UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

MARLI SCHMITT ZANELLA

UM ESTUDO TEÓRICO SOBRE AS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS DE NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

MARINGÁ – PR
2013

MARLI SCHMITT ZANELLA

UM ESTUDO TEÓRICO SOBRE AS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS DE NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros

MARINGÁ – PR

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Zanella, Marli Schmitt
Z28e Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária / Marli Schmitt Zanella. -- Maringá, 2013.
147 f. : il. (algumas color.), figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2013.

1. Teoria dos campos conceituais - Estruturas aditivas. 2. Teoria dos campos conceituais - Estruturas multiplicativas. 3. Números racionais - Representação fracionária. 4. Educação matemática. 5. Teorema em ação. I. Barros, Rui Marcos de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 22.ed.510.71
AMMA-00654

MARLI SCHMITT ZANELLA

Um Estudo Teórico Sobre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas de Números Racionais em sua Representação Fracionária

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Ri. Marcos de O. Barros

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Profa. Dra. Tânia Stella Bassoi
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE

Lilian Akemi Kato

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 21 de fevereiro de 2013.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me oportunizar a vida.

Aos meus pais, Celi Schmitt e Bertilo Schmitt, pelo carinho, dedicação e educação.

Aos meus irmãos e cunhadas pelo apoio e compreensão nesta etapa de estudos.

Ao meu esposo pela amizade, companheirismo, carinho e palavras de incentivo.

Ao Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros pela orientação.

Às Professoras Dra. Lilian Akemi Kato, Dra. Tânia Stella Bassoi e Dra. Célia Finck Brandt que desenvolveram críticas e sugestões pertinentes a este trabalho como membros da banca de qualificação e defesa.

À Capes pelo auxílio financeiro.

Ao PCM pela infraestrutura e recursos ofertados para a realização desta dissertação.

À Universidade Estadual de Maringá – UEM e aos professores pela formação acadêmica.

Aos colegas e amigos pela troca de experiências e aprendizado.

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo, Idelmar André Zanella, por incentivar-me, encorajar-me e vivenciar este sonho.

UM ESTUDO TEÓRICO SOBRE AS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS DE NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

RESUMO

O estudo teórico que apresentamos tem como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud. Como objetivo, propomo-nos identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura de artigos internacionais sobre números racionais em sua representação fracionária em situações problemas com estruturas aditivas e multiplicativas. Para que o processo de pesquisa ocorresse, buscamos artigos no portal de periódicos CAPES que apresentaram atividades envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais na representação fracionária. Para as estruturas aditivas foram identificadas situações problemas de composição de medidas. O principal teorema em ação mobilizado pelos estudantes na adição foi "somar numerador com numerador e, denominador com denominador". Para as estruturas multiplicativas foram identificadas situações problemas da classe de isomorfismo de medidas, e os principais invariantes detectados foram "o dividendo é maior do que o divisor" e "quociente é menor do que o dividendo". As representações utilizadas, tanto na estrutura aditiva, quanto multiplicativa, foram à linguagem natural escrita e pictórica. A identificação desses elementos da TCC, no campo conceitual aditivo e multiplicativo poderão auxiliar professores na escolha de atividades para a formação e desenvolvimento dos conceitos envolvidos nessas estruturas de racionais na representação fracionária.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais; Estruturas Aditivas; Estruturas Multiplicativas; Números Racionais na Representação Fracionária.

A THEORETICAL STUDY ABOUT THE ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE STRUCTURES OF RATIONAL NUMBERS ON THEIR FRACTIONAL REPRESENTATION

ABSTRACT

The theoretical study presented has as its theoretical approach the Conceptual Fields Theory (CFT) of Gérard Vergnaud. As our goal, we are going to identify elements of the CFT such as Situations, Invariants and Representations upon the re-reading of international articles dealing with aspects of the teaching and the learning of additive and multiplicative structures of rational numbers on their fractional representation. In order to proceed with the research, we searched the CAPES website for online journals that presented activities involving additive, subtraction, multiplication and division operations of rational numbers on their fractional representation. For the additive structures, problem situations concerning the composition measures were identified. The main theorem mobilized by the students considering the addition operator was "adding a numerator with a numerator and a denominator with a denominator". For the multiplicative structures, problem situations on the class of the isomorphism of measures were identified, and the main invariants been detected were "the dividend is greater than the divider" and "the quotient is smaller than the dividend". The representations used in both the additive and the multiplicative structures were the natural written and pictorial language. The identification of these elements of the CFT at the conceptual fields of additive and multiplicative structures may assist teachers in choosing activities for the training and development of the concepts involved in these rational structures on the fractional representation.

Keywords: Conceptual Fields Theory; Additive Structures; Multiplicative Structures; Rational Numbers on their Fractional Representation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo proposto versa acerca do ensino e da aprendizagem de números racionais em sua representação fracionária. Os fundamentos teóricos basearam-se nas proposições de Gérard Vergnaud, inerentes a Teoria dos Campos Conceituais – TCC, a qual afirma que a construção de um conceito matemático ocorre mediante a constituição de uma terna de conjuntos, composta por situações, invariantes e representações.

O tema é relevante, pois a compreensão e a manipulação dos números racionais na representação fracionária, tanto na Matemática escolar como no uso cotidiano, faz-se necessário devido à representação de informações e/ou quantidades por razões, proporções, porcentagens e probabilidades.

No Brasil, o ensino de números racionais em sua representação fracionária ocorre já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em que geralmente é dada maior ênfase à compreensão da relação parte-todo na representação figural. Tal ensino é abordado com mais especificidade nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, em que são privilegiadas as operações aritméticas dos racionais na representação fracionária.

No que diz respeito à resolução das operações aritméticas dos racionais na representação fracionária, pondera-se que os educandos possam não ter a compreensão do conceito, embora, utilizem termos fracionários corretamente e resolvam alguns exercícios coerentemente (NUNES; BRYANT, 1997).

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2001) ressalta que o conceito de número racional na representação fracionária precisa ser explorado em situações problemas para proporcionar significado aos educandos.

Nunes e Bryant (1997) enfatizam que o aprendizado dos educandos poderá ser obtido com maior êxito quando explorados em situações problemas de naturezas distintas. Acreditamos que com as contribuições da TCC seja possível explorar situações problemas diversificadas, e em sucessão de níveis de generalidade para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de racionais na representação fracionária.

Vergnaud (2009b) e Magina et al. (2009) destacam a importância de se investigar, sob a ótica da TCC, estruturas aditivas e multiplicativas dos números racionais em sua representação fracionária, o que nos levou a proposta desta dissertação.

O interesse inicial foi investigar a possibilidade de uma releitura de artigos científicos acerca do ensino e da aprendizagem de números racionais na representação fracionária.

Por meio da pesquisa bibliográfica investigamos a presença de elementos da TCC em pesquisas que envolviam atividades sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária, realizadas com alunos, do Ensino Fundamental e com acadêmicos de Licenciatura em Matemática, em nível internacional e disponibilizado no portal de periódicos da CAPES.

Desta forma, o objetivo de nosso trabalho foi identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura de artigos internacionais sobre números racionais em sua representação fracionária, em situações problemas com estruturas aditivas e multiplicativas.

Acreditamos que este estudo possibilitará detectar tendências de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária, mesmo que tais pesquisas não utilizem o aporte teórico da TCC.

Quanto à modalidade de pesquisa, esta é caracterizada como estudo teórico ou ensaio teórico, que procura fazer referência ao que já se tem descoberto sobre o assunto pesquisado, auxilia na melhoria e desenvolvimento de novos postulados, conceitos e paradigmas. Trata-se de uma atividade crítica e reflexiva (FIORENTINI; LORENZATO, 2009).

Apresentamos este trabalho em cinco seções.

Na primeira seção, justificamos a pesquisa, explicitamos o objetivo e a questão diretriz de nosso estudo, descrevemos o percurso metodológico, apresentamos resultados de pesquisas correlatas e, caracterizamos o número racional na representação fracionária e seus significados.

Na segunda seção, apresentamos as principais ideias da Teoria dos Campos Conceituais – TCC de Gérard Vergnaud, com objetivo de discutir alguns elementos que compõem a referida teoria, para fundamentar teoricamente as interpretações e inferências sobre os textos que pesquisamos.

Na terceira seção, com o intuito de identificar elementos da TCC em pesquisas realizadas com números racionais em sua representação fracionária, revisitamos o artigo de Nancy Mack (1990), que contemplou atividades de adição e subtração de frações.

A quarta seção apresenta uma releitura de pesquisas de Bulgar (2003), Tirosh (2000) e, Son e Crespo (2009), que investigaram a multiplicação e a divisão de números racionais em sua representação fracionária, em que buscamos identificar elementos da TCC.

Finalmente, na quinta seção, faremos nossas considerações sobre esta pesquisa.

SEÇÃO 1 – A PESQUISA

Nesta seção, apresentamos as justificativas para a realização desta pesquisa, os objetivos que a orientaram, descrevemos as opções metodológicas subjacentes ao estudo e apresentamos, em detalhes, seu desenvolvimento. Realizamos também breve estudo bibliográfico de pesquisas desenvolvidas no Brasil sobre os processos de ensino e aprendizagem de números racionais na representação fracionária. Ao final da seção, discutimos o conceito de número racional em sua representação fracionária e suas diferentes interpretações.

