UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

JOÃO HENRIQUE LORIN

UMA REVOLUÇÃO CIENTÍFICA NA MATEMÁTICA: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano

Maringá
2009

JOÃO HENRIQUE LORIN

UMA REVOLUÇÃO CIENTÍFICA NA MATEMÁTICA: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira.

Co-Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros.

Maringá
2009

JOÃO HENRIQUE LORIN

UMA REVOLUÇÃO CIENTÍFICA NA MATEMÁTICA: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do titulo de Mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Clélia Maria Ignatius Nogueira
PCM/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
PCM/Universidade Estadual de Maringá (co-orientador)

Profª. Drª. Luiza Marta Bellini
DFE/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. João Carlos Gilli Martins
Universidade Federal de Santa Maria - RS

Aprovada em: 15 de julho de 2009.
Local da defesa: Anfiteatro Adelbar Antonio Sampaio, bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

DEDICATÓRIAS

Dedico este trabalho a todos meus familiares, em especial a meus pais, a meus cinco irmãos e a minha querida Ana Paula.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a meus pais, João Lorin e Maria Aparecida Lorin pelo apoio e carinho recebido nestes meus 30 anos de vida.

Agradecer todos meus irmãos: Tânia, Flávia, Rafael e Rafaela e, em especial, meu irmão mais velho Celso Marcio Lorin, por dar os subsídios necessários para minha formação e sempre que possível, debateu idéias das mais variadas áreas que ajudaram a sedimentar meus pensamentos.

Um muito obrigado para minha orientadora, a Drª Clélia, que desde a minha graduação me incentivou a me aventurar nos caminhos da história dos conhecimentos matemáticos, mas em especial agradecer pela paciência que teve comigo na elaboração deste trabalho, pois como diria minha mãe: “se fosse outro...”

Agradecer a todos os meus amigos que fiz neste percurso desde minha graduação, que são muitos, em especial, o Valter, Eduardo, Fábio, Talita, Marcele, Jair, Éderson, Wesley, Bruno e outros.

Aos meus companheiros de trabalho do DMA-UEM, em especial aos professores Valdeni, João Cesar, João Gerônimo e ao professor Rui Marcos meu co-orientador.

Agradecer toda minha família, meus tios pela ajuda na época das vacas magras..., meus cunhados pelo apoio quando necessário, minha querida e saudosa avó Ambrosina Augusta de Jesus.

E para finalizar, um agradecimento mais que especial para minha esposa e companheira Ana Paula Zanin Lorin, pela sua compreensão e carinho nos momentos adversos.

EPÍGRAFE

O mistério da vida me causa a mais forte emoção. É o sentimento que suscita a beleza e a verdade, cria a arte e a ciência. Se alguém não conhece essa sensação ou não pode mais experimentar espanto ou surpresa, já é um morto-vivo e seus olhos se cegaram.

(ALBERT EINSTEIN)

Uma Revolução Científica na Matemática: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano

RESUMO

Esta dissertação teve como objeto de estudo a análise da constituição das medidas incomensuráveis - ou números irracionais - pela teoria da ciência elaborada por Thomas Kuhn. O problema se delimitou na compreensão da constituição do paradigma pitagórico e do paradigma euclidiano. O principal objetivo deste trabalho foi identificar se a descoberta das medidas incomensuráveis causou ruptura no desenvolvimento da ciência matemática, identificando na elaboração histórica desta teoria uma descontinuidade no processo de construção do conhecimento matemático. O procedimento metodológico adotado foi a pesquisa documental e bibliográfica para levantamento e análise dos textos históricos. Como resultado, obtivemos que a teoria kunhniana pode ser aplicada em seus aspectos centrais ao estudo histórico e epistemológico da matemática, em específico, na mudança da matemática pitagórica para a geometria euclidiana.

Palavras chave: medidas incomensuráveis, paradigmas, epistemologia, matemática.

A Scientific Revolution in Mathematics: pythagorean paradigm of the euclidean paradigm.

ABSTRACT

This dissertation has as study object the analysis of the constitution of the incommensurable measures - or irrational numbers - for the theory of the science elaborated for Thomas Kuhn. The problem if delimits in the understanding of the constitution of the paradigm pythagorean and the euclidean paradigm. The main objective of this work was to identify if the discovery of the incommensurable measures caused rupture in the development of mathematical science, identifying in the historical elaboration of this theory a discontinuity in the process of construction of the mathematical knowledge. The adopted methodological procedure was bibliographical the documentary research and for survey and analysis of the historical texts. As result, we got that the kunhniana theory can be applied in its aspects central offices to the historical and epistemological study of the mathematics, in specific, the change of the pythagorean mathematics for euclidean geometry.

Keywords: irrational numbers, paradigms, epistemology, mathematics

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

I. INTRODUÇÃO

O objeto de estudo deste trabalho é a análise da constituição das medidas incomensuráveis - ou números irracionais - na ótica de sua história compreendida entre os séculos V e IV a. C., e da teoria da ciência elaborada por Thomas S. Kuhn.

Na comunidade matemática a visão positivista[1] de como se constrói o conhecimento se sobrepõe a qualquer outra visão epistemológica. Kuhn (2006) caracteriza esse modo de desenvolvimento científico cumulativo, como desenvolvimento científico normal.

> A ciência normal é aquela que produz os tijolos que a pesquisa científica está sempre adicionando ao crescente acervo de conhecimento científico (KUHN, 2006, p. 23).

Toda tentativa de um olhar mais cuidadoso na historiografia da matemática, levando em consideração as influências sociais, políticas e psicológicas, encontra grandes resistências.

Neste trabalho pretendo apresentar outra concepção de desenvolvimento da matemática trilhando os caminhos da história, da filosofia e da epistemologia, enveredando pela teoria kuhniana e mostrando que os principais aspectos das teses de Kuhn se aplicam ao processo de produção do conhecimento

---

[1] "Como teoria do saber, o positivismo nega-se a admitir outra realidade que não sejam os fatos e a investigar outra coisa que não sejam as relações entre os fatos. Pelo menos ao que se refere à explicação, o positivismo sublinha decididamente o *como* e evita responder ao *quê* e ao *para quê*" (MORA, 1982, p. 314).

"Francis Bacon foi um dos primeiros a tentar articular o que é o método da ciência moderna. No início do século XVII, propôs que a meta da ciência é o melhoramento da vida do homem na terra e, para ele, essa meta seria alcançada através da coleta de fatos com observação organizada e derivando teorias a partir daí. Desde então, a teoria de Bacon tem sido modificada e aperfeiçoada por alguns, e desafiada, de uma maneira razoavelmente radical, por outros. [...] O positivismo lógico foi uma forma extrema de empirismo, segundo o qual as teorias não apenas devem ser justificadas, na medida em que podem ser verificadas mediante um apelo aos fatos adquiridos através da observação, mas também são consideradas como tendo significado apenas até onde elas possam ser assim derivadas" (CHALMERS, 1993, p. 20).

matemático, seguindo a orientação, deixada por Gilli Martins (2005) em sua tese de doutorado *Sobre revoluções científicas na matemática*.

Algumas perguntas que surgiram naturalmente são: a tese de Thomas S. Kuhn se aplica à matemática, ou, dito de outra forma, seria possível analisar o desenvolvimento da matemática não mais como tijolos sobrepostos? Estariam presentes no processo de produção da matemática, as rupturas de paradigmas que caracterizam a Ciência enquanto tal? Se as respostas a estas perguntas forem afirmativas, e pretendo fundamentar isto, o problema de minha pesquisa é: pode-se compreender a passagem da matemática produzida pelos pitagóricos até a matemática euclidiana como uma revolução científica nos moldes da teoria da ciência de Thomas Kuhn?

Minha vivência acadêmica me permitiu constatar que a grande maioria dos professores de matemática, filósofos da matemática e matemáticos com os quais tive contato, seja um contato direto por debates ou por meio de seus livros e/ou manuais, consideram a ciência matemática independente das influências sociais e culturais, e consideram seu desenvolvimento sempre contínuo e cumulativo. A concepção desses estudiosos em relação ao processo de produção do conhecimento matemático pode ser ilustrada pela metáfora da grande parede de tijolos, na qual cada um se sobrepõe aos outros, formando assim o indestrutível edifício do conhecimento matemático.

> A matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens (CARAÇA, 1984, XIII).

Como exemplo da concepção de cumulatividade do conhecimento matemático, podemos apresentar a décima lei do artigo *Ten “laws” concerning patterns of change in the history of mathematics* (CROWE, 1975 in GILLIES, 1995, p. 19) que diz: “Em matemática nunca ocorreram revoluções” e ainda segue,

> Meu argumento baseou-se em uma distinção entre descobrimentos transformativos ou revolutivos (a astronomia transformou-se de Ptolomeu a Copérnico) e descobrimentos formativos (nos quais se formam ou se criam novos ramos sem que se destruam as doutrinas anteriores, por exemplo, a conservação da energia ou a espectroscopia). Acredito que seja este último processo, e não o anterior, que ocorre na história da matemática. Por exemplo, Euclides não foi destronado, mas continua reinando juntamente com as diversas geometrias não euclidianas (CROWE, 1975 in GILLIES, 1995, p. 19).

Crowe (1975) *in* Gillies (1995) cita ainda vários matemáticos que serviram de base para sua concepção de cumulatividade e continuidade do conhecimento matemático. Entre esses, podemos destacar:

> [...] essa difícil ciência [a matemática] se forma lentamente, porém preserva cada princípio que ela obteve anteriormente; ela cresce e se fortifica em meio a muitas variações e erros da mente humana (*FOURIER*[2]).
>
> Em muitas ciências, uma geração destrói completamente o que outra havia construído... Somente em matemática, cada geração constrói um novo conto à antiga estrutura (*HANKEL*[3]).
>
> [...] enquanto imaginação, fantasia e invenção são a alma da pesquisa matemática, em matemática jamais houve uma revolução (*TRUESDELL*[4]).
>
> (CROWE, 1975 *in* GILLIES, 1995, p. 19).

Por outro lado, encontramos filósofos que partilham parcialmente das idéias de Kuhn quando se referem à ciência matemática. Por exemplo, o filósofo da matemática Herbert Mehrtens (1976) em *T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics* escreveu:

---

[2] J. B. Fourier, na sua Teoria Analítica do Calor em 1822 [Théorie analytique de la chaleur] (1953, p. 7).
[3] H. Hankel em 1869 (MORITZ 1942, p. 14).
[4] Truesdell (1968, prefácio).

> O modelo geral da teoria da estrutura das revoluções científicas de T. Kuhn parece não ser aplicável à matemática. Contudo, muitas das concepções de Kuhn permanecem valiosas para a historiografia da ciência, ainda que se rejeite o modelo básico da teoria (MEHRTENS, 1976 *in* GILLIES, 1995, p. 35).

Gilli Martins (2005), sobre o mesmo assunto, acrescenta:

> Como não encontramos filósofo da matemática algum cuja posição a respeito desse assunto não se situasse entre a posição mais categórica de Crowe e a menos radical de Mehrtens, achamos desnecessário apresentar, aqui, uma resenha sobre o que pensam todos esses filósofos a respeito da pertinência, ou não, das teses de Thomas Kuhn para se analisar a história da matemática.
>
> O que é importante ressaltar, entretanto, é a unanimidade entre esses filósofos em não admitir que as revoluções, na forma como são apresentadas em A Estrutura das Revoluções Científicas, ocorrem na matemática (GILLI MARTINS, 2005, p. 1).

Nossa tese é a de que a mudança no fazer matemático após a descoberta dos números irracionais pode ser pensada por meio da teoria da ciência de Kuhn. Apoiamo-nos para esta afirmação nos estudos de Gilli Martins (2005), que analisou o desenvolvimento histórico do primeiro paradigma da álgebra, desde a publicação de *Kitab al mukhatasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, de Al-Khwarizmi (800-847) e, tomando como base as obras de Al-Khwarizmi (800-847), Gauss (1777-1855), Abel (1802-1829), Galois (1811-1832), Peacock (1791-1858) e Hamilton (1788-1856), concluiu que o processo de mudança da álgebra aritmética para a álgebra abstrata apresenta uma ruptura no sentido kuhniano, e uma mudança de paradigma na constituição deste conhecimento matemático.

Admitindo, portanto, fundamentado nos estudos de Gilli Martins (2005), a aplicação da teoria kuhniana ao desenvolvimento da matemática, é legítimo supor que outros conceitos ou teorias matemáticas também apresentem rupturas no sentido kuhniano em sua constituição. Analisando a história da matemática, julgamos que o período do desenvolvimento da matemática grega, especificamente a passagem da matemática pitagórica baseada numa aritmética dos números inteiros, para a matemática desenvolvida a partir da escola platônica baseada na construção por régua e compassos e difundida pelos *Elementos* de Euclides passou por uma mudança paradigmática em consequência da descoberta da incomensurabilidade da diagonal do quadrado.

A “descoberta” de grandezas incomensuráveis parece ter influenciado para a decadência da filosofia pitagórica.

> A descoberta da existência dos irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros (EVES, 1995, p. 106).

Neste trabalho, o objetivo é a análise, fundamentada pela teoria kuhniana, das conseqüências no desenvolvimento da matemática, causadas pela constatação dos pitagóricos de que nem sempre é possível a representação de duas grandezas por um par de inteiros[5], da qual advêm os números irracionais. Dito de outra forma: investigar se a passagem da matemática produzida pelos pitagóricos para a geometria euclidiana apresenta rupturas, no sentido dado pela teoria de Thomas S. Kuhn, a exemplo do que foi identificado por Gilli Martins (2005) quando analisa o desenvolvimento do primeiro período de pesquisa normal da álgebra. Essa tarefa se traduziu, portanto, em identificar e descrever, no desenvolvimento histórico da matemática grega que vai aproximadamente do século V a.C. com o surgimento da escola pitagórica até o século IV com a elaboração da teoria das proporções e o método da

---

[5] Este problema é geralmente apresentado fazendo a relação da medida do lado de um quadrado com a medida de sua diagonal.

exaustão por Eudoxo, as etapas[6] estabelecidas na teoria de Thomas Kuhn no processo de construção do conhecimento matemático.

Como diretriz para nossa investigação, consideramos a interpretação de Gilli Martins (2005) de que uma revolução científica na matemática se dá nos modos de produção de significado[7] dos objetos constituídos nessa área do conhecimento[8], investigando a mudança de significado do objeto “diagonal de um quadrado”.

Procedimentos metodológicos

O desenvolvimento deste trabalho se deu pela metodologia da pesquisa documental e bibliográfica. Segundo (LAKATOS; MARCONI, 2007, p. 176), “A característica da pesquisa documental é que a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo o que se denomina de fontes primárias”. E “A pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc” (LAKATOS; MARCONI, 2007, p. 185).

Para se enquadrar neste tipo de investigação, identificamos livros, artigos e textos científicos sobre a história da matemática e filosofia, enfatizando o

[6] Período pré-paradigmático (escolas), período de ciência normal (estabelece-se um paradigma), período de crise (aparecimento de uma anomalia), período de ciência extraordinária (tentativas de solucionar a crise) e por fim, uma nova ciência normal com o estabelecimento de um novo paradigma.

[7] Nesta dissertação o termo significado será o mesmo que no trabalho apresentado por Gilli Martins, tomado na formulação proposta pelo Modelo Teórico dos Campos Semânticos: significado é o que pode e é efetivamente dito sobre um objeto no interior de uma atividade. (GILLI MARTINS, J. C., 2005, p.11).

[8] Considerando que o processo de produção do conhecimento matemático e o das ciências experimentais se identificam pelos procedimentos lógico-dedutivos, mas se diferenciam pela “natureza distinta do fenômeno (no caso das ciências) e do objeto (no caso da matemática pura) observados”, na matemática a revolução científica, se dá de uma maneira sutil, porém não menos impactante, nos modos de produção de significado dos fatos (GILLI MARTINS, 2005, p.89).

desenvolvimento da matemática grega nos séculos V e IV a.C. Levantamos, também, fontes sobre a teoria dos paradigmas de Thomas Kuhn e/ou suas relações com o desenvolvimento da matemática.

II. A DESCONTINUIDADE NA CONSTITUIÇÃO DA MATEMÁTICA

> Não pensamos que exista um discurso neutro, imparcial, desprovido de ideologias; nem mesmo, como querem os positivistas, os discursos científicos (GILLI MARTINS, 2005, p. 5).

Nesta seção apresentamos o debate sobre a constituição do conhecimento matemático do ponto de vista da teoria kuhniana, que difere da visão de um processo contínuo e cumulativo de desenvolvimento desta ciência. As concepções de cumulatividade e continuidade do desenvolvimento da matemática são senso comum na opinião da maioria dos matemáticos e filósofos da matemática, como já foi mencionado na introdução desta dissertação, isso fica evidente nas palavras de Russell que escreve:

> A matemática é um estudo que, quando iniciado de suas partes mais familiares, pode ser levado a efeito em duas direções opostas. A mais comum é construtiva, no sentido da complexidade gradativamente crescente: dos inteiros para as frações, os números reais, os números complexos; da adição e multiplicação para a diferenciação e integração e daí para a matemática superior (RUSSELL, 1981, p. 9).

A outra direção a que se refere Russell (1981) é a filosofia da matemática, que, contrasta com o que ele chama de matemática comum.

Nas ciências ditas naturais e experimentais a visão única de que o conhecimento é produzido num processo contínuo e cumulativo, tijolo por tijolo começou a ser desconstruída por Thomas S. Kuhn no livro *A Estrutura das Revoluções Científicas*, publicado na década de 60, do século XX.

Um breve esboço da teoria kuhniana

Kuhn (2007) afirma que a história apresenta um papel fundamental na construção e compreensão da ciência. Todavia, a maioria dos cientistas utiliza apenas "anedotas e cronologias[9]" na produção de seus textos, em especial os livros didáticos. Esses textos são usados no ensino, em qualquer nível, e contribuem segundo Kuhn (2007) para persuadir as mentes que continuarão a reproduzir suas crenças, teorias e técnicas, as quais, por sua vez, direcionarão as pesquisas científicas.

A história de uma ciência reduzida às "anedotas e cronologias" não demonstra a complexidade do processo de sua construção e é apresentada de uma maneira livre de contradições e problemas, numa visão irreal e distorcida desse processo. Ainda segundo Kuhn (2007), concebida dessa forma, a história da ciência cumpre o papel de um guia ou folheto turístico de uma nação que, além de divulgar poucas localidades mostra apenas os "bons" resultados ou belezas naturais, levando-nos a uma visão equivocada do país.

Como, então, devemos proceder em um estudo histórico de uma ciência, se na maioria dos manuais didáticos e textos científicos os fatos se apresentam como a - históricos? Para Kuhn (2007, p.21) "A mesma pesquisa histórica, que mostra as dificuldades para isolar invenções e descobertas individuais, dá margens a profundas dúvidas a respeito do processo cumulativo [...]". Desse modo, para este autor, seria preciso uma revolução historiográfica, sendo que, a compreensão dos fatos ou teorias de contextos históricos diferentes e distantes do atual, deveria ser analisada mediante os relatos de contemporâneos a eles. Ou seja, deveria ser vista mediante o contexto histórico e epistemológico de suas épocas.

> Os historiadores da ciência, gradualmente e muitas vezes sem se aperceberem completamente do que estavam fazendo, começaram a se colocar novas espécies de questões e a traçar linhas diferentes, freqüentemente não cumulativas, de desenvolvimento para as ciências. Em vez de procurar as contribuições permanentes de uma ciência mais antiga para nossa perspectiva privilegiada, eles procuram apresentar a integridade histórica daquela ciência, a partir de sua própria época (KUHN, 2007, p. 21).

[9] Termos utilizados por Thomas Kuhn

Para que possamos entender o que Kuhn propõe é necessário primeiro compreender os elementos fundamentais em sua teoria: período pré-paradigmático, ciência normal, paradigma, anomalia de um paradigma, revolução científica e incomensurabilidade.

O período em que ocorrem os primeiros estágios do desenvolvimento de uma ciência é denominado por Kuhn (2007), de *escolas*, ou de *período pré-paradigmático*. Neste período as diversas explicações para um mesmo fenômeno são co-existentes. Porém este período desaparece quando uma dessas escolas se sobressai perante as outras, ou seja, suas crenças e preconceitos característicos começam a serem praticadas pela maioria dos cientistas (KUHN, 2007).

Kunh (2007) denomina *ciência normal* as atividades científicas fundadas em uma ou mais realizações científicas, isto é, realizações suficientemente sem precedentes na explicação de fenômenos observáveis ou em estudo, e suficientemente abertas para atraírem a atenção da comunidade científica para a construção de uma teoria emergente. A gama de problemas a serem atacados pelo grupo de cientistas que compartilham as mesmas crenças, ferramentas, compromissos teóricos e metodológicos norteados por estas realizações. A pesquisa científica aprofunda-se praticamente apenas em períodos de ciência normal, com a comunidade de estudiosos que concordam com as “regras” e “estrutura de pesquisa” vigente, se empenhando em resolver problemas que Kuhn denomina de “quebra-cabeças” ou “enigmas”.

Esse grupo de cientistas é chamado de *comunidade cientifica* e os problemas que serão resolvidos por ela comumente são apresentados em textos que servem de base para as pesquisas da comunidade. Alguns exemplos de realizações científicas que Kuhn (2007) apresenta são: *A Física,* de Aristóteles, *O Almagesto,* de Ptolomeu, *De Revolutionibus Orbium Coelestium,* de Copérnico, *Química,* de Lavoisier, *Principia e Óptica,* de Newton *e Geologia,* de Lyell. Esses tratados serviram durante anos e até mesmo séculos, para pesquisas, atraindo a maioria dos cientistas de determinada comunidade cientifica, praticamente excluindo estudiosos que não compartilhavam da mesma visão.

Os problemas, as crenças teóricas gerais, os métodos e instrumentos de investigação, que norteiam as pesquisas no período de ciência normal, também chamada de *pesquisa normal*, são definidos por Kuhn (2007) como *paradigmas*. Dito de outra forma, o paradigma é que determina quais perguntas e regras são permissíveis e admitem respostas dentro da atividade de ciência normal. Por exemplo, o problema - qual força poderia mover os planetas? - não era uma pergunta permissível na física Aristotélica, porque a comunidade científica filosófica da antiguidade transitava em um domínio que não estava sujeito às leis de força; que só se afirma com Galileu e Kepler séculos mais tarde.

O período de desenvolvimento da “ciência normal” é puramente cumulativo; nesta fase a comunidade científica concentra sua força no desenvolvimento das especificidades de cada ciência pelo poder minucioso da pesquisa normal, aprimorando assim, o paradigma vigente (KUHN, 2007).

> A pesquisa normal, que é cumulativa, deve seu sucesso à habilidade dos cientistas para selecionar regularmente fenômenos que podem ser solucionados através de técnicas conceituais e instrumentais semelhantes às já existentes (KUHN, 2007, p. 130).

Os problemas que surgem no período de pesquisa normal e dos quais se ocupam os cientistas da comunidade são, basicamente, de dois tipos. Os do primeiro tipo são aqueles que podem ser resolvidos apenas com o aprimoramento do paradigma, isto é, depois de algum tempo aparece um resultado proveniente da pesquisa normal que solucionará o problema. Já os do segundo tipo são aqueles que, apesar dos esforços incessantes da comunidade, não encontram solução aceitável dentro das regras do paradigma vigente. Surge, então, o que Kuhn chama de *anomalia* (KUHN, 2007).

Quando uma anomalia é encontrada pelos cientistas elas são enfrentadas fundamentalmente de três maneiras: primeiro, a comunidade científica debruça-se sobre a anomalia para tentar tornar o que é anômalo em previsível pelo paradigma; se não conseguirem tal feito, uma alternativa é deixar o problema para que futuras gerações possam resolver tal anomalia com novas tecnologias e ou novos aportes teóricos agregados ao corpus de conhecimento; outra alternativa é que eles ignorem a anomalia e migrem para outro campo de pesquisa. Entretanto, na tentativa de resolver uma anomalia, em sua grande maioria, os cientistas não expõem suas tentativas frustradas para outros membros da comunidade com medo de ficar explicitado seu próprio insucesso (KUHN, 2007).

Quando a anomalia toma proporções grandiosas na comunidade cientifica, chamando a atenção da maioria dos seus membros, inicia-se uma crise no atual paradigma. Conseqüentemente, haverá busca pela solução, e o problema não será incorporado pelo paradigma. É o período que Kuhn chama de *pesquisa extraordinária*, no qual os resultados não são mais cumulativos e contínuos.

Para compreender as características de um período de crise na ciência exigem-se esforços, pois para Kuhn (2007), é necessária uma abordagem tanto psicológica quanto histórica. Na descoberta científica a “novidade somente emerge com dificuldade” que se manifesta pela resistência dos cientistas em aceitar o novo porque contrapõe com as expectativas fornecidas pelo “pano de fundo” da teoria, ou seja, o paradigma.

Os cientistas passam a se sentir inseguros em sua profissão quando problemas sérios começam a ser explicitados - pela anomalia - no paradigma, e ainda, suas crenças começam a perder força, e as regras deste paradigma tendem a se fragmentar. Cientistas começam a demonstrar inquietação e descontentamento com o paradigma e lançam artifícios filosóficos e metafísicos para defender seus pontos fora dos marcos do paradigma anômalo.

> Uma vez que um paradigma tenha sido enfraquecido e solapado a tal ponto, que seus proponentes perdem a confiança nele, chega o tempo da revolução (CHALMERS, 1993, p. 130).

Neste período de crise-revolução a insegurança impera entre a comunidade e o paradigma norteador das pesquisas é abandonado e revolucionariamente substituído por outro.

De tempos em tempos - nos exemplos preferidos de Kuhn, quando há uma crise que o paradigma não pode resolver de comum acordo – o paradigma muda; uma comunidade nova de estudiosos não só muda as visões que eles têm da sua ciência, mas também os tipos de perguntas e respostas possíveis. Esta mudança de paradigma é uma revolução científica (HODGKIN, 2005).

> [...] consideramos revoluções científicas aqueles episódios de desenvolvimento não-cumulativo, nos quais um paradigma mais antigo é total ou parcialmente substituído por um novo, incompatível com o anterior. [...] iniciam-se com um sentimento crescente, também seguidamente restrito a uma pequena subdivisão da comunidade científica, de que o paradigma existente deixou de funcionar adequadamente na exploração de um aspecto da natureza (KUHN, 2007, p. 125).

Mas por qual razão a aceitação de uma nova teoria, ou de um novo fenômeno, deve exigir a rejeição de um paradigma mais antigo? Sobre isso, Kuhn afirma que:

> [...] se as novas teorias são chamadas para resolver as anomalias presentes na relação entre uma teoria existente e a natureza, então a nova teoria em algum ponto se difere nas predições de sua predecessora! Esta diferença não poderia ocorrer se as duas teorias fossem logicamente compatíveis. No processo de sua assimilação, a nova teoria, esta deve ocupar o lugar da anterior (KUHN, 2007, p. 131).

A rejeição ao velho paradigma se dá pelo fato das duas teorias serem *incomensuráveis*, termo usado por Kuhn, metaforicamente, fazendo alusão ao termo incomensurabilidade[10] na matemática.

> Passaram-se vinte anos desde que Paul Feyerabend e eu usamos pela primeira vez, em textos publicados, um termo que tínhamos emprestado da matemática para descrever a relação entre teorias científicas consecutivas (KUHN, 2006, p. 47).

Pela teoria da ciência kuhniana, podemos, então, entender o termo incomensurabilidade, utilizando a metáfora da seguinte maneira:

> A expressão "nenhuma media comum" passa a ser "nenhuma linguagem comum". A afirmação de que duas teorias são incomensuráveis é, assim, a afirmação de que não há uma linguagem, neutra ou não, em que ambas as teorias, concebidas como conjunto de sentenças, possam ser traduzidas sem haver resíduos ou perdas (KUHN, 2006, p. 50).

Ao contrário da teoria de Kuhn, a concepção positivista de que o conhecimento matemático é produzido de maneira contínua e acumulativa, restringe o alcance de novas teorias, já que estas não podem contradizer de modo algum as que as precederam, e assim, novas teorias nunca são incomensuráveis com uma teoria anterior. Um dos principais argumentos usados por quem defende esta posição emerge da discussão sobre a relação da teoria dinâmica einsteiniana atual e as equações dinâmicas mais antigas, que vem dos *Principia* de Newton. Do ponto de vista da teoria da ciência de Kuhn as teorias são logicamente incompatíveis. Já pela visão do positivista-lógico, a dinâmica de Newton deriva da dinâmica de Einstein (KUHN, 2007).

Sobre os argumentos utilizados pelo ideário positivista de que a dinâmica relativista não poderia ter invalidado a dinâmica newtoniana - pois esta ainda serve de base para os engenheiros e muitos físicos - e de que a teoria de

---

[10] "Recordemos de onde veio o termo 'incomensurabilidade'. A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles é incomensurável relativamente a qualquer um dos catetos do triângulo, assim como a circunferência de um círculo o é com respeito ao raio do círculo, no sentido que não há nenhuma unidade de comprimento pela qual ambos os elementos do par possam ser divididos, sem deixar resto, um número inteiro de vezes" (KUHN, 2006, p. 50).

Newton pode ser vista como um caso especial da teoria de Einstein, feitas as restrições necessárias[11], Kuhn os rebate apresentando, nesses argumentos, uma lacuna lógica. De fato,

> Imaginemos um conjunto de proposições E_1, E_2,..., E_m, que juntas abarcam as leis da teoria da relatividade. Essas proposições contêm variáveis e parâmetros representando posição espacial, tempo, massa em repouso etc. A partir deles juntamente com o aparato da lógica e da matemática, é possível deduzir todo um conjunto de novas proposições, [...] Esse conjunto ampliado de proposições é então manipulado de modo a produzir um novo conjunto N_1, N_2,..., N_m, que na sua forma é idêntico às leis de Newton relativas ao movimento à gravidade e assim por diante (KUHN, 2007, p. 135).

Kuhn (2007) ressalta ainda que, ao analisarmos os parâmetros contidos nos N_i, constatamos que eles são os einsteinianos, e os referencias físicos de Einstein diferem dos referenciais físicos de Newton (apesar de levar o mesmo nome). Se mudarmos as definições das variáveis dos N_i, não podemos afirmar que derivamos as leis de Newton das proposições einsteinianas. Deste modo, a incomensurabilidade entre a mecânica de Newton e a teoria de Einstein fica evidenciada e a necessidade de modificar o sentido dos conceitos estabelecidos é crucial para o impacto revolucionário da teoria de Einstein.

Para Kuhn (2007), apesar de uma teoria obsoleta poder ser vista como um caso particular de uma teoria atual, isto só pode ocorrer se a transformarmos por meio das vantagens da visão-retrospectiva, e claro, sob o foco da teoria mais recente. Esta representação é útil, porém não suficiente para orientar novas pesquisas.

Assim, diferenciando-se da posição positivista de como ver os avanços científicos, Kuhn mostrou em sua teoria que os principais avanços de uma ciência só podem ocorrer por meio de rupturas, parciais ou totais com o antigo

---

[11] É possível matematicamente reduzir a expressão relativística $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ para $l = l_0$, quando $(v/c)^2 << 1$

paradigma, e o paradigma emergente será validado pela comunidade científica que irá compartilhá-lo.

Sobre revoluções científicas na matemática

Com a publicação da teoria de Kuhn, em 1962, cientistas e filósofos puseram à prova esta teoria em suas respectivas áreas. Houve aceitação das idéias de Kuhn entre os cientistas naturais[12] – principalmente quando se trata da constituição do conhecimento físico e químico - porém filósofos da matemática e matemáticos ignoraram ou apenas consideraram alguns aspectos da teoria de Kuhn, quanto à construção do conhecimento matemático. Como já foi dito na introdução deste trabalho, Mehrtens (1996) é um exemplo de filósofo que considera parcialmente as idéias de Kuhn na constituição do saber matemático,

> Recusei os conceitos de "revolução" e de "crise", a despeito de existirem fenômenos que possam levar esses nomes. O motivo foi que esses conceitos não podem tomar a forma de ferramentas vigorosas em inquisições históricas. Acredito e tentei mostrar que o conceito de anomalia constitui tal ferramenta. É um indício de importantes conexões históricas. Referindo inovações em matemática aos contextos teóricos contemporâneos, o conceito de anomalia ajuda a compreender e a avaliar os desenvolvimentos históricos (MEHRTENS, 1976 *in* GILLIES, 1995, p. 29).

Certamente, esses filósofos e matemáticos, serviram e servem de base para a formação ideológica da grande maioria dos professores e pesquisadores de matemática hoje. Além disso, na maioria dos textos e/ou livros didáticos de matemática, não há um interesse, dos matemáticos sobre a natureza dos objetos matemáticos, e seus autores se isentam da discussão epistemológica e mesmo histórica, preocupando-se apenas com a produção do conhecimento matemático e/ou com a elaboração de manuais de instrução sobre essa disciplina. Alguns se preocupam, inclusive, em deixar explícito esse

[12] Pelo menos numa parcela dos cientistas que pesquisam as ciências ditas "naturais", como a física, a química, e a biologia.

desinteresse com as questões epistemológicas, conforme afirmação de Lima (2006) em seu livro *Curso de Análise*, ao tratar do estudo dos números reais[13].

> É inteiramente irrelevante que o número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar numa demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo [...] a natureza intrínseca dos objetos matemáticos é uma matéria irrelevante, sendo o importante as relações entre esses objetos (LIMA, 2006, p. 60,61).

Assim, para que as teorias construídas ao longo do desenvolvimento da matemática sejam logicamente compatíveis, a estratégia dos matemáticos, desde sempre e reforçada sobremaneira a partir do século XIX, com o reconhecimento de que a “matemática não é uma ciência natural, mas uma criação intelectual do homem” (BOYER, 1974 p. 440), que pode ser entendido como a “libertação da matemática do real”, é não levar em consideração a natureza epistemológica dos objetos matemáticos.

Em função do exposto, como é possível uma revolução científica na matemática?

Para Kuhn (2007), uma das condições necessárias para que um paradigma se estabeleça, é a existência de uma ou mais realizações científicas que possam nortear as pesquisas no período de pesquisa normal. Gilli Martins (2005) mostrou em sua tese, que a obra *Kitab al mukhtasar fi hisab al-jabr wa’l-muqabalah* de al-Khwarizmi possui características próprias que permitiu considerá-la como a principal realização científica a nortear o surgimento do primeiro paradigma da álgebra na Europa, garantindo os métodos de investigação nesta área até o início do século XIX.

Já vimos que no período de ciência normal, o desenvolvimento científico, segundo Kuhn (2007), se dá de maneira contínua e cumulativa. Para Gilli

---

[13] Números reais é a união (disjunta) dos números racionais e irracionais.

Martins (2005) o período de ciência normal, em sua análise do desenvolvimento da álgebra, começa desde a publicação da *al-jabr wa'l* de al-Khwarizmi, e passa a ser partilhado por matemáticos europeus, no século XIII, após a publicação, na Europa, do *Líber abaci* de Fibonacci. De acordo com esse paradigma, as equações algébricas deveriam ser solucionadas, operando-se com as regra da aritmética sobre os coeficientes das equações, até reduzi-las a uma expressão via radicais. Como mostram os trabalhos de Scipione Del Ferro (1465-1526), Niccolo Tartaglia (1500-1557), Gerônimo Cardano (1501-1576) e de Luigi Ferrari (1522-1565), o primeiro período de pesquisa normal da álgebra, no Renascimento Europeu, experimentou um significativo acúmulo de conhecimento. Posteriormente, outros matemáticos europeus contribuíram significativamente para o desenvolvimento desse paradigma. Dentre esses matemáticos podemos destacar Raphael Bombelli (1526-1573), François Viète (1540-16030), Thomas Harriot (1560-1621) René Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Antoine Arnaud (1612-1694), Leibniz (1646-1712), Euler (1707-1783), D'Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813).

Ainda, no curso do primeiro período de pesquisa normal da álgebra na Europa Ocidental, é importante destacar a extraordinária contribuição dada, a esse desenvolvimento, pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). No início do século XIX, Gauss fornece uma demonstração para o hoje denominado Teorema Fundamental da álgebra[14] que, como o próprio nome já diz tudo, é um dos resultados mais importantes da álgebra. Gauss, o autor desta façanha, demonstrou que toda equação polinomial com grau $n > 0$ com coeficientes complexos admitia pelo menos uma raiz complexa.

Alguns anos mais tarde, no início do século XIX, Niels Henrik Abel (1802-1829) demonstrou ser impossível encontrar uma fórmula geral para as soluções de equações polinomiais com grau maior ou igual a cinco. No entanto, vale lembrar que a única forma para encontrar raízes de uma equação polinomial utilizada era por via de radicais, o que, no caso em questão era insuficiente e,

---

[14] O Teorema Fundamental da Álgebra diz que: "*todo o polinômio não constante, de grau n, com coeficientes complexos, tem pelo menos uma raiz complexa*".

portanto, a demonstração de Abel se resumia a mostrar que não era possível a determinação das raízes das equações quínticas via radicais. Abel não conseguiu realizar esta prova de outra forma, porque de acordo com as crenças partilhadas coletivamente pelo grupo de cientistas da época, o único caminho para a solução que possuía algum sentido ontológico, era utilizando radicais. Além disso, havia alguns obstáculos a serem superados pelos matemáticos a respeito dos números imaginários e os negativos, caracterizando uma impossibilidade ontológica, segundo Gilli Martins (2005).

> No âmbito do paradigma partilhado pelos matemáticos daquela época, a construção de uma teoria geral das equações algébricas se defrontava, segundo Ríbnikov (1991), com pelo menos dois grandes obstáculos: a laboriosa complexidade das fórmulas obtidas com os métodos algébricos empregados e a impossibilidade de se dar uma explicação teórica ao caso das equações algébricas consideradas irredutíveis diante da impossibilidade ontológica dos imaginários e dos negativos (GILLI MARTINS, 2005, p. 131).

As demonstrações desses dois resultados - uma por Gauss e a outra por Abel - decretaram o “xeque-mate” ao paradigma que regia a álgebra até então. A pergunta era: como um resultado pode garantir a existência de pelo menos uma raiz complexa na solução de uma equação polinomial com grau $n > 0$ e outro resultado indicar que não era possível a determinação de tal raiz pelas mesmas ferramentas disponíveis pelo paradigma? Para Gilli Martins (2005, p. 174) “a conjunção destes dois fatos punha em evidência que o velho paradigma não era capaz de solucionar os problemas que ele próprio estabelecera como importantes”.

Com o surgimento dessa anomalia instala-se, no interior do velho paradigma, uma crise sem precedente e abre as portas para um período de pesquisa extraordinária. É nesse período que surge na França, uma inovadora proposta de tratamento às equações algébricas dada por Évariste Galois (1811-1832): o germe do novo paradigma da álgebra que viria a se instalar, anos mais tarde, com a realização matemática de George Peacock (1791-1858), levada adiante pelos estudos de Duncan F. Gregory (1813-1844), de Augustus de Morgan (1806-1871) e de William Rowan Hamilton (1805-1865).

Descrevendo o novo tratamento para a álgebra Gilli Martins (2005, p. 152) diz que:

> [...] a emergência do novo, do novo paradigma da álgebra estruturado na forma de um sistema algébrico abstrato, onde o único significado disponível para os elementos desse sistema é fornecido pelas propriedades das operações algébricas estabelecidas sobre eles.

Esta nova forma de trabalhar as operações algébricas torna dispensáveis as preocupações sobre a natureza dos objetos em si. O importante, agora, no novo paradigma são as propriedades das operações que se pode realizar com os elementos de um dado sistema, abandonando-se a partir deste momento qualquer preocupação quanto à consistência ontológica para os elementos do sistema algébrico envolvidos nas soluções de tais equações (GILLI MARTINS, 2005).

> [...] o único significado disponível para os elementos de um sistema algébrico abstrato é o significado intra-sistêmico, o significado fornecido pelas propriedades das operações estabelecidas sobre eles (LINS; 1992 *apud* GILLI MARTINS, 2005, p. 145).

Por fim e para esclarecer que as mudanças paradigmáticas na matemática não eliminam a forte cumulatividade no corpus dos fatos dessa disciplina - por exemplo: com as devidas restrições, a soma de duas funções contínuas será, sempre e em qualquer paradigma, uma função contínua - Gilli Martins (2005) esclarece:

> O que estamos querendo dizer aqui, diz respeito à necessidade de se entender que a cumulatividade forte no *corpus* de *fatos* da matemática não se identifica com a permanência dos modos de produção de significados - e, portanto, dos objetos - na Matemática. Nesse sentido

> acreditamos ter mostrado que as revoluções matemáticas ocorreram realmente. No entanto, o que é preciso que fique claro é que a brutalidade de sua ação (da revolução) não pode ser procurada e tampouco é vista nos fatos da matemática - como ocorre com mais freqüência nas ciências experimentais - e, sim, nos modos de produção de significados, o que equivale dizer, nos objetos da Matemática. Nesse sentido, não se deve esperar, portanto, que uma revolução matemática possa, um dia, mostrar que o Teorema Fundamental da Álgebra estava errado ou, ainda, que as equações algébricas de grau maior do que quatro podem ser resolvidas por radicais (GILLI MARTINS, 2005, p. 154).

Os *fatos* considerados na matemática são as afirmações passíveis de demonstração, como teoremas, corolários, proposições, ou ainda, conjecturas que, com o passar dos anos e a mobilização de um grupo específico de matemáticos passam a ser demonstráveis, como aconteceu com o Teorema de Fermat[15] (GILLI MARTINS, 2005).

Gilli Martins (2005) defende a tese de que os resultados demonstrados na matemática, isto é, os fatos na matemática se acumulam continuamente ao longo do tempo e que, com as revoluções científicas na matemática, o que muda são os significados dos *objetos* da matemática como, por exemplo, os axiomas, os termos primitivos e as definições.

---

[15] O teorema de Fermat, ou teorema de Fermat-Wiles, afirma que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x, y, z e n com n maior que 2 que satisfaça a seguinte equação: $x^n + y^n = z^n$. O Teorema de Fermat permaneceu por 358 anos servindo de objeto de fervorosas pesquisas para vários matemáticos, dentre eles, Leonhard Euler (1707-1783), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Augustin Louis Cauchy (1789-1857). A causa deste empenho dos matemáticos em demonstrar o problema se deu, principalmente, pelas anotações deixadas por Pierre de Fermat (1601-1665) na tradução para o latim da Arithmetica de Diofanto, declarando que tinha demonstrado tal resultado, porém a margem do livro era muito estreita para contê-la. O Teorema foi finalmente demonstrado em 1994 pelo matemático britânico Andrew Wiles (SINGH, 2005).

> [...] é preciso reconhecer que, em realidade, ao longo dos tempos, a história da matemática parece revelar uma cumulatividade de fatos muito maior do que a de outras ciências. Pensamos ter resolvido essa questão quando conceituamos fatos na matemática como sendo as proposições e os teoremas enquanto enunciados demonstráveis. Com esse conceito em mãos, o corpus dos fatos na matemática é altamente acumulativo, muito mais do que nas outras ciências: o fato de que quanto mais aproximamos a mão de uma vela acesa maior é a intensidade de calor percebida, este fato não mudou nunca, assim como nunca mudou o fato de que uma função, soma de duas funções contínuas em um dado domínio, é também contínua nesse domínio (GILLI MARTINS, 2005, p. 153).

Gilli Martins (2005) concluiu em sua tese intitulada “Sobre revoluções científicas na matemática”:

> [...] a matemática não se desenvolve [...] por acumulação contínua de descobrimentos e inventos individuais em qualquer momento, mas, ao contrário, como o resultado de um trabalho coletivo, socializado e realizado por comunidades de matemáticos, com base em conceitos, métodos e valores partilhados que, de conjunto, Kuhn os chamou de paradigmas.
>
> Acreditamos, ainda, que, por sua natureza, a matemática se distingue das ciências experimentais e, como resultado dessa distinção, os paradigmas e as revoluções nesses dois ramos do conhecimento têm características próprias e, sob certos aspectos, distintas.
>
> Finalmente - e como conseqüência dessa nossa convicção - reafirmamos, ainda, a nossa crença de que na história da matemática existem épocas de pesquisa normal onde, aí sim, a Matemática se produz por acumulação e reformas, e épocas de revoluções, onde um paradigma mais antigo é total ou parcialmente substituído por um novo, não raras vezes incompatível com o anterior, como foi o caso da Álgebra [...] (GILLI MARTINS, 2005, p. 170)

Partilhando das concepções de Gilli Martins (2005) conjecturamos, também, que a aplicabilidade da teoria da ciência kuhniana no estudo de como se constrói o conhecimento matemático pode ser considerada. Essa concepção subsidiou nossa discussão acerca do desenvolvimento matemático dos pitagóricos até a matemática euclidiana.

III. *ARKHÉ* DA DISSERTAÇÃO: período pré-paradigmático ou escolas.

Nesta seção apresentaremos as condições que propiciaram o estabelecimento do paradigma pitagórico. Para isto, começamos por uma breve incursão nas origens do pensamento grego destacando as condições que favoreceram o aparecimento do que, mais tarde, Pitágoras pela primeira vez, chamou de filosofia[16].

A importância dessa abordagem acerca do surgimento da filosofia nos parece fundamental, pelo fato de que o estudo da natureza de um objeto matemático pertence às fronteiras do que chamamos hoje de matemática e filosofia. Esse fato é destacado por Russell (1981, p. 7) na afirmação: "A natureza do infinito e da continuidade, por exemplo, pertenceu, em tempos idos, à Filosofia, mas pertence hoje à Matemática". Por se tratarem de conceitos imbricados, quando se estuda a natureza do infinito e da continuidade, também se discute, ainda que implicitamente, a natureza do número, portanto, é lícito afirmar que este último também permeou os campos da filosofia.

Segundo Vernant (1996) é possível datar e localizar o aparecimento da filosofia grega contrapondo-se ao declínio do pensamento mítico, precisamente no início do século VI a.C. em Mileto, colônia grega situada na Jônia. Mas o que foi necessário para que os gregos deixassem de pleitear as explicações dos fenômenos naturais a seus deuses? Possivelmente o que colaborou para o nascimento da filosofia e a distinção em relação ao mito foi o surgimento da Polis.

> O aparecimento da *polis* constitui, na história do pensamento grego, um acontecimento decisivo. Certamente, no plano intelectual como no domínio das instituições, só no fim alcançará todas as conseqüências; a *polis* conhecerá etapas múltiplas e formas variadas. Entretanto, desde seu advento, que se pode situar entre os séculos VIII e VII, marca um começo, uma verdadeira invenção [a democracia]; por ela, a

[16] (STRATHERN, 1998).

> vida social e as relações entre os homens tomam uma força nova, cuja originalidade será plenamente sentida pelos gregos[17] (VERNANT, 1996, p. 34).

A transformação social que os gregos sofreram com o surgimento da Polis, abarcou desde uma mudança no modelo econômico - que vai de uma cultura predominantemente agrícola para artesãos e comerciantes - até as mudanças políticas e sociais. Essas transformações nos cenários, econômico, político e social, contribuíram para fortalecer as relações de reciprocidade e reversibilidade entre os homens, substituindo a hierarquia pela igualdade entre seus cidadãos (SOUZA, 2008).

A democracia foi decisiva para que os cidadãos gregos pudessem praticar seus diálogos e debates na *ágora* e também, no dizer de Crescenzo (2005), a "agorázonta"[18], uma prática comum entre os gregos - pelo menos aqueles que não eram escravos, mulheres ou estrangeiros - o que propiciava a interação e a discussão de problemas diversos comuns a todos.

A primazia da palavra sobre todos os outros instrumentos de poder tornou-se indispensável a qualquer cidadão que quisesse exercer alguma função de autoridade no Estado. Embora existisse uma divindade para a força da persuasão, a *Peithó*, venerada em rituais religiosos, o valor da palavra deixou de estar subordinado a rituais míticos ou aos pronunciamentos reais e passou a relacionar-se ao poder de argumentação, ao debate contraditório, e à discussão (VERNANT, 1996).

Essa configuração de organização econômica, social e política - a *polis* - foi decisiva para o desaparecimento dos antecessores dos filósofos, os "Mestres da Verdade" como o poeta, o adivinho (o profeta) e o rei-de-justiça (o sábio) Chauí (2002).

---

[17] Cf. V. Ehrenberg, When did the Polis rise? *Journal of Hellenic Studies, 57,* 1937, pp. 147-159; Origins of democracy, *Historia,* 1, 1950, pp. 519-548.

[18] Descreve a maneira de andar daquele que pratica o "*agorazein*" verbo grego que significa "*descer até a praça para ver o que estão dizendo*" (CRESCENZO, 2005, p. 11)

> A filosofia nasce, portanto, no contexto da *polis* e da existência de um discurso (*lógos*) público, diagonal, compartilhado, decisional, feito na troca de opiniões e na capacidade de encontrar e desenvolver argumentos que persuadam os outros e os façam aceitar como válida e correta a opinião emitida, ou rejeitá-la se houver fraqueza dos argumentos. Exercício do pensamento e da linguagem, a filosofia irá diferenciar-se da palavra dos guerreiros e dos políticos porque possui uma pretensão específica, herdada dos poetas, do adivinho e do rei-de-justiça: não deseja apenas argumentar e persuadir, mas pretende proferir a verdade como aquilo que é o mesmo para todos, porque, em todos, o pensamento é idêntico, se for desinteressado (CHAUI, 2002, p. 44).

Com a substituição dos "Mestres da Verdade" pelos filósofos, há uma busca por explicações racionais para as transformações da natureza (*phýsis*[19]) em substituição aos argumentos baseados nos mitos ou provindos dos deuses (Hack, Silva, 2008).

O declínio do mito perante a filosofia, data do dia em que o Sábio deixa de atribuir a origem dos fenômenos naturais a entidades divinas - ou ao *Daímon*, "ser que se encontra no meio do caminho entre o humano e o divino" (RUTHERFORD, 1991, p.10) - para discutir a ordem da natureza por si própria, traduzindo-a em fórmulas que possam ser compreendidas pelos homens (VERNANT, 1996).

O problema fundamental que norteou as reflexões de vários filósofos como, *Tales*, *Anaximandro*, *Anaxímenes, Heráclito*, *e Pitágoras* na passagem do século VII para o século VI a. C. foi o chamado problema da *arkhé* (ἀρχή[20]).

---

[19] "A *phýsis* - traduzida para o latim como *natura* e para o português como natureza - é a fonte de todas as coisas, a força que as faz nascer, brotar, desenvolver-se, renovar-se incessantemente; é a realidade primeira e última, subjacente a todas as coisas de nossa experiência. É o que é primário, fundamental e permanente, em oposição ao que é segundo, derivado e transitório. É a manifestação visível da *arkhé*, o modo como esta se faz percebida e pensada (CHAUI, 2002, p. 46)."

[20] Problema que é ao mesmo tempo o da origem das coisas e o da matéria primordial dos diversos corpos da realidade sensível (MICHEL *et al* , 1959).

"Em Homero, *arké* significa o que está no começo, no princípio, na origem de alguma ação, de algum discurso, o ponto de partida, donde arquétipo (o tipo ou modelo primitivo de uma coisa). Em Píndaro, “Os primeiros filósofos buscam a *arkhé*, o princípio absoluto (primeiro e último) de tudo que existe” (CHAUÍ, 2002, p. 46). Cada filósofo abordava e apresentava explicações para tal questão.

Podemos inferir que as influências desse modo de investigação na constituição do conhecimento matemático provocaram a busca pelas razões, e não apenas a compreensão de fenômenos como, “*Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais? e Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?*”

As interpretações diversas sobre a origem do universo, ou a origem das coisas, foram discutidas na Grécia Antiga, particularmente entre os pré-socráticos[21], dos quais podemos citar: Tales, Anaximandro, Anaxímenes, Pitágoras, Zenão, Parmênides e Demócrito.

As discussões que precederam as interpretações que Pitágoras e seus seguidores deram sobre origem das coisas, serão expostas a seguir, e poderemos identificar como os primeiros estágios do desenvolvimento de um paradigma ou período pré-paradigmático, pois segundo Kuhn,

> Não é de se admirar que nos primeiros estágios do desenvolvimento de qualquer ciência, homens diferentes confrontados com a mesma gama de fenômenos - mas em geral não com os mesmos fenômenos particulares - os descrevam e interpretem de maneiras diversas (KUHN, 2007, p. 37).

---

significa poder, comando autoridade, soberania por extensão, arconte (magistrado) (CHAUI, 2002, p. 46)”.

[21] Pré-socráticos são os filósofos que viveram em sua grande maioria antes da época de Sócrates e investigaram a origem das coisas e as transformações da natureza. Sócrates, em outro caminho, parte para uma explicação do homem na natureza (HACK, 2008).

A água como a arkhé do universo

Tales de Mileto, filósofo, geômetra e astrônomo, considerado como um dos sete sábios[22] da Grécia Antiga viveu por volta de 650 a 550 a. C. Foi o fundador da escola Jônica e, juntamente com outros filósofos como Anaximandro e Anaxímenes, estabeleceu uma nova forma de reflexão sobre a natureza em detrimento ao pensamento mítico que até então vigorava. Tales foi o primeiro a mostrar que "o saber a priori desinteressado é fonte de riqueza" (DUROZOI; ROUSSEL, 1993, p. 459).

A experiência cotidiana, de acordo com o pensamento mítico, adquiria sentido quando comparada aos atos praticados pelos deuses em sua origem. Ao estabelecerem que não é o original que ilumina e transfigura o cotidiano, mas "é o cotidiano que torna o original inteligível, fornecendo modelos para compreender como o mundo se formou e ordenou", esses filósofos promoveram uma verdadeira revolução intelectual, revolução esta que ficou conhecida como o "milagre grego" (VERNANT, 1996, p. 74).

Para Tales, a Terra era um disco "três vezes mais extenso do que espesso", que flutuava num oceano que preenchia a metade de uma esfera que o cercava; "acima da água agitam-se o ar e as nuvens, além da esfera (esburacada), existe o fogo" (DUROZOI; ROUSSEL, 1993, p. 459).

Embora certamente tais concepções fossem oriundas de mitos anteriores, Tales teria demonstrado sua validade e este fato o tornaria o "precursor de uma ciência racional no mundo" (DUROZOI; ROUSSEL, 1993, p. 460).

Tales, em sua explicação racional da *phýsis* colocou a água como a causa primeira de todos os seres que compõe o universo, ou seja, a *arkhé* do universo, sendo fundamental para a vida e para todos os outros elementos (ARISTÓTELES, 1979).

---

[22] "Em todas as listas dos famosos Sete Sábios da Grécia o seu nome sempre consta em primeiro lugar. Existem várias listas, mas habitualmente apontam-se os seguintes nomes: Tales de Mileto (que figura em todas), Pítacos, Bias, Sólon, Cleóbulo, Periandro e Quílon" (SPINELLI, 1998, p. 15).

> A maior parte dos primeiros filósofos considerou como princípios de todas as coisas unicamente os que são da natureza da matéria. [...] Quanto ao número e à natureza destes princípios, nem todos pensam da mesma maneira. Tales, o fundador de tal filosofia, diz ser a água (é por isto que ele declarou também que a terra assenta sobre a água), levado sem dúvida a esta concepção por observar que o alimento de todas as coisas é úmido e que o próprio quente dele procede e dele vive (ora aquilo donde as coisas vêm é, para todas, o seu princípio). Foi desta observação, portanto, que ele derivou tal concepção, como ainda do fato de todas as sementes terem uma natureza úmida e ser a água, para as coisas úmidas, o princípio da sua natureza (ARISTÓTELES, 1979, p. 16).

No que se refere à matemática, Tales foi o precursor do estudo da geometria na Grécia (CAJORI, 2007). Como era o costume da época, para adquirir conhecimentos, os estudiosos realizavam grandes viagens e foi assim que Tales não apenas conheceu vários resultados de geometria plana utilizados pelos egípcios e babilônios, como teria levado ao Egito, de acordo com Durozoi e Roussel (1993), alguns dos fundamentos geométricos, como inscrição do triângulo no círculo, propriedades dos triângulos semelhantes, etc.. Posteriormente, quando foi feita a sistematização desses resultados em forma de teoremas, as demonstrações destes foram atribuídas a ele[23]. Em uma de suas incursões pelo Egito, agradou o rei Amasis por ter sido capaz de medir a altura das pirâmides do reino com a ajuda apenas de suas sombras[24].

De acordo com Boyer (1974), Tales foi o primeiro a realizar uma “organização dedutiva da Geometria” sendo apontado como autor dos seguintes teoremas:

1. Um círculo é bissectado por um diâmetro.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Os pares de ângulos formados por duas retas que se cortam, são iguais.

---

[23] (BOYER, 1974)
[24] (CAJORI, 2007)

4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes (BOYER, 1974, p. 34).

Talvez essas afirmações possam parecer óbvias, e certamente pareciam também na época de Tales[25] (EVES, 1995), a originalidade, porém, está em suas "demonstrações", como, por exemplo, a forma por ele utilizada para legitimar a afirmação: "*Os pares de ângulos formados por duas retas que se cortam, são iguais"*, citada anteriormente. Por uma seqüência simples de raciocínios lógico-dedutivos básicos acerca de elementos geométricos, Tales conseguiu mostrar que os *ângulos opostos pelo vértice* possuem a mesma medida angular.

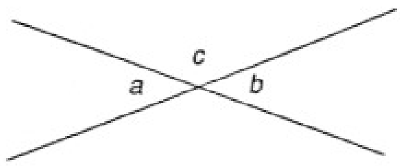

Figura 1 - ângulos opostos pelo vértice.

(Fonte: EVES, 1995, p. 95)

> Na figura, a soma do ângulo a com o ângulo c é igual a um ângulo raso; o mesmo acontece com a soma dos ângulos b e c. Como todos os ângulos rasos são iguais, então o ângulo a é igual ao ângulo b (subtraindo-se, iguais de iguais, então as diferenças são iguais) (EVES, 1995, p. 95).

O ilimitado como a arkhé do universo

Anaximandro (611 a 545 a.C.) também de Mileto, e discípulo de Tales[26], contrariou a teoria de que a origem das coisas pudesse prover de um único

---

[25] "Nos tempos pré-helênicos a igualdade destes dois ângulos era considerada provavelmente tão óbvia que, se caso alguém tivesse dúvidas a respeito, bastaria para convencer esse alguém, recortar os ângulos e sobrepor um ao outro" (EVES, 1995, p.95)

[26] (SPINELLI, 1998, p.55)

elemento, ao admitir a existência de uma substância ilimitada, infinita, que se espalhava para além do Universo. Assim, o estado inicial das coisas do universo não se identifica com nenhum elemento conhecido, pois se existisse tal elemento, este destruiria todos os outros, visto que eles se opõem uns aos outros (HACK; SILVA, 2008).

Para Chauí (2002), três fragmentos originais servem de referência para buscarmos o que Anaximandro entendia pelo *apeíron*[27], que descrevemos a seguir,

> Princípio (*arkhé) dos seres*... ele disse que era o ilimitado... pois donde a geração é para os seres, é para onde também a corrupção se gera segundo o necessário; pois concedem eles mesmos justiça e deferência uns aos outros pela injustiça, segundo a ordenação do tempo (*Simplício*[28]).
>
> Esta (a natureza do ilimitado) é sem idade e sem velhice (*Hipólito*[29]).
>
> Imortal... e imperecível (*Aristóteles*[30]) (CHAUÍ, 2002, p. 59).

Anaximandro, segundo Vernant (1996), transferia para a natureza a mesma isonomia de poderes existente na democracia instituída na *polis,* e "a igualdade e a simetria dos diversos poderes constituintes do cosmos" caracterizariam a "nova ordem da natureza". À *monarchia* um regime de *isonomia* se substitui, na natureza como na cidade". Isto é, o regime monárquico, daria lugar, também na natureza, a um regime de *isonomia,* e assim, nenhum elemento se sobreporia aos outros (VERNANT, 1996, p. 88).

---

[27] Palavra composta pelo prefixo negativo *a* e pelo substantivo *poros* (passagem, via de comunicação, caminho, trajeto). Sem fim, imenso, ilimitado, infinito, inumerável, incalculável, interminável, indeterminado.
[28] (Simplício, Comentário da Física de Aristóteles).
[29] (Hipólito, Refutações das Heresias).
[30] (Aristóteles, Física).

O ar como a arkhé do universo

Para Anaxímenes de Mileto, que viveu na mesma época de Tales e Anaximandro[31], o elemento primordial do qual originaria o universo seria o ar. Este pensamento, segundo Mariás (1987) e Chauí (2002) é um retorno ao pensamento de Tales e um retrocesso em relação a Anaximandro.

As idéias de Anaxímenes podem ser acompanhadas, segundo Chauí (2002), nos seguintes fragmentos,

> Anaxímenes de Mileto, filho de Euristrato, companheiro de Anaximandro, afirma também que uma só é a natureza subjacente e diz, como Anaximandro, que é ilimitada, mas não como Anaximandro, que é indefinida, e sim definida, dizendo que ela é o ar. Diferencia-se nas substâncias por rarefação e condensação. Por rarefação, torna-se fogo; por condensação, vento, depois nuvem, e ainda mais, água, depois terra, depois pedras e as demais coisas provém destas. Também ele faz eterno o movimento pelo qual se dá a transformação (*Simplício*[32]).
>
> Do ar dizia que nascem todas as coisas existentes, as que foram e as que serão, os deuses e as coisas divinas [...] Quando o ar está igualmente distribuído é invisível: manifesta sua existência por meio do frio e do calor, da umidade e do movimento. E está sempre em movimento, pois o que muda não poderia mudar se não se mover (*Hipólito*[33]) (CHAUÍ, 2002, p. 62).

A importância de Anaxímenes na explicação da *phýsis* está na forma qualitativa que ele trata pela primeira vez o assunto. De acordo com Mariás (1987), Anaxímenes não se preocupou apenas em dizer qual era a substância primordial do universo, mas sim, em descrever todo um processo, em explicar como se originou todos os outros elementos a partir do ar.

---

[31] (SPINELLI, 1998, p.55)
[32] (Simplício, Comentário da Física de Aristóteles).
[33] (Hipólito, Refutações das Heresias).

Os números como a arkhé do universo

A escola pitagórica foi o primeiro núcleo filosófico mais importante que se constituiu na Grécia, depois da escola de Mileto. Situada na região da Magna Grécia, hoje sul da Itália, esta escola foi denominada posteriormente por Aristóteles como *escola itálica* (MARIÁS, 1987). Tem como maior expoente a controvertida figura de Pitágoras que parece ter nascido por volta de 572 a. C na ilha de Samos.

A resposta encontrada pelos pitagóricos para o problema da *arkhé* se fundamenta numa física em que o número se torna a origem das *coisas*. Posteriormente, em sua Metafísica, Aristóteles afirma que para os pitagóricos os números são os elementos que constituem a matéria.

> Entre estes, e antes deles [os atomistas], os chamados pitagóricos consagravam-se pela primeira vez às matemáticas, fazendo-as progredir, e, penetrados por estas disciplinas, julgaram que os princípios delas fossem os princípios de todos os seres. Como, porém, entre estes, os números são, por natureza, os primeiros, e como nos números julgaram aperceber muitíssimas semelhanças com o que existe e o que se gera, de preferência ao fogo, à terra e à água (sendo tal determinação dos números a justiça, tal outra a alma e a inteligência, tal outra o tempo, e assim da mesma maneira para cada uma das outras); além disto, como vissem os números as modificações e as proporções da harmonia e, enfim, como todas as outras coisas lhes parecessem, na natureza inteira, formadas à semelhança dos números, e os números as realidades primordiais do Universo, pensaram eles que os elementos dos números fossem também os elementos de todos os seres, e que o céu inteiro fosse harmonia e número (ARISTÓTELES, 1979, p. 21).

A resposta dos pitagóricos ao problema da *arkhé,* tal como explicitada por Aristóteles e os esforços empreendidos para sustentá-la é um dos fundamentos teóricos desta dissertação. Isto porque, ao considerar que todas as grandezas geométricas poderiam ser identificadas com um par de números inteiros os pitagóricos inauguraram o primeiro *paradigma* da matemática. Porém, como os pitagóricos iriam posteriormente constatar, nem toda grandeza é passível de ser associada a números, e assim - confirmando a teoria kuhniana - juntamente com o paradigma, porém ainda não evidenciada, nasce uma anomalia que é representada pela existência das grandezas incomensuráveis.

> A descoberta da irracionalidade da diagonal pode lembrar a teoria de Thomas Kuhn, para quem o desenvolvimento das ciências procede por paradigmas, ou seja, por exemplos suficientemente impressionantes para que nos esforcemos por nos inspirar neles, por imitá-los e por exprimir a sua substancia, e aquele era o paradigma dos paradigmas, pois continha o germe de uma ciência infinita (OMNÈS, 1996, p. 73).

IV. PITÁGORAS E SUA *ARITHMÓS*: o primeiro paradigma da matemática da cultura ocidental.

Nesta seção, discutiremos as idéias desenvolvidas pelos pitagóricos, muitas vezes representadas apenas pela figura de Pitágoras. A origem e a própria existência de Pitágoras admitem diferentes versões. De acordo com Hêrpimos[34] e Hipobotes[35], Pitágoras nasceu em Samos, já segundo Aristóxenes, Pitágoras era "tirrênio das ilhas ocupadas pelos atenienses após a expulsão dos tirrênios[36]"; "ou da Síria, ou da cidade de Tiro na Fenícia[37]". Porém a maioria dos textos encontrados sobre Pitágoras afirmam que seu nascimento foi mesmo na ilha Grega de Samos. Sua *arkhé*, neste caso, significa o ano que se supõe seu amadurecimento filosófico[38], segundo Diôgenes Laêrtios (1987), se situa no período da sexagésima olimpíadas (540-537 a.C.).

Até hoje existem especulações a respeito de textos de autoria de Pitágoras e não se tem certeza se ele deixou alguma obra escrita de próprio punho. Laêrtios (1987) afirma que ele teria elaborado alguns tratados, "[...] De fato Pitágoras escreveu três obras: *Da Educação, Do Estado, Da Natureza*[39]*."* E complementa: "Herácleides, filho de Sarapion, na *Epítome de Sotíon* diz que Pitágoras escreveu também um poema *Do Universo*, e ainda o *Discurso Sagrado*" (Diôgenes Laêrtios, 1987, p. 230).

Porém várias críticas historiográficas discordam da autenticidade destas afirmações, e atestam que tais obras são apócrifas. Spinelli (1998, p.94) cita duas destas opiniões, a primeira é de Porfírio, "Não existia, com efeito, qualquer escrito pela mão mesma de Pitágoras[40]" e a segunda de Cláudio

[34] (Diôgenes Laêrtios, Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres, p.229, 1987).
[35] (Clemente de Alexandria apud Spinelli, p. 95, 1998).
[36] (Diôgenes Laêrtios, Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres, p.229, 1987).
[37] (SPINELLI, p. 96, 1998).
[38] Chauí, (2002).
[39] (Diôgenes Laêrtios, Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres, p.230, 1987).
[40] (Porfírio, *A Vida de Pitágoras*, 57 (DK 46 2))

Galeno, “[...] já que não nos chegou nenhum escrito seu, é por intermédio dos escritos de alguns seus discípulos que ele se manifesta[41]“.

Independentemente das controvérsias observadas nos textos que relatam a vida e obra de Pitágoras, não podemos ignorar as influências que ele e sua escola exerceram na filosofia e na matemática. Spinelli (1998) cita o historiador judeu do século I a.C., Flávio Joseph[42], “Concorda-se em reconhecer que Pitágoras não deixou nenhum escrito por ele; mas numerosos são aqueles que relataram os seus feitos e gestos” (SPINELLI, 1998, p. 95).

Para Strathern (1998), Pitágoras foi o primeiro matemático e filósofo de que se tem notícia e justifica sua afirmação baseando-se no fato de que foi o próprio sábio grego quem usou pela primeira vez os termos, matemático e filósofo, “nos sentidos aceitos hoje e logo os aplicou a si mesmo”. Este filósofo “foi o primeiro gênio da cultura ocidental, senão, ao menos foi ele que deu o tom” (STRATHERN, 1998, p. 7).

> [...] e nisso também Pitágoras inaugurou uma tradição sobre o gênio que vigora até hoje, quando descobertas marcantes atribuídas a gênios são muitas vezes meramente obra dos laboratórios onde atuam ou obras primas da pintura podem ser produzidas inteiramente por assistentes do artista (STRATHERN, 1998, p. 8).

Pitágoras também foi o primeiro a praticar a metempsicose, a teoria da transmigração das almas, isto é, “a passagem por vários corpos sejam eles humanos ou de animais” (CHAUÍ, 2002, p. 68).

Podemos encontrar escritos de uma passagem que sustenta a teoria da transmigração das almas praticada por Pitágoras. De acordo com Diôgenes Laêrtios (1987, p. 229) Pitágoras era, em outra vida, Aitalides, que, por sua vez, era filho de Hermes, e Hermes lhe ofereceu a graça que quisesse menos a imortalidade. Pitágoras então pediu-lhe o benefício de recordar tudo, vivo ou depois de sua morte.

---

[41] (Galiano, *Sobre os Dogmas de Hipócrates e de Platão*, ed. Müller, p. 429 (DK 14 a 18))
[42] (Flávio Joseph, *Contra Apion*, I, 163 (DK 14 a 18))

> Por isso conseguia recordar-se de tudo enquanto vivo, e depois de morto conservar a mesma memória. Subseqüentemente voltou no corpo de Êuforbos, e foi ferido por Menêlaos. [...] Morto Êuforbos, sua alma reencarnou-se em Hermôtimos [...] Morto Hermôtimos, Pitágoras passou a ser Pirros [...] Morto Pirros, tornou-se Pitágoras e recordava-se de todas as mutações precedentes (DIÔGENES LAÊRTIOS, 1987, p. 229).

Talvez por estas crenças, Bertrand Russell[43] considerava Pitágoras "Intelectualmente um dos homens mais importantes que já viveram, tanto quando era sábio como quando era tolo" (STRATHERN, 1998, p. 8).

O aprendizado nas ciências ditas *matemáticas* por Pitágoras, pôde se efetivar em suas viagens pelas ilhas do leste do Mar Mediterrâneo, Egito e Babilônia. Esta prática pedagógica (as viagens) era um meio recorrente dos filósofos da época para obtenção de conhecimentos, pois "o saber, como sólito, era vivo, e estava, não nos livros ou nas bibliotecas, mas na mente dos sábios e mestres disseminados pelo mundo antigo" (SPINELLI, 1998, p. 106). Porfírio[44] relata:

> [...] se a geometria apaixonou os Egípcios desde os tempos mais antigos, Os Fenícios se especializaram nos números e nos cálculos aritméticos, e os Caldeus na especulação astronômica (PORFÍRIO *apud* SPINELLI, 1998, p. 106).

É neste cenário que Pitágoras pôde encontrar subsídios para seus aprendizados. Apolônio[45] afirmou que ele "lançou-se no estudo das ciências matemáticas, e dos números em particular" (SPINELLI, 1998, p. 106) e segundo Heráclito o físico[46],

> Pitágoras, filho de Mnêsarcos, superou enormemente todos os Homens no exercício da pesquisa. Fez para si uma seleção desses escritos, dos quais derivou sua sabedoria, mostrando

---

[43] (Bertrand Russell: *História da Filosofia ocidental*, 1996)
[44] (Porfírio, A *Vida de Pitágoras*, 18-19 (DK 14 A 8a)).
[45] (Apolônio, *Histórias Maravilhosas*, 6 (DK 14 a 7)).
[46] Fragmento 129 Diels-Krans.

> muita erudição, porém má elaboração (HERÁCLITO *apud* DIÔGENES LAÊRTIOS, 1987, p. 230).

Como já foi dito na seção anterior, Pitágoras propôs uma nova resposta para o "*o problema da arkhé"*. Sua Filosofia era nutrida pela matemática e, segundo Aristóteles (1979), os pitagóricos impregnados por estas disciplinas (as matemáticas) julgaram que estas eram o princípio de todos os seres, e conseqüentemente, como os números eram o princípio destas, julgaram "portanto o número a substância de todas as coisas" (ARISTÓTELES, 1979, p. 23).

Reinterpretando Aristóteles, Spinelli (1998) diz que o domínio das matemáticas foi a condição necessária para que pudessem se convencer de que os princípios de tudo o que existe era semelhante aos princípios das matemáticas e, deste modo, julgaram que a natureza dos números era semelhante à natureza do Universo.

Esta concepção - a do número como *arkhé* - aparece em alguns fragmentos deixados por Aristóteles e pelos doxógrafos[47]. De acordo com Spinelli (1998, p. 109), Proclo[48] atribuiu a Pitágoras a seguinte descoberta, "a existência de uma estrutura de formas do Universo", e que também é corroborado por alguns fragmentos atribuídos a Filolau - um pitagórico nascido na cidade de Cróton e autor de vários escritos pitagóricos[49] .

> Así nos dice Filolao: "Todo lo que se conece tiene um número. Sin El cual nada puede comprenderse o conocerse" (BABINI, 1969, p. 21).
>
> "O um é o princípio de todas as coisas" (Jâmblico[50]).
>
> "O primeiro constituído, o um, está no centro da esfera e chama-se lar" (Estobeu[51]) (CHAUÍ, 2002, p. 72).

---

[47] "Os que recolheram e reuniram (por assunto ou por cronologia) os fragmentos a partir do discípulo de Aristóteles, Teosfrato, o primeiro dos doxógrafos" (CHAUI, 2002, p.51)
[48] Filósofo neoplatônico do século V d. C.
[49] (Diôgenes Laêrtios, Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres, p.248, 1987).
[50] (Jâmblico, Comentário à Ética a Nicômaco).

Segundo Rutherford (1991, p. 56), Aristóteles nos oferece quatro "interpretações experimentais" para a afirmação (dos Pitagóricos) de que os números eram "a causa dos deuses e demônios",

> [...] que todas as coisas deviam sua existência à imitação ou à representação dos números; que os elementos dos números e os elementos das coisas seriam iguais; que as coisas na verdade eram compostas de números. [...] Sua quarta sugestão é no sentido de que, talvez, os números representassem o que poderíamos chamar de fórmulas, como acontece, por exemplo, numa equação (RUTHERFORD, 1991, p. 56).

Esta última interpretação de Aristóteles sugere apenas uma representação da natureza por meio de fórmulas e/ou números, porém para Chauí (2002), os pitagóricos quando diziam que os números eram a *physys* ou a *arkhé* do Universo, não estavam apenas relacionando as coisas com um determinado número, mas diziam que as coisas são os próprios números.

> "Dizer que phýsis é número é dizer que as coisas são ritmos, proporções, relações, somas, subtrações, combinações e dissociações ordenadas e reguladas. Em outras palavras, o número não representa nem simboliza as coisas, ele é a estrutura das coisas" (CHAUI, 2002, p. 75).

Neste mesmo sentido, Jaeder[52] diz:

> A doutrina pitagórica nada tem a ver com a ciência matemática natural, no sentido atual. Os números têm nela um significado muito mais vasto. Não significam a redução dos fenômenos naturais a relações quantitativas e calculáveis. A diversidade dos números representa a essência qualitativa de coisas completamente heterogêneas: o céu, o casamento, a justiça, o kairos, etc. (JAEDER *apud* SPINELLI, 1998, p. 111).

---

[51] (Estobeu, Éclogas).
[52] (JAEDER, W. *Pandéia*, p. 140-141)

De fato, foram várias justificativas desenvolvidas pelos pitagóricos para subsidiar a idéia de que todas as coisas têm um número, e que sem ele nada se pode compreender. O empenho dos pitagóricos em legitimar suas convicções pode ser depreendido das palavras de Aristóteles, "se nalguma parte algo faltasse, supriam logo com as adições necessárias, para que toda teoria se tornasse coerente[53]" (ARISTÓTELES, 1979, p. 22).

Este empreendimento dos pitagóricos corroborado pela citação de Aristóteles nos "obriga" de certa forma a escrever o que Kuhn diz sobre a natureza da ciência normal:

> [...] esse empreendimento parece ser uma tentativa de forçar a natureza a encaixar-se dentro dos limites preestabelecidos e relativamente inflexíveis fornecidos pelo paradigma (KUHN, 2007, p. 44).

O sucesso obtido pelos pitagóricos em sua doutrina, segundo Caraça (1984), causou um desequilíbrio na escola pitagórica (este desequilíbrio será tratado com mais especificidade na próxima seção), por que: "Da afirmação, bela e fecunda, da existência duma *ordenação matemática do Cosmos* - todas as coisas têm um número - fez-se esta outra afirmação, bem mais grave e difícil de verificar - *as coisas são números*" (CARAÇA, 1984, p. 72).

Na tentativa de legitimar essa afirmação, os pitagóricos estabeleceram uma estruturação para a matéria análoga à estruturação numérica. Dito de outra forma, fundamentados no fato de que um número era constituído adicionando-se a unidade sobre ela mesma admitiram que a matéria fosse constituída por pequenos corpos denominados mônadas.

> A matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais reunidos em certa quantidade e ordem produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos - *mónada* - era assimilado à unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por *quantidade e arranjo de*

[53] Esta passagem de Aristóteles, se olhada sob a óptica da teoria kuhniana, nos remete as tentativas dos cientistas que praticam ciência normal em assegurar o paradigma.

> *mónadas* como os números se formar por *quantidade e arranjo de unidades* (CARAÇA, 1984, p. 72).

Segundo Diôgenes Laêrtios (1987), Alexândros[54] afirma ter extraído das *Memórias Pitagóricas* os seguintes dogmas:

> A mônada é o princípio de todas as coisas; da mônada nasce a díade indefinida, que serve de substrato material à mônada, sendo esta a causa; da mônada e da díade indefinida nascem os números; dos números nascem os pontos, destes nascem as linhas e destas nascem as figuras planas; das figuras planas nascem as figuras sólidas; destas nascem os corpos perceptíveis pelos sentidos, cujos os elementos são quatro: o fogo, a água, a terra e o ar (LAÊRTIOS, 1987, p. 234).

Assim, com este modo de estruturação do Universo, os pitagóricos elaboraram sua resposta para o problema da *arkhé*.

O conhecimento pitagórico de uma aritmética de números discretos e descontínuos, o "atomismo" matemático fez supor um atomismo físico (MICHEL *et al*, 1959), de modo que as *mônadas*[55] fossem identificadas com a unidade numérica.

Cabe ressaltar aqui que os atomistas, representados primeiramente por Leucipo (490 a 420 a. C.) e Demócrito (460 a 370 a. C.), sofreram influências dos pitagóricos. Aristóteles quando disse "Entre estes, e antes deles, os chamados pitagóricos..." (ARISTÓTELES, 1979, p. 21) faz referência exatamente aos atomistas. Chauí (2002, p. 121) acrescenta,

> A partir dessas idéias [a dos pitagóricos], os atomistas propõem sua própria cosmologia. A phýsis, como o ser eleata, deverá ser idêntica a si mesma, eterna e imutável, mas,

---

[54] Na *Sucessão dos Filósofos* Alexândros diz ter encontrado nas *Memórias dos Filósofos* estes dogmas pitagóricos.

[55] Spinelli, (1998, p.156) cita: "Arquitas e Filolau atribuem indiferentemente ao Um o nome de mônada e o nome de Um à mônada" (Teão de Esmirna, *Comentários*, ed. Hiller, 20, 19-DK 44 A 10).

> diferentemente dos eleatas, é formadas por unidades discretas, como para os pitagóricos.

As justificativas dos pitagóricos avançaram, e criaram uma “teoria do conhecimento” que Filolau apresenta em seus fragmentos. Estes escritos supõem que o conhecimento está vinculado a uma ontologia matemática (Spinelli, 1998).

> Fragmento 4: “todo ser cognoscível tem um número, sem o qual nada poderíamos pensar ou conhecer” (Estobeu[56])
>
> Fragmento 11: “nenhuma das coisas [existentes] seria evidente a ninguém, nem nela mesma e nem na sua relação com outra coisa, se não existisse numero e a essência do número” (Estobeu[57]) (SPINELLI, 1998, p. 152).

Spinelli (1998) diz ainda que, para os pitagóricos, segundo os escritos de Filolau, as coisas que existem na realidade, só podem ser conhecidas porque “existe o número e a essência do número”, e é neste princípio que se fundamenta toda a teoria do conhecimento[58] encontrada nos “fragmentos”.

> Nele se revela a importância do número (arithmós) como condição sine qua non do conhecimento [...] ou também como foi dito no fragmento 11[59]: “Na verdade é o número que, tornando todas as coisas adequadas à alma pela sensação, as torna cognoscíveis e comensuráveis entre elas, segundo a natureza do gnômom[60]; pois é ele que as torna corporais e distingue cada uma das relações entre as coisas tanto ilimitadas como limitantes” (SPINELLI, 1998, p. 152).

---

56 (Estobeu, *Textos escolidos*, I, XXI, 7b; DK 44 B 4).

57 (Estobeu, *Textos escolidos*, I, XXI, 7b; DK 44 B 11, 16-18).

58 “Ninguém duvida de que a mentalidade seja pitagórica, o que se questiona, todavia, é a pressuposição, por detrás desses fragmentos, de uma teoria do conhecimento já elaborada, e que não condiz, no seu conjunto, com a mentalidade dos autores designados de pré-socráticos” (SPINELLI, 1998, p. 145).

59 (Estobeu, *Textos escolidos*, I, Prefácio, 7; DK 44 B 11, 18-21).

60 Instrumento matemático de medida, por exemplo o esquadro.

A identificação das coisas do universo com os números inteiros era a base do paradigma pitagórico. Isso norteava os pitagóricos a concentrarem seus esforços na comprovação desta identificação, gerando uma grande quantidade de pesquisas aritméticas, cujos resultados produziram uma variada classificação para os números, como números primos, compostos, figurados, entre outros, que são abordados neste trabalho.

A força da crença paradigmática estabelecida pelos pitagóricos de que “as coisas são números”, ainda pode ser identificada atualmente em concepções de matemáticos e educadores matemáticos, para quem, uma das principais justificativas para a presença da disciplina matemática com uma carga horária maior do que a destinada à maioria das demais matérias, nos currículos escolares de todos os países do mundo, se deve ao fato de que “a matemática está presente em tudo”, ou a “matemática faz parte de tudo na vida”, por exemplo.

Fazendo ciência normal

Para Kuhn (2007), os cientistas quando fazem a ciência normal, na maioria do tempo de suas atividades, se ocupam, entre outras coisas, em aparar arestas de uma dada teoria. Esta conduta é uma atividade básica da ciência normal.

Sob a ótica da teoria kuhniana e com o auxílio de nosso “binóculo” histórico, é possível identificar as idéias desenvolvidas pelos pitagóricos para sustentar a teoria de que os números é a estrutura de todo o universo.

O modo de como foi feita a “tentativa de forçar a natureza” são descritas a seguir, e podemos facilmente interpretar como o desenvolvimento de uma ciência normal.

A crença dos pitagóricos de que os números traduziam a harmonia universal, fez com que eles produzissem várias justificativas para tal afirmação, que vai além da filosofia, e abrange também a geometria, música e astronomia.

Como a geometria era uma forma de representar o mundo, ao buscarem estabelecer a identificação entre formas geométricas e números inteiros buscavam, também, legitimar as afirmações pitagóricas de que as leis matemáticas traduzem o funcionamento do universo. Dessa tentativa de identificação das formas geométricas com os números, surgiram o que os pitagóricos denominaram de números *figurados*, ou seja, quantidades que podem ser representadas por figuras geométricas planas.

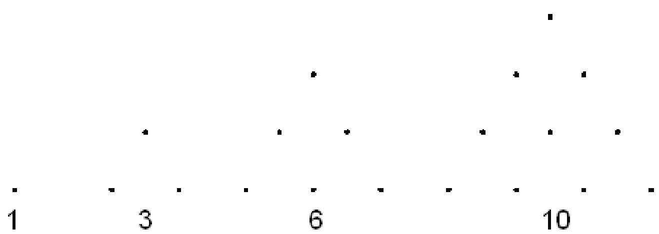

Figura 2 - representação espacial dos números triangulares.

(Fonte: Mlodinow, 2004, p. 31)

Na figura anterior, observa-se que a adjunção sucessiva de pontos, respeitando certo arranjo geométrico, produz sempre triângulos eqüiláteros a partir dos outros. Estes arranjos respeitam uma relação matemática do tipo:

$$1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10,\ \ldots,\ 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Os pitagóricos chamavam os números que hoje podem ser expressos na forma $\frac{n(n+1)}{2}$ de números *triangulares.* De forma semelhante, formavam-se os chamados números *quadrados*, conforme a figura 3:

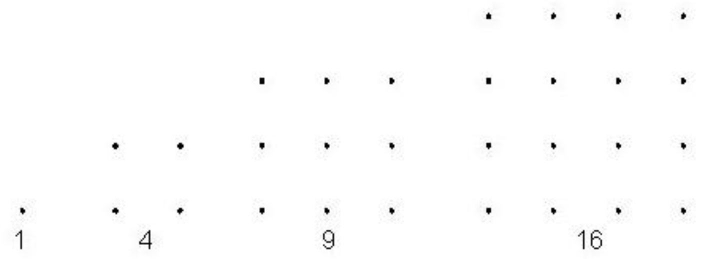

Figura 3 - Representação espacial dos números quadrangulares.

(Fonte: Mlodinow, 2004, p. 31).

A lei que descreve aritmeticamente esta formação é dada por

$$1+3=4,\ 1+3+5=9,\ 1+3+5+7=16,\ \ldots,\ 1+2+3+\ldots+(2n-1)=n^2$$

> As propriedades dos números quadrados e triangulares fascinaram Pitágoras. [...] Enquanto que os números quadrados são todos iguais à soma de todos os números ímpares consecutivos, Pitágoras percebeu que, do mesmo modo, os números triangulares são as somas de todos os números consecutivos, tanto pares como ímpares. E que números quadrados estão relacionados; se adicionarmos um número triangular ao número triangular anterior ou ao próximo, obteremos um número quadrado (MLODINOW, 2004, p. 30).

É desse modo de escrever que vem o termo usado hoje “quadrado de um número” (MLODINOW, 2004). Este estudo prosseguiu também com os números pentagonais, hexagonais, etc.

> Os números (isto é, os inteiros, chamados *arithmoi*) eram divididos em classes: ímpares, pares vezes pares, ímpares vezes ímpares, primos e compostos, perfeitos, amigos, triangulares, quadrados, pentagonais, etc (STRUIK, 1992, p. 78).

Sem esquecer o lado místico das descobertas pitagóricas, Pseudo - Jâmblico[61], nos apresenta o número *sagrado* dos Pitagóricos, o 10 (a década, cujo nome místico é *Tetraktis*). Também denominado de *memória*, o 10 é o resultado da soma dos quatro primeiros números, ou seja, 1 + 2 + 3 + 4 = 10 (SPINELLI, 1998). Para Espeusipus, sobrinho de Platão, o número 10 era "perfeito" (existe outra categoria de números denominados "números *perfeitos*" que são apresentados mais adiante, porém não é neste sentido que Espeusipus se refere), porque, entre outras coisas, o 10 (dez) era o menor número inteiro n que possui entre 1 e n o mesmo número de *primos* e *compostos*[62]. De fato, 2, 3, 5, e 7 são números primos, e 4, 6, 8 e 9 são números compostos (BOYER, 1974).

Aristóteles atribuiu aos pitagóricos a categorização dos números em dez classes:

> Admitem dez princípios, coordenados aos pares: finito e infinito, ímpar par, uno e pluralidade, direito e esquerdo, macho e fêmea, quieto e movimentado, retilíneo e curvo, luz e escuridão, bem e mal, quadrado e retângulo (ARISTÓTELES, 1979, p. 22).

Filolau, de um modo mais restrito, dividiu os números em três categorias, par, ímpar e par-ímpar (SPINELLI, 1998, p. 158), e, em suas escritas, Estobeu[63] diz: "Efetivamente, o número tem duas formas próprias, o impar e o par, além de uma terceira produzida pela mistura dos dois: o par-ímpar" (SPINELLI, 1998, p. 159).

Aristóteles[64] referindo-se aos pitagóricos diz: "[...] e que do número [sejam elementos] o par e o ímpar, sendo destes o ímpar, finito, o par, infinito, e procedendo a unidade destes dois elementos (pois é ao mesmo tempo par e impar)".

---

[61] (Pseudo-Jâmblico, *Teologúmenos Aritméticos*, Ed. De Falco, 81, 15 - DK 44 A 13)
[62] As definições de primos e compostos são apresentadas daqui a alguns parágrafos.
[63] (Estobeu, *Textos escolidos*, I, XXI, 7c; DK 44 B 5).
[64] (ARISTÓTELES, 1979, p. 22)

Os números *ímpares* eram definidos por Filolau como a classe dos números *indivisíveis* (limitados), já os números *pares* eram definidos como a classe dos números *divisíveis* (ilimitados) (SPINELLI, 1998).

> O conjunto dos números inteiros, tanto o dos pares (dos ilimitados ou divisíveis) quanto o dos ímpares (dos limitados ou indivisíveis), se constituem nos dois fundamentos opostos constitutivos do Cosmos. O Cosmos é constituído desses dois pólos, o ilimitável e o limitante, que só a unidade (ou mônada, denominada de *mnêmosyne* e que representa o número 1, este que, por sua vez simboliza a inteligência ou a razão) é capaz de consagrá-los (SPINELLI, 1998, p. 160).

Interpretando o que Filolau diz quando chama número par como divisível e o número ímpar como indivisível, pode-se dizer que:

> [...] par é o número que pode ser dividido em duas partes iguais [por isso divisível], sem que uma unidade fique no meio, e ímpar é aquele que não pode ser dividido em duas partes iguais [por isso indivisível], porque sempre há uma unidade no meio.[65]

Para compreendermos a divisão que os pitagóricos fizeram em relação aos números, temos que observar que o conjunto dos números inteiros era formado pelos números pares e ímpares, porém para os pitagóricos o número 1 (um) não era somente par nem somente impar, mas sim o gerador de todos eles, e, portanto, par e impar (ARISTÓTELES, 1979). Deste modo quando Filolau diz que os números são divididos em três categorias: par, ímpar e par-ímpar, sendo que esta última categoria representa todo o conjunto dos números inteiros, que contêm ao mesmo tempo números pares e números ímpares, esta categoria par-impar é representada pela unidade (SPINELLI, 1998).

> [...] o Um, fonte dos números, é, em si mesmo, par - impar, ilimitado - limitado. O Um ou a unidade é, portanto, a totalidade dos números e, por isso mesmo, a totalidade das coisas visíveis e invisíveis (CHAUI, 2002, p. 76).

---

[65] http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/parimpar.html

Hoje, diferentemente dos pitagóricos, definimos os números da forma $2n+1$ como números ímpares e $2n$ como números pares com *n* sendo um número inteiro. Assim, o número 1 (um) na definição de hoje é somente número ímpar!

Os números amigáveis, caracterizados também pelos pitagóricos, são definidos como pares de números tais que um deles é igual à soma dos divisores do outro e vice e versa.

> Perguntado certa vez acerca do que é um amigo, Pitágoras teria respondido: “Alguém que é um outro eu, como 220 e 284”, e realmente estes dois números possuem a curiosa propriedade de serem 220 igual a 1 + 2 + 4 + 71 + 142, que são os divisores de 284; e 284 igual a 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 44 + 55 + 110 que são os divisores de 220 (KARLSON, 1961, p. 99).

Outros exemplos de categorizações dos números atribuídas aos pitagóricos são os *números primos, números compostos* e os *números perfeitos*.

Os *primos* são todos os números inteiros que têm exatamente dois divisores distintos, 1 e ele mesmo, por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Os *compostos* são todos os números que não possui apenas dois divisores distintos, por exemplo, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Os números *perfeitos* são números cuja soma dos seus divisores, exceto ele próprio, é igual a ele, por exemplo, 6=1+2+3 e 28=1+2+4+7+14.

A formalização do estudo dos chamados números *pitagóricos*[66], no entanto, foi que impressionou pela sua beleza e simplicidade (CARAÇA, 1984), porque possibilita regulação à estrutura de uma figura geométrica. Os gregos tinham conhecimento de que um triângulo de lados 3, 4 e 5, era um triângulo retângulo[67]. Então, começaram a investigar quais outros triângulos têm lados cujas medidas dos comprimentos são múltiplos inteiros de uma unidade de

[66] Todas as soluções inteiras da equação $a^2+b^2=c^2$.
[67] Fato este já conhecido pelos povos da babilônia, porém apenas com uma abordagem quantitativa.

comprimento, formulando o famoso teorema denominado *Teorema de Pitágoras*[68], que é expresso algebricamente na forma:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Neste teorema, *a*, *b* e *c* são as medidas dos lados do triângulo, os lados de medida *a* e *b* são chamados de catetos e o lado de medida *c* é denominado de hipotenusa.

É possível encontrar outras categorizações de números criadas pelos pitagóricos, principalmente ligadas ao misticismo e a numerologia que podem ser encontradas em vários livros de história de matemática. Porém as categorias já apresentadas são as que mais se relacionam com a matemática.

As tentativas realizadas pelos pitagóricos com a intenção de exprimir a natureza por meio de relações numéricas encontraram respaldo até em coisas "não corporais" como o som. A harmonia musical poderia ser traduzida por relações numéricas muito simples. Podemos dizer que o primeiro registro de uma experiência científica, foi a de Pitágoras usando um monocórdio[69] (CARAÇA, 1984).

> Por experiências feitas no monocórdio, ele (Pitágoras) verificou que os comprimentos das cordas que, com igual tensão, dão notas em intervalo de *oitava*, estão entre si na razão de 2 para 1; em intervalo de *quinta*, na razão 3 para 2; em intervalo de *quarta*, na razão de 4 para 3 (CARAÇA, 1984, p. 71).

Chauí (2002), diz que ao perceber os sons da lira órfica ou da lira tetracorde, Pitágoras e seus seguidores observaram princípios e regras de harmonia que podem ser expressas por relações numéricas (proporções) e conclui:

> Ora, se o som é, na verdade, número, por toda a realidade - enquanto harmonia ou concordância dos discordantes como o seco e o úmido, o quente e o frio, o bom e o mau, o justo e o

[68] Iremos retomar este importante resultado o "*Teorema de Pitágoras*" na próxima seção.
[69] Instrumento de uma só corda.

> injusto, o masculino e o feminino - não seria um sistema ordenado de proporções e, portanto número? (CHAUI, 2002, p. 69).

As relações numéricas estabelecidas entre os comprimentos das cordas e as notas correspondentes, fez supor [os pitagóricos], segundo Mariás (1987), as distâncias entre os planetas.

> [...] como as distâncias dos planetas correspondem aproximadamente aos intervalos musicais, pensou-se que cada astro emitia uma nota, compondo todas juntas a chamada harmonia das esferas ou música celestial, que não ouvimos por ser constante e sem variações.
>
> As idéias astronômicas dos pitagóricos foram profundas e penetrantes: Ecfanto chegou a afirmar a rotação da Terra (MARIÁS, 1987, p. 39).

Na procura de leis que relacionassem o universo em termos numéricos, os pitagóricos estudavam a geometria, a astronomia, a música e a aritmética. Mais tarde, estas quatro disciplinas foram denominadas *quadrivium*, conhecimentos que compunham, naquela época, o que chamamos, hoje, de matemática (STRUIK, 1992).

V. A EVIDÊNCIA DE UMA ANOMALIA: a questão da incomensurabilidade

> A anomalia aparece somente contra o pano de fundo proporcionado pelo paradigma (KUHN, 2007, p.92).

Discutiremos nesta seção, o principal *fato* produzido pela escola pitagórica, que foi, sem dúvida, o *Teorema de Pitágoras*. Este teorema que leva o nome do seu suposto "descobridor" foi utilizado por povos anteriores aos gregos do século V a. C., ou seja, o *Teorema de Pitágoras* já era conhecido e utilizado pelos babilônios, egípcios e chineses antes mesmo dos gregos. Porém a formalização deste resultado foi supostamente feita pelos pitagóricos.

Para Struik (1992, p.80) os babilônios conheciam o *Teorema de Pitágoras*, porém "enquanto os Babilônios o consideravam basicamente com um resultado de medições, os pitagóricos concebiam-no como um teorema geométrico abstrato". Eves (1995, p.103) reafirma a mesma suposição:

> [...] já vimos que esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras.

Esse teorema também era utilizado pelos agrimensores das civilizações que viviam na beira do rio Nilo, os quais, por decorrência de enchentes eram obrigados a demarcar os campos enxarcados.

> [...] obrigados a demarcar os campos lodosos, após o retraimento das águas do Nilo, os agrimensores egípcios faziam uso prático desta relação, e poderia alguém pensar que nisto se resume toda utilidade do teorema. Os pitagóricos, porém, tinham em mira alvos mais elevados (KARLSON, 1961, p. 92).

Não há hoje referências seguras ou evidências concretas para afirmar com certeza quando e como esse teorema foi incorporado e demonstrado pelos pitagóricos. Porém se há dúvidas em relação às origens históricas do *Teorema de Pitágoras*, as mesmas dúvidas não pairam sobre sua aplicabilidade em situações ou demonstrações matemáticas tanto na matemática grega como nos dias atuais. Sua importância o torna, ainda hoje, elemento de estudo em várias aplicações geométricas desde o ensino fundamental até o ensino superior.

Existem atualmente, inúmeras demonstrações para o *Teorema de Pitágoras* e segundo Eves (1995), E. S. Loomis classificou e coletou 370 demonstrações para tal teorema, que podem ser encontradas na segunda edição de seu livro *The Pythagorean Proposition*.

Uma das demonstrações mais conhecidas do *Teorema de Pitágoras* parte do fato de que se duas figuras do plano podem ser exatamente sobrepostas uma a outra, então existe a igualdade das áreas destas figuras. Esta bela demonstração do *Teorema de Pitágoras* (*figuras 4 e 5*) foi encontrada no livro chinês *Chupei Suan-ching,* livro este que segundo Godefroy (1997), é anterior aos pitagóricos e se utiliza do espírito do *tangran*[70] e das dobraduras denominadas *origamis*[71].

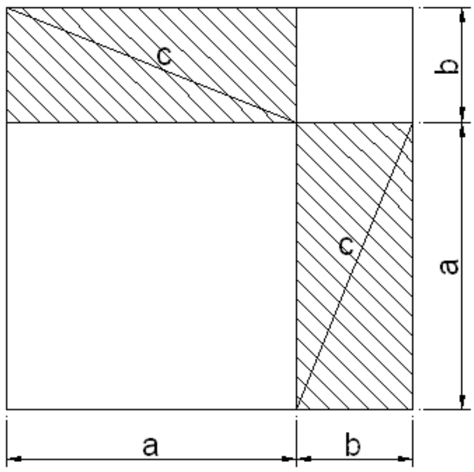

Figura 4 - Rearranjando os triângulos temos que...

(Fonte: Adaptado de Godefroy, 1997, p. 46)

[70] Quebra-cabeça de origem chinesa, que utiliza apenas sete peças oriundas de um quadrado.
[71] Dobraduras apreciadas pelos Orientais.

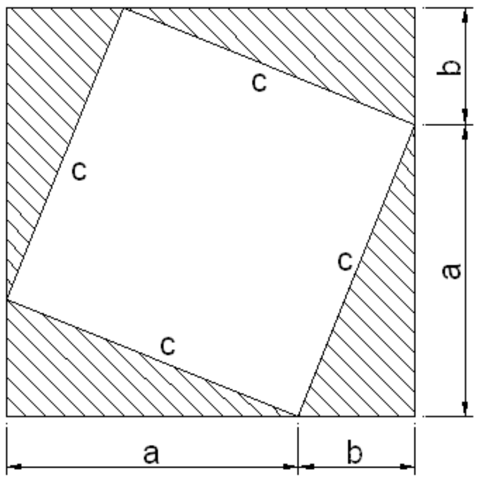

Figura 5 - A superfície branca é mantida com a mesma área. Ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(Fonte: Adaptado de Godefroy, 1997, p. 46).

O *Teorema de Pitágoras* ironicamente foi também o responsável por um forte abalo nas explicações pitagóricas acerca da origem e natureza do Universo: a de que todas as coisas poderiam ser expressas por números inteiros. Essa ferramenta validada e muito utilizada pelos pitagóricos (e pelos matemáticos em geral) constituiu o "pano de fundo" para o aparecimento de uma anomalia na ciência matemática até então construída.

Ao buscarem medir grandezas geométricas utilizando dados aritméticos, os pitagóricos, de acordo com Godefroy (1997, p.45) "vão ser os primeiros a fazer a experiência de como pode ser delicado [...] exprimir o *contínuo* com a ajuda do *discreto".* Especificamente, a anomalia começou com as tentativas de se determinar a medida da diagonal de um quadrado, utilizando dados aritméticos, decorrentes do *Teorema de Pitágoras*.

Para determinar a medida da diagonal de um quadrado qualquer, os pitagóricos provavelmente, raciocinaram da seguinte maneira:

Considere um quadrado qualquer, em particular, o quadrado ABCD representado na figura 6:

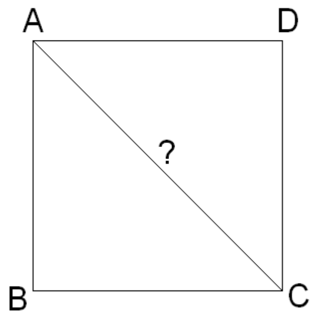

Figura 6 - quadrado ABCD.

Traçando uma diagonal do quadrado, obtemos em particular, o triângulo ABC representado na figura 7:

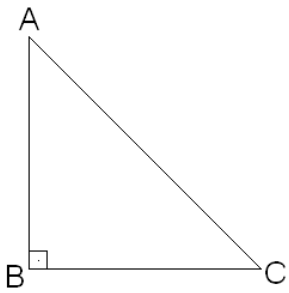

Figura 7 - triângulo retângulo ABC.

Como estamos representando o raciocínio pitagórico utilizando uma linguagem moderna é necessária a apresentação de um axioma e uma definição, a saber:

A todo segmento de reta corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os extremos do segmento são coincidentes[72].

O número a que se refere o axioma anteriormente descrito é chamado comprimento do segmento, ou distância entre os pontos A e B, extremos do segmento. Denotaremos o comprimento de um segmento AB, por $\overline{AB}$[73].

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo representado na figura 7, encontra-se:

[72] Axioma III.1 (FRANCO; GERÔNIMO, 2005, p.26).
[73] Definição 3.1 (FRANCO; GERÔNIMO, 2005, p.26).

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \qquad (1)$$

Mas, por hipótese, *ABCD* é um quadrado, assim:

$$\overline{AB} = \overline{BC} \qquad (2)$$

Logo, substituindo a equação (2) na equação (1), resulta:

$$2\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \qquad (3)$$

Como, para os pitagóricos, os números se resumiam aos inteiros positivos e às razões entre eles, não foi possível encontrar um número que correspondesse exatamente à medida do comprimento $\overline{AC}$ e, portanto, não conseguiram estabelecer nenhuma relação entre a medida encontrada e a medida do lado do quadrado.

De fato, pois quando comparamos as medidas de dois segmentos, pode ocorrer que a medida de um deles seja um múltiplo inteiro da medida do outro, ou seja, dados dois segmentos de reta a e b, a medida de a está contida na medida de b um número *r* inteiro de vezes. Ou ainda, mesmo que não seja possível encontrar um múltiplo inteiro *b* de *a* tal que $b = r \cdot a$, podemos dividir o segmento a em p segmentos de medidas iguais a $\frac{a}{p}$ de modo que $b = \frac{l}{p}a$, ou seja, b seja l vezes o segmento $\frac{a}{p}$. Nestes dois casos dizemos (hoje) que as medidas dos segmentos *a* e *b* são *comensuráveis*.

Como não ocorreu nenhuma das possibilidades acima, provavelmente os pitagóricos se questionaram sobre quais relações seriam estabelecidas entre esses segmentos? Qual o número que poderia ser atribuído a cada uma dessas medidas?

> Que fração poderia ser essa, uma vez que ela só poderia ser uma fração composta de verdadeiros números, dignos de reger o mundo, os inteiros? (OMNÈS, 1996, p.29).

Não é possível comprovar se os pitagóricos realizaram realmente alguma demonstração de que a medida encontrada da diagonal do quadrado não era uma razão de dois inteiros, porém fundado em alguns fragmentos deixados por pitagóricos após a morte de Pitágoras, podemos supor algumas formas de como eles tenham conseguido demonstrar tal feito, como sugeriu Omnès:

> [...] Ignoramos como ele procedeu no pormenor, mas as possibilidades não são muitas, e os testemunhos deixados pelos matemáticos que o seguiram pouco depois deixam poucas duvidas a este respeito (OMNÈS, 1996, p.30).

Como os pitagóricos trabalhavam apenas com medidas comensuráveis, é legítimo supor que, na tentativa de resolver o problema da medida da diagonal do quadrado, tomassem um número racional $r = \frac{m}{n}$ irredutível[74] tal que,

$$\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB} \tag{4}$$

Elevando-se ao quadrado os dois lados da equação (4), obtém-se

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \overline{AB}^2 \tag{5}$$

Assim, das equações (3) e (5), conclui-se que:

$$2\overline{AB}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \overline{AB}^2 \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \tag{6}$$

---

[74] Uma fração $\frac{a}{b}$ é dita irredutível, quando não é possível mais dividir (simplificar) o numerador e o denominador por um mesmo número. Neste caso dizemos também que a e b são primos entre si.

Para nós hoje, a equação (6) é uma relação muito simples, mas para os pitagóricos nascia uma das mais temerosas “monstruosidades” que a escola enfrentaria.

Com efeito, desenvolvendo a igualdade (6) tem-se:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 = m^2 \tag{7}$$

Como m^2 é múltiplo de 2 segue que m^2 é par. Sendo m^2 par, o que se pode afirmar sobre m? m é par ou impar?

Suponha que m seja impar. Deste modo $m = 2k + 1$, assim

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Fazendo $2k^2 + 2k = s$, temos que $m^2 = 2s + 1$, ou seja, m^2 é impar! Absurdo, pois contraria a hipótese inicial. Logo m é par!

Mas se m é par ele pode ser escrito da seguinte forma, $m = 2k$, e, substituindo m em (7) obtemos:

$$2n^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4k^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2 \tag{8}$$

Como nesta última equação, n^2 é par, conseqüentemente, n é par!

Este fato causou espanto e surpresa para os pitagóricos, já que a razão $\frac{m}{n}$ é tomada como irredutível, e se m e n fossem números pares, seria possível dividir tanto o numerador quanto o denominador da fração pelo número 2, contradizendo assim a irredutibilidade da razão. Portanto, os pitagóricos estavam diante de um resultado aceito por sua “comunidade científica”, o *Teorema de Pitágoras*, que quando utilizado na resolução de um problema originou uma contradição. Assim, a impossibilidade da associação de um número racional à medida da diagonal de um quadrado deixou evidente que o *Teorema de Pitágoras* e a crença de que tudo é número são incompatíveis, porque a aplicação de um resulta na falseabilidade do outro.

> Os pitagóricos estão, portanto na posse do teorema que tem presentemente o nome deles, embora professando uma filosofia baseada na primazia do número inteiro. Mas um belo dia, um deles (não está disponível nenhuma precisão acerca da data ou do autor da descoberta) apercebe-se que a diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis, ou seja, em linguagem moderna, que $\sqrt{2}$ não é racional. Esta demonstração perdeu-se. Aristóteles mais tarde faz alusão a uma demonstração aritmética (GODEFROY, 1997, p. 47).

A demonstração aritmética que é aludida por Aristóteles na citação anterior, se refere exatamente ao processo aritmético anteriormente explicitado para mostrar que não existe uma fração de inteiros que se identifique com a medida da diagonal de um quadrado. No entanto, para Godefroy (1997), a demonstração da incomensurabilidade da diagonal do quadrado pelos pitagóricos via aritmética parece não ser provável, já que Teodoro de Cirene (465 a 398 a. C.), mestre de geometria pertencente a Academia de Platão, demonstrou geometricamente a irracionalidade de $\sqrt{n}$ para n não quadrado perfeito inferior ou igual a dezessete. O fato de Teodoro não avançar além do dezessete não faz sentido, no entendimento de Godefroy (1997), se a demonstração via aritmética fosse conhecida e assim, este autor considera que as primeiras demonstrações de irracionalidade utilizavam métodos geométricos. Como veremos mais adiante, nossa leitura sobre esses acontecimentos são diferentes da leitura de Godefroy.

Godefroy (1997) apresenta uma demonstração geométrica, possivelmente análoga a de Teodoro, para a incomensurabilidade entre a medida da diagonal do quadrado e a medida de seus lados:

Se a diagonal e o lado do quadrado são comensuráveis, existe por (homotesia[75]) um triângulo retângulo isósceles ABC de lado mais pequeno q e de hipotenusa p, com p e q inteiros (ver figura 7). O círculo (C) de centro B e raio q corta a hipotenusa em D. A tangente ao círculo em D corta AC em E. Obviamente, CD tem comprimento igual a (p-q), tal como DE, visto que DCE é um triângulo retângulo isósceles. Com efeito, DCE tem um ângulo reto visto que a tangente num ponto de um círculo é perpendicular ao raio, e além disso o ângulo do vértice C é igual a meio ângulo reto, pois o triângulo ABC é isósceles. Como EA e ED são ambos tangentes ao círculo (C) que partem de E, os segmentos EA e ED têm o mesmo comprimento (p-q). Segue-se que EC tem por comprimento $q-(p-q)=2q-p$ (ver figura 7). Os três lados do triângulo DCE têm portanto comprimentos que são números inteiros. Como é retângulo isósceles, podemos recomeçar a construção e obter como atrás uma secessão estritamente decrescente de inteiros positivos (ou, de novo, inteiros positivos arbitrariamente pequenos), de onde a contradição (GODEFROY, 1997, p.48).

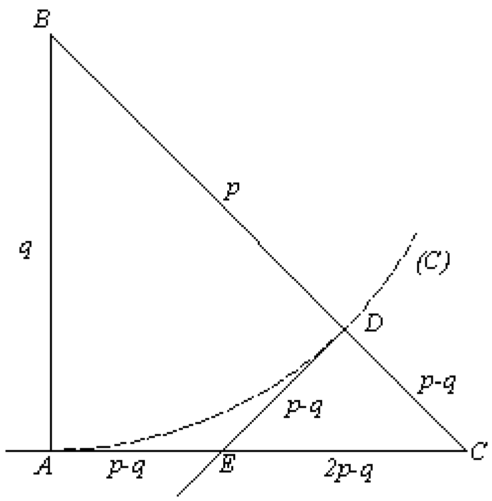

Figura 8 - Triângulo retângulo isósceles ABC.

(Fonte: Godefroy, 1997, p. 49)

Quer seja mediante uma constatação aritmética quer seja pelas vias geométricas, o fato da medida da diagonal do quadrado não poder ser

[75] Propriedade das figuras semelhantes e semelhantemente dispostas.

explicitada como razão entre medidas dos lados do próprio quadrado utilizando números inteiros causou espanto e inquietação entre os pitagóricos. Dessa forma, a partir da perspectiva kuhniana, a descoberta da incomensurabilidade evidencia uma *anomalia*. Porque para a doutrina pitagórica, os números formavam o “céu todo” (BOYER, 1974, p. 55).

Referindo-se a essa situação crítica, Caraça escreve:

> A ser ela verdadeira [a teoria das mónadas], a recta, como toda figura geométrica, seria formada de mónadas postas ao lado umas das outras e, então, ao procurar a parte alíquota comum a dois segmentos, ela encontrar-se-ia sempre *quanto mais não fosse quando se chegasse, por subdivisões sucessivas, às dimensões da mónada* - se um segmento tivesse *m*, outro *n* vezes o comprimento da mónada, a razão dos comprimentos seria $\frac{m}{n}$. A descoberta da incomensurabilidade fazia estalar, como se vê, a teoria das mónadas e a conseqüente assimilação delas às unidades numéricas, e punha assim, em termos agudos, o problema da inteligibilidade do Universo (CARAÇA, 1984, p. 74).

Apesar de não ser possível determinar se realmente os pitagóricos realizaram as demonstrações da incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação a seu lado, por métodos aritméticos ou geométricos, o fato é que depois da descoberta desses segmentos - os incomensuráveis - a filosofia pitagórica não poderia mais ser sustentada.

Como uma relação tão simples na matemática contemporânea, como a razão de medidas de dois segmentos de reta, não pôde ser entendida? A resposta pode ser porque a teoria das mônadas que respaldava a crença de que tudo em última instância se resumiria a números inteiros, não resolvia o impasse criado.

Sob a ótica da teoria kuhniana, o problema enfrentado pelos pitagóricos com o surgimento das medidas incomensuráveis não é considerado como um problema de ciência normal, pois para que isso ocorra, o problema deve "possuir uma solução assegurada dentro do paradigma, isto é, deve obedecer a regras que limitam tanto a natureza das soluções aceitáveis como os passos necessários para obtê-las" (KUHN, 2007, p. 61).

Como para Kuhn (2007) as atividades de um cientista normal[76] são motivadas pela resolução de quebra-cabeças (*puzzle*), o problema da incomensurabilidade era uma novidade inesperada, os pitagóricos não poderiam de maneira alguma respondê-lo, pois este problema não era previsto na articulação do *puzzle* que eles estavam empenhados em resolver.

Os pitagóricos se viram, portanto, diante de uma relação geométrica aparentemente simples em que todas as ferramentas, crenças, mitos, e teorias estabelecidas não eram suficientes para esclarecê-la, descaracterizando, então, o período de ciência normal, pois, segundo Kuhn (2007, p. 58) "O objetivo da ciência normal não consiste em descobrir novidades substantivas".

Sobre esse período de pesquisa normal discutido por Thomas Kuhn em *A Estrutura das Revoluções Científicas*, Chalmers escreve:

> Os cientistas normais articularão e desenvolverão o paradigma em sua tentativa de explicar e de acomodar o comportamento de alguns aspectos relevantes do mundo real tais como relevados através dos resultados de experiências. Ao fazê-lo experimentarão, inevitavelmente, dificuldades e encontrarão falsificações aparentes. Se dificuldades deste tipo fugirem ao controle, um estado de crise se manifestará (CHALMERS, 1993, p. 124).

A crise

Como já foi visto, a atividade intelectual dos pitagóricos antes do aparecimento dos incomensuráveis era norteada por suposições, técnicas, leis e crenças, fundamentadas em que tudo poderia, em última instância, ser identificado com

---

[76] Que pertence a uma comunidade científica.

os números inteiros. “A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros” (EVES, 1995).

> Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicado em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões (BOYER, 1974, p. 53).

O mais célebre dos resultados delegados aos pitagóricos, o *Teorema de Pitágoras*, deu suporte para explicitar no seio do paradigma, que é fundado na crença de que todas as coisas podem ser identificadas com os números inteiros, possivelmente a primeira crise conhecida nos fundamentos da matemática. Essa crença cai por terra ante a descoberta de que: “na própria geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas” (BOYER, 1974, p. 53).

Quais seriam as possibilidades postas aos matemáticos daquele período? Negar o *Teorema de Pitágoras*? Ou deveriam negar todas as crenças partilhadas pela comunidade pitagórica que sustentava a existência de uma relação, entre a unidade numérica e a unidade formadora do universo - as mônadas?

Negar o *Teorema de Pitágoras* era impossível, porque ele já se tornara um *fato*, em função de sua demonstração e de sua validação e utilização não só pelos pitagóricos, mas também por outras civilizações. Restava então, admitir que nem tudo era número, mas isto significava negar todas suas crenças e, contrariar o paradigma que os regiam em suas realizações científicas. Estas duas possibilidades eram incompatíveis diante da descoberta dos incomensuráveis, e essa incompatibilidade obrigou os pitagóricos a buscar um entendimento lógico para a situação gerada.

O mais provável é que, de imediato, os pitagóricos tentaram esconder a *anomalia* - alguns escritos dão conta desta ação desesperada de conter a propagação do ocorrido, como a passagem de *Plutarco*, encontrada na coleção *na vida de Numa Pompilius,* XXXV:

> [...] diz-se que os pitagóricos não queriam pôr as suas obras por escrito, nem as suas invenções, mas imprimiam a ciência na memória daqueles que eles reconheciam dignos disso.
>
> E como algumas vezes comunicaram alguns de seus mais íntimos segredos e das mais escondidas sutilezas da geometria a algum personagem que não o merecia, eles diziam que os deuses por presságios evidentes, ameaçavam vingar este sacrilégio e esta impiedade, com alguma grande e pública calamidade (PLUTARCO *apud* CARAÇA, 1984, p. 75).

Esta e outras evidências dão sustentação a algumas lendas como à de que a sociedade secreta dos pitagóricos mandou matar *Hipaso de Metaponto*, um de seus seguidores, porque ele havia revelado o segredo dos incomensuráveis.

> Sabe-se apenas com alguma certeza que um túmulo foi construído, enquanto ele ainda vivia, para Hipaso de Metaponto ("Seja ele declarado morto"), embora ele apenas houvesse divulgado aos não iniciados esse segredo da incomensurabilidade (Omnès, 1996, p. 30).

Ainda para corroborar com afirmação de que os pitagóricos tentaram manter sigilo sobre os irracionais, temos esta passagem de Proclo[77]

> Dizem que o primeiro homem a desvendar o véu das contemplações do irracional, trazendo-o a público, perdeu a vida em um naufrágio, isto porque o indivisível e inimaginável deveria permanecer para sempre oculto; mais, contam que aquele que por acaso tocara nesta imagem da vida, desvendando-a, fora transferido para as origens da vida, onde foi banhado nas águas as torrente eterna (PROCLO *apud* KARLSON, 1961, p. 102).

[77] Filósofo neoplatônico do século V d. C.

Mesmo em sigilo, há indícios que os pitagóricos tiveram algumas atitudes no sentido de "compreender o incompreensível" (os incomensuráveis), foi uma tentativa frustrada de identificação do número de mônadas que formam a reta com o infinito, "um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um muito grande, do que o infinito moderno" (CARAÇA, 1984, p. 75).

De acordo com Galarda *et al* (1999), realmente não se tem certeza se os pitagóricos tentaram justificar a incomensurabilidade das grandezas "sustentando que a maior medida comum era infinitamente pequena e contida um número infinito de vezes nessas grandezas" (GALARDA *et al* ,1999, p. 20).

Nesse sentido a escola pitagórica tentou ainda argumentar que, se um número fosse infinito, poderíamos dizer algo sobre sua paridade? Se não, a demonstração aritmética da incomensurabilidade da diagonal do quadrado baseada na paridade dos números não faria sentido, e assim, poderia estar errada. Dessa forma, os pitagóricos agiram tal como os cientistas em situação de enfrentamento de uma crise concebendo "numerosas articulações e modificações *ad hoc* de sua teoria, a fim de eliminar qualquer conflito aparente" (KUHN, 2007, p. 108).

As atitudes de negação dos pitagóricos frente ao problema dos incomensuráveis refletem ou reforçam o que diz Kuhn (2007) acerca dos cientistas que, mesmo quando defrontados com contra-exemplos de suas teorias não as abandonam, "embora possam começar a perder sua fé e a considerar outras alternativas, não renunciam ao paradigma que os conduziu à crise" (KUHN, 2007, p.107).

> Mesmo após a descoberta dos irracionais, um de seus melhores títulos de glória, a aritmética continua sendo, para os pitagóricos, a ciência do número inteiro. Incompatíveis com a teoria dos números figurados, as quantidades irracionais são sistematicamente desprezadas no estudo dos problemas propriamente aritméticos (MICHEL *et al* , 1959,p. 29).

Com os esforços dos pitagóricos em preservar as teorias que norteavam seus estudos e os resultados obtidos, podemos concluir que estavam empenhados em "salvar" o paradigma tentando tornar o que era anômalo em previsível no paradigma. Porém, como as tentativas de resolver o problema dos incomensuráveis não surtiram efeito, os pitagóricos assumem a existência de comprimentos que não podiam ser expressos por racionais, os alogon, ou não-racionais.

> [...] Pitágoras bateu em retirada de sua prática promissora de associar figuras geométricas a números, e proclamou que alguns comprimentos não podem ser expressos por número. Os pitagóricos chamaram tais comprimentos de *alogon*, "não racionais", que hoje traduzimos como "irracional". Todavia, a palavra *alogon* tinha um duplo sentido: significava também "não deve ser falado". Pitágoras tinha resolvido seu dilema com uma doutrina que teria sido difícil defender; assim, seguindo a sua doutrina geral de manter sigilo, ele proibiu seus seguidores de revelar o paradoxo embaraçoso (MLODINOW, 2004, p. 37).

As tentativas dos pitagóricos foram constantemente rebatidas, principalmente pelas críticas à teoria das mônadas, elaboradas pelas escolas gregas que sucederam a dos pitagóricos, particularmente com a contradição lógica nos argumentos da escola pitagórica encontrada por *Zenão de Elea*, discípulo de *Parmênides.*

> Diz *Zenão*: como querem que a recta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa afirmação fundamental de que *todas as coisas têm um número*. Com efeito, entre dois corpúsculos, 1 e 2, deve haver um espaço - se estivessem unidos, em que se distinguiam um do outro? - e esse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores concebíveis; logo, entre dois posso intervalar um corpúsculo, 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3, e outro entre 3 e 2, nas mesmas condições. Posso repetir o raciocínio indefinidamente e fico, portanto, com a possibilidade de meter entre 1 e 2 *quantos corpúsculos quiser*. - Qual é então o número que pertence ao seguimento que vai de 1 a 2? (CARAÇA, 1984, p. 77).

Zenão[78] objetivando mostrar aos matemáticos da época as incoerências decorrentes da tentativa de se completar grandezas contínuas com um número infinito de pequenas partículas apresentou alguns paradoxos, sustentados no seguinte argumento:

> [...] ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis ou existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (um ponto). Em dois de seus paradoxos, no da "Dicotomia" e no de "Aquiles e a Tartaruga", Zenon argumenta que, se o tempo e o espaço são divisíveis "ad infinitum", o movimento é impossível (GALARDA *et al* ,1999, p. 20).

Paradoxo de Dicotomia[79]

Antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas, antes disso, deve percorrer o primeiro quarto; e, antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito. Mas é impossível exaurir uma coleção infinita. Logo é impossível iniciar o movimento.

Paradoxo de Aquiles[80]

Aquiles famoso guerreiro da Grécia antiga, aposta um corrida com a tartaruga. Conhecedor de sua superioridade, Aquiles lhe oferece uma vantagem. Aquiles, porém, nunca alcança a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Quando Aquiles chega à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco e, quando Aquiles cobrir esta distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais e assim sucessivamente.

Os paradoxos criados por Zenão deixam explícitas as situações contraditórias que surgiram da utilização do argumento de que se o número de elementos de

---

[78] Em alguns livros ou traduções Zenão de Elea, aparece como Zenon de Elea.
[79] GALARDA et al ,1999, p. 20.
[80] GALARDA et al ,1999, p. 11.

um segmento de reta (as mônadas) fosse infinito, isto poderia explicar os segmentos incomensuráveis enquadrando-os no paradigma vigente.

A escola eleática foi duramente criticada por fazer entender que a existência estava associada à imobilidade - “há coisa mais real e segura de que o movimento no mundo?” (CARAÇA, 1984, p. 78). Porém Zenão respondia que seu interesse não era se existia ou não movimento no mundo, mas sim se o movimento era compreensível e compatível com as explicações que eram dadas a ele pelo paradigma pitagórico. Para Zenão, as explicações dos pitagóricos para o movimento eram cheias de contradições, pois ao tentar “atomizar” o espaço necessariamente surgem os paradoxos, que em última instância, se remetia aos infinitésimos, sendo estes não compreendidos pelos gregos da época.

Os argumentos e os paradoxos estabelecidos por Zenão deram origem, segundo Caraça (1984), ao medo e repúdio a processos infinitos na matemática que perduraram vários séculos e provocaram conseqüências tanto positivas quanto negativas no desenvolvimento da matemática. De positivo, podemos destacar o método da exaustão que, segundo Struik (1992), foi uma resposta aos argumentos de Zenão, e de negativo, a demora na aceitação e compreensão dos infinitesimais.

VI. PERÍODO DE CIÊNCIA EXTRAORDINÁRIA: entre a crise e a revolução.

Após os pitagóricos terem se defrontado com as grandezas incomensuráveis e de suas tentativas em enquadrar o problema no paradigma vigente, serem contestadas por Zenão, a escola de Platão se ocupou, de certa forma, em tentar compreender essas medidas, inclusive, rivalizando com a escola de Eléa.

Os matemáticos Teodoro (465 a 398 a. C.), Teeteto (414 a 369 a. C.), Eudoxo (408 a 355 a. C.) e Euclides (360 a 295 a. C.) ligados à academia de Platão foram os que mais se destacaram em suas produções matemáticas. Segundo Granger (2002) a delimitação das pesquisas desta academia podem ser resumidas pelos seguintes traços:

> A assimilação de uma tradição pitagórica, aritimético-geométrica, a fixação, e mesmo a ritualização, de um método de demonstração, [...] a colocação em evidência do problema central constituído pelo estabelecimento de uma relação entre dois conceitos chamados "naturais": o de número inteiro e o de grandeza, em particular grandeza geométrica (GRANGER, 2002, p. 25).

Na abordagem da escola platônica referente aos números irracionais e/ou às medidas incomensuráveis, há uma preocupação em desenvolver técnicas geométricas que permitissem, de alguma forma, "manejar matematicamente" as medidas incomensuráveis, pois "ninguém duvida da existência da diagonal do quadrado" (GODEFROY, 1997, p.50).

> Não se podem *denominar* os irracionais, seja; mas podemos pelo menos *mostrar* esses números inomináveis, construindo geometricamente comprimentos relacionados de forma igual com esses números (GODEFROY, 1997, p. 50).

Se não podiam nominá-los, não tinham, por outro lado, como negá-los, já que eles existiam enquanto segmentos de reta construtíveis em régua (não graduada) e compasso.

Do contexto descrito por Godefroy (1997) podemos inferir que os matemáticos da Academia de Platão não se submetiam ao paradigma pitagórico, pois aceitavam a existência dos irracionais, embora não soubessem operar com eles ou sequer "nominá-los". Os platônicos se dedicaram a essa tarefa, iniciando um processo de pesquisa que pode ser caracterizado como uma *pesquisa extraordinária*, no sentido da teoria kuhniana.

> Quando [...] uma anomalia parece ser algo mais do que um novo quebra-cabeça da ciência normal, é sinal que se iniciou a transição para a crise e para a ciência extraordinária. A própria anomalia passa a ser mais comumente reconhecida como tal pelos cientistas. Um número cada vez maior de cientistas eminentes do setor passa a dedicar-lhe uma atenção sempre maior (KUHN, 2007, p. 114).

Na presença da anomalia e o conseqüente aprofundamento da crise paradigmática, abriu-se um período de pesquisa extraordinária que permitiu que matemáticos como Teodoro de Cirene, fundados em novas crenças, em outras metafísicas e em outros modelos, buscassem outros caminhos, um novo paradigma para a matemática daquele período.

Os matemáticos platônicos, segundo Godefroy (1997), tiveram suas atividades científicas concentradas à produção de técnicas para a resolução de problemas de quadratura, ou seja, a construção de quadrados cuja área da superfície é igual à área de outra superfície de uma figura dada. Nessas técnicas eles utilizavam facilmente a $\sqrt{n}$ - raiz de n - para tal feito. Por exemplo, a construção geométrica de um segmento, de modo, que esse segmento seja o lado de um quadrado de área igual a 7 unidades quadradas. Este problema se resume em construir um segmento de medida igual a $\sqrt{7}$, e a técnica utilizada pelos matemáticos da escola platônica, para a resolução de tal problema, pode ser observada na seguinte figura:

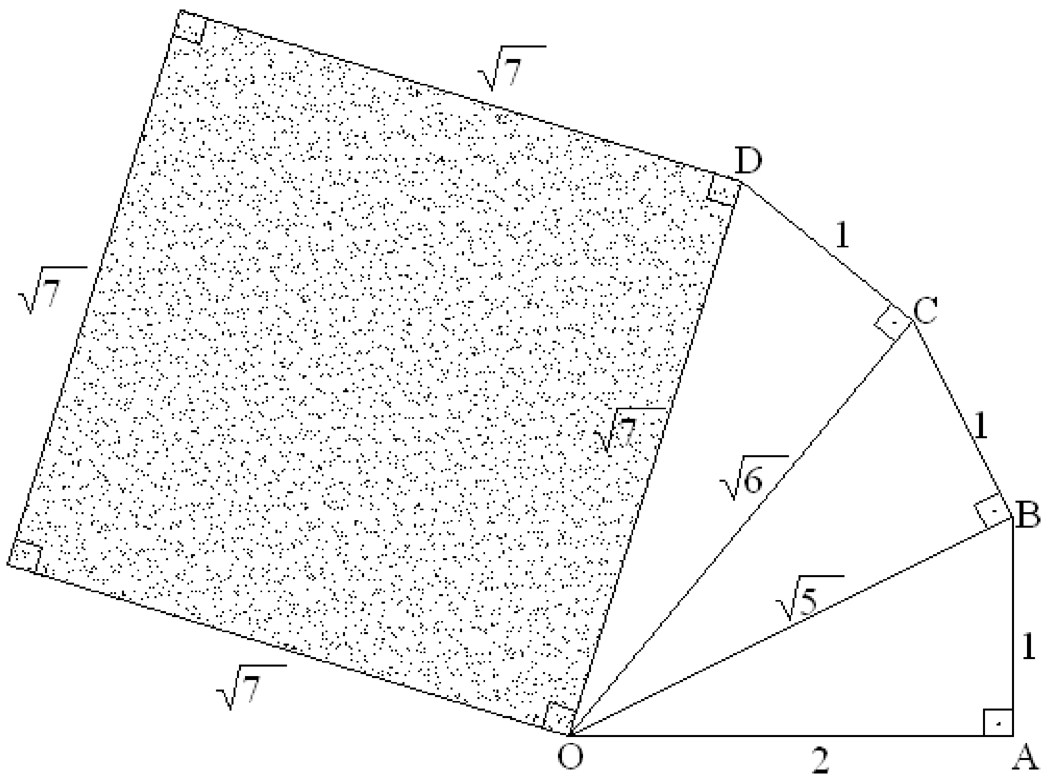

Figura 9 - a razão $\frac{OD}{AB} = \sqrt{7}$.

(Fonte: Adaptado de Godefroy, 1997, p. 51).

Para enfrentar a anomalia gerada pela incomensurabilidade, os platônicos procuraram distanciar-se cada vez mais, do paradigma aritmético. Desse modo, passaram a utilizar tanto os métodos geométricos, como as grandezas geométricas. Esta posição dos platônicos se justifica na medida em que não se podia negar a existência das diagonais de um quadrado, pois estas poderiam facilmente ser construídas sem que, contudo, a aritmética dos pitagóricos sustentasse teoricamente tais objetos matemáticos.

Além do desenvolvimento de técnicas para o tratamento envolvendo grandezas incomensuráveis, os seguidores de Platão discutiram, também, a demonstração de não comensurabilidade dessas medidas.

No *Diálogos de Platão*[81], é relatada uma dessas discussões, entre Teeteto, Teodoro de Cirene e Sócrates, na qual, Teeteto, em seu diálogo com Sócrates, comenta que foi demonstrada a irracionalidade dos seguintes números:

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{15}\ e\ \sqrt{17}$$

> *Teeteto* - A respeito da algumas potências, Teodoro, aqui presente, mostrou que a de três pés e a de cinco, como comprimento não são comensurável com a de um pé. E assim foi estudando uma após a outra, até a de dezessete pés. Não sei por que parou aí (PLATÃO, 1988, p. 9).

Como já foi dito neste trabalho, Godefroy (1997) acredita que os pitagóricos não demonstraram a incomensurabilidade de alguns segmentos via aritmética, pois, caso contrário, Teodoro de porte deste conhecimento, não teria motivo, como é explicitado em seu diálogo com Sócrates, parado em seus estudos de incomensurabilidade no número dezessete.

Ao contrário de Godefroy (1997), acreditamos que, influenciados pelo paradigma que os regiam, essencialmente aritmético, o mais provável é que os pitagóricos tenham esboçado uma demonstração aritmética para a incomensurabilidade da diagonal do quadrado. Acreditamos mais, que em função da insuficiência dos números inteiros em responderem a crise explicitada pelo *Teorema de Pitágoras*, os matemáticos que sucederam os pitagóricos, em específico os matemáticos platônicos, deixam de se submeter às regras da matemática pitagórica. Assim, é legítimo supor que Teodoro de Cirene, realizou demonstrações geométricas para a irracionalidade de $\sqrt{n}$ para n não quadrado perfeito inferior ou igual a dezessete, não por desconhecimento das possibilidades de uma demonstração aritmética, mas por buscar se distanciar do paradigma pitagórico e, nesse aspecto, discordamos de Godefroy (1997).

---

[81] Platão 427-347 a.C. Teeteto-Crátilo. Trad. Carlos Alberto Nunes, 1988.

De acordo com Struik (1992), atribui-se a Teeteto a teoria dos irracionais tais como apresentada no livro X de *Os Elementos de Euclides*:

> Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden com la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
>
> Las líneas rectas son conmensurables em cuadrado cuando sus cuadrados se miden com la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común [...] (EUCLIDES, 1996, p.9).

A discussão entre Teeteto e Sócrates encontrada no *Diálogos de Platão* aprofunda-se para além da comparação entre medidas comensuráveis e incomensuráveis, mas para as medidas que são incomensuráveis em comprimento, porém não o são em quadrado, como por exemplo, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{11}$, e aquelas que são incomensuráveis mesmo em quadrado, por exemplo, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (GALARDA *et al* ,1999).

> *Teeteto* - [...] ocorreu-nos, então, já que é infinito o número dessas potências, tentar reuni-las numa única, que serviria para designar todas. [...] Dividimos os números em duas classes: os que podem ser formados pela multiplicação de fatores iguais, representamo-los pela figura de um quadrado e os designamos pelos nomes de quadrado e de eqüilátero. [...] os que ficam entre estes, o três, por exemplo, e o cinco, e todos os que não se formam pela multiplicidade de fatores iguais, mas de uma multiplicação de um número maior por um menor, ou o inverso: a de um menor por um maior, e que sempre são contidos em uma figura com um lado maior do que o outro, representamo-los sob a figura de um retângulo e os denominamos números retangulares.
>
> *Sócrates* - Ótimo! E depois?
>
> *Teeteto* - Todas as linhas que formam um quadrado de um número plano eqüilátero, definimos como longitude, e as de

> quadrado de fatores desiguais, potências ou raízes, por não serem comensuráveis com as outras pelo comprimento, mas apenas pelas superfícies que venham a formar. Com os sólidos procedemos do mesmo modo (PLATÃO, 1988, p. 9).

O matemático Eudoxo também ligado à academia de Platão e que dedicou a maioria de seus trabalhos na exploração do obstáculo da incomensurabilidade foi por um dos mais importantes matemáticos da Grécia Antiga. Seu nome hoje é comumente ligado a *teoria das proporções* a ao *método da exaustão*[82]. Essas duas teorias foram as que começaram a resolver, por meio de outro método, de outras leis gerais, de novos critérios, a crise levantada pela descoberta dos incomensuráveis.

Para contornar o problema, Eudoxo em vez de usar números para comparar duas grandezas de mesma espécie (dois comprimentos, duas áreas, dois volumes, etc.) adotou o conceito de “razão entre duas grandezas” e desenvolveu esta teoria de forma impecável. Euclides as apresentou no livro V dos elementos (LIMA, 1991).

As cinco primeiras definições do livro V de Euclides são:

> 1. Una magnitud es parte de uma magnitude, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
>
> 2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
>
> 3. Una razón es determinada relación com respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogêneas.
>
> 4. Se dice que guardan razón entre si lãs magnitudes que, al multiplicarse, pueden excerder uma a outra.
>
> 5. Se dice que uma primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera com una cuarta, cuando

[82] O termo “exaustão” aparece pela primeira vez em Grégoire de Saint - Vincent, em 1647 (STRUIK, 1992, p. 86)

> cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguals a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados em el orden correspondiente. (EUCLIDES, 1994, p.9).

Na definição 1, cuja tradução dada por Lintz (1999, p. 147) é: "uma magnitude é parte da outra, sendo a menor dentre elas, quando mede a maior", a palavra medir pode estar associada à colocação de uma grandeza sobre a outra, com o objetivo de uma comparação visual de seus tamanhos e não para ver quantas vezes uma cabe na outra. A idéia de comparação entre duas grandezas é apresentada definição 4: "duas grandezas relacionam-se uma com a outra se um múltiplo de uma delas excede a outra", que numa linguagem atual podem ser entendidas segundo Lintz (1999) da seguinte maneira:

> [...] sejam dois segmentos; então se colocarmos um deles várias vezes em seguida, formaremos um segmento tão grande que poderá superar o outro e, portanto, dois segmentos são grandezas que se relacionam; já, um triângulo e um segmento não se relacionam, pois nunca o múltiplo de um supera o outro (Lintz, 1999, p. 148).

Na definição 5, também traduzindo para uma linguagem atual, Eudoxo afirma que: dado as grandezas a, b, c e d, segue que, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, é necessário e suficiente afirmar que, tomando $\alpha, \beta \in Z$ tem-se:

$$\alpha \cdot a < \beta \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot c < \beta \cdot d \text{, ou se}$$

$$\alpha \cdot a = \beta \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot c = \beta \cdot d \text{, ou ainda, se}$$

$$\alpha \cdot a > \beta \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot c > \beta \cdot d$$

Desse modo Eudoxo dá uma nova definição para a igualdade de razões, e diz, introduzindo um novo critério, quando uma razão é maior que a outra baseando-se apenas em números inteiros, incluindo tanto as razões racionais quanto as irracionais (AABOE, 2002). Assim, segundo Lintz (1999, p. 150) "com essa teoria das proporções, pode-se reabilitar a geometria, que se apresentava incompleta como deixada pelos pitagóricos [...]"

A teoria das proporções de Eudoxo pôde dar um novo significado para o *objeto matemático*: diagonal de um quadrado. Essa grandeza geométrica causava espanto e surpresa para os pitagóricos, como vimos na seção anterior, por não se adequar à crença de que tudo no universo deveria em última instância se resumir a números inteiros.

> A teoria das proporções de Eudoxo pôs de parte a teoria aritmética dos pitagóricos, que se aplicava apenas a quantidades comensuráveis. Era uma teoria puramente geométrica, que, na sua forma estritamente axiomática, tornava supérflua qualquer referência a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis (STRUIK, 1992, p. 84).

O *método da exaustão*, também conhecido por *axioma de Arquimedes*[83]·, foi uma resposta da escola de Platão a Zenão, pois segundo Struik (1992), o método criado por Eudoxo:

> [...] evitava as dificuldades dos infinitesimais renunciando simplesmente a eles, pela redução dos problemas que conduzem a infinitesimais a problemas que envolviam o uso da lógica formal (STRUIK, 1992, p. 84).

O método encontrado por Eudoxo, estabelecendo critério para a convergência de uma seqüência infinita, irá sustentar os mais importantes trabalhos dos matemáticos gregos subseqüentes.

> Este método indireto, que se tornou o modelo grego e do Renascimento nas demonstrações de cálculos e áreas e volumes, era muito rigoroso e pode ser facilmente traduzido numa prova que satisfaça as exigências da análise moderna (STRUIK, 1992, p. 86).

---

[83] Arquimedes faz referência explícita a Eudoxo quando utiliza este axioma.

Na secção anterior, foi mostrada a tentativa dos pitagóricos em tentar transformar o que era anômalo em previsível pelo paradigma, porém as tentativas foram todas refutadas por Zenão. No entanto, Zenão não apresentou, em contrapartida, uma saída para a anomalia. A escola platônica, mais especificamente, Eudoxo, propõe o “novo”. De fato, o critério de convergência elaborado por Eudoxo aparece na proposição I do livro X dos Elementos de Euclides:

> Dadas dos magnitudes, si se quita de la mayor uma (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, uma magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará uma magnitud que será menor que la magnitud menor dada (EUCLIDES, 1996, p.12).

Essa proposição serviu como preparação para que se pudesse dar uma definição para grandezas incomensuráveis, que é a proposição II do Livro X de Euclides:

> Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán incomensurables (EUCLIDES, 1996, p.14).

Transcrita em simbolismo moderno, a proposição I afirma que:

Dado $A > \varepsilon$ então se $\alpha_i \leq \frac{1}{2}\ (i = 1, 2, \ldots)$ então existe n tal que $A \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n < \varepsilon$. Ou, equivalentemente, se $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$, então $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0$ (AABOE, 2002).

As técnicas desenvolvidas pelos platônicos, principalmente pela Teoria das Proporções e pelo Método da Exaustão, elaboradas por Eudoxo, são um dos pilares de uma nova tradição matemática que mais tarde é difundida nos Elementos de Euclides.

VII. O DESABROCHAR DO NOVO PARADIGMA: a geometria euclidiana

> [...] foi Eudoxo quem resolveu a "crise" da matemática grega; as suas formulações rigorosas ajudaram a determinar o rumo da axiomática grega e, de maneira considerável, da matemática grega como um todo (STRUIK, 1992, p. 92).

A revolução científica na matemática, resultante da crise gerada pela descoberta dos incomensuráveis termina com o desabrochar do novo paradigma: a geometria das construções com régua (não graduada) e compasso. A incomensurabilidade, a partir de então, passou a ser estudada usando-se o método da exaustão de Eudoxo, com o suporte da lógica aristotélica.

As realizações matemática que participarão do florescimento desse novo paradigma na matemática na Antiguidade Grega são: as Teorias das Proporções o Método da Exaustão, ambas de Eudoxo e citadas neste trabalho, e o *Órganon* obra de Aristóteles.

Todo conhecimento, à época dos platônicos, passava pela filosofia, que, ao nosso entender, se punha como teoria do conhecimento. Uma evidência disso são os trabalhos produzidos por Aristóteles e, dentre esses o *Órganon* que estabelece as bases do pensamento lógico-dedutivo, que viria a ser fundamental aos Elementos de Euclides. A influência de Aristóteles na elaboração dos Elementos foi pouco considerada, o que é compreensível pela visão dominante, atualmente, de que a filosofia, àquela época, era compartimentada, à moda do conhecimento científico.

A definição estabelecida por Eudoxo para a igualdade de razões, o seu Método da Exaustão, e principalmente, o novo modo de estruturação do conhecimento matemático deixado por Aristóteles, proporcionaram aos matemáticos subseqüentes ferramentas poderosas, suficiente para subsidiar, entre outras coisas, o início do tratamento do cálculo diferencial.

Os pilares deste novo paradigma – As teorias de Eudoxo e o *Órganon* de Aristóteles - são os mesmos pilares que, em nossa compreensão serviram de base para quase toda matemática apresentada nos Elementos de Euclides. Segundo Lintz (1999) Aristóteles mesmo não sendo matemático de profissão, exerceu grande influência no desenvolvimento da geometria com sua coleção de trabalhos sobre lógica conhecido como *Órganon*.

> A obra de Euclides surgiu depois da morte de Aristóteles, mas Euclides baseou-se nas pesquisas de seus predecessores, e estes dedicaram ao menos parte de seu pensamento ao elemento que viria a ser característica distintiva da ciência geométrica euclidiana (BARNES, 2002, p. 43).

Este elemento no qual Barnes (2002) se refere na citação acima é justamente o modo de raciocínio apresentado por Aristóteles, característica singular dos Elementos de Euclides, que serviu para fundamentar toda a geometria euclidiana, que resumidamente pode ser descrito como:

> [...] um sistema axiomatizado: ele seleciona uns poucos princípios, os axiomas, que postula como verdades primárias de seu objeto; e a partir desses axiomas deriva, por meio de uma série de deduções logicamente inegáveis, todas as outras verdades da geometria. Logo, a geometria consiste em verdades derivadas, ou teoremas, e verdades primárias, ou axiomas. Cada teorema se segue logicamente [...] de um ou mais axiomas (BARNES, 2002, p. 43)

Paralelamente ao novo significado dado por Eudoxo para as grandezas geométricas, e como proceder para classificá-las, Aristóteles influenciou Euclides que apresentou um novo método lógico de demonstração que se tornou uma das principais características do novo paradigma. Esta importante contribuição e como foi estruturado este novo método também é citado por Mlodinow:

> [...] primeiro, tornar explícitos os termos, formulando definições precisas e garantindo assim a compreensão mútua de todas as palavras e símbolos. Em seguida, tornar explícitos os conceitos

> apresentando de forma clara os axiomas ou postulados (estes termos são intercambiáveis) de modo que não possam ser usados entendimentos ou pressuposições não declarados. Finalmente, deduzir as conseqüências lógicas do sistema empregado somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas previamente demonstrados (MLODINOW, 2004, p. 40).

Para Mlodinow (2004), a nova tradição trazida pelos elementos de Euclides, serviu, durante milênios, como “janela” para todos aqueles que interessassem a olhar para a geometria, e ainda, “atualmente, ele [Euclides] é o nosso garoto-propaganda da primeira grande revolução no conceito do espaço - o nascimento da abstração e a idéia de demonstração” (MLODINOW, 2004, p. 15).

Para Kuhn (2007, p. 63) “somente uma modificação nas regras do jogo poderia ter oferecido uma outra alternativa [...] o estudo das tradições da ciência normal revela muitas outras regras adicionais”. De fato, os gregos abandonaram a aritmética pitagórica substituindo-a pela geometria euclidiana, mudando-se as regras de montagem dos “quebra-cabeças”.

> Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal dos Elementos de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa. A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Um conseqüência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudos chamado axiomática, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional. (EVES, 1995, p.179).

Os instrumentos que foram utilizados tornaram-se conhecidos como *instrumentos euclidianos* e o uso dessas ferramentas, respeitavam as seguintes regras:

> Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permiti-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado. O traçado de construções de régua e compasso, visto como um jogo em que se obedecem a essas duas regras, mostrou ser um dos jogos mais fascinantes e absorventes jamais inventados (EVES, 1995, p. 134).

A organização da matemática na época do helenismo, de acordo com Ribnikov (1987, p. 66) "[...] presenta uma sucesión lógica de terremas y problemas sobre construcciones y que utiliza um mínimo de condiciones iniciales". Esta será a principal característica da matemática euclidiana. Deste modo, o caráter abstrato com que os objetos matemáticos passam a ser tratados e os métodos de demonstração que foram estabelecidos neste novo paradigma constituem os principais fatores para o estabelecimento de uma nova tradição na matemática, a de uma ciência dedutiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O primeiro projeto deste nosso trabalho era de analisar uma mudança de significado do número irracional, e se esta mudança causava uma *revolução científica* na matemática nos moldes da teoria kuhniana. Porém com o andamento de nossos estudos, pudemos perceber que a busca de um significado do número irracional não causou uma ruptura no desenvolvimento da matemática, mas sim foi a mudança de significado de outro objeto é que causou tal revolução.

Pudemos constatar que todas as atividades desenvolvidas pelos pitagóricos, eram norteadas pela suposição de que tudo no Universo eram números inteiros. Este *paradigma* norteou os pitagóricos no desenvolvimento da matemática pitagórica, o que pode ser comprovado pela característica exclusivamente aritmética das produções matemáticas desta comunidade, caracterizando assim como um período de *ciência normal*.

Com a descoberta da existência de medidas incomensuráveis um forte abalo no *paradigma* pitagórico foi sentido, causando uma *crise* na matemática pitagórica. Esta *crise* foi estabelecida principalmente pela insuficiência da matemática pitagórica em resolver a *anomalia* evidenciada por sua maior realização matemática: o *Teorema de Pitágoras*.

A medida da diagonal de um quadrado causou grande espanto a esta comunidade pelo simples fato: utilizando a ferramenta mais importante estabelecida pelos pitagóricos - o *Teorema de Pitágoras* - na procura da medida desta diagonal, os pitagóricos não chegaram a um entendimento lógico, pois esta medida não poderia ser expressa pelos números (inteiros), base de toda crença pitagórica.

Os matemáticos gregos, logo após o aparecimento de grandezas incomensuráveis, principalmente aqueles ligados à academia de Platão, assumindo que estavam diante de uma anomalia que precisava ser entendida, começaram de certo modo a produzir métodos para que se pudessem operar estas grandezas. As pesquisas dos matemáticos gregos do século IV a. C. podem ser interpretadas como um período intermediário entre dois paradgmas, ou seja, segundo Kuhn (2007), este período é denominado de *pesquisa extraordinária*.

Com a elaboração da teoria das proporções e do método da exaustão, ambos de Eudoxo, e o *Órganon* de Aristóteles, apareceram os subsídios necessários que lançaram as bases para uma nova tradição na matemática grega. Eudoxo deu uma nova definição para a medida da diagonal do quadrado - aquela que causava espanto aos pitagóricos. Deste modo a diagonal do quadrado deixou de ser supostamente número, crença esta dos pitagóricos, e passou a ser considerada um objeto geométrico.

É nessa nova forma de ver grandezas, tal como a diagonal do quadrado, e o novo modo de estruturação do conhecimento matemático apresentado nos *Elementos* de Euclides influenciado pela obra de Aristóteles, o *Órganon*, é que está a primeira *revolução científica* na matemática da cultura ocidental, isto é, houve naquele momento uma mudança de significado de um objeto matemático.

A emergência do novo paradigma, batizados por nós de *paradigma euclidiano*, referência aos *Elementos* de Euclides por ter sido a obra que difundiu as bases deste paradigma, trouxe uma nova tradição para o desenvolvimento matemático a partir de então. Fundada principalmente nas obras de Eudoxo e nas idéias do filósofo Aristóteles, a matemática passa a ser constituída seguindo os princípios do pensamento dedutivo.

Por fim, os estudos a que nos dedicamos reafirmaram nossa crença de que o processo de constituição do conhecimento matemático, em particular a constituição do paradigma pitagórico e sua substituição pelo paradigma euclidiano, permitem explicitar todas as fases do desenvolvimento de uma ciência sob a ótica da teoria de Kuhn.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática.** 2ª Ed. Trad. João B. P. de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2002.

ARISTÓTELES, 348-322 A.C. **Metafísica: livro 1 e livro 2**; **Ética a Nicômaco**; **Poética/Aristóteles.** Trad. Vincenzo Cocco, et al. São Paulo: Abril Cultural, 1979. (Os pensadores)

BABINI, José. **História Sucinta de La Matemática.** 3ª Ed. Madri: Espasa-Calpe, S.A., 1969.

BARNES, Jonathan. **Aristóteles.** São Paulo: Loyola, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática.** Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Livraria Sá Costa, 1984.

CHALMERS, A. F. **O que é ciência afinal?** Trad. Raul Fiker. São Paulo: Editora Brasiliense, 1993.

CHAUI, Marilena. **Introdução a História da Filosofia:** dos pré-socráticos a Aristóteles. Vol. 1. 2ª Ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2002.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DE CRESCENZO, Luciano. **A História da Filosofia Grega:** os pré-socráticos. Trad. Mario Fondelli. Rio de Janeiro: Rocco, 2005.

DIÔGENES, Laêrtios. **Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres.** Trad. do grego, introdução e notas Mário da Gama Kury. 2ª Ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1987.

DUROZOI, G.; ROUSSEL, A. **Dicionário de Filosofia.** Trad. Marina Appenzeller, Campinas: Editora Papirus, 1993.

EUCLIDES, 360 a 295 a. C. **Elementos:** Livros V-IX. Tradução e notas de Maria Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos S. A., 1994.

________________________. **Elementos:** Livros X-XIII. Tradução e notas de Maria Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos S. A., 1996.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. H. H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FRANCO, V. S.; GERÔNIMO, J. R. **Geometria plana e espacial:** um estudo axiomático. Maringá: Ed. Massoni, 2005.

GALARDA, L. J., et al, **A evolução do Cálculo Através da História.** Vitória: Editora da Universidade Estadual do Espírito Santo - EDUFES, 1999.

GILLI MARTINS, J. C. **Sobre revoluções científicas na Matemática.** Rio Claro, 2005. 175f. Tese de Doutorado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2005.

GILLIES, D. **Revolutions in Mathematics.** New York: Oxford University Press, 1992.

GODEFROY, Gilles. **A Aventura dos Números.** Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

GRANGER, G. G. **O Irracional.** Trad. Álvaro Lorencini. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

HANK, O. C.; SILVA, M. J. A. **Filosofia Ciência&Vida Especial:** Grécia**,** São Paulo, v. 1, n. 1, p. 36-47, 2008.

HODGKIN, Luke. **A History of Mathematics:** From Mesopotamia to Modernity**,** New York: Oxford University Press, 2005.

KARLSON, Paul. **A Magia dos Números.** Trad. Henrique C. Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Porto Alegre: Editora Globo, 1961.

KUHN, THOMAS S. **A Estrutura das Revoluções Ciêntíficas**. 9° Ed. Trad. B. V. Boeira & N. Boeira. São Paulo: Editora Perspectiva S. A, 2007.

________________. **O Caminho Desde a Estrutura.** Trad. Cesar Montari, São Paulo: Editora Unesp, 2006.

LIMA, E. L. **Curso de Análise.** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2006.

_________. **Medida e Forma em Geometria:** Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1991.

LINTZ, R. G. **História da Matemática.** Blumenau: Ed. da FURB, 1999.

LUCHETTA, V. O. J. **Geometria: representação de números através de figuras geométricas.** IMÁTICA: a matemática interativa na internet. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/parimpar.html> Acesso em: 23 de novembro de 2008.

MARÍAS, JULIÁN. **História da Filosofia.** 8ª Ed. Trad. Alexandre Pinheiro Torres. Porto: Edições Sousa & Almeida Ltda, 1987.

MELO, S. B. de. **A Compreensão do Conceito de Números Irracionais e sua História:** um estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. Lavras/MG: Revista Symposium**,** Nova Fase, ano 3, nº 1, p. 27-36, janeiro-junho. 1999.

MICHEL, P. H., et al, **História Geral das Ciências - tomo I.** A ciência Antiga e Medieval - vol. 2. Trad. Fausto, R. e Ghinzberg G. K. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1959.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides:** a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. de Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MORA, J. F. **Dicionário de Filosofia.** 5ª Ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

NEVES, Marcos C. D. **Lições da Escuridão ou Revisitando Velhos Fantasmas do Fazer e do Ensinar Ciência.** Campinas – SP: Mercado de Letras, 2002.

OLIVA, A. **Filosofia da Ciência.** Rio de Janeiro: Editora Jorge Zahar, 2003.

OMNÈS, R. **Filosofia da ciência contemporânea.** Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora Unesp, 1996.

PLATÃO, 427-347 a.C. **Diálogos: Teeteto e Crátilo.** Trad. do grego Carlos Alberto Nunes. Belém: Universidade Federal do Pará, 1988.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas.** Trad. del ruso por Concepción Valdès Castro. Moscú: Editorial Mir, 1987.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática.** 4ª Ed. Trad. Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1981.

RUTHERFORD, W. **Pitágoras.** São Paulo: Mercuryo, 1991.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat.** Rio de Janeiro: Editora Record, 1998.

SOUZA, E. A. **Filosofia Ciência&Vida Especial:** Grécia**,** São Paulo, v. 1, n. 1, p. 25-33, 2008.

SPINELLI, Miguel. **Filósofos pré-socráticos:** primeiros mestres da filosofia e da ciência grega. Porto Alegre: Edipucrs, 1998.

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu Teorema.** Trad. Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1998.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** 2° ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradativa Publicações Ltda, 1992.

VERNANT, J. P. **As Origens do Pensamento Grego.** 9ª Ed. Trad. Isis Borges B. da Fonseca. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1996.

ANEXOS

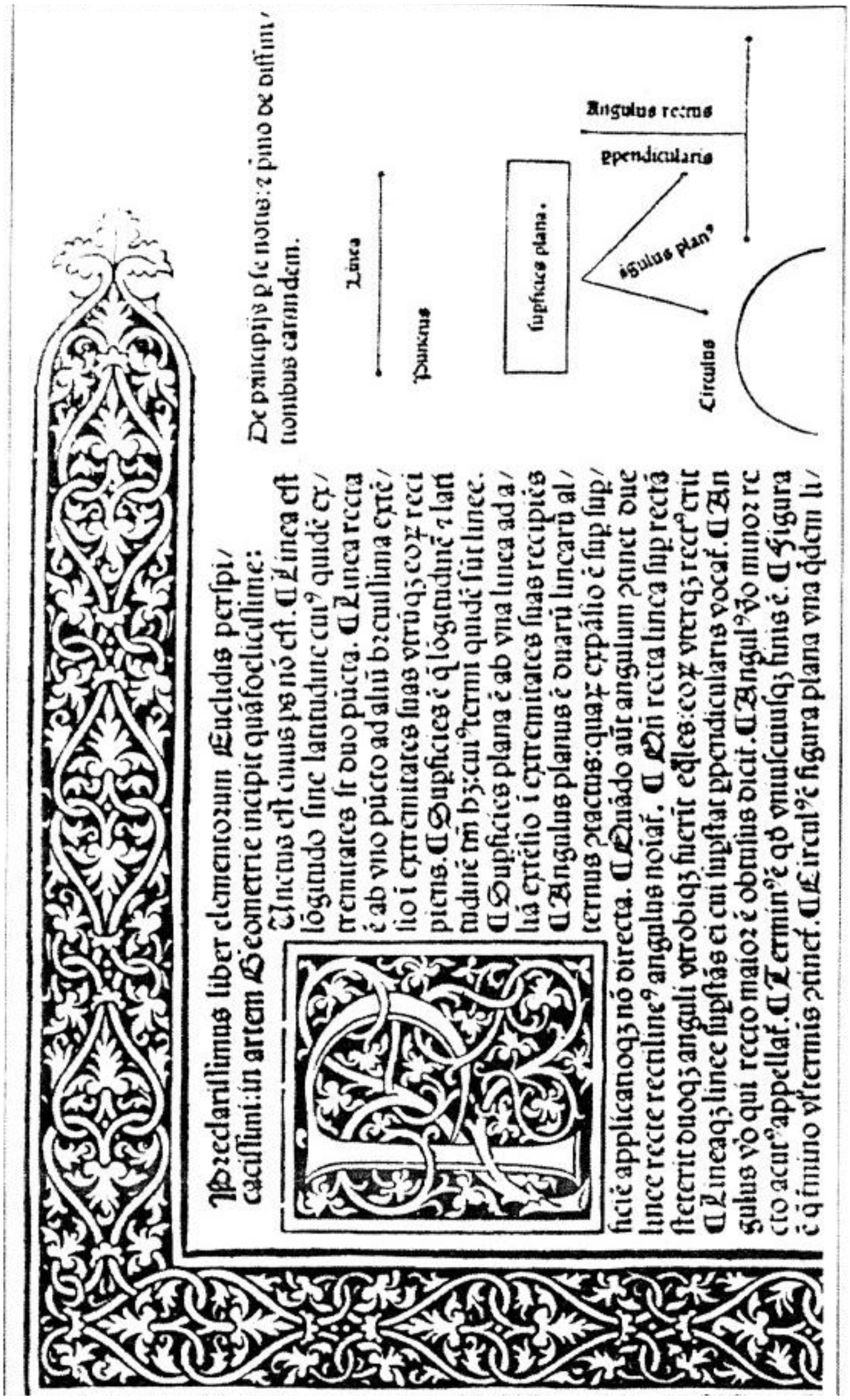

Figura 10: Parte de uma página da primeira edição impressa dos Elementos de Euclides, feita em Veneza em 1482.

(Fonte: Eves, 1995, p. 171).