UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

BRUNO MARCONDES UMBEZEIRO

# UM ESTUDO SOBRE A FORMULAÇÃO DE HIPÓTESES NA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA À LUZ DOS PRESSUPOSTOS DE POINCARÉ

MARINGÁ – PR
2014

**BRUNO MARCONDES UMBEZEIRO**

# UM ESTUDO SOBRE A FORMULAÇÃO DE HIPÓTESES NA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA À LUZ DOS PRESSUPOSTOS DE POINCARÉ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lilian Akemi Kato.

Coorientadora: Profª. Drª. Lucieli Maria Trivizoli.

**MARINGÁ – PR**
**2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Umbezeiro, Bruno Marcondes
U48u Um estudo sobre a formulação de hipóteses na Modelagem Matemática na Educação Matemática à luz dos pressupostos de Poincaré / Bruno Marcondes Umbezeiro. -- Maringá, 2014.
107 f. : il., figs., tabs.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Akemi Kato.
Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Lucieli Maria Trivizoli da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Para a Ciência e a Matemática, 2014.

1. Educação matemática - Modelagem matemática - Educação científica. 2. Educação matemática - Educação científica- Modelagem matemática. 3. Modelagem matemática - Hipoteses - Poincaré. 4. Poincaré, Jules Henri, 1854-1912 - Hipoteses - Modelagem matemática - Educação matemática. 5. Hipótese - Recorte da realidade. 6. Recorte da realidade - Hipotese. 7. Modelos matemáticos - Educação matemática. 8. Poincaré, Jules Henri, 1854-1912. - Hipoteses - Educação científica. I. Kato, Lilian Akemi, orient. II. Trivizoli, Lucieli Maria, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Para a Ciência e a Matemática. IV. Título.

CDD 22.ed. 510.7
SOI-002165

**BRUNO MARCONDES UMBEZEIRO**

# Um estudo sobre a formulação de hipóteses na Modelagem Matemática na Educação Matemática à luz dos pressupostos de Poincaré

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

Profa. Dra. Lílian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 31 de Março de 2014.

# *Agradecimentos*

*A Deus, que me guiou com maestria por caminhos obscuros e tortuosos quando estive confuso e indeciso.*

*À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro, sem o qual não poderia ter dedicado todo meu tempo à pesquisa.*

*À Profª. Drª. Lilian Akemi Kato, por ser muito mais que uma orientadora, mas amiga, por acreditar na beleza deste trabalho, por ser verdadeira, competente e paciente. Enfim, por ser uma das pessoas mais incríveis que eu já tive a oportunidade de conhecer.*

*À Profª. Drª. Lucieli Maria Trivizoli, por ser mais que uma coorientadora, abraçando a ideia deste trabalho, sendo atenciosa e cuidadosa em todas as orientações, e por ter me proporcionado grande crescimento intelectual e moral.*

*Aos membros da banca: Profª Drª Lourdes Maria Werle de Almeida, Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista e Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, pelas valiosas contribuições também como membros da banca de qualificação.*

*Ao meu pai, Moacir, pela credibilidade em mim depositada, e à Dirce, minha mãe (in memorian), que de onde quer que esteja me ajuda sempre a seguir o melhor caminho. Ao meu irmão, Danillo, grande parceiro na música e na vida, e à minha irmã, Sandy, cuja alegria de viver me motiva e encanta. À minha avó, Adalgiza, pelas orações e incentivos, e ao Manoel, (in memorian), meu avô, que partiu em 2012 deixando um grande exemplo de ser humano.*

*À prima Francine e a seu marido Paulinho. Ela, por ser amiga, irmã e orientadora, tanto nos aspectos intelectuais quanto nos pessoais; ele, por ser um grande amigo, prestativo em todas as horas e um "Buda que toca muita guitarra".*

*Sem ordem de importância, listo e agradeço imensamente aos amigos que conquistei durante o período de Mestrado:*

*Verônica, grande parceira filosofal e conselheira moral, com quem muito aprendi!*

*Fagner, grande amigo e companheiro!*

*Michelle, sempre tão atenciosa e pessoa que admiro muito!*

*Bárbara, Irmã e grande amiga.*

*Jaime, essencial para minhas viagens metafísicas, grande amigo e exemplo de ser humano.*

*Cláudia, pessoa ímpar, simpática, amável e sempre atenciosa.*

*Ana Paula, inesquecível exemplo moral e profissional .*

*Wesley, grande parceiro de devaneios filosóficos.*

*Margarida, uma amiga para a vida toda.*

*Maria Emília, grande amiga e exemplo de ser humano.*

*Aluísio, grande amigo, ser humano e parceiro de moradia que vivenciou todo o processo de construção deste trabalho, discutindo, filosofando e questionando sobre as possibilidades reais das ideias por mim expressadas.*

*Igor Pizzeta (Jaiminho), ser icônico, amigo para todas as horas.*

*Marcelo (Japa), místico, amigo com grande e valiosa sabedoria oriental.*

*Gabriel, questionador e um grande amigo.*

*Ao Rodrigo Fuzetti Bertipaglia, do Grupo Chácara Chakra, que tanto me auxiliou com a oratória, ouvindo pacientemente a leitura do meu trabalho.*

*No esforço para compreender a realidade, somos como um homem tentando entender o mecanismo de um relógio fechado. Ele vê o mostrador e os ponteiros, ouve o seu tique-taque, mas não tem meios para abrir a caixa. Se esse homem for habilidoso, poderá imaginar um mecanismo responsável pelos fatos que observa, mas nunca poderá ficar completamente seguro de que sua hipótese seja a única possível.*

*ALBERT EINSTEIN*

UMBEZEIRO, Bruno Marcondes. **Um estudo sobre a formulação de hipóteses na Modelagem Matemática na Educação Matemática à luz dos pressupostos de Poincaré.** 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2014.

# RESUMO

Neste estudo, apresentamos uma interpretação do processo de formulação de hipóteses na Modelagem Matemática, contextualizada na Educação Matemática, a partir dos pressupostos teóricos defendidos pelo filósofo e matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), acerca do papel desempenhado pela hipótese no conhecimento científico. Partindo de descrições referentes ao processo de modelar, tendo como foco a etapa da abstração, colocamos em relevo a formulação de hipóteses enquanto delimitadora da realidade modelável matematicamente. Discorremos sobre o papel dos modelos matemáticos na Educação Científica, ressaltando que estes são, comumente, compreendidos como argumentos que promovem a disseminação da ideia de que o conhecimento científico é pronto e acabado. Interpretamos a formulação de hipóteses no âmbito de três problemas de Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática, valendo-nos da concepção e classificação poincareriana das hipóteses. Por fim, relacionamos nossa interpretação com os princípios da Educação Científica e apresentamos compreensões que subsidiam a desmistificação do caráter inquestionável dos modelos matemáticos na Educação Científica, a partir de uma visão que leva em consideração a natureza holística, flexível e não determinística do processo de constituição do conhecimento científico.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Modelagem Matemática; Educação Científica; Hipótese; Poincaré.

UMBEZEIRO, Bruno Marcondes. **A study on the formulation of hypothesis in Mathematical Modelling in Mathematics Education by means of Poincaré´s assumptions.** 2014. 107 f. Master´s thesis (Master's Degree in Education for Science and Mathematics) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2014.

# ABSTRACT

This study aims to present an interpretation about the process of formulating hypotheses in Mathematical Modelling - within the Mathematics Education context - by means of the theoretical assumptions of the role played by the hypothesis in scientific knowledge defended by the French philosopher and mathematician Jules Henri Poincaré (1854-1912). By the modelling process descriptions, focusing on the abstraction phase, we place emphasis on the formulation of hypotheses as a bounding of the reality mathematically molded. We discuss about the role of mathematical models in Science Education emphasizing that they are usually understood as arguments that promote the spread of the idea that scientific knowledge is done and over. We promote an interpretation of the formulation of hypotheses within three problems of Mathematical Modelling in the Mathematics Education context, using Poincaré´s conception and classification. And, finally, we link our interpretation to the Science Education principles and present the understandings that subsidize the demystification of the unquestioned character of mathematical models in Science Education, from a vision that takes into account the holistic, flexible and non-deterministic nature of the constitution process of scientific knowledge.

**Keywords:** Mathematics Education; Mathematical Modelling; Science Education; Hypothesis; Poincaré.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS E TABELAS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Segundo o filósofo e epistemólogo Karl Popper, para que um conhecimento possa ser considerado científico, ele deve ser construído a partir de conjecturas e refutações. Nesse sentido, entendemos que o universo do trabalho científico também possua tais características pelo fato de guardar surpresas desveladas apenas quando o conhecimento em questão é submetido à verificação, cuja consequência é a aceitação ou a refutação. E é por isso que nesta introdução apresentamos os encadeamentos das ideias que nos conduziram à construção deste trabalho.

Em decorrência das dificuldades encontradas ao ensinar e aprender Matemática no mundo contemporâneo, nas últimas décadas, muitas pesquisas têm sido realizadas no intuito de promover um ensino-aprendizagem que dê suporte, tanto às demandas de que a Ciência e a Tecnologia necessitam, quanto ao papel que se espera dos cidadãos na sociedade. É neste contexto que se configura o campo de pesquisa denominado Educação Matemática, no qual são apresentadas metodologias alternativas ao ensino tradicional da Matemática, que prioriza a formalidade em detrimento da aprendizagem.

Com as investigações realizadas neste campo, percebe-se que ensinar Matemática envolve outros aspectos além do caráter formal deste conhecimento, como, por exemplo, as influências que os fatores cognitivos e sociais podem exercer na aprendizagem dos alunos.

Dessa forma, com o empreendimento de ações voltadas a oferecer alternativas metodológicas que considerem não apenas o conteúdo matemático, mas também as inter-relações passíveis de serem inferidas entre a aprendizagem deste e de outras áreas, como a Psicologia, a Filosofia, a Sociologia e as Tecnologias, surgem as Tendências em Educação Matemática.

No contexto de nosso estudo, destacamos particularmente a Tendência denominada Modelagem Matemática (MM[1]). Despontada no âmbito educacional em razão das relações estabelecidas entre o método de pesquisa da Matemática Aplicada e a necessidade de uma metodologia que contemplasse as relações matemáticas presentes nos mais diversos contextos, esta metodologia têm se revelado proeminente em proporcionar um ensino de Matemática adequado aos atuais propósitos da sociedade e das indicações que o próprio sistema escolar tem buscado.

Advinda originalmente da Matemática Aplicada, a MM no ensino conservou alguns traços do processo que a consagrou enquanto método científico usado nas Ciências (BASSANEZI, 2002). Dentre os aspectos conservados está a etapa da abstração que determina a formulação de diversos modelos, ou representações para um mesmo fenômeno.

[1] A partir deste ponto, quando nos referirmos à Modelagem Matemática, utilizaremos a sigla MM.

No âmbito da abstração, focamos particularmente em um aspecto que, além de se relacionar intrinsecamente com esta, também permeia todo o processo da MM: a formulação de hipóteses.

O motivo que nos levou a estudar a formulação de hipóteses decorre essencialmente da importância que esta ação tem para o recorte da realidade a ser modelada (BEAN, 2001) e da inquietação resultante da reflexão do porquê da existência de diversos modelos que possibilitam compreensões plausíveis e, ao mesmo tempo, distintas da mesma realidade.

Autores como Blum e Niss (1991), Caraça (1998), Negrelli (2008) e Bean (2012) pesquisaram e apontaram a necessidade epistemológica do chamado recorte da realidade como um meio do sujeito modelador tomar um contato, nem que seja de forma aproximada, com a realidade investigada.

No entanto, dentre as compreensões elencadas nos estudos que investigamos, a de Negrelli (2008) nos chamou a atenção por atribuir um status de realidade ao recorte, diferenciando-se, assim, das outras compreensões que o caracterizavam como sendo algo mais próximo de um modelo.

Negrelli (2008), em sua tese intitulada "Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática", parte do pressuposto de que, apesar da componente realidade figurar em todas as descrições de MM, não temos condições de tomar contato com esta.

Neste sentido, objetivando apresentar uma interpretação epistemológica em que o problema do acesso à realidade pudesse ser ao menos compreendido, a autora se fundamenta nas descrições da etapa da abstração no contexto da concepção de Modelagem, de Bassanezi (2002), e na afirmação de Bean (2001). Este aponta a necessidade da formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras para que uma aplicação em Matemática possa ser considerada Modelagem.

Partindo de tais relações, a autora destaca em seu estudo que o problema a ser modelado e solucionado não se encontra na realidade, comumente afirmado nas descrições da literatura especializada em modelagem. Na verdade, reside em um recorte da realidade, denominado por ela "realidade intermediária" e, mais tarde, em Cifuentes e Negrelli (2011), chamado de "pseudorrealidade" e construído a partir da formulação de hipóteses.

Nesse contexto e considerando a relevância da formulação de hipóteses de maneira explícita ou implícita apresentada por estes autores, procuramos compreender o que são as hipóteses e como elas figuram na constituição do pensamento científico que, por sua vez, resguarda em sua essência as raízes do método da MM.

Instigados pela ideia de apresentar uma interpretação, na qual a construção do conhecimento matemático estivesse presente, pusemo-nos a investigar filósofos matemáticos que apresentam interesses e pesquisas voltadas ao papel da hipótese na constituição do pensamento científico.

Encontramos tais características no filósofo francês Jules Henri Poincaré (1854-1912). Em suas obras "A Ciência e a Hipótese" e "O Valor da Ciência", especialmente, ele destaca a valorização do papel da hipótese que, apesar de possuir características subjetivas e relativas aos sujeitos e às condições em que são formuladas, representa na sua essência o início do pensamento científico.

Dessa forma, adotamos a formulação de hipóteses como nosso objeto de estudo e os pressupostos filosóficos de Poincaré para fundamentar nossa interpretação sobre a forma como as hipóteses podem ser compreendidas no âmbito da constituição do conhecimento científico.

Além da interpretação realizada, também pretendemos refletir sobre as possíveis implicações teóricas desta para as relações possíveis de serem estabelecidas entre a MM e a Educação Científica.

Essas inquietações nos remeteram ao artigo de Barbosa (2009) "Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica", que faz menção à necessidade de estudos direcionadores da compreensão dos modelos matemáticos no âmbito da Educação Científica para além da visão tradicional, denominada por ele de "retrato da realidade".

Barbosa (2009, p. 69) sustenta que os modelos matemáticos são partes do discurso pedagógico das Ciências e, assim, figuram nas práticas pedagógicas como argumentos para justificar conceitos/leis, como conceitos em si mesmos ou como estruturas que ordenam o estudo dos fenômenos científicos.

Barbosa (2009, p. 70), fundamentado nos autores Bassanezi (2002), D'Ambrosio (1996), Gilbert (2004) e Matthews, Gauld e Stiner (2005), afirma que a ideia de modelo matemático caminha praticamente junto com a trajetória das ciências e que, com o advento da Ciência moderna, firmou-se enquanto parte substancial da prática científica.

Levando em conta as considerações de Barbosa (2009) com relação à presença dos modelos matemáticos na Educação Científica, por estar relacionada diretamente à prática científica e, ainda, ao papel epistemológico das hipóteses que concomitantemente delimita a realidade a ser modelada e explicita o papel das diferentes interpretações na construção do conhecimento, o que por sua vez contribui como um possível argumento de desmistificação do caráter inquestionável dos modelos matemáticos, enunciamos nossa temática de pesquisa: "A interpretação da formulação de hipóteses no processo da Modelagem na Educação Matemática à luz dos pressupostos filosóficos de Poincaré e as possíveis relações entre essa interpretação e os princípios da Educação Científica."

No intuito de apresentar reflexões e fomentar discussões referentes a esta temática, objetivamos interpretar a formulação de hipóteses na MM, segundo os pressupostos filosóficos de Poincaré, identificando, nessa interpretação, relações que propiciem uma Educação Científica. Para tanto, nossos objetivos específicos incluíram: 1) recorrer a trabalhos de MM que tratassem de discutir o processo de modelar, focando a etapa da formulação de hipóteses, de modo a finalizar com o trabalho de Negrelli (2008) que explicita a importância desta etapa na construção da chamada "realidade intermediária"; 2) estabelecer relações entre as reflexões filosóficas de Poincaré acerca da importância das hipóteses para o pensamento científico com a etapa da formulação de hipóteses da MM; 3) evidenciar aspectos que propiciassem a inclusão da nossa interpretação das relações estabelecidas em 2) na discussão suscitada por Barbosa (2009) sobre Educação Científica.

Para o cumprimento de tais objetivos e procedimentos, nossa pesquisa é apresentada ao longo de cinco capítulos que se complementam.

No primeiro capítulo, apresentamos em linhas gerais algumas considerações sobre a MM na Educação Matemática, alguns estudos que evidenciam o papel epistemológico das hipóteses na delimitação da realidade a ser modelada matematicamente e as relações existentes entre a Educação Científica e a MM.

Em seguida, a fim de fortalecer a nossa escolha pelos pressupostos filosóficos de Poincaré, discorremos sobre a relevância de suas ideias na esfera científica e matemática e, ainda, apresentamos a sua concepção e classificação referentes ao papel das hipóteses na constituição do pensamento científico.

No capítulo seguinte, intitulado "A Pesquisa", apresentamos a fundamentação metodológica e os procedimentos que direcionaram a nossa interpretação da formulação de hipóteses na MM, segundo os pressupostos poincarerianos.

As interpretações das hipóteses de problemas de MM no contexto da Educação Matemática são apresentadas no capítulo quatro, juntamente com as análises que relacionam as características consideradas em nossas interpretações com a Educação Científica.

No último capítulo, apresentamos algumas considerações que, além de evidenciarem a forma com que os objetivos foram cumpridos, mostram um panorama geral do trabalho desenvolvido e põem em relevo outras questões de investigação suscitadas a partir do presente estudo.

# CAPÍTULO 1

# CONSIDERAÇÕES SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, evidenciamos algumas considerações com relação à MM no âmbito da Educação Matemática. Por meio de um breve histórico, situando as particularidades inerentes da transposição da modelagem da Matemática Aplicada para Educação, apresentamos em nível nacional, como se deu a constituição das ideias dos principais nomes responsáveis por essa relação, que ainda hoje é considerada pioneira.

A partir de descrições de modelagem, indicamos a forma com que suas etapas são consideradas no âmbito educacional. Focamos na chamada etapa da abstração e, em seguida, apresentamos algumas ideias de autores que tratam de descrições sobre o papel epistemológico das hipóteses no processo de MM.

Finalizamos, destacando a relevância de discussões que procuram explicitar o que é a formulação de hipóteses na MM, buscando, assim, uma compreensão embasada do ponto de vista epistemológico do modelar matematicamente.

## 1.1. A Modelagem Matemática na Educação Matemática

Nesta seção, discutimos historicamente como se deu a transposição das ideias da MM da Matemática Aplicada para a Educação Matemática. Destacamos os precursores da MM na Educação Matemática, bem como as ideias que os motivaram a ressignificar as etapas de um método científico de pesquisa para o ensino de Matemática. Fundamentados em pesquisas realizadas por autores da Modelagem, assinalamos a necessidade em abordar trabalhos que tenham como objetivo investigar os pressupostos filosófico/epistemológicos envolvidos na configuração do processo de modelar.

Atualmente, observamos que as discussões geradas a partir do campo de pesquisa da Educação Matemática têm revelado diversos pontos importantes para o debate e a fomentação de ideias relativas aos problemas que o ensino da Matemática enfrenta. Objetivando estudar e compreender o fenômeno da educação nas suas mais diversas perspectivas – social, política, psicológica, histórica e cultural – a Educação Matemática tem engendrado suas pesquisas por diferentes caminhos.

Tal diversidade nos focos de investigação, aliada às grandes transformações sociais desencadeadas pelo expressivo desenvolvimento tecnológico e às atuais necessidades impostas à sociedade por conta de tais mudanças, aponta também para diferentes problemas que, quando analisados de perto, revelam facetas que necessitam de abordagens e técnicas específicas de estudo.

Neste contexto, Pinheiro (2007, p. 81) afirma:

> Diante do avanço científico-tecnológico a que estamos submetidos, torna-se cada vez mais necessário que a população, além de ter acesso às informações acerca do desenvolvimento, possa ter também condições de avaliar e participar das decisões que venham atingir o meio onde vive.

Assim, em decorrência dos novos desafios de se ensinar Matemática impostos pela necessidade de desenvolvimento de competências críticas para melhor atuação na sociedade, as pesquisas oriundas das "Tendências em Educação Matemática" ocupam um lugar de destaque.

As reflexões pautadas nas e entre tais tendências têm explicitado relações que apontam para a necessidade de teorias que tenham potencial de sugerir novas maneiras de se compreender as relações epistemológicas do conhecimento matemático, levando em consideração a diversidade de fatores de ordem histórica, cultural, psicológica e política.

Com o advento das Tendências, emergiram questões referentes ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática que não eram discutidas e/ou consideradas quando as LDB's (Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) apontavam apenas para os pressupostos didático-epistemológicos do ensino tradicional. Algumas dessas questões envolvem: a preocupação da comunidade de educadores matemáticos em aproximar a Matemática escolar da Matemática cotidiana; a busca de alternativas que estejam em maior consonância com os interesses dos alunos; a necessidade da formação de cidadãos críticos e em condições de avaliar consequências na tomada de decisões; o enfraquecimento da ideia de que a Matemática é um conhecimento pronto e acabado, entre outras (FERREIRA, 1992; D'AMBROSIO, 1994; BORBA e SKOVSMOSE, 2001; FORNER, 2005).

Contudo, mesmo com a indicação do uso das tendências, a adequação do ensino da Matemática na atual conjuntura não constitui uma tarefa simples. Cabe ao professor selecionar a(s) alternativa(s) que melhor se adaptem aos diferentes contextos e situações que permeiam o complexo universo de uma sala de aula.

Considerando o que Bassanezi (2002, p. 18) afirma com relação ao objetivo fundamental do uso da Matemática, que é "extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem" e que "Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância", enfatizamos em nossa pesquisa uma tendência em particular: a Modelagem Matemática.

Klüber (2013), fundamentado em Bassanezi (2002), Barbosa (2001; 2004), Jacobini (2007) e Almeida e Dias (2004) assinala:

> A literatura sobre 'Modelagem Matemática na Educação Matemática' permite afirmar que ela não surgiu no contexto do Ensino de Matemática, mas sim como uma ferramenta ou metodologia de pesquisa no campo das Aplicações de Matemática. (KLÜBER, 2013, p. 92).

Este fato nos leva a refletir sobre a produção de conhecimentos da MM em contextos de ensino e de aprendizagem de Matemática. As raízes epistemológicas da Matemática Aplicada originárias da prática científica diferem em sua essência dos fundamentos da Educação Matemática enquanto Ciência Humana e Social (BURAK; KLÜBER, 2008).

"A MM é transposta para o ensino de Matemática, mediante tentativas e experimentações, a partir da realização de práticas que foram relatadas como promissoras e significativas no momento de sua realização." (KLÜBER, 2013, p. 93).

Vale destacar que tal transposição não foi motivada apenas pelas dificuldades locais identificadas no ambiente escolar, mas também por influências diretas de alguns fatos ocorridos na história da constituição do campo da Educação Matemática em nível internacional.

Biembengut (2009) aponta:

> O debate sobre modelagem e aplicações na Educação Matemática no cenário internacional ocorre, em especial, na década de 1960, com um movimento chamado 'utilitarista', definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema. (BIEMBENGUT, 2009, p. 8).

Biembengut (2009) A autora salienta que, em decorrência da formação dos grupos de pesquisa, a ocorrência de eventos internacionais constituiu um importante espaço para troca de experiências entre professores e/ou pesquisadores. Ela apresenta um evento ocorrido na Suíça no ano de 1968, o *Lausanne Symposium*, cujo tema versava sobre como ensinar Matemática de modo que seja útil[2], com situações do cotidiano do estudante e não aplicações 'padronizadas' e que favorecessem a habilidade para matematizar e modelar problemas e situações da realidade.

A partir das ideias fomentadas na Suíça, a realização de outro congresso no ano de 1978

[2] Na Europa, um grupo liderado por Hans Freudenthal, denominado IOWO (Holanda), e outro, coordenado por Bernhelm Booss e Mogens Niss (Dinamarca), atuavam neste sentido.

em Roskilde, na Dinamarca, com o tema *Matemática e Realidade*, contribuiu para a criação, em 1983, do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA) filiado ao ICME (International Congress Mathematics Education) (BIEMBENGUT, 2009, p. 8).

Com a participação de pesquisadores brasileiros nestes congressos, com destaque especial aos professores Ubiratan D'Ambrosio e Aristides Camargos Barreto, o movimento pela MM na Educação Matemática, disseminado em outros países, passou a ocorrer também no Brasil, por meio da divulgação desses professores desde a década de 1970 (BIEMBENGUT, 2012, p. 196).

Silveira (2007, p. 33), ao citar Fiorentini (1996), aponta que a participação do professor Ubiratan D'Ambrosio é relevante pelo fato de seus estudos teórico-pedagógicos, realizados a partir do final da década de 1970, terem sido decisivos para a consolidação e a divulgação da modelagem como método de ensino.

Quanto ao professor Barreto, Silveira (2007, p. 34) assinala que este foi o responsável pela orientação dos dois primeiros trabalhos nacionais de pós-graduação *Strictu Sensu,* que trataram de sugerir o uso de modelos matemáticos para ensinar Matemática: as dissertações de Celso Braga Wilmer e Jorge E. Pardo Sánchez, originadas da PUC – Rio.

A disseminação da Modelagem no âmbito nacional não se deu de forma linear e nem por um único motivo. Vários fatores contribuíram para a sua aceitação como processo de ensino-aprendizagem. Dentre eles, citamos, em nível internacional, a emergência no final dos anos 70 das metodologias alternativas àquelas disseminadas pelo chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM)[3] e, em nível nacional, o que Bassanezi aponta no prefácio da obra de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 7): "a Modelagem Matemática, como processo de ensino-aprendizagem, surgiu [...] mais por necessidade do que por acaso", como uma alternativa ao ensino da Matemática destituída de significados que tanto causava repulsa e desinteresse por parte dos alunos.

Além dos precursores já citados, de acordo com Biembengut (2009, p. 10), o professor Rodney Carlos Bassanezi foi o principal responsável pela disseminação da MM no Brasil.

> Em especial por meio dos cursos de formação continuada que ministrou e de pós-graduação de modelagem que coordenou em diversas instituições de quase todos estados brasileiros. Foram identificados 23 cursos de pós-graduação *lato sensu* e mais de 50 de formação continuada.

A forma como Bassanezi teve seus primeiros contatos com a Modelagem está

[3] Esse movimento se espalhou pelo mundo no início dos anos 1960 como uma resposta dos meios acadêmicos associados aos interesses militares americanos após os russos terem lançado o Sputnik, primeiro satélite artificial lançado no espaço. A partir daí foram implementados currículos nas áreas ditas científicas, como a matemática. A finalidade era formar cientistas em curto prazo, mesmo que para isso fosse necessário excluir a maioria dos alunos (BIGODE, 2012, p. 6).

intimamente ligada aos nomes de D'Ambrosio e Barreto, uma vez que foi a convite do primeiro, na época seu professor, que o segundo ministrou um seminário intitulado "Modelos Matemáticos" na Unicamp em 1979, despertando assim o seu interesse por esta área (BIEMBENGUT, 2009, p. 11).

Desde que Bassanezi se envolveu com a MM e começou a disseminar suas ideias no âmbito do ensino da Matemática, muito se tem investigado não apenas sobre a sua utilização, como também com relação à elaboração de compreensões que justifiquem o porquê de ela ser uma metodologia diferenciada para ensinar Matemática.

Neste sentido, Blum (1989 *apud* BASSANEZI, 2002, p. 36) destaca os seguintes argumentos que favorecem a inclusão da MM no ambiente educacional e se harmonizam com os princípios da Educação Matemática:

> 1. Argumento formativo – enfatiza aplicações matemáticas e a performance da modelagem matemática e resolução de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.
> 2. Argumento de competência crítica – focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.
> 3. Argumento de utilidade – enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.
> 4. Argumento intrínseco – considera que a inclusão da modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas.
> 5. Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.
> 6. Argumento de alternativa epistemológica – A modelagem se encaixa no Programa Etnomatemática, indicado por D' Ambrosio "que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica", atuando, desta forma, como uma metodologia alternativa mais adequada às diversas realidades sócio-culturais.

Apesar de não haver diferenças significativas com relação ao grau de relevância atribuído a esses argumentos, uma vez que todos eles são importantes, o cumprimento de um número maior de ações em detrimento de outras, aliado à concepção de Matemática e de Educação Matemática subjacente aos professores, acabam configurando maneiras diversificadas de se compreender a MM no contexto educacional.

Na seção seguinte, apresentamos algumas concepções e perspectivas da MM que, ao serem teorizadas a partir de motivações e objetivos específicos, têm contribuído de maneira diversificada para o fortalecimento da MM na Educação Matemática.

### 1.2. Concepções e Perspectivas da Modelagem Matemática na Educação Matemática

Nesta seção, apresentamos algumas formas de se compreender a MM na Educação Matemática, tecendo considerações sobre como a diversidade de olhares neste campo tem o potencial de ampliar a gama de estudos referentes aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Desde as primeiras tentativas de ressignificação do método de pesquisa da Matemática Aplicada para a Educação Matemática, diferentes concepções e perspectivas têm despontado em decorrência da diversidade de olhares, intenções e interesses de investigação ao se empregar a MM para fins educacionais.

Na literatura, quando se fala sobre diferentes maneiras de se conceber a atividade de Modelagem, notoriamente sempre acabam surgindo dois termos que caracterizam a existência da multiplicidade de interpretações relacionadas aos diferentes papéis que podem ser atribuídos ao conhecimento, ao professor e aos alunos: as concepções e as perspectivas.

Na literatura, quando se fala sobre as diferentes maneiras de se conceber a atividade de Modelagem, constantemente, surgem dois termos que caracterizam a existência da multiplicidade de interpretações relacionadas aos diferentes papéis que podem ser atribuídos ao conhecimento, ao professor e aos alunos:: as concepções e as perspectivas. No entanto, diferenciar quais visões podem ser consideradas características de uma concepção ou então de uma perspectiva não constitui tarefa simples, nem tampouco determinada e fechada. A própria literatura especializada em MM destaca que "muitas são as concepções de Modelagem e diversos podem ser os objetivos de um pesquisador ou de um professor quando se propõe a fazer uso da Modelagem Matemática, tanto na sala de aula como em outros ambientes." (TORTOLA, SILVA e ALMEIDA, 2011, p. 6). De acordo com Araújo (2002), existe uma multiplicidade de perspectivas de MM e estas sofrem transformações quando utilizadas com um foco educacional.

Ao direcionarmos nossa atenção para algumas caracterizações realizadas e relatadas na literatura especializada de MM, podemos perceber que se configura um espaço de discussão teórica e, assim, podemos inferir considerações com relação à adequação ou não de determinadas formas de se conceber a MM na Educação Matemática, estabelecendo relações com outros ramos do saber, potencializando, assim, a interdisciplinaridade.

Na sequencia, apresentamos a sistematização feita por Kaiser e Sriraman (2006), em que eles destacam seis diferentes perspectivas na MM, atualmente referenciadas internacionalmente, e um estudo realizado por Biembengut (2012), no qual são identificadas três diferentes caracterizações para a MM na Educação Matemática: método de ensino e pesquisa, alternativa pedagógica de Matemática e ambiente de aprendizagem.

Kaiser e Sriraman (2006) realizaram a classificação das perspectivas, a partir da identificação de características das atividades de MM descritas por alguns autores e observando os objetivos e interesses centrais apresentados nos textos das edições selecionadas da revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM[4]). Na classificação efetuada por eles foram identificadas as seguintes perspectivas:

1) Realística ou Aplicada: esta perspectiva tem por base as situações-problema autênticas, originárias da ciência ou da indústria, e tem por objetivo o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados. Está ligada essencialmente aos aspectos pragmático-utilitários.

2) Epistemológica ou Teórica: aborda situações-problema estruturadas com o intuito de desenvolver conceitos matemáticos. O objetivo principal desta perspectiva é o desenvolvimento de teorias matemáticas.

3) Educacional: é considerada uma perspectiva que integra as perspectivas realística e epistemológica, pois considera situações-problema autênticas, ao mesmo tempo em que se preocupa com o desenvolvimento da teoria matemática. Seus objetivos podem ser classificados em didáticos, quando relacionados à estrutura e ao desenvolvimento dos processos de aprendizagem; ou conceituais, referentes à introdução de novos conceitos ou ao desenvolvimento de conceitos já apresentados aos alunos.

4) Sócio-Crítica: enfatiza o pensamento crítico sobre o papel e a natureza dos modelos matemáticos e a função da matemática na sociedade. Está relacionada à ideia de formar estudantes autônomos e aptos para exercer cidadania. Tem por objetivo desenvolver uma visão crítica do mundo.

5) Contextual: considera a inclusão da MM na sala de aula por meio de situações-problema reais, com o intuito de motivar os alunos e desse modo promover a aprendizagem. Está relacionada à interpretação de enunciados, sendo a obtenção do modelo matemático uma tarefa de resolução de problemas. A ideia é de que em situações semelhantes àquelas já estudadas os estudantes identifiquem tais semelhanças e sejam capazes de reconstruir as ideias matemáticas utilizadas.

6) Cognitivista: tem como foco o interesse na compreensão das funções cognitivas envolvidas na atividade de Matemática dos alunos, quando se envolvem em atividades de Modelagem.

[4] É uma das mais antigas revistas científicas da Educação Matemática. Tem por objetivo promover a pesquisa, discutir e ampliar as atuais perspectivas baseadas na investigação e nas teorias, bem como criar um fórum para a análise crítica de questões no âmbito da Educação Matemática em todo o mundo. Ela pode ser encontrada online no seguinte endereço: http://www.springerlink.com.

Segundo Barbosa e Santos (2007, p. 2), as perspectivas de Kaiser e Sriraman (2006) colocam ênfase em diferentes aspectos que, quando analisados, sugerem os seguintes objetivos didáticos:

- o desenvolvimento da teoria matemática (epistemológica, educacional e contextual);

- o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados (realística);

- ou a análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos na sociedade (sócio-crítica).

A possibilidade de se inferir tais objetivos a partir das perspectivas e a consideração de que os três possuem relevância e podem ocorrer concomitantemente para com uma Educação para e pela Matemática, corroboram a afirmação de que:

> Conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de Modelagem em sala de aula, uma vez que os professores podem trabalhar com estas atividades de modo a contemplar diferentes perspectivas e, consequentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de Modelagem. (ALMEIDA; VERTUAN, 2010, p. 31).

Subjacente a tais perspectivas, uma preocupação comum no âmbito escolar refere-se à forma como a Modelagem pode ser entendida pelos professores na sua ação pedagógica, caracterizando ações e encaminhamentos metodológicos que se configuram com objetivos pretendidos com a atividade no momento da proposta.

Thompson (1992 *apud* BIEMBENGUT, 2012, p. 202) destaca que as concepções de um professor são advindas de conceitos, significados, regras e preferências relacionadas à disciplina, influenciadas por crenças conscientes ou subconscientes adquiridas empiricamente.

Considerando o fato de as crenças e as experiências fazerem parte da construção intelectual e ideológica dos professores, as concepções destes serão sempre muito subjetivas, particulares. Consequentemente, haverá muitas concepções desarticuladas.

É comum, por exemplo, professores que nunca tiveram contato com a literatura de MM reconhecerem em suas práticas características, análogas às sistematizadas e pesquisadas por este campo de pesquisa. Esses professores proferem discursos do tipo: “Ah! Isso é Modelagem? Eu já fazia isso e não sabia que estava fazendo Modelagem!”.

Neste universo de muitas compreensões sobre o que é e o que pode ser a MM, Biembengut[5] (2012) identificou, em 64 produções brasileiras de MM no contexto do Ensino Médio, três formas diferentes de conceber a MM no ensino: método de ensino e pesquisa,

[5] Este trabalho é parte integrante de um projeto maior, no qual a pesquisadora Maria Sallet Biembengut tem feito um mapeamento das produções brasileiras de MM. Em estudos anteriores o foco de estudo foi a formação de professores (2008) e o Ensino Fundamental (2009).

alternativa pedagógica de Matemática e ambiente de aprendizagem. A pesquisadora destaca que, uma vez captadas por professores interessados em MM, estas compreensões tem o potencial de conduzi-los ao entendimento do método, fomentando práticas que firmem esta tendência no ensino.

Biembengut (2012) identificou a MM como um método de ensino e pesquisa, organizado a partir das compreensões de autores que a caracterizam como uma estratégia capaz de permitir ao estudante aprender Matemática, partindo de assuntos de outras áreas, em um ambiente propício à pesquisa científica com a presença da formulação de hipóteses, a obtenção e avaliação de modelos matemáticos. Essa concepção está em consonância com as características da MM da Matemática Aplicada, no sentido como Bassanezi (2002) a compreende.

Biembengut (2012, p. 200) afirma que tais aspectos identificados nas produções analisadas a direcionaram a classificar a MM enquanto método de ensino e pesquisa:  Mostrar a importância da matemática para o conhecimento e a compreensão da realidade; - Desenvolver a capacidade para resolver problemas, tomar decisões, raciocinar logicamente, bem como pesquisar; - Possibilitar a apreensão de conceitos matemáticos, o estabelecimento de conexões entre a matemática e as diferentes áreas curriculares, instigar a perseverança na busca de soluções dos problemas propostos juntamente com os pares, servem para justificar seu uso.

Com relação à segunda concepção, a alternativa pedagógica, o objetivo principal é a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelo estudante. Essa forma de compreender a MM vai ao encontro das ideias de Blum e Niss (1991) que a compreendem como um meio de proporcionar aos alunos usarem algoritmos, ideias e conceitos matemáticos na resolução de problemas advindos de outras áreas do conhecimento.

Na terceira concepção identificada, o foco reside na questão social, em que a MM é utilizada como instrumento de crítica das questões do meio.

Nesta se fazem presentes os pressupostos da Educação Matemática Crítica, em que as discussões sobre o papel da Matemática na sociedade são ressaltadas e o chamado ambiente de aprendizagem é explicitado ao se considerar a utilização dos instrumentos matemáticos como ferramentas de análise de situações subjacentes a outras áreas como sociologia, ecologia, economia, objetivando com isso, inferir considerações sobre os possíveis direcionamentos e implicações que a Matemática pode ter ao se relacionar com estas situações (ARAÚJO, 2004).

Considerando as seis perspectivas internacionais sistematizadas por Kaiser e Sriraman (2006) e as três caracterizações para a MM na Educação Matemática identificadas por Biembengut (2012), todas elas sistematizadas levando em consideração descrições e relações referentes aos papéis desempenhados pelo professor e os alunos em uma aula de Matemática onde a MM se faça presente, é compreensível que as seguintes questões continuem figurando na literatura especializada: O que é MM na Educação Matemática? O que caracteriza uma atividade de MM? O que há de comum nas diferentes concepções e perspectivas que as fazem serem consideradas compreensões referentes à MM? (BEAN, 2001; BARBOSA, 2004; KLÜBER, 2007).

Ao refletirmos sobre tais questões, primeiramente faz-se relevante ressaltar que devido ao fato de a importação dos conceitos e procedimentos da Modelagem terem advindo da Matemática Aplicada, a sua conceitualização e caracterização apresenta-se por meio de diferentes abordagens e têm se fundamentado em pressupostos diferentes daqueles que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas científicas (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12).

Dessa forma, concordamos com Bassanezi (2002, p. 171) quando destaca que "o ensino relativo à determinada disciplina segue a mesma trajetória que orienta o desenvolvimento e a pesquisa dessa ciência." Assim, entendemos que discussões sobre os fundamentos da Modelagem na educação possam ser subsidiadas pelas considerações teóricas inferidas a partir da prática científica da Matemática Aplicada, lugar onde surgiram os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza essencialmente uma atividade de MM (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12).

As diferentes concepções e perspectivas da MM na Educação Matemática se configuram a partir de uma inter-relação constituída de crenças, intenções, experiências, escolhas, entre outros fatores, entendemos que o que permanece em sua essência, no sentido de conservar suas características originais advindas da Matemática Aplicada, seja a constituição de etapas comuns ao processo. Dessa forma, optamos por explanar a forma como tais etapas são compreendidas por autores que defendem a concepção de MM como método de ensino e pesquisa.

Para Bassanezi (2002), as etapas que configuram a MM são as seguintes:

1- Experimentação: na qual dados referentes a uma situação de interesse são coletados para posteriormente receberem um tratamento matemático;

2- Abstração: de posse dos dados qualitativos e quantitativos pertinentes a situação-problema em questão, faz-se um levantamento de hipóteses e conjecturas gerando uma seleção de variáveis que concorrem para a escrita ou "tradução" do problema na linguagem matemática.

3- Resolução: é a etapa em que é obtido o modelo matemático ao se substituir a linguagem natural das hipóteses pela linguagem matemática

4- Validação: é o processo de aceitação ou não do modelo proposto.

5- Modificação: devido ao fato de alguns fatores ligados ao problema original poderem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos, esta etapa representa a reformulação dos modelos considerados inconsistentes após passarem pela etapa da validação.

6- Aplicação: de acordo com interesses e objetivos do modelador, o modelo matemático é aplicado (utilizado) no contexto real, no intuito de descrever e/ou predizer situações correlacionadas ao problema original de investigação.

Em Bean (2003, p. 10) é apresentada uma caracterização da MM em que são apontados alguns tipos de pensamento que figuram nos cinco componentes de seu processo: problematização, investigação, formulação do modelo, verificação e fechamento.

Detalhando os pensamentos definidos por ele em tais componentes, temos:

1 - Problematização: por meio da qual o modelador faz o reconhecimento de um problema e apropria-se dele formulando uma questão e os objetivos para investigá-lo.

2 - Investigação: aqui o modelador seleciona as características do fenômeno consideradas relevantes e pertinentes para a construção do modelo matemático. Ou seja, ele formula hipóteses e faz aproximações simplificadoras que delimitam e operacionalizam a investigação.

3 - Formulação do modelo: após as relações estabelecidas entre as características do fenômeno investigado e a possibilidade de compreensão deste por meio de parâmetros, variáveis ou constantes, esses são relacionados aos conceitos, propriedades e técnicas matemáticas, o que resultará na elaboração de um modelo.

4 - Verificação: envolve critérios objetivos, relativos à validação dos procedimentos matemáticos empregados, e critérios subjetivos, que atuam na decisão sobre a adequação ou não do modelo ao problema considerado.

5 - Fechamento: ocorre por meio de uma ação, em resposta ao problema investigado.

E Biembengut e Hein (2011, p. 13) afirmam que os procedimentos que são contemplados por uma atividade de MM podem ser agrupados em três etapas, subdivididas em seis subetapas, a saber:

1 - Interação: onde é feito o reconhecimento da situação-problema e se familiariza com o assunto a ser modelado;

2 - Matematização: etapa em que é formulado o problema por meio das hipóteses e em seguida se resolve o problema em termos do modelo obtido;

3 - Modelo Matemático: etapa final onde é feita a interpretação e a validação do modelo mediante uma avaliação.

Ao voltarmos nossa atenção para outras concepções da MM na Educação Matemática, que assim como Bassanezi (2002), Bean (2003) e Biembengut e Hein (2011) a compreendem como um método de ensino e pesquisa, notamos que as etapas, bem como aquilo que as definem, representam essencialmente ideias e ações similares, porém com outras divisões e denominações.

Neste sentido, o quadro a seguir representa as correspondências que podem ser estabelecidas ao se identificarem similaridades entre as caracterizações das etapas de Bassanezi

(2002), Bean (2003) e Biembengut e Hein (2011):

**Quadro 1:** Correspondências entre as etapas de Bassanezi (2002), Bean (2003) e Biembengut e Hein (2011).

| **Etapas de Bassanezi (2002)** | **Etapas de Bean (2003)** | **Subetapas de Biembengut e Hein (2011)** |
|---|---|---|
| **Experimentação** | Problematização | **- Reconhecimento da situação-problema;**<br>**- Familiarização com o assunto a ser modelado.** |
| **Abstração** | Investigação | **Formulação do problema** |
| **Resolução** | Formulação do modelo | **Resolução do problema em termos do modelo** |
| **Validação** | Verificação | **- Interpretação da solução**<br>**- Validação** |
| **Modificação** | Fechamento | **-** |
| **Aplicação** | **-** | **-** |

Fonte: Elaborado pelo autor

Dentre tais etapas, ressaltamos a abstração[6], que de acordo com a concepção de Bassanezi (2002), além de guardar consigo grande importância para a elaboração do modelo matemático que é o objetivo final do processo de MM, também tem como uma de suas subetapas a formulação de hipóteses, que constitui o nosso objeto de investigação.

De acordo com Bassanezi (2002, p. 24), “A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”.

Com relação ao porquê de a atividade de modelagem ficar restrita ao trabalho com aproximações da realidade, Negrelli (2008) ressalta que, apesar de a componente “realidade” ser algo presente em todas as descrições do processo de modelagem, a possibilidade do conhecimento total dessa realidade comporta aspectos de ordem histórica, social, política, física etc., e dessa forma ela não nos pode ser acessível, uma vez que o próprio mundo, palco de todas essas “realidades”, é complexo e mutável.

Seguindo as afirmações de Bassanezi (2002) e Negrelli (2008) que apresentam alguns percalços de se tentar conceber uma teoria que permite o contato do sujeito com a realidade em sua totalidade, reconhecemos que a etapa da abstração representa não apenas algo essencial à atividade de obtenção de modelos matemáticos que é inerente à concepção de MM enquanto

[6] Fazendo uso da denominação apresentada por Bassanezi (2002).

método de ensino e pesquisa, como também, figura nas teorias que subsidiam as outras concepções, devido ao caráter essencialmente aproximativo de conhecimento da realidade à que estamos sempre condicionados.

Neste sentido, na seção seguinte discorremos sobre a abstração no âmbito da MM e destacamos algumas compreensões teóricas de autores que se ocuparam de apresentá-la como um instrumento epistemológico de recorte da realidade.

### 1.3. A abstração na Modelagem Matemática: Formulação de Hipóteses para o recorte da realidade

Nesta seção discorremos sobre algumas interpretações epistemológicas que, pautadas na compreensão do que Bassanezi (2002) entende por etapa da abstração, e mais especificamente, a formulação de hipóteses, têm a intenção de apresentar considerações sobre a questão do acesso à realidade, considerando os princípios da MM.

Para Bassanezi (2002, p. 27) a etapa da abstração é "[...] o procedimento que deve levar à formulação de modelos matemáticos" e é constituída por quatro fases: a seleção de variáveis; a problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando; a formulação de hipóteses; e, a simplificação, que de acordo com o método de Galileu e com o racionalismo cartesiano, consiste em isolar o complexo campo dos fenômenos do mundo vivido de modo a poder tratar a questão matematicamente.

Ao refletirmos sobre o problema de conhecimento da realidade apresentado por Negrelli (2008) na seção anterior, juntamente com a consideração de Bassanezi (2002) que define a MM como uma atividade que sempre lida com aproximações, notamos que é pelo fato de o modelador abstrair os aspectos que lhe serão necessários em detrimento de outros menos relevantes, que este tem condições de tomar contato, ao menos de forma aproximada, com a realidade.

Nesse sentido, com a impossibilidade epistemológica de tomarmos contato direto e exato com a realidade, e com a alternativa de a conhecermos por meio de uma delimitação subsidiada pelas ações inerentes à etapa da abstração, Blum e Niss (1991), Caraça (1998), Negrelli (2008), Cifuentes e Negrelli (2009; 2011) e Bean (2012) elaboraram compreensões sobre as possibilidades de caracterizar, de maneira elucidativa, o problema epistemológico com a consideração de uma construção conceitual que permite um contato, de forma aproximada, do sujeito (modelador) com a realidade investigada.

Bean (2012, p. 2) em seu artigo intitulado "As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos" defende a concepção de que a MM é uma construção conceitual elaborada por meio da adoção de premissas e formulação de pressupostos utilizando a linguagem matemática.

De acordo com Bean (2012)

> As premissas são teorias, princípios ou ideias-guia que o modelador assume, conscientemente ou não, numa dada situação [...] os pressupostos são afirmações que os modeladores formulam, a partir de aspectos identificados na construção do modelo; podem até ser formulados simultaneamente ao levantamento. (BEAN, 2012, p. 16-17).

Ao enunciar essas ideias, Bean (2012) ressalta que o seu foco de investigação está direcionado para a etapa da abstração, assim como Bassanezi a compreende. Ele justifica essa escolha no entendimento de que as premissas e os pressupostos que fazem parte dessa abstração distinguem a modelagem de outras atividades humanas.

Anteriormente, em Bean (2001), foi feita a seguinte afirmação[7] que deu origem a sua atual compreensão.

> [...] os aspectos que distinguem a Modelagem Matemática de outras aplicações de matemática são as exigências das hipóteses e das aproximações simplificadoras[8] como requisitos na criação de modelos. As demais etapas – o problema, a resolução e a verificação da matemática, a validação da solução e a decisão – valem para qualquer tipo de solução de problema envolvendo matemática. (BEAN, 2001, p. 53).

Em Bean (2012) é apontada a relevância da adoção de premissas e a formulação de pressupostos no processo de Modelagem por possibilitarem a construção de um recorte-conceituação da situação a ser modelada, denominado *isolado*.

Segundo o autor, a denominação *isolado,* cunhada por ele, foi apresentada primeiramente por Caraça (1998). No entanto, o termo é ampliado e ressignificado no contexto de seu artigo, que se baseia na concepção de MM compreendida pela Matemática Aplicada.

Para Caraça (1998, p. 105), o *isolado* é uma construção que delimita o que considerar, reconhecendo que, "na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador *recorta, destaca*, dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados" (grifo do autor).

Bean (2012) complementa a ideia apresentada por Caraça (1998) acentuando que as experiências e os objetivos do observador (modelador) influenciam as decisões, tanto a respeito

[7] Pautados nessa citação Negrelli (2008) e Cifuentes e Negrelli (2009; 2011) elaboraram uma interpretação epistemológica que será apresentada logo adiante.

[8] Os termos "hipóteses e aproximações simplificadoras" foram substituídos por "premissas e pressupostos". No entanto, entendemos que a essência da ideia é a mesma: permitir um recorte da situação a ser modelada.

de quais aspectos considerar quanto às conceituações tidas como apropriadas para a construção do modelo, uma construção simbólica.

Bean (2012) salienta que sua compreensão da construção do *isolado* se aproxima de outras teorias que também destacam a necessidade do "recorte" (BLUM; NISS, 1991; NEGRELLI, 2008; CIFUENTES; NEGRELLI, 2009, 2011).

Blum e Niss (1991) chamam o recorte de *modelo real,* Negrelli (2008) de *realidade intermediária* que mais tarde, em Cifuentes e Negrelli (2011), é denominada por *pseudorrealidade.*

Para os fins deste trabalho, dentre as interpretações apresentadas, tomaremos uma em especial: aquela apresentada em Negrelli (2008) e Cifuentes e Negrelli (2009; 2011). Nossa escolha foi motivada pelo fato desta interpretação apresentar de forma mais clara e concisa as ideias expostas em Bean (2012) no que diz respeito à construção do recorte da situação a ser modelada matematicamente.

Para Cifuentes e Negrelli (2009), "[...] a Modelagem Matemática, além de ser matemática é, também, epistemologia, uma vez que os modelos matemáticos 'visam entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade', conforme citação de Bassanezi isto é, o conhecimento e compreensão dessa realidade" (CIFUENTES; NEGRELLI, 2009, p. 45).

Na busca de dar uma possível resposta ao problema epistemológico de conhecimento da realidade por meio da Modelagem, Negrelli (2008), em sua tese intitulada "Uma reconstrução epistemológica do processo de MM para a educação (em) matemática", relaciona as descrições de Bassanezi (2002) – mais especificamente focando na etapa da abstração - com a consideração de Bean (2001) que aponta para a ideia da produção de um recorte, elaborado a partir de hipóteses e aproximações simplificadoras.

Ao analisar na literatura descrições do processo de MM compreendido na Matemática Aplicada, Negrelli (2008) concluiu que a componente realidade, presente em todas elas, seria passível de ser decomposta em duas, a realidade inicial e a realidade intermediária.

A partir dessa interpretação, o processo de MM, poderia ser compreendido da seguinte forma: a) a identificação de uma realidade inicial, o mundo exterior; b) a construção de uma realidade intermediária entre a realidade inicial e o modelo dela; e c) a elaboração e avaliação do modelo propriamente.

Com relação ao item b), ela defende que são "[...] as hipóteses e aproximações simplificadoras é que permitirão o surgimento de um recorte da realidade inicial, a realidade intermediária, que é a que será modelada." (NEGRELLI, 2008, p. 40).

Apesar da interpretação de Negrelli (2008) ter sido efetuada objetivando a elaboração de uma compreensão em que a própria Matemática pudesse ser considerada uma realidade a ser modelada matematicamente, a forma como ela ilustrou suas ideias fazendo uso também de situações-problema advindos da literatura da MM na educação, nos permite tecer considerações sobre o papel das hipóteses na construção dessa realidade intermediária, bem como as possíveis implicações disso no âmbito educacional.

Neste sentido, na próxima seção apontamos alguns pontos que favorecem uma Educação Científica por meio dos pressupostos da MM.

## 1.4. A Modelagem Matemática e a Educação Científica

Nesta seção é apresentada a relevância da Educação Científica para a sociedade atual, considerando a dicotomia existente entre a Alfabetização Científica voltada para todos e a preparação de futuros cientistas restringida a poucos. Apoiados em autores que evidenciam que os modelos matemáticos são partes constitutivas do ensino de Ciências, destacamos o uso destes juntamente com os princípios da MM na Educação Matemática como um meio de promover a Alfabetização Científica.

De acordo com Cachapuz *et al.* (2011) recentemente na Conferência Mundial sobre a Ciência para o século XXI, fomentada pela UNESCO e pelo Conselho Internacional para a Ciência, proferiu-se o seguinte discurso:

> Para que um País esteja em condições de satisfazer as necessidades fundamentais da sua população, o ensino das ciências e a tecnologia é um imperativo estratégico. Como parte dessa educação científica e tecnológica, os estudantes deveriam aprender a resolver problemas concretos e a satisfazer as necessidades da sociedade, utilizando as suas competências e conhecimentos científicos e tecnológicos. (CONFERENCIA MUNDIAL SOBRE LA CIÊNCIA, 1999 *apud* CACHAPUZ *et al.*, 2011, p. 18).

Atrelada a esse pensamento, a Educação Científica é vista como uma das habilidades intrínsecas ao homem do século XXI, em decorrência dos reflexos produzidos pela "sociedade intensiva de conhecimento", na qual a produção e a divulgação do conhecimento permeia a sociedade como um todo. (DEMO, 2010, p. 16).

No contexto das discussões fomentadas pela emergência de uma Educação Científica para a sociedade atual, nota-se que as compreensões referentes a este conceito têm se polarizado essencialmente segundo duas perspectivas: a de uma Alfabetização Científica voltada para toda a sociedade e aquela na qual o objetivo principal é a preparação de futuros cientistas (CACHAPUZ *et al.*, 2011). Considerando este cenário, entendemos que a perspectiva de uma Alfabetização Científica para todos esteja em maior consonância com os atuais objetivos que se pregam quando o assunto é Educação Científica.

Ao analisarmos a perspectiva na qual os futuros cientistas são o foco, podemos reconhecer uma estreita relação entre a Educação Científica e os interesses de ordem tecnológica, política e econômica. Ou seja, para o mercado, ela se reduz a uma estratégia globalizada de competitividade. Entretanto, Demo (2010, p. 20) salienta que não podemos nos esquecer de que, ao falar sobre "educação científica", estamos nos referindo também a um processo educativo, no qual deve ser levada em conta a formação cidadã dos alunos.

Cachapuz *et al*. (2011), apoiados em Mathews (1991) e Solbes e Vilches (1997), afirmam que uma orientação na qual se focam exclusivamente os conceitos, princípios e leis, não atentando para a questão da cidadania "[...] transmite uma visão deformada e empobrecida da atividade científica, que não só contribui para uma imagem pública da ciência como algo alheio e inatingível, mas também faz diminuir drasticamente o interesse e dedicação dos jovens." (CACHAPUZ *et al.*, 2011, p. 29).

Ainda com relação a essa perspectiva, entendemos ser pertinente e oportuno ressaltar que o cientificismo e o dogmatismo, próprios a essa abordagem, têm permeado o ensino das ciências atualmente, reforçando e sendo reforçados pelo paradigma do ensino tradicional (GOMES, 2012, p. 27).

No intento de oferecer outras abordagens alternativas ao ensino tradicional, e considerando as recomendações dos National Science Education Standards, fomentadas pelo National Research Council (1996), em cuja primeira página podemos ler:

> Num mundo repleto pelos produtos da indagação científica, a alfabetização científica converteu-se numa necessidade para todos: todos necessitamos utilizar a informação científica para realizar opções que se nos deparam a cada dia; todos necessitamos ser capazes de participar em discussões públicas sobre assuntos importantes que se relacionam com a ciência e com a tecnologia; e todos merecemos compartilhar a emoção e a realização pessoal que pode produzir a compreensão do mundo natural. (*apud* CACHAPUZ *et al.*, 2011, p. 18).

Chassot (2003) afirma que ser alfabetizado cientificamente é saber ler a linguagem em que está escrita a natureza. No entanto, isso não implica dominar todo o conhecimento científico; mas sim, ter o mínimo do conhecimento necessário para poder avaliar os avanços da ciência e tecnologia e suas implicações na sociedade e ambiente.

Cachapuz et al., (2011, p. 30) corrobora com esta ideia quando afirma que "A melhor formação científica inicial que pode receber um futuro cientista é integrado no conjunto dos cidadãos". Desta forma, ao se falar em Alfabetização Científica faz-se relevante destacar que, apesar de esta priorizar, por meio do ensino de ciências, a formação dos cidadãos capazes de atuar e agir de forma crítica na sociedade contemporânea, a formação dos futuros cientistas não é um assunto que deve ser deixado de lado.

Neste sentido, na busca por uma compreensão que nos ofereça subsídios para ir além da visão superficial do conceito de alfabetização científica, Bybee (1997) propõe distinguir diferentes graus de alfabetização que denomina, respectivamente, "analfabetismo", "alfabetização nominal", "funcional", "conceptual e procedimental" e, por último, "multidimensional" (CACHAPUZ *et al.*, 2011, p. 20).

Dentre tais graus, Cachapuz *et al.* (2011) defendem uma posição que está em concordância com o que acreditamos ser aquela que tem o potencial de promover uma alfabetização científico-tecnológica que alie, concomitantemente, a formação cidadã e científica, a alfabetização multidimensional.

Na alfabetização multidimensional

> Estende-se mais além do vocabulário, dos esquemas conceptuais e dos métodos procedimentais, para incluir outras dimensões da ciência: devemos ajudar os estudantes a desenvolver perspectivas da ciência e da tecnologia que incluam a história das ideias científicas, a natureza da ciência e da tecnologia e o papel de ambas na vida pessoal e social. Este é o nível multidimensional da alfabetização científica [...]. Os estudantes deveriam alcançar uma certa compreensão e apreciação global da ciência e da tecnologia como empresas que foram e continuam a ser parte da cultura. (CACHAPUZ *et al.*, 2011, p. 21).

Tais princípios deste grau de alfabetização fazem-se consonantes com uma perspectiva de Educação Científica que resguarda características mais holísticas com relação ao conhecimento e que, por este motivo, consideramos ser a mais adequada para os objetivos do presente trabalho, a perspectiva de Ensino por Pesquisa (EPP).

De acordo com Cachapuz, Praia e Jorge (2000), o EPP surge como uma perspectiva emergente de Educação Científica, que, defende a ideia de combater práticas do Ensino por Transmissão (EPT) e do Ensino por Descoberta (EPD), a partir de uma ampliação da visão pregada pelo Ensino por Mudança Conceitual (EMC).

Para compreendermos a forma como o EPP[9] se insere no contexto das outras formas de se compreender a Educação Científica, elencamos na sequência as principais características, vantagens e/ou limitações decorrentes das perspectivas mencionadas anteriormente.

Na perspectiva EPT é predominante uma visão estritamente cumulativa do conhecimento, na qual o professor transmite e o aluno recebe passivamente sem quaisquer críticas da validade e/ou veracidade. Esta se mostra adequada às necessidades sociais e políticas nas quais o objetivo

---

[9] Daqui em diante nos referimos às siglas das perspectivas citadas.

principal é a formação de cientistas, no entanto, tem como consequência uma Educação Científica promovida para poucos e baseada na memorização.

Na busca de deslocar o olhar dos alunos para um confronto de ideias com ideias, abandonando o empirismo e a falsa ideia de acreditar que se sabe de algo pelo simples fato de conseguir memorizar, surge a perspectiva de EPD. Nesta, o caráter de passividade dos alunos é reduzido, no entanto, a "ilusão da descoberta" que muitas vezes as práticas fundamentadas nessa perspectiva suscitam, fomenta nos alunos pensamentos de ordem determinística, no sentido de que o conhecimento é pronto e acabado e basta ser descoberto. (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000).

Na contrapartida das concepções epistemológicas subjacentes às perspectivas EPT e EPD, a EMC "[...] ao valorizar a estrutura cognitiva do aluno pretendeu levar ao abandono definitivo de um ensino baseado na transmissão de conteúdos – informação – fazendo emergir os conceitos numa lógica de construção do conhecimento do aluno" (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000, p.70).

Nesta perspectiva, o professor passa a ser um organizador de estratégias intencionais muitas vezes provocadoras de conflito cognitivo, e o aluno torna-se corresponsável na construção de seu conhecimento. Como consequência disso, o erro passa a ser valorizado como forma de estimular o exercício do pensamento e desenvolvimento de novas atitudes e estratégias frente às dificuldades. O conhecimento perde o caráter determinístico subjacente às outras perspectivas apresentadas e passa a ser considerado por um prisma onde o importante é entender como mudam os conceitos.

Apesar destes novos papéis atribuídos ao professor, aluno e conhecimento representarem um avanço significativo àqueles defendidos pelas perspectivas EPT e EPD, a EMC possui algumas limitações que valem ser mencionadas.

Ao concentrar a atenção exclusivamente na atividade cognitiva dos alunos, mesmo que com boas intenções, a EMC acaba por deixar de lado outros aspectos que também influenciam na aprendizagem, como o domínio afetivo e a consideração das particularidades inerentes aos diferentes contextos culturais e sociais nos quais os alunos estão inseridos.

E nela

> [...] há uma sobrevalorização dos conteúdos científicos considerados mais como fins de ensino e não enquanto meios instrucionais para, a partir deles, se atingirem metas educacional e socialmente relevantes. Esquecem-se questões atitudinais e éticas envolvidas na Educação em Ciência. (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000, p. 71).

Tendo em vista as características mencionadas das perspectivas EPT, EPD e EMC, Cachapuz, Praia e Jorge (2000, p. 71) sublinham a necessidade de se "[...] olhar a educação científica sob uma outra perspectiva (em particular a nível do ensino não superior), uma educação científica que já não é só educação em ciência mas também através da ciência e sobre ciência." E que permita compreensões do mundo na sua globalidade e complexidade, conciliando as análises fragmentadas que as visões analíticas dos saberes disciplinares fomentam e fundamentam.

Neste contexto insere-se a perspectiva de EPP, que em nosso entendimento é a que melhor responde às atuais necessidades da sociedade, por ser "Mais humanizada, mais cultural, mas também mais perto do homem de amanhã, num mundo tecnológico avançado, porém que queremos alfabetizado cientificamente." (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000, p. 71).

Com a EPP

> [...] A informação nasce mais da discussão dos alunos com a ajuda do professor e menos de um processo curricular muito estruturado e exaustivo. [...] Os problemas amplamente discutidos na aula nascem de problemáticas muito abertas, com raízes ou incidências sociais fortes, que a pouco e pouco se vão delimitando e preparando para o exercício de pesquisa partilhada, quer intragrupal, quer intergrupalmente. Trata-se de envolver afectiva e cognitivamente os alunos, sem respostas prontas e prévias, sem conduções muito marcadas pela mão do professor, caminhando-se para soluções provisórias, como resposta a problemas reais e sentidos como tal, de conteúdo inter e mesmo transdisciplinares, cultural e educacionalmente relevantes. (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000, p. 71).

Esta perspectiva se articula com o movimento Ciência-Tecnologia-Sociedade-Ambiente (CTSA), que segundo Ziman (1994) "[...] pode traduzir-se numa multiplicidade de abordagens, vistas como complementares, cada uma delas procurando introduzir os alunos num aspecto particular da ciência no seu contexto social." (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000, p. 71). Tem como principal objetivo encontrar "[...] metodologias de maior responsabilidade social, de cidadania, mais lúdica, exigente e de grande rigor didáctico – centrada na Educação em Ciência".

Neste sentido, as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE's) propostas para o ensino de Física (2008, p. 65) e de Matemática (2006, p. 43) sugerem, respectivamente, dentre possíveis encaminhamentos metodológicos, o uso dos modelos científicos como forma de se fazer ciência no âmbito educacional e a Modelagem Matemática como uma metodologia capaz de proporcionar ambientes de aprendizagem nos quais fenômenos diários, sejam eles, físicos, biológicos e sociais, constituam elementos para análises críticas e compreensões diversas de mundo. O que, no nosso entendimento, respeita os princípios de uma Alfabetização Científica e se fazem consonantes com a perspectiva de EPP.

> A ciência não revela a verdade, mas propõe modelos explicativos construídos a

> partir da aplicabilidade de método (s) científico (s). Assim, os modelos científicos são construções humanas que permitem interpretações a respeito de fenômenos resultantes das relações entre os elementos fundamentais que compõem a Natureza. (PARANÁ, 2008, p. 25).

Barbosa (2009, p. 70), fundamentado nos autores Bassanezi (2002), D'Ambrosio (1996), Gilbert (2004), Matthews, Gauld e Stinner (2005) indica que a ideia de modelo caminha praticamente junto com a trajetória das ciências e que, com o advento da ciência moderna, se firmou enquanto parte substancial da prática científica.

Com relação aos tipos de modelos existentes, Barbosa (2009) afirma que alguns autores têm se ocupado em classificá-los, tendo como propósito formular teorias que discorram sobre o uso dos modelos e da modelagem na Educação Científica.

O autor cita como exemplo a seguinte classificação feita por Gilbert, Boulter e Elmer (2000), na qual os atributos dos modelos são distribuídos em termos de suas representações.

> [...] concreto, o qual envolve materiais manipuláveis; verbal, que consiste de descrições de um sistema; visual, o que envolve gráficos, diagramas, animações, etc.; gestual, o que envolve uso do corpo ou partes do corpo; e finalmente, a simbólica, que consiste de representações pictóricas, fórmulas, expressões matemáticas. (BARBOSA, 2009, p. 70).

Destacamos desta classificação a forma simbólica, em que estão contemplados os modelos matemáticos.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) um modelo matemático é

> [...] um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. [...] uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

No que diz respeito ao papel dos modelos matemáticos na Educação Científica, Paraná (2008, p. 68) aponta que, ainda que estes possibilitem a expressão das ideias científicas numa linguagem universal, é preciso considerar que, devido ao fato da Matemática estar

> [...] presente na atividade científica tanto no seu processo quanto no seu produto, seja na definição de um conceito, seja na articulação entre os elementos de uma teoria científica. Entretanto, a aparente simplicidade da estruturação do conhecimento científico pode transmitir a impressão de que os modelos matemáticos são meros mecanismos de quantificação de grandezas fisicas. (PINHEIRO; PIETROCOLA; ALVES. In: PIETROCOLA, 2005, p. 36).

No âmbito do ensino de ciências, entendemos que esta compreensão dos modelos matemáticos estarem reduzidos a mecanismos que abordam os fenômenos físicos apenas quantitativamente esteja intrinsecamente relacionada às atuais acusações de dogmatismo e abstração formalista, inerentes à um ensino reducionista e insuficiente, que se configura por meio de questões do tipo: considere, suponha, resolva e calcule. (CACHAPUZ *et al.,* 2011; PARANÁ, 2008).

No contexto de tais recomendações e considerações com relação ao uso de modelos nas ciências convém destacar as reflexões de Barbosa (2009) em seu artigo intitulado "Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica", no qual ele sustenta que os modelos matemáticos são partes do discurso pedagógico das Ciências e, assim, figuram nas práticas pedagógicas como argumentos para justificar conceitos/leis, como conceitos em si mesmos ou como estruturas que ordenam o estudo dos fenômenos científicos.

No mesmo artigo mencionado, Barbosa (2009) apresenta a necessidade de estudos que direcionem a compreensão dos modelos matemáticos no âmbito da Educação Científica para além da visão tradicional que, segundo ele, tem considerado os modelos de forma estática, como se estes fossem "retratos da realidade" que têm o poder de refletir de forma incontestável todos os fenômenos imbricados na realidade. Desta forma, os modelos, estariam sendo empregados como argumentos de autoridade e verdade inquestionável no contexto da Educação Científica.

No mesmo sentido da necessidade ressaltada por Barbosa (2009), Demo (2010) afirma que "para que a educação científica tenha devido impacto estrutural, a condição primeira é reconstruir outras estratégias de aprendizagem que não sejam instrucionistas e reprodutivas. Ciência não combina em nada com tais posturas." (p. 22).

E Cachapuz *et al.* (2011) destacam que

> A aprendizagem das ciências pode e deve ser também uma aventura potenciadora do espírito crítico no sentido mais profundo: a aventura que supõe enfrentar problemas abertos, participar na tentativa de construção de soluções... a aventura, em definitivo, de fazer ciência. (CACHAPUZ *et al.*, 2011, 28).

Sendo assim, considerando as ideias de Barbosa (2009), Demo (2010) e Cachapuz *et al.* (2011), entendemos que a MM no âmbito da Educação Matemática seja uma estratégia de ensino e aprendizagem capaz de proporcionar um ambiente no qual se façam presentes os aspectos inerentes à Alfabetização Científica no grau multidimensional em que é relevante tanto a formação do cidadão quanto a preparação do futuro cientista, e por conseguinte, à perspectiva de EPP.

Sabendo-se que a MM no âmbito da Educação Matemática tem o potencial de promover uma Alfabetização Científica, entendemos que devam ser explicitadas as maneiras como os modelos matemáticos são considerados para representar, por exemplo, situações de natureza física.

Nesta direção, as DCE's ressaltam que

> Para que o estudante tenha uma compreensão do conhecimento físico trabalhado na escola, é preciso indicar-lhe que as fórmulas matemáticas representam modelos simplificados da equação produzida pela ciência. Esses modelos são elaborações humanas, criadas para entender determinado fenômeno ou evento físico, válido para determinados contextos históricos. (PARANÁ, 2008, p. 67).

Neste sentido, sabendo-se que os modelos matemáticos são construções humanas, é possível inferir algumas considerações com relação à ideia de concebê-los para além da visão tradicional (BARBOSA, 2009), ou seja, não como algo formal, pronto e acabado, mas sim como todo conhecimento que implique uma Educação Científica deve ser, uma "[...] dinâmica disruptiva, rebelde, em permanente desconstrução e reconstrução." (DEMO, 2010, p. 23).

Desta forma, o modelo matemático passaria a ser algo possível de ser construído sob a ótica de várias interpretações e a importância do sujeito seria posta em relevo.

Esta discussão nos remete as ideias de abstração e recorte da realidade, delineadas na seção anterior, na qual a formulação de hipóteses por parte do sujeito modelador configura a chamada realidade intermediária que é de onde partem os modelos matemáticos (NEGRELLI, 2008).

No nosso entendimento, esta forma de conceber a atividade de MM, respeitando as diversas interpretações possíveis da realidade a ser modelada, representa o espírito da prática e consequentemente da Educação Científica, em que "[...] todo modelo é parcial, já que a observação, a intuição e a razão, que são componentes do trabalho científico, não permitem por si mesmas, o reconhecimento do real." (BUNGE, 1974). Ou seja, o conhecimento proporcionado pelo modelo acaba sendo limitado ao recorte da realidade que é flexível, ao contrário da visão de retrato da realidade apresentada por Barbosa (2009) que é estática e determinística.

Como toda resposta a um problema tende a suscitar novas dúvidas tanto de ordem prática quanto teórica, a solução apresentada por Negrelli (2008) para o problema do acesso à realidade por meio da MM nos instigou a fazer as seguintes indagações:

Se os modelos matemáticos advêm do recorte da realidade que, por sua vez, é delimitado em sua essência pela formulação de hipóteses por parte do sujeito modelador, o que seriam as hipóteses e como estas delimitam a realidade? E ainda: Os recortes da realidade proporcionados pelas hipóteses figuram apenas na etapa da abstração como sugerem as pesquisas em MM?

Movidos por estas inquietações, no capítulo seguinte, apresentamos os pressupostos filosófico-epistemológicos de Poincaré acerca da formulação e uso das hipóteses.

# CAPÍTULO 2

# PRESSUPOSTOS FILOSÓFICO-EPISTEMOLÓGICOS DE POINCARÉ ACERCA DA FORMULAÇÃO DAS HIPÓTESES

Após destacarmos a formulação de hipóteses no âmbito da MM, sobretudo no que diz respeito ao seu papel epistemológico de delimitação da realidade modelável matematicamente, pretendemos apresentar neste capítulo os pressupostos filosófico-epistemológicos do físico-matemático Jules Henri Poincaré acerca do que é a hipótese e qual seu papel na constituição do conhecimento científico, tendo como objetivo principal tecer considerações sobre a possibilidade de adotarmos a sua filosofia ao voltarmos nossa atenção para a formulação de hipóteses no processo de MM.

## 2.1. As ideias epistemológicas de Poincaré na esfera científica e matemática

Na transição dos séculos XIX e XX, tanto a Física, a Química e a Biologia quanto a Matemática e a Lógica sofreram profundas modificações em suas bases. de tal forma que precisaram se adequar a novas ideias e buscar a reavaliação de seus rumos.

Tais mudanças foram possibilitadas principalmente pela valorização e pelo reconhecimento da prática científica ocorridos no contexto da Revolução Industrial do século XIX. Esta época foi considerada a era das invenções, momento em que ocorre o encontro entre a tradição filosófica, de cunho teórico e matemático, e a tradição técnica, empírica e prática (BRAGA *et al*., s/d, p. 9). Neste sentido, como explica Chassot

> O século XIX foi o grande período no qual a ciência se consolidou e realmente passou a definir marcas na caminhada da humanidade. Se, até então, o homem buscava, na ciência, respostas às suas interrogações sobre a natureza, a partir de agora a ciência não só passa a responder às interrogações, mas também, ao interferir na própria natureza, a determinar novas e melhores maneiras de viver. (CHASSOT, 2004, p. 187).

No campo da Física, por exemplo, pode-se citar a elaboração da teoria eletromagnética de Maxwell, que unificou os fenômenos elétricos e magnéticos e contribuiu para o surgimento de perspectivas anômalas à visão de mundo mecanicista, a qual prevalecia soberana desde o coroamento da obra newtoniana ainda no final do século XVII. Já na Matemática, o advento das Geometrias não-euclidianas chegou a ressuscitar "velhas" questões metafísicas como, por exemplo, "qual é a real natureza do espaço?". Com isso, uma reavaliação do valor epistemológico da própria geometria euclidiana se fez necessária (VIDEIRA, 1997). O rápido desenvolvimento da Ciência

> [...] vinha mostrando que o conhecimento científico, tão penosamente erigido com base em certezas até então consideradas sólidas e bem fundamentadas, não mais se sustentava, pois seus alicerces perderam, devido aos avanços obtidos pela prática científica, parte de sua credibilidade. (VECCHIO JUNIOR, 2005, p. 1).

Estes fatos desencadearam questionamentos de ordem epistemológica com relação à credibilidade do conhecimento científico como um todo. (VIDEIRA, 1997; VECCHIO JUNIOR, 2005).

De acordo com Abbagnano (2007, p. 909), o paradigma vigente neste período era o positivismo de Auguste Comte (1798-1857), que girava, sobretudo, em torno dos conceitos de "verdade científica" e de "método exato das ciências". E tinha ainda as seguintes teses como fundamentos:

> 1ª A ciência é o único conhecimento possível, e o método da ciência é o único válido: portanto, o recurso a causas ou princípios não acessíveis ao método da ciência não dá origem a conhecimentos; a metafísica, que recorre a tal método, não tem nenhum valor.
> 2ª O método da ciência é puramente descritivo, no sentido de descrever os fatos e mostrar as relações constantes entre os fatos expressos pelas leis, que permitem a previsão dos próprios fatos.
> 3ª O método da ciência, por ser o único válido, deve ser estendido a todos os campos de indagação e da atividade humana; toda a vida humana, individual ou social, deve ser guiada por ele. (ABBAGNANO, 2007, p. 909)

A dissonância existente entre a soberania do método científico pregada pelo positivismo e as novas formas de se compreender o mundo, sobretudo pautadas na prática científica, fez com que se disseminasse a ideia de que a ciência e seu método precisariam ser reavaliados.

O surgimento das Geometrias não-euclidianas, por exemplo, representou não apenas uma nova forma de se fazer Geometria, mas também as possibilidades de se pensar e interpretar o mundo para além dos postulados de Euclides, que até então condicionavam de certa forma, a maneira de se "ler" a realidade por meio da Matemática.

O chamado convencionalismo, que consistia em qualquer doutrina segundo a qual a verdade de algumas proposições válidas em um ou mais campos se devia ao acordo comum ou ao entendimento (tácito ou expresso) daqueles que faziam uso dessas proposições, é apresentado por Abbagnano (2007, p. 241) quando atribuído aos axiomas geométricos, como aquele que tendo em vista a negação do caráter de verdade considerado até então na Geometria Euclidiana, poderia contribuir para que emergisse a crença de que a possibilidade de explicação do mundo estaria condicionada unicamente por uma escolha pessoal do cientista e, ainda, que essa escolha seria arbitrária. Quando essa arbitrariedade era levada ao extremo, direcionava o convencionalismo para uma forma mais radical de ceticismo do conhecimento científico denominado nominalismo.

O nominalismo, neste contexto, caracterizava-se como uma doutrina que tinha como consequências a crença de que o cientista "cria" o fato científico (ABBAGNANO, 2007, p. 242).

Um dos principais representantes nesta vertente foi o filósofo e matemático Édouard Le Roy (1870-1954), que estendia a ideia das convenções para todas as ciências e elevava a sua importância a ponto de afirmar que os fatos investigados pela ciência seriam criações dos próprios cientistas, pronunciando um ceticismo em favor de uma condenação sumária de tudo o que a ciência pregava (POINCARÉ, 1995).

A doutrina de Le Roy poderia ser reconhecida nas palavras de Poincaré:

> A ciência é feita apenas de convenções, e é unicamente a essa circunstância que deve sua aparente certeza; os fatos científicos e, a *fortiori*, as leis, são obra artificial do cientista; a ciência, portanto, nada pode nos ensinar sobre a verdade, só pode nos servir como regra de ação. (POINCARÉ, 1995, p. 137).

Segundo Vecchio Junior (2005, p. 2), é durante essa turbulência conceitual nas Ciências, instaurada na transição dos séculos, que surge a obra de Jules Henri Poincaré, constituindo um retrato bastante interessante nessa mudança de rumo das tentativas de se entender epistemologicamente a atividade científica.

Segundo Silva (2007, p. 168),

> [...] Henri Poincaré foi provavelmente o mais importante matemático de fins do século XIX e começo do século XX. Ele deu contribuições notáveis a várias áreas da matemática e da física, além de praticamente ter criado algumas, como a topologia. E ainda encontrou tempo para refletir sobre a natureza do conhecimento matemático.

Foram as geometrias não-euclidianas as responsáveis por despertar o interesse de Poincaré por questões epistemológicas, sendo isso, portanto, a origem de sua filosofia, normalmente denominada de convencionalismo geométrico, ou simplesmente convencionalismo (VIDEIRA, 1997).

No entanto, seria reducionista demais nos referirmos à filosofia poincareriana apenas sob o prisma convencionalista, pois:

> As muitas interpretações de sua obra lhe renderam várias classificações filosóficas distintas como, por exemplo: convencionalista (no campo epistemológico da ciência), intuicionista (cuja interpretação normalmente se restringe ao campo da epistemologia da matemática), além de empirista, instrumentalista e realista estrutural epistemológico (três modos distintos, e até mesmo contraditórios, de classificar e interpretar seus escritos no contexto da discussão contemporânea entre realistas e anti-realistas); isso somente para citar algumas. (CROSSI FILHO, 2012, p. 1).

Segundo Silva (2007, p. 179), a filosofia de Poincaré é um misto de convencionalismo e pragmatismo. Dessa forma, entendemos que a participação de Poincaré no embate filosófico instaurado no meio científico revelou-se muito oportuna, pois sua filosofia constituiu-se como uma terceira visão entre as ideias de Comte e de Le Roy.

Segundo Poincaré (1988, p. 15), “duvidar de tudo ou acreditar em tudo são duas soluções igualmente cômodas: uma e outra nos dispensam de refletir”. Por essa razão, a sua filosofia não possui uma única denominação, pois, ao se posicionar frente ao positivismo de ciência, ele se mostrou convencionalista e, quando o seu alvo de crítica foi o nominalismo, adotou uma postura mais pragmática.

Em resposta ao convencionalismo de postura nominalista de Le Roy, em 1902, Poincaré responde com um estudo crítico publicando “A Ciência e a Hipótese”. (POINCARÉ, 1988). Essa obra reúne artigos anteriormente publicados em revistas científicas no final do século XIX, tendo como objetivo principal explicitar em que medida as hipóteses são utilizadas nas ciências e até que ponto podemos creditar toda nossa confiança a um conhecimento sempre passível de ser questionado e sujeito a contínuas reformulações.

Notamos que a importância dada por Poincaré ao papel da hipótese na constituição do conhecimento científico representa um ponto chave de seu pensamento epistemológico, distinguindo-o na sua essência das ideias dos positivistas e também dos nominalistas. Neste sentido, para o cumprimento dos objetivos do presente trabalho, consideraremos este aspecto de sua filosofia. Antes, porém, teceremos, na seção seguinte, algumas considerações referentes às relações existentes entre a hipótese e o conhecimento científico.

## 2.2. O Conhecimento Científico e o papel da Hipótese

Para que haja uma pesquisa científica e, por conseguinte, se consolide um conhecimento dito científico, a primeira grande atividade do cientista consiste na enunciação adequada de sua hipótese de trabalho (MORAIS, 1988, p. 66). Esta afirmação delega à hipótese o importante papel de fundamentar o conhecimento científico.

Objetivando inferir algumas considerações com relação ao papel desempenhado pela hipótese na constituição do conhecimento científico, faz-se necessário, primeiramente, situar aquilo que estamos compreendendo enquanto conhecimento científico e método[10] científico.

No contexto desta pesquisa, estamos considerando o conhecimento científico em sua acepção moderna que, ao ser inaugurado no século XVI, supera a visão aristotélica que pregava a ideia de que o pensamento deveria ser considerado muito superior à sensação (MORAIS, 1988).

Kilpatrick (1965, p. 16) conta que:

> Aristóteles havia ensinado que, se abandonassem, ao mesmo tempo, de certa altura, uma bola de cinco libras e outra de uma libra, a primeira, cinco vezes mais pesada, cairia cinco vezes mais depressa. Isso parecia tão natural, tão claro, tão cheio de bom senso, que durante mil e novecentos anos ninguém pôs em dúvida a questão, nem mesmo tentou prová-la. (*apud* MORAIS, 1988, p. 38).

De acordo com Cifuentes (2013, p. 2), o conhecimento científico moderno se inicia com o italiano Galileu Galilei (1564-1642) e o método científico sistematizado por ele constitui o pano de fundo de toda a ciência moderna.

Segundo Morais (1988, p. 64), o método científico galileano era formado de um conjunto de regras básicas utilizado para desenvolver uma experiência, a fim de produzir um novo conhecimento e era constituído das seguintes etapas: 1. Observação; 2. Colocação da hipótese; 3. Seleção dos dados interessantes; 4. Verificação experimental; 5. Obtenção de constantes; 6. Generalizações.

Ao estabelecer a necessidade de testar hipóteses e confirmá-las por experimentos, Galileu mudou a forma como se produz conhecimento e desvelou uma nova forma de compreender a realidade (MORAIS, 1988).

Com relação ao conhecimento científico, Praia, Cachapuz e Gil-Pérez (2002, p. 255) afirmam:

> é um constante jogo de hipóteses e expectativas lógicas, um constante vaivém entre o que pode ser e o que "é", uma permanente discussão e argumentação/contra argumentação entre teoria e as observações e as experimentações realizadas.

Neste sentido, os autores ainda enfatizam que tal fluidez na articulação e diálogo entre as teorias, as observações e as experimentações é proveniente de uma coerente formulação de hipóteses. Que "se trata de um processo complexo que pode ter origem na imaginação fértil,

---

[10] Abbagnano (2007, p. 780) apresenta dois significados fundamentais para o termo método: 1º qualquer pesquisa ou orientação de pesquisa; 2º uma técnica particular de pesquisa.

inspiradora, porventura em ideias especulativas, às quais subjaz um fundo reflexivo" (PRAIA; CACHAPUZ; GIL-PÉREZ, 2002, p. 254).

Com relação às hipóteses Abbagnano (2007, p. 582) salienta:

> Em geral, um enunciado (ou conjunto de enunciados) que só pode ser comprovado, examinado e verificado indiretamente, através de suas consequências. Portanto, a característica da H. é que ela não inclui garantia de verdade nem a possibilidade de verificação direta. Uma premissa evidente não é uma H., mas, no sentido clássico do termo, um axioma. Um enunciado verificável é uma lei ou uma proposição empírica, não uma hipótese. Uma H. pode ser verdadeira, mas sua verdade só pode resultar da verificação de suas consequências.

No que se diz respeito ao papel desempenhado por elas no conhecimento científico, vale ressaltar diferentes perspectivas que podemos ter ao nos referirmos a elas. Praia, Cachapuz e Gil-Pérez (2002, p. 253) destacam que:

> Numa perspectiva de pendor empirista a hipótese tem um papel apagado e insere-se num processo de verificação em que o exame exaustivo dos fatos é determinante para a sua elaboração. No entanto, na perspectiva racionalista contemporânea, [...] a hipótese intervém ativamente, desempenhando um importante papel na construção do conhecimento científico.

No presente trabalho nós adotamos a perspectiva racionalista contemporânea. Essa escolha foi guiada principalmente pelas características exigidas por tal perspectiva ao lidar com a formulação de hipóteses, como, "grande capacidade criativa, assim como um bom fundo teórico e espírito crítico" (PRAIA, CACHAPUZ e GIL-PÉREZ 2002, p. 253). E, ainda, pela conclusão de um estudo realizado sobre a compreensão de alunos acerca da "lógica da testagem de hipóteses" que apontou:

> Os alunos que acreditam que as hipóteses podem ser testadas e provadas por verificação, parecem ter uma visão simplista e ingenuamente absoluta da natureza das hipóteses científicas e da teoria. De fato, uma pessoa que não perceba que as hipóteses científicas não podem ser logicamente provadas, mas apenas desaprovadas, não percebe verdadeiramente a natureza da ciência (PRAIA; CACHAPUZ; GIL-PÉREZ, 2002, p. 255).

Entendemos que tais características, além de possibilitarem flexibilidade[11] no trato com os dados da pesquisa, também proporcionam um destaque maior ao papel do sujeito na construção

---

[11] Tal flexibilidade, entretanto, não é possibilitada devido à falta de regras para a formulação da hipótese. De acordo com Morais (1988, p. 67) "conquanto inexistam normas rígidas para se enunciar uma hipótese, há algumas qualidades que ela deve ter. São elas: - Simplicidade; - Adequação de linguagem; - Condição de realidade; -

do conhecimento científico, ao contrário da perspectiva empirista que tem como base o exame dos fatos.

Todavia, vale ressaltar que a perspectiva empirista também é relevante, pois é inegável a importância do exame dos fatos para as escolhas na elaboração de hipóteses. A escolha pela perspectiva racionalista contemporânea foi necessária, uma vez que, subjacente aos objetivos deste trabalho, figura a ideia de que o conhecimento é algo construído pelo sujeito.

Acerca de algumas das facetas que podem ser destacadas ao se relacionar hipótese e conhecimento científico, apresentamos na seção seguinte uma compreensão em particular, a de Jules Henri Poincaré. Apresentada na forma de uma classificação que ele fez ao atribuir características distintas a determinados tipos de hipóteses que figuram na constituição do conhecimento científico, a sua concepção defende que, apesar das diferentes maneiras que as hipóteses podem se manifestar, estas, ao possibilitar o reconhecimento científico de conhecimentos subjetivos e particulares aos sujeitos atuam de forma concatenada.

### 2.3. Os tipos de Hipóteses segundo Poincaré

Para Poincaré, a ciência nasce da hipótese[12], pois no início de qualquer investigação científica ela é a única ferramenta de que o cientista dispõe. E com um pouco de reflexão constata-se "[...] que o matemático não a poderia dispensar e que tampouco o pesquisador a dispensa" (POINCARÉ, 1988, p. 15).

A importância da hipótese para com o desenvolvimento de um saber reside no fato de que ela leva em conta todos os fatores conhecidos que parecem interferir no fenômeno estudado, ou seja, ela sintetiza tudo (ou a maior parte) do que foi experienciado em determinado campo. Para Poincaré, existem três tipos diferentes de hipóteses que reproduzem, a propósito do conhecimento físico, os três tipos de métodos que caracterizam, respectivamente, a Aritmética, a Geometria e a própria Física.

Aritmética: as hipóteses "naturais" ou princípios, como o princípio de simetria, parecem ligados, necessariamente, ao exercício do pensamento.

Geometria: As hipóteses "indiferentes", como a hipótese de continuidade ou de descontinuidade da matéria, assemelham-se às convenções linguísticas do geômetra.

Física: As hipóteses realmente físicas consistem nas leis da natureza; a generalidade

---

Propriedade de delimitação de campo; - Sintetismo – nos casos possíveis; Especificidade – nos casos necessários; Generalidade – nos casos possíveis.

[12] Em função desta afirmação, ele foi alvo de críticas que o acusaram de ser mais um nominalista. Pois reservando tal importância a um saber provisório como fundamento da ciência, ele estaria reduzindo o saber científico a um conhecimento duvidoso.

indutiva à qual elas permitem chegar, depende unicamente da experiência; a uniformidade e a simplicidade da natureza que supomos não podem ser provadas experimentalmente. Elas se baseiam unicamente na probabilidade, a qual, por sua vez, compreende uma hipótese de continuidade da natureza (POINCARÉ, 1988. p. 7).

Os tipos de hipóteses apresentadas por Poincaré não podem ser limitados apenas aos objetos a que elas se aplicam, ou seja, em se tratando de ciência, os três tipos se fazem necessários, uma vez que cada uma delas possui sua particularidade indispensável.

As hipóteses naturais (INTUIÇÕES) formam, por assim dizer, o fundo comum de todas as teorias da física matemática. Não podemos fugir delas, ou melhor, elas são as últimas que devemos abandonar.

As hipóteses indiferentes (CONVENÇÕES) não serão nunca perigosas, desde que compreendamos bem seu caráter. Podem nos ser úteis, seja como artifícios de cálculo, seja para apoiar nosso entendimento mediante imagens concretas, para clarear nossas ideias. Portanto, não há porque bani-las.

As generalizações (LEIS) correspondem à experiência que deve confirmar ou falsear. Verificadas ou condenadas, elas poderão ser fecundas. Mas só o serão se não as multiplicarmos.

Considerando esta caracterização feita por Poincaré e a exigência da formulação de hipóteses para o processo de obtenção de modelos matemáticos apresentada por Bean (2001), apresentamos, no próximo capítulo, os procedimentos metodológicos que nortearam a coleta dos dados referentes à concepção de hipótese poincareriana e os pressupostos assumidos nas interpretações realizadas no Capítulo 4.

# CAPÍTULO 3

# A PESQUISA

Neste capítulo, reapresentamos nossa temática de pesquisa e aos objetivos.

Em seguida, expomos a Fundamentação Teórica e os Procedimentos Metodológicos utilizados para a interpretação dos dados referentes à concepção de hipótese e conhecimento científico de Poincaré.

Evidenciamos a MM como uma metodologia que possui como características essenciais a formulação de hipóteses e a condição de sempre trabalhar sobre um recorte da realidade delimitado pelas hipóteses (NEGRELLI, 2008).

Finalizamos, apresentando, genericamente, as ideias que nortearam nossa interpretação acerca da formulação de hipóteses sob a ótica poincareriana e da realidade intermediária no contexto dos problemas de MM na Educação Matemática.

## 3.1. Temática de Pesquisa e Objetivos

A temática que nos motivou adentrar nos assuntos delineados nos capítulos anteriores do presente trabalho foi "A interpretação da formulação de hipóteses no processo da Modelagem na Educação Matemática, à luz dos pressupostos filosóficos de Poincaré, e as possíveis relações entre essa interpretação e os princípios da Educação Científica".

A partir de tal temática, visualizamos os seguintes objetivos a serem cumpridos:

1º: Recorrer a trabalhos de Modelagem que discutem o processo de modelar, focando a etapa da formulação de hipóteses e finalizando com o trabalho de Negrelli (2008), no qual ela situa a importância desta etapa na construção da chamada "realidade intermediária".

2º: Estabelecer relações entre as reflexões filosóficas de Poincaré acerca da importância das hipóteses para o pensamento científico com a etapa da formulação de hipóteses (abstração) da MM.

3º: Evidenciar aspectos que propiciem a inclusão da nossa interpretação na discussão suscitada por Barbosa (2009) sobre Educação Científica.

### 3.2. Fundamentação Teórica e Procedimentos Metodológicos

Considerando as particularidades inerentes à forma como nossa investigação se configurou, entendemos que nossa Fundamentação Teórica deva refletir a segurança e a liberdade de pensamento que nos acompanham desde o início da presente pesquisa.

Desta forma, este trabalho se trata de uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo e reflexivo, com enfoque temporal retrospectivo, acerca da formulação de hipóteses no processo da MM, tomando-se como principais aportes teórico-filosóficos a obra de Poincaré e os princípios da Educação Científica.

Considerando que "pesquisa qualitativa", como um conjunto complexo de procedimentos de descrição, análise e interpretação de sistemas complexos (MAANEN, 1979, p. 520), é um termo polissêmico, designando um amplo universo de pesquisas nas Ciências Sociais, assumimos, para efeito de fundamentação metodológica do presente estudo, quatro das cinco características elencadas por Chizzotti (1991) para definir esta abordagem:

1. A delimitação e formulação do problema da pesquisa não se reduziu ao estabelecimento de hipóteses e variáveis, permitindo a processual definição e delimitação do problema no próprio contexto onde se realiza a pesquisa.

2. Relativamente à figura do pesquisador, concebeu-se a necessidade de se estar "[...] livre de preconceitos e alcançar uma visão global dos fenômenos [...]".

3. Procurou-se não considerar os dados como "[...] coisas isoladas, acontecimentos fixos, captados em um instante de observação." Considerou-se que "eles ocorrem em um contexto dinâmico de relações (processo)".

4. Quanto às técnicas, buscou-se a não valorização de modelos estáticos, apesar da conservação de certa regularidade.

Objetivando observar dados referentes à compreensão epistemológica de Poincaré acerca do que são as hipóteses e como elas figuram na constituição do pensamento científico, efetuamos nossa leitura e análise das obras "A Ciência e a hipótese" e "O Valor da ciência", conforme passos sugeridos pelas "Diretrizes para a leitura, análise e interpretação de textos", enunciados por Severino (1996, p. 47-61). Dessa forma, nossos procedimentos de pesquisa seguiram como principais etapas: análise textual, análise temática, análise interpretativa, problematização e síntese.

Inicialmente, estabelecemos as unidades de leitura condizentes com o nosso objetivo de explicitar o que são as hipóteses para Poincaré e elucidar as principais implicações de sua compreensão para o pensamento científico. Sobre tais unidades de leitura focamos na captação dos dados referentes à vida e à obra de Poincaré, relacionando-os com o contexto histórico em que suas obras foram publicadas, reconhecendo a gênese de suas ideias como resultado de suas reflexões influenciadas por teóricos anteriores e do debate com seus antagonistas contemporâneos.

Na análise textual, a finalidade consiste em buscar uma visão panorâmica que explicite o conjunto do raciocínio do autor (SEVERINO, 1996, p. 52). Nesta etapa, buscamos compreender a problemática em que figuram as considerações de Poincaré sobre as Ciências e a Matemática, mediante análises e reflexões bibliográficas acerca da validade e consistência de suas ideias no embate filosófico e científico instaurado na transição dos séculos XIX e XX.

Na etapa da análise temática, de posse dos instrumentos de expressão usados pelo autor, do sentido unívoco de todos os conceitos, e ainda, das principais referências e alusões utilizadas por ele, passamos à etapa da compreensão da mensagem global veiculada às unidades analisadas. (SEVERINO, 1996, p. 53). Sendo assim, nossa leitura buscou nesse momento perceber a compreensão de Poincaré acerca da importância das hipóteses para a constituição do conhecimento científico.

Com relação à análise interpretativa, Severino (1996, p. 56) aponta que esta, por ser a última etapa da leitura analítica, é a mais difícil e delicada, uma vez que os riscos de interferência da subjetividade do leitor são maiores.

De acordo com Severino (1996, p. 56), interpretar “[...] é tomar uma posição própria a respeito das ideias enunciadas, é superar a estrita mensagem do texto, é ler nas entrelinhas, é forçar o autor a um diálogo, é explorar toda a fecundidade de ideias expostas, é cotejá-las com outras, enfim, é dialogar com o autor”.

Considerando tais afirmações de Severino (1996), nessa fase de leitura, voltamos nossa atenção para as possíveis considerações e inferências que se mostravam passíveis de serem feitas ao relacionarmos a classificação das hipóteses realizada por Poincaré e a ideia do “recorte da realidade” contida na literatura de MM no contexto da Educação Matemática. Nesta interpretação, exercemos uma atitude crítica diante das posições do autor em termos de:

> a) coerência interna da argumentação;
> b) validade dos argumentos empregados;
> c) originalidade do tratamento dado ao problema;
> d) profundidade de análise ao tema;
> e) alcance de suas conclusões e consequências;
> f) apreciação e juízo pessoal das ideias defendidas. (SEVERINO, 1996, p. 60).

Enquanto as análises textual, temática e interpretativa se mostram eficazes para a coleta das informações mediante uma leitura sistematizada, as duas últimas etapas apontadas por Severino (1996), a problematização e a síntese pessoal, são indicadas mais especificamente às fases que contemplam a discussão e análise dos textos selecionados. Dessa forma, tanto o levantamento e debate das questões explícitas ou implícitas nos textos analisados, quanto à elaboração de textos com nossas reflexões sobre as relações identificadas entre a classificação das hipóteses de Poincaré e a construção da "realidade intermediária" segundo as considerações de Negrelli (2008) e Cifuentes e Negrelli (2009, 2011), foram feitas de forma concatenada com a nossa interpretação.

Tendo em vista que a nossa interpretação está direcionada para o processo da MM na sua acepção tradicional, como é defendida por Bassanezi (2002), na seção seguinte, apresentamos como podemos olhar para a formulação de hipóteses na MM para concebê-la como um método de pesquisa.

## 3.3. A Modelagem Matemática como Método de Pesquisa: Um olhar sobre o processo de Formulação de Hipóteses

A maneira pela qual a linguagem matemática é utilizada para descrever os fenômenos da realidade deve aliar a abstração e a formalização de maneira equilibrada, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo. Neste contexto, considerando-se a necessidade de se formalizar aquilo que se abstrai, a Matemática atua, permitindo a construção de teorias científicas. Isso conduz ao que se convencionou chamar de Matemática Aplicada. Cujo início declarado ocorreu no começo do século XX (BASSANEZI, 2002, p. 18).

De acordo com Bassanezi (2002), "a Matemática Aplicada moderna pode ser considerada a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática." (p. 32).

Neste sentido, podemos reconhecer na modelagem a característica de método de pesquisa da Matemática Aplicada. Isso se evidencia quando Cifuentes (2013, p. 1) afirma que "a modelagem matemática, como área do conhecimento, é tradicional e metodologicamente ligada à Matemática Aplicada". Hall (1978 *apud* BASSANEZI, 2002, p. 33) afirma que:

> A modelagem matemática, com toda sua abrangência e poder de síntese, é por excelência o método científico usado nas ciências factuais[13] – sua larga esfera de aplicação e variedade das ideias matemáticas utilizadas podem ser melhor expressas examinando-se suas atuais áreas de pesquisa.

---

[13] As ciências factuais são todas aquelas que se referem a fatos. Nelas estão compreendidas as ciências naturais e sociais.

Nessa perspectiva, para Bassanezi (2002, p. 24), a MM é tanto "um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos", quanto a "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (p. 16).

Com relação à sua característica de método de pesquisa, entendemos que é relevante e necessário um estudo que procure uma compreensão sobre a origem e funcionamento de seus processos, ou seja, uma metodologia.

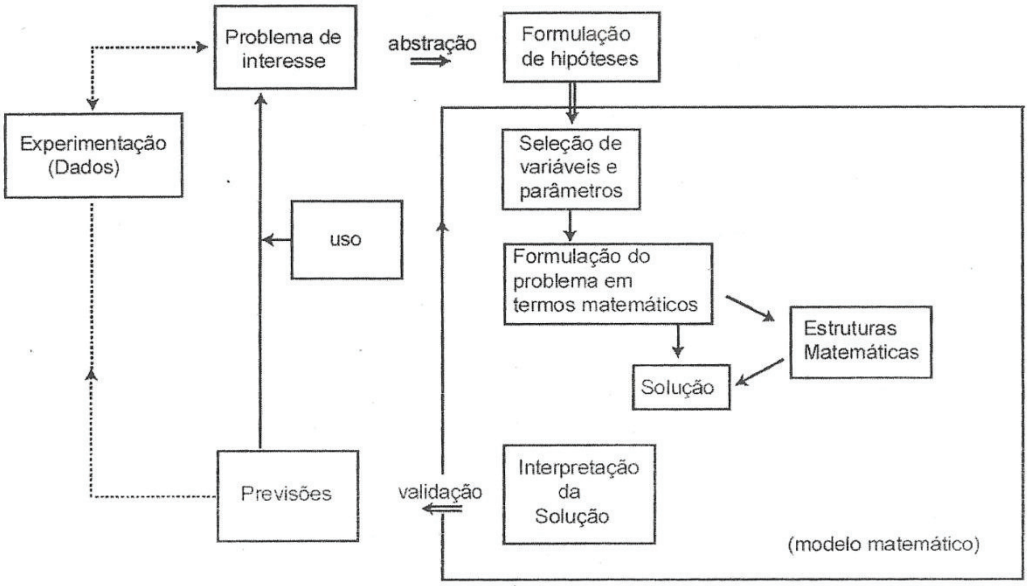
Abbagnano (2007, p. 780) destaca que o termo metodologia pode apresentar quatro significados distintos: "1ª lógica ou parte da lógica que estuda os métodos; 2ª lógica transcendental aplicada; 3ª conjunto de procedimentos metódicos de uma ou mais ciências; 4ª a análise filosófica de tais procedimentos". Aqui, nesta discussão, estamos compreendendo a metodologia segundo o 4º significado, pelo fato dele sugerir uma abordagem reflexiva sobre os procedimentos envolvidos na Modelagem.

No que diz respeito aos métodos e procedimentos da Modelagem, Anastácio (2010, p. 6) assinala que estes "[...] sintonizam-se com as ideias de Galileu e Descartes e assumem uma concepção de realidade como algo em si, que apesar de sua complexidade, é possível de ser traduzida na linguagem matemática." Essa ideia advém da concepção de conhecimento difundida no ocidente, influenciada pela Ciência Moderna que, por sua vez, contou com a contribuição da Matemática para se firmar. (ANASTÁCIO, 2010).

Corroborando isso, Cifuentes (2013, p. 5) destaca que, na base da MM, está o método científico moderno, conforme fora sistematizado por Galileu no século XVI e compreendido como técnica e como filosofia.

Assim, analogamente ao método galileano, a MM também é constituída de etapas que, de acordo com Bassanezi (2002), são organizadas por atividades diferenciadas, conforme pode-se observar na figura que se segue

**Figura 1:** Divisão de atividades intelectuais envolvidas no processo de MM




**Fonte:** Bassanezi (2002, p. 32).

Além das definições e descrições apresentadas com relação à MM, Ubiratan D'Ambrosio, no prefácio na obra de Bassanezi (2002, p. 13), afirma que a "modelagem matemática é matemática por excelência".

A MM seria, ao mesmo tempo, Matemática servindo como linguagem das ciências e método científico que fundamenta e direciona o processo da construção científica.

Com relação à função de aplicabilidade da Matemática aos fenômenos não matemáticos, a MM apresenta uma característica diferenciada quando comparada às outras formas de aplicação como, por exemplo, a resolução de problemas e a investigação.

De acordo com Bean (2001, p. 5), "os aspectos que distinguem a modelagem matemática de outras aplicações em matemática são as exigências das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação do modelo". Segundo ele, tal exigência revela a essência da modelagem, que consiste em um processo que cria modelos matemáticos sempre abertos a críticas e aperfeiçoamentos.

Esse aspecto inerente à MM nos remete à própria constituição do pensamento científico, que se fundamenta e se inicia com a formulação de hipóteses (POINCARÉ, 1988), o que nos permite reconhecer na MM as características de um método de pesquisa que se configura essencialmente a partir dos mesmos pressupostos que a Ciência.

Entendemos que esta relação entre a Ciência e a MM é intrínseca. Cifuentes (2013, p. 5) aponta que o método científico moderno "está no espírito de todo o processo de modelagem matemática de uma situação 'real'".

No contexto dessas considerações, sobretudo com relação ao papel das hipóteses, vale destacar também a interpretação epistemológica realizada por Negrelli (2008), na qual ela destaca que a importância da formulação de hipóteses reside essencialmente em produzir um recorte da realidade a ser modelada matematicamente.

Entendemos que, de forma implícita e intrínseca a tais ideias, possa ser inferida uma compreensão na qual um olhar para as hipóteses no contexto da MM tenha o potencial de nos oferecer subsídios para o conhecimento de um recorte da realidade, assim como se é vivenciado no contexto de uma pesquisa científica, em que se faça presente a configuração de um espírito científico que questiona, conjectura, testa e experimenta.

Ao considerarmos a MM enquanto um método de pesquisa na qual a formulação de hipóteses constitui uma etapa essencial de seu processo e, ainda, a maneira como Poincaré compreende o papel das hipóteses na constituição do conhecimento científico, na seção seguinte, apresentamos a forma como tais ideias são consideradas no contexto das interpretações da formulação de hipóteses na MM. Para esta apresentação, utilizamos como teorias fundamentais a classificação dos tipos de hipóteses de Poincaré e a ideia dos recortes da realidade proporcionados pela formulação de hipóteses.

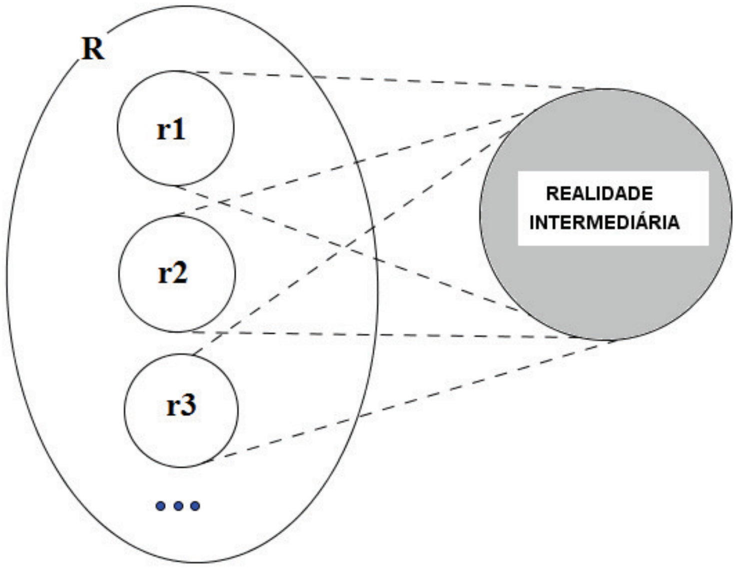
## 3.4. Um olhar para as Hipóteses de Poincaré em atividades de Modelagem Matemática

As interpretações que pretendemos fazer são essencialmente de natureza epistemológica derivada (JAPIASSÚ, 1986), ou seja, não pretendemos causar uma mudança nos procedimentos da formulação de hipóteses na MM. Nosso objetivo consiste em apresentar uma forma como as hipóteses podem ser compreendidas em uma atividade em que a MM se faça presente.

As abordagens que utilizamos para a interpretação estão pautadas na concepção de realidade intermediária de Negrelli (2008), Cifuentes e de Negrelli (2009, 2011), construída por meio da formulação de hipóteses. Por esse motivo, aliado à consideração de que os fundamentos epistemológicos da MM podem ser expressos em termos de filosofia das ciências naturais e exatas (KLÜBER, 2007), optamos pelos pressupostos epistemológicos de Poincaré. Essa escolha, além de se justificar pelos fatores apresentados anteriormente, também ganha força pelo fato de o pensamento poincareriano representar um marco na virada dos séculos XIX e XX, época em que, segundo Bassanezi (2002), a Matemática Aplicada teve o seu início declarado.

Uma maneira de ilustrar a ideia da realidade intermediária seria considerar o esquema a seguir, no qual a realidade como um todo é representada pela elipse maior R, os recortes pelos círculos denominados r1, r2, r3, as hipóteses pelos contornos dos círculos (circunferências) e o recorte considerado em determinada situação pela área hachurada, denominada realidade intermediária. Salientamos, entretanto, que este esquema não tem a intenção de representar uma ordem de importância ou linearidade entre os recortes. Foram enumerados apenas com o objetivo de diferenciá-los.

**Figura 2:** Esquema dos recortes da realidade




**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Além desta ideia, evidenciamos na sequência os critérios que nortearam a forma como consideramos os diferentes tipos de hipótese de Poincaré para a realização das interpretações. Procedemos assim por entendermos que, quando utilizamos a categorização poincareriana das hipóteses com a intenção de interpretar problemas de MM no contexto da Educação Matemática, faz-se necessário, por questões de ordem metodológica, explicitar a forma como tais ideias são consideradas nas interpretações.

Dessa forma, apresentamos a seguir subseções, contendo as principais características de cada um dos tipos de hipótese a partir de fragmentos da obra "A ciência e a hipótese", de Poincaré, juntamente aos aspectos que julgamos refletirem tais características em descrições de atividades de MM no contexto da Educação Matemática.

### 3.4.1. Hipóteses naturais

Este tipo de hipótese recebe o nome de hipótese natural, mas não porque o objeto é natural em si, mas por natural para cada sujeito que o percebe.

Por meio das hipóteses naturais, é possível revelar o caráter interpretativo idiossincrático dos sujeitos que, ao investigarem uma realidade comum a todos, constrói realidades intermediárias distintas. Estas realidades intermediárias são delimitadas pelos parâmetros de homogeneidade, simplicidade, regularidade, dentre outros (POINCARÉ, 1946). No entanto, os diversos graus de significação e relevância que podem ser atribuídos às características de tais parâmetros dependerão de cada sujeito modelador, que vê, interpreta, significa o mundo cada um a sua maneira.

De acordo com Poincaré (1988, p. 122), as hipóteses naturais constituem o fundo comum de todas as teorias físico-matemáticas, sendo estas as últimas a serem abandonadas, e as quais podemos assumir como sendo afirmações que tem como fundamento as intuições e o exercício não explicitado do pensamento. Entendemos que, no contexto de um problema, elas estejam presentes de maneira implícita em todas as hipóteses enunciadas, inclusive nas simplificações, que servem de base para a configuração da realidade intermediária.

Segundo Poincaré (1988), elas são as últimas a serem abandonadas muito provavelmente por serem tácitas, ou seja, muitas vezes até inconscientes do próprio sujeito que as considera. No nosso entendimento, tal característica é consequência da forma com que são selecionados os elementos da realidade inicial, que tem como primeiro guia a intuição (percepção-interpretação) do modelador.

Essas hipóteses, na maioria das vezes, não podem ser explicitadas pelos sujeitos que as consideram e, por sua vez, não são exprimíveis por meio de uma linguagem. Por isso, sublinhamos que, por estas constituírem o fundo comum das outras hipóteses e consequentemente de toda a investigação científica, sinalizam uma compreensão na qual podemos identificá-las em atividades de MM no contexto da Educação Matemática como sendo teorias globais que direcionam (delimitam) os encaminhamentos teóricos e práticos, tanto dos professores, quanto dos alunos.

Dessa forma, no contexto das interpretações deste trabalho, entendemos que o papel das hipóteses naturais se assemelha àquele das premissas enunciadas por Bean (2012), que em conjunto com os pressupostos configuram o recorte da realidade denominado por ele de isolado.

Para Bean (2012, p. 16) "as premissas servem como bases para o pensamento dos modeladores. Atuam como diretrizes que delimitam de forma global, na qual os modeladores enxergarão a situação e, consequentemente, influenciarão a conceituação da situação".

Com isso, entendemos que certas opções realizadas no decorrer da atividade de MM são influenciadas pela adoção de teorias que configuram o contexto no qual se desenvolve a atividade. Como exemplo citamos a concepção de MM considerada no contexto de uma atividade. Consideramos que os focos de interesse que direcionam as escolhas necessárias para as formulações de hipóteses (indiferentes ou físicas) dependem da concepção de MM (hipótese natural – premissa) adotada.

Essa afirmação, entretanto, não significa que as hipóteses naturais possam ser completamente identificadas nos textos analisados, mas que as opções por determinados encaminhamentos didáticos sugerem distintas opções e ações no decorrer da atividade.

### 3.4.2. Hipóteses indiferentes

Entendemos que este tipo de hipótese, além de estar diretamente ligado ao papel da linguagem na constituição do pensamento científico (POINCARÉ, 1988), representa, no contexto dos problemas interpretados, todas as afirmações relacionadas às estratégias e sugestões de encaminhamentos didáticos sugeridos pelos autores no decorrer das descrições das resoluções, pois, este tipo de hipótese pode nos ser útil "[...] seja como artifícios de cálculo, seja para apoiar nosso entendimento mediante imagens concretas, para clarear nossas ideias, como se diz" (POINCARÉ, 1988, p. 122).

Além das hipóteses indiferentes estarem presentes na formalização dos problemas em linguagem matemática, essas podem ser identificadas também no encaminhamento de toda a atividade, desde a coleta dos dados até as opções necessárias para a restrição de tais dados. Como exemplo de tais ideias, citamos um caso em que as hipóteses físicas podem ser consideradas indiferentes.

Tendo em vista que a formulação das hipóteses físicas é condicionada por escolhas metodológicas e que estas são definidas, entre outros fatores, pelas experiências e conhecimentos prévios que o sujeito possui com relação ao objeto investigado, elas também podem ser indiferentes, devido à particularidade das escolhas de cada um. Dois sujeitos, mesmo utilizando métodos e instrumentos distintos um do outro, teriam a possibilidade de dar respostas coerentes ao problema considerado. Entendemos que respostas distintas não seriam vistas como erradas, pois estariam de acordo com os raciocínios empregados desde o início da resolução do problema. Ou seja, dependendo da coerência das respostas apresentadas, elas seriam indiferentes à solução do problema.

### 3.4.3. Hipóteses físicas

Do ponto de vista da verificação empírica, essas podem ser reconhecidas como todo o conjunto de conhecimentos que fundamentam a escolha dos instrumentos e procedimentos a serem utilizados na etapa da abstração dos dados empíricos.

A verificabilidade, condicionada pelos instrumentos e procedimentos escolhidos pelo sujeito, permite que tais hipóteses possam ser investigadas a fim de serem refutadas ou, então, aceitas e incorporadas como leis científicas na gama dos conhecimentos socialmente construídos pelo homem. Segundo Poincaré (1988, p. 122), “verificadas, ou condenadas, elas poderão ser fecundas”.

Com relação à realidade intermediária, as hipóteses físicas, também chamadas por Poincaré de leis de generalização, são os modelos construídos com vistas à adequação empírica da situação em questão. Todo modelo matemático é também uma hipótese e uma teoria. É a lei enunciada, conjecturada, verificável e falseável, ou seja, científica.

Entendemos que, no contexto dos problemas interpretados, as hipóteses físicas figuram tanto na etapa da Pesquisa Exploratória, na qual são coletados os dados iniciais, quanto nas considerações dos alunos que, durante a elaboração dos modelos matemáticos, refletiram sobre as possibilidades de adequação empírica das fórmulas.

O interesse constante dos alunos em obter um modelo matemático que represente a situação problema da forma mais fiel possível com os dados coletados no contexto real representa um conjunto de hipóteses físicas, pois sinaliza que, ao mesmo tempo em que os alunos se envolvem na atividade de MM, também refletem empiricamente.

# CAPÍTULO 4

# INTERPRETAÇÕES DE PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA SOB A ÓTICA POINCARERIANA

Neste capítulo, apresentamos interpretações de três problemas de Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática, para as quais nos fundamentamos na classificação e concepção de hipótese de Poincaré (1988) e na configuração da realidade intermediária a partir dos recortes da realidade (NEGRELLI, 2008).

Primeiramente, apresentamos os critérios bem como as justificativas que nos direcionaram para a escolha dos problemas que serviram de base para nossas interpretações. Elencamos o porquê da escolha dos livros, das seções e dos capítulos que continham os problemas.

Na sequência, apresentamos as interpretações para cada um dos três problemas, procedendo da seguinte maneira:

1) Descrevemos a atividade de MM desenvolvida.

2) Destacamos os recortes da realidade envolvidos no contexto de cada problema a partir da consideração do diagrama apresentado no capítulo 3. (Ver Figura 2, pág. 56),

3) Identificamos e reescrevemos as hipóteses, classificando-as de acordo com os tipos de hipóteses de Poincaré e justificando o porquê das escolhas da classificação.

## 4.1. A Seleção dos Problemas Analisados

Considerando que nosso objeto de estudo é a formulação de hipóteses na MM no âmbito da Educação Matemática, acreditamos ser coerente escolher obras que retratem o que atualmente vem sendo pesquisado e discutido nacionalmente com relação à MM no contexto da Educação Matemática.

Optamos pelos livros "Modelagem matemática na educação básica", organizado e escrito pelos professores Lourdes Maria Werle de Almeida, Karina Pessoa da Silva e Rodolfo Eduardo Vertuan, e "Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas", coordenado pelas professoras Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin.

Com relação às justificativas da escolha do primeiro livro citado, sublinhamos que este foi escolhido por ter sido escrito com o intuito de proporcionar aos professores oportunidades de acesso às diferentes possibilidades de integração de atividades de Modelagem Matemática às aulas, bem como a outras atividades já desenvolvidas, com a expectativa de que se criem perspectivas otimistas em relação ao uso da modelagem em sua prática docente.

A obra é composta de 20 capítulos, agrupados em três partes, nas quais são apresentados os seguintes assuntos: Parte I: Fundamentações teóricas para a modelagem matemática; Parte II: Dez atividades de modelagem desenvolvidas por estudantes ou professores de educação básica, abordando temas como marés, reciclagem, salários, entre outros de interesse daqueles grupos; e Parte III: Seis atividades para as quais são apresentados alguns dados relativos a um tema a ser investigado.

Dentre as partes referidas, optamos pela Parte II, que contém, além das atividades, as soluções efetuadas pelos alunos e/ou professor no decorrer das atividades. Especificamente, escolhemos o problema inserido no Capítulo 2: "E eu pergunto: tem calça de qual tamanho?" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 48).

Com relação ao segundo livro, além do exposto, a relevância de sua escolha se deu por este ser a mais atual obra organizada pelo Grupo de Trabalho (GT) de Modelagem Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). E, ainda, pelo fato de as organizadoras terem convidado autores de diferentes grupos envolvidos com a temática no Brasil, com a finalidade de oferecer aos leitores um panorama nacional das práticas de modelagem na área da Educação Matemática.

O livro possui 14 capítulos agrupados em quatro seções: 1 - Modelagem Matemática: encaminhamentos para a sala de aula; 2 – Os professores e a Modelagem Matemática; 3 – As tecnologias da informática na Modelagem Matemática; 4 – Modelagem Matemática em espaços extracurriculares. Dentre as referidas seções, optamos pela seguinte: "1 – Modelagem Matemática: encaminhamentos para a sala de aula". Essa escolha se deu por considerarmos o foco de nosso trabalho, ou seja, a formulação de hipóteses em aulas de MM, algo inerente aos encaminhamentos de MM para a sala de aula.

A seção 1 contém sete capítulos que tratam de possíveis encaminhamentos para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática nas aulas de Matemática em diferentes níveis de escolaridade.

Levando em consideração os argumentos de Demo (2011), que em seu livro "Educar pela Pesquisa" assinala que a perspectiva de Educação Científica consonante com os princípios do Ensino por Pesquisa (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE 2000) é mais presente nas práticas educacionais no nível superior e que há a necessidade de tais práticas serem fomentadas no âmbito da Educação Básica, restringimos ainda mais nosso universo de pesquisa para dois capítulos da seção 1, adotando como critério escolher aqueles que apresentassem encaminhamentos direcionados para a Educação Básica.

Dessa forma, os problemas selecionados foram aqueles contidos no capítulo 2 - Qual o potencial de crescimento físico da indústria? (BURAK; KLÜBER, 2011, p. 45, *in* ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN, 2011); e no capítulo 3 - Quanto custa ter uma sala de informática? (CALDEIRA; SILVEIRA; MAGNUS, 2011, p. 65, *in* ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN, 2011).

Apesar dos três capítulos dos dois livros selecionados terem sido escolhidos basicamente a partir do mesmo critério, ou seja, que apresentassem descrições de atividades de MM desenvolvidas em sala de aula no âmbito da Educação Básica, ressaltamos uma particularidade com relação à natureza da escrita dos dois livros. Os mesmos se diferem principalmente por um ser de caráter prescritivo e o outro descritivo.

Enquanto Almeida, Silva e Vertuan (2012) apresentam atividades desenvolvidas por eles como propostas a serem implementadas, os capítulos contidos em Almeida, Araújo e Bisognin (2011) constituem-se de relatos de experiência vivenciados, ou seja, propostas já implementadas. Salientamos isso por considerarmos que nossas interpretações dos problemas, apesar de seguirem os mesmos pressupostos, sugerem análises diferenciadas quando realizadas sob perspectivas distintas.

## 4.2. Problema 1: Tem calça de qual tamanho? (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, P. 48)

Objetivando contextualizar o problema a ser investigado, inicialmente, Almeida, Silva e Vertuan (2012) apresentam o problema a partir de um texto introdutório em que é situada a questão dos padrões de medidas utilizados nos vestuários.

Em seguida, é apresentado o tema da atividade de MM a ser realizada, a qual consiste em uma investigação acerca do “tamanho (numeração) da calça jeans de uma pessoa de acordo com suas medidas” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 48).

Em decorrência do tema focado, os autores destacam que as perguntas iniciais podem surgir como um meio de impulsionar a investigação, conduzindo à formulação de algumas hipóteses e simplificações importantes para a formulação do problema a ser investigado: “a numeração de calças utilizadas para homens é a mesma numeração utilizada para mulheres? Calças jeans têm numeração diferente daquela usada para outros tipos de calças? Quais medidas do corpo humano são levadas em consideração para definir a numeração da calça jeans?”.

A partir do levantamento das questões iniciais, algumas considerações são feitas no sentido de delimitar o problema a ser investigado.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) salientam:

> [...] discutir a questão referente às medidas do corpo humano que são consideradas para estabelecer a numeração da calça jeans implica considerar se o objeto de investigação é a numeração da calça jeans masculina ou feminina. Escolher a calça jeans feminina remete, por sua vez, à discussão de que parte do corpo é determinante para definir a numeração da calça. Neste texto, considerar-se-á a medida do quadril já que, se a calça passar pelo quadril, mesmo ficando um pouco larga na cintura, pode ser adaptada com o uso de algumas pences. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 48).

Dessa forma, é enunciado o seguinte problema: Conhecida a medida do quadril de uma mulher, qual o número de sua calça jeans?

É ressaltado pelos autores que, para a solução deste problema, faz-se necessário uma coleta de informações, seja ela de modo empírico, realizando medidas em algumas pessoas, ou por meio de pesquisa bibliográfica. Eles escolhem a última opção e apresentam os seguintes dados obtidos na revista Manequim, edição 551, de novembro de 2005.

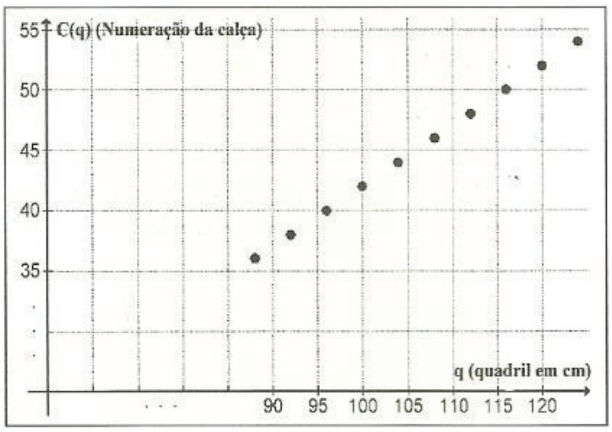
**Tabela 1**: Número da calça e medida do quadril

| Quadril | 88 | 92 | 96 | 100 | 104 | 108 | 112 | 116 | 120 | 124 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº da calça | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 |

**Fonte:** Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 48).

A partir dos dados da tabela é sugerido um estabelecimento entre as variáveis em que são utilizadas as correspondências: C = número da calça (variável dependente) e q = medida do quadril, em centímetros (variável independente). Em seguida, é construído um gráfico discreto com a finalidade de observar a tendência dos dados.

**Figura 3:** Pares ordenados (q, C)



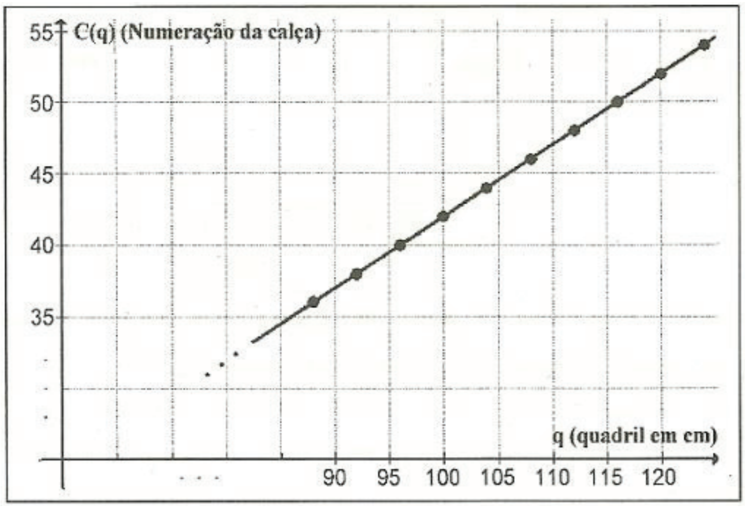

**Fonte**: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 49).

A partir da observação dos pontos, os autores levantam a hipótese de que uma função polinomial do primeiro grau pode se ajustar aos dados. Com isso, eles sugerem que se tomem dois pares ordenados quaisquer e se monte um sistema, a fim de obter uma função do primeiro grau que represente a situação.

Assim procedendo, são obtidos os seguintes modelo e gráfico:

Modelo: $C(q)=\frac{1}{2}q-8$, onde q é a medida do quadril em centímetros e C(q) a numeração da calça.

**Figura 4:** Esboço do modelo: $C(q)=\frac{1}{2}q-8$




**Fonte**: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 49).

Os autores chamam a atenção para o fato de que, apesar do modelo e do gráfico se ajustarem aos dados da tabela, também deve ser levado em consideração que as medidas de quadril elencadas são todas múltiplas de 4 e, portanto, caso haja a necessidade de se calcular o número da calça de uma mulher, cujo tamanho do quadril não esteja na tabela, o modelo apresentado não serve.

Dessa forma, é decidido agrupar os dados em uma tabela, na qual as medidas dos quadris estejam distribuídos em intervalos de valores, considerando que uma pessoa com 89cm de quadril deverá comprar uma calça de numeração 38 e não 36, por esta última possibilitar ajustes.

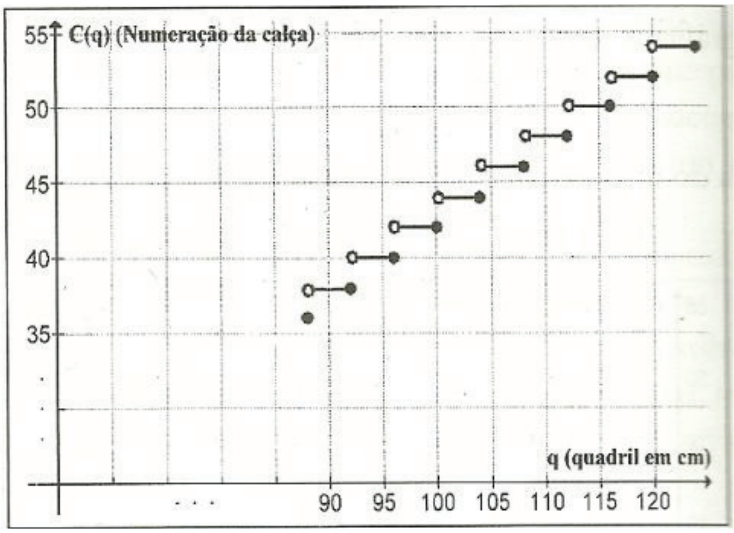
**Tabela 2:** Número da calça e medida do quadril em intervalos

| Quadril (cm) | Nº da calça |
|---|---|
| 88 | 36 |
| (88, 92] | 38 |
| (92, 96] | 40 |
| (96, 100] | 42 |
| (100, 104] | 44 |
| (104, 108] | 46 |
| (108, 112] | 48 |
| (112, 116] | 50 |
| (116, 120] | 52 |
| (120, 124] | 54 |

**Fonte:** Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 50).

Organizando tais dados graficamente temos:

**Figura 5:** Gráfico considerando os valores da tabela 2




**Fonte:** Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 50).

Para os dados contemplados nos intervalos dos múltiplos de 4, é considerada a função maior inteiro $C(q) = 2\left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor - 8$.

Apesar do problema aparentemente estar resolvido, "[...] esse modelo sempre associa a uma determinada medida de quadril um número de calça menor do que deveria ser". (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 51). Contudo, o problema pode ser solucionado ao se acrescentar 1 ao maior inteiro $\left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor$ antes de multiplicá-lo por dois, da seguinte forma:

$$C(q) = 2\left\lfloor \frac{q}{4} + 1 \right\rfloor - 8\,.$$

Para finalizar, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 52) salientam que um modelo que representa tal situação pode ser uma função por partes definida por:

Se q = 4n,

$$C(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}q - 8, & se \quad q = 4n, \quad e \quad 88 \le n \le 124 \\ 2\left(\left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor + 1\right) - 8, & se \quad q \ne 4n, \quad e \quad 88 \le n \le 124 \end{cases}$$

Em que a função polinomial do primeiro grau representa as medidas dos quadris, cuja medida é múltipla de 4, e a função maior inteiro para valores de q não múltiplos de 4.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 52), ao se reportarem à forma como se deu a validação e discussão da solução encontrada, destacam:

> Nessa situação, a validação se deu no curso do desenvolvimento da investigação, interpondo sempre os modelos obtidos com as hipóteses e informações iniciais – passo a passo. Pode-se dizer, então, que, na situação, os modelos obtidos eram analisados frente às hipóteses e às informações iniciais, o que orientava o encaminhamento da atividade. No entanto, para validar o modelo matemático, pode-se, ainda, atribuir diferentes valores para o quadril e relacioná-los à numeração da calça jeans [...]. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 52).

Entendemos que essas considerações refletem a importância da formulação das hipóteses não apenas para a construção do modelo matemático que resolveria o problema, mas também para o encaminhamento da atividade como um todo, cujo pano de fundo são os conhecimentos construídos a partir de conjecturas e refutações.

#### 4.2.1. Interpretação do Problema 1

Entendemos que a configuração daquilo que Negrelli (2008) compreende por realidade intermediária, além de ser resultado da formulação das hipóteses explicitadas pelos autores, também é influenciada pelas simplificações decorrentes das primeiras indagações que culminaram com o problema de investigação e, ainda, da opção por trabalhar com dados bibliográficos, ao invés de realizar medições empiricamente em um determinado grupo de pessoas.

Tais hipóteses, sejam elas explícitas ou implícitas à formulação e resolução do problema, possibilitaram um direcionamento àquilo que se pretendeu investigar por meio de recortes sucessivos da realidade.

No contexto deste problema, ao considerarmos as indagações iniciais que determinaram o problema a ser investigado e modelado, o primeiro recorte (r1) realizado na realidade (R) refere-se à delimitação do tema, que consistia em investigar as relações entre a numeração da calça jeans de uma pessoa e suas medidas.

Em um segundo momento (r2), dentre os sexos, foi escolhido o feminino e, ainda, foi determinada a parte do corpo que influencia na definição da numeração da calça jeans, o quadril.

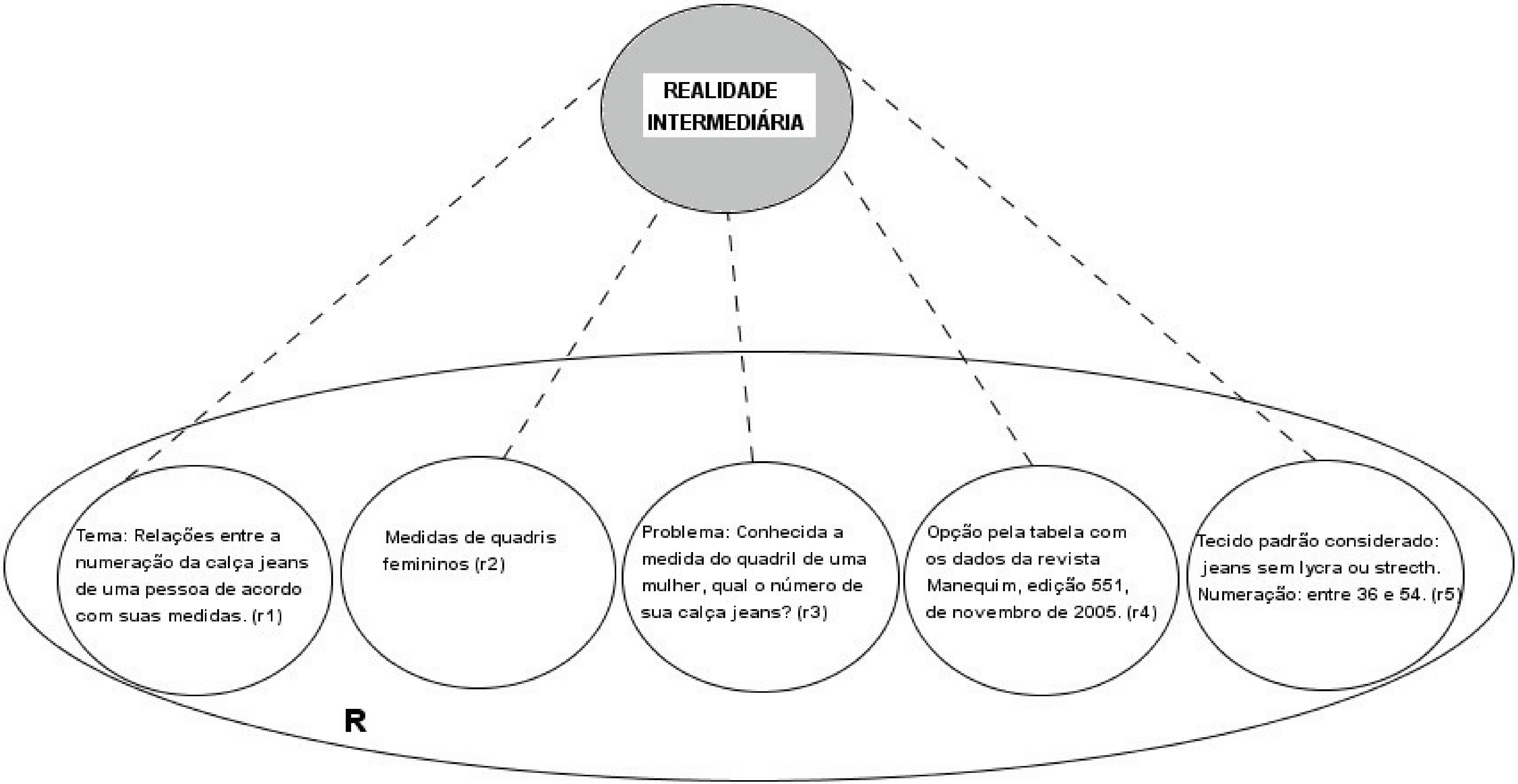
O terceiro recorte (r3) se refere à delimitação do problema de pesquisa, que consistiu no seguinte: “Conhecida a medida do quadril de uma mulher, qual o número de sua calça jeans?”.

Para investigar o problema enunciado, fez-se uso da tabela com os dados da revista Manequim, edição 551, de novembro de 2005. Consideramos que a opção por esta tabela represente o recorte (r4), pois esta era composta de valores padronizados que apontavam para existência da numeração exata das calças apenas para quadris femininos múltiplos de 4.

Considerando a diversidade étnica do mundo, em que as medidas dos quadris são as mais variadas, essa padronização restringe, delimita, por assim dizer, um determinado grupo. Em decorrência disso, constantemente são necessárias adaptações do modelo que representa a situação. Caso o grupo que serviu para a coleta dos dados que resultaram nas informações contidas na tabela inicial fosse outro, o recorte da realidade e o modelo resultante da investigação também seriam outros.

De posse das informações contidas na tabela, a opção em considerar o jeans sem lycra ou stretch e a numeração entre 36 e 54 representa para nós o recorte (r5). Interpretamos dessa forma porque a escolha do material da calça e o intervalo de numeração considerado implicam diretamente na adequação empírica do modelo matemático representativo da situação.

**Figura 6:** Esquema dos recortes da realidade referente ao Problema 1




**Fonte**: Elaborado pelo autor.

Com relação às hipóteses utilizadas para a delimitação do problema, utilizadas para a caracterização dos recortes da realidade descritos na Figura 6, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 53) elencam as seguintes:

- A medida do quadril é determinante para a numeração da calça jeans feminina. Por isso, é possível estabelecer uma relação entre a medida do quadril e a numeração da calça correspondente.
- Considera-se que uma pessoa com quadril 89 cm, por exemplo, compre uma calça de numeração 38 e não 36, uma vez que esta última ficaria apertada e não possibilitaria ajustes;
- Uma hipótese provisória é de que os dados ajustam-se a uma função polinomial do primeiro grau.
- É preciso utilizar uma função definida por partes. Na primeira parte, as numerações de calça jeans, números múltiplos de 4, são ajustadas por uma função do primeiro grau. As demais numerações são ajustadas via função maior inteiro.

Para os fins deste estudo selecionamos e interpretamos outras hipóteses implícitas à situação investigada, as quais relacionamos na sequência de acordo com a classificação poincareriana.

Com relação a esta classificação, assinalamos que, de acordo com Poincaré, dependendo da perspectiva em que são consideradas as hipóteses, são revelados aspectos característicos às situações analisadas.

**Hipóteses naturais**

As hipóteses deste tipo representam teorias que delimitam de forma global os encaminhamentos teóricos e práticos que se dão no decorrer de uma atividade, direcionando e ao mesmo tempo condicionando a maneira com que se configuram as relações entre professor, aluno e conhecimento.

No contexto da descrição deste problema, apesar dos autores não mencionarem as teorias epistemológicas e educacionais subjacentes ao encaminhamento da atividade, entendemos que as ideias delineadas na Parte I “Modelagem Matemática na Educação Matemática: o que é, por que usar e como usar?” referentes às concepções teórico-metodológicas adotadas no livro em questão, e, ainda, aquelas explicitadas no início da Parte II “Alguns problemas – Algumas Soluções”, em que se encontra o capítulo analisado, servem como diretrizes a compreensão, na perspectiva de uma teoria, por que certas ações e encaminhamentos se fazem presentes no contexto da atividade.

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 9),"A Modelagem Matemática constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático".

Nessa perspectiva,

> [...] uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Neste sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados), servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 12).

Como mencionamos anteriormente, o problema "E eu pergunto: tem calça de qual tamanho?", apesar de ter sido desenvolvido em sala de aula pelos autores do livro, é apresentado mais de forma prescritiva que descritiva. Por este motivo, não temos condições de identificar no problema as falas dos alunos que possam ter sido diretamente influenciadas pela concepção de MM adotada e que, em nosso entendimento, representam as hipóteses do tipo natural.

No entanto, ao restringirmos nossa atenção à forma como se deu o encaminhamento da atividade, percebemos que a concepção adotada pode ser identificada nos passos que resultaram do movimento da situação inicial para a situação final.

Como forma de explicitar o que ocorreu no contexto de cada etapa, e que tem como plano de fundo global a concepção de MM de Almeida, Silva e Vertuan (2012) que direcionou a atividade, os autores apresentam um quadro com as seguintes informações:

**Quadro 2:** Fases da Modelagem Matemática no contexto do problema “E eu pergunto: tem calça de qual tamanho?”

| |
|---|
| **Situação inicial (problemática)**<br>Numeração da calça jeans<br><br>**Inteiração**<br>Análise dos dados da revista<br>Definição do problema: Conhecida a medida do quadril de uma mulher, qual o número da sua calça jeans?<br><br>**Matematização e resolução**<br><br>Definição de hipóteses<br>Definição de variáveis<br>A matemática do problema<br>Modelo matemático da situação<br><br>**Interpretação e validação**<br>Análise da adequação do modelo para a definição da numeração de uma calça jeans feminina em função da medida do quadril.<br><br>**Situação final**<br>Um modelo matemático que relaciona a medida do quadril com a numeração da calça. |

**Fonte:** Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 53).

Além da configuração da atividade a partir das fases da MM explicitada no quadro 2, os autores também apresentam uma nota no final da atividade que, em nosso entendimento, também subentendem as hipóteses naturais, por expressar a forma com que se deu a passagem da situação inicial para a situação final.

> NOTA: Nessa situação, a validação se deu no curso do desenvolvimento da investigação, interpondo sempre os modelos obtidos com as hipóteses e informações e informações iniciais – passo a passo. Pode-se dizer, então, que, na situação, os modelos obtidos eram analisados frente às hipóteses e às informações iniciais, o que orientava o encaminhamento da atividade. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 52).

Essa nota evidencia o grau de importância atribuído pelos autores à identificação entre o modelo obtido e as informações ou hipóteses consideradas, o que se vincula ao modo como eles vêem o problema, ou seja, com as hipóteses naturais consideradas.

**Hipóteses indiferentes**

Pelo fato de as hipóteses indiferentes serem afirmações relacionadas às estratégias e aos encaminhamentos didáticos utilizados na atividade e representarem “degraus” necessários para apoiar nossos pensamentos (POINCARÉ, 1988), entendemos que se fazem presentes na passagem da situação inicial para a situação final como ferramentas de cálculo. Dessa forma, consideramos que as seguintes afirmações expressas pelos autores representam hipóteses deste tipo: “Sobre os dados se ajustarem a uma função do primeiro grau” e “A utilização de uma função definida por partes”.

Tais afirmações são indiferentes, pois entendemos que tanto a escolha por determinados tipos de funções quanto à forma como estas se apresentam se tratam de formalidades meramente convencionais, que dependem do grau de aproximação desejado no contexto da atividade. Outras formas de apresentação também possibilitariam respostas coerentes ao problema em questão, mesmo divergindo entre si. E, ainda, sabendo-se que todo modelo matemático é limitado e aproximado, adotar uma função ou outra, além de decorrer das intenções do professor ao propor a atividade aos alunos também representa a impossibilidade dos modelos matemáticos expressarem a realidade como um todo.

Respaldados na concepção poincareriana de hipótese indiferente, concebemos que tanto as estratégias quanto os encaminhamentos didáticos seguidos na atividade poderiam ser radicalmente outros, caso o público alvo fosse, por exemplo, alunos do ensino superior. Ou seja, considerando apenas mudanças convencionais no trato com os dados da realidade, a passagem da situação inicial para a situação final aconteceria satisfatoriamente e de maneira indiferente.

**Hipóteses físicas**

A hipótese física representa tanto o conjunto de conhecimentos relacionados à escolha dos instrumentos e procedimentos a serem utilizados na etapa da abstração dos dados da realidade, quanto as reflexões empíricas fomentadas no decorrer e no fechamento da atividade. Por isso, as afirmações “A medida do quadril é determinante para a numeração da calça jeans feminina” e “Uma pessoa com quadril 89 cm deve comprar uma calça de numeração 38” são exemplos de hipóteses do tipo física, pois conduziram os autores à construção de um modelo matemático com base nas evidências empíricas da situação.

Apesar de, no contexto deste problema em especial, não termos dados suficientes para analisar as hipóteses físicas formuladas pelos alunos, a forma pela qual os autores descrevem a atividade sinaliza que, caso esta seja aplicada, tem o potencial de suscitar outras discussões com relação à adequação empírica dos dados com a realidade.

### 4.3. Problema 2: Qual o potencial de crescimento físico da indústria? (BURAK; KLÜBER, 2011, P. 45)

O problema apresentado por Burak e Klüber (2011) tem como tema a transformação da argila em tijolos. Segundo os autores, tal interesse surgiu pela existência da indústria de cerâmica na cidade onde foi realizada a atividade, Ivatuba - PR, e, ainda, pelo fato da produção de tijolos representar uma atividade industrial de grande importância econômica para a região.

Voltada a apresentar possíveis encaminhamentos de MM para aulas de Matemática na Educação Básica, mais especificamente para o Ensino Fundamental, a atividade foi desenvolvida com estudantes da 1ª Série do Magistério e seguiu a perspectiva de MM como metodologia de ensino proposta por Burak (1992, 2004, 2006). Esta tem por princípios: 1) partir do interesse do grupo de pessoas participantes; e 2) os dados são coletados no ambiente de interesse do grupo. Orienta-se a partir das seguintes etapas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e 5) análise crítica das soluções.

Após a escolha do tema e a da pesquisa exploratória que envolveu visitas dos participantes da pesquisa a diferentes órgãos correlatos à atividade e à própria indústria de cerâmica, vários problemas foram levantados com a finalidade de focar em uma questão a ser investigada por todos os participantes da pesquisa.

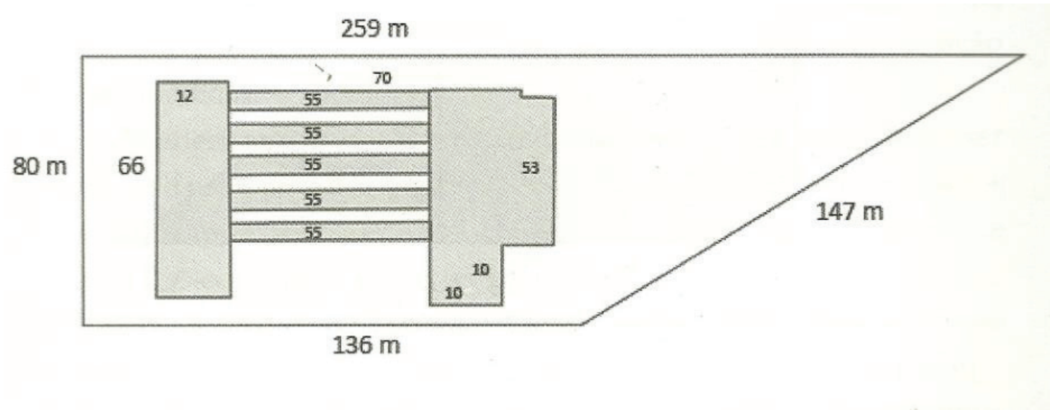
Os questionamentos iniciais levantados foram:

> Qual área total do terreno ocupado pela indústria? Qual a área construída? Qual o percentual do espaço construído em relação ao espaço total? Como é utilizada a queima de combustível (lenha) e qual a temperatura necessária para a secagem e queima da cerâmica? Qual a capacidade dos fornos? Qual a quantidade de lenha necessária para a produção de uma fornada? Qual a influência dos diferentes materiais utilizados na cobertura do barracão? Qual a capacidade de armazenamento dos barracões, sendo que as dimensões de cada tijolo de 6 furos são 20 cm de largura, 14 cm de espessura e 9,5 cm de comprimento? Quais os fatores que influenciam na alteração do tamanho dos tijolos ao sair da maromba e após o processo de queima? É possível construir uma expressão matemática que verifique esse processo? Qual a massa e o volume transportado nos carrinhos de mão, que comportam cerca de 50 ou 60 tijolos por vez? Como construir uma chaminé que atenda às necessidades da indústria cerâmica estudada? Qual seria a área lateral da chaminé? Qual o impacto socioeconômico e ambiental da indústria estudada na região e quais as consequências para o meio ambiente? (BURAK, KLÜBER, 2011, *in*: ALMEIDA; ARAÚJO; BISOGNIN, 2011, p. 53-54).

A partir de tais questionamentos iniciais, delineou-se a seguinte questão de pesquisa: “Qual o potencial de crescimento físico da indústria?”. Esta questão envolvia outros subproblemas inerentes a sua resolução, como, por exemplo: "Qual a área total do terreno ocupado pela indústria? Qual a área construída? Qual o percentual do espaço construído em relação ao espaço total?".

No âmbito da sala de aula, os primeiros encaminhamentos teve por base o seguinte desenho que representa a planta baixa do terreno que, de acordo com os dados coletados, continha apenas informações das dimensões laterais do terreno e das edificações.

**Figura 7:** Planta baixa

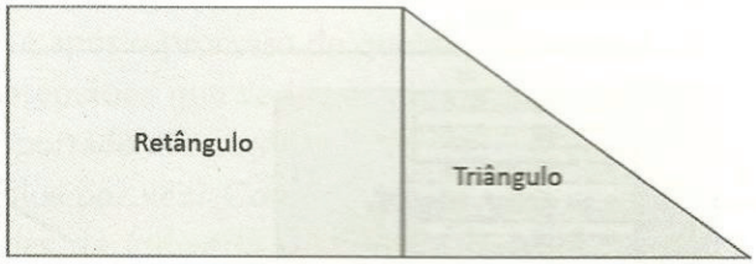



**Fonte:** Burak e Klüber (2011) in Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 55).

Tomando por base a planta da indústria, fornecida pela prefeitura e que oferecia apenas medidas lineares e não apresentava as áreas, e, ainda, que o potencial de crescimento da indústria poderia ser avaliado a partir de uma comparação das razões das áreas total e a utilizada, Burak e Klüber (2011) propõem o seguinte encaminhamento para a resolução do problema: 1) olhar a figura do terreno e desconsiderar as construções; 2) considerar apenas as construções; e 3) verificar a razão entre a área utilizada e a área total.

Com a finalidade de potencializar e simplificar os procedimentos de cálculo necessários para o cumprimento de tal encaminhamento, é mencionada a possibilidade de decompor a figura do terreno em duas: um triângulo e um retângulo.

**Figura 8:** A decomposição da figura original




**Fonte:** Burak e Klüber (2011) in Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 56).

Após a decomposição da figura, os autores assinalaram que o conhecimento das medidas do terreno estava limitado às medidas informadas pela prefeitura seguindo a escala de 1:1000 (um centímetro para mil centímetros). De acordo com os autores, um trabalho com tal escala sugere encontrar o perímetro e a área de cada uma das figuras separadamente.

Com relação ao perímetro, fazendo uso das medidas da Figura 1, os autores apresentaram os cálculos referentes ao terreno (136 + 80 + 259 + 147 = 622m), à região retangular (136 + 80 + 136 + 80 = 432m) e triangular (259 – 136) + 80 + 147 = 350m). Na sequência, após ser proposta uma simplificação da expressão numérica do perímetro do retângulo (P = 2 x (136 + 80), finalizaram apresentando a expressão geral para calcular o perímetro de um retângulo qualquer (P = 2 x (a + b)) em que a e b são valores genéricos que representam as medidas do comprimento e da largura.

Segundo Burak e Klüber (2011), os seguintes assuntos poderiam ser trabalhados paralelamente à resolução do problema principal: classificações dos triângulos quanto às dimensões dos lados e seus ângulos internos, explicitação das propriedades do retângulo como forma de exemplificar e posterior caracterização e generalização dessas categorias de figuras geométricas no contexto dos quadriláteros.

Com relação ao cálculo das áreas, os autores assinalam que o desenvolvimento dos cálculos dependeria de uma avaliação sobre o conhecimento prévio dos alunos referente ao conceito de área. Caso não o tivessem, algumas atividades poderiam ser desenvolvidas a fim de favorecer a construção e compreensão do assunto.

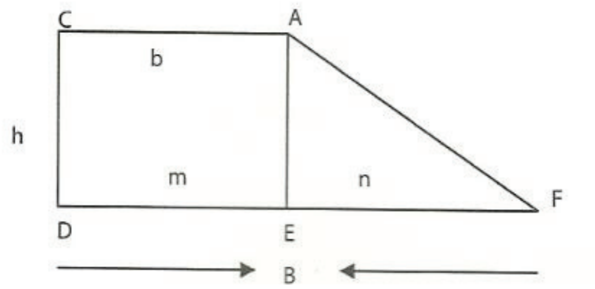
Dessa forma, após uma atividade de preenchimento da área da superfície retangular, os autores assinalaram a necessidade questionamentos aos alunos que os levassem a construir o conceito de área a partir das medidas de comprimento e largura de um retângulo qualquer. Isso resultaria na expressão genérica A = *a.b*, em que A = comprimento vezes largura.

A partir da sistematização da fórmula da área de um retângulo qualquer, foi deduzido que a região triangular poderia ser representada, de forma intuitiva, como a metade da área do retângulo a partir da fórmula A = $\frac{a.b}{2}$, tornando-se possível, assim, o cálculo da área total do terreno.

Após os cálculos de área e perímetro do retângulo e do triângulo, os autores sublinharam, como forma de aproveitar o contexto proporcionado pela atividade de MM, outra possível sugestão de trabalho: solicitar ao aluno que estabelecesse e justificasse as ações desenvolvidas e as relações utilizadas, comparando-as com as dimensões dadas na figura inicial, o trapézio. Assim, posteriormente, seria possível um estudo acerca da classificação dos trapézios, das suas propriedades e quanto aos ângulos e à medida dos lados não paralelos. Partindo das expressões das áreas do triângulo e do retângulo, investigar a possibilidade de encontrar expressões matemáticas capazes de expressar o cálculo da área de um trapézio retângulo, isósceles e escaleno.

Como um dos objetivos para a resolução do problema inicial "Qual a possibilidade de expansão física da indústria?" era o cálculo da área total do terreno, os autores apresentaram a dedução da fórmula da área do trapézio a partir da soma das áreas retangular e triangular, tomando por base as medidas genéricas de um trapézio.

**Figura 9:** As medidas genéricas de um trapézio




**Fonte:** Burak e Klüber (2011) in Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 60).

$$
\begin{aligned}
&S = Sr + St \\
&S = m.h + \frac{n.h}{2} \\
&2S = 2.m.h + n.h \\
&2S = h.(2.m + n) \\
&2S = h.(m + m + n) \\
&2S = h.(B + b)
\end{aligned}
$$

$$S = \frac{(B + b).h}{2}$$

Após a obtenção da fórmula para o cálculo da área total, os autores propuseram a substituição das medidas contidas na planta baixa, chegando, assim, à área do terreno: $S = \frac{(259+136).80}{2} = 15.800m^2$.

Com relação aos cálculos da área edificada, foi sugerido para que se considerasse que todas as construções poderiam ser decompostas em retângulos, valendo-se da expressão A = *a.b,* o valor da área era de $4.382m^2$.

Por meio de cálculos de porcentagem, chegou-se que área edificada representava 28% da área total do terreno. Aparentemente, as informações obtidas bastavam para responder sobre o potencial de crescimento da indústria de cerâmica. No entanto, todos esses procedimentos não permitiam responder efetivamente à questão, pois existia uma lei municipal a qual determinava que apenas 66% da área do terreno poderia ser ocupada.

Levando em consideração os cálculos e a lei municipal de ocupação dos terrenos, chegou-se então à seguinte resposta para o problema de pesquisa: o potencial de expansão física da indústria na área do terreno é na ordem de 38%, ou seja, $6004m^2$.

O encaminhamento da atividade que culminou com a resolução do problema (porém não única, pois segundo os autores muitos outros fatores influenciam a resposta efetiva do problema), apesar de apresentar outras sugestões de como introduzir conceitos geométricos relacionados aos trapézios, ocorreu essencialmente por discussões relacionadas à linguagem matemática necessária para o trabalho dos conceitos de área e perímetro.

Na discussão final, denominada por Burak e Klüber (2011) como "Análise crítica das soluções", os autores salientam que a questão proposta permite discutir, ainda, aspectos da forma de expansão, como, por exemplo, se será horizontal ou vertical; a necessidade real de expansão física e a sua viabilidade financeira; e possíveis implicações sociais, econômicas e ambientais decorrentes da possível expansão.

Na sequência, apresentamos, sob o prisma da classificação de Poincaré (1988) e da ideia da construção da realidade intermediária de Negrelli (2008), nossa interpretação acerca dos diferentes papéis desempenhados pelas hipóteses empregadas no decorrer da resolução do problema descrito.

### 4.3.1. Interpretação do Problema 2

No nosso entendimento, o primeiro recorte (r1), realizado na realidade (R), refere-se à delimitação do tema que consistiu em investigar a transformação da argila em tijolos.

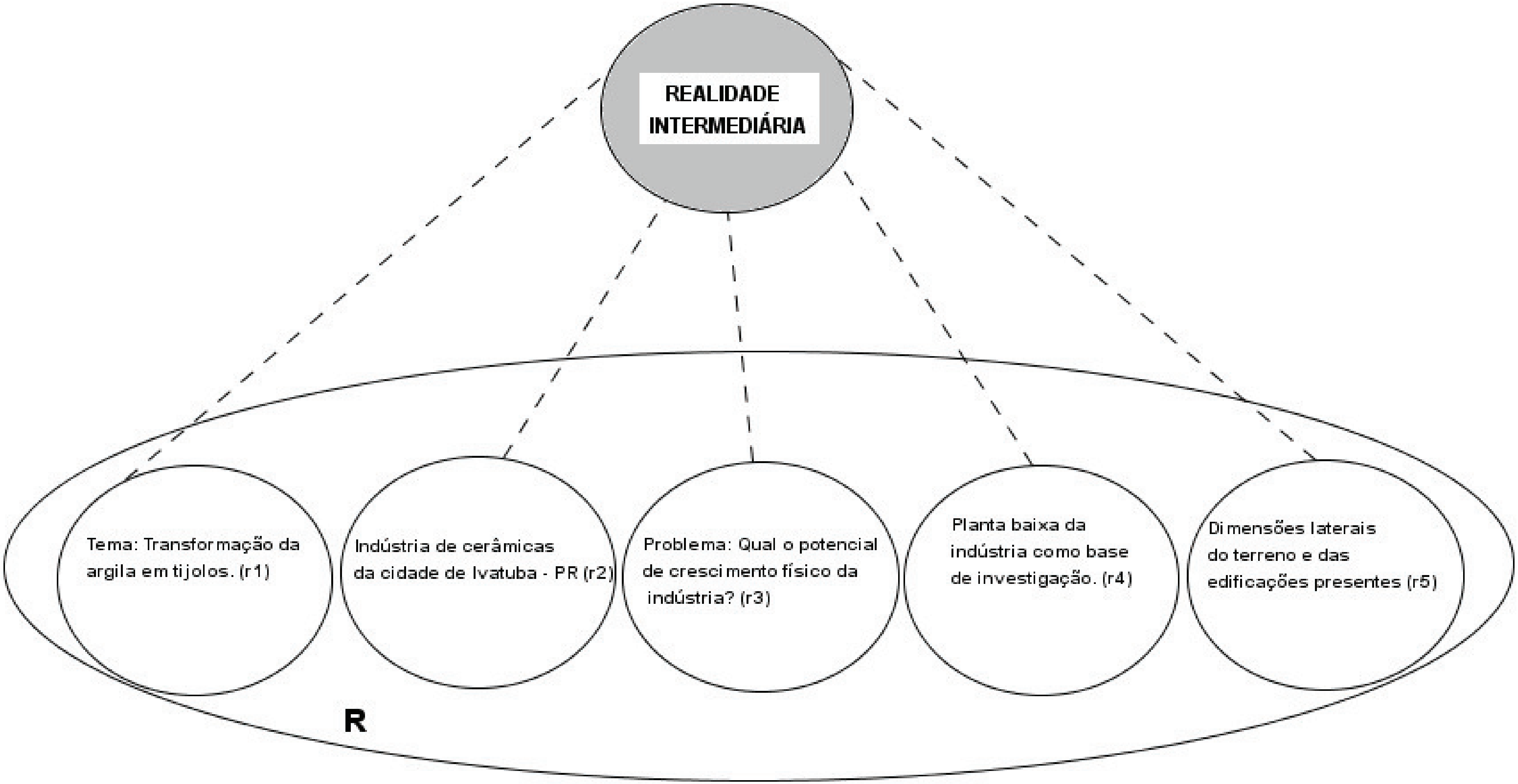
Como outro recorte (r2), podemos elencar a escolha pela indústria de cerâmicas de Ivatuba – PR. Dentre outras indústrias do mesmo ramo, essa indústia condicionou o encaminhamento do trabalho, pois representava uma forma de delimitação da realidade dentro do tema e do contexto dos estudantes.

Delimitado o tema e a indústria sobre a qual a pesquisa estaria direcionada, a opção por investigar "Qual o potencial de crescimento físico da indústria de tijolos?", dentre outros problemas elencados pelos estudantes participantes da atividade, representa o terceiro recorte (r3).

O recorte (r4) está representado pela opção de se investigar o problema escolhido, tendo como base a planta baixa do terreno da indústria fornecida pela prefeitura da cidade de Ivatuba – PR. Outras formas de encaminhamento poderiam ser adotadas, como, por exemplo, obter as medidas do terreno e das edificações da indústria por medições empíricas do terreno e da indústria com o auxílio de uma trena, ao invés de obtê-las já prontas da prefeitura.

Como quinto recorte (r5), na planta baixa mencionada, estão as dimensões consideradas para o desenvolvimento da atividade, que compreendem apenas as laterais do terreno e das edificações presentes. Este fato é mencionado pelos próprios autores na etapa da "Análise crítica das soluções" como uma particularidade da atividade desenvolvida, uma vez que a criticidade esperada nesta etapa permitiria discutir se a forma da expansão da indústria se daria apenas na horizontal ou também na vertical.

**Figura 10:** Esquema dos recortes da realidade referente ao Problema 2




**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Além dos recortes apresentados, que resultaram na realidade intermediária do problema de Burak e Klüber (2011, p. 45), uma possível classificação das hipóteses seguindo a categorização apresentada por Poincaré (1988) poderia ser dada.

### Hipóteses naturais

Considerando-se que as hipóteses naturais, da forma como estas são compreendidas por Poincaré (1988), representam aquelas consideradas inconscientemente pelo sujeito, sendo até mesmo, na maioria das vezes, impronunciáveis pela linguagem e, ainda, que as entendemos no contexto da MM na Educação Matemática como sendo as premissas que delimitam de forma global os encaminhamentos didático-metodológicos BEAN (2012), tentamos identificar algumas orientações e relações existentes na atividade.

Reescrevemos, na sequência, as teorias que orientaram epistemologicamente[14] a maneira pela qual se estabeleceram as relações entre professor, conhecimento e aluno, juntamente com as práticas inerentes a tais teorias possíveis de serem identificadas.

A Educação Matemática é entendida como:

> [...] um movimento de renovação do ensino da matemática e que possui um diálogo com diferentes áreas do conhecimento, como a Sociologia, a Psicologia, a Filosofia, a Antropologia e outras (RIUS, 1989a, 1989b; KILPATRICK, 1996; FIORENTINI; LORENZATO, 2006; BURAK; KLÜBER, 2008).

Tal diálogo de saberes torna-se fundamental para o estudo dos fenômenos educativos subjacentes ao ensino da Matemática. Com isso, as Tendências em Educação Matemática se configuram como forma de possibilitar que tais relações possam ser estabelecidas e praticadas no âmbito escolar.

No contexto da atividade descrita, a tendência que rege as relações entre a Matemática e outros conhecimentos é a MM. No que diz respeito à MM, os autores apontam que no contexto da Educação Matemática

> [...] surgem diferentes perspectivas de Modelagem que podem ter como finalidade o desenvolvimento das capacidades de aprendizagem e de um ensino que promovam no educando o desenvolvimento da autonomia, como sujeito da construção do próprio conhecimento, como cidadão crítico e participativo, e,

[14] Entendemos dessa forma porque os autores ressaltam que a perspectiva de MM que sustenta os procedimentos adotados no encaminhamento da atividade, por se tratar de uma metodologia, não pode ser destituída de suas características filosóficas, epistemológicas, sociais e culturais. (BURAK; KLÜBER, 2011, p. 47).

> principalmente, que favoreçam o seu entendimento do mundo em suas múltiplas dimensões. (BURAK; KLÜBER, 2011, p. 47).

Tendo em vista tal diversidade de perspectivas de MM, os autores optam por aquela que concebe a MM como uma prática educativa para o ensino da Matemática, ou seja, uma metodologia de ensino que tem como fundamento a concepção de Burak (1992, 2004, 2006).

Sabendo-se que seguindo esta concepção a atividade se orienta pelos princípios e etapas citadas anteriormente (Pág. 71), é possível destacarmos os seguintes trechos do texto que justificam alguns dos encaminhamentos dados pelos autores na condução da atividade e que, no sentido como estas são compreendidas por Poincaré, subentendemos por hipóteses naturais:

A maneira pela qual se deu a escolha do tema "transformação da argila em tijolos". Isso aconteceu a partir de uma decisão conjunta e democrática, levando em consideração a opinião de todos os sujeitos participantes da atividade. Evidenciando assim que o interesse do grupo de pessoas foi realmente levado em consideração, como foi previamente definido pela concepção de MM de Burak (1992, 2004, 2006).

A necessidade de se realizar visitas aos órgãos da prefeitura e indústrias correlatas à atividade, como forma de tomar um contato com o assunto a ser investigado a partir de uma perspectiva empírica, sinalizando assim que a obtenção dos dados foi obtida no ambiente onde se localizava o interesse do grupo, em concordância com a concepção de Burak (1992, 2004, 2006);

A forma flexível dada à resolução do problema de investigação, permitindo a abordagem de outros[15] conteúdos matemáticos, além daqueles estritamente necessários à sua resolução. E, ainda, a liberdade e o caráter não determinístico presente na etapa do levantamento dos problemas. Tendo por base os dados levantados no contexto do tema escolhido e sendo esses os mais variados, a opção por uma das questões levantadas foi encaminhada naturalmente, sem deixar transparecer que a questão escolhida tinha mais ou menos importância que as outras.

O aspecto reflexivo fomentado na etapa da análise crítica das soluções evidencia a possibilidade de se questionar alguns aspectos da resolução, como, por exemplo, a coerência e a consistência lógica da solução ou das soluções encontradas, sugerindo, inclusive, outras investigações do mesmo problema sob outros pontos de vistas. Esse caráter de reflexividade e criticidade nos remete à ideia de que a MM (teoria adotada) tem o potencial de proporcionar um ambiente no qual se faz presente o pensamento reflexivo e, em decorrência disso, foi possível a percepção de tal aspecto no âmbito do problema em questão.

---

[15] O conceito principal era a área, no entanto, no decorrer da resolução do problema, o conceito de perímetro também foi trabalhado.

**Hipóteses indiferentes**

Levando em consideração a concepção de que a MM guia os encaminhamentos da atividade descrita, as hipóteses do tipo indiferente se mostram essencialmente na etapa "Resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema". São apresentadas as estratégias matemáticas utilizadas para a resolução do problema de investigação e também a forma de proceder pedagogicamente tais estratégias.

Fundamentados na concepção de hipótese indiferente, de Poincaré (1988), apresentamos na sequência algumas afirmações que podem ser consideradas hipóteses deste tipo.

Os autores sugerem que, para se resolver o problema de investigação que consistia em calcular o potencial de aumento físico da indústria de cerâmicas, um possível encaminhamento seria: 1) olhar a figura do terreno e desconsiderar as construções; 2) considerar apenas as construções; e 3) verificar a razão entre a área utilizada e a área total.

Julgamos que este conjunto de informações sejam hipóteses indiferentes, pois outra possível forma de abordar o problema seria considerar o crescimento da indústria também na vertical. Isso implicaria, por exemplo: 1) olhar a figura do terreno e desconsiderar as construções; 2) considerar apenas as construções, horizontal e verticalmente; e 3) verificar a razão entre a área utilizada e a área total.

A consideração de que a área total do terreno poderia ser obtida a partir de uma decomposição do trapézio em um retângulo e um triângulo retângulo também representa uma hipótese do tipo indiferente, pois o trapézio poderia facilmente ser decomposto de outras formas igualmente úteis para o cálculo da área do terreno. Como exemplo, poder-se-ia decompor o trapézio em três triângulos retângulos (partindo na diagonal o retângulo considerado na estratégia apresentada pelos autores), ou então, em dois triângulos (considerando a mesma diagonal mencionada, mas desconsiderando o traço que delimitava o retângulo).

Outra hipótese indiferente refere-se à maneira de calcular a área do triângulo a partir da área do retângulo, pois o problema poderia ser igualmente resolvido ao se utilizar a fórmula de Heron – não apresentada pelos autores – que considera o semiperímetro e as medidas dos lados do triângulo em questão.

**Hipóteses físicas**

No que diz respeito às hipóteses do tipo física, salientamos que, por estarem diretamente relacionadas às reflexões empíricas realizadas antes, durante e após a atividade, identificá-las isoladamente em etapas determinadas não constitui tarefa simples, uma vez que na MM o pensamento crítico, aliado à necessidade constante de produzir respostas condizentes com o contexto real do problema, permeia todo o processo de investigação.

No contexto da atividade descrita, as reflexões fomentadas no decorrer das etapas definidas pela concepção de Burak (1992, 2004, 2006), que julgamos estarem diretamente relacionadas às características das hipóteses físicas, são as seguintes:

- Escolha do Tema: A necessidade de investigar e solucionar algum problema da realidade direciona o professor e os alunos para a escolha de um tema que representa certa relevância para a região onde ocorreu o desenvolvimento da atividade de MM, transformação da argila em tijolos;

- Pesquisa Exploratória: nesta etapa, o tema algo ainda abstrato para muitos dos alunos que nunca haviam tido contato com o contexto da produção de tijolos, passa a ter significado real. As visitas, pesquisas e coleta de informações referentes ao tema permitem que os alunos percebam que, para se produzir tijolos é necessário conhecer que neste contexto estão imbricados diversos fatores determinantes, como, por exemplo, o local da retirada da matéria-prima, o meio de transporte, a transformação do barro em tijolos e os diferentes tipos de tijolos e lajotas possíveis de serem fabricados.

- Levantamento dos problemas: de posse dos dados levantados a partir do contexto real do tema, os alunos passam a ter condições de formular questões que não seriam possíveis de serem formuladas caso o contato empírico com a realidade investigada não tivesse sido feito. Como exemplo, citamos os questionamentos formulados, tendo como foco as dependências físicas da indústria de cerâmica da cidade de Ivatuba – PR: "Qual a área total do terreno ocupado pela indústria? Qual a área construída? Qual o percentual do espaço construído em relação ao espaço total?" e que, na etapa seguinte, Resolução de problemas para o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema, representaram partes da questão principal de pesquisa.

- Resolução de problemas para o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema: nesta etapa, as reflexões empíricas podem ser compreendidas como sendo as ideias que, durante a resolução do problema, buscavam um acordo entre o conteúdo matemático desenvolvido e a adequação empírica deste, questionando a validade dos procedimentos efetuados e as leis não matemáticas subjacentes ao contexto do problema de investigação.

Nessa etapa, apesar de as hipóteses físicas não aparecerem de forma explícita, entendemos que um exemplo de reflexão empírica presente seja a consideração de que a solução final da questão "Qual o potencial de crescimento físico da indústria?" só foi obtida efetivamente após o conhecimento da lei municipal de edificações para indústrias, a qual limitava em 66% a área do terreno a ser ocupada por construção. Este fato evidencia ser insuficiente apenas o tratamento matemático para a solução final do problema; era necessário também refletir empiricamente sobre as possibilidades reais da solução obtida.

- Análise crítica das soluções: por fim, o que configura esta etapa são basicamente as reflexões empíricas. Pois, quando se é criticada uma solução obtida no contexto da MM, o sujeito modelador sempre o faz tendo em vista a realidade da qual os dados e o problema se originou. O movimento dos procedimentos da investigação da concepção de MM adotada no contexto do problema se configura, segundo nosso entendimento, da seguinte maneira: início da investigação (reflexões empíricas em um grau médio); durante a resolução matemática (reflexões empíricas em um grau baixo) e, final da investigação (reflexões empíricas em um grau alto).

### 4.4. Problema 3: Quanto custa ter uma sala de Informática? (CALDEIRA; SILVEIRA; MAGNUS, 2011, P. 65)

A atividade relatada por Caldeira, Silveira e Magnus (2011) foi desenvolvida durante as aulas de Matemática em uma classe de 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, em uma escola pública estadual, por um período de oito aulas em quatro dias.

Assim como Burak e Klüber (2011), Caldeira, Silveira e Magnus (2011) também assumem uma perspectiva de MM para encaminhar os procedimentos da atividade proposta. A escolha deles está em consonância com os princípios da corrente sociocrítica que "[...] apresenta-se como uma possibilidade para explorar os papéis que a matemática exerce na sociedade contemporânea." (CALDEIRA, SILVEIRA, MAGNUS, 2011 *in*: ALMEIDA, ARAÚJO, BISOGNIN, 2011, p. 67). Baseada na Educação Matemática Crítica, proposta por Skovsmose (2001, 2007), a corrente denominada sociocrítica tem como alguns dos principais nomes no âmbito nacional os pesquisadores Barbosa (2001), Araújo (2007, 2009) e Caldeira (1998, 2005, 2007).

Outro pressuposto assumido pelos autores no encaminhamento da atividade foi pensar na "[...] Modelagem não apenas como um método de ensino e aprendizagem de Matemática, mas como uma concepção de Educação Matemática, segundo proposto por Caldeira (2009)." (CALDEIRA, SILVEIRA, MAGNUS, 2011 *in*: ALMEIDA, ARAÚJO, BISOGNIN, 2011, p. 67).

Para iniciar a atividade, foi proposto aos alunos que se manifestassem sobre qual tema estaria de acordo com seus interesses. Cinco temas foram propostos: drogas, violência na escola, lazer, destruição do patrimônio histórico e poluição das águas. O tema escolhido foi o lazer.

Após a escolha do tema, a fim de delimitar o tipo de atividade a ser investigada e que estivesse relacionada com o tema lazer, dentre vários subtemas propostos, o escolhido foi "acesso à internet para os alunos da escola".

Os autores assinalam que, segundo os próprios alunos da turma, a maioria não possuía um computador em casa e muitos jamais haviam tido contato com um computador.

A partir do interesse declarado pelos alunos em dispor de acesso à internet na escola, foi decidido em conjunto com o grupo que os trabalhos de MM seriam direcionados para os custos de implantação e manutenção de uma sala de computadores conectados à internet.

Com o problema devidamente delimitado, para dar início à investigação, foi decidido que seria necessário fazer um levantamento dos equipamentos e seus respectivos preços. Na concepção inicial dos alunos, os materiais necessários para a implantação de uma sala de computadores daquela natureza eram: mesas, cadeiras, computadores, *scanner* e impressora.

Devido à falta de conhecimento por parte dos alunos sobre o necessário para ter acesso a internet, neste momento, os autores interviram assinalando que existiam outros gastos além daqueles apresentados por eles, como, por exemplo: modem para acesso ADSL; hub; cabos e plugs para rede; servidor de internet para acesso ADSL; provedor de internet; técnico para manutenção dos computadores e rede; professor para ministrar aulas e monitor, em momentos que não houvesse aula. (CALDEIRA, SILVEIRA, MAGNUS, 2011).

Definido o que seria necessário para a implantação da sala, foi solicitado aos alunos para que fizessem uma pesquisa relacionada aos diferentes preços de tais equipamentos e serviços necessários. No dia seguinte à proposta da pesquisa de preços a ser realizada em algumas lojas e escolas de informática da cidade, os alunos trouxeram os valores, e estes, em conjunto com os autores desta pesquisa, decidiram que iriam aproveitar apenas os dois valores mais baixos de cada item. Dessa forma, foram agrupados os valores em uma tabela, conforme segue:

**Tabela 3:** Levantamento de custos de equipamentos e serviços

| Equipamentos ou Serviços | Preço 1 | Preço 2 |
|---|---|---|
| **Computador** | R$ 1 456,00 | **R$ 1 630,00** |
| **Impressora** | R$ 197,00 | **R$ 188,00** |
| ***Scanner*** | R$ 184,00 | **R$ 199,00** |
| **Mesas** | R$ 150,00 | **R$ 173,00** |
| **Cadeiras** | R$ 60,00 | **R$ 68,00** |
| ***Modem*** | R$ 258,00 | **R$ 270,00** |
| ***Hub* 16 portas** | R$ 165,00 | **R$ 172,00** |
| ***Hub* 24 portas** | R$ 295,00 | **R$ 278,00** |
| **Cabos e *plugs* / por micro** | R$ 15,00 | **R$ 15,00** |
| **Provedor de internet** | R$ 19,00 | **R$ 24,00** |
| **Servidor ADSL – 300 kbps** | R$ 130,00 | **-** |
| **Servidor ADSL – 600 kbps** | R$ 199,00 | **-** |
| **Servidor ADSL – 1 000 kbps** | R$ 299,00 | **-** |
| **Professor** | R$ 700,00 | **-** |
| **Monitor** | R$ 270,00 | **-** |
| **Técnico / manutenção** | **R$ 300,00** | **-** |

**Fonte**: Caldeira, Silveira e Magnus (2011) in Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 71).

Após o agrupamento dos valores na tabela, as seguintes questões emergiram: 1) Que velocidade de conexão escolher? 2) Quantos computadores haveria na sala?

A partir desses questionamentos o encaminhamento da atividade se deu de tal forma que os autores direcionaram as argumentações sobre os custos e velocidade da internet, tendo como pressuposto que o modelo matemático a ser construído teria alguns valores fixos e outros que variavam de acordo com o número de computadores.

Dessa forma, levando em consideração que, para saber o custo da sala de informática, seria necessário saber quantos computadores seriam instalados, os autores acabaram por introduzir o conceito de Função do 1º grau a partir de cálculos que apresentavam não apenas uma resposta, mas opções de resposta dependendo da necessidade e escolha dos alunos.

Após questionamentos dos autores sobre como seria caso quisessem um cálculo "rápido" aplicável a várias situações diferentes do custo do número total dos equipamentos (computadores mais as despesas fixas), algumas expressões matemáticas foram construídas pelos alunos.

Dentre as fórmulas apresentadas, foi considerada mais adequada à situação uma fórmula resultante do comentário de um aluno, o qual afirmava que o tanto a ser pago dependeria do número de computadores: $T = Di + C.1681,00$, em que T representaria o custo total; Di a despesa inicial, independente do número de computadores; e C o número de computadores.

Definida a fórmula, os autores propuseram simulações de cálculos para diferentes números de computadores. Durante a primeira simulação, considerando uma sala de informática com 5 computadores, um aluno lembrou-se de que era necessário incluir nas despesas iniciais um hub de 16 portas, ao custo de R$ 165,00. Assim, o seguinte cálculo para o custo total da sala foi apresentado:

$$
\begin{aligned}
T &= Di + C.1681,00 \\
T &= 795,00 + 5.1681,00 \\
T &= 9200,00
\end{aligned}
$$

Na sequência, foi solicitado aos alunos para que fizessem simulações com outros números de computadores, C = 10, C = 15, C = 18 e C = 20. Quando os alunos chegaram aos cálculos referentes a 18 computadores, houve a manifestação de que o hub deveria ser alterado para outro com 24 portas e, dessa forma, as despesas iniciais passariam para R$ 908,00.

A partir das considerações de que o custo para a implantação da sala de informática dependeria do número de computadores e, ainda, de que estes influenciariam também no valor da despesa inicial (devido às diferentes opções de hub), a atividade foi finalizada com cálculos para números variados de computadores.

Como último momento da pesquisa, os autores realizaram a construção de outro modelo, também relacionado ao tema, que descreveria o custo mensal para manter a sala em funcionamento.

Eles utilizaram as seguintes notações:

- Custo permanente (*Cp*): custo mensal para manter a sala de informática funcionando.

- Despesa fixa mensal (*Df*) (técnico e provedor): despesa que não dependeria do número de computadores na rede.

- Custo do servidor de Internet (*S*): despesa que dependeria do número de computadores na rede (por questões de velocidade de conexão)

Segundo Caldeira, Silveira e Magnus (2011), durante a construção deste outro modelo, os alunos sublinharam que:

> [...] não seria necessário calcular o custo do professor e nem do monitor para tomar conta da sala de informática, pois a própria escola, por meio do Estado, poderia contratar um professor para atuar e poderia fornecer um funcionário, já existente na escola, para desempenhar a função do monitor. (CALDEIRA, SILVEIRA E MAGNUS (2011) in ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN (2011, p. 75)).

Com relação a isso, os autores fizeram alguns comentários sobre o funcionamento de contratos do Estado, explicando que, segundo a política vigente naquele momento, seria muito difícil contar com esse apoio do Estado.

Na sequência, a discussão sobre a velocidade da conexão culminou em três opções que variavam de acordo com o número de computadores da rede.

- Rede com até cinco computadores: 300 kbps – R$ 130,00.
- Rede com número de computadores variando entre seis e dez: 600 kbps – R$ 199,00.
- Rede com mais de dez computadores: 1 000 kbps – R$ 299,00.

Assim, os custos seriam calculados da seguinte forma: Despesas fixas (*Df*): Técnico para manutenção das máquinas e rede – R$ 300,00 e provedor de internet – R$ 19,00, totalizando *Df* = R$ 319,00, além do servidor de internet (velocidade de conexão) (S), variando de acordo com a opção da rede.

Apresentadas essas informações, pouco tempo depois, vários alunos conseguiram elaborar o seguinte modelo que descrevia a situação: $Cp = Df + S$. No intuito de validar o modelo, os autores sugeriram que os alunos fizessem os cálculos referentes às condições da velocidade da conexão. Assim, o custo para $1 \leq C \leq 5$ era R$ 449,00; para $6 \leq C \leq 10$ de R$ 518,00; e para $C \geq 11$ de R$ 618,00.

Segundo os autores, pela construção dos dois modelos, foi possibilitado um panorama da viabilidade da implantação de um laboratório de informática na escola.

Na sequência, com o fechamento da atividade, os autores questionaram os alunos sobre como poderia ser possível conseguir recursos financeiros para viabilização do projeto da sala de computadores. Algumas das sugestões apresentadas foram: 1) pedir ajuda às grandes empresas de mineração e metalurgia existentes na região; 2) pedir ajuda aos vereadores da cidade; 3) pedir ajuda ao prefeito da cidade.

Após a pesquisa, a professora responsável da turma participante da pesquisa sistematizou o conteúdo "funções polinomiais do 1º grau" a partir do trabalho realizado.

### 4.4.1. Interpretação do Problema 3

Primeiramente, dentre os diversos temas que poderiam ser trabalhados em sala de aula tendo como encaminhamento pedagógico a MM, a opção pelo tema lazer representou o recorte (r1). Segundo os autores do capítulo analisado, o tema lazer foi escolhido pelos alunos entre vários propostos: drogas, violência na escola, destruição do patrimônio histórico e poluição das águas.

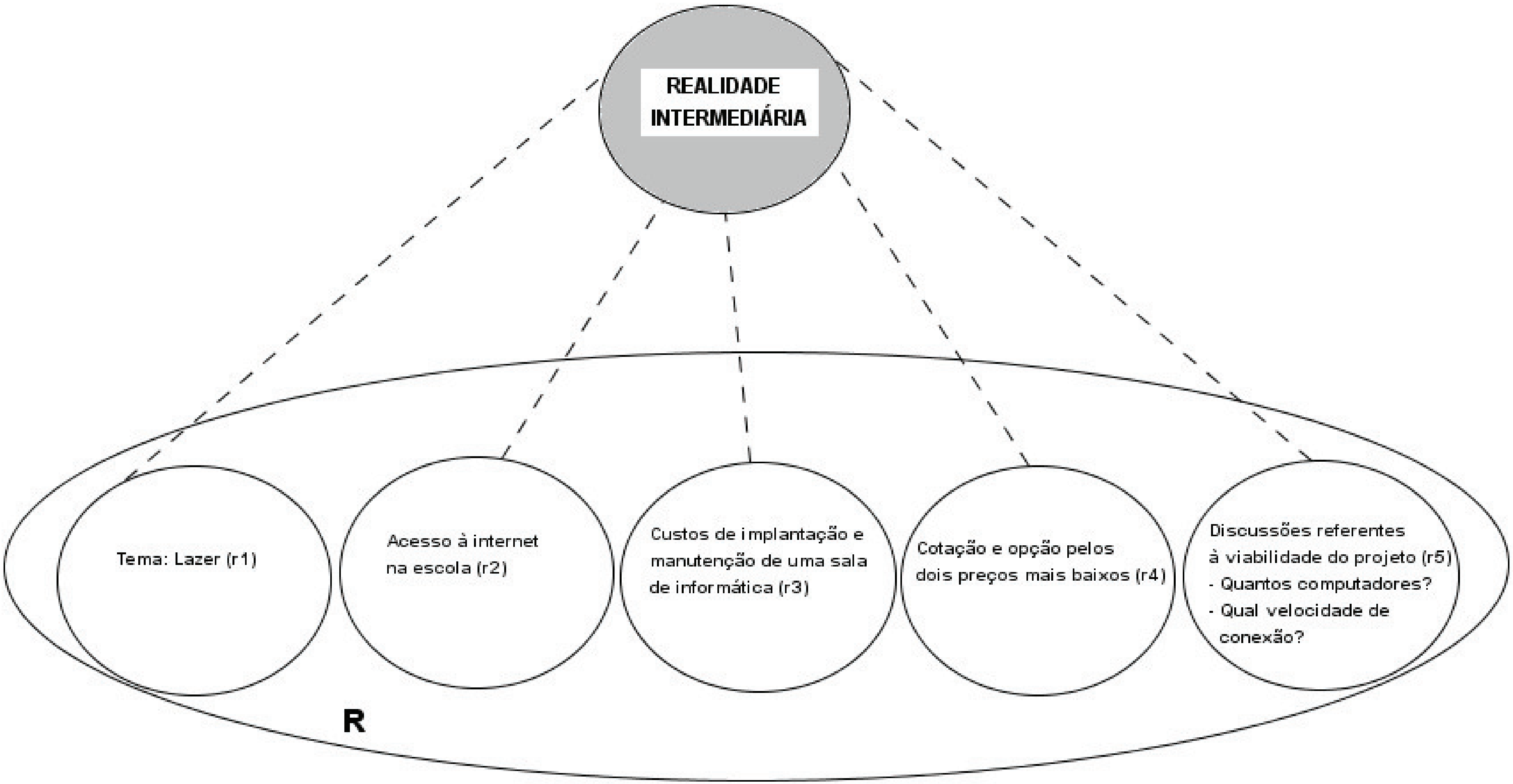
Como o objetivo de dlimitar um tópico dentro do tema lazer, dentre vários subtemas propostos, foi escolhido pelos alunos o acesso à internet na escola, o que em nosso entendimento representa o segundo recorte (r2).

Como terceiro recorte (r3) está a opção por realizar uma pesquisa direcionada a investigar os custos de implantação e manutenção de uma sala de computadores conectados à internet, que representa a problemática da pesquisa. No nosso entendimento, outros problemas relacionados com o acesso de internet na escola também poderiam ser investigados, como, por exemplo: uma pesquisa sobre a diminuição da frequência dos alunos na biblioteca em decorrência da praticidade dos sites de busca e de relacionamentos oferecidos na internet.

O recorte (r4) está representado pela opção de encontrar uma possível solução para o problema a partir de uma investigação pautada nos valores dos equipamentos disponíveis em algumas lojas e escolas de informática da cidade. No decorrer das atividades, ficou estabelecido que apenas dois preços de cada item fossem considerados, os mais baratos. Acreditamos que esta opção representa um recorte, pois pressupõe uma escolha dentre outras formas de se realizar a investigação. Os alunos, ou até mesmo os autores, poderiam, por exemplo, optar por trabalhar com todos os preços pesquisados, ou então com apenas os mais caros. Isso dependeria da intenção e da disponibilidade de tempo da turma e do professor.

Consideramos como quinto recorte (r5) as discussões referentes à viabilidade do projeto da sala de informática fomentadas a partir dos dois preços mais baixos. Sobretudo, as reflexões relativas à quantidade computadores e à velocidade de conexão da internet contratada que, no nosso entendimento, influenciaram diretamente na forma com que os modelos foram formulados.

**Figura 11:** Esquema dos recortes da realidade referente ao Problema 3




**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Além dos recortes apresentados, o quais resultaram na realidade intermediária do problema de Caldeira; Silveira; Magnus (2011, p. 65), a seguinte classificação seguindo a categorização poincareriana pode ser descrita:

**Hipóteses naturais**

As teorias que delimitam os tipos de relações estabelecidas entre os professores (autores), conhecimento e aluno e que, segundo o prisma de nossas interpretações, condicionam as hipóteses naturais adotadas nesta atividade são: a concepção de matemática compreendida como uma disciplina escolar, que deve transcender a ideia de um conhecimento isolado, pronto e acabado; a corrente sociocrítica da MM na Educação Matemática; a concepção de MM defendida por Caldeira (2009), que a concebe não apenas como um método de ensino e aprendizagem de Matemática, mas como uma concepção de Educação Matemática.

A ideia defendida pelos autores de que a Matemática não deve ser considerada um conhecimento isolado, pronto e acabado implica na necessidade da adoção de um método de ensino em que se faça presente o caráter interdisciplinar. No contexto do problema da implantação e manutenção da sala de computadores, a MM é o método de ensino escolhido pelos autores. Devido à diversidade de compreensões existentes sobre o que é a MM na Educação Matemática e, ainda, pela preocupação dos autores em inserir no desenvolvimento da atividade elementos das demandas locais, o foco recai em uma corrente específica da MM, a sociocrítica, que se fundamenta nos princípios da Educação Matemática Crítica, proposta por Skovsmose (2001, 2007). Esta teoria entende que o objetivo do ensino da matemática deve ir

> [...] para além das habilidades de cálculos matemáticos, com a promoção da participação crítica dos alunos/cidadãos na sociedade, envolvidos em discussões de questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a Matemática serve como suporte tecnológico. (CALDEIRA, SILVEIRA E MAGNUS (2011) in ALMEIDA, ARAÚJO e BISOGNIN (2011, p. 67)).

Em consonância com tais princípios e no contexto do trabalho relatado, é adotada a concepção de MM, de Caldeira (2009), que, além de compreender a MM como uma ferramenta capaz de suscitar discussões de cunho social, político, econômico e ambiental, também a concebe, mais amplamente, como uma concepção de Educação Matemática, diferentemente de outras concepções de MM, que a compreendem apenas como um método de ensino e aprendizagem de Matemática.

A seguir, apresentamos algumas ações, efetuadas pelos professores (autores) e pelos alunos e que representam hipóteses naturais por estarem em consonância com os princípios teórico-epistemológicos previamente definidos pelos autores como guia do encaminhamento da atividade. Apesar da concepção de MM defendida por Caldeira (2009) não prever uma divisão pré-determinada em etapas, elencamos as ações que julgamos serem hipóteses naturais, seguindo a cronologia da atividade descrita.

Considerando que uma das crenças quando se trabalha com a MM é a de que pode ser desenvolvida de acordo com o interesse dos alunos, motivando-os a aprender Matemática, os autores optaram por trabalhar com uma turma desmotivada e indisciplinada. Segundo nosso entendimento, essa escolha se deu como forma de oferecer aos alunos uma oportunidade social de aprender Matemática. Entendemos que esta ação representa uma hipótese do tipo natural, pois está intrinsecamente relacionada não apenas aos princípios da MM, como também, de uma maneira mais ampla, interliga-se aos pressupostos da corrente sociocrítica por subentender uma ação de cunho social por meio do ensino da Matemática;

Quando os autores questionaram os alunos sobre quais assuntos eles tinham interesse em investigar e estes optaram pelo tema lazer e pelo subtema "acesso à Internet para os alunos da escola", entendemos que este fato estivesse estreitamente relacionado à condição social dos alunos. Por pertencerem, em sua maioria, a classes sociais menos favorecidas, não possuíam um computador em casa. Consideramos que este diálogo estabelecido entre professores e alunos esteja permeado por hipóteses naturais relacionadas ao contexto social, devido à situação proporcionada pela aula, que seguiu como fundamentação didática e metodológica a corrente sociocrítica;

Durante as discussões que culminaram com o tema e subtema escolhidos, os autores relatam que vários assuntos não diretamente relacionados com a Matemática foram levantados. Isso remete à ideia de que, no contexto escolar, a Matemática deva dialogar com outras áreas do conhecimento. Compreendemos que este fato representa uma hipótese do tipo natural por dois motivos: revela que a Matemática não é um conhecimento pronto e acabado, pois sua constituição também é influenciada por outros conhecimentos, e, ainda, pelo fato de a MM alinhar-se aos pressupostos da própria Educação Matemática, que prevê o diálogo da Matemática com outras áreas.

Todas as decisões tomadas no decorrer da atividade estavam de acordo com a opinião do grupo, revelando o caráter democrático da metodologia adotada e evidenciando que são hipóteses naturais, uma vez que representam decisões consideradas pelo sujeito e/ou pelo grupo;

Por fim, no último momento do processo de MM, que consiste na tomada de decisão, após a obtenção de dois modelos matemáticos que representavam os custos da implantação e da manutenção de uma sala de computadores com acesso a internet, os autores orientaram os alunos a procurarem a direção da escola a fim de discutir a viabilidade do projeto. Essa característica de questionamento e mudança da realidade é inerente, ou seja, natural à corrente sociocrítica da MM e, segundo os autores, no contexto da atividade desenvolvida, possibilita aos alunos perceberem a exclusão deles diante de todo o contexto digital que segue "dominando o planeta" (CALDEIRA, SILVEIRA e MAGNUS, 2011, p. 79).

**Hipóteses indiferentes**

Com relação às hipóteses indiferentes desta atividade, apresentamos as opções dos autores e alunos referentes às estratégias e ao encaminhamento didático e metodológico que, apesar de terem sido úteis para a resolução do problema em questão, poderiam ser substituídos indiferentemente por outros, sem causar dano significativo.

Algumas considerações que julgamos representar hipóteses deste tipo no contexto da atividade descrita envolvem:

- O fato de os alunos em conjunto com os professores (autores) terem escolhido apenas os preços mais baixos de cada item da sala de informática representa uma hipótese indiferente, pois outros valores poderiam ter sido escolhidos por motivos diversos. Se o foco da atividade, por exemplo, fosse refletir sobre os impactos socioeconômicos de se ter uma sala de informática com acesso a internet na escola, induzindo os alunos a se conformarem com a situação, os valores escolhidos poderiam ser os mais altos. Ou seja, a opção dos valores depende dos interesses que se tem com a atividade,

- A proposta dos autores de investigar os custos da sala de informática, utilizando a noção de função polinomial do 1º grau, é uma hipótese do tipo indiferente, pois tem a ver, nessa situação, com as experiências e conhecimentos dos sujeitos envolvidos. Caso esta atividade fosse desenvolvida em outra série, por exemplo, os autores poderiam ter decidido no início por uma quantidade determinada de computadores e, assim, independentemente de qualquer outro fator, não seria necessário abordar a noção de função;

- A preocupação dos alunos em levar em consideração a velocidade da internet para a obtenção do modelo matemático do custo da sala de informática é uma afirmação indiferente. Entendemos isso como uma hipótese do tipo indiferente, pois, se a velocidade não tivesse sido considerada, o modelo matemático obtido seria outro, fato este que, dependendo das intenções do professor, seria adequado e suficiente.

**Hipóteses físicas**

Devido ao fato de as hipóteses físicas representarem as reflexões de natureza empírica fomentadas no início, durante e após o desenvolvimento das atividades, no contexto deste problema, podemos identificar alguns momentos em que os questionamentos e estratégias foram propostos objetivando a adequação empírica do ferramental matemático desenvolvido.

Na sequência, discorremos sobre algumas ideias identificadas na descrição da atividade, compreendidas como hipóteses fundamentadas na natureza real das coisas e, portanto, físicas.

No momento das discussões referentes à escolha do tema e subtema, um dos critérios utilizados, determinante na decisão de investigar algo relacionado ao acesso à internet, foi a capacidade dos alunos imaginarem situações reais possíveis de serem feitas por meio das potencialidades oferecidas pela internet, como comunicar-se por e-mails, chats de bate-papo, visitas a sites esportivos. Entendemos que as reflexões que buscam adequações empíricas, ainda que baseadas na capacidade imaginativa dos alunos, representam pensamentos determinantes na tomada das decisões necessárias à escolha do assunto a ser investigado e as consideramos, por isso, como hipóteses físicas;

Algo inerente às atividades de MM e em consonância com a necessidade de reflexões empíricas (hipóteses físicas) com relação à situação investigada, é observado na descrição da atividade no momento em que os autores assinalam que, após a escolha do tema e subtema, era necessário identificar uma situação que remetesse à ideia de como a Matemática poderia ser incorporada à discussão do tema. Dessa forma, é evidenciado que o ferramental matemático e o tema a ser investigado não eram suficientes para se compreender o contexto de resolução do problema; era necessário também delimitar uma situação específica, na qual as relações pudessem ser estabelecidas entre a Matemática e a realidade;

Durante a construção das fórmulas referentes ao custo de implantação e manutenção da sala de informática, tanto os autores quanto os alunos se questionaram constantemente sobre a adequação empírica dos dados manipulados matematicamente. Dessa forma, entendemos que, nos encaminhamentos dados à atividade, a Matemática não aparentou estar desligada da realidade investigada.

No fechamento da atividade, a fim de investigar a viabilidade real da implantação e manutenção da sala de informática no colégio, os alunos sugeriram (hipóteses físicas): 1) solicitar apoio às grandes empresas de mineração e metalurgia existentes na região; 2) solicitar apoio aos vereadores da cidade; 3) pedir ajuda ao prefeito da cidade. Entendemos que estas considerações se tratam de hipóteses físicas, pois transcendem a resolução do problema trabalhado em sala de aula e buscam compreender as possibilidades reais de intervir significativamente na realidade vivenciada e esperada pelos alunos.

## 4.5. DISCUSSÕES E RESULTADOS

Na presente seção, analisamos as implicações de nossas interpretações para a promoção de uma Educação Científica pautada na perspectiva de Ensino por Pesquisa (Cachapuz, Praia e Jorge, 2000 e Demo, 2011), finalizando com algumas considerações sobre como nosso estudo pode ser inserido na discussão suscitada por Barbosa (2009) em seu artigo intitulado "Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica".

Antes de delinearmos as relações e/ou implicações da consideração das nossas interpretações para a promoção de uma Educação Científica na perspectiva de Ensino por Pesquisa, elencamos, de maneira geral, as características possíveis de serem percebidas dos três tipos de hipóteses de Poincaré no âmbito dos três problemas apresentados e interpretados. Procedemos assim por julgarmos que, ao fazê-lo, são desvelados tanto os pontos comuns a todos os problemas que porventura sejam interpretados segundo a classificação poincareriana, quanto algumas características idiossincráticas de cada problema.

A relevância de considerarmos a classificação poincareriana em nossas interpretações consiste essencialmente em evidenciar que as hipóteses que configuram a realidade intermediária podem ter como origem diversos fatores, os quais, segundo Poincaré (1988), distribuem as funções que a linguagem (indiferentes), o espírito (naturais) e a natureza (físicas) exercem no conhecimento.

No que diz respeito às hipóteses do tipo natural, observamos que, no contexto dos três problemas interpretados, os seguintes aspectos se fizeram presentes: 1) As ações efetuadas pelo professor e pelos alunos condizem sempre com as teorias que delimitam de forma global o encaminhamento metodológico e os pressupostos epistemológico e didático da atividade; 2) são consideradas inconscientemente pelo sujeito, sendo até mesmo impronunciáveis por meio de uma linguagem; e 3) representam o plano de fundo comum não apenas das hipóteses indiferentes e físicas, como também de todas as simplificações que resultam na configuração da realidade intermediária.

Tendo em vista o fato de as hipóteses naturais estarem associadas às concepções de Matemática, de Educação Matemática e de MM que regem cada atividade, a maneira pela qual conseguimos identificá-las foi influenciada diretamente pela forma com que as etapas do processo de MM são apresentadas (ou não) no âmbito das diferentes concepções, perspectivas e correntes da MM.

No contexto do Problema 1, escrito no formato de uma proposta e não como um relato (Problemas 2 e 3), consideramos que as hipóteses naturais figuram na passagem da situação inicial para a situação final, perpassando todas as etapas da MM propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012). Na impossibilidade de destacar as ações efetuadas pelos alunos que condiziam com a concepção adotada, reproduzimos o quadro resumo da atividade, juntamente com algumas considerações que remetiam aos pressupostos da MM, compreendida como “[...] uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático”. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 9).

No Problema 2, apresentamos nossa interpretação segundo a divisão de etapas do processo de MM sugerida por Burak (1992, 2004, 2006). Escrito no formato de um relato, foi possível identificar e classificar as ações dos alunos em cada uma das etapas, considerando as concepções de Educação Matemática e MM como metodologia de ensino que, segundo nosso entendimento, representam as hipóteses naturais.

Os aspectos de flexibilidade, liberdade e caráter não determinístico, inerentes às concepções teóricas adotadas, condicionaram a configuração do contexto didático, epistemológico e metodológico da atividade como um todo.

No contexto do Problema 3, identificamos as hipóteses naturais de acordo com as ações em consonância com a corrente sociocrítica da MM e a ideia de que a MM é uma concepção de Educação Matemática (CALDEIRA, 2009). Neste contexto, a atividade não estava disposta em etapas preestabelecidas e as ações e atitudes tomadas pelo professor e pelos alunos priorizavam as discussões e reflexões de cunho social e político.

Com relação às hipóteses indiferentes, nos três problemas interpretados, foram identificadas as seguintes características comuns: 1) podem ser identificadas como ferramentas de cálculo e/ou estratégias que poderiam ser substituídas indiferentemente por outras, dependendo das intenções do professor com a turma ou, ainda, se o público alvo fosse outro; 2) constituem hipóteses necessárias para a conclusão de qualquer atividade por servirem de apoio para nosso entendimento sobre qualquer assunto; e 3) independente da concepção de MM adotada, elas se fazem mais presentes na etapa ou momento da matematização dos dados da realidade.

As hipóteses do tipo físicas representam no âmbito dos problemas interpretados os raciocínios que buscam questionar, experimentar e/ou validar a adequação empírica dos dados obtidos matematicamente frente ao contexto real de investigação. Elas se fazem presentes no início, durante e após a investigação, pois representam tanto o conjunto de conhecimentos relacionados à escolha dos instrumentos e procedimentos a serem utilizados na etapa da abstração dos dados da realidade, quanto as reflexões empíricas fomentadas no decorrer e no fechamento das atividades.

No que diz respeito às relações passíveis de serem estabelecidas entre a constituição da realidade intermediária e as hipóteses classificadas segundo a teoria poincareriana, entendemos que independentemente do problema interpretado, os recortes sucessivos da realidade com vistas à simplificação do problema em questão são sempre permeados pelos mais diversos tipos de hipóteses, independente da etapa do processo da MM. Esta consideração tem como consequência uma ideia distinta daquela apresentada pela literatura em MM, na qual o recorte da realidade se configura temporalmente, apenas na etapa da abstração.

Ao relacionarmos as características consideradas em nossas interpretações, sobretudo aquelas referentes à classificação poincareriana das hipóteses e os recortes da realidade que culminam com a realidade intermediária, com a consideração de que existem diversas interpretações de uma mesma realidade, pois cada sujeito enxerga, conjectura e interpreta o mundo cada um a sua maneira, é reafirmado o caráter aproximativo e não determinístico dos modelos matemáticos.

Essa forma de compreender os modelos matemáticos está estreitamente relacionada ao papel desempenhado pelas hipóteses no contexto da MM, a qual é caracterizada essencialmente pela exigência da formulação de hipóteses nos moldes científicos.

Ao confrontarmos a ideia da objetividade da ciência, comumente disseminada não apenas no âmbito escolar como também na vida em sociedade, com o fato de a MM ser compreendida como o método das ciências e fundamentada na subjetividade das hipóteses, somos tentados a nos questionar se as coisas denominadas científicas são realmente verdadeiras.

Poincaré (1988), ao refletir sobre a questão da verdade científica, conclui que o papel das hipóteses no conhecimento científico não é só apenas necessário, mas, quase sempre, é legítimo, corroborando assim a afirmação central de sua obra "A Ciência e a hipótese", cuja essência é afirmar que a ciência nasce da hipótese.

Neste contexto, reconhecendo a relevância das hipóteses tanto para MM quanto para a ciência, acreditamos ser possível inferir considerações sobre as relações que podem ser estabelecidas entre as compreensões de Poincaré acerca do papel das hipóteses e do conhecimento científico e a MM na Educação Matemática.

A partir dessas considerações, entendemos que a MM, metodologia caracterizada essencialmente pela exigência da formulação de hipóteses (BEAN, 2001), venha ao encontro dos princípios da formação científica, a qual se fundamenta nos princípios da ciência[16].

Considerando as ideias de Poincaré referentes às relações que podem ser estabelecidas entre a ciência e a hipótese, entendemos que o processo de formulação de hipóteses na MM no

[16] Salvo as modificações que os conhecimentos científicos sofrem quando transpostos para o âmbito educacional.

âmbito educacional tem o potencial de fomentar discussões e proporcionar uma maneira de vivenciar a atividade científica, de modo a desenvolver o espírito científico nos alunos por meio de uma verdadeira Educação Científica.

Quando mencionamos “uma verdadeira Educação Científica”, estamos nos referindo à perspectiva de Educação Científica que entendemos estar de acordo com as atuais necessidades do mundo contemporâneo, a perspectiva de Ensino por Pesquisa (EPP) (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000 e DEMO, 2011).

A visão holística[17] defendida pela perspectiva EPP tem o potencial de dialogar com a MM na Educação Matemática por intermédio das características científicas não predeterminadas, reveladas por nossa interpretação acerca do papel das hipóteses.

Ainda relacionada à Educação Científica, outra consequência de considerarmos a diversidade de interpretações aliada às diferentes formas de manifestação das hipóteses (naturais, indiferentes e físicas) é que os modelos matemáticos não se comportam como retratos (estáticos) aproximados da realidade, mas sim como diferentes recortes (flexíveis) e sempre passíveis de serem refinados. Dessa forma, entendemos que nossa pesquisa se insere como uma reflexão teórica no contexto da discussão suscitada por Barbosa (2009) em seu artigo “Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica”.

Considerando o caráter mutável dos modelos matemáticos, proporcionado pelas infinitas combinações possíveis, ao relacionarmos os três tipos de hipóteses de Poincaré e a diversidade de interpretações da realidade, seria promovida a criação de uma consciência crítica, na qual os alunos perceberiam o caráter inacabado da ciência. Perceberiam que a ciência sempre está sujeita a múltiplas e sucessivas interpretações que, por sua vez, podem ser aceitas ou não, dependendo do grau de relevância atribuído em determinadas circunstâncias por diferentes sujeitos. E, ainda, que essas interpretações recaem essencialmente nas relações que podem ser estabelecidas entre as coisas, e não sobre as coisas em si.

[17] Apresentamos as principais características da perspectiva Ensino por Pesquisa na seção 1.4: Modelagem Matemática e Educação Científica.

## ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Buscamos, neste estudo, por meio de uma interpretação da formulação de hipóteses no processo da Modelagem na Educação Matemática à luz dos pressupostos filosóficos de Poincaré, evidenciar relações entre a MM e os princípios da Educação Científica.

Ao recorrermos a trabalhos de MM que discutiam o processo de modelar, mais especificamente com foco na etapa em que está situada a formulação de hipóteses, pudemos perceber que, paralelamente às ideias de recorte da realidade proporcionada pela formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras (BEAN, 2001) e de realidade intermediária (NEGRELLI, 2008), é evidenciado, de diferentes formas, a necessidade de se considerar a ideia da existência de um constructo conceitual situado em um momento anterior à elaboração do modelo matemático.

A partir desta consideração, apresentamos algumas relações possíveis de serem estabelecidas entre a MM e a Educação Científica, evidenciando que, em nosso trabalho, consideramos a perspectiva de Ensino por Pesquisa (CACHAPUZ, PRAIA e JORGE, 2000; DEMO, 2011). Apresentamos tais relações por entendermos que, pelo fato de a MM ter suas origens marcadas pela ideia de método científico, ela também possui pontos concordantes com o funcionamento do próprio pensamento científico, o que, consequentemente, possui implicações para a Educação Científica.

Apresentada a relevância da formulação de hipóteses para a MM e as relações desta com a Educação Científica, por vislumbrarmos uma aproximação dos pressupostos da MM com a Educação Científica por meio da ideia da formulação de hipóteses, fundamentamo-nos em uma teoria epistemológica que discorre sobre as hipóteses e sua importância para o pensamento científico.

Para o desenvolvimento do estudo, recorremos às ideias epistemológicas do filósofo e matemático francês Jules Henri Poincaré que, além de investigar e classificar os diferentes tipos de hipóteses existentes, elevou a importância da hipótese, chegando a considerar que esta representa em sua essência o próprio pensamento científico.

No momento em que estabelecemos relações entre os pressupostos filosóficos e epistemológicos de Poincaré e a etapa da formulação de hipóteses da MM, concluímos que a teoria poincareriana seria adequada para interpretação que pretendíamos fazer.

Quando efetivamente realizamos as interpretações, além de constatarmos que as relações almejadas inicialmente eram plausíveis, ao resignificarmos nosso aporte teórico e metodológico no contexto da MM na Educação Matemática, outros aspectos se revelaram.

Como exemplo, citamos que, quando olhamos a formulação de hipóteses sob o prisma da classificação poincareriana, que as distingue em naturais, indiferentes e físicas, aliando a ideia dos recortes da realidade, concluímos que seria uma inconsistência lógica considerar o papel dos modelos matemáticos na Educação Científica de forma determinística (estática). De acordo com a maneira com que eles são formulados, tendo como fundamento as hipóteses e as aproximações simplificadoras, as características predominantes reveladas são justamente aquelas inerentes às hipóteses, ou seja, a dinamicidade, a flexibilidade e a possibilidade constante de mudança.

Tais inferências propiciam a inclusão da nossa interpretação na discussão suscitada por Barbosa (2009), a qual aponta a necessidade de trabalhos práticos e/ou reflexões teóricas que potencialmente agendem o papel dos modelos matemáticos na Educação Científica para além da ideia de retratos da realidade.

Como consequência das relações estabelecidas neste estudo, concluímos que a MM é uma metodologia de ensino da Matemática que tem o potencial de promover uma Educação Científica nos moldes da perspectiva do Ensino por Pesquisa.

Como sugestões de outras pesquisas a serem desenvolvidas a partir da nossa, visualizamos algumas possibilidades como:

1 – Trabalhos que se proponham a investigar as hipóteses no âmbito da MM, utilizando outras teorias epistemológicas (não a de Poincaré) como forma de verificar nossos resultados.

2 – Pesquisas que apontem qual ou quais concepções de MM se aproxima (m) mais da Perspectiva de Ensino por Pesquisa.

3 – Estudos comparativos que analisem pontos concordantes e discordantes de outras tendências da Educação Matemática e a perspectiva de Ensino por Pesquisa.

4 – Trabalhos empíricos, práticos, que proponham investigar as relações estabelecidas em nossa pesquisa.

Por fim, esperamos que este trabalho incite reflexões entre professores de Matemática, no sentido de que a prática docente seja reforçada pela ideia de que o ensino desta disciplina ocorra considerando a natureza não determinística do processo de modelar matematicamente e, ainda, possa servir de inspiração para pesquisas futuras que se proponham a investigar “outros” papéis que as hipóteses podem representar, tanto para o processo da investigação científica e a MM no contexto da Educação Matemática, quanto para as relações possíveis de serem estabelecidas entre esses dois assuntos e outros correlacionados,

## REFERÊNCIAS


ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L.M.W; DIAS, M.R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L.M.W.; VERTUAN, R.E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática.** Blumenau, v.1, n.1, p.28-42, 2010.

ALMEIDA, L.M.W.; ARAÚJO, J.L.; BISOGNIN, E. Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiência e propostas pedagógicas. Londrina: Editora da UEL, 2011.

ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K.P.; VERTUAN, R.E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ANASTÁCIO, M.Q.A. Realidade: uma aproximação através da modelagem matemática. **Revista de Modelagem na Educação Matemática.** v. 1, n. 1, p. 2-9, 2010.

ARAÚJO, J.L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática**: as discussões dos alunos. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática).

_____. Modelagem Matemática segundo a Educação Matemática Crítica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife, **Anais**... Recife: UFPE, 2004. 1 CD-ROM.

_____. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J.L. (org.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. p. 17-32.

_____. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria** - **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.

BARBOSA, J.C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, n. 24, 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1, CD -ROM.

_____. Modelagem na educação e os professores: a questão da formação. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 14, n. 15, p. 5-23, 2001.

_____. **Modelagem Matemática**: O que é? Por que? Como? Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004

_____. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.69-85, jul. 2009.

BARBOSA, J.C.; SANTOS, M.A. Modelagem Matemática, perspectivas e discussões. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Recife: SBEM, 2007.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação matemática em revista**, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abr., 2001.

_____. Modelagem na perspectiva do pensamento. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n. 3, 2003, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1 CD-ROM.

_____. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Petrópolis. **Anais...** Petrópolis, 2013, 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, M.S. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

_____. Concepções e tendências de modelagem matemática na educação brasileira **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,** Costa Rica, año 7, n. 10, p. 195-204, 2012.

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BIGODE, A.J.L. A pior exclusão é a que suga a energia criativa e o potencial de raciocínio dos alunos. **Revista do Professor**, v. 28. n. 110, abr./mai./jun., 2012. Entrevista a Rosangela Guerra.

BLUM, W.; NISS, M. Mathematical Problem Solved, Modelling. In: **Modelling, Applications and Applied Problem Resolved** (Blum-Niss-Huntley), Ellis Horwood. Ed., Chinchester, 1989.

_____. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, Feb. 1991.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. 6. ed. Campinas: Papirus, 2001, p. 127-148. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

BRAGA, M.; GUERRA, A.; REIS, J.C. A fabricação de uma era. **Revista Scientific American Brasil**. A ciência na era dos inventores. São Paulo: Duetto. (Coleção: História das Ciências. n. 4).

BUNGE, M. **Teoria e realidade**. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1974.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1992, Tese (Doutorado em Educação).

_____. A modelagem matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina, PR. p. 1 – 10.

_____. Modelagem matemática: avanços, problemas e desafios. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Apucarana, PR. **Modelagem matemática: práticas, críticas e perspectivas de modelagem na educação matemática**. p. 1 – 9.

BURAK. D; KLÜBER, T.E. Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza. **Acta Scientiae**, Canoas, v.10, n.2, p. 93-106, jul./dez. 2008.

_____. Encaminhamentos didático-pedagógicos no contexto de uma atividade de modelagem matemática para a educação básica. In: ALMEIDA, L.M.W.; ARAÚJO, J.L.; BISOGNIN, E. (orgs.). **Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiência e propostas pedagógicas**. Londrina: Editora da UEL, 2011. p. 45-64.

BYBEE, R. **Towards an understanding of scientific literacy**. In: GRÄBER, W.; BOLTE, C. (eds.). Scientific Literacy. Kiel: IPN, 1997.

CACHAPUZ, A. (org). **A Necessária renovação do ensino das Ciências**, 3. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

CACHAPUZ, A; PRAIA, J.; JORGE, M. Reflexão em torno de perspectivas de ensino das ciências: contributos para uma nova orientação curricular – Ensino por Pesquisa. **Revista de Educação**, nº 1, vol. 9, p. 69-78, 2000.

CALDEIRA, A.D. **Educação matemática ambiental:** um contexto de mudança. 1998. 158p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

_____. Modelagem matemática e suas relações com o currículo. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2005, Feira de Santana. **Resumos...** Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana. 2005. 1 CD.

_____. Etnomodelagem e suas relações com a educação matemática na infância. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J.L. (org.) **Modelagem matemática na educação matemática brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. p. 81-97.

_____. Modelagem matemática: um novo olhar. **Alexandria** (UFSC), v. 2, p. 33-54, 2009.

CALDEIRA, A.D.; SILVEIRA, E; MAGNUS, M.C.M. Modelagem Matemática: alunos em ação. In: ALMEIDA, L.M.W.; ARAÚJO, J.L.; BISOGNIN, E. (orgs.). **Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiência e propostas pedagógicas**. Londrina: Editora da UEL, 2011. p. 65-81.

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 2. ed. Edição revista por Paulo Almeida. Lisboa: Gradiva, 1998. 295p.

CHASSOT, A. Alfabetização científica: uma possibilidade para a inclusão social. **Revista Brasileira de Educação**, n. 22. p. 89-100, jan./fev./mar/abr., 2003.

_____. **A ciência através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2004. (Coleção Polêmica).

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Cortez, 1991.

CIFUENTES, J.C.; NEGRELLI, L.G.A Modelagem matemática: uma epistemologia da matemática aplicada. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n. 6, 2009, Londrina, **Anais...** Londrina: CNMEM, 2009. 1 CD-ROM.

_____. O processo de modelagem matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L.M.W.; ARAÚJO, J.L.; BISOGNIN, E. (orgs.). **Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiência e propostas pedagógicas**. Londrina: Editora da UEL, 2011. p. 83-103.

CIFUENTES, J.C. Três momentos na história epistemológica da modelagem matemática. In: VIII CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria, 2013, 1 CD-ROM.

CROSSI FILHO, O. **A epistemologia da ciência de Henri Poincaré**: para além do convencionalismo e do realismo estrutural. 2012. São Paulo: Universidade São Judas Tadeu – Programa de Pós-Graduação em Filosofia. Dissertação (Mestrado em Filosofia).

D’AMBROSIO, B.S. Como ensinar matemática hoje? Temas e debates, **SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Ano VII, 2. ed., n. 1 e 2, p. 57-63, 1994.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.
DEMO, P. Educação Científica. B. Téc. Senac: **a R. Educ. Prof.**, Rio de Janeiro, v. 36, n.1, jan./abr., 2010.

**____. Educar pela pesquisa.** Coleção educação contemporânea. 9. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

FERREIRA, E.S. **A matemática no pensamento de Paulo Freire.** Poços de Caldas: Simpósio de Paulo Freire, 1992. (mimeo).

FIORENTINI, D. Estudo de algumas tentativas pioneiras de pesquisa sobre o uso da modelagem matemática no ensino. In: ICME, 8, 1996, Sevilha. **Anais...** Sevilha: ICME, 1996.

FORNER, R. **Paulo Freire e a educação matemática**: reflexos sobre a formação do professor. 2005. 193f. Campinas: PUC - Centro de Ciências Sociais Aplicadas – Programa de Pós-Graduação em Educação. Dissertação (Mestrado em Educação).

GILBERT, J.K. Models and modelling: routes to more authentic science education. **International Journal of Science and mathematics education**, v. 2, n. 2, p. 115-130, 2004.

GILBERT, J.K.; BOULTER, C.J.; ELMER, R. Positioning models in science education and in design and technology education: In: GILBERT, J.K.; BOULTER, C.J. (eds.) **Developing models in science education**. Dordrech: Kluwer, 2000. p. 3-17.

GOMES, V.B. **Divulgação científica na formação inicial de professores de Química.** UnB Planaltina: Universidade de Brasília, Instituto de Física, Instituto de Química, Instituto de Ciências Biológicas, Faculdade, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. 2012. 139f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências)

HALL, C.G. Applied Mathematics. Cap. 2, **Mathematical education**, Ed. By G. T. Wain, Van Nostrand Reinhold Co, U. S. A, 1978.

KILPATRICK, W. **Educação para uma civilização em mudança.** 4. ed. Trad. FR Noemy S. Rudolfer. São Paulo: Melhoramentos, 1965. 92p.

JACOBINI, O.R. Modelagem matemática em sua dimensão crítica: novos caminhos para conscientização e ação políticas. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. 2007. 1 CD-ROM.

JAPIASSU, H. F. **Introdução ao pensamento epistemológico.** Rio de Janeiro, F. Alves, 4. ed., 1986.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**.** v. 38, n. 3. p. 302-310, 2006.

KLÜBER, T.E. **Modelagem matemática e etnomatemática: Aspectos filosóficos e epistemológicos.** Ponta Grossa: Universidade Estadual de Ponta Grossa, Setor Educação – Programa de Pós-Graduação em Educação. 2007. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação).

_____. Aspectos relativos à noção de prática(s) de modelagem matemática na educação matemática. **REVEMAT.** eISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 92-103, 2013.

MAANEN, J.V. Recaliming qualitative methods for organizational research: a preface, In: **Administrative Science Quaterly**, v. 24, n. 4, dec., 1979, p. 520–526.

MATTHEWS, M.R. Un lugar para la historia y la filosofía en la enseñanza de las Ciencias. **Comunicación, Lenguaje y Educación**, 11-12, 141-155, 1991.

MATTEWS, M.R.; GAULD, C.; STINNER, A. The pendulum: its place in science, culture and pedagogy. In: MATTEWS, M.R.; GAULD, C.F.; STINNER, A. (ed). **The pendulum: scientific, historical, philosophical & educational perspectives.** New York: Springer, 2005. p. 1-17.

MORAIS, J.F.R. **Filosofia da ciência e da tecnologia**: introdução metodológica e crítica. 5. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 1988.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **National Science Education Standards**. Washington D.C.: National Academy Press, 1996.

NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática.** Curitiba: Universidade Federal do Paraná – Setor de Educação – Programa de Pós-Graduação em Educação. 2008. 94f. Tese (Doutorado em Educação).

PARANÁ. **Secretaria de Estado da Educação.** Diretrizes Curriculares da Educação Básica -

Matemática. Curitiba: SEED, 2006.

PARANÁ. **Secretaria de Estado da Educação.** Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Física. Curitiba: SEED, 2008.

PIETROCOLA, M. **Ensino de Física**: conteúdo, metodologia e epistemologia em uma concepção integradora. Florianópolis: Editora da UFSC, 2005.

PINHEIRO, N.A.M. Formar cidadãos crítico-reflexivos: a contribuição da Matemática. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, Londrina, v. 28, n. 1, p. 81-92, jan./jun., 2007.

POINCARÉ, J. H. **Ciencia y método.** 2. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina S. A, 1946.

_____. **A Ciência e a Hipótese.** 2. ed. Trad. Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988.

_____. **O valor da ciência.** 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PRAIA, J.; CACHAPUZ, A.; GIL-PÉREZ, D. A hipótese e a experiência científica em Educação em Ciência: contributos para uma reorientação epistemológica. **Revista Ciência e Educação**, v. 8, n. 2, p. 253-262, 2002. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v8n2/09.pdf. Acesso em: 25 set. 2013.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 20. ed. São Paulo: Cortez, 1996.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVEIRA, E. **Modelagem matemática em educação no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. Curitiba: Universidade Federal do Paraná - Setor de Educação. 2007. 197p. Dissertação (Mestrado em Educação).

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia.** Campinas: Papirus. 2001.

_____. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade.** [Traduzido por Maria Aparecida V. Bicudo]. São Paulo: Cortez, 2007. 304p.

SOLBES, J.; VILCHES, A. STS interactions and the teaching of Physics and Chemistry. **Science Education**, n. 81, v. 4, p. 377-386, 1997.

TEIXEIRA, E.S.; FREIRE JR., O. A ciência galileana: uma ilustre desconhecida. **Cad. Cat. Ens. Fís.**, v. 16, n. 1: p. 35 – 42, abr. 1999.

THOMPSON, A. **Teacher´s beliefs and conceptions: a synthesis of the research.** In: GROUUWS, D. (org.) Handbook for research on Mathematics Teaching and Learning. Nova Iorque: Macmillan. Cap. 7, p. 127-146, 1992.

TORTOLA, E; SILVA, H.C.; ALMEIDA, L.M.W. Um olhar sobre os trabalhos do IV EPMEM à luz das perspectivas de Kaiser e Sriraman para a Modelagem Matemática. In: XI EPREM - ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Apucarana. **Resumos...** Apucarana, 2011, 1 CD-ROM.

VECCHIO JUNIOR, J. **A Filosofia de Henri Poincaré**: a natureza do conhecimento científico e os paradoxos da teoria dos conjuntos. São Paulo: Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade 2005. Dissertação (Mestrado em Filosofia).

VIDEIRA, A.A.P. Poincaré e as hipóteses indiferentes. **Revista da Sociedade Brasileira de História das Ciências**, n. 17, p. 3-10, 1997.

ZIMAN, J. The rationale of STS education is in the approach. In: SOLOMON. J.; AIKENHEAD, G. (ed.). **STS education: international perspectives on reform.** New York: Teachers Colege Press. 1994. p. 21-31.