1.1 Justificativa

No que tange aos processos de ensino e de aprendizagem, nota-se que muitos questionamentos estão presentes entre os docentes de Matemática, tais como a escolha das metodologias e as estratégias de ensino. Isso ocorre com os mais diversos assuntos da disciplina, e não deixariam de existir no que diz respeito aos números racionais.

Estudos realizados na área da Educação Matemática indicam a necessidade de se investigar os processos de ensino e aprendizagem de números racionais em sua representação fracionária sob a ótica da TCC, como sugerem Merlini (2005), Nunes e Bryant (1997). Há concordância de diversos autores quanto à dificuldade enfrentada pelos alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, quando se estuda esse novo campo numérico.

Romanatto (1997) considera que as operações com números racionais são obstáculos à aprendizagem dos alunos da Educação Básica, pois:

> Um dos aspectos que podem justificar tal situação é a complexidade com que esse assunto se manifesta. O número racional deve ser entendido como uma teia de relações onde noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos a partir de diferentes contextos. (ROMANATTO, 1997, p. 101).

De acordo com Behr et al. (1983) a construção do significado dos números racionais e as operações aritméticas podem ser consideradas como as mais complexas operações da Matemática escolar.

> Os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos seus oito primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações e problemas dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; e (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas (Ibid., p.91)[1].

Para Malaspina (2007) algumas das dificuldades identificadas na aprendizagem dos alunos sobre os números racionais podem ser pontuadas, a saber:

- A representação $\frac{a}{b}, b \neq o$ é o quociente entre dois números inteiros;
- Entender que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações;
- Comparar dois números racionais em sua representação fracionária;
- Ao multiplicar dois números, o aluno espera que o produto seja um valor maior, sinônimo de que a multiplicação é uma soma sucessiva, o que não acontece com os números racionais;
- Adicionar e subtrair números racionais em sua representação fracionária;

A discussão acerca das dificuldades elencadas anteriormente também abrange os enunciados dos problemas propostos em sala de aula, e mais, as dificuldades enfrentadas na resolução de problemas não é exclusividade dos anos nos quais são trabalhados os números racionais.

De acordo com Cury (2007), as dificuldades apresentadas pelos estudantes com as operações no conjunto dos números racionais é um problema que se reproduz em

[1] Rational-number concepts are among the most complex and important mathematical ideas children encounter during their presecondary school years. Their importance may be seen from a variety of perspectives: *(a)*from a practical perspective, the ability to deal effectively with these concepts vastly improves one's ability to understand and handle situations and problems in the real world; *(b)* from a psychological perspective, rational numbers provide a rich arena within which children can develop and expand the mental structures necessary for continued intellectual development; and *(c)* from a mathematical perspective, rational-number understandings provide the foundation upon which elementary algebraic operations can later be based (BEHR et al, 1983, p.91).

outros conteúdos, pois, se o educando não sabe somar frações numéricas, também não saberá somar frações algébricas, e as dúvidas e os equívocos serão frequentes.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 1996) em pesquisa realizada em 1993, testou o desempenho escolar dos alunos de 1ª e 3ª séries (2º e 4º anos, respectivamente) e de 5ª e 7ª séries (6º e 8º anos, respectivamente) em relação à Matemática. Dentre as dificuldades encontradas pelos alunos das séries iniciais pesquisadas, estavam: divisão e adição em situação-problema, multiplicação e divisão por dois algarismos. Já nos 5º e 8º anos, o desempenho foi baixo em questões que envolviam números decimais e frações.

Os dados apresentados pelo SAEB (1996) atestam a importância de trabalhar com os alunos uma variedade de situações e em nível crescente de dificuldade, no sentido de proporcionar-lhes experiências diversificadas para a formação de conceitos matemáticos, quer no ensino da aritmética dos números naturais, quer na aritmética dos números racionais.

É sob esta ótica, que a presente pesquisa se pauta na hipótese de que as atividades e as situações problemas utilizadas nos processos de ensino e aprendizagem escolar são particularmente necessárias quando o campo numérico é o dos números racionais na representação fracionária. Tal importância se dá, tendo em vista que esses números não se apresentam de maneira natural e espontânea no dia-a-dia das crianças, senão em algumas poucas situações.

No caso dos naturais, as situações problemas podem exemplificar algumas experiências vividas cotidianamente. Já com os racionais na representação fracionária trata-se de criar, por meio de outros exemplos, uma vivência que não foi presenciada pelo aluno.

Pesquisas nacionais mais significativas, relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária, utilizaram os significados propostos por Kieren: *relação parte-todo, medida, razão, quociente e operador* (SILVA, 1997; BEZERRA, 2001; TEIXEIRA, 2008; MERLINI, 2005; LIMA, 2010). Geralmente, avaliam-se o desempenho dos alunos e as concepções de professores do Ensino Fundamental sobre os cinco significados de fração.

Nessas pesquisas, nas atividades propostas pelos autores, os poucos exemplos que contemplaram as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) de racionais na representação fracionária são do tipo clássico, ½ + ½, por exemplo. Não identificamos atividades que contemplassem situações problemas para as quatro operações de números racionais em sua representação fracionária com aporte teórico fornecido pela TCC.

Desse modo, a análise das ideias e relações provenientes dos contextos abarcados pelos enunciados de situações problemas advindos da utilização da Teoria dos Campos Conceituais - TCC permitirá dar significado a tais ideias e relações.

Por outro lado, em muitas pesquisas internacionais identificadas em periódicos de Qualis A1, observamos atividades e situações problemas que contemplaram tais operações aritméticas, e que utilizaram outros referenciais teóricos.

Desta forma, buscamos identificar nos artigos selecionados, elementos da TCC, a partir da releitura destes trabalhos.

A intenção deste trabalho é fornecer aos professores contextos indispensáveis para a construção ou aquisição de ideias e relações matemáticas necessárias à compreensão dos números racionais na representação fracionária. Indiretamente, espera-se que o presente texto auxilie alunos de 6º e 7º ano do Ensino Fundamental.

1.2 Objetivo e Questão de Pesquisa

A realização deste estudo teve como objetivo identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura de artigos internacionais sobre números racionais em sua representação fracionária, em situações problemas com estruturas aditivas e multiplicativas.

Nosso estudo direcionou-se a responder a seguinte questão de pesquisa:

Quais elementos da Teoria dos Campos Conceituais – Situações, Invariantes e Representações – podem ser identificados a partir da releitura de artigos que se voltaram para o ensino e a aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária, por meio de atividades que envolveram problemas com estruturas aditivas e multiplicativas?

1.3 Percurso Metodológico

O estudo qualitativo realizado nesta dissertação ocorreu por meio de pesquisa bibliográfica. Fiorentini e Lorenzato (2009, p.102), mencionam que a pesquisa bibliográfica também pode ser entendida como um levantamento de dados bibliográficos, cujo detalhamento consiste na busca, seleção e fichamento de informações relacionadas ao tema de pesquisa.

Quanto à modalidade de pesquisa e, de acordo com os objetivos desta investigação, nosso trabalho assume uma perspectiva teórica, portanto, pertence à modalidade de pesquisa caracterizada como estudo ou ensaio teórico (FIORENTINI, LORENZATO, 2009).

O estudo teórico trata de uma investigação que, de acordo com Severino (2007, p.206), caracteriza-se "como um estudo bem desenvolvido, formal, discursivo e concludente, consistindo em exposição lógica e reflexiva e em argumentação rigorosa com alto nível de interpretação e julgamento pessoal".

No ensaio teórico há maior liberdade, por parte do autor, para defender determinada posição, com rigor lógico e com coerência de argumentações, o que é apresentado neste trabalho com base na Teoria dos Campos Conceituais - TCC.

Em síntese, esta dissertação apresenta um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária com intuito de explorar esse assunto sob a ótica da TCC.

Esta pesquisa reflete sobre dados de estudos que trataram de aspectos do ensino e da aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária. Também interage com os diversos autores pesquisados e apresenta um novo texto, com força argumentativa e conclusões adquiridas pela reflexão.

O interesse principal é identificar e descrever elementos da TCC em artigos internacionais, para auxiliar o trabalho docente acerca dos processos de ensino e aprendizagem das estruturas aditivas e multiplicativas de racionais na representação fracionária.

O material consultado constituiu-se de periódicos, na forma eletrônica e foi submetido ao Método de Leitura Científica, que segundo Cervo e Bervian (1996), obedece a passos sistematizados, a saber:

Visão sincrética – ocorreu com a leitura de reconhecimento, que teve como objetivo localizar as fontes numa aproximação preliminar sobre o tema e, a leitura seletiva, para localizar as informações de acordo com os propósitos do estudo.

Visão analítica – que compreendeu a leitura crítica e reflexiva dos textos selecionados na busca dos significados e das ideias principais.

Visão sintética – que constituiu a última etapa do Método de Leitura Científica, que foi concretizada pela leitura interpretativa.

A abordagem por meio do Método de Leitura Científica possibilitou a construção do presente ensaio teórico, que consistiu na exposição lógico-reflexiva, com ênfase na argumentação e interpretação pessoal, sob o embasamento teórico proposto pela Teoria dos Campos Conceituais.

A pesquisa bibliográfica ocorreu por meio dos periódicos disponibilizados pelo Portal de Periódicos CAPES[2]. O primeiro passo foi à busca de pesquisas que tinham como objeto de estudo os números racionais em sua representação fracionária, em específico, investigações que tratassem das quatro operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Para isto, iniciamos nossa busca por assunto, inserindo o termo: “fractions” e “rational numbers”.

Em virtude do grande número de trabalhos contendo no título algumas dessas palavras, identificamos os publicados nos periódicos específicos da área de Avaliação da Educação classificados em nível A1, a maior classificação de Qualis da CAPES. Tal busca foi realizada no período de novembro de 2011 a março de 2012.

Nesta área, selecionamos somente os periódicos da Educação Matemática, com destaque para:

- Journal of Mathematical Behavior – JMB, de publicação da Editora Elsevier. O primeiro volume foi publicado em 1994, atualmente encontra-se no 31º volume, com publicação anual. Cada volume possui de três a quatro números.
- Journal for Research in Mathematical Education – JRME, de publicação do National Council of Teachers of Mathematics. O primeiro volume foi

[2] Acesso disponível em: http://www.periodicos.capes.gov.br/

publicado em 1970. Atualmente encontra-se no 43º volume, com publicação anual. Cada volume possui de três a seis números.

- Journal of Mathematics Teacher Education de publicação da Editora Springer. Possui 15 volumes, sendo o primeiro publicado em 1998. Atualmente encontra-se no 15º volume, com publicação anual. Cada volume possui de três a seis números.
- International Journal of Science and Mathematics Education de publicação da Editora Springer. Possui 10 volumes, sendo o primeiro publicado em 2003, e o atual, em 2012.

No Quadro 01, apresentamos os artigos encontrados nos periódicos elencados anteriormente. Consideramos as publicações do período de 1990 a 2012, em virtude de que este período apresenta número expressivo de pesquisas sobre os números racionais. Organizamos o Quadro 01 por periódicos, título dos artigos e ano de publicação.

Quadro 01 - Artigos identificados.

Nº	Ano	Título
		Periódico: Journal of Mathematical Behavior
1	1995	Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications
2	1996	Students' Understanding of Computation-Related Rational Number Skills
3	2000	Long-Term Effects of Building on Informal Knowledge in a Complex Content Domain: The Case of Multiplication of Fractions
4	2002	A New Hypothesis Concerning Children's Fractional Knowledge
5	2002	The Construction of an Iterative Fractional Scheme: The Case of Joe
6	2002	Helping Students Build a Path of Understanding From Ratio And Proportion to Decimal Notation
7	2002	Numerical Knowledge as Enabling and Constraining Fraction Knowledge: an Example of The Reorganization Hypothesis
8	2002	Children's Use of Part–Part Comparisons to Estimate Probability
9	2003	Teaching and Classroom Experiments Dealing With Fractions and Proportional Reasoning
10	2003	Tracing Fourth Graders' Learning of Fractions: Early Episodes From a Year-Long Teaching Experiment
11	2003	From Fractions To Proportional Reasoning: A Cognitive Schemes of Operation Approach
12	2003	A Collective Chain of Signification in Conceptualizing Fractions: A Case of a Fourth-Grade Class
13	2003	From Parts and Wholes to Proportional Reasoning

14	2003	Part-Whole Number Knowledge in Preschool Children
15	2003	Fractional Commensurate, Composition, and Adding Schemes Learning Trajectories of Jason And Laura: Grade 5
16	2003	A Comparison of Ratios and Fractions and Their Roles as Tools in Proportional Reasoning
17	***2003***	***Children's Sense-Making of Division of Fractions***
18	2003	Diagnostic Assessment of Children's Proportional Reasoning
19	2004	Rationals and Decimals as Required in The School Curriculum Part 1: Rationals as Measurement
20	2004	Teacher and Students' Joint Production of a Reversible Fraction Conception
21	2006	Making Sense of Instruction on Fractions When a Student Lacks Necessary Fractional Schemes: The Case of Tim
22	2007	Units Coordination and The Construction of Improper Fractions: A Revision of The Splitting Hypothesis
23	2007	Rationals and Decimals as Required in the School Curriculum Part 2: From Rationals to Decimals
24	2008	Rationals and Decimals as Required in the School Curriculum Part 3. Rationals and Decimals as Linear Functions
25	2009	Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 4: Problem solving, composed mappings and division
26	2009	Students' Whole Number Multiplicative Concepts: A Critical Constructive Resource for Fraction Composition Schemes
27	2009	A Quantitative Analysis of Children's Splitting Operations and Fraction Schemes
28	2010	Students' Partitive Reasoning
29	2011	Locating Negative Decimals on the Number Line: Insights Into the Thinking of Pre-Service Primary Teachers
30	2011	Obstacles and Challenges in Preservice Teachers' Explorations With Fractions: A View From a Small-Scale Intervention Study
31	2012	An Exploration of The Role Natural Language and Idiosyncratic Representations in Teaching how to Convert Among Fractions, Decimals, and Percents
		Periódico: Journal for Research in Mathematical Education
32	***1990***	***Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge***
33	1990	A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten
34	1990	Qualitative and Numerical Reasoning about Fractions and Rates by Seventh- and Eighth-Grade Students
35	1992	Applying Personal Construct Psychology to the Study of Teachers' Knowledge of Fractions
36	1993	Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking
37	1994	Invariance of Ratio: The Case of Children's Anticipatory Scheme for Constancy of Taste

38	1995	Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge
39	1996	Children's Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-WholeRelationships
40	1996	The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies
41	1997	Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task
42	1997	Developing Ratio and Proportion Schemes: A Story of a Fifth Grader
43	1999	Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum
44	1999	Opportunities to Learn Fractions in Elementary Mathematics Classrooms
45	1999	An Integrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting That Learning
46	***2000***	***Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions***
47	2001	Building on Informal Knowledge through Instruction in a Complex Content Domain: Partitioning, Units, and Understanding Multiplication of Fractions
48	2002	Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effectsof Using Commercial Curricula with the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum
49	2003	Low-Performing Students and Teaching Fractions for Understanding: An InteractionalAnalysis
50	2005	Representing Fractions with Standard Notation: A Developmental Analysis
		Periódico: Journal of Mathematics Teacher Education
51	2001	Preservice Teachers' Knowledge of Difficulties in Decimal Numeration
52	***2009***	***Prospective Teachers' Reasoning and Response to a Student's Non-Traditional Strategy When Dividing Fractions***
53	2009	Instructional Practices Related to Prospective Elementary School Teachers' Motivation for Fractions
54	2010	The Nature of Prospective Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge: The Case of Multiplication of Fractions
55	2011	The Structure of Prospective Kindergarten Teachers' Proportional Reasoning
56	2012	Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Fraction Division
		Periódico: International Journal of Science and Mathematics Education
57	2010	Rational Number and Proportional Reasoning: Using Intensive Quantities to Promote Achievement in Mathematics and Science

Fonte: Autores.

Os artigos elencados no Quadro 01 foram submetidos ao Método de Leitura Científica para obter uma visão sincrética desses trabalhos. Após este passo, apenas os artigos 17, 32, 46 e 52 foram submetidos aos passos sistematizados de visão analítica e sintética, sugeridos por Cervo e Bervian (1996). Ressaltamos que apenas estes quatro artigos encontrados foram utilizados na realização da pesquisa em virtude do nosso objetivo de estudo. A escolha destes artigos ocorreu por meio dos seguintes critérios:

- *Tema de investigação*: Números Racionais na representação fracionária;
- *Publico alvo*: alunos do Ensino Fundamental ou acadêmicos de Licenciatura em Matemática;
- *Tipo de atividades realizadas na pesquisa*: aquelas que realizaram atividades com as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) de números racionais na representação fracionária.
- *Tipo de pesquisa:* aquelas que explicitaram o diálogo entre alunos, entre professor/pesquisador e alunos ou que apresentaram as expressões utilizadas durante o processo de resolução de um problema, isto é, a simbologia verbal, escrita, desenhos e diagramas que o aluno usou para representar as situações propostas nas atividades.

1.4 Pesquisas Sobre os Números Racionais em sua Representação Fracionária

No Brasil, dentre as pesquisas realizadas em Educação Matemática que contemplaram o ensino de números racionais na representação fracionária, destacamos Silva (1997), Romanatto (1998), Catto (2000), Bezerra (2001), Moreira e David (2004), Merlini (2005), Silva (2008), Teixeira (2008), Silva e Almouloud (2008) e Lima (2010).

Teixeira (2008) investigou as competências e concepções de professores do 2º ciclo do Ensino Fundamental sobre os cinco significados das frações, a saber: *relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador*. Como resultado, identificou que há maior tendência dos professores em considerar as relações parte-todo e o operador multiplicativo. Constatou também que a competência em resolver problemas que contemplaram os cinco significados é insuficiente.

Moreira e David (2004) investigaram o conhecimento matemático veiculado ao processo de formação inicial do professor de matemática, confrontando-o com as questões que se colocam na prática docente na escola básica sobre o conceito de número racional e, as operações neste campo numérico. O estudo explicitou que a abordagem formal-lógico-dedutiva, nos termos em que se organiza a Matemática científica, não somente é insuficiente para a sistematização da Matemática escolar como é também, muitas vezes, inadequada. Para estes autores a Matemática científica sobre os números racionais resulta de um sistema compacto que esconde uma variedade de ideias matemáticas em alguns enunciados formais: as definições e os teoremas relativos às propriedades das operações.

A pesquisa de Silva (1997) buscou analisar a introdução das frações junto aos professores das séries iniciais. A autora privilegiou as concepções propostas por Kieren (1988): *relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador*, a fim de refletir e dar significado a este conhecimento. A metodologia adotada na pesquisa foi a Engenharia Didática, com a elaboração de uma sequência didática aplicada aos professores. Os resultados da pesquisa desta autora indicaram obstáculos epistemológicos[3] e didáticos[4] dos professores. Os obstáculos epistemológicos identificados mostram a interpretação da fração como dois inteiros não relacionados, e o uso constante do sistema métrico representado apenas pelos números decimais, isto é, quando se trata da representação de quantidades contínuas para concepção de medidas, a mais utilizada é a representação por números decimais, e não por frações. Com relação aos obstáculos didáticos, a autora relata três problemas: i) a associação de fração a uma figura, o todo dividido em partes iguais; ii) a falta do entendimento do conceito de medida, o que dificulta medições com outras unidades não usuais; iii) o resultado de divisões apenas como decimais.

Silva e Almouloud (2008) abordaram as operações aritméticas com números racionais na representação fracionária a partir de representações de figuras planas, em que mobilizaram a concepção parte-todo. As atividades apresentadas no trabalho resultaram do projeto de formação de professores, do qual os autores participaram. As atividades apresentadas podem auxiliar o aluno na compreensão das regras operatórias sobre números racionais na representação fracionária com significado, entretanto, não são suficientes para atingir a conceitualização dos conceitos envolvidos. Os resultados

---

[3] Obstáculos epistemológicos: são inerentes ao próprio saber, constitutivos do próprio conhecimento (SILVA, 1997).
[4] Obstáculos didáticos: dependem da escolha de um projeto institucional, são criados pela escola por meio da estratégia de ensino adotada que provoca obstáculos ao desenvolvimento da conceitualização (SILVA, 1997).

da pesquisa apontam a necessidade de descontextualizar as situações para que as habilidades com o cálculo se desenvolvam independente de representações figurais, para que desta forma, o aluno possa aprender tais regras e não memorizá-las. Para Silva e Almouloud (2008), o que se observa é a impotência do aluno frente a cálculos simples com números racionais na representação fracionária.

Romanatto (1998) destacou aspectos epistemológicos e metodológicos para existência de uma compreensão dos números racionais, sendo, portanto, uma pesquisa que avaliou aspectos teóricos dos processos de ensino e aprendizagem.

Outro aspecto relevante ao ensino de frações é a respeito dos registros de representações semióticas dos racionais, encontrados em livros didáticos.

Silva (2008) investigou a introdução da reta graduada como um registro semiótico para os números racionais, o que ampliou a possibilidade de enfrentamento das dificuldades dos alunos inerentes à conotação do campo dos números racionais. A pesquisa teve como fundamentação teórica a Teoria das Representações Semióticas de Duval, e indicou que a utilização da reta graduada como um registro de representação é capaz de fornecer ao aluno melhor noção deste número racional, desvinculado do procedimento da dupla contagem ou de informações visuais adquiridas apenas de figuras ilustrativas.

Catto (2000) também utilizou a Teoria das Representações Semióticas de Duval e, conclui que existe conversão entre os registros de representação numérica e figural em livros didáticos destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Sobre os cinco significados dos números racionais na representação fracionária – relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador, identificam-se na literatura, algumas pesquisas realizadas com alunos do Ensino Fundamental.

Bezerra (2001) propôs uma sequência de ensino para alunos de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental, em que investigou a introdução do conceito de número racional na representação fracionária. Aplicou um pré-teste e um pós-teste durante a sequência de ensino para dois grupos de alunos, nomeadamente, um grupo de Controle (GC) e outro grupo experimental (GE). Os resultados da pesquisa indicaram que, embora os estudantes tenham apresentado avanços cognitivos após o estudo, ainda possuíam alguns tipos de erros, a saber:

- Relacionar parte-parte, em quantidades contínuas e discretas, ou seja, os estudantes contaram as partes pintadas de uma figura, e indicaram como numerador. As partes não pintadas indicaram como denominador, sem relacionar ao todo.
- Relacionar todo-parte, em quantidades discretas ou contínuas, o que implicou na inversão de numerador e denominador.
- Representar a fração apenas por números naturais.
- Relacionar o termo “quinta parte” a cinco elementos de um conjunto.
- Realizar a divisão de uma quantidade contínua sem conservar a área.

Com relação às dificuldades encontradas pelos alunos no trabalho com os números racionais na representação fracionária, Merlini (2005) destaca que o entendimento dos estudantes de 6ª série/ 7º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de medida, com unidades não usuais, muitas vezes é baixo. A causa desta dificuldade é a tendência do uso de algoritmo, sem, no entanto, abordar situações problemas nas operações de adição e subtração.

Lima (2010) propôs aos alunos de 6ª série/ 7º ano do Ensino Fundamental atividades que contemplaram medição de segmentos com a utilização de um software de geometria dinâmica, em que favoreceu a divisão de segmentos, adição e subtração de frações e, decimais como medida de segmentos. Desta forma, potencializou o ensino e facilitou a aprendizagem dos estudantes em relação à compreensão das representações decimais e a coordenação entre as representações fracionária, decimal e figural.

No contexto internacional têm-se expressivas pesquisas, como *The Rational Number Project*, desenvolvido nos Estados Unidos desde 1979 até atualmente. É um projeto de pesquisa que envolve pesquisadores de diversas universidades, entre os coordenadores estão Guershon Harel – University of Califórnia, Richard Lesh – Indiana University, Thomas Post e Kathleen Cramer – University of Minnesota. O grupo tem produzido livros, artigos e materiais pedagógicos sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais na representação fracionária. Os principais textos produzidos por este grupo são os trabalhos de Behr et al. (1983) e Post et al. (1993), que foram utilizados nesta dissertação.

Alguns autores comentam que muitas das dificuldades das crianças decorrem do fato de aplicarem o conhecimento que possuem acerca dos números inteiros às frações, o que os leva a acreditar que a representação simbólica $\frac{a}{b}$ nada mais é do que dois números inteiros, um sobre o outro. A consequência disso, por exemplo, é considerar que $\frac{1}{3}$ é menor do que $\frac{1}{4}$, porque três é menor do que quatro (MACK, 1990; NUNES; BRYANT, 1997; BEZERRA, 2001).

Além dessas dificuldades documentadas em pesquisas realizadas com crianças, o próprio conceito de fração é de natureza complexa. Para exemplificar esta afirmação, considere o contexto em que a situação problema está inserida, dependendo deste, a fração pode assumir diferentes significados (BEHR et al., 1983), tais como:

- Um número em uma reta numérica (três meios – 3/2);
- Um operador (um quarto de 12 balas);
- Um quociente (duas barras de chocolate divididas igualmente entre cinco crianças);
- Uma relação parte-todo (a fração que representa uma fatia de pizza, a qual foi repartida em 12 fatias).

Com relação às dificuldades de aprendizagem sobre o conceito dos racionais na representação fracionária, Post et al. (1993) destacaram que os professores de matemática apresentam baixos índices de conhecimento matemático e pedagógico, ou seja, na maioria das vezes, os professores não compreendem a matemática que devem apresentar aos estudantes.

Kerslake (1986) investigou o conhecimento sobre os números racionais na representação fracionária de 1000 alunos, com faixa etária entre 11 e 15 anos, na Inglaterra. Os resultados evidenciaram que o modelo mais consistente que os alunos possuem é o entendimento da fração como as partes de um todo. Outra constatação é que para os estudantes, entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ existe apenas a fração $\frac{1}{3}$.

Com relação aos significados atribuídos às frações, Behr et al. (1983) destacaram a medida e a relação parte-todo como de importância fundamental ao processo de aprendizagem. De acordo com estes autores, existem vantagens significativas em introduzir o ensino das frações por meio de medida de quantidades, discretas e contínuas, tendo em vista que, historicamente, frações e medidas foram desenvolvidas simultaneamente. Além disso, o processo de medição está relacionado com a ideia de contar, utilizada na aprendizagem dos números naturais. Tais autores até propõem um currículo, baseado no conceito de medida, para o ensino desse conteúdo.

1.5 O Conceito de Número Racional e seus Significados

O conjunto dos números racionais pode ser caracterizado da seguinte maneira: consideramos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ($\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$), a relação de equivalência *R*, em que dois pares ordenados *(a,b)* e *(c,d)* estão relacionados se, e somente se, $ad = bc$.

A coleção de todos os pares que representam o mesmo número racional é denominada uma classe de equivalência de *R* e, o conjunto das classes de equivalência é chamado espaço quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência *R*.

Um número racional é uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros, mediante a relação $(a,b)R(c,d)$ se, e somente se, $ad = bc$. De acordo com essa abordagem, o número racional $\frac{2}{3}$ é a classe de equivalência dada pelos pares $\{(2n, 3n), n \in \mathbb{Z}^*\}$. Analogamente, o número racional zero seria a classe $\{(0,n), n \in \mathbb{Z}^*\}$ e o racional 1 seria $\{(n,n), n \in \mathbb{Z}^*\}$.

A classe de todos os pares equivalentes a *(a, b)* é representada por $\overline{(a,b)}$. As operações de adição e multiplicação de racionais são definidas, respectivamente, como: $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)}$ e $\overline{(a,b)} \times \overline{(c,d)} = \overline{(ac, bd)}$.

A adição de racionais é comutativa, associativa, tem elemento neutro (0) e todo racional tem oposto ou simétrico. A multiplicação também é comutativa, associativa, tem elemento identidade (1) e todo racional (*a*,*b*) com a $a \neq 0$ tem inverso (*b*, *a*). Desta forma, dizemos que o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ possui estrutura de *grupo comutativo* em relação à adição e à multiplicação. A multiplicação é distributiva em relação à adição e, assim, reúnem-se todas as propriedades que caracterizam $\mathbb{Q}$ como uma estrutura de *corpo*.

Por definição, (*a*,*b*) > 0 se *a* e *b* forem não nulos de mesmo sinal e, (*a*,*b*) < 0 se *a* e *b* tiverem sinais diferentes (lembremos que *a* e *b* são inteiros). Um número racional (*a*,*b*) é maior do que o número racional (*c*,*d*) se (*a*,*b*) – (*c*,*d*) > 0. Desta forma, $\mathbb{Q}$ pode ser considerado em sua estrutura de corpo ordenado.

Existem duas representações dos racionais, uma na qual se expressa a classe de equivalência na forma fracionária $\frac{p}{q}$ e outra, na qual se utiliza o sistema de numeração posicional de base dez (representação decimal).

Essas duas formas de representação estabelecem relações diretas e inversas entre dividendo, divisor e quociente que precisam ser exploradas para a conceitualização de um número racional.

O número $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0)$ pode ser representado mediante decimais. Para obter a representação na forma decimal considera-se o par (p, q), ou a forma $\frac{p}{q}$, e efetua-se a divisão de p por q. Dois casos podem ocorrer:

1º) A representação decimal possui quantidade finita de algarismos, diferente de zero. Exemplos: $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

2º) A representação decimal possui quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, o que denomina-se dízima periódica. Exemplos:

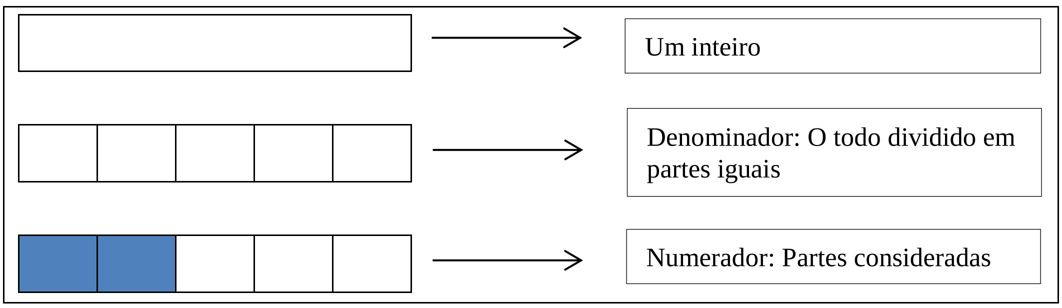
$$\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots. = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714 \ldots = 0{,}\overline{285714}.$$

A representação fracionária de um número racional identifica-se com uma operação de divisão entre numerador e denominador. Nesse caso, compreende-se a unidade dividida em partes iguais, ao qual a quantidade é dada pelo denominador. Compreende-se, então, que se deve considerar uma quantidade de partes, equivalente ao numerador.

No Quadro 02 ilustramos uma interpretação advinda do uso da representação fracionária do número racional “dois quintos”.

Quadro 02 – Interpretação da representação $\frac{2}{5}$.



Fonte: Autores.

Com relação à conceitualização do número racional, nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) este número pode ser interpretado como relação parte todo, quociente, razão e operador:

> A relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes. Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro $(a{:}\,b = a/b;\, b \neq 0)$. Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em três partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: 2/3. Uma terceira situação, diferente das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”. [...] o significado do operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, num problema do tipo “que número devo multiplicar por 3 para obter 2” (PCN, 1997, p.68).

Na literatura, encontramos os números racionais interpretados em seis formas, chamadas de significados ou subconstrutos[5], a saber: uma comparação parte-todo, um número decimal, uma proporção, uma divisão indicada (quociente), um operador, e uma medida de quantidades, contínuas ou discretas. Para este estudo vamos utilizar os cinco significados propostos por Kieren (1988), que não considera o significado de número decimal.

Kieren (1999) afirma que o domínio matemático dos números racionais requer a compreensão de cada um dos subconstrutos, separadamente: a interpretação parte-todo, razão, quociente, operador e medida, e também, das relações entre estes subconstrutos.

A *interpretação parte-todo* de número racional depende diretamente da compreensão da possiblidade de partição de uma quantidade contínua ou, do agrupamento em partes iguais de um conjunto de objetos discretos. Este subconstruto é fundamental para todas as interpretações posteriores, considerado uma construção de linguagem geradora (BEHR et al., 1983; KIEREN, 1999).

A compreensão de tal relação auxilia a produção da linguagem fracionária durante os processos de ensino e aprendizagem, em que os textos escolares de

---

[5]Subconstrutos são elementos do conhecimento (BEHR et al., 1983).

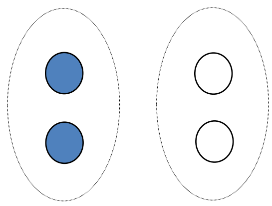
matemática e o discurso do professor orientam o estudante a realizar a dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar quantas dessas partes foram consideradas (numerador).

Geralmente, a interpretação parte-todo é introduzida no início do currículo escolar, no Ensino Fundamental. Figuras geométricas, conjuntos de objetos discretos, e a reta numérica são utilizados para possibilitar a compreensão de tal significado da representação na forma fracinária.

De acordo com Behr et al. (1983), trabalhar com figuras geométricas se apóia sobre as noções intuitivas de área que a criança constrói durante sua vida. Além disso, pode ser trabalhado antes mesmo da interpretaçao da representação fracionária de "quociente". A facilidade de fazer modelos com tiras de papel favorece o desenvolvimento da linguagem – oral e escrita, bem como a representação pictórica para os símbolos matemáticos.

Quando se trabalha com desenhos ou figuras geométricas para compreensão dos números racionais na representação fracionária, há estreita relação entre os subconstrutos parte-todo e medida (BEHR et al., 1983). O Quadro 03 diferencia a relação parte-todo no caso contínuo e discreto.

Quadro 03 - Representação geométrica e simbólica da relação parte-todo no caso contínuo e discreto.

 Caso contínuo: um terço do retângulo foi colorido, pois foi dividido em três partes iguais e apenas uma foi considerada.	 Caso discreto: metade das bolinhas foi pintada, pois o total de bolinhas foi dividido em duas partes com mesma quantidade e apenas uma foi considerada.

Fonte: Autores.

A <u>*interpretação de medida*</u> aproxima-se da interpretação parte-todo, pois toma determinada quantidade como unidade de medida. Destacamos a noção de medida em quantidades extensivas e intesivas.

As quantidades extensivas referem-se à comparação de duas quantidades de mesma natureza. Podem ser adicionadas e mensuradas por unidade de mesma natureza.

Há distinção também entre quantidades contínuas, como por exemplo, metros e, quantidade discreta, como na contagem de bolas de gude.

As quantidades intensivas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes. Por exemplo: reais por quilo, quantidade de açucar em relação à quantidade de suco. Logo, não podem ser simplesmente adicionadas. São medidas de uma relação de duas magnitudes (TEIXEIRA, 2008).

A <u>interpretação de razão</u> transmite a noção de grandeza relativa, utilizada como comparação.

Quando dizemos que “paga-se R$2,00 pelo quilo da maçã” expressamos o preço em forma de razão. Essa expressão não pode ser transformada numa fração com o intuito de representar o valor de determinada quantidade de maçã, pois não podem ser reunidas para formar um todo (MAGINA et al., 2009).

A fração como expressão de quantidade – 2/3, 1/5, somente é aplicável a quantidades intensivas, ou seja, quando duas unidades diferentes podem ser reunidas em um todo. É o caso, por exemplo, da mistura de suco concentrado e água, estamos formando um todo. Podemos descrever a receita do suco de duas maneiras:

Linguagem de razão: 3 copos de suco concentrado para cada copo de água.

Linguagem da fração: 3/4 de suco concentrado para 1/4 de água.

No caso da representação escrita na forma de fração (3/4), pode-se indicar uma quantidade “três quartos”, como também uma divisão “três dividido por quatro”.

A <u>*interpretação de quociente*</u> se refere à operação de divisão. Isto é, a representação na forma de fração a/b é utilizada para expressar a divisão de *a* por *b*. Este significado está presente nas situações em que a divisão é utilizada como estratégia de resolução de um problema (BEHR et al., 1983).

Se o grupo a ser formado é conhecido, então o quociente representa o tamanho de cada grupo. Esta interpretação extrapola as ideias pertencentes ao significado da relação parte-todo, isto porque, nas situações que envolvem a ideia de quociente temos duas variáveis, por exemplo, chocolate e crianças.

Na interpretação do quociente, a representação na forma de fração corresponde à divisão – dois chocolates para cinco crianças, e também, ao resultado da divisão – cada criança receberá 2/5 do chocolate.

Na *interpretação de operador multiplicativo* a representação na forma de fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, isto é, um multiplicador da quantidade indicada.

Para Behr et al. (1983) o operador multiplicativo p/q pode ser interpretado como uma função que transforma figuras geométricas semelhantes às figuras geométricas multiplicado por p/q. Qualquer segmento de comprimento x operado por p/q é esticado p vezes o seu comprimento e, em seguida, reduzido ao fator q.

A interpretação do operador multiplicativo é particularmente útil no estudo de equivalência de representações de racionais na forma de frações e, na operação de multiplicação.

Desta forma, o problema de encontrar representações equivalentes a uma dada representação na forma de fração é o de encontrar uma função que realiza as mesmas transformações de entrada e de saída, como se fosse uma máquina.

Portanto, a multiplicação de números racionais representados na forma de frações envolve composição de funções. Para exemplificar, podemos compreender a reapresentação 3/4 como um processo resultante de uma composição de funções.

Consideramos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, $f(x) = 3x$. Consideramos a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, $g(x) = \frac{x}{4}$. A representação 3/4 pode ser compreendida como a função composta $g \circ f$ ou $f \circ g$, isto é, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{3x}{4}$ e, $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{3x}{4}$. Imagina-se o número x como a medida de um segmento antes de se pensar na sua composta (BEHR et al., 1983).

Kieren (1994) justifica o operador multiplicativo como modelo para a estrutura de grupo multiplicativo dos racionais e para a construção escolar da noção geral de equivalência, dois elementos fundamentais da estrutura algébrica corpo quociente.

O subconstruto operador relaciona-se com o produto e a divisão de racionais. Enquanto que a adição está mais vinculada ao subconstruto medida.

O trabalho com as outras interpretações deve ajudar o desenvolvimento das habilidades intelectuais associadas à estrutura aditiva e à ordem nos racionais. O operador, sendo uma função, não se presta bem às tarefas relacionadas com as noções de maior e menor em $\mathbb{Q}$.

No Quadro 04 apresentamos uma síntese das diferentes interpretações do número racional em sua representação fracionária inspirada nos trabalhos de Kieren (1988) e Behr et al. (1983), pois a aprendizagem do conceito do número racional na representação fracionária pode ser obtida com maior êxito quando explorada em seus diferentes significados, sendo importante considerar os invariantes operatórios do conceito, explicitamente, na elaboração das tarefas.

Quadro 04 – Exemplos.

Significado	**Interpretação**	**Exemplo**
Parte-todo	Divisão do todo em partes iguais. Dupla contagem.	Ana dividiu uma barra de chocolate em três partes iguais, e comeu 2 dessas partes. Que fração representa a parte restante de chocolate?
Medida	Determinada parte é tomada como referência para medir outra.	Numa caixa há 3 bolas coloridas, 2 azuis e 1 vermelha. Se você tirar uma bola, sem visualizá-la, qual a chance dela ser azul?
Razão	A quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Para fazer suco de morango, deve-se misturar 3 copos de suco concentrado de morango para 2 copos de água. Que fração de água é utilizada?
Quociente	A fração indica uma divisão e o seu resultado.	Divida 2 chocolates para 5 crianças. Que fração representa a quantidade de chocolate que cada um recebeu?
Operador multiplicativo	A fração é um multiplicador de determinada quantidade.	João bebeu 1/3 de refrigerante de uma garrafa de 600 militros. Quantos mililitros ele bebeu?

Fonte: Autores.

SEÇÃO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresentamos as principais ideias do referencial teórico utilizado nesta pesquisa, com discussão sobre definições e conceitos que a compõem. A Teoria dos Campos Conceituais fundamentou as interpretações e inferências de textos que contemplaram atividades com números racionais. Este referencial norteou a configuração desta dissertação para discutirmos, na sequência, as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais na forma fracionária.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais – TCC foi proposta pelo psicólogo, pesquisador e professor Gérard Vergnaud. O autor afirma que esta não é uma teoria didática ao destacar que "por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja em si uma teoria didática" (VERGNAUD, 1993, p.1). No entanto, Pais (2008) ressalta:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objetivo de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (Ibid., p.11).

Portanto, entendemos que a TCC pode sim, ser caracterizada como uma teoria didática, pois está situada num sistema que liga o saber, o aluno e o professor. Astolfi (2002, p. 81) destaca que a didática é simbolizada por um triângulo e seus vértices representam a estrutura conceitual e a epistemologia (vértice saber), as diversas psicologias da aprendizagem (vértice aluno) e os modelos de ensino (vértice professor).

A didática da matemática estuda as situações inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem, dá importância à significação das tarefas e das atividades propostas aos educandos, privilegia a relação entre a elaboração de conceitos e as atividades a serem trabalhadas em sala de aula, de tal forma que, favoreçam a formação e o desenvolvimento dos conceitos (ASTOLFI, 2002, p.79). Para colocar em discussão os conteúdos teóricos e práticos do ensino e os métodos e procedimentos que lhe são associados, a didática tem como objetivos analisar os comportamentos e os discursos produzidos pelos alunos, bem como as escolhas e as ações dos docentes.

Nesse aspecto, podemos ressaltar que a TCC proporciona o estudo das ações dos alunos e as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem. Proporciona ao professor uma compreensão das ações do estudante, fornecendo subsídios para a organização dos conteúdos em sala de aula, de modo a privilegiar uma diversidade de situações[6] relacionadas ao mesmo conceito. Desta forma, concordamos com Pais (2008), quando afirma que a TCC é uma proposta didática, pois:

> [...] esta teoria indica uma consistente proposta didática para o problema da construção do significado do saber escolar, com a participação efetiva do aluno no processo cognitivo. Além disso, está em sintonia com a ideia contemporânea de contextualização do saber escolar, reforçando, assim, sua importância para a educação matemática (Ibid., p.13).

A partir de reflexões sobre o ensino de ciências e matemática, mais especificamente sobre a TCC, Vergnaud (1993) destaca:

> A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica (Ibid., p.1).

Para Vergnaud (1993, p.1) a TCC preocupa-se com a formação e o desenvolvimento de conceitos, visto que é "[...] uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual".

No caso específico da matemática, geralmente, após a percepção de propriedades, estruturas e possíveis padrões de comportamento caracterizam-se os objetos matemáticos mediante o uso de uma definição. Entretanto, a apresentação de uma definição "esteriliza" o conceito de quase todas as ligações com os campos de aplicação e com as propriedades e padrões investigados.

> Os conhecimentos que a criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, a criança, é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de

[6] Para a TCC a palavra situação tem o mesmo significado de atividades, não está relacionada com o termo "situações didáticas" utilizado por Brousseau. Definiremos claramente o termo "situação" na seção 2.3 deste capítulo.

> transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói (VERGNAUD, 2009b, p.15).

A TCC dedica-se aos estudos da formação do conceito pela criança em diferentes domínios do pensamento racional, o que possibilita ao professor estimular e valorizar esta atividade dos alunos, ainda mais, trata-se de um conhecimento sobre o conteúdo a ser ensinado e das relações desse conteúdo com as atividades que os educandos são capazes de realizar, o que nos possibilita compreender como estes aprendem os conceitos, em especial, os conceitos relacionados à Matemática.

Segundo Pais (2008, p.52), a TCC serve como “[...] parâmetro orientador para que a educação escolar não permaneça na dimensão empírica do cotidiano nem se perca no isolamento puro da ciência” e fornece subsídios ao professor para diagnosticar a aprendizagem e as dificuldades dos estudantes durante o processo de aquisição do conhecimento, pois:

> [...] a estrutura dos campos conceituais também é útil para auxiliar professores a organizar situações didáticas e intervenções, que dependem tanto da epistemologia da matemática quanto de uma melhor compreensão do processo de conceitualização dos estudantes (VERGNAUD, 2009a, p.83, tradução nossa)[7].

Assim, a TCC tem por objetivo estudar em que condições o aluno pode compreender, assimilar e acomodar um determinado conceito oriundo do saber escolar. De acordo com Vergnaud (2009a) a TCC possui dois objetivos principais, os quais têm a finalidade de:

> [...] (1) descrever e analisar a complexidade progressiva, a longo e médio prazo, das competências matemáticas que os estudantes desenvolvem dentro e fora da escola e (2) estabelecer melhores conexões entre a forma operacional do conhecimento, que consiste em ação no mundo físico e social, e a forma predicativa do conhecimento, que consiste na linguagem e na expressão simbólica desse conhecimento (Ibid., p.83, tradução nossa)[8].

Quando o autor destaca a complexidade progressiva das competências matemáticas, refere-se ao desenvolvimento e à aprendizagem do educando quando este se depara com situações problemas. Tal complexidade depende dos enunciados das

---

[7] [...] the conceptual field framework is also useful to help teachers organize didactic situations and interventions, depending on both the epistemology of mathematics and a better understanding of the conceptualizing process of students (VERGNAUD, 2009a, p. 83).

[8] [...] (1) to describe and analyse the progressive complexity, on a long-and medium-term basis, of the mathematical competences that students develop inside and outside school, and (2) to establish better connections between the operational form of knowledge, which consists in action in the physical and social world, and the predicative form of knowledge, which consists in the linguistic and symbolic expressions of this knowledge (VERGNAUD, 2009a, p. 83).

situações, da estrutura cognitiva dos educandos, do contexto envolvido, da característica numérica dos dados e de sua apresentação aos estudantes.

As situações mais proveitosas são as que relacionam vários conceitos, já que a TCC considera a existência de conceitos interligados, que formam uma rede complexa.

O desafio do docente de Matemática, que compartilha a ideia anterior, é, portanto, elaborar situações problemas adequadas à relação de conceitos, aos debates e às representações utilizadas. É justamente uma das propostas da TCC, repensar as condições da aprendizagem conceitual, isto é "[...] estudar a questão do significado dos conceitos no contexto escolar, sem perder de vistas suas raízes epistemológicas" (PAIS, 2008, p.51).

Para Vergnaud (2009b) a formação e o desenvolvimento de um conhecimento conceitual devem emergir a partir de situações problemas que levem em consideração: a representação e o conceito e, os invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) na situação problema.

Para Astolfi (2002, p. 155) situações problemas são mais vastas e melhor calibradas, pois tomam como ponto de partida um problema complexo a analisar e resolver. Tais situações problemas podem ser construídas em torno de uma dificuldade de aprendizagem que foi identificada e que se tratará de transpor mediante debate científico em sala de aula.

Entretanto, o planejamento de situações problemas deve considerar o conhecimento prévio do aluno. De acordo com Magina et al. (2008, p.6) "a aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações e problemas já conhecidos, tendo características locais. Consequentemente, todos os conceitos têm um domínio de validade restrito". Neste caso, a restrição refere-se à experiência e ao desenvolvimento cognitivo do aluno.

Os conhecimentos anteriormente desenvolvidos podem ser associados à noção de competência. Por meio de experimentações com várias situações é possível desenvolver algumas competências. A TCC considera que "problemas teóricos e práticos levam à formação de conceitos, enquanto que, conceitos explícitos e conhecimentos implícitos levam à formação de competências" (Ibid., p.12). Geralmente, quando o aluno vivencia novas situações (novas relações e dados numéricos) utiliza o conhecimento desenvolvido anteriormente buscando adaptá-lo, e neste sentido, o que se adapta são os esquemas[9].

Conforme Magina et al. (2008, p.13), a competência é traçada pela ação do aluno diante das situações problemas, que são escolhidas e formuladas adequadamente pelo professor. As concepções dos educandos podem ser traçadas pelas representações simbólicas ou expressões verbais. A relação entre elas pode ser compreendida pelo conceito de esquema, proposto por Vergnaud (1993). O esquema compreende objetivos e antecipações, regras de ação, inferências, invariantes operatórios.

Os conhecimentos prévios dos alunos (aqueles que os estudantes trazem consigo antes do professor explorar formalmente um determinado conceito na sala de aula) aparecem durante a resolução de um problema, ou seja, têm relação com os conhecimentos implícitos sobre determinado conceito ou objeto matemático, pois significa que podem resolver um problema proposto, sem, entretanto, saber explicar como se obteve tal resultado.

O conhecimento é implícito quando os estudantes o utilizam na ação, na escolha das estratégias que utilizam ao resolver um problema, ou seja, quando o conhecimento utilizado participa dos esquemas. Por isso o conhecimento implícito é demasiadamente difícil de detectar (SANTANA, 2010).

Os conhecimentos que os estudantes possuem ou adquirem no decorrer da aprendizagem podem ser explícitos quando estes o expressam de forma simbólica, por meio da linguagem, dos gestos, das palavras, dos esquemas que apresentam, em suma, podem expressá-los por meio de suas ações.

2.2 O Conceito

De acordo com Astolfi (2002) um conceito é considerado um conjunto de elementos que possuem os mesmos atributos. No plano didático, um conceito é diferenciado em três dimensões: “uma **denominação**, que permite etiquetá-lo, uma **definição em extensão**, a partir de uma lista de exemplos, uma **definição em compreensão**, pela identificação dos atributos que são comuns aos exemplos” (Ibid., p.31, grifos do autor).

---

[9] Esquema está definido na seção 2.4 deste capítulo.

A denominação a que se refere o autor é o significante do conceito e designa um pensamento abstrato do sujeito. Esta denominação permite rotular o conceito por meio de uma lista de atributos dada ao conceito. Os atributos são a definição em compreensão, que é o significado do conceito, os quais podem ser aplicados aos exemplos que fornecem uma definição em extensão, e a esta última é o que chamamos de referente (ASTOLFI, 2002). No entanto, nem sempre temos facilidade para desvincular um conceito do exemplo que utilizamos para identificá-lo.

Para Astolfi (2002) o conceito científico é um utensílio intelectual. Este é utilizado para resolver situações problemas. O conceito não se aprende de maneira estática, não é cumulativo, mas é considerado o ponto de partida para o desenvolvimento de uma atividade intelectual, pois fornece subsídios ao educando para explicar suas estratégias e auxiliá-lo na tomada de decisões quando é confrontado com situações novas. No entanto, não é um simples instrumento de explicação, embora ofereça desenvolvimento e progresso ao saber do aluno. Neste sentido o autor ressalta que:

> Os conceitos não vêm preencher o vazio da ignorância, nem tomar o lugar dos erros por simples substituição. Eles transformam ideias e representações preexistentes, por meio de rupturas e reorganizações conceptuais. Os erros são reveladores dos modos de pensamento subjacentes (Ibid., p.32).

De acordo com Vergnaud (1993) um conceito funciona sempre em relação com outros conceitos teóricos e técnicos. É um nó numa rede complexa de relações, coerente e organizada. Qualquer conceito possui uma extensão e uma compreensão, um domínio e uma validade, dependentes de uma definição prefixada. Deste modo concordamos com o autor quando afirma que se estamos interessados na aprendizagem e no ensino de um conceito, então não podemos reduzi-lo a uma definição.

A TCC considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações problemas (MAGINA et al., 2008, p.6).

A compreensão de um conceito pelo aluno não se dá quando este é confrontado com uma única situação, afinal um conceito não deriva apenas de uma situação. Cada situação sempre envolve mais de um conceito. Nem um só conceito nem uma só situação isolada dão conta do processo de aquisição de um determinado conhecimento, pois os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações (VERGNAUD, 1993). A natureza das situações problemas deve ser teórica e prática. É importante considerar o papel da linguagem e do simbolismo na conceitualização e na ação dos estudantes.

A utilização adequada das situações problemas auxilia o aluno na percepção das conexões existentes entre os vários conceitos. Com isto, o conhecimento passa ser concebido como uma sucessão de adaptações que o aluno realiza a partir de situações que vivencia na escola e na vida cotidiana (PAIS, 2008).

Para Vergnaud (1996), uma abordagem psicológica e didática da formação dos conceitos matemáticos considera o conceito como um conjunto invariante que o aluno utiliza na ação e que "[...] a definição pragmática de um conceito ocorre ao conjunto das situações que constituem a referência das suas diferentes propriedades e ao conjunto dos esquemas postos em acção pelos indivíduos nessas situações" (Ibid., p.166).

Em suma, dizemos que o conjunto de situações é o referente do conceito, os invariantes são os significados do conceito e as representações simbólicas são os significantes do conceito. Vergnaud utilizou esses três elementos para caracterizar a TCC, é o que será apresentado na próxima seção.

2.3 Os Principais Elementos da TCC: Situação, Invariante e Representação.

Para estudar a formação e o desenvolvimento de um conceito durante a aprendizagem dos educandos. Vergnaud (1993) ressalta a importância de considerarmos o conceito formado por uma terna de conjuntos (*S, I, Y*)[10], a saber:

> *S* conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência). *I* conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). *Y* conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (Ibid., p.8).

As situações, os invariantes e as representações são conjuntos indissociáveis para a TCC. Para estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito durante os processos de ensino e aprendizagem é necessário considerar que estes três conjuntos ocorram simultaneamente nas práticas escolares. Entretanto, não podemos afirmar que

[10] Utilizamos neste trabalho a nomenclatura (S, I, Y) para representar a terna de conjuntos das situações – S, dos invariantes – I, e das representações – R. Ressaltamos que podem ocorrer variações desta representação na literatura, como encontrado em Magina (2008), na qual tem-se (S, I, R). Vergnaud (1996) também utiliza (S, I, s).

há uma bijeção entre tais conjuntos, ou seja, não se pode reduzir o significado ao significante, nem às situações, e vice-versa.

Para a TCC o conjunto das situações está associado aos processos cognitivos e as respostas dos alunos quando confrontados com tais situações, que tem o mesmo sentido de atividades ou de tarefas, diferente da definição dada por Guy Brousseau, em que a dimensão afetiva interfere tanto quanto a dimensão cognitiva. Vergnaud (1993, 1996) descreve duas ideias principais sobre as situações:

> A de **variedade**: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis; a da **história**: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentam e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1993, p. 11).

Divide-se em duas as classes de situações, sendo a primeira, aquelas em que o aluno possui competências necessárias ao tratamento das informações na situação dada em determinado momento de seu desenvolvimento cognitivo e, aquelas em que o estudante não dispõe das competências necessárias, e que necessita de tempo para reflexão e maturidade para resolvê-las (Ibid.).

Estas ideias apresentadas por Vergnaud formalizam o estreito laço entre a situação e o conceito, muito utilizado pela TCC, de modo que um conceito não assume o seu significado numa única classe de situações e que uma situação não se analisa por meio de um único conceito (BRUN, 1996).

Para uma classe de situações, o aluno tem várias decisões a tomar, e estas são também objeto de uma organização invariante. Magina et al. (2008) ressalta que o conjunto dos invariantes compreende os objetos, as propriedades e as relações que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar as situações, e que expressam a compreensão do educando sobre o conceito, por isso os invariantes dão significado ao conceito.

Os invariantes, também chamados de invariantes operatórios, dividem-se em três tipos lógicos: proposição, função proposicional e argumento.

Invariantes do tipo proposição

Os invariantes do tipo proposição são aqueles que em um determinado domínio podem ser verdadeiros, mas em outro podem ser falsos. Tomemos por exemplo a seguinte afirmação: No conjunto dos números naturais a operação de multiplicação equivale a soma sucessiva de parcelas iguais, que sempre aumenta.

Esta afirmação que acabamos de apresentar é verdadeira no conjunto dos números naturais, entretanto, quando trabalhamos com outros conjuntos numéricos, por exemplo, o conjunto dos números inteiros ou o conjunto dos números racionais, verifica-se que o produto nem sempre aumenta, logo, a afirmação passa a ser falsa. É o caso de $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ou $4 \times (-0{,}5) = -2$. Este exemplo é um invariante operatório, classificado como teorema em ação.

Os teoremas em ação são teoremas implícitos e têm validade local, ou seja, é verdadeiro apenas para um conjunto de situações. De maneira geral, este tipo de invariante é inconsciente, pois os alunos utilizam-no quando enfrentam situações problemas, sem muitas vezes saber falar sobre o que estão usando.

Vergnaud (1993) ressalta que os teoremas em ação são definidos como relações matemáticas consideradas pelos alunos quando escolhem uma operação, ou uma sequência de operações para resolver uma situação problema dada. Por isso estes teoremas podem ser considerados recursos para o professor analisar as estratégias dos alunos ao solucionarem uma situação problema e auxiliá-los na transformação do conhecimento implícito para o explícito.

Invariantes do tipo funções proposicionais

Os invariantes do tipo funções proposicionais são os conceitos em ação. Diferente dos invariantes proposicionais, as funções proposicionais são conceitos implícitos, que se assumem pertinentes na ação.

Considere a seguinte afirmação: “Na Geometria Euclidiana temos que dois pontos distintos determinam uma única reta”. O que acabamos de enunciar é sempre verdadeiro na Geometria Euclidiana. Na sequência temos uma função proposicional falsa. “Todos os meses do ano tem mais do que 29 dias”. Este invariante auxilia a construção das proposições.

Vergnaud (1993) esclarece que existe uma relação abrangente entre o primeiro e o segundo tipo de invariantes: “não há proposição sem funções proposicionais, nem função proposicional sem proposição. Do mesmo modo, conceitos em ação e teorema em ação se constroem em estreita relação” (Ibid., p.6). No entanto, existem diferenças entre os invariantes proposicionais e as funções proposicionais.

Considere uma função proposicional representada por $P(x)$. Entre as funções proposicionais existem funções com um argumento, que são as propriedades. Existem também funções com dois argumentos, que compõem as relações binárias $R_2(x, y)$, que ligam dois elementos entre si, como por exemplo, a relação "sete é maior do que cinco" ou "o caderno está sobre a mesa".

As funções com três argumentos são as relações ternárias $R_3(a, b, c)$ que ligam três elementos entre si, e leis de composição binária, tais como "Pedro está entre André e Ana" ou "nove é cinco a mais do que quatro". Considera também a existência de funções com quatro argumentos, que são as relações quaternárias $R_4(p, q, r, s)$ que ligam quatro elementos entre si (como na proporcionalidade), por exemplo, "o Carnaval é para o Brasil o que a Oktoberfest é para a Alemanha" ou "vinte e um está para catorze assim como três está para dois" (Id., 2009b).

Invariantes do tipo argumento

Os invariantes do tipo argumento, que tem relação com a função proposicional, pois é um argumento de valores particulares, por exemplo, "Ana coloca o caderno sobre a mesa", que pode ser escrito por $R_3(Ana, caderno, mesa)$. Note que se atribui valores particulares aos objetos utilizados na função proposicional. Na Matemática, podemos ter argumentos do tipo objetos, personagens, números, relações e proposições (Id., 1993).

Os invariantes operatórios, presentes nos esquemas, não são de um único tipo lógico, por isso devemos observar cada um dos tipos descritos anteriormente. O teorema em ação não é um verdadeiro teorema científico, tão pouco o conceito em ação é um conceito científico. Segundo Vergnaud (1993), pode-se discutir a veracidade ou não destes invariantes se o fizermos cientificamente e de forma explícita, pois podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos:

> Conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do *iceberg* da conceitualização: sem a parte escondida, constituída pelos invariantes operatórios, esta parte visível nada seria. Reciprocamente, só podemos falar dos invariantes operatórios integradas nos esquemas com o auxílio das categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objectos-argumentos (Ibid., p.7).

Portanto, a ação operatória de um conceito deve ser analisada por meio de uma variedade de situações. A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes operatórios, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. De acordo com Brun (1996, p. 23) a TCC procura dar um conteúdo matemático às organizações das condutas observáveis em situação. Com isto, podemos compreender a reciprocidade do processo de transformação das situações e dos conhecimentos em sua relação com os conceitos.

Neste contexto, estabelecer classificações às situações problemas, descrever procedimentos, detectar teoremas e conceitos em ação, analisar a estrutura e a função dos enunciados e das representações simbólicas é de interesse para a aprendizagem em Matemática (FRANCHI, 2010).

Astolfi (2002, p.33) define que os significantes correspondem a modos de representação verbais, escritos, gráficos, pictóricos e esquemas daqueles significados precedentes. O conjunto das representações pode recorrer a todas as espécies de imagens, que se constituem como auxiliares para o processo de conceitualização.

No processo de formação do conceito, a representação é instrumental e consiste em designar os objetos, em refletir sobre os objetivos e os meios, e em responder aos problemas de comunicação e de validação que podem colocar-se em situação, ou seja, permite-nos entender como o sujeito representa um conceito a partir de sua interação com uma ou várias situações. De acordo com Brun (1996):

> Nas situações de resolução de problemas particulares, a representação põe em funcionamento os conhecimentos que estão relacionados com uma situação precisa; ela serve para escolher e evocar os esquemas úteis para alcançar o objetivo fixado e iniciar os procedimentos a levar a cabo; funciona então como intermediário entre os esquemas e a situação, a fim de precisar as suas significações (Ibid., p.25).

A representação põe em funcionamento o conhecimento associado à situação dada e funciona como intermediário entre os esquemas e a situação. Magina et al. (2008) ressaltam que a representação é interação entre o significado (I) e o significante (Y). No entanto, esta interação não acontece de forma espontânea, visto que requer demasiado esforço do professor e do educando, pois nem sempre conseguimos representar graficamente ou por meio de esquemas aquilo que estamos pensando.

Para exemplificar esta última afirmação, considere o número dez (10) escrito com o sistema de numeração decimal e romano. Em termos matemáticos temos: 10 e X. Estes dois signos (dois significantes) representam a mesma ideia, que é o significado do número dez. Neste caso, temos o algarismo indo-arábico 10 (Y - significante) e o algarismo romano X (Y – significante) para representar o mesmo valor numérico dez (I

– significado) que pode representar, por exemplo, a quantidade de uma coleção de objetos (S – referente).

De maneira análoga, temos que um mesmo signo (Y – significante) pode ter vários significados (I). É o caso do signo “x” que pode ser utilizado como indicador de uma quantidade (um número) quando se trabalha com equações, e também como indicador de uma variável no contexto do estudo de funções. Com estes exemplos diferenciamos significado e significante.

Assim, a formação do conceito pelo aluno pode ser observada por meio de suas estratégias de ação mobilizadas ao resolver uma situação, isto é, pelos invariantes que a criança reconhece na situação, como os teoremas em ação. Além disso, pode-se observar as expressões utilizadas durante o processo de resolução de um problema, isto é, a simbologia verbal, escrita, desenhos e diagramas que o aluno usa para representar a situação (Brun, 1996).

Os esquemas mobilizados pelo aluno durante a resolução de situações problemas organizam as ações, as situações e as representações simbólicas que as acompanham, além de ter caráter “essencialmente assimilador, antecipador e dinâmico, pode mudar de significação e transformar-se no decurso das acções” (BRUN, 1996, p. 23).

De maneira geral, os esquemas caracterizam-se por serem simultaneamente estruturais e funcionais, pois são organizações, produto da atividade cