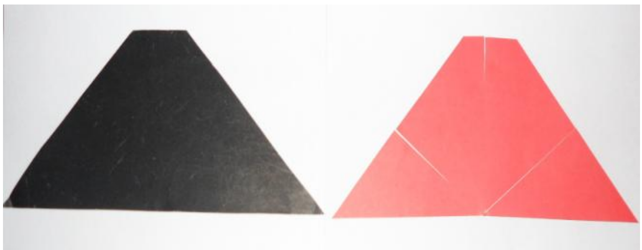

Figura 16: Comparação da medida das áreas dos trapézios

Terceiro Momento:

Para finalizar a atividade, rearranjaremos novamente as quatro partes do papel cartão em vermelho de forma que esta forme um polígono qualquer, para assim perguntarmos novamente qual dos dois possuirá maior área.

3.9 DESCRIÇÃO DO PILOTO

Com a elaboração das situações-problema, iniciou-se a pesquisa de campo com uma aplicação-piloto que foi realizada com uma criança de dez anos de idade que cursava a quinta série (sexto ano) de uma escola da rede pública do município de Maringá. Os fatores que levaram a escolha desta criança para a aplicação-piloto foram que, além desta apresentar um bom rendimento escolar em geometria, ela ainda não teve qualquer contato formal com noções básicas de geometrias não euclidianas.

Com o resultado do estudo piloto, fizemos algumas modificações nas situações-problema, com o objetivo de nos prepararmos para a aplicação do Método Clínico Piagetiano nas entrevistas com os alunos. A seguir seguem algumas das modificações realizadas referentes a aplicação dos exames:

- <u>Primeira Atividade (Noções de Ponto e do Contínuo):</u> Durante a aplicação-piloto, algumas perguntas foram mais bem elaboradas, afim de obtermos uma melhor compreensão das respostas das crianças. Um exemplo disso foi com relação ao questionamento da secção do segmento de reta. O entrevistador, durante a aplicação desta atividade, perguntava qual era a forma do último objeto que teríamos, quando seccionávamos o maior número de vezes o segmento AB. Durante a análise dos dados obtidos com o piloto, notamos que tal pergunta poderia ser modificada para a seguinte questão: *"O que vamos obter seccionando este segmento muitas vezes?"* Entendemos que desta forma abriríamos uma discussão maior quanto ao "último" objeto, podendo ele existir e ser um ponto, um quadrado, ou ele simplesmente não existir.

Outra reformulação foi para a construção de uma representação da reta, a partir de alguns pontos. No piloto, o entrevistador fornecia inicialmente dois pontos, e a partir daí explicava que sempre encontraríamos um terceiro ponto, entre estes dois pontos. Com base nesta afirmação questionava se poderíamos construir uma reta. Entendemos que ao invés de explicar que sempre podemos ter um ponto entre outros dois pontos quaisquer, poderíamos questionar se dados alguns pontos, conseguiríamos construir uma reta. Acreditamos que ao modificar esta questão, encontraríamos respostas muito mais elaboradas, e com um raciocínio lógico mais apurado, dado que não fornecemos mecanismos de construção da reta.

- <u>Segunda Atividade (As operações de secção):</u> Como trabalhamos nesta atividade com vários tipos de sólidos em massa de modelar, com características bem distintas entre si, após a análise do piloto separamos a aplicação do exame em duas etapas. A primeira delas foi realizada seccionando os sólidos que apresentam características menos complexas, tais como, o cilindro, o prisma triangular, a esfera; e para a segunda etapa foram seccionados o anel cilíndrico, a estrela de quatro pontas, e o helicóide, isto é, aqueles que possuem formas mais complexas.

Outra questão que foi alterada é relativa à maneira como explicamos o seccionamento dos sólidos em massa de modelar. Durante a aplicação-piloto, a criança ficou confusa quando perguntávamos que superfície teríamos ao cortar o sólido com uma faca. Ela afirmava que ao cortar o sólido, iria sobrar a sua metade, ou apenas uma parte dele. Com base nisso, alteramos a maneira de conduzir a questão, primeiramente indicando à criança onde iríamos cortar o sólido em massa de modelar com uma faca, e a partir daí, questionarmos qual superfície obteríamos na lamina da faca, ao cortar o objeto.

- Terceira Atividade: (Distâncias , ângulos e triângulos – geometria hiperbólica): O que causou mais contratempos nesta questão foi como elaborar uma superfície que pudesse representar uma pseudo-esfera. Pensamos em fazê-la com isopor, madeira, em massa de modelar. A questão que tivemos cuidado foi com relação à regularidade de uma superfície com curvatura negativa, além de que não queríamos que esta apresentasse ondulações. Assim, o que pensamos foi utilizar duas cornetas ligadas por suas bocas maiores, solucionando grande parte dos imprevistos que tínhamos imaginado.

Na aplicação piloto, tínhamos em mente fazer com que as crianças colassem na trombeta, uma fita amarela para medir a distância entre dois pontos, além de que fizessem na outra parte da trombeta, um triângulo qualquer (com a mesma fita amarela). A partir daí, questionávamos sobre as diferenças do triângulo que ela acabara de representar na trombeta, com um triângulo que ela conheceu em sala de aula. No entanto, alteramos todo o percurso desta atividade. Primeiramente, porque ao solicitar que fizessem essas colagens na trombeta, a atividade ficou bastante cansativa. Com base nisso, tanto a distância entre os dois pontos, como o triângulo hiperbólico, foram entregues para as crianças, já colados na superfície da trombeta.

A principal modificação realizada na atividade foi a de como abordar as diferenças entre o triângulo plano e o triângulo da pseudo-esfera. Ao invés de simplesmente perguntarmos as diferenças entre estes triângulos, na atividade pedimos que as crianças representassem, em uma folha sulfite, o triângulo que elas viam na superfície da trombeta. Entendemos que por meio da representação, a criança poderia perceber que o triângulo que ela observou (hiperbólico) é distinto daquele que está acostumada a estudar na escola, além de possivelmente, conseguir encontrar algumas distinções entre ambos.

- Quarta Atividade (Ângulos e triângulos – geometria esférica): Esta atividade foi retirada de alguns trabalhos que visavam trabalhar com a esfera nos Anos Iniciais da primeira fase do Ensino Fundamental. Originalmente a questão que era feita para as crianças (em outros trabalhos) seria a de que cor o urso apresentava, porém, modificamo-la para a aplicação-piloto, não mais perguntando qual a cor do urso, mas sim, primeiramente afirmávamos que o urso retornava para sua casa, e posteriormente questionávamos se isso realmente era possível acontecer, tanto para a folha sulfite, quanto para a esfera de isopor.

Analisando os dados obtidos, modificamos a questão central da atividade e assim, ao invés de afirmar que o urso retornaria para a sua casa, questionamos se isso é possível de acontecer em ambas às superfícies. Acreditamos que, desta forma, o problema fica mais bem exposto, pois com a folha sulfite e a esfera de isopor em mãos, algumas estratégias serão elaboradas, a fim de verificar se o trajeto realizado apresenta o mesmo comportamento para as duas superfícies trabalhadas nesta atividade.

- Quinta Atividade (Conservação da Área): Para esta atividade, tivemos a preocupação de utilizar duas placas de isopor com as mesmas dimensões, e vários blocos também de isopor para representar respectivamente os campos e as casas. Durante a aplicação-piloto, quando posicionamos a mesma quantidade de casas de isopor em ambos os campos, porém estas em posições distintas, questionamos qual campo possuía maior quantidade de grama para a vaca se alimentar.

No entanto resolvemos alterar após o piloto, não a maneira de se perguntar, mas sim, o posicionamento das casas de isopor. Foram criadas novas situações de posicionamento das casas, tais como, todas centralizadas no centro do campo de isopor, todas espalhadas ao redor do campo, ou alinhadas na lateral. Com base em uma gama maior de situações, podemos ter mais certeza das repostas das crianças quanto a conservação da área.

Feitas as modificações nas situações-problema, iniciamos a investigação com os alunos selecionados para serem sujeitos da pesquisa.

3.10 OS PROCEDIMENTOS

De posse das devidas autorizações (de diretores, coordenadores, professora e pais ou responsáveis), e mediante apresentação da aprovação do projeto de pesquisa, pelo COPEP[7], foram definidos, com a equipe diretiva, os dias e os horários em que as entrevistas seriam realizadas. Para que os alunos não perdessem nenhum horário de aula ficou determinado que as entrevistas fossem realizadas no contraturno de aula das crianças. As entrevistas tiveram início na primeira semana de maio de 2011, no período vespertino.

Foi realizada uma entrevista individual com cada criança colaboradora da pesquisa seguindo as orientações do Método Clínico Piagetiano. As entrevistas foram filmadas com uma câmera digital, e os vídeos, assim como os materiais produzidos pelas crianças, constituíram as informações para análise. Cada uma das entrevistas perduravam aproximadamente trinta minutos, com a aplicação dos cinco exames na seguinte sequência: As noções de ponto e do contínuo, as operações de secção, distâncias, ângulos e triângulos (geometria hiperbólica), ângulos e triângulos (geometria da esférica) e por fim conservação da área. Para a filmagem, foi utilizada uma câmera operada manualmente por um dos colaboradores do projeto. Estas foram realizadas em

---

[7] COPEP: Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com seres humanos. O Comitê de Ética em Pesquisa é um colegiado interdisciplinar e independente, com "munus público", de caráter consultivo, deliberado e educativo, criado para defender os interesses dos sujeitos de pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

salas cedidas pela própria escola, sendo que estas apresentavam excelentes condições de luz e silêncio.

Cada situação-problema foi apresentada para criança de forma oral e, se ficasse constatado que a criança não tinha entendido o problema, era explicado novamente o que se pedia para a situação-problema. Também foi explicado que ela poderia resolver as situações-problema livremente, utilizando números, desenhos ou palavras. Após a criança fazer suas anotações referentes à resolução da situação-problema apresentada, ela era questionada acerca dos procedimentos utilizados e levada a interpretar as notações utilizadas. Nossa conversa foi orientada por um roteiro semi-estruturado contendo algumas questões pré-determinadas com a finalidade de direcionar as explicações para os objetivos da pesquisa. Como cada exame tinha objetivos específicos, este roteiro era diferente para cada atividade, mesmo tendo em vista que o nosso objetivo principal era o de investigar como os estudantes do final do ensino fundamental mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias euclidianas e não euclidianas em situações-problema.

SEÇÃO IV

SOBRE A ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 AS PROVAS

Para a coleta de informações desta investigação cada sujeito participou de uma entrevista realizada segundo o Método Clínico Crítico Piagetiano, na qual foram propostos cinco situações-problema, que constituíram as provas ou exames que nortearam os questionamentos do pesquisador.

Com base no estabelecimento das ideias básicas que seriam investigadas, buscamos referenciais teóricos que poderiam subsidiar a elaboração das situações-problema que constituiriam nos instrumentos de suporte para as entrevistas.

A escolha recaiu nos seguintes textos: "*A representação do espaço na criança*", de Piaget e Inhelder (1993); "*The Child's conception of geometry*" de Piaget, Inhelder e Szeminska (1960). Como orientação sobre como utilizar o método Clínico Crítico Piagetiano consultamos "*Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*" de Wadsworth (1984). Das cinco provas aplicadas, a I, II e a primeira parte da V foram adaptadas dos livros citados anteriormente e foram elaborados especificamente para esta investigação, os exames III e IV, além da segunda parte do exame V.

A ordem de realização dos cinco exames em cada entrevista foi: as noções de ponto e do contínuo, as operações de secção, distâncias, ângulos e triângulos (superfície hiperbólica), ângulos e triângulos (superfície esférica), e por fim a conservação da área.

4.2 ANÁLISE DOS EXAMES APLICADOS

EXAME I: A NOÇÃO DE PONTO E DO CONTÍNUO[8]

[8] Este exame foi retirado da obra **A representação do espaço** (1993), de Jean Piaget e Barbel Inhelder.

Objetivos da Atividade:

- Identificar quais as noções que a criança tem sobre o ponto e o contínuo;

- Compreender o modo como a criança concebe o seccionamento de uma figura ou de uma linha até seus contornos últimos;

- Identificar quais são os procedimentos das crianças, referentes à representação da composição e recomposição de figuras geométricas.

Procedimentos:

Atividade 1: Foi entregue a cada criança uma folha de sulfite branco em que havia um quadrado representado. Em seguida solicitamos a criança que desenhasse em outra folha, agora em branco, um quadrado tão pequeno que não fosse possível desenhar outro menor. A seguir, em outra folha de sulfite em branco, solicitou-se a criança que fizesse o maior quadrado possível.

A intenção dessas primeiras questões, sem referenciar ainda nem o contínuo nem o ponto, era orientar o pesquisador sobre a capacidade do sujeito em seriar ou encaixar grandezas.

Atividades 2 e 3: O mesmo procedimento foi adotado em relação a um segmento de reta que foi apresentado ao sujeito, impresso em uma folha de sulfite branca. Inicialmente foi solicitado que desenhasse um segmento de reta medindo a metade da medida do segmento inicial e depois a metade da metade, e assim por diante. Quando ele atinge tamanhos tão pequenos, impossíveis de ultrapassar pela representação gráfica, era indagado se não se poderia continuar esses desenhos “com o pensamento”.

Trata-se, pois, essencialmente, em questionar à criança se existe ou não o último termo da partição e, se existe, qual a sua configuração.

Atividade 4: Como contraprova, investigou-se a capacidade da criança na recomposição do todo a partir de seus elementos. Para isto, questionava-se a criança se ela poderia imaginar uma reta como constituída por um conjunto de pontos. Para auxiliar o sujeito, sempre que necessário era indicado que intercalasse um ponto entre dois pontos marcados pelo pesquisador, que indagava se desta forma seria possível construir um segmento de reta.

Análise dos Resultados obtidos

A análise das informações obtidas neste exame permitiu identificar quatro Níveis, com características semelhantes àquelas descritas por Piaget e Inhelder (1993).

Um primeiro período (Níveis I e II) é caracterizado pela incapacidade de ser resolvido, de imediato, a questão 1 (um). Com relação às questões 2 (dois), e 3 (três), as partições concebidas como possíveis são em número muito limitado, chegando a elementos ditos últimos, mas de grandeza muito perceptível. Para a questão 4 (quatro), existe uma ausência de reversibilidade entre o seccionamento e a composição: uma reta não é concebida como um conjunto de pontos.

No Nível III, as atividades 1 (um), e 2 (dois) são resolvidas com sucesso graças às operações de seriação, daí uma maior mobilidade das operações de partição. No entanto, mesmo que o sujeito admita um grande número de partições possíveis, elas não são ainda ilimitadas. A questão 3 (três), os sujeitos não ultrapassam o estádio das operações concretas, isto é, eles não generalizam além do finito (do visível e do manipulável). Finalmente para a questão 4 (quatro), a composição do todo a partir de suas partes é concebida em reciprocidade reversível com a partição, mas ela não chega senão a um contínuo intuitivo.

Durante o Nível IV observa-se a liberação do pensamento formal em relação a intuição quase perceptiva do início e às operações concretas, ainda centradas no quadro da representação e da manipulação real. As operações de seriação estão bem estabelecidas, e a partição é concebida como ilimitada. A estrutura dos elementos últimos é concebida como independente da forma do todo, e as composições constituem o inverso da decomposição ilimitada.

A seguir, segue uma detalhada descrição de cada Nível e a classificação das crianças segundo suas respostas mediante cada questão apresentada.

Níveis I e II: Intuições Pré-operatórias

Este período ocorre até por volta dos sete anos de idade, e sua reação marcante é a de que os sujeitos não admitem senão o que é perceptível.

Por meio da análise das quatro atividades que foram aplicadas neste exame, pudemos constatar que existem sujeitos que apresentam características próprias deste período para uma determinada atividade, contudo, para as outras atividades aplicadas, apresentam reações de Níveis subsequentes. Por este motivo, neste trabalho trataremos individualmente de cada atividade, explicitando quando possível, exemplos com crianças que se enquadram em cada Nível.

Atividade 1: Maior e menor quadrado

Os sujeitos que se encontram no Nível I (mais elementar), diminuem e aumentam o quadrado inicial, porém após algumas representações crescentes e decrescentes perdem o sentido da progressão e o invertem sem se darem conta (podendo inclusive representar outras figuras geométricas no lugar dos quadrados). Algumas crianças chegam a uma sequência decrescente ou crescente, mas de forma muito lenta. Já no Nível II, os sujeitos chegam mais rapidamente aos menores e aos maiores quadrados possíveis, mas sempre por aproximações sucessivas e não por antecipação direta.

Vemos com estas reações que alguns sujeitos não conseguem desprender-se da configuração perceptiva do quadrado inicial já desenhado, para imaginar o mesmo quadrado diminuindo ou aumentando suas dimensões, ou seja, a percepção atual obstrui previamente toda a velocidade de transformação.

No Nível II, o comportamento estático inicial é gradativamente "substituído" por uma articulação progressiva da intuição, devido às antecipações da ação: o quadrado torna-se suscetível de diminuição e de aumentos sucessivos. Um exemplo de criança que se encontra neste Nível é JUL(8:10). Esta criança partindo do modelo de quadrado desenhado em uma folha sulfite, quando solicitada para representar o maior quadrado possível, desenha um quadrado (Figura 17) que ocupa exatamente a metade de uma folha sulfite. Questionada se era possível desenhar um quadrado maior que o que acabara de realizar, ela responde que era possível e aumenta a medida das bases do quadrado dobrando seu comprimento, obtendo um retângulo (retângulo da Figura 17). Vejamos as Figuras 17 e 18 que mostram as representações dos quadrados e retângulos de JUL(8:10).

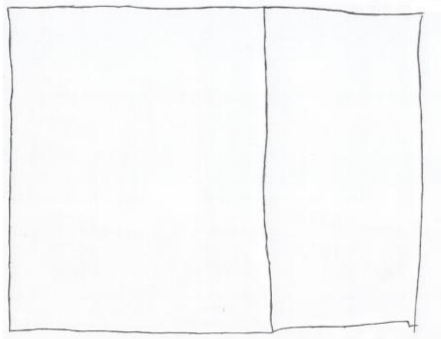

Figura 17: Representação do maior quadrado de JUL(8:10)

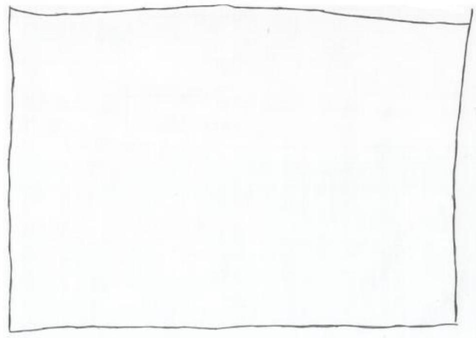

Figura 18: Representação refeita do maior quadrado de JUL(8:10)

Quando questionamos da existência de um maior quadrado possível, os sujeitos deste Nível refazem seus desenhos, tentando representar um quadrado maior que o que acabara de realizar, no entanto, acabavam por realizar representações de retângulos, como exemplifica a Figura 18, uma representação de JUL(8:10). Outro aspecto interessante é com relação a existência de um maior quadrado. As crianças desta fase, além de afirmar que existem quadrados maiores últimos que os desenhados, insistem na ideia de dimensões comensuráveis de seus lados.

JUL(8:10) "Sim, é possível fazer um quadrado maior. Este é o maior quadrado que eu consigo fazer nesta folha (Figura 18). Eu acho que tem um quadrado maior que este sim, acho que do tamanho dessa sala, e o maior quadrado é maior que essa sala. Ele deve ter uns cinquenta metros".

Para a atividade do quadrado menor, as crianças chegam a elementos ditos últimos, mas de grandeza muito perceptível. Estas ficam presas ao que é perceptível e quando questionadas sobre a possibilidade de representação do menor quadrado existente, afirmam ser possível de representá-lo. A Figura 19 mostra a representação de JUL(8:10) para o menor quadrado possível de ser representado.

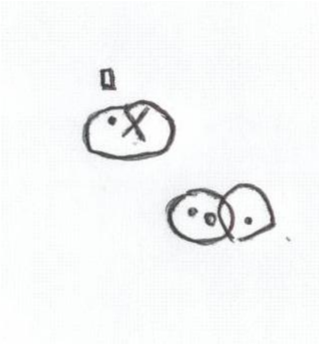

Figura 19: A representação do menor quadrado de JUL(8:10)

Observe as reações de JUL(8:10) em um diálogo com o pesquisador sobre a existência do menor quadrado:

JUL(8:10): "Não tem como diminuir mais, porque ele vai ser tipo um pontinho de caneta, mas o pontinho de caneta é redondo e o meu desenho é um quadrado. E eu não consigo desenhar o menor quadrado que existe, porque eu precisaria de uma régua para desenhá-lo".

ENTREVISTADOR: "Se eu lhe entregasse uma régua, seria possível desenhar o menor quadrado que existe?"

JUL(8:10): "Acho que eu iria, hum acho que não. O menor quadrado do mundo não" (a criança parece ficar em dúvida).

ENTREVISTADOR: "Bom, mas o menor quadrado do mundo então é menor que este que você desenhou?"

JUL(8:10): "Hum acho que não. Então eu acho que gente conseguiu desenhar o menor quadrado".

Questão 2: Seccionamento de segmentos de reta

As crianças que se encontram neste período (Níveis I e II), apresentam grande dificuldade para apresentar a resolução desta atividade. Tal fato é constatado, visto que, estes sujeitos não conseguem desenhar a metade de um segmento de reta, por conseguinte, muito menos a metade da metade do segmento; quando é realizada a secção do segmento, as partes reproduzidas diminuem cada vez menos, não respeitando a condição de ser a metade do segmento anterior. Mais ainda, quando realizam divisões mais ou menos regulares, afirmam chegar ao último elemento: um segmento de reta de comprimento muito pequeno.

Observamos ainda nesta atividade, uma ligação inicialmente irredutível da intuição à percepção, isto é, os elementos últimos das secções devem ser visíveis. As Figuras 20 e 21 exemplificam esta situação.

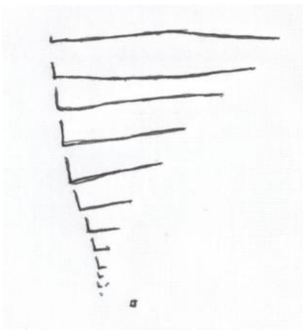

Figura 20: Representação da divisão do segmento de JUL(8:10)

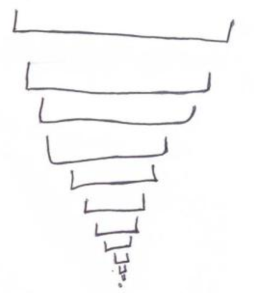

Figura 21: Representação da divisão do segmento de GAB(11:10)

Quando questionamos sobre a existência de um último elemento, sua forma e dimensões, as respostas apresentadas pelas crianças foram enfáticas, afirmando que o menor elemento existia e era aquele que acabara de representar na folha sulfite. Mesmo perguntando se era possível particionar este “último” elemento encontrado, algumas respostas muito interessantes apareceram, todas apresentando um aspecto em comum: o não desprendimento do que é visual, isto é, a não existência de um segmento de reta menor do que aquele que foi representado na folha sulfite.

GAB(11:10) "O que vai sobrar é algo parecido com um quadrado, faltando para isso fazer um risco na parte de cima. Como não é possível desenhar uma pedaço menor que a que acabei de fazer, então este é o menor que existe".

Atividade 3: Existência do último elemento

Se o sujeito deste Nível não escolhe o ponto como sendo o último elemento, a análise desta atividade mostra qual é o motivo: esse último elemento deve em geral conservar, aos olhos da criança, uma forma definitiva, semelhante ao todo do qual saiu. Este isomorfismo é explicado pela mesma razão que justifica a incapacidade dos sujeitos à divisão ilimitada do contínuo: trata-se, pois, do caráter perceptivo da intuição inicial. Na medida em que é inconcebível procurar elementos além dos limites do campo da percepção, é claro que o todo não poderia ser decomposto em pontos perceptíveis que sejam redondos e descontínuos, pois um todo contínuo e não circular não poderia ser formado de partes tão diferentes de seus próprios caracteres; será necessário, pois, que o todo seja formado de elementos semelhantes a ele.

Lembremos que na análise realizada para a atividade anterior, GAB(11:10) não chega a conclusões corretas, afirmando o último elemento ser uma figura parecida com um quadrado.

Atividade 4: Recomposição do todo a partir de seus elementos

Como observado por Piaget e Inhelder (1993), nos Níveis I e II tem-se uma ausência de reversibilidade entre a figura total e a decomposição em suas últimas partes. Faz-se necessário compreender com maiores detalhes as razões que levam os sujeitos a apresentarem tal característica.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), para as crianças do Nível II existem três realidades que devem ser conciliadas. A primeira destas é a figura total, que é contínua, mas cujo contínuo é de caráter perceptivo, isto é, indecomponível. A segunda realidade seria que as partes do todo lhes parecem dissociadas: elas consentem em separá-las, mas concebem então o contínuo como rompido e o transferem para o interior das partes, assegurando a cada elemento uma forma isomorfa ao todo. Por fim, a terceira destas realidades seria que os pontos são concebidos como descontínuos e sem relação nem com o todo nem com suas partes isomorfas, mas consideradas ao mesmo tempo como o resultado possível de um número demasiadamente grande de seguidas divisões.

O principal problema desta atividade é, pois a relação entre o todo e suas partes isomorfas, e os próprios pontos. Dito de outra forma: a criança não compreende que ao se particionar um segmento de reta inúmeras vezes, chegaremos a uma realidade puntiforme e, inversamente, que esses pontos reunidos podem recompor o segmento inicial. Com efeito, esses pequenos elementos resultantes das diversas partições, em lugar de serem concebidos como partes de partes, o que pareceria fácil (reversibilidade), são considerados como inaptos a reformular o todo ou mesmo as pequenas partes isomorfas a esse todo.

A característica marcante encontrada nos sujeitos de nossa pesquisa foi a estratégia de que para ligar dois ou mais pontos, seria necessário uma reta, ou uma linha. Vejamos o exemplo de JUL(8:10) que apresenta reações como as descritas anteriormente:

JUL(8:10) "Para construir uma reta, dados esses dois pontos, é necessário uma linha para juntá-los. Se tivermos vários pontos juntinhos teremos da mesma forma que colocar uma linha para juntar eles".

Entendemos por meio de reações como a anterior, que as crianças não entendem que uma reta é formada por infinitos pontos, tão próximos uns dos outros, quanto se queira. E mais, acabam por comensurar a quantidade de pontos existentes em retas distintas, conforme exemplifica CAM(10:4):

CAM(10:4) "Uma reta é feita por muitos pontos. Como essas duas retas tem tamanhos diferentes, elas devem ter quantidade de pontos diferentes. O segmento maior tem uns *cem pontos, e o menor tem uns cinquenta pontos. Isso acontece porque a reta maior tem mais pontos".*

Nível III: Composições Operatórias no finito e reações intermediárias a respeito do contínuo

Neste Nível III, a criança torna-se capaz de operações concretas, isto é, que o domínio do visível e do manipulável, reservado unicamente a intuição pré-operatória, é estruturado por operações gerais, componíveis e reversíveis. No entanto, o pensamento permanece impotente e utiliza analogias emprestadas do concreto. Daí o caráter intermediário entre o intuitivo e o operatório.

Para a atividade do maior e menor quadrado, algumas reações dos sujeitos deixaram evidências de que conseguem se desprender da representação na folha sulfite, isto é, acusam ter quadrados maiores e menores que os que desenham, porém, ainda possuem dúvidas com relação a estimativas dos seus respectivos tamanhos, como exemplifica a fala de RIC(11:8):

RIC(11:8) (Desenha o menor e o maior quadrado possível) "Não é possível desenhar um menor que este na folha, pois o tamanho dele deve ser microscópico. Quanto ao quadrado maior, existe um maior que este aqui, mas não sei se existe o maior quadrado, eu não consigo desenhar. Também não tenho ideia com relação ao seu tamanho".

A atividade relativa a divisão sucessiva dos segmentos em sua metade, apresenta um grande progresso perante aos Níveis anteriores. Primeiramente os segmentos são seccionados corretamente, isto é, são divididos em proporções corretas, diferentemente dos Níveis I e II em que tais divisões não respeitavam a condição de ser metade do segmento anterior. Vejamos a Figura 22 que indica a representação de ING(10:9) da divisão dos segmentos em sua metade:

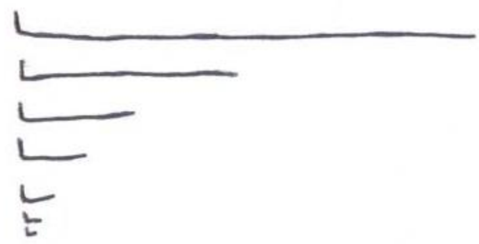

Figura 22: A representação das divisões do segmento
de ING(10:9)

O principal avanço deste Nível é relativo a última partição destes segmentos. A criança nesta fase entende que existe algo menor do que ela acabara de representar, no entanto, ainda não possui estruturas cognitivas suficientes para afirmar qual é sua forma e dimensão, como exemplifica ING(10:9) em um diálogo com o entrevistador.

ING(10:9): “Existe um pedaço menor que este, mas eu não consigo desenhar”.

ENTREVISTADOR: “Se eu continuar dividindo estes pedaços o que eu vou ter no final?”

ING(10:9): “Nada”.

ENTREVISTADOR: “E exatamente antes do nada o que tenho?”

ING(10:9): “Algo menor que um ponto”.

Na recomposição do todo a partir de seus elementos, também ocorrem progressos significativos. A estratégia criada pelas crianças de Níveis mais elementares, de que seria necessária uma linha para ligar todos os pontos, desaparece e estas afirmam ser possível por meio unicamente de pontos, obterem uma reta. A Figura 23 mostra a representação de RAF(10:11) para a construção da reta a partir de pontos:

Figura 23: Representação de RAF(10:11) para a construção da reta

Porém, os sujeitos deste Nível III não conseguem compreender que uma reta é formada por uma quantidade incomensurável de pontos, ou seja, para construirmos uma reta, é necessária uma quantidade ilimitada de pontos.

RAF(10:11) "Se eu for colocando os pontos assim (desenhando vários pontos entre outros já feitos) eu construo uma linha. Vou colocando pontos assim até não caber mais nenhum ponto".

Alguns progressos são nítidos em relação ao Nível II, sendo que o principal deles é a conquista das operações de seriação e de divisão, cujo funcionamento reversível emerge aos sete ou oito anos, segundo Piaget e Inhelder (1993). Isto é o que explica que as questões do maior e do menor quadrado possível sejam resolvidas sem dificuldade a partir deste Nível. Por outro lado, e por isso mesmo, o sujeito não hesita em realizar, em presença de uma reta, uma sequência de partes dicotômicas, sabendo bem que poderá continuar sem dificuldades até os limites do visível e do manipulável, e que chegando a esses limites perceptíveis, poderá voltar da parte ao todo. Resumidamente, com relação às operações concretas, que se apóiam no campo do finito e da ação possível, existe um grande progresso ao Nível II.

No que se refere à questão dos limites da percepção, algumas dificuldades ainda permanecem. Assim, durante este Nível III, existe um enorme esforço dos sujeitos para conciliar as operações descobertas no plano concreto com as intuições analógicas que imaginam o invisível sobre o modelo visível, sem conseguir levantar as contradições inevitáveis por ausência do mecanismo formal.

Para a atividade (3) três (forma do elemento último), assistimos a um progresso das ideias confusas do Nível anterior, no entanto, a solução proposta ainda não ultrapassa o plano finito. Para Piaget e Inhelder (1993), no Nível II a criança leva em consideração três realidades distintas: a totalidade contínua, as partes possíveis isomorfas ao todo, e os pontos, estranhos à composição do conjunto, mas que podem resultar de uma composição demasiadamente grande e irreversível. Já no Nível III, os sujeitos admitem somente duas realidades: o todo e seus elementos, e os concebem como podendo, um e outro, ser obtidos por operações inversas de decomposição e recomposição. Porém o elemento último (o ponto), ainda constitui uma superfície que tem uma forma, e que sua forma depende ao mesmo tempo da forma do todo e do modo de seccionamento aplicado a esse todo.

No início deste Nível, a recomposição a partir dos elementos (atividade quatro) não apresenta mais dificuldade e apresenta-se com uma operação tanto mais definida que não há mais, como no Nível II, dualidade entre os verdadeiros elementos e os pontos: sendo o elemento o próprio ponto com sua forma, a recomposição é o universo exato da decomposição. Há, pois, uma composição reversível do todo a partir dos elementos e dos elementos a partir do todo, mas a composição permanece "concreta" isto é, finita e perceptível, e não infinita e puramente intelectual, permanecendo uma contradição no momento insolúvel: o todo é contínuo e seus elementos descontínuos.

A terceira e a quarta atividades (decomposição do contínuo em pontos vizinhos) são as que trabalham de uma forma bastante completa com as relações topológicas elementares da criança. De fato, segundo Piaget e Inhelder (1993) quando decompomos o contínuo (uma reta) em segmentos de retas, ou em pontos vizinhos, e em seguida realizamos a recomposição destes pontos, em uma reta, estamos trabalhando em uma forma bastante complexa com operações de partição e vizinhança, pois a criança tem de compreender que toda imediação de um ponto, por menor que seja esta vizinhança, ainda existe um ponto vizinho. Observa-se que as noções de vizinhança, e de envolvimento são necessárias para a realização da recomposição do todo por meio de seus elementos últimos. A consolidação das estruturas cognitivas relativas a esta atividade, representam o complemento necessário para as operações de ordem.

Em resumo, neste Nível III a criança está de posse, no plano das operações concretas, das relações de vizinhança, de separação, de ordem e de envolvimento, mas não consegue efetuar essa síntese que constitui o contínuo por ausência de operações formais aptas a impulsionar a partição (separação) de modo ilimitado e reunir os elementos assim separados em agrupamentos (envolvimentos) em número igualmente ilimitado.

Nível IV: As operações formais e a síntese do contínuo

Nesta etapa, o sujeito consegue ultrapassar as noções de divisão e de ponto perceptíveis para prolongar os mecanismos de decomposição e de recomposição além de todo limite anteriormente idealizado. Temos também o início do pensamento formal, necessário para que os elementos últimos do contínuo sejam elaborados a título de pontos invisíveis e puramente hipotéticos que dizem respeito a sua manipulação, mas dedutíveis e componíveis em pensamento de modo ilimitado.

A atividade do maior e menor quadrado é realizada corretamente, e as crianças conseguem analisar que não existe maior e menor quadrado possível, conforme exemplifica o diálogo entre BEA(12:11) e o entrevistador:

BEA(12:11): "Eu acho que não existe um quadrado maior de todos, porque sempre vai existir um quadrado que é maior que este último".

ENTREVISTADOR: "Mas você faz ideia de um possível tamanho de um maior quadrado?"

BEA(12:11): "Hum, acho que infinito, não tenho certeza".

ENTREVISTADOR: "É possível desenhar um quadrado menor que este que você acabou de fazer?"

BEA(12:11): "Não, pois ele seria tipo um ponto".

ENTREVISTADOR: "Existe um quadrado que é menor que este que você fez?"

BEA(12:11): "Sim, mas eu não consigo desenhar, pois é muito pequeno".

Não encontramos em nossa pesquisa, para a atividade de seccionamento do segmento, sujeitos com características semelhantes às descritas por Piaget e Inhelder (1993) para o Nível IV. Em nossa análise, algumas crianças conseguiam dividir na metade os segmentos de reta, respeitando seu alinhamento, porém, não conseguiam visualizar que o último elemento era um ponto. Vejamos algumas reações de sujeitos que exemplificam esta situação:

BEA(12:11) "O último elemento é um segmento de reta bem pequeno, pois como estamos dividindo sempre um segmento de reta, e obtendo outros segmentos de reta, o último também vai ser um segmento de reta bem pequeno".

RAF(10:11) "O último elemento é um ponto. Se dividirmos ele, vamos ter outros pontos menores. – Mas este último elemento que vamos ter é maior que um ponto".

Encontramos sujeitos que conseguiram recompor a reta a partir de pontos. Vejamos as reações de alguns sujeitos que se encontram neste Nível IV para esta atividade:

BEA(12:11)"Sim é possível. Basta tomar um ponto entre esses dois e assim sucessivamente (começa a desenhar vários pontos). Como tem muitos pontos, eles são tipo como invisíveis. Como eles são muitos, muitos, muitos, eles formam um segmento".

FER (12:6) "Se eu colocar vários pontos entre esses que já temos, vamos formar um segmento. Tem que colocar cada vez mais pontinhos, cada vez mais, diminuindo,

diminuindo" (enquanto falava, a criança desenhava pontos muito próximos uns dos outros).

O essencial deste Nível IV é, pois, a capacidade de prosseguir as operações de modo ilimitado, em oposição aos limites do concreto, ainda respeitados no Nível anterior. Em resumo, as lacunas situadas entre os pontos se transformam em pontos ao mesmo tempo vizinhos e intelectualmente separáveis, o que assegura a síntese entre as relações de vizinhança, de separação, de ordem e de envolvimento, já adquiridas no Nível III.

Considerações sobre a atividade

As informações obtidas com a aplicação desta atividade apontam que: das dez crianças entrevistadas, duas delas podem ser classificadas no nível IV, sendo que ambas possuem doze anos de idade. No Nível III, temos que das três crianças pesquisadas que se encontram nessa fase, uma delas possui onze anos e as outras duas dez anos de idade. O Nível II é o que possui maior número de sujeitos, totalizando cinco crianças. Destas cinco, uma delas possui onze anos, duas possuem dez anos e outras duas, oito anos de idade. Em nossa pesquisa, não foram registrados sujeitos no Nível I.

Tabela 2 resumindo os resultados encontrados na prova *A noção de ponto e do contínuo*:

Idade	I	II	III	IV	Total
8	0	2	0	0	2
9	0	0	0	0	0
10	0	2	2	0	4
11	0	1	1	0	2
12	0	0	0	2	2
Total de crianças	0	5	3	2	10

Tabela 2: Resultados do exame *A noção de ponto e do contínuo*

Das quatro questões que aqui aplicamos, o que ficou mais claro foi a dificuldade de cada sujeito em abandonar aquilo que era concreto, e conceber as figuras como infinitamente grandes ou infinitamente pequenas. A investigação realizada nos permitiu observar que a construção do contínuo, à qual se concretiza no Nível IV (próximo dos doze anos), acaba por ser uma síntese das relações topológicas elaboradas em Níveis mais elementares, além de compreender quão complexa é a noção de ilimitado, e de infinitamente grande e pequeno para a criança.

Como nosso objetivo é o de investigar como os estudantes do final do Ensino Fundamental mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias euclidianas e não euclidianas em situações-problema, e em particular nesta atividade os conceitos de ponto e de contínuo, entendemos por meio desta atividade que os sujeitos conseguem mobilizar tais noções em situações-problemas, algo que Piaget e seus colaboradores já tinham observado. No entanto a grande questão a se discutir é a de como tais estudantes conseguem mobilizar essas noções de ponto e de contínuo nos problemas.

Os resultados obtidos com esta atividade deixam claro que por volta de doze anos de idade tais conteúdos podem e devem ser trabalhados no âmbito escolar. De fato, sujeitos da sétima série do Ensino Fundamental podem ser apresentados a noções básicas de objetos geométricos utilizando propriedades do infinitamente grande e infinitamente pequeno, composição e decomposição do todo a partir de suas partes, além de instigá-los a imaginar aquilo que é abstrato, abandonando a ideia do concreto.

Para que isto possa ocorrer de uma forma mais natural possível, não acarretando obstáculos didáticos aos alunos, algumas atividades como a que acabamos de aplicar são necessárias, porém estas ainda não são suficientes. O que deve ficar como sugestão para os docentes é que tais conceitos são ainda um tanto quanto confusos para os estudantes, porém, o uso do lúdico, questões que os façam raciocinar em algo novo são de fundamental importância para a construção de novas estruturas do pensamento.

Como as relações topológicas são necessárias para a compreensão do contínuo conforme estabelecido anteriormente, e estas são construídas em torno de dois anos, recomenda-se que atividades que favoreçam esta construção sejam sistematicamente ofertadas, desde a Educação Infantil, tais como colar objetos dentro e fora de uma curva fechada; colocar objetos em lugares determinados pelo professor (dentro, fora, perto, longe, ao lado de); colocar e retirar objetos de dentro de outros, etc., aprofundando-as para que as crianças possam identificar ordem, envolvimento, vizinhança já nos anos iniciais, de tal forma que a síntese dessas relações estejam consolidadas em torno dos onze ou doze anos, para o trabalho com o contínuo.

EXAME II: AS OPERAÇÕES DE SECÇÃO[9]

Objetivo da Atividade:

- Identificar como a criança estabelece propriedades de um determinado sólido geométrico a partir de um ponto de vista afastado, isto é, estando situada em uma posição da qual considera os sólidos geométricos tais como eles parecem deste ponto de vista determinado.

Procedimentos:

Foi apresentado à criança um cilindro em massa de modelar (ou um prisma triangular) e uma faca grande e, antes de cortá-lo transversalmente, isto é, segundo um plano paralelo a base, foi solicitado que desenhasse em uma folha de sulfite branca a forma que tomaria a superfície de cada secção. Para tanto, encostamos a lâmina da faca na massa, sem cortá-la, mas indicando com precisão tanto o lugar em que se faria a secção como a direção desta.

Não imediatamente após, mas durante o interrogatório, o pesquisador formulava as mesmas questões e adotava os mesmos procedimentos para uma secção longitudinal (perpendicular à base do cilindro, prisma etc.).

Os sólidos geométricos de massa de modelar apresentados às crianças foram:

1) Um cilindro;

2) Um prisma triangular;

3) Uma esfera;

4) Um anel formado por um cordão cilíndrico de massa de modelar, mas fechando-se em si mesmo (Figura 24);

[9] Este exame foi retirado da obra **A representação do espaço** (1993), de Jean Piaget e Barbel Inhelder.

Figura 24: A representação de um anel cilíndrico de massa de modelar.

5) Uma estrela de quatro pontas com secção, seja de uma das pontas, seja da extremidade de uma ponta à extremidade da ponta oposta;

Figura 25: A representação de uma estrela de quatro pontas de massa de modelar.

6) Um helicóide formado de um cordão de massa de modelar enrolado à maneira de um caracol alongado ou de um saca-rolha;

Figura 26: A representação de um helicóide em massa de modelar

Análise dos Resultados obtidos:

Dado o caráter heterogêneo dos volumes utilizados, analisamos as reações dos sujeitos de forma separada e, em um primeiro momento realizamos as descrições pertinentes ao cilindro, ao prisma triangular, e a esfera conjuntamente, e em um segundo momento aquelas relativas a estruturas mais complexas – anel cilíndrico, estrela de quatro pontas, e helicóide. Por estarmos analisando de forma separada, cada uma destas duas etapas apresentaram Níveis distintos entre si, apesar de, eventualmente, possuírem características semelhantes.

A análise das informações obtidas com este exame - *As operações de secção* - permitiu identificar os mesmos quatro Níveis, com características peculiares, descritas por Piaget e Inhelder (1993), a saber: aquele cuja criança ignora o desenho das superfícies diferenciadas, sendo inútil interrogar sobre as secções (Nível I), passando a representações nas quais figuram uma mistura de pontos de vista entre a forma do sólido e a superfície de secção suposta, com progressivas diferenciações entre ambas (Nível II), em seguida obtendo corretamente a superfície de seccionamento para objetos mais simples (primeira etapa), no entanto não se aplica tal fato aos objetos espiralados (Nível III), e finalmente, o momento em que se encontram soluções corretas para as secções dos objetos em espiral (Nível IV).

Etapa I: Seccionamento do Cilindro, do Prisma triangular, e da Esfera.

Na etapa I, identificamos três Níveis semelhantes aos descritos por Piaget e Inhelder (1993). Como não estamos trabalhando neste momento com sólidos que apresentem um caráter espiralado (sólido com estruturas mais complexas), o Nível IV não se fez necessário.

Nível I

Neste Nível é inútil interrogar sobre as secções, visto que, os sujeitos sequer conseguem diferenciar os objetos entre si, isto é, dada uma série de objetos em massa de modelar, os sujeitos não têm ideia sobre o que seria secção de sólidos, e muito menos quais são as formas geradas por meio da intersecção da lâmina da faca com o sólido em massa de modelar. Em nosso trabalho, por utilizarmos crianças na faixa etária dos oito aos doze, nenhum dos sujeitos entrevistados apresentou características próprias deste Nível I.

Nível II

Segundo estudos descritos por Piaget e Inhelder (1993) nesta atividade encontramos dois Subníveis com características complementares, que são os Subníveis IIA e IIB. Neste trabalho foi possível identificar somente o Subnível IIB, visto que, a faixa etária dos sujeitos entrevistados era dos oito aos doze anos. Mesmo não encontrando sujeitos no Subnível IIA, procuramos relatar algumas características desses sujeitos.

No Subnível IIA, quando apresentado ao sujeito o local onde o sólido deveria ser seccionado, este não consegue imaginar a superfície gerada, por não poder diferenciar uma espécie de “ponto de vista interior” do objeto que representa a secção. Assim, neste momento, o desenho do sujeito figura-se como uma mistura de pontos de vista entre a forma do sólido como um todo e a superfície de secção suposta.

Segundo as reações das crianças deste Subnível, poderíamos sustentar que estas não compreenderam a questão colocada, e limitaram-se a representar somente a metade do objeto seccionado, e não a superfície do seccionamento. Para rebater tal objeção, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que por um lado é necessário observar que os sujeitos citados anteriormente não desenham o conjunto do objeto cortado para melhor conceber a superfície de secção, permanecendo, portanto, esta última representação indiferenciada da representação total, da qual a criança precisa abstraí-la. Por outro lado, as crianças do próximo Subnível (Subnível IIB), que descobrirão aos poucos a solução correta, partem do mesmo erro que as do Subnível IIA, embora tendo compreendido o problema, pois o resolvem em parte.

Neste exame de secção, mais especificamente neste Nível II, surgem dois fatores importantes: a representação da secção, e intuições projetivas dos sujeitos.

O primeiro desses fatores novos (a representação da secção) é a secção esboçada, enquanto euclidiana, transformará o objeto e não somente a perspectiva. Em outras palavras, o fato das crianças não conseguirem desenhar as secções dos objetos, representando ao invés disto, o objeto total ou somente uma parte deste, indica que neste momento estes sujeitos não possuem estruturas cognitivas prontas para realizar tais representações, sendo que, para toda situação que é solicitado o desenho de secções dos objetos, estes se prendem às propriedades externas dos sólidos. A segunda condição (intuição projetiva) consiste no fato de que para toda representação das secções que é realizada pelo sujeito, existe um aspecto de imaginação do sujeito, isto é, a cada desenho que é realizado, o sujeito imagina projetivamente o interior do objeto seccionado por uma faca. No entanto, no Nível em que as representações dos sujeitos não possuem diferenciação com relação às relações projetivas e euclidianas das relações topológicas, o interior dos objetos não é tão bem figurado como o seu exterior.

Resumidamente, este interior dos objetos não é ainda imaginável projetivamente, assim como a secção esboçada não é ainda representável euclidianamente: a criança desse nível permanece em um desenho caracterizado pela “mistura dos pontos de vista”, na qual juntará desordenadamente a imagem do objeto cortado visto do exterior, a do objeto inteiro visto do interior e a do exterior simultaneamente, a da secção enquanto ação da lâmina da faca, sem poder diferenciar nenhum desses pontos de vista.

Algumas características próprias dos pontos de vista dos sujeitos são marcantes neste Subnível IIA: primeiramente o ponto de vista interior constituído pela superfície do seccionamento não é melhor nem pior diferenciado dos outros pontos de vista perspectivos ou projetivos quaisquer relativos ao mesmo objeto. Por outro lado, o desenho, devendo representar essa superfície de seccionamento, constitui uma mistura de todos os pontos de vista.

Se o Subnível IIA corresponde à indiferenciação dos pontos de vista, o Subnível IIB é caracterizado pelo mesmo paralelismo dos pontos de vista, marcando um início de diferenciação dos planos, estando a superfície de secção separada do contorno dos sólidos.

Vejamos as Figuras 27 e 28, que indicam a representação de JUL(8:10) para o corte transversal e longitudinal do prisma triangular:

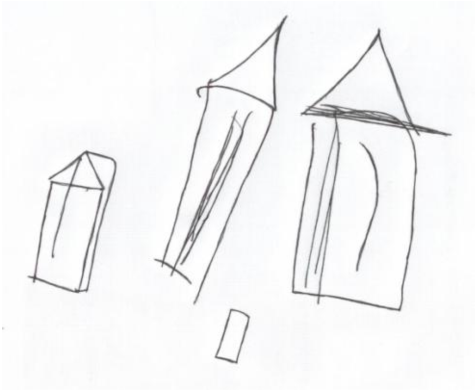

Figura 27: Representação do corte transversal do prisma triangular de JUL(8:10)

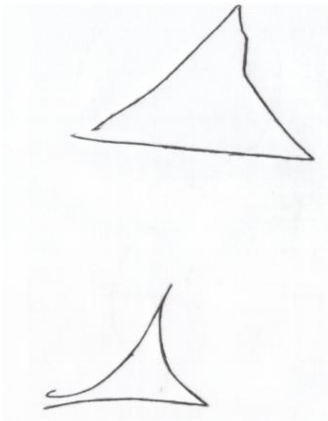

Figura 28: Representação do corte longitudinal do prisma triangular de JUL(8:10)

Para o corte longitudinal, solicitamos que a criança representasse dois cortes distintos realizados no prisma triangular. Queríamos observar se os sujeitos desta fase conseguem observar a regularidade do prisma quanto as suas dimensões, por conseguinte, os triângulos formados nas secções deveriam ter as mesmas dimensões. E de fato, foi isso que JUL(8:10) concluiu:

JUL(8:10) "Os triângulos são iguais, porque os dois triângulos estão no mesmo objeto (mostrando o prisma), que é do mesmo tamanho, do mesmo objeto e da mesma forma".

Neste Subnível IIB ocorre uma diferenciação progressiva dos pontos de vista, a partir de uma mistura semelhante ao do Subnível IIA. A maneira como ocorre esta diferenciação surge sob a forma de uma constante troca entre as intuições euclidianas e as intuições projetivas, isto é, entre as intuições de movimento e as de mudanças de pontos de vista. Segundo Piaget e Inhelder (1993), essa dependência mútua entre intuições euclidianas e projetivas é a regra, tanto no domínio das perspectivas e projeções quanto no das secções. Quando é ultrapassado o Nível das intuições topológicas elementares, nas quais ainda não são distinguidos nem movimentos, nem pontos de vista, as operações euclidianas, constituídas pelo movimento de seccionamento, levam a imaginar as primeiras perspectivas e as primeiras operações projetivas marcada pela transformação dos pontos de vista. E inversamente são essas perspectivas e transformações dos pontos de vista que permitem distinguir tais posições de seccionamento, e em seguida imaginar os movimentos de secção.

Os sujeitos desse Subnível IIB apresentam algumas etapas de desenvolvimento relativas ao raciocínio da esquematização das representações. A primeira delas, encarada como o ponto de partida, é uma representação do objeto, que comporta todos os pontos de vista misturados. Por exemplo, o cilindro é um retângulo alongado que comporta dois círculos adjacentes às extremidades para figurar a base e o cume. A segunda é que surge a representação do seccionamento como tal enquanto movimento ou intuição euclidiana do deslocamento. Note que na Figura 27 JUL(8:10) desenha várias retas verticais sobre o retângulo que fora representado por meio da secção transversal da faca com o prisma em massa de modelar.

A terceira consiste no momento em que marca a passagem da intuição euclidiana do movimento de seccionamento à representação projetiva de superfície de secção. No entanto, antes de atingir a representação desta superfície, é necessário imaginar seu contorno, isto é, a linha ao longo da qual a faca agirá sobre o volume. Por fim, de posse dessa representação meio euclidiana e meio projetiva o sujeito imagina projetivamente a superfície de seccionamento.

Nível III

Neste Nível III, finalmente a representação projetiva do plano de secção é obtida de imediato, isso no que se refere ao cilindro, à esfera e ao prisma. Observe as Figuras 29 e 30 a representação de BEA(12:11) para os cortes do prisma triangular:

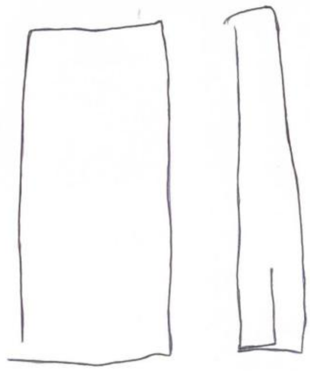

Figura 29: Representação do corte transversal do prisma triangular de BEA(12:11)

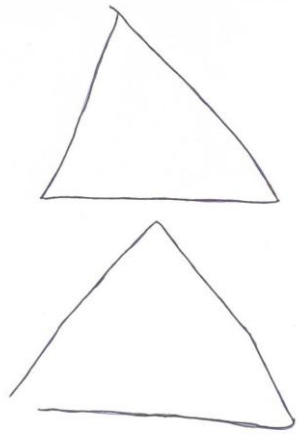

Figura 30: Representação do corte longitudinal do prisma triangular de BEA(12:11)

Para o corte transversal, a criança também o representa corretamente, de acordo com a Figura 29. Vale ressaltar que quando questionada sobre um novo corte transversal no prisma, este estando paralelo a uma das suas laterais, e próximo de um dos seus vértices, ela afirma obter outro retângulo com medidas distintas, e em seguida representa um retângulo com medidas das bases distintas, mas alturas congruentes, conforme a Figura 29.

BEA(12:11)"Vai formar outro retângulo, só que mais fininho, porque aqui tem medida diferente daqui" (se referindo as posições na parte superior do prisma triangular, onde foram realizados os cortes).

Um aspecto muito interessante deste Nível III é que quando o sujeito imagina a superfície de secção (plano de secção) antes de toda secção efetiva, isto é, antes de todo movimento, é preciso que tenha intuição do sólido sob uma forma projetiva, portanto constituído por um feixe de retas, e que seccione em pensamento esse feixe por um plano igualmente imaginado de modo projetivo. Isto quer dizer basicamente que a representação das secções euclidianas supõe uma secção projetiva.

Etapa II: Estruturas mais complexas (Toro, estrela, e helicóide)

O inconveniente dos volumes tomados anteriormente prende-se ao fato de que, a forma da superfície de seccionamento é muito semelhante à do objeto inteiro ou de alguns de seus lados. Assim nos propusemos a examinar as secções de diversas formas mais complexas, tais como, um anel (toro de genus um), uma estrela de quatro pontas, e um helicóide.

Nível I

Da mesma maneira que na primeira etapa, não foram encontrados sujeitos neste Nível I, devido a faixa etária adotada para este trabalho, que foi dos oito aos doze anos.

Nível II

De forma análoga à primeira etapa do exame, identificamos aqui, os Subníveis descritos por Piaget e Inhelder (1993), isto é, o Subnível IIA e o Subnível IIB.

No Subnível IIA, o sujeito permanece incapaz de abstrair a superfície de secção da estrutura de conjunto do objeto. Nas Figuras 31 e 32 temos as representações de JUL(8:10) e de GAB(11:10), respectivamente, que foram realizadas por meio de cortes transversais no toro e na estrela de quatro pontas respectivamente.

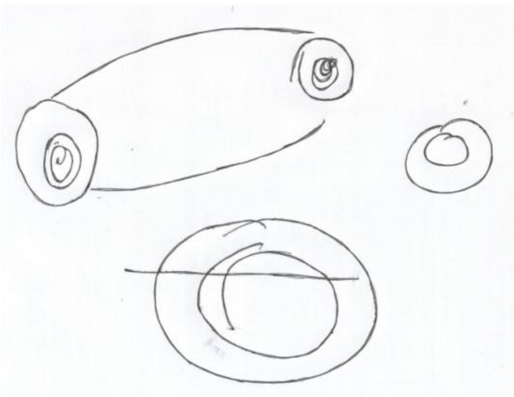

Figura 31: Representação do corte transversal e longitudinal no toro de JUL(8:10)

Figura 32: Representação do corte transversal e longitudinal na estrela de quatro pontas de GAB(11:10)

Um aspecto muito interessante é o de que JUL(8:10) está mais próxima de compreender qual a superfície formada por meio dos cortes transversais, do que GAB(11:10) que realiza para o corte transversal de uma das pontas da estrela, o triângulo da Figura 32. No entanto, quando solicitado para representar a superfície gerada pelo corte transversal na estrela (posição central), é realizada a outra representação contida na mesma figura.

No Nível IIB, de forma semelhante à análise anterior, os sujeitos começam a diferenciação entre a superfície de secção, e os outros planos que caracterizam a forma do objeto. As Figuras 33 e 34 indicam as representações de ING(10:9) para os cortes no toro e na estrela de quatro pontas:

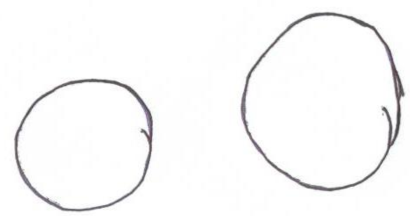

Figura 33: Representação do corte transversal e longitudinal no toro de ING(10:9)

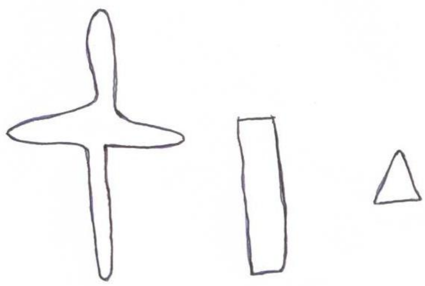

Figura 34: Representação do corte longitudinal e transversal na estrela de quatro pontas de ING(10:9)

Observamos um grande avanço neste Subnível IIB. Mesmo que as estruturas cognitivas não estejam prontas para as secções (basta ver as representações realizadas nas Figuras 33 e 34) é notável o abandono de reproduções de secções transversais que tenham uma parte, ou metade do sólido geométrico.

Nível III

Neste Nível III as representações das secções do tóro e da estrela de quatro pontas apresentam um grande avanço. Vejamos algumas representações de crianças que se encontram neste Nível.

A primeira delas é a representação de MAR(8:6) correspondente ao número de círculos formados quando seccionado o anel de forma transversal. Na Figura 35, a criança além de representar corretamente a superfície obtida por meio da secção longitudinal do tóro, desenha dois círculos que representam as secções obtidas cortando o mesmo objeto transversalmente.

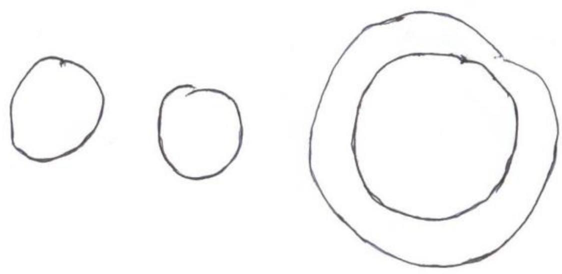

Figura 35: A representação de MAR(8:6)

Concluímos que neste Nível III, a representação dos cortes realizados no anel são realizados de forma correta, isto é, tanto para o corte transversal quanto para o longitudinal, a criança realiza o desenho das superfícies com sucesso.

MAR(8:6) "Se você corta nessa posição (corte transversal), vamos ter duas bolas. Se eu cortar dessa forma (corte longitudinal), vou ter a mesma forma".

Outro fator bastante interessante é com relação à superfície obtida quando seccionada a estrela de quatro pontas de forma transversal. Isto é ilustrado pela representação de RIC(11:8) para a estrela de quatro pontas, na Figura 36.

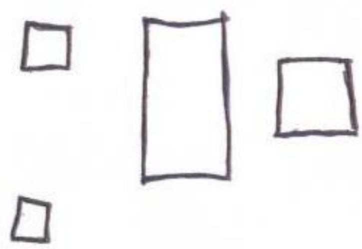

Figura 36: A representação dos cortes na estrela de RIC(11:8)

A principal diferença para o Nível anterior é que nesta fase, todas as representações realizadas dos cortes transversais na estrela são corretas, isto é, cortes transversais que antes geravam triângulos, agora geram quadriláteros, conforme exemplifica a representação de RIC(11:8) na Figura 36. Nesta representação existem quatro desenhos indicando, cada um deles, superfícies geradas por cortes transversais na estrela: o retângulo maior se refere ao corte no centro na estrela; o quadrado desenhado no lado direito se refere a um corte realizado em uma das pontas da estrela; e quando cortamos duas pontas simultaneamente, a superfície representada são os dois quadrados menores no lado direito do retângulo.

Em contrapartida, a representação das secções do helicóide, que implicam um princípio de espiral, ainda não são bem sucedidas. A Figura 37 mostra a representação de RIC(11:8) para o corte transversal do helicóide.

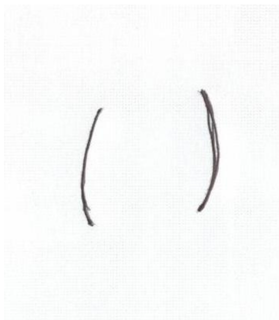

Figura 37: Representação da superfície gerada por meio do corte transversal no helicóide de RIC(11:8)

Durante a atividade de secção do helicóide, buscamos fazer o maior número de questionamentos para os sujeitos, afim de que estes procurassem raciocinar sobre as superfícies geradas. No entanto, entendemos que as crianças desse Nível não possuem estruturas lógicas a ponto de compreender quais superfícies obteríamos com as secções do helicóide em varias posições, conforme afirmações dos sujeitos durante a entrevista realizada. Um exemplo é o de RIC(11:8) que afirmava não compreender o que formaria com este corte:

RIC(11:8) "Eu não entendo, é muito complicado imaginar o que vai acontecer".

Nível IV

Finalmente por volta dos doze e treze anos de idade, é que foram encontradas soluções imediatamente corretas de cortes realizadas nos três sólidos em massa de modelar.

Até o momento a grande dificuldade era com relação às superfícies geradas por meio dos cortes no helicóide. Neste Nível IV essa dificuldade é superada, e tais superfícies são corretamente representadas, conforme exemplificam as de BEA(12:11) para o helicóide, nas Figuras 38 e 39.

Figura 38: Representação da ideia de BEA(12:11)

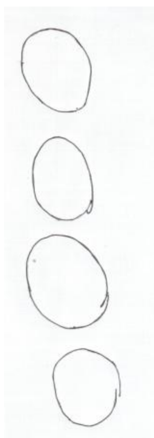

Figura 39: Representação da superfície gerada por meio do corte transversal no helicóide de BEA(12:11)

Para chegar a representação realizada na Figura 39, BEA(12:11) faz uma representação do helicóide sendo cortado, e quais as possíveis figuras formadas. Em outra folha de sulfite, tomando por base seu desenho anterior, ela desenhou quatro círculos posicionados um abaixo do outro.

Esses fatos interessantes fornecem todas as características intermediárias entre a mistura de pontos de vista, como indiferenciação em meio à superfície de secção e à forma total do objeto (Subnível IIA que prolonga o Nível I, inacessível por falta de desenhos), a diferenciação progressiva da superfície de secção com a utilização de elementos extraídos dos outros planos e da forma geral do objeto (Subnível IIB para as formas simples, e todo o Nível III para as formas espirais) e a representação exata da superfície de seccionamento (Nível III para as formas simples e IV para as espirais).

Considerações sobre a atividade

As informações obtidas com a aplicação deste exame que para a primeira etapa do exame (prisma, esfera, e cilindro): das dez crianças entrevistadas, sete delas conseguem representar corretamente as superfícies geradas por meio das secções da faca com os sólidos em massa de modelar (Nível III). Destas crianças, uma possui oito anos de idade, três crianças possuem dez anos, uma possui onze anos e outras duas possuem doze anos de idade. Podemos afirmar também que três crianças encontram-se no Nível II, isto é, as representações possuem uma mistura de pontos de vista entre o sólido e a superfície de secção suposta, com algumas diferenciações entre ambas. Em nossa pesquisa as crianças deste Nível II possuem respectivamente oito, dez e onze anos de idade. Como já citado anteriormente não encontramos sujeitos que se enquadrassem nas características do Nível I, devido à faixa etária adotada para nosso trabalho.

Tabela 3 resumindo os resultados encontrados no exame *As operações de secção* (Primeira etapa):

Idade	I	IIA	IIB	III	Total
8	0	0	1	1	2
9	0	0	0	0	0
10	0	0	1	3	4
11	0	0	1	1	2
12	0	0	0	2	2
Total de crianças	0	0	3	7	10

Tabela 3: Resultados do exame *A secção dos sólidos mais simples*

Para a segunda etapa (toro, estrela de quatro pontas, e helicóide) das dez crianças entrevistadas, duas delas conseguem representar de forma correta todas as superfícies geradas no seccionamento dos sólidos, inclusive para os de natureza espiralada (Nível IV). Nesta pesquisa, ambas as crianças que se encontram nessa fase possuem doze anos de idade. Podemos afirmar também que duas crianças encontram-se no Nível III, isto é, as representações das secções são realizadas corretamente, faltando somente aquelas que possuem um caráter espiral. Os sujeitos desta fase apresentam oito e onze anos de idade. O Nível II é aquele que apresenta a maior quantidade de crianças para esta atividade, possuindo no total seis sujeitos, separados em dois casos no Subnível IIB e quatro no Subnível IIA. Destas seis crianças, uma possui oito anos, quatro possuem dez anos, e uma tem onze anos de idade.

Tabela 4 resumindo os resultados encontrados no exame *As operações de secção* (Segunda etapa):

Idade	I	IIA	IIB	III	IV	Total
8	0	1	0	1	0	2
9	0	0	0	0	0	0
10	0	2	2	0	0	4
11	0	1	0	1	0	2
12	0	0	0	0	2	2
Total de crianças	0	4	2	2	2	10

Tabela 4: Resultados do exame *A secção dos sólidos mais complexos*

As informações obtidas neste exame mostram que dentre as reações observadas no curso do Nível II (e Nível III para as formas espirais), uma característica muito interessante se sobressai: a dificuldade dos sujeitos em representar a superfície de secção prende-se, a uma indiferenciação muito resistente entre a geometria dos pontos de vista (representação projetiva) e a geometria dos objetos (deslocamentos efetuados no espaço euclidiano).

É por isso que, quando pedimos às crianças para prever a forma de uma superfície de secção, o que os obriga simultaneamente a imaginar a operação euclidiana do corte (deslocamento inerente à geometria dos objetos) e imaginar o sólido projetivamente para dissociar o “ponto de vista interior” do plano de secção (operação dependente da geometria dos pontos de vista), não é surpreendente que aquelas que se encontram no Subnível IIA deixem todas as relações indiferenciadas: seus desenhos figuram, ao mesmo tempo, a forma do objeto com seus diversos planos misturados, o desenho da linha de secção ou do ato de cortar.

A descoberta progressiva da superfície de secção testemunha uma dissociação gradual entre as geometrias dos pontos de vista e a dos objetos, além de uma interação cada vez mais estreita entre as operações de projeção e de secção perspectiva. É assim que para prever a forma que adotará a superfície de secção do cilindro, de um helicóide, de uma esfera, é necessário primeiro imaginar exatamente o movimento da faca e a linha exterior que ela seguirá em seu deslocamento. Mas para ser capaz dessa antecipação, é preciso poder imaginar esse volume projetivamente, quer dizer, sob os diferentes ângulos perspectivos possíveis.

No que se refere ao nosso objetivo de verificar como os estudantes do final do Ensino Fundamental mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias euclidianas e não euclidianas em situações-problema, e em particular neste exame - *As operações de secção* - alguns aspectos merecem ser destacados. Por meio da atividade aplicada, corroboramos os estudos realizados por Piaget e seus colaboradores, que enfatizavam que por volta dos doze anos de idade as crianças conseguem mobilizar todas as operações cognitivas relativas à secção de sólidos geométricos.

Tudo isto que acabamos de relatar no último parágrafo, Piaget e Inhelder (1993) constataram em seus estudos, que foram realizados durante muitos anos. No entanto, nossa principal meta é um apoio pedagógico acerca de como estes estudantes mobilizam tais ideias básicas em situações-problemas. Entendemos que atividades que tenham por finalidade trabalhar com questões de secção de sólidos são mais complexas do que imaginamos. Por trás de uma "simples" representação de uma superfície, existem inúmeros fatores que tem de ser cuidadosamente trabalhados com os estudantes, tais como, a interiorização de uma possível superfície gerada por meio de projeções em perspectivas de vários planos, para assim realizar a representação daquilo que se tem em mente.

Para que os alunos possam construir essas noções básicas devemos fazê-los pensar por si, isto é, temos de ser professores que estimulem seus raciocínios por meio de atividades que possam mostrar o conteúdo em questão. Muitas aulas de cunho puramente expositivas são ministradas, deixando de lado a ideia de que o aluno pode trabalhar seu espírito investigativo. Inicialmente atividades que os façam investigar sobre intersecções de planos e superfícies podem ser apresentadas antes de falarmos em o que é intersecção; atividades como a que realizamos aqui, e outras que façam os alunos pensarem sobre a ideia de cortes de objetos devem ser frequentes, e as mais elementares para o estudo deste tópico.

Sabemos que com doze e treze anos de idade as crianças já possuem estruturas que possibilitam realizar todas as atividades concernentes a secção de sólidos, portanto, anteriormente a esta idade podem ser apresentadas atividades investigativas de secções de sólidos, para posteriormente por meio de softwares, e materiais concretos expormos tais conteúdos de uma forma mais aprofundada.

EXAME III: DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E TRIÂNGULOS (GEOMETRIA HIPERBÓLICA)

Objetivos da atividade:

- Identificar se os alunos conseguem diferenciar distâncias em uma superfície plana de uma não plana;

- Investigar se e como os alunos compreendem que a área de um triângulo plano é diferente da área de um triângulo hiperbólico.

Procedimentos:

É apresentado para a criança um objeto representando uma pseudo-esfera como ilustra a Figura 40:

Figura 40: Objeto representando uma pseudo-esfera

Em uma das trombetas existe uma fita amarela, que representa a distância entre dois pontos quaisquer nesta superfície. Em seguida é colocada embaixo deste objeto uma folha sulfite branca, para assim questionarmos: "*Se tomarmos estes dois pontos, que usamos para medir o comprimento da fita amarela, e fizermos dois furos na trombeta, perpendiculares a superfície da folha sulfite, projetando-os nesta, e depois medirmos a distância entre eles (na superfície plana), o comprimento da fita amarela que vamos utilizar para ligá-los na folha sulfite é a mesma, ou diferente da quantidade de fita utilizada na trombeta?*"

Na outra parte da trombeta existe uma representação de um triângulo, conforme a Figura 41:

Figura 41: A representação de um triângulo na superfície da pseudo-esfera

Primeiramente solicitamos à criança que represente em uma folha sulfite, exatamente o triângulo que ela observa. Em seguida é questionado: “*Quais as diferenças entre o triângulo que você acabou de representar, com um triângulo plano?” “Você poderia dizer qual deles possui região interna maior?” “Por quê?*” “*E o que acontece com os ângulos internos deste triângulo*?”

Análise dos Resultados Obtidos

Analisando as informações obtidas após a aplicação deste exame, pudemos identificar três Níveis cognitivos[10], mediante respostas apresentadas pelos sujeitos. Cada um destes Níveis apresenta características bem definidas com base no questionamento realizado durante as entrevistas.

O primeiro Nível (Nível I) é caracterizado pela incapacidade dos sujeitos em estimar comprimentos distintos da fita amarela para as duas superfícies. Além disso, para o problema da representação do triângulo, estas desenham triângulos planos, não levando em consideração a superfície não plana da trombeta, e em consequência, admitem que a área dos triângulos são iguais.

No Nível II, o sujeito é capaz de estimar que os comprimentos da fita amarela são distintos para as duas superfícies trabalhadas nesta atividade. Em relação ao

[10] Como este exame foi elaborado especificamente para nossa pesquisa, os três Níveis cognitivos apresentados são uma construção teórica dos pesquisadores desta dissertação.

problema dos triângulos, surgem as primeiras diferenciações entre triângulo plano e não plano, porém com noções muito vagas para distinções de áreas e soma dos ângulos internos.

Finalmente no Nível III, além das crianças conseguirem estimar as distâncias corretamente (diferenciando o comprimento da fita amarela) percebem o caráter tri-dimensional da trombeta e, desta forma, conseguem distinguir os triângulos quanto a sua área e seus ângulos internos.

Nível I: Indiferenciação dos objetos contidos nas duas superfícies.

Os sujeitos que se encontram neste Nível I (mais elementar), são incapazes de afirmar que o comprimento de fita amarela utilizada para ligar os dois pontos na trombeta é distinto do utilizado para ligar os pontos na folha sulfite (superfície plana). As crianças desta fase, quando questionadas se o fato das superfícies apresentarem características distintas (folha sulfite e trombeta) acarretaria em uma mudança na quantidade de fita utilizada afirmaram que a superfície não influenciava na distância, pois o que se devia levar em consideração era o ponto de partida e o ponto de chegada da fita amarela, e como em ambas as superfícies estes pontos tinham "a mesma posição", o comprimento da fita não seria alterado.

JUL(8:10) "Mesmo aqui sendo subidinha (se referindo a superfície da trombeta), quando ela vem para a folha sulfite a fita vai ficar deitada (superfície plana), mas a quantidade de fita não muda".

CAM(10:4) "A folha sulfite é uma superfície plana, e este aqui (trombeta) é meio curvado. A distância dos pontos vão ser a mesma, então a quantidade também vai ser a mesma".

Para essa atividade, a criança ao invés de tomar como primazia a questão de estarmos trabalhando em superfícies distintas, observa como fator principal os dois pontos dados. Para o sujeito desta fase, mesmo em superfícies distintas, o que é fundamental é a posição dos pontos, isto é, desde que tomemos dois pontos em uma determinada superfície, e possamos projetá-los em outra superfície com características distintas, a distância entre eles continuará a mesma, pois o ponto inicial e o final não sofreram alterações. Isto pode ser explicado pelo fato de que, de acordo com Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), as crianças tendem muitas vezes calcular o comprimento de um objeto pelo intervalo entre seus limites e, ignorando curvas ou divergências, pensam nele só em termos de suas duas extremidades.

Para a atividade da representação do triângulo, as crianças os desenham com todos os seus lados retos, não levando em consideração a superfície não plana da trombeta, em consequência disso, para os sujeitos desse Nível, as áreas dos triângulos são iguais, conforme ilustra a representação de JUL(8:10), na Figura 42, que elucida um sujeito neste fase.

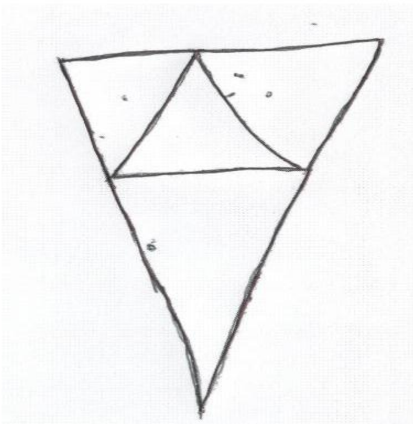

Figura 42: Representação do triângulo da trombeta de JUL(8:10)

A representação de JUL(8:10) mostra uma planificação incorreta realizada de uma parte da trombeta. Note que o triângulo que estava representado na superfície deste objeto apresentou características idênticas a um triângulo plano, não sendo considerado que seus lados sofreriam modificações. As crianças negligenciam o caráter tri-dimensional da trombeta, realizando uma projeção do triângulo para a superfície plana. Quando questionadas o porquê do triângulo representado na folha sulfite ser igual ao que estava na trombeta, apresentando mesma quantidade de "região interna", os sujeitos se preocupavam somente com o tamanho do triângulo e a posição de seus vértices, conforme exemplificam algumas respostas abaixo descritas.

CAM(10:4) "Por que quando eu furo o triângulo nestes pontos (indicando os três vértices do triângulo na trombeta), eles vão ficar no mesmo lugar aqui na folha sulfite. Então eles vão ter o mesmo tamanho".

JUL(8:10) "Se eu fizer um triângulo aqui na folha do mesmo tamanho que este ai no cone, eles vão ser iguais, com os lados retinhos e o mesmo espaço dentro".

Concluímos que para os sujeitos desse Nível I, independentemente da superfície trabalhada, o comprimento da fita utilizada para ligar os dois pontos é idêntico, isto é, tanto na superfície da trombeta quanto na superfície plana, desde que os pontos inicial e final não sofram alterações quanto a sua posição, o comprimento da fita será o mesmo. Isto se aplica também para a representação do triângulo na folha sulfite, em que o caráter tridimensional da trombeta é descartado, prevalecendo unicamente às dimensões do triângulo.

Nível II: Percepção das superfícies distintas – Compreensão da ideia de distância.

Neste Nível II encontramos dois Subníveis com características complementares, que são os Subníveis IIA e IIB. Neste trabalho foi possível identificar cinco sujeitos no Subnível IIA, e três no Subnível IIB.

No Subnível IIA, encontramos respostas análogas ao Nível I para a questão da distância entre dois pontos na folha sulfite e na trombeta, por conseguinte, ainda não conseguem levar em consideração o caráter distinto das superfícies, ficando presas às extremidades adotadas como pontos de partida e de chegada para a fita amarela. No entanto, neste Subnível IIA o grande avanço que ocorre é com relação à representação do triângulo na folha sulfite. As representações dos triângulos realizadas pelos sujeitos desta fase apresentam lados encurvados, ou seja, o que antes os triângulos representados tinham seus lados todos retos, agora os sujeitos levam em consideração, mesmo que em um nível muito elementar, a superfície da trombeta.

As crianças deste Subnível IIA, quando solicitadas para representar na folha sulfite o triângulo que viam na superfície da trombeta, primeiramente hesitavam em desenhar um triângulo com os lados curvos e acabavam por realizar um triângulo plano. Quando questionadas se realmente era este triângulo que viam, estas imediatamente desenhavam outro triângulo, agora com os lados não retos, conforme ilustram as representações de BEA(12:11) nas figuras 43 e 44, e de RIC(11:8) na figura 45 e 46:

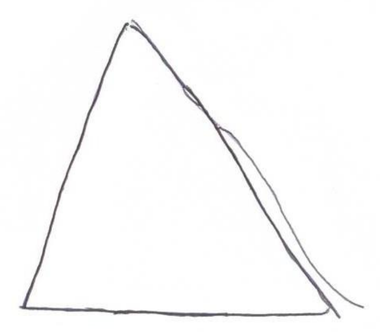

Figura 43: Representação inicial do triângulo de BEA(12:11)

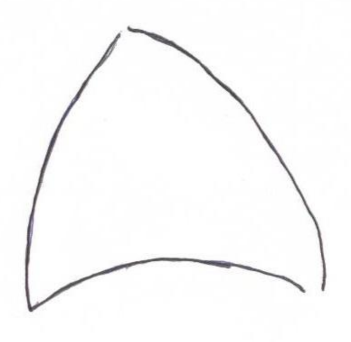

Figura 44: Segunda representação do triângulo de BEA(12:11)

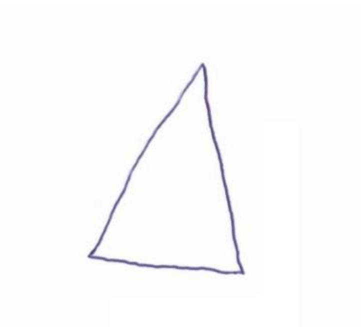

Figura 45: Representação inicial do triângulo de RIC(11:8)

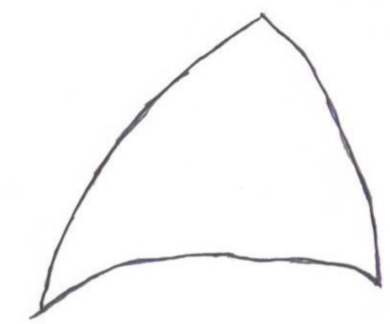

Figura 46: Segunda representação do triângulo de RIC(11:8)

Diferentemente do Nível anterior, as crianças deste Subnível IIA conseguem visualizar algumas diferenças entre os triângulos. Todos os sujeitos dessa fase citam que os lados dos triângulos são diferentes, porém, em apenas dois casos, foi citado que a área do triângulo da trombeta era maior do que a área do triângulo plano. Abaixo exemplificamos algumas respostas de sujeitos neste Subnível IIA:

BEA(12:11) "Eles são dois triângulos. É que este triângulo tem os lados tortos e este outro são todos retos. Este triângulo (indicando a representação do triângulo da trombeta) é de acordo com a forma dele, e este aqui (representação do triângulo plano) é de acordo com o plano. Se a gente tirar essa fita amarela do cone e colar aqui na folha sulfite, o triângulo que vou ter é esse triângulo do plano. A área, e a soma dos ângulos internos dos triângulos são iguais, pois eles são o mesmo triângulo só o que muda é a forma que eu vejo. Tanto que se eu retirar essa fita amarela e colar aqui na folha sulfite ele vai ser esse triângulo retinho".

ING(10:9) "Estes triângulos são diferentes, pois um é mais encurvado, mais gordinho e o outro é reto. Este triângulo aqui tem área maior (indicando a representação do triângulo da trombeta), porque ele é mais gordinho, os lados deles são mais cheios, então sua área deve ser maior".

MAR(8:6) "Eles são diferentes. Um é reto e o outro é encurvado. Eu acho que esse triângulo encurvado tem mais espaço dentro dele, porque ele é encurvado".

No que se refere a soma dos ângulos internos dos triângulos, encontramos respostas ainda muito confusas. Entendemos que as crianças deste Nível não possuem bem definida em suas estruturas qual dos triângulos possui soma dos ângulos internos maior. Alguns ensaios de respostas para tal questionamento aparecem, mas ainda insuficientes para dizer que possuem domínio sobre tal aspecto.

MAR(8:6) "Este triângulo retinho deve ser maior" (responde tal questão, mas não consegue justificá-la).

ING(10:9) "Este triângulo encurvado tem soma dos ângulos maior, porque como os lados são encurvados e mais gordinhos, os ângulos vão ser maiores que esses que tem lado todos retinhos".

Diferentemente do Subnível IIA, as crianças do Subnível IIB conseguem responder corretamente a questão do comprimento da fita amarela para ligar os pontos, afirmando que na superfície da trombeta, a quantidade de fita é maior do que na folha sulfite. A seguir temos a ideia de FER(12:6) e GAB(11:10) sobre o porque de se utilizar mais fita amarela na trombeta do que na folha sulfite:

FER(12:6) "A quantidade de fita que vou usar aqui na folha vai ser menor do que nesse objeto, porque aqui (indicando com a mão a superfície da trombeta) está meio levantado, e é meio curvo, e aqui é plano (folha de sulfite). Se eu retirar essa fita amarela desse objeto preto, e colocar ela na folha sulfite, o seu tamanho vai ser maior do que o que vou utilizar para unir os pontos aqui" (indicando os pontos projetados).

GAB(11:10) "Tenho um pouco de dúvida, mas eu acho que aqui (trombeta) vai gastar mais fita do que na folha sulfite, porque ela é meio que subida, e a folha é reta, então eu acho que vai gastar mais nesse objeto preto".

Mesmo ocorrendo este grande avanço com relação a Níveis anteriores, a atividade relacionada à representação do triângulo ainda permanece não sendo realizada de forma correta. Respostas próximas à do Subnível IIA são encontradas neste Subnível IIB, sendo que, os sujeitos ainda não conseguem diferenciar completamente os triângulos, quanto a sua área e a soma de seus ângulos internos. O máximo que conseguem é diferenciar quanto a sua área, mas não com relação aos ângulos internos. Na Figura 47 indicamos a representação dos triângulos de GAB(11:10), e as respostas que exemplificam um sujeito deste Subnível IIB:

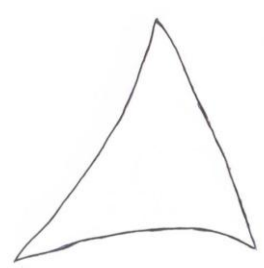

Figura 47: Representação do triângulo da trombeta de GAB(11:10)

GAB(11:10) "Os lados deste triângulo são tortos, diferente de um triângulo igual a este aqui (desenhou um triângulo plano) que tem todos os lados retinhos. Quanto aos ângulos internos, eu acho que eles tem a mesma medida, mesmo este sendo torto e o outro sendo retinho, porém a área deste torto é maior, porque por ele ser torto, ele fica maior que o que está reto, então sua área vai ser maior".

Nível III: Total diferenciação dos objetos presentes nas superfícies distintas.

No Nível III, além das crianças conseguirem estimar o comprimento da fita amarela corretamente (assim como no Subnível IIB), estas percebem o caráter tri-dimensional da trombeta e, desta forma, conseguem diferenciar os triângulos quanto a sua área e seus ângulos internos. O que diferencia este Nível III dos anteriores é o sucesso quanto à soma dos ângulos internos dos triângulos, o que não aconteceu em Subníveis anteriores. Em nossa pesquisa não encontramos sujeitos que apresentassem tais características.

Acreditamos que somente com idades superiores a treze anos é que os sujeitos serão capazes de realizar tal atividade corretamente, pois conforme a análise da Atividade IV (Ângulos e triângulos - geometria esférica), é por volta dos doze anos de idade que a criança consegue levar em consideração o caráter distinto das superfícies trabalhadas, e como neste exame, além de trabalharmos com superfícies diferentes, temos de ressaltar que analisamos o conceito de distâncias em superfícies planas e não planas. Entendemos que é natural que tal conceito se consolide somente após a criança construir estruturas capazes de distinguir tais superfícies.

Considerações sobre a Atividade

As informações obtidas com a aplicação deste exame nos possibilitaram observar que: das dez crianças entrevistadas, duas delas são incapazes de estimar distâncias e de diferenciar triângulos em superfícies distintas e podem ser enquadradas no nível I. As duas crianças que se encontram nesse Nível I, na presente investigação, possuem oito e dez anos de idade. Podemos afirmar que oito crianças encontram-se no Nível II, sendo que cinco delas estão no Subnível IIA, e três delas no Subnível IIB. As crianças do Subnível IIA possuem (1) oito, (2) dez, (1) onze e (1) doze anos de idade; as do Subnível IIB possuem dez, onze e doze anos. Nesta pesquisa não encontramos sujeitos com características do Nível III.

Tabela 5 resumindo os resultados encontrados no exame *Distâncias, ângulos e triângulos (geometria hiperbólica)*:

Idade	I	IIA	IIB	III	Total
8	1	1	0	0	2
9	0	0	0	0	0
10	1	2	1	0	4
11	0	1	1	0	2
12	0	1	1	0	2
Total de crianças	2	5	3	0	10

Tabela 5: Resultados do exame *Distâncias, ângulos e triângulos (geometria hiperbólica)*

Os dados obtidos com a aplicação deste exame indicam que as crianças com idade inferior a treze anos não mobilizam a ideia básica de distância quando as superfícies possuem dimensões distintas (bi e tri-dimensional). Por conseguinte, mesmo conseguindo estimar distâncias entre dois ou mais objetos em uma superfície plana por volta dos seis anos de idade, quando estamos comparando distâncias entre dois objetos em superfícies distintas (folha sulfite e trombeta) essa atividade se torna demasiadamente complexa, sendo possível, provavelmente somente por volta dos onze anos de idade.

Outra observação interessante se refere à representação dos triângulos. Não encontramos sujeitos em nossa pesquisa que conseguiu distinguir os triângulos e suas propriedades (área e soma de ângulos internos) em sua totalidade. Mesmo de posse da trombeta em mãos, as propriedades questionadas não foram respondidas com sucesso, sendo que a característica que inicialmente é percebida pelas crianças é relativa aos lados do triângulo, que está representado na trombeta (o que ocorre por volta dos dez anos de idade). Mesmo com doze anos, o máximo que os sujeitos conseguem diferenciar é que estes triângulos (presentes na folha sulfite e na trombeta) possuem áreas distintas, porém, não conseguem visualizar que as medidas dos ângulos internos são diferentes.

Esses resultados indicam que essas noções básicas para a apresentação da geometria hiperbólica, podem e devem ser apresentadas em sala de aula, mesmo que as crianças não percebam que a soma dos ângulos internos não é 180º. Uma sugestão para que essas ideias básicas possam melhor ser apresentadas seria com a utilização de materiais que representem essas superfícies, fazendo com que as crianças melhor assimilem o caráter distinto das superfícies (plana e hiperbólica). Materiais como, por exemplo, como os que utilizamos: uma trombeta para simbolizar uma superfície hiperbólica e uma folha sulfite, para o plano.

EXAME IV: ÂNGULOS E TRIÂNGULOS (GEOMETRIA ESFÉRICA)

Objetivo da atividade:

- Investigar se crianças percebem que em uma superfície esférica é possível o retorno ao ponto de partida após caminhar x metros em direção ao sul; x metros na direção leste e mais x metros na direção norte, enquanto que na superfície plana isto plana não é possível.

Procedimentos:

É apresentada para a criança a seguinte estória:

"*Um urso saiu de sua casa e caminhou cem quilômetros ao sul. Depois virou a leste e caminhou mais cem quilômetros. Então virou novamente e caminhou por mais cem quilômetros ao norte*".

Em seguida são entregues folhas de sulfite e uma esfera de isopor, juntamente com uma caneta esferográfica. Solicita-se a criança que esboce na folha de sulfite e na esfera de isopor o percurso do urso. Indaga-se então: "*Seria possível em alguma das superfícies o urso voltar à sua casa?" "Por quê?"*

Análise dos Resultados obtidos

A análise das informações obtidas com este exame permitiu identificar três Níveis, com características bastante peculiares.

O primeiro Nível (faixa etária dos oito anos) é caracterizado pela incapacidade dos sujeitos em realizar corretamente o trajeto do urso, tanto na folha sulfite, quanto na esfera de isopor. Isto pode ser explicado pelo fato de que, de acordo com Piaget e Inhelder (1993), crianças desta idade ainda não construíram as estruturas cognitivas relativas aos sistemas de coordenadas nos sujeitos**.** No Nível II (dos nove aos onze anos aproximadamente), o processo de construção do sistema de coordenadas já está bastante adiantado, permitindo ao sujeito relacionar ordenadamente as três dimensões ao mesmo tempo: esquerda e direita; acima e abaixo; frente e atrás. Assim, a trajetória reproduzida na folha sulfite é realizada de forma correta (segundo suas direções), porém na superfície esférica os sujeitos não têm êxito, realizando trajetos que são semelhantes ao da folha sulfite. Finalmente no Nível III (acima de onze anos) as crianças percebem empiricamente o caráter tri-dimensional da esfera e, desta forma, conseguem reproduzir a trajetória correta do urso na superfície esférica.

A seguir, segue uma detalhada descrição de cada Nível e a classificação das crianças mediante as respostas apresentadas para a questão do trajeto do urso.

Nível I: Ausência das noções de coordenadas

Por meio da análise desta atividade, pudemos observar que as crianças que situamos neste Nível (duas de oito anos e uma de onze) ainda não construíram estruturas relativas aos sistemas de coordenadas no plano euclidiano, isto é, quando solicitadas para desenhar o trajeto do urso em uma folha sulfite, elas reproduzem caminhos não respeitando as direções (coordenadas geográficas) que são estabelecidas na estória, conforme ilustra a representação de JUL(8:10) (Figura 48), para quem as trajetórias do urso rumo ao sul e ao norte possuem o mesmo sentido:

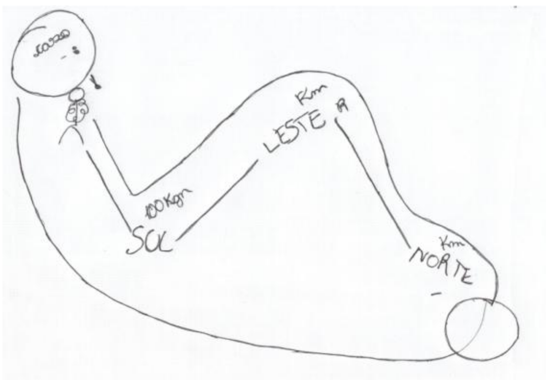

Figura 48: Representação do trajeto do urso de JUL(8:10)

Algumas crianças afirmaram que na superfície plana (folha sulfite) não era possível o urso retornar ao ponto de partida. No entanto, outras diziam ser possível, desde que o urso caminhasse uma maior quantidade de quilômetros, conforme exemplificam as respostas de alguns sujeitos à questão do pesquisador sobre a possibilidade do urso retornar à sua casa após o trajeto efetuado:

JUL(8:10) “*A única forma do urso retornar a sua casa seria somente se ele tivesse uma casa no final do caminho dele, duas casas*”.

GAB(11:10) “*Acho que não teria como o urso retornar, a não ser que ele continuasse a caminhar*”.

MAR(8:6) “*Acho que não volta, porque é muito longe ele caminhar trezentos quilômetros na ida e trezentos quilômetros na volta*”.

Ao falarmos em sistema de coordenadas, segundo Piaget e Inhelder:

> Um sistema de coordenadas é produto de uma multiplicação de relações de ordem, com intervenção das retas, das distâncias, das paralelas e dos ângulos, segundo n dimensões (PIAGET e INHELDER, 1993, p. 436).

Para que uma criança construa este sistema de coordenadas é necessário além das relações topológicas elementares, o conjunto das noções euclidianas aplicadas ao relacionamento de todos os objetos entre si, quaisquer que sejam sua proximidade ou distanciamento: é, portanto, a estruturação de conjunto do espaço euclidiano que constitui um sistema, e é por isso que sua construção é tão tardia.

A investigação realizada apontou que a ausência de um sistema de coordenadas no plano compromete o estabelecimento de coordenadas em uma superfície esférica, isto é, o procedimento da criança é análogo em ambos os casos: na folha de sulfite (plano euclidiano) e na esfera de isopor (superfície esférica), conforme as representações feitas por JUL(8:10) ilustradas nas figuras 49 e 50. Assim, o que fica evidente é que a criança não percebe a influência das diferentes curvaturas das superfícies consideradas (folha e esfera de isopor) e quando solicitadas a representar o caminho do urso na esfera de isopor, repetem o mesmo procedimento da representação no plano.

Figura 49: Representação na superfície esférica de JUL(8:10)

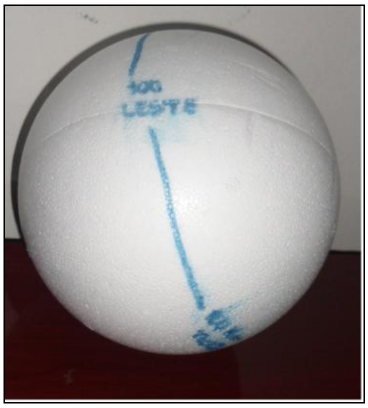

Figura 50: Representação na superfície esférica de JUL(8:10)

Uma resposta bastante interessante, quanto a questão do urso retornar a sua casa, foi a de JUL(8:10). Esta criança percebendo o caráter arredondado da esfera de isopor, afirmou que caminhando em direção reta, o urso retornaria para sua casa.

JUL (8:10) "*Só se a casa dele for dividida no sul e no norte, porque daí ele andaria do sul indo tudo pro norte, ai ele voltaria pra casa dele*".

Note que para a esfera de isopor, a representação da trajetória de JUL(8:10) é realizada em uma única direção e único sentido, isto é, mesmo afirmando que o urso caminhará para o leste, e depois para o norte, a representação do trajeto realizado pelo urso é sempre a mesma (sentido sul em relação ao ponto de partida do urso).

As crianças deste Nível já construíram as relações topológicas, sendo que estas relações permanecem puramente internas em cada objeto. Por isso que as crianças com menor idade conseguem compreende-las antes das relações euclidianas ou projetivas, isto é, estas relações são pontuais a um único objeto, não sendo analisadas relações de um objeto com o meio. As relações euclidianas, completadas pela construção de sistemas de referências, por outro lado, são relações estabelecidas entre vários objetos e padrões e servem para localizá-los dentro de um todo organizado formando um sistema geral. É por isso que os eixos horizontais-verticais são construídos ao mesmo tempo em que são coordenadas as perspectivas, pois estas últimas também constituem sistemas gerais que reúnem objetos ou padrões.

Todavia, o espaço projetivo é em essência uma coordenação de ambos os pontos de vista (reais ou virtuais) e das figuras consideradas em relação a esses pontos de vista. Por outro lado, as coordenadas, que expressam a estrutura de espaço euclidiano, ligam objetos considerados separadamente, em suas posições e deslocamentos objetivos, e em distâncias relativas. A idade de oito anos aproximadamente que fica no meio do período em que tomam forma pela primeira vez as operações concretas, assinala assim um ponto crítico decisivo no desenvolvimento de conceitos espaciais: o da conclusão da estrutura apropriada a amplos sistemas euclidianos e projetivos.

No caso específico da nossa investigação, constatamos que apesar da presença das relações topológicas, a construção ainda incipiente dos sistemas euclidianos e projetivos é insuficiente para a consecução dos objetivos da atividade.

Nível II: Estruturação dos sistemas de coordenadas e não diferenciação de superfícies

Diferentemente do Nível anterior, nesta fase os sujeitos, de idade entre nove e onze anos, reproduzem o trajeto do urso respeitando as coordenadas geográficas, isto é, já possuem bem definidos em suas estruturas cognitivas os sistemas naturais de coordenadas (horizontal e vertical). Logo, independentemente da superfície trabalhada (no nosso caso em uma folha sulfite e em uma esfera de isopor), estes realizam um trajeto mais coerente com a estória apresentada.

Contudo, mesmo este Nível II apresentando um progresso relativo ao Nível anterior, os sujeitos apresentam reações bastante interessantes segundo o trajeto representado em ambas as superfícies utilizadas, que acabam por caracterizar este período, a saber: na folha sulfite (superfície plana) o trajeto foi realizado sem hesitações, de uma forma correta, respeitando as direções norte-sul-leste-oeste, conforme ilustra a representação de ANA(10:11) reproduzida na figura 51.

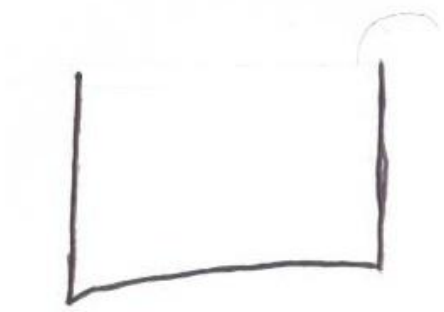

Figura 51: Representação do trajeto do urso na folha
sulfite de ANA(10:11)

Durante as entrevistas realizadas, algumas crianças afirmaram que em uma superfície plana era possível o urso retornar ao ponto de partida, desde que ele caminhasse cem quilômetros na direção oeste, conforme exemplificam as respostas de alguns sujeitos à questão do pesquisador sobre a possibilidade do urso retornar à sua casa após o trajeto efetuado, neste caso, na folha de sulfite (plano euclidiano).

ANA(10:11) "Só se ele andar por aqui olha" (indicando cem quilômetros para o oeste).

ING(10:9) "*Só retorna se ele caminhasse cem para cá" (indicando a direção oeste)*.

No caso das esferas de isopor, neste Nível II, constatamos que os sujeitos não conseguem representar corretamente o caminho que o urso realiza, e aqui, embora as representações no plano tenham se efetivado corretamente, se repete a situação anterior, isto é, as crianças simplesmente repetem o mesmo procedimento adotado na folha de sulfite, desconsiderando completamente a influência da curvatura da nova superfície, conforme ilustra a representação de ANA(10:11), na figura 52, que elucida um sujeito neste Nível.

Figura 52: Representação do trajeto do urso na esfera de isopor de ANA(10:11)

Da mesma forma que na folha de sulfite, questionamos se era possível o urso retornar para sua casa, agora na esfera de isopor. As respostas apresentadas não diferenciaram em nada das obtidas para a folha sulfite, isto é, seria possível somente se o urso percorresse mais cem quilômetros à oeste, ou se caminhasse todo o trajeto em sentido contrário.

ING(10:8) "*Bom, a única forma é se ele caminhasse cem quilômetros para oeste. Mas como ele não pode caminhar mais nada, ele não volta para a casa dele não*".

CAM(10:4) "*Se ele caminhar cem quilômetros a oeste ele volta, ou se ele voltar pelo caminho de onde ele veio. Se não for assim ele não volta*".

Concluímos que neste Nível II, independentemente da superfície trabalhada, a trajetória reproduzida pelas crianças é idêntica, isto é, tanto na superfície esférica quanto na superfície plana as trajetórias desenhadas são caracterizadas por não se fecharem em si mesmas, se aproximando com a representação de um quadrado sem um de seus lados.

Neste caso, as crianças conseguem resolver o problema proposto para o caso da folha de papel e numa demonstração clara de uma das etapas do processo da abstração reflexionante (reflexão), aplicam o mesmo esquema utilizado na tentativa de solucionar o novo problema (da esfera de isopor).

Uma explicação possível para este tipo de reação pode ser a presença de conceitos da geometria plana enraizados em suas estruturas cognitivas, não permitindo, mesmo com a esfera em mãos, observar que estamos trabalhando com superfícies distintas.

Nível III: Diferenciação das superfícies

As crianças que se situam no Nível III (acima de onze anos) são as que representam de maneira distinta os dois trajetos (da folha sulfite e da esfera de isopor), isto é, os sujeitos parecem conseguir diferenciar as superfícies (plana e esférica), representando na esfera de isopor um trajeto muito próximo de um triangulo esférico, conforme ilustram as representações de RAF(10:11) para a superfície esférica e para o plano.

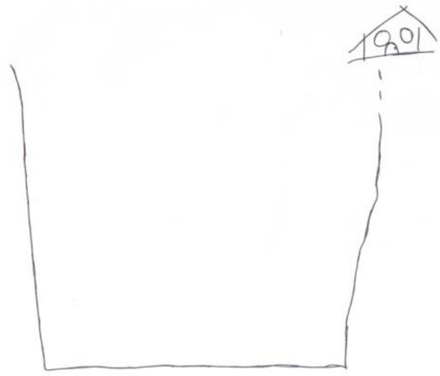

Figura 53: Representação no plano do trajeto do urso de RAF(10:11)

Figura 54: Representação na superfície esférica de RAF(10:11)

Algumas reações dos sujeitos desta fase deixaram evidências de que eles só afirmaram que o urso retornaria a sua casa de posse da esfera de isopor. Quando esboçaram o percurso do urso no papel sulfite não conseguiram de antemão ver que o urso poderia chegar ao lugar de onde partiu. No entanto quando representavam o trajeto do urso na esfera de isopor, antes mesmo de finalizar o desenho, algumas crianças um tanto surpresas diziam ser possível o urso retornar, diferentemente da folha de sulfite, pois esta era quadrada.

RAF(10:11) "O urso retorna para a sua casa, pois agora eu vi que ele retorna (indicando a trajetória na esfera de isopor). Nesta dá certo (esfera de isopor), pois o mundo é redondo e a folha é quadrada".

BEA(12:11) "Eu acho que não seria possível ver que o urso retorna para a sua casa sem ter a esfera. Na folha sulfite não da porque é quadrada (indicando o trajeto do urso), então vai formar um quadrado, agora se a folha fosse como esta esfera (mostrando com as mãos o caráter arredondado da esfera de isopor), aí seria possível ele voltar. O urso somente retorna para a casa se for um objeto que não seja bidimensional, assim como a esfera é".

Tal constatação é muito importante, pois a simples mudança do plano (folha sulfite) para a superfície esférica (esfera de isopor) proporcionou ao aluno verificar, por meio da interação com o objeto, que as superfícies são distintas, e o que acontece no plano, no caso a caminhada do urso, não acontece na superfície esférica, emergindo deste fato, conceitos diferenciados quando estamos falando destas duas superfícies.

A seguir temos a representação de BEA(12:11) indicando sua ideia de que mesmo para um círculo, o trajeto do urso não muda. O que realmente irá fazer o trajeto do urso ser diferente é o caráter tridimensional da superfície pelo qual ele caminha.

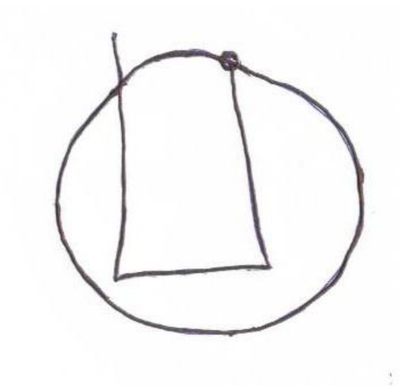

Figura 55: Representação de BEA(12:11)

Considerações sobre a Atividade

As informações obtidas com a aplicação deste exame são que das dez crianças entrevistadas, quatro delas conseguem diferenciar a trajetória nas diferentes superfícies, ou seja, podem ser enquadradas no Nível III. As quatro crianças que se encontram nesse nível, na presente investigação, possuem onze e doze anos de idade. Podemos afirmar que três crianças encontram-se no Nível II, onde todas elas possuem dez anos.

Temos ainda que três crianças pesquisadas encontram-se no Nível I. Destas três crianças duas possuem oito anos e uma apresenta onze anos de idade (criança atrasada). Isto indica que esta criança de onze anos está um pouco atrasada com relação às outras crianças nesta atividade, porém temos de ressaltar que ela poderá não estar atrasada em outras atividades que poder-se-ão realizar. Isso mostra outro fator importante: A classificação das crianças em estádios indica uma idade aproximada das crianças, não garantindo que todas, com uma determinada faixa etária, estarão presentes em uma mesma fase.

Tabela 6 resumindo os resultados encontrados no exame *Ângulos e triângulos (geometria esférica)*:

Idade	I	Int.	II	Int	III	Total
8	2	0	0	0	0	2
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	3	0	1	4
11	1	0	0	0	1	2
12	0	0	0	0	2	2
Total de crianças	3	0	3	0	4	10

Tabela 6: Resultados do exame *Ângulos e triângulos (geometria esférica)*

Os dados obtidos com a aplicação deste exame indicam que as crianças com idade superior a doze anos identificam e mobilizam a ideia básica de que estamos trabalhando em superfícies distintas (plano e esfera), por conseguinte, os trajetos realizados serão distintos.

Outra observação interessante e que não constava de nossas questões iniciais se refere ao contato do aluno com a esfera de isopor. As respostas apresentadas pelos alunos que conseguiam mobilizar as ideias básicas desta geometria, para a resolução da situação-problema, indicavam que somente de posse da esfera de isopor é conseguiam realizar o trajeto do urso de forma correta em tal superfície.

Apesar deste não ser objetivo de nossa investigação, esses resultados indicam que essas noções básicas da geometria esférica, podem e devem ser apresentadas em sala de aula com materiais que representem essas superfícies, ou seja, as crianças melhor assimilam o caráter distinto das superfícies (plana e esférica) com materiais que os possam representar, como por exemplo uma bola de basquete para simbolizar uma superfície esférica e uma folha sulfite, para o plano.

EXAME V: A CONSERVAÇÃO DA ÁREA

Objetivo da atividade:

- Investigar em que momento as crianças percebem que há conservação da área, isto é, independentemente da disposição das "casas", ou do posicionamento dos cartões, a área permanece inalterada. Entendemos que com base nestes dados, poderemos compreender como as crianças mobilizam a ideia de conservação de área e se atividades destes tipos podem favorecer a construção da conservação para os que ainda não manifestaram a conservação.

PRIMEIRA ATIVIDADE[11]

A atividade consiste em mostrar às crianças duas placas de isopor representando duas pastagens e são colocadas em cada um destes campos, primeiro uma vaca, que irá usufruir dos pastos e algumas casas, também de isopor, dispostas em cada campo de maneira diferente. Em seguida, alteramos a estrutura aparente dos campos, retirando ou rearranjando a posição das casas. Será que a criança reconhece a conservação da área (quantidade de pasto), apesar das casas estarem dispostas de formas distintas, porém estando em mesma quantidade em ambos os campos?

Procedimentos:

Inicialmente colocamos uma vaca em miniatura de plástico em cada campo (duas placas de isopor com as mesmas dimensões), e questionamos qual dos dois pastos possuía mais grama para a vaca comer. Em seguida, contamos a seguinte estória:

Com o passar dos anos, ambos os campos foram sendo povoados, e algumas casas foram construídas, porém, a disposição com que as casas foram construídas é diferente em cada campo (Figura 56).

[11] Este exame foi retirado da obra **The Child's conception of geometry** (1960), de Jean Piaget, Barbel Inhelder e Alina Szeminska.

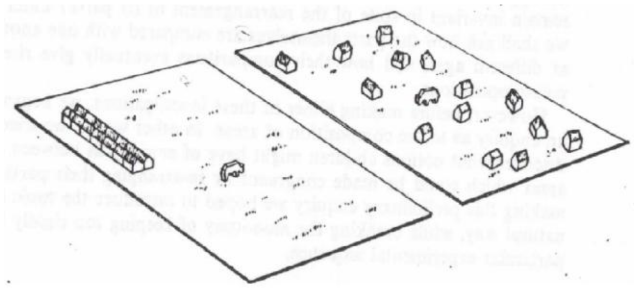

Figura 56: Disposição das casas nos campos de isopor

Pergunta-se novamente, *onde possui mais grama para a vaca comer? E por quê?* Com base nas repostas obtidas, vamos modificando a disposição das casas, e sempre questionando sobre a quantidade de grama dos dois campos.

SEGUNDA ATIVIDADE

No segundo exame são apresentadas para as crianças, duas figuras em papel cartão, uma representando um trapézio isósceles (cor preta), e o outro, um polígono seccionado em quatro partes (cor vermelha). O primeiro objeto, de cor preta, é um recorte único, isto é, que não apresenta secções, e o segundo, de cor vermelha, é seccionado em quatro partes distintas. Primeiramente apresentamos simultaneamente, a representação do trapézio preto, e um arranjo das quatro partes do polígono de cor vermelha, de forma que este forme uma representação de um polígono diferente do trapézio isósceles. Em seguida questionarmos qual dos dois objetos apresenta maior área. Após esta primeira parte, rearranjamos as partes do polígono vermelho de forma que este apresente dimensões iguais à representação do trapézio preto, e assim fazemos os mesmos questionamentos aos sujeitos. Queremos analisar, por meio destes questionamentos, se a criança compreende que mesmo formando figuras distintas, a área total dos dois trapézios continua sendo a mesma.

<u>Procedimentos:</u>

São apresentadas para as crianças duas figuras em papel cartão que representam uma, um trapézio isósceles de cor preta, e a segunda um polígono formado por quatro partes de papel cartão de cor vermelha, conforme ilustra a Figura 57:

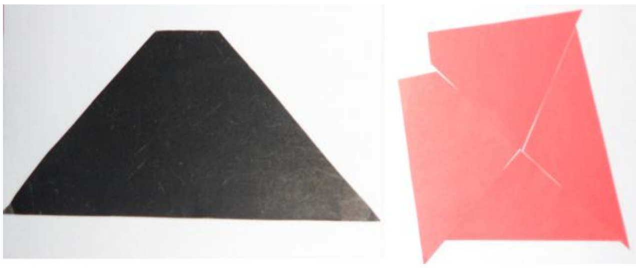

Figura 57: Rearranjo das partes em vermelho para a comparação das áreas

Primeiro Momento:

Após esta apresentação, perguntamos qual das duas formas geométricas (trapézio isósceles e um polígono formado com as quatro partes do papel cartão) possui maior área.

Segundo Momento:

Em seguida, posicionamos as quatro peças do papel cartão em vermelho de forma que esta seja congruente ao trapézio isósceles não seccionado preto, segundo a Figura 58. Com base nisso, questionamos qual dos dois apresenta maior área.

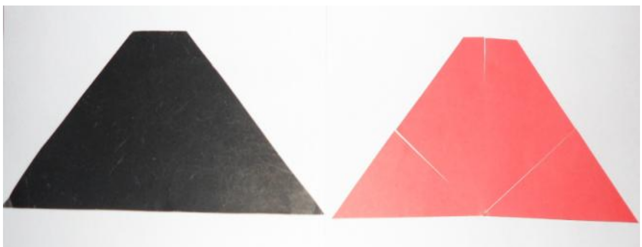

Figura 58: Comparação da medida das áreas dos trapézios

Terceiro Momento:

Para finalizar a atividade, rearranjamos novamente as quatro partes do papel cartão em vermelho formando um outro polígono qualquer, e perguntamos novamente qual dos dois possui maior área.

Análise dos Resultados obtidos com a aplicação da Primeira Atividade

A análise das informações obtidas com este exame – *A conservação da área* - permitiu identificar três Níveis, com características peculiares, descritas por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), a saber: O Nível I no qual as crianças limitam-se a juízos perceptuais e não compreendem corretamente os questionamentos realizados. No Nível seguinte (Nível II) as crianças gradualmente chegam a apresentar respostas corretas, mas seu sucesso é o produto de ajustes intuitivos e assim está faltando a generalização, o que indica que ainda não possuem todas as estruturas cognitivas para a conservação da área. Finalmente no Nível III a criança é capaz de analisar corretamente as áreas dos campos independentemente das modificações das posições das casas de isopor.

Nível I: Não compreensão do questionamento

As crianças deste Nível não compreendem os questionamentos que são realizados, quanto ao campo que possui mais grama para a vaca comer, ou aquele que possui mais ou menos espaço. Em nossa pesquisa não foram encontrados sujeitos que apresentassem tais características, visto que, a faixa etária de nosso trabalho é dos oito aos doze anos de idade, por conseguinte não temos como exemplificar respostas que indiquem tais reações.

Nível II: Respostas intermediárias para a conservação da área

Segundo estudos descritos por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), nesta atividade encontramos dois Subníveis com características complementares, que são os Subníveis IIA (as crianças limitam-se a juízos perceptuais e as áreas não são conservadas quando sua aparência é modificada) e IIB (sucesso em várias questões, no entanto falta a generalidade adquirida somente no Nível III). Neste trabalho foi possível identificar somente sujeitos no Subnível IIB, contudo procuramos relatar algumas características das crianças que se enquadram no Subnível IIA.

No Subnível IIA, os sujeitos compreendem as questões que são apresentadas, mas as suas respostas revelam uma completa falta de conservação da área. Eles percebem que os dois campos incialmente (sem posicionar casas sobre os campos) possuem áreas iguais (mesma quantidade de grama). No entanto, eles não admitem que as áreas ainda são iguais entre si, quando posicionamos a mesma quantidade de casas em posições distintas. Portanto, cada arranjo é julgado individualmente, sem referência a aqueles rearranjos que o precederam. Em verdade, o sujeito entende que a modificação na forma produz uma mudança na área, mesmo não compreendendo se é maior ou menor que a representação do campo original.

Para Piaget, Inhelder e Szeminska:

> A descoberta da conservação da área implica a construção de um agrupamento lógico ou sub-lógico, ou então de um grupo de operações, razão pela qual o estudo desses invariantes e sua aparência é importante. Para o conceito de área, a composição é uma questão de agrupamento ou de adição de partes para formar um todo, e conservação é simplesmente a expressão do fato de que o arranjo das partes não afeta a sua soma. (PIAGET, INHELDER, SZEMINSKA, 1960, p.278)

Neste Subnível IIA, as crianças não conseguem compreender o fato de que ao modificarmos as posições das casas, a quantidade de grama continuará sendo a mesma. Isso se deve por algumas razões, entre as quais:

- Quando um todo é seccionado em partes, ele deixa de ser o mesmo que antes, pois sua continuidade é perdida.

- A mudança de posição por parte de qualquer casa deve afetar a área total, porque a nova posição a qual ela foi movida, não é compensada pelo espaço do qual ela foi retirada.

Para Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), no Subnível IIB, as crianças respondem a algumas de nossas perguntas corretamente, mas os seus sucessos são fruto de tentativa e erro. Eles procedem por ajustes articulados, mas ainda faltam o princípio de generalização e de composição operacional. Fatos que corroboram com tal afirmação são as respostas de ANA(10:11), CAM(10:4), e de RAF(10:11) para a questão da quantidade de grama para a vaca comer, primeiramente para um pasto com casas e o outro vazio:

ANA(10:11) "Este aqui tem mais grama (apontando para o campo sem casas), porque nesse campo aqui eles contruíram casas, e neste outro aqui não. Então esse vai ter mais espaço que este outro aqui".

CAM(10:4) "Este campo aqui (apontando para o campo com casas) tem menos grama que aquele outro ali, pois aqui como as casas foram contruídas no lugar da grama e neste outro aqui não".

RAF(10:11) "Neste pasto aqui tem mais grama (apontando para o campo sem casas), pois ele não tem casas. E se eu construir casas nele, onde eu construo a casa não vai ter mais grama".

Nas três respostas apresentadas pelas crianças, fica claro que todas compreendem que quando são construídas as casas nos campos, diminuiria a quantidade de grama para as vacas se alimentarem. Porém, os sujeitos desse Subnível IIB parecem estar centrados unicamente no caráter espacial do posicionamento das casas, não levando em consideração o seu aspecto quantitativo. Fato que corrobora tal afirmação, são as respostas apresentadas pelas mesmas crianças quando fazemos o mesmo questionamento, no entanto, agora a mesma quantidade de casas estão dispostas em posições distintas sobre os campos de isopor (no primeiro campo, as quatro casas estão dispostas em seu centro, e no segundo campo, as casas estão dispostas uma em cada canto do pasto):

ANA(10:11) "Este campo aqui (apontando para o campo com as casas espalhadas) tem mais grama que este outro aqui, porque neste campo as casas estão mais amontoadas e *então ocupam mais espaço, e neste aqui elas estão nos cantos, então vão ocupar menos espaço".*

CAM(10:4) "Este campo aqui (casas espalhadas) continua tendo mais grama, porque as casas estão construídas na lateral, então ela vai ter mais espaço".

RAF(10:11) "Esse campo tem mais grama (apontando inicialmente para o campo com as casas centralizadas). Não, eu acho que esse aqui tem mais (apontando agora para o pasto com as casas espalhadas). Eu acho que é esse que tem mais porque as casas estão espalhadas então tem mais espaço".

Observa-se que neste Subnível IIB ocorre um progresso considerável em relação ao Subnível IIA. Neste momento as crianças têm uma compreensão intuitiva mais clara do posicionamento das casas, porém se a mesma quantidade de casas apresenta posição distintas em ambos os pastos, nossos sujeitos apresentam uma dificuldade sistemática em afirmar qual campo possui maior espaço.

Gradualmente é somente no Nível III que os sujeitos passam a libertar o seu julgamento prévio de uma falsa impressão criada pelo posicionamento das casas nos pastos, e assim compreendem que sua área permanece constante independentemente da maneira com a qual a mesma quantidade de casas são construídas nos pastos.

Nível III: Generalização da conservação da área

Somente quando o sujeito chega ao início do Nível III é que poderá resolver problemas que envolvam a conservação da área, pois agora ele ignora qualquer alteração nas posições das casas, contando apenas com o seu entendimento de transformação, como tal, o que significa que ele não precisa mais comparar o espaço entre os dois campos, resultantes de tais transformações das posições.

Neste momento, independentemente da posição em que colocamos as casas nos campos, desde que sejam do mesmo formato e sejam em mesma quantidade, "o espaço com grama” para as vacas comerem será o mesmo, conforme exemplificam as respostas de BEA(12:11), ING(10:9), e RIC(11:8):

BEA(12:11) “Eles tem a mesma quantidade, porque já que elas (casas) tem a mesma forma, e tem o mesmo número, a quantidade será a mesma, independente de onde construir. Não interfere o fato de que elas estão aqui espaçadas e aqui juntas, porque elas tem a mesma forma, e são a mesma quantidade de casas em cada pasto. Então eu acho que vai ser a mesma coisa”.

ING(10:9) “Eles tem a mesma quantidade de grama, pois as medidas das casas são iguais. Então não importa onde construir as casas, a quantidade de grama que será retirada de cada casa é a mesma”.

RIC(11:8) “Ficam com a mesma quantidade de grama, porque nesse pasto (casas espalhadas) só mudou o formato onde colocaram as casas, pois aqui eles colocaram nos cantos, e nesse outro está centralizado; e como as casas tem o mesmo tamanho e são em mesmo número, então a quantidade de grama é a mesma. Só terá mais grama um pasto se a quantidade de casas for diferente”.

As respostas do sujeito desta fase são muito diferentes daquelas do Nível anterior. Ele já não compara o espaço do novo posicionamento das casas no pasto, com o do utilizado como referência. O sujeito considera a nova forma simplesmente como o resultado de uma modificação, não alterando em nada o espaço dos dois campos quando o número de casas é o mesmo, porém em posições distintas. Por isso, ele toma como certo que a modificação é simplesmente um rearranjo das casas, e não tem necessidade de examiná-lo para saber que a quantidade de espaço entre os campos é conservada.

Considerações sobre a Primeira Etapa da Atividade

As informações obtidas com a aplicação deste exame indicam que das dez crianças entrevistadas, cinco delas conseguem compreender que independente do posicionamento das casas nos pastos, desde que estas estejam em mesmo número e possuam a mesma forma, a área que estas ocupam nos pastos serão as mesmas (Nível III). As cinco crianças que se encontram nesse Nível III, na presente investigação possuem uma oito anos, uma dez anos, duas onze anos e somente uma doze anos de idade.

Podemos afirmar ainda que cinco crianças encontram-se no Nível II, mais especificamente no Subnível IIB; nenhuma criança se encontra no Subnível IIA. Destas cinco crianças que possuem características do Subnível IIB, uma possui oito anos, três possuem dez anos, e somente uma possui doze anos de idade.

Não foram encontradas crianças que se enquadrassem nas características descritas do Nível I.

Os trabalhos de Piaget, Inhelder e Szemisnka (1960) indicam que conceitos como os de área e a sua conservação podem ser dominados por todas as crianças por volta dos dez anos de idade. Em nossa pesquisa verificou-se que estruturas cognitivas acerca da conservação da área estão consolidadas por volta aos onze anos de idade. Aos dez anos de idade, ainda não encontramos o princípio da generalização da quantidade de espaço (alterando o posicionamento das casas é alterada a área dos campos).

Tabela 7 resumindo os resultados encontrados na prova *A conservação da área – Primeira etapa*:

Idade	I	IIA	IIB	III	Total
8	0	0	1	1	2
9	0	0	0	0	0
10	0	0	3	1	4
11	0	0	0	2	2
12	0	0	1	1	2
Total de crianças	0	0	5	5	10

Tabela 7: Resultados do exame *A conservação da área – Primeira etapa*

Análise das informações obtidas com a aplicação da segunda prova

A análise das informações obtidas com o segundo exame *A conservação da área - Segunda etapa*, permitiu identificar três Níveis, com características complementares, a saber: O Nível I no qual as crianças não entendem o questionamento realizado por não compreenderem o que é o espaço interior da figura (sua área). No Nível seguinte (Nível II) as crianças compreendem que ao posicionarmos as duas figuras de forma idêntica, estas possuirão mesma área, no entanto, ao rearranjarmos as figuras em papel cartão vermelho de forma que constituam um outro polígono, o sujeito entende que sua área também será alterada (não conservação operacional das áreas quando sua forma é alterada). Finalmente no Nível III a criança é capaz de analisar corretamente as áreas das figuras, independentemente dos rearranjos realizados.

Nível I: Não compreensão do questionamento

As crianças deste Nível não compreendem os questionamentos que são realizados quanto ao conceito de espaço interior da figura (sua área), muito menos comparações relativas (a figura que possui mais ou menos espaço). Em nossa pesquisa não foram encontrados sujeitos que apresentassem tais características.

Nível II: Não conservação operacional da área quando as formas são alteradas

Neste Nível II, diferentemente da fase anterior, os sujeitos compreendem os questionamentos realizados, no entanto ainda não possuem estruturas acerca da conservação da área por meio das modificações da forma da figura. Quando questionados sobre qual figura apresentava maior área (para o primeiro momento desta atividade), todas afirmavam que a figura preta possui maior área, alegando entre outros fatores que aparentemente o espaço ocupado por ela era maior.

Para o segundo momento desta atividade, as crianças apresentavam surpresa com o fato de que ao rearranjarmos aquelas quatro partes em vermelho, obteríamos um trapézio congruente ao confeccionado em cartão preto. O mais interessante desta etapa são as reações dos sujeitos, pois antes mesmo de perguntarmos sobre qual polígono apresentava maior área, eles se antecipavam e afirmavam ter áreas iguais, conforme exemplifica as reações de GAB(11:10), JUL(8:10), e ING(10:9):

GAB(11:10) "Olha! Eles vão ter o mesmo tamanho, então eles tem a mesma área, pois são exatamente iguais".

JUL(8:10) "Elas tem o mesmo tamanho. Hum, então elas vão ter a mesma área, pois são iguais".

ING(10:9) "Ah! elas são iguais. Na verdade elas são a mesma figura, só que a vermelha estava de outra forma. Então parecia que elas eram diferentes, mas na verdade elas tem a mesma área, pois tem a mesma forma e são iguais".

Todas as respostas analisadas enfatizavam que, após o rearranjo das quatro partes vermelhas de maneira que formassem um trapézio congruente ao trapézio isósceles preto, ambos teriam a mesma área. É claro o quanto os sujeitos desse Nível estão preocupados unicamente com o aspecto de igualdade das formas das figuras. Podemos afirmar tal fato por meio das reações dos sujeitos mediante ao questionário feito no terceiro momento da atividade.

RAF(10:11) "Elas agora vão ter a mesma área, porque são idênticas".

ING(10:9) "As duas são iguais (mesma área), porque elas tem o mesmo formato, tem a mesma área e são iguais".

Neste momento, os sujeitos não possuem estruturas que garantam a conservação da área, pois ao rearranjarmos as quatro peças em vermelho, formando um polígono diferente do trapézio isósceles preto, estes afirmavam que a área seria diferente. Várias foram as justificativas apresentadas pelos sujeitos, sendo a mais comum aquela que concebia a maior área ao objeto que apresentasse “aparentemente” um espaço maior. A seguir temos as afirmações de ING(10:9) e RAF(10:11) corroborando com tais reações:

ING(10:9) “Eu acho que existe uma forma de arrumarmos essa peças (em vermelho) e ter área maior que esse em preto aqui. Se eu colocar as peças juntinhas ela vai ter área menor que essa preta, e seu eu montar elas bem esticada (se referindo ao comprimento das quatro peças vermelhas) ela vai ter área maior. E elas vão ser iguais quando eu montar essas peças e deixar ela igualzinha a preta”.

RAF(10:11) “A área da preta é maior que a da vermelha, porque a figura preta é toda juntinha, ocupa mais espaço que a vermelha, e a vermelha é menor então seu espaço é menor, logo a área também é menor”.

Um aspecto muito interessante foi encontrar no Nível II, os três sujeitos colaboradores de nossa pesquisa, que apresentavam as maiores idades. Não obstante, as justificativas apresentadas se aproximavam muito uma das outras, indicando uma preocupação excessiva com bases e número de lados que o novo polígono apresentava. Estas três crianças, tomando como referência a fórmula para o cálculo da área de retângulos, afirmavam que quanto maior o comprimento da base ou maior o número de lados, maior seria a área apresentada, visto que, a área era calculada pela multiplicação do comprimento da base pelo comprimento de sua altura:

GAB(11:10) “Eu acho que essa figura vermelha tem mais área que a figura preta. Eu acho isso porque a figura vermelha tem mais formas, e tem maior número de lados. Como a figura preta tem quatro lados, e a figura vermelha tem sete lados, a vermelha tem mais lados. Se a figura vermelha tivesse menos lados que a preta, sua área seria menor”.

FER(12:6) “A preta tem maior área que a vermelha, pois para descobrir a área tem que multiplicar a base pela largura (lembrando que o polígono representado não era um retângulo). Nessa figura preta a base é maior, bem maior”.

BEA(12:11) "A área da figura preta é maior que a da vermelha, porque para essa forma que esta a figura vermelha, tanto a base quanto a altura são menores que a base e a altura da figura preta. Então a área dela vai ser menor que a figura preta. Por exemplo, aqui (na figura preta) se a base aqui é dez e a altura é cinco, a área é cinquenta, e aqui (figura vermelha) se a base é cinco, porque ela é menor, e a base for cinco, a altura é vinte e cinco".

Tais respostas se devem por estas crianças entenderem o conceito de área como um número associado a uma superfície; como nas escolas os professores passam rapidamente ao cálculo da área utilizando fórmulas, não enfatizando o conceito de área, esta passa a ser reconhecida unicamente por meio de fórmulas matemáticas.

Nível III: Conservação da área por meio dos rearranjos das figuras.

Somente quando o sujeito chega ao Nível III é que poderá compreender que, independente do rearranjo realizado com as quatro peças em vermelho, a área de ambas as figuras são congruentes. Aspectos como o número de lados da figura vermelha, sua base e altura, ou o seu "possível" espaço maior são negligenciados frente a compreensão da conservação das operações cognitvas acerca da área.

As respostas dos sujeitos mostram que está claro que pode rearanjar a figura vermelha de qualquer forma, e mesmo assim a sua área permanecerá idêntica ao trapézio isósceles preto.

MAR(8:6) "As duas tem áreas iguais, porque elas tem formas diferentes, mas possuem o mesmo espaço. Se você arrumar ela (peças vermelhas) de qualquer forma as áreas vão ser iguais, porque se você colocar essa vermelha aqui em cima da preta, elas vão ser idênticas".

ANA(10:11) "A área das duas vão ser sempre iguais, porque você sempre ta mudando só a posição delas, não está mudando a área".

RIC(11:8) "A área das duas figuras vão ser iguais, porque você só mudou a forma de posicionar os pedaços, não alterou o espaço da figura".

De forma análoga às respostas apresentadas na primeira atividade, neste Nível III os sujeitos não hesitam em responder qual das formas apresenta maior área. O sujeito considera o novo rearranjo simplesmente como o resultado de uma modificação, não alterando em nada o espaço das duas figuras. Por isso, ele toma como certo que a modificação da forma das partes vermelhas, não altera a área desta figura.

Considerações sobre a Segunda Etapa da Atividade

As informações obtidas com a aplicação deste exame que: das dez crianças entrevistadas, três delas conseguem compreender que independente do rearranjo adotado para as partes da figura em vermelho, a área que esta figura possui é a mesma da figura que representa o trapézio isósceles preto (Nível III). As três crianças que se encontram nesse Nível III, na presente investigação possuem oito, dez anos e onze anos de idade.

Podemos afirmar ainda que sete crianças encontram-se no Nível II, aquele no qual não compreendem a conservação da área mediante as transformações da figura. As sete crianças deste nível, uma possui oito anos, três possuem dez anos, uma possui onze anos e duas possuem doze anos de idade.

A seguir temos a Tabela 8 resumindo os resultados encontrados na prova *A conservação da área – Segunda etapa*:

Idade	I	II	III	Total
8	0	1	1	2
9	0	0	0	0
10	0	3	1	4
11	0	1	1	2
12	0	2	0	2
Total de crianças	0	7	3	10

Tabela 8: Resultados do exame *A conservação da área – Segunda etapa*

Considerações gerais da atividade sobre A conservação da área

Os dados obtidos com a aplicação das duas etapas deste exame indicam que as crianças com idade próximas a doze anos mobilizam a ideia básica de conservação de área em situações problema.

Segundo Facco (2003), e em conjunto com a análise das atividades realizadas neste Exame V, pudemos constatar que a maneira como os professores apresentam o conceito de área para os alunos nas escolas é inapropriada. Por meio da segunda etapa da atividade, observamos crianças com doze anos de idade (sétima série do Ensino Fundamental) tomando como referência para comparação de áreas as fórmulas matemáticas (para isso verificam unicamente o comprimento da medida da base da figura), deixando de lado as noções básicas do conceito área de figuras geométricas, como a superfície que esta figura apresenta. Por outro lado, encontramos crianças com oito e dez anos de idade que respondiam corretamente as questões de conservação de área, quando sequer tiveram contato com as fórmulas matemáticas que calculassem seu valor, utilizando para isso a ideia de quantidade de espaço que cada figura ocupava.

Isto provavelmente ocorre porque ao apresentar o conceito de área como um número, obtido por meio de algumas fórmulas, ideias básicas que são de vital importância para a compreensão deste conceito deixam de ser trabalhadas (como por exemplo, a noção espacial de área), acarretando em equívocos como os apresentados por BEA(12:11) e FER(12:6).

Criticamos a escola que age desta maneira, uma escola conteudista, que se preocupa mais com definições e fórmulas, apreendidas memoristicamente, quando o que deveria ser enfatizado são os aspectos conceituais, as idéias. Recomendamos para um fazer pedagógico mais adequado sobre o conteúdo de áreas, que os conceitos devem ser privilegiados, utilizando materiais instrucionais que permitam trabalhar, por exemplo, com a ideia de quantidade de espaço ocupado, deixando inicialmente de lado como se encontra o valor que este espaço apresenta. Muitas atividades devem ser realizadas, passando-se gradativamente das que utilizam apoio concreto, para as representações gráficas, para as que abstraiam o conceito, permitindo a generalização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das principais justificativas para a não introdução do tema geometrias não euclidianas no Ensino Fundamental poderia ser o aparecimento de maiores dificuldades com sua aprendizagem do que com a geometria euclidiana. Mas os resultados de nossa pesquisa nos permitem afirmar que esta não é uma justificativa válida.

Nossa investigação constatou que crianças com idade em torno de dez anos, que já constituíram o sistema de coordenadas, conforme resultados de Piaget e Inhelder (1993) obtêm sucesso na resolução de situações-problema envolvendo ideias básicas da geometria esférica (exame IV). Outra constatação importante é que com a noção de distância, que se consolida na criança em torno dos nove anos de idade, segundo resultados de Piaget e Inhelder (1993), conseguem mobilizar ideias básicas da geometria hiperbólica (exame III).

Se noções como a de distância e de sistemas de coordenadas, que são essenciais para a compreensão de geometrias não euclidianas, são consolidadas nos sujeitos ao redor dos dez anos (momento este em que o aluno cursa o quinto ano do Ensino Fundamental), tais geometrias podem ser apresentadas já na segunda fase do Ensino Fundamental, contrariando as afirmações mais comuns entre os professores, onde afirmam que os alunos apresentam dificuldades nos conceitos de geometrias euclidianas, por conseguinte, seriam maiores as dificuldades com as geometrias não euclidianas. (LOVIS, 2009)

Uma das possibilidades para a possível relutância dos professores para o fazer pedagógico com as geometrias não euclidianas é o seu despreparo para isto, conforme apontado por Santos (2009) e Lovis (2009), que constataram, inclusive que professores do Ensino Fundamental, além de pouco conhecer as geometrias não euclidianas, possuem conhecimentos sobre a geometria euclidiana muito restritos. Assim o problema com o ensino das geometrias não euclidianas envolve uma questão mais ampla, já que os professores, de maneira geral, poucas oportunidades possuem de estudarem geometria (euclidiana ou não), em suas formações inicial ou continuada.

Nossa investigação possibilita questionar algumas escolas que ainda estão preocupadas em contemplar todo seu conteúdo anual, priorizando a quantidade de conceitos que serão apresentados, ao invés de trabalhá-los em menor quantidade, porém com maior qualidade. Recomendamos, com base em nossa pesquisa, que conceitos importantes - como comprimento e área - não sejam trabalhados (apresentados como definições e fórmulas) em poucos minutos, o que pode acarretar em falhas na construção de destes conceitos. Justificamos esta afirmação pelos resultados obtidos com o quinto exame, em que os três sujeitos com maior idade (onze e doze anos) não realizaram a atividade da conservação da área corretamente, por procurarem utilizar conhecimentos escolares na solução da situação-problema proposta. Estes resultados indicam que o conceito de área não está construído pelos sujeitos, pois associam área unicamente a um número obtido por fórmulas matemáticas, deixando de lado a estreita vinculação entre área e a "dimensão" ocupada por uma superfície. Sujeitos com oito anos de idade, que sequer foram apresentados a fórmulas matemáticas para o cálculo da área, responderam as questões desta atividade com sucesso.

Os professores devem compreender que um determinado conceito se constrói ao longo de muito tempo e envolvem ideias básicas que muitas vezes, não estão explícitas na apresentação formal de tais conceitos. De acordo com Vergnaud os conceitos matemáticos são construídos a partir de uma variedade de situações, e cada situação normalmente não pode ser resolvida com a ajuda de apenas um conceito. Por exemplo, para que se possa compreender que uma reta é constituída por um conjunto infinito de pontos, são necessárias ideias básicas de ponto, vizinhança, continuidade, envolvimento, ideias que são mobilizadas desde muito cedo pelas crianças, conforme comprovamos anteriormente (DEBASTIANI, NOGUEIRA e FRANCO, 2010) e nesta investigação (exame I). Entretanto, ao não serem instigados a mobilizarem tais ideias em situações-problema propostas pela escola, e nem a refletirem sobre elas, as crianças podem acabar desconsiderando-as em detrimento da utilização de fórmulas e regras, que geralmente são apresentadas desvinculadas dessas noções, conforme a realização do Exame V nos mostra essa possibilidade.

No que se refere à questões metodológicas, as escolas devem se preocupar em desenvolver o espírito investigativo do sujeito desde os Anos Iniciais. Para tanto, devem ser propostas situações-problema do tipo das que foram elaboradas para os exames desta pesquisa. Os professores, ao elaborar essas atividades, devem sempre considerar o estádio no qual a criança se enquadra (sensório-motor, pré-operatório ou operatório concreto), e as noções geométricas que estas possuem, considerando-as como apoio para a construção de novos conhecimentos.

Desta forma, os resultados encontrados nessa investigação indicam que crianças entre oito e doze anos, que cursam o Ensino Fundamental, conseguiram mobilizar algumas das ideias básicas à construção de conceitos geométricos durante a resolução de situações-problema. No entanto, nem todos os sujeitos tiveram sucesso em suas considerações. Para que maior número de sujeitos possam realizar tal mobilização de ideias, deixamos algumas possibilidades que visam um melhor ensino das escolas.

Primeiramente como professores, devemos considerar que um conteúdo geométrico está arraigado a noções muito primitivas de cunho topológico. Estas noções são progressivamente construídas, até a elaboração das estruturas projetivas e euclidianas, por volta dos seis anos, que se consolidam por meio de um processo sincrônico e solidário. Desta forma, para afirmar como um sujeito mobiliza tais ideias básicas (noção de contínuo, de geometria da superfície esférica, de conservação de área, entre outros), devemos considerar como prioridade, a construção dos elementos mais primitivos. Por exemplo, não devemos falar em continuidade sem apresentarmos ideias básicas de vizinhança, ordem, e separação, pois como vimos, o contínuo é a síntese destas estruturas topológicas; da mesma forma não devemos apresentar noções de geometria esférica sem antes trabalharmos com as estruturas do sistema de coordenadas.

Para que haja a mobilização das ideias básicas em situações problemas pelas crianças, o professor tem papel fundamental. O docente deve considerar toda essa construção de um conceito ao longo dos anos, deve verificar que isto não se faz em poucas aulas. E mais importante ainda: devemos considerar as ideias primitivas para a consolidação das ideias mais complexas. Para isso, atividades investigativas devem ser aplicadas desde os Anos Iniciais.

Concluindo, diante dos resultados obtidos e dos apontamentos apresentados, outras indagações são realizadas, podendo estas ser a questão motivadora de próximas pesquisas, tais como: Estariam os professores abertos ao ensino de geometrias não euclidianas? Até que ponto as aulas privilegiam a construção das ideias básicas de geometria euclidiana e não euclidianas? A formação dos docentes de matemática atende os critérios necessários para favorecer a construção de conceitos geométricos pelos alunos? Estas, dentre outras questões podem ser objetos de estudos acarretando na abertura de caminhos para novos trabalhos.

REFERÊNCIAS

BECKER, F. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**. Petrópolis: Vozes, 2ª edição, 1994.

Bicudo, Irineu. **Os Elementos de Euclides**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BONOLA, R., **Geometrías no Euclidianas** - tradução espanhola de L. G. Arroyo; Argentina: Talleres Gráficos Américalee, 1951.

BRASIL. Secretaria de Estado da Educação do Paraná**.** Diretoria de Tecnologias Educacionais, **As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná**: **Matemática**. Curitiba: 2008.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas: Um estudo histórico-pedagógico**. 1995. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007

DEBASTIANI, J. N.; NOGUEIRA, C. M. I.; FRANCO, V. S.. **A Construção do Espaço Geométrico por Crianças Entre 03 e 10 Anos.** Revista UNOPAR Científica Ciências Exatas e Tecnológicas. Londrina, n. 1, vol. 9, p. 71 – 78, nov. 2010.

COUTINHO, L.; **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. 2ª.ed. Rio de Janeiro, 2001.

DOLLE, J. **Para compreender Piaget.** Rio de Janeiro: Guanabara, 2000.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Geometria**. São Paulo: Atual, 1992.

FACCO, S. R. **Conceito de Área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2003.

FLAVELL, J. H. **A Psicologia do Desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Pioneira, 1975.

GÁLVEZ, G. **A geometria e A psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária**, IN: PARRA, Cecília & SAIZ, Irmã. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. 2. ed., São Paulo: Artmed, p. 236- 256, 2001.

GERÔNIMO, J. R., FRANCO, V. S.. **Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático**. Maringá, Massoni, 2005.

GOULART, I. B. **Piaget: experiências básicas para a utilização pelos professores.** Petrópolis: Vozes, 1983.

GREENBERG, M. J.. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.** 2. ed. California: Santa Cruz, 1973.

GROSSI, E. P.. **Por que ainda há quem não aprende?** 2ª ed.. Petrópolis. RJ: Editora: Vozes, 2003.

HESSEN, J.. **Teoria do Conhecimento**. São Paulo, Editora: Martins Fontes, 1999.

HUME, D. **Investigações sobre o Entendimento Humano**. São Paulo: UNESP, 2004.

KANT, I.. **Crítica da Razão Pura**. Tradução de Valério Rohden e Udo Baldur Moosburger. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores)

KOBAYASHI, M. C. M. **A construção da geometria pela criança**. Bauru, Editora: EDUSC, 2001.

LEITE, L. B. (Org) **Piaget e a escola em genebra**. São Paulo: Cortez, 1987.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2009.

MAGINA, S., CAMPOS, T. M. M., NUNES, T., GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 2ª ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MELLO E SOUZA, J. C., **O escândalo da geometria**. Rio de Janeiro: Gráfica Editora Aurora, 1940.

NOGUEIRA C. M. I.. **Grandezas e medidas: encaminhamentos metodológicos para as séries iniciais do ensino fundamental**. Coleção Formação de Professores – EAD Nº 22. Maringá, EDUEM, 2005.

PIAGET, J. **A construção do real na criança**. 3ª ed., Rio de Janeiro, Editora Zahar, 1979.

______________. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre, Editora Artes Médicas, 1995.

____________. **Epistemologia Genética**, 3ª ed.. São Paulo. SP: Editora Martins Fontes, 2007.

______________. **Introduccion a la Epistemologia Genetica (El pensamiento matemático).** Buenos Aires: Editoria Paidos, 1975.

_____________. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

______________. **Psicologia e Epistemologia: Por uma Teoria do Conhecimento**. Rio de Janeiro. RJ: Forense Universitária, 1973.

PIAGET, J, GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Publicações Dom Quixote. Lisboa, 1987.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre, Editora: Artes Médicas, 1993.

PIAGET, J., INHELDER, B., SZEMINSKA, A. **The child´s conception of geometry**. New York, Editora: Harper Torchbook, 1960.

SANTOS, T. S. A **inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2009.

VERGNAUD, G. A **classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems**. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. p. 39-59. 1982.

VERGNAUD, G. **Multiplicative conceptual field: what and why?** In Guershon, H. and Confrey, J. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.** Albany, N.Y.: State University of New York Press. p. 41-59. 1994.

VERGNAUD, G. **Teoria dos Campos Conceituais.** Recherches en Didáctique des Mathématiques**,** v. 10, nº 23, 1990.

WADSWORTH, B. J. **Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau**. São Paulo: Pioneira, 1984.

YAMASHITA, L. H., KOBAYASHI, M. C. M., YAMADA, M. O. **A Construção Do Conhecimento Espaço-Geométrico Em Crianças Com Deficiência Auditiva**. 2004.

APÊNDICE

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO DE PESQUISA

Eu, …………………………….........................…………………….., responsável pela ...., CNPJ .... fui devidamente esclarecido e concordo em autorizar a pesquisa Geometria esférica no início da segunda fase do ensino fundamental: Um estudo apoiado na Epistemologia Genética coordenada pela Professora Doutora Clélia Maria Ignatius Nogueira.

_______________________________________ Data:……............…………………..

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Gostaríamos de convidá-lo a participar da pesquisa intitulada Geometrias no início da segunda fase do ensino fundamental: Um estudo apoiado na Epistemologia Genética, que faz parte do curso de Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática e é orientado pela professora Doutora Clélia Maria Ignatius Nogueira da UEM. O objetivo da pesquisa é investigar se estudantes do final do ensino fundamental reconhecem e mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias em situações-problema. Para isto a sua participação é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: Serão aplicadas 5 atividades composta de situações-problema que se constituirá nos instrumentos de apoio para as entrevistas clínicas, realizadas com dez crianças com idade entre 08 e 12 anos. Após faremos uma análise detectando se estes conseguem identificar ideias básicas envolvidas em conceitos essenciais de geometrias e as dificuldades encontradas ao resolverem as atividades propostas, concluindo se poderemos apresentar tais conceitos neste ano escolar.

Para melhor captação dos pormenores, todas as entrevistas e a aplicação das atividades serão gravadas em áudio e vídeo com uso de uma câmera filmadora digital, autorizado pelos entrevistados. Informamos que poderão ocorrer atrasos com relação a aplicação das atividades, visto que, por se tratar de uma entrevista, o tempo para realização desta é livre. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa (ou ao seu filho, no caso do TCLE ser voltado aos pais/responsáveis de sujeito menor). Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Os benefícios esperados são que os resultados deste estudo fornecerão informações importantes sobre o desenvolvimento cognitivo da criança, e principalmente sobre o processo de ensino e aprendizagem das geometrias não euclidianas para alunos do ensino fundamental, além de que poderão servir de base para novas pesquisas com esta temática. Poderemos também observar o quanto as crianças poderão entender as situações apresentadas e consequentemente as noções de geometrias não euclidianas.

Caso você tenha mais dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta deste documento. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Eu,.........................………………………………………….., responsável pelo menor ...., declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pelo Professora Doutora Clélia Maria Ignatius Nogueira (nome do pesquisador responsável).

______________________________________ Data:……………….................……..

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, João Debastiani Neto (nome do pesquisador ou do membro da equipe que aplicou o TCLE), declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

____ Data:.............................

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador, conforme o endereço abaixo:

Nome: João Debastiani Neto

Endereço: Rua Mandaguari, nº 370 – AP. 13

(telefone/e-mail): (44) 84082716 / NETTO.JDN@HOTMAIL.COM

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

ANEXOS

ANEXO A: TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM BEA(12:11)

ENTREVISTADOR: São seis testes que eu vou fazer com você.

ENTREVISTADOR: Me responda o que você acha. Não tem certo ou errado, não se preocupe com isso, pois eu quero só avaliar o que você sabe, porque outras crianças vão ser analisadas também. O primeiro testinho que eu vou fazer com você: está vendo este tablado aqui?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Eu vou pedir pra você desenhar o maior quadrado possível nesta folha. O maior quadrado que você consegue desenhar nessa folha, desenha aqui pra mim. Nessa folha ai na sua mão.

BEA(12:11): Nessa folha aqui?

ENTREVISTADO: Não se preocupe em manter retinhas as formas. Quero que você desenhe o maior possível.

BEA(12:11): Faz mal ficar torto?

ENTREVISTADOR: Não se preocupa não.

ENTREVISTADOR: Este é o maior quadrado que você pode fazer nesta folha?

ENTREVISTADOR: Tem como fazer um quadrado maior que esse?

BEA(12:11): Acho que sim.

ENTREVISTADOR: Você acha que sim, por quê?

BEA(12:11):: Por que eu não usei aqui, nem aqui, podia ter feito maior aqui.

ENTREVISTADOR: Suponha que essa folha seja enorme, tem como desenhar um quadrado maior que esse?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: De que tamanho seria esse quadrado?

BEA(12:11): Depende do tamanho da folha.

ENTREVISTADOR: Depende do tamanho da folha. Existe um maior quadrado?

BEA(12:11): Não sei.

ENTREVISTADOR: Você acha que existe esse maior quadrado? Existe um quadrado bem maior de que todos os outros?

BEA(12:11): Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que não?

BEA(12:11): Por que eu acho que existe, "tipo" muitos quadrados e, e eu tenho certeza que não vai ter um maior. Porque esse maior vai ter outro igual. Eu sempre acho que... Ah eu não sei Neto, eu me empolgo toda.

ENTREVISTADOR: Pode falar, fica a vontade.

BEA(12:11): Mas eu não sei.

ENTREVISTADOR: Não se preocupa, relaxa.

BEA(12:11): Continua.

ENTREVISTADOR: E você acha que existe o maior quadrado? Existe um maior quadrado?

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: Não. Por que você acha?

BEA(12:11): Porque eu acho que sempre do maior quadrado vai ter um quadrado igual, um pouco maior, acho que vai ter outro.

ENTREVISTADOR: Você tem ideia do tamanho que seja esse maior quadrado possível?

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: Não? É maior que esse que você desenhou?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Só quero saber o seguinte, se eu tiver um quadrado, sempre é possível desenhar um maior que ele?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Então existe um maior quadrado?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Existe um maior quadrado possível de desenhar? Você acha que existe?

BEA(12:11): O maior possível, tipo não vai ter outro maior?

ENTREVISTADOR: Isso.

BEA(12:11): Agora eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Você acha que não vai ter?

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque sempre vai ter um maior que o outro.

ENTREVISTADOR: Então qual é o tamanho do maior?

BEA(12:11): Eu acho que é infinito. Não sei Neto.

ENTREVISTADOR: Não sabe. Ótimo, beleza.

ENTREVISTADOR: Agora eu quero que você desenhe em outra folha o menor quadrado possível de ser desenhado nessa folha.

BEA(12:11): Possível?

ENTREVISTADOR: O menor que você conseguir desenhar ai.

ENTREVISTADOR: Menor, menor, menor mesmo.

ENTREVISTADOR: Tá! existe um quadrado menor que esse? Tem como você desenhar um quadrado menor que esse?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Desenhe então.

ENTREVISTADOR: Existe um menor que esse ainda?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Tem como você desenhar ele?

BEA(12:11): Acho que não.

BEA(12:11): Vai ficar o tipo de um ponto.

ENTREVISTADOR: O tipo de um ponto? Certo. Mas existe um menor quadrado?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Qual é o tamanho desse menor quadrado?

BEA(12:11): Menor do que esse.

ENTREVISTADOR: É menor do que este.

BEA(12:11): Então.

ENTREVISTADOR: Existe o menor quadrado possível?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Você consegue desenhar ele?

BEA(12:11): Deixa eu tentar, eu não sei se consigo.

ENTREVISTADOR: Existe um quadrado menor do que este que você desenhou ainda?

BEA(12:11): Sim, mas eu não consigo desenhar ele não.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque senão não vai ficar na forma de um quadrado.

ENTREVISTADOR: Não vai ficar na forma de um quadrado?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: Eu só queria perguntar uma coisa pra você. Existe quadrado que não da pra desenhar? Existe um quadrado que a gente não consegue desenhar?

BEA(12:11): Quadrado que a gente não consegue desenhar. Hum acho que sim.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que sim?

BEA(12:11): Porque eu acho que ele muito pequeno que não dá pra, tipo, desenhar.

ENTREVISTADOR: Só muito pequeno?

BEA(12:11): Não, ou muito grande também.

ENTREVISTADOR: Ou muito grande também. Certo. Olha numa outra folha: você se lembra o que é isso aqui?

BEA(12:11): É um segmento de reta.

ENTREVISTADOR: É um segmento de reta. Vou pedir pra você desenhar nessa folha metade desse segmento, desenha metade dele. Não se preocupe em desenhar medidas exatas.

BEA(12:11): Metade dele?

ENTREVISTADOR: Metade dele.

ENTREVISTADOR: Desenha metade para mim. E desenha metade desse ai, e assim sucessivamente: metade, metade, metade...

BEA(12:11): Pronto.

BEA(12:11): Ai eu não fiz o pontinho, precisa?

ENTREVISTADOR: Não, não precisa não. Os pontinhos que você está falando é o A, B. Esses que tem aqui?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Certo, não precisa não.

ENTREVISTADOR: Vou perguntar, qual é o elemento partindo no meio esse segmento? O que vai sobrar?

BEA(12:11): A metade da outra metade.

ENTREVISTADOR: Sim, mas o último? Existe o último pedacinho?

ENTREVISTADOR: Você vai sempre partindo ao meio, partindo ao meio, existe o último pedacinho?

BEA(12:11): Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Você acha que não. O que é isso que você desenhou, esse último ai?

BEA(12:11): Esse último aqui é o que eu consegui desenhar menor.

ENTREVISTADOR: Existe um menor que esse?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Tem como desenhar?

BEA(12:11): Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque eu não consigo desenhar.

ENTREVISTADOR: Mas existe um menor que ele?

BEA(12:11): Ele vai ser minúsculo, quase...

ENTREVISTADOR: Vai ser?

BEA(12:11): Um segmento de reta.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que vai ser?

BEA(12:11): Porque ele vai ser metade do segmento de cima.

ENTREVISTADOR: O segmento de reta vai ser maior que o ponto? Ou menor que o ponto?

BEA(12:11): Maior, porque segmento de reta tem pontos infinitos.

ENTREVISTADOR: Então você está me dizendo que pra eu fazer um segmento de reta eu preciso de quantos pontos?

BEA(12:11): Não sei. Não sei, porque eu tenho um segmento, daí no segmento vai ter um monte de pontos, entende?

ENTREVISTADOR: E ai você sabe de quantos pontos precisa pra fazer o segmento?

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: Mais de dez?

BEA(12:11): Não sei.

ENTREVISTADOR: Então faz o seguinte, desenhe um segmento qualquer nesse, em outra folha em branco.

BEA(12:11): Qualquer uma.

ENTREVISTADOR: É. Um segmento qualquer.

ENTREVISTADOR: Ótimo. Você tem idéia de quantos pontos tem ai nesse segmento.

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: Certo. Se eu considerar dois pontinhos aqui, você me disse agora pouco que eu consigo um ponto no meio deles, não consigo?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Então desenha esse pontinho ai no meio pra mim. No meio desses dois.

ENTREVISTADOR: Eu consigo fazer um segmento de reta a partir disso ai que você fez?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Como?

BEA(12:11): Porque daí vai ter mais um aqui, daí entre esses vai ter mais um e entre esses vai ter mais um, e entre esses vai ter mais um.

BEA(12:11): Tipo, com muitos pontos eles são tipo como invisíveis, daí como eles são muitos, muitos, muitos, eles formam um segmento.

ENTREVISTADOR: Você está dizendo que um segmento é formado por muitos, muitos pontos?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Aí a gente liga esses muitos pontos?

BEA(12:11): Não sei se é ligar a palavra, mais é os pontos juntos faz o segmento.

ENTREVISTADOR: Certo, ótimo. É isso que eu queria saber.

BEA(12:11): Agora pegue a cadeira e a caneta.

ENTREVISTADOR: A faca é só pra cortar os objetos, fica tranqüila. Só pra isso.

ENTREVISTADOR: Bom é o seguinte. Temos cinco objetos aqui.

BEA(12:11): Uhum.

ENTREVISTADOR: Primeiro objeto, você lembra o que é esse objeto aqui?

BEA(12:11): Cilindro.

ENTREVISTADOR: É um cilindro.

ENTREVISTADOR: Eu vou fazer o seguinte com essa faca que você ficou com medo. Vou cortar o cilindro em varias posições e vou pedir pra você desenhar o que vai aparecer na lamina da faca quando eu corto. Por exemplo: Se eu cortar o cilindro paralelo a base dele, o que vai aparecer na lamina da faca? No corte que eu vou fazer paralelo a base?

BEA(12:11): Vai ficar suja ué.

ENTREVISTADOR: Não, mais que formato que aparece?

BEA(12:11): Que formato que eu consigo?

ENTREVISTADOR: Isso. Qual é a superfície dele? Quando eu corto, vai se dividir em duas partes o cilindro, Certo? Só que a superfície do novo cilindro, que é a parte de cima dele, que formato que vai ter? Quando eu corto aqui.

BEA(12:11): Se você cortar retinho vai ficar liso. Eu acho que vai ficar liso.

ENTREVISTADOR: Mas qual é o formato?

BEA(12:11): Como assim forma?

ENTREVISTADOR: Quando eu corto, aqui desse jeito. Você observa que vai fazer uma forma. Eu vou dividir em dois cilindros você concorda comigo?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Só que quando eu corto a superfície, quer dizer a parte de cima do cilindro o cilindro debaixo vai ter uma forma não vai? A parte de cima do cilindro.

BEA(12:11): Hum.

ENTREVISTADOR: Que forma que vai ter quando eu corto ele assim?

BEA(12:11): Forma, não to entendendo essa forma.

ENTREVISTADOR: Pode ser um triangulo um quadrado, um círculo, o que for.

BEA(12:11): Ah tá. Entendi.

ENTREVISTADOR: Eu vou pedir pra você desenhar pra mim, nessa folha, que formas vão aparecer na parte de cima desse novo cilindro quando eu corto.

BEA(12:11): Precisa ser perfeito?

ENTREVISTADOR: Não. Desenhe o que você acha que vai aparecer. O que vai ser?

BEA(12:11): Uma circunferência.

ENTREVISTADOR: Circunferência. Imagine que eu vou cortar esse cilindro agora paralelo as laterais. Vou cortar aqui olha.

BEA(12:11): Hum.

ENTREVISTADOR: De cima pra baixo, o que vai aparecer agora? Qual vai ser a nova forma que vai aparecer lá no meio.

BEA(12:11): Eu acho que é esse desenho aqui.

ENTREVISTADOR: O que é isto?

BEA(12:11): Eu acho que um retângulo.

ENTREVISTADOR: Retângulo?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: E se eu cortasse ele mais próximo aqui, da lateral?

BEA(12:11): Mas daí qual parte?

ENTREVISTADOR: De cima pra baixo, o que ia aparecer?

BEA(12:11): Eu sei, mas dessa parte que ficou ou dessa aqui?

ENTREVISTADOR: Não, dessa daqui que eu cortei. O que aparecer quando eu corto assim?

BEA(12:11): Ta. Eu acho que vai ficar tipo, tipo de um retângulo, um pouco mais fino.

ENTREVISTADOR: Mais fino?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: Agora eu vou fazer na outra folha a mesma coisa, só que para esse objeto aqui.

BEA(12:11): Tem que pegar outra folha?

ENTREVISTADOR: Isto, em uma outra folha.

ENTREVISTADOR: Que objeto é esse aqui, você se lembra?

BEA(12:11): Eu esqueci.

ENTREVISTADOR: Tá bom. Não vamos citar nomes.

BEA(12:11): Um prima não é?

ENTREVISTADOR: Um prisma. Está ótimo.

BEA(12:11): É prisma?

ENTREVISTADOR: Sim.

BEA(12:11): Não é prisma.

ENTREVISTADOR: É prisma.

BEA(12:11): Então ta, continua.

ENTREVISTADOR: Então ta.

ENTREVISTADOR: Se eu cortar ele nessa posição, paralela a base. O que eu vou obter?

BEA(12:11): Triângulo.

ENTREVISTADOR: Um triângulo. Se eu cortar lá em cima?

BEA(12:11): Um triângulo.

ENTREVISTADOR: Um triangulo. Do mesmo tamanho ou tamanho menor?

BEA(12:11): Do mesmo tamanho.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque aqui segue um padrão. Se você cortar aqui e aqui também.

ENTREVISTADOR: Tá.

BEA(12:11): Aqui não é menor que em cima.

ENTREVISTADOR: Ótimo. Se eu cortar agora paralelo a base, de cima para baixo. O que eu vou obter? Aqui no meio.

BEA(12:11): Eu acho que é um retângulo.

ENTREVISTADOR: Um retângulo? Certo.

ENTREVISTADOR: Se eu cortar aqui, quase na pontinha aqui.

BEA(12:11): Um retângulo mais fino.

ENTREVISTADOR: Um retângulo mais fino.

ENTREVISTADOR: Então por que você acha que vai ser mais fino?

BEA(12:11): Porque aqui tem uma medida e aqui tem outra.

ENTREVISTADOR: Tá agora eu vou pegar esse aqui. Suponha que esse aqui seja uma esfera perfeita, ta?

BEA(12:11): Perfeitinha né.

ENTREVISTADOR: Perfeitinha. Sem essas ondulações que o frio causou. Se eu cortar ela de cima para baixo, bem no meio vai me dar outra coisa. Desenhe para mim o que eu obtenho. De cima pra baixo.

BEA(12:11): Tá.

ENTREVISTADOR: Uma?

BEA(12:11): Circunferência. Um círculo.

ENTREVISTADOR: Existe diferença entre círculo e esfera?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Qual é a diferença?

BEA(12:11): A esfera é em 3D e o círculo não.

ENTREVISTADOR: Tá. Se eu cortar aqui olha, paralelo ao chão.

BEA(12:11): É uma esfera perfeita né?

ENTREVISTADOR: É uma esfera perfeita. O que eu obtenho quando corto aqui?

BEA(12:11): Um círculo.

ENTREVISTADOR: Do mesmo tamanho? Ou tamanho diferente desse primeiro?

BEA(12:11): Do mesmo tamanho.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que é do mesmo tamanho?

BEA(12:11): Porque a esfera é do mesmo tamanho. Porque a esfera é perfeita.

ENTREVISTADOR: Está bem. Se eu cortar agora só a tampinha aqui?

BEA(12:11): Hum.

ENTREVISTADOR: De cima pra baixo. O que eu vou obter?

BEA(12:11): Você vai obter uma esfera só que menor.

ENTREVISTADOR: Uma esfera?

BEA(12:11): Espera ai. Daqui para baixo?

ENTREVISTADOR: Vou cortar aqui olha. Nessa posição. O que eu vou obter?

BEA(12:11): Você vai obter o tipo de um, eu não sei o formato mais é meio arredondado. Assim mais ou menos.

ENTREVISTADOR: Quando eu corto aqui?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Lembrando que é uma esfera perfeita, ta?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Vai ser um objeto próximo desse?

BEA(12:11): Não mais você esta falando um pouquinho mais pra cá ou da tampa?

ENTREVISTADOR: É da tampa. Vou cortar de cima para baixo, vou cortar isso aqui oh, até lá embaixo. O que eu obtenho?

BEA(12:11): Ah ta, pensei que fosse mais pra lá.

ENTREVISTADOR: Não.

BEA(12:11): Uma esfera perfeitinha?

ENTREVISTADOR: É uma esfera perfeitinha.

BEA(12:11): Acho que com tamanho diferente.

ENTREVISTADOR: Diferente tamanho?

BEA(12:11): Aham. Acho que menor.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque daqui aqui tem uma medida, e daqui aqui outra medida.

ENTREVISTADOR: Ótimo. Vamos pegar a rosquinha agora.

BEA(12:11): Ham.

ENTREVISTADOR: É uma rosquinha.

BEA(12:11): Aham, troca de folha?

ENTREVISTADOR: Por favor. Se eu pegar a rosquinha e cortar a rosquinha nessa posição, de cima para baixo. O que eu vou obter?

BEA(12:11): Preciso desenhar desse jeito que vai ficar aqui?

ENTREVISTADOR: Você acha que precisa? Vou querer só a superfície.

BEA(12:11): Ah então é isso.

ENTREVISTADOR: Tá. Por que é circulo e não um quadrado?

BEA(12:11): Porque a esfera é redonda.

ENTREVISTADOR: A esfera?

BEA(12:11): A esfera, to louca, essa rosquinha aqui é redonda não é quadrada.

ENTREVISTADOR: Se fosse uma rosquinha quadrada, como que iria ficar?

BEA(12:11): Ia ficar assim.

ENTREVISTADOR: Certo. Se eu cortasse agora como se estivesse fatiando um pão.

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: O que iria aparecer?

BEA(12:11): (Realiza o desenho).

ENTREVISTADOR: Pra finalizar.

BEA(12:11): É o último esse?

ENTREVISTADOR: Não esse não é o último que eu tenho pra cortar.

BEA(12:11): Hum.

ENTREVISTADOR: Está com medo?

BEA(12:11): Estou com medo dessa faca.

ENTREVISTADOR: Tem mais uma folha em branco ai, não tem?

BEA(12:11): Tem, a última.

ENTREVISTADOR: Suponha que é uma estrela perfeitinha, ta?

BEA(12:11): Tá. Mas com esse tanto de lados ou...

ENTREVISTADOR: Quatro pontinhas mesmo.

BEA(12:11): Tá.

ENTREVISTADOR: Se eu cortar a estrela aqui olha, deixa eu facilitar sua visualização: cortar aqui ó, só a pontinha dela.

BEA(12:11): Quando você cortar a pontinha...

ENTREVISTADOR: Qual é a superfície que vai ser gerada, lá? Que nova superfície? Igual a gente fez nos anteriores.

BEA(12:11): (Realiza o desenho).

ENTREVISTADOR: Certo, tem que começar de cima para baixo. O que é isso?

BEA(12:11): Um quadrado.

ENTREVISTADOR: Um quadrado?

BEA(12:11): Só que um quadrado torto.

ENTREVISTADOR: Um quadrado torto.

BEA(12:11): Não esse quadrado meio ficou torto, só que é um quadrado.

ENTREVISTADOR: Um quadrado certinho e não um quadrado torto?

BEA(12:11): É que esse quadrado que eu fiz ficou torto.

ENTREVISTADOR: Tá bom. Se eu cortar de fora a fora, de ponta a ponta.

BEA(12:11): Hum.

ENTREVISTADOR: O que eu obtenho?

BEA(12:11): (Realiza o desenho).

ENTREVISTADOR: O que é isto?

BEA(12:11): Isto aqui é um, esqueci. Ah é um retângulo também.

ENTREVISTADOR: Mas o que você achou que era?

BEA(12:11): Ah é por que eu pensei numa figura tridimensional.

ENTREVISTADOR: Ta. Se eu cortar ela como se estivesse fatiando um pão?

BEA(12:11): Vai ficar...

ENTREVISTADOR: Vai ficar o que?

BEA(12:11): Vai ficar isso, só que mais fino.

ENTREVISTADOR: Só vou pedir o seguinte, se eu cortar agora, aqui olha; não sendo de fora a fora, assim de cima para baixo o que eu vou obter?

BEA(12:11): Eu acho que também um retângulo.

ENTREVISTADOR: Igual esse?

BEA(12:11): É só que menor.

ENTREVISTADOR: Menor?

BEA(12:11): Uhum.

ENTREVISTADOR: O último é este objeto em espiral.

BEA(12:11): Ham.

ENTREVISTADOR: Parece um espiral de caderno.

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Se eu cortar aqui, de cima para baixo, o que eu vou obter?

BEA(12:11): Nossa esse é complicado. Eu não sei. Deixa eu ver.

ENTREVISTADOR: Fique a vontade, pode pensar ai.

BEA(12:11): Se eu cortar assim, vai cortar em um monte de lugares (Pega uma folha em branco e faz um desenho do objeto sendo cortado).

ENTREVISTADOR: Certo. O que você acha que eu vou ter então?

BEA(12:11): Eu acho que um monte de circunferências (desenha em uma outra folha a representação da superfície gerada pelo corte).

ENTREVISTADOR: Porque você acha que é um monte de circunferências?

BEA(12:11): Porque ele é meio arredondado, e quando eu corto, vai cortar em um monte de lugares.

ENTREVISTADOR: Certo. Agora você vai sentar aqui.

BEA(12:11): É o último?

ENTREVISTADOR: Está acabando.

BEA(12:11): O que é isto?

ENTREVISTADOR: Bom é uma bela pergunta, observe esta folha e esse objeto. Existe diferença entre a folha e esse objeto aqui preto?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: O que é diferente?

BEA(12:11): Possui formato diferente. Além de ser um é bidimensional e o outro tridimensional, o formato desse é de dois cones meio triangular.

ENTREVISTADOR: Então esse aqui é dois cones. A superfície desses dois cones é como?

BEA(12:11): Ele é tipo inclinado.

ENTREVISTADOR: Inclinado?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: Eu vou fazer a seguinte questão pra você (apontando para superfície de uma pseudo-esfera) olha o que eu fiz: eu peguei um ponto aqui e outro ponto aqui.
BEA(12:11): Aham

ENTREVISTADOR: E eu liguei os dois pra medir o comprimento entre esses dois pontos com essa fita crepe amarela.

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Pergunto: está vendo a folha aqui embaixo?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Se eu fizer um furo aqui em cima (apontando para a pseudo-esfera), e projetar ele aqui embaixo.

BEA(12:11): Entendi.

ENTREVISTADOR: E depois no final desse aqui fizer a mesma coisa e ligar esses dois pontos (apontando para um outro lugar na pseudo-esfera) com a fita crepe da mesma cor, igualzinho. A quantidade de fita crepe que eu vou usar pra unir esses dois pontos na folha é a mesma que eu vou usar aqui (apontando para a trombeta) na superfície desse objeto preto aqui?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Mas a quantidade fica a mesma?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque você fez o furo aqui (apontando para a pseudo-espera onde o entrevistado fez o primeiro furo), então aqui vai ser a mesma coisa (apontando para a folha), depois aqui você fez a mesma coisa (apontando para o segundo furo), então aqui vai ser a mesma coisa (apontando para a fita).

ENTREVISTADOR: A mesma medida?

BEA(12:11): Uhum.

ENTREVISTADOR: Interfere o fato dela ser que nem você disse, meio inclinada assim (apontando para a trombeta), e aqui ser retinho (apontando para a folha)?

BEA(12:11): Acho que não.

ENTREVISTADOR: Acha que não? Então você quer dizer que a quantidade fica a mesma?

BEA(12:11): A mesma.

ENTREVISTADOR: Deste outro lado aqui (mostrando o outro lado da pseudo-esfera) que objeto eu tenho?

BEA(12:11): Um triângulo.

ENTREVISTADOR: Um triângulo. Vou pedir pra você desenhar este triângulo (apontando para a pseudo-esfera), aqui folha pra mim, por favor. Desenha o que você acha que vê.

BEA(12:11): Tá bom.

BEA(12:11): Um triângulo.

ENTREVISTADOR: É este o triângulo que você vê aqui?

BEA(12:11): É. Você pediu pra eu desenhar aqui.

ENTREVISTADOR: Desenha a forma que você vê.

BEA(12:11): Tá.

ENTREVISTADOR: É esta a forma deste triângulo ai?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: É a forma que você está vendo?

BEA(12:11): Mas (a criança parece confusa).

ENTREVISTADOR: Desenha a forma que exatamente você está vendo?

BEA(12:11): Estou vendo ele assim.

ENTREVISTADOR: Você está vendo ele assim?

BEA(12:11): To.

ENTREVISTADOR: Este triângulo você desenhou (indicando o primeiro triângulo que ela desenhou) por quê?

BEA(12:11): Porque este é um triângulo (indicando o primeiro desenho) e porque ai e o (apontando o segundo desenho) ah, porque foi o que eu imaginei do triângulo.

ENTREVISTADOR: Mas é este que você está vendo ou é este que você está vendo (mostrando os desenhos na ordem em que ela desenhou)?

BEA(12:11): Não é este (indicando seu último desenho), este aqui eu desenhei errado.

ENTREVISTADOR: Este é um triângulo (indicando o primeiro desenho que ela fez)?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: E este é um triângulo (apontando o segundo desenho)?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: E qual a diferença entre eles?

BEA(12:11): Que esse daqui, ai esse aqui é diferente mais é igual (apontando para os desenhos).

ENTREVISTADOR: O que ele tem de diferente?

BEA(12:11): Ele é curvado.

ENTREVISTADOR: O que é curvado?

BEA(12:11): As retas dele aqui.

ENTREVISTADOR: E o que mais?

BEA(12:11): Eu não sei falar. Tipo eu sei, mas eu não sei falar.

ENTREVISTADOR: Pode falar do jeito que você quiser. Não esquenta a cabeça com falar bonito não, pode falar.

BEA(12:11): É que isto aqui é de acordo com a forma (apontando para o segundo triângulo que ela desenhou) e este aqui é de acordo com o plano (apontando para o primeiro desenho). Sabe?

ENTREVISTADOR: Sim.

BEA(12:11): Se a gente, vamos supor que isso, se a gente abrir esse negócio (indicando a superfície da pseudo-esfera), vai dar isso.

ENTREVISTADOR: Entendi! Você está dizendo que se eu pegar...

BEA(12:11): Isso aqui do jeito que está e colocar aqui, vai dar isso.

ENTREVISTADOR: Certo. Esse e esse então são iguais ou diferentes (apontando as representações feitas)?

BEA(12:11): São iguais.

ENTREVISTADOR: São iguais. Vou perguntar pra você: se eu pudesse calcular a área desses triângulos, supondo que você disse que eles são iguais. Se eu descolar essa fita amarela e colar aqui no plano, viraria esse.

BEA(12:11): Tá.

ENTREVISTADOR: Vou perguntar: a área deste triângulo é igual a área deste triângulo (indicando os dois desenhos)?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que a área é igual?

BEA(12:11): Por que a área de qualquer triângulo é igual.

ENTREVISTADOR: É mas e se eu diminuir o tamanho do meu triângulo?

BEA(12:11): Vai ser igual também.

ENTREVISTADOR: Desenha um triângulo menor que esse (apontando o primeiro desenho que ela fez)?

BEA(12:11): (Desenhou um triângulo menos que o anterior).

ENTREVISTADOR: A área deste triângulo é igual a área deste triângulo?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Certeza?

BEA(12:11): Sim, pois a área de todos os triângulos é igual a180.

ENTREVISTADOR: Não isso.

BEA(12:11): Ah é isso é a soma dos ângulos, desculpa.

ENTREVISTADOR: Você acha que a área deste triângulo é igual a área deste triângulo (indicando o primeiro e o último desenho).

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: A área deste que você desenhou primeiro, é igual a área deste que você desenhou depois (apontando o segundo desenho)?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: A área destes são iguais?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: A área deste que você desenhou reto é igual a área deste que você desenhou torto?

BEA(12:11): Este é o mesmo triângulo entende? Do ponto de vista eles são diferentes mas eles são o mesmo triângulo.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Porque aqui é do jeito que eu vejo, mas se eu pegar e colocar vai dar esse.

ENTREVISTADOR: Você acabou de me dizer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180. Neste triângulo (apontando o triangulo da pseudo-esfera) você acha que a soma dos ângulos internos é 180 também?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Tem certeza?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que vai?

BEA(12:11): Porque é um triângulo.

ENTREVISTADOR: Porque é um triângulo?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: Ótimo. Agora você vai sentar naquela ali, que eu vou contar uma historinha pra você.

BEA(12:11): É pra levar a caneta?

ENTREVISTADOR: Traz a caneta.

ENTREVISTADOR: Senta aqui.

BEA(12:11): Tá.

ENTREVISTADOR: Vou contar uma história. Um urso estava na casa dele.

BEA(12:11): Hum.

ENTREVISTADOR: Partiu da casa dele e andou cem quilômetros ao sul e parou, daí ele virou e andou cem quilômetros pro leste.

BEA(12:11): Pro leste.

ENTREVISTADOR: Parou. Depois ele andou cem quilômetros para o norte.

BEA(12:11): Ham.

ENTREVISTADOR: Ele chegou de volta na casa dele.

BEA(12:11): Ham.

ENTREVISTADOR: Ele acabou voltando pra casa dele. Tem como isso acontecer?

BEA(12:11): Tá.

ENTREVISTADOR: Desenhe nessa folha em branco pra mim, por favor, o trajeto que ele percorreu.

BEA(12:11): Tá.

BEA(12:11): Andou assim, aqui é a casa dele. Ele saiu daqui e foi pra cá e virou.

ENTREVISTADOR: Tem como ele volta pra casa dele?

BEA(12:11): Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Porque ele saiu; andou cem quilômetros para o sul, cem para o leste e cem para o norte e eu estou afirmando que ele voltou pra casa dele. É possível isso acontecer?

BEA(12:11): Deixa eu pensar. Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que não?

BEA(12:11): Porque ainda faltam esses cem quilômetros para ele voltar.

ENTREVISTADOR: Tá. Faltam esses cem quilômetros pra ele voltar.

ENTREVISTADOR: Agora eu vou pedir pra você fazer o seguinte: está vendo essa esfera aqui?

BEA(12:11): To vendo essa esfera.

ENTREVISTADOR: Esse pontinho azul aqui em cima é a casa dele. Eu vou pedir pra você fazer o mesmo trajeto com essa caneta azul.

BEA(12:11): Tá bom.

ENTREVISTADOR: Ele andou cem quilômetros ao sul.

BEA(12:11): Ai ficou torto.

ENTREVISTADOR: Não esquenta a cabeça não.

ENTREVISTADOR: Parou andou cem quilômetros para o leste.

BEA(12:11): Espera aí.

ENTREVISTADOR: Ai ele parou e andou cem ao norte.

BEA(12:11): É possível.

ENTREVISTADOR: E ai, é possível?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: Por quê? Por que aqui na esfera é possível e na folha não é possível?

BEA(12:11): Por que a folha é quadrada, então não da pra formar um quadrado. Se a folha fosse uma bolinha igual essa esfera ia fazer a mesma coisa. Só que vamos supor que eu venha aqui, daí fica tipo aqui, aqui e aqui, tipo no formato de um triângulo sabe.

ENTREVISTADOR: Seria um triângulo esse caminho?

BEA(12:11): Isso, tipo isso.

ENTREVISTADOR: Por que é tão diferente da esfera e da folha?

ENTREVISTADOR: Você tem ideia o porquê é tão diferente? Por que aqui a gente não chega ao mesmo lugar. Aqui a gente chega na esfera a gente chega.

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: E na folha a gente não chega.

BEA(12:11): Mas vamos supor se a esfera fosse bidimensional, pode desenhar?

ENTREVISTADOR: Pode, pode.

BEA(12:11): Se a esfera fosse assim, aqui fica a casa dele; aí ela ia vir, vim e vim. Não ia dar também.

ENTREVISTADOR: Então você está me dizendo que se fosse algo bidimensional eu não consigo fazer?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: A esfera é bidimensional?

BEA(12:11): Não. Ela é tridimensional.

ENTREVISTADOR: Então você esta me dizendo que na esfera é possível, pois?

BEA(12:11): Porque aqui ah, porque aqui dá a visão que você, tipo, aqui você consegue girar ela conforme o; vamos supor primeiro você desce, ai você vira e depois você sobe, entendeu?

ENTREVISTADOR: Você iria conseguir fazer esse trajeto se não tivesse a esfera de isopor para ver isso?

BEA(12:11): Não.

ENTREVISTADOR: Se eu falasse pra você que é possível sem mostrar a esfera você imaginaria isso, ou não?

BEA(12:11): Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Você acha que não?

BEA(12:11): Haham.

ENTREVISTADOR: Ótimo, estão tá. Então vem.

BEA(12:11): Pode deixar aqui?

ENTREVISTADOR: Deixa ai no cantinho.

ENTREVISTADOR: Então ta bom. Agora vamos para a última questão.

BEA(12:11): Precisa levar a caneta?

ENTREVISTADOR: Não.

ENTREVISTADOR: Temos dois pastos. Neste pasto foram construídas quatro casas, e neste aqui não temos casas. Primeira coisa que pergunto: A quantidade de grama que tem para esse cavalo comer aqui é diferente da quantidade de grama para este outro comer aqui?

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Por que a quantidade que tinha de baixo desta casa ele pode comer mais. Ou pode?

ENTREVISTADOR: Então onde você acha que tem mais?

BEA(12:11): Neste aqui (pasto sem casas).

ENTREVISTADOR: Neste com o cavalo azul.

BEA(12:11): Neste tem mais grama para ele comer.

ENTREVISTADOR: Bom, o que aconteceu; um pessoal sabendo que este campo estava vazio, construiu casinhas aqui; quatro casinhas neste pasto. Agora eu pergunto: qual campo ou pasto tem mais grama? Neste que acabaram de construir as casas ou este que já tinham construído? Qual deles tem mais grama para o cavalinho comer?

BEA(12:11): Aquele ali (indicando o pasto com as casas espaçadas pelo campo).

ENTREVISTADOR: Por que você acha que é este?

BEA(12:11): Por que este (campo com as casas juntas), desde que construíram as casas, eles tiveram que tirar a grama, um pouco da grama.

ENTREVISTADOR: Sim.

BEA(12:11): E vamos supor, eles não tiraram só da casa, eles vão tirar mais daqui (ao redor da casa) pra poder construir.

ENTREVISTADOR: Tá. Mas eles não fizeram o mesmo para aquele ali? (outro campo)

BEA(12:11): Tá, mas a grama já voltou.

ENTREVISTADOR: Supondo que eles construam da mesma forma os dois.

BEA(12:11): Então tem a mesma quantidade.

ENTREVISTADOR: Porque você acha que tem?

BEA(12:11): Porque são os mesmos formatos não são?

ENTREVISTADOR: São.

BEA(12:11): Então não importa o lugar. Por que aqui ele perdeu assim (nos cantos), e aqui ele perdeu assim (no centro), mas ele vai ganhar porque aqui tem e ali não (se referindo à espaços que em um campo foram construídas as casas e no outro não).

ENTREVISTADOR: Interfere o fato de eu ter construído as quatro casas juntinhas e aqui eu construi as casas espaçadinhas. Interfere esse fato em ter mais ou menos grama?

BEA(12:11): Eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Porque você acha que não?

BEA(12:11): Porque se você juntar vai ter a mesma coisa, e se você separar também vai obter a mesma coisa. Então eu acho que não.

ENTREVISTADOR: Então tá. Ótimo.

ENTREVISTADOR: Agora eu vou pedir, por favor, que você pegue a cadeira e a caneta que eu vou fazer esse segundo teste aqui.

BEA(12:11): Este aqui?

ENTREVISTADOR: Esse aqui mesmo. Ótimo.

BEA(12:11): Sento aqui?

ENTREVISTADOR: Pode sentar aí mesmo. Fique a vontade.

ENTREVISTADOR: Você está vendo que eu tenho duas representações aqui: essa é um trapézio e essa um polígono qualquer.

BEA(12:11): Sim.

ENTREVISTADOR: Sabendo disso eu vou perguntar: Qual destas duas figuras tem área maior? A vermelha ou a preta?

BEA(12:11): Mais essas figuras aqui não tem tamanho. Tipo ela ta aqui.

ENTREVISTADOR: Mas ela não continua aqui?

BEA(12:11): É.

ENTREVISTADOR: Você está querendo dizer que ela não tem uma base é isso que está querendo dizer?

BEA(12:11): É, é a base que ta faltando.

ENTREVISTADOR: Por que precisamos da base?

BEA(12:11): Porque eu preciso da base pra calcular a área.

ENTREVISTADOR: Tá.

ENTREVISTADOR: Mas, e sem a base?

BEA(12:11): Se não tivesse base não dá.

ENTREVISTADOR: Observando elas, qual você acha que tem a área maior? A preta ou a vermelha?

BEA(12:11): Eu acho que é a vermelha.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que é a vermelha?

BEA(12:11): Porque aqui vai ter a medida aqui da base, e o outro, não sei se é base aqui ou o que é, daí quando você for multiplicando isso, com isso o resultado é que esse é maior que esse.

ENTREVISTADOR: Você esta me dizendo então que a vermelha vai ter a e a preta porque ela vai ter varias bases e varias alturas ai na hora que você somar...

BEA(12:11): Isso.

ENTREVISTADOR: Agora eu vou fazer uma coisinha que eu aprendi, me ensinaram isso.

ENTREVISTADOR: Você está entendendo o que eu estou querendo fazer?

BEA(12:11): Mais ou menos.

BEA(12:11): Agora que você montou eu acho que é a mesma.

ENTREVISTADOR: A mesma o que?

BEA(12:11): A mesma área.

ENTREVISTADOR: E se eu fizer isso aqui, se eu tirar. Qual dos dois tem maior área, vermelha ou a preta?

BEA(12:11): Como os dois são iguais eu acho que são iguais a área.

ENTREVISTADOR: As áreas são iguais por que as duas são iguais?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Certo. Se eu pegar e fizer isso aqui agora, mudar a figura.

ENTREVISTADOR: Vou perguntar novamente, qual delas tem a maior área? A vermelha ou a preta?

BEA(12:11): Eu acho que as duas são iguais.

ENTREVISTADOR: Por que você acha que é igual?

BEA(12:11): Porque é a mesma coisa, só que você mudou.

ENTREVISTADOR: Mais você lembra o que você disse na primeira vez?

BEA(12:11): Ah não, tá certo.

ENTREVISTADOR: Está certo o que?

BEA(12:11): Que eu disse que aqui depende da medida e aqui também. Como aqui é maior e aqui é menor eu acho que a preta é maior.

ENTREVISTADOR: Você acha que a preta ainda continua maior?

BEA(12:11): Aham.

ENTREVISTADOR: Por quê?

BEA(12:11): Por que aqui é menor e aqui é menor que no preto.

ENTREVISTADOR: Então por a base ser maior e os lados serem maiores então você está me dizendo que a preta vai ser maior que a vermelha?

BEA(12:11): É porque vamos supor que aqui é assim, aqui é cinco (um lado) e aqui é cinco (outro lado do polígono), então todos são cinco. Agora aqui é dez (trapézio preto), e aqui é cinco, vai ser cinquenta.

ENTREVISTADOR: Certo. Entendi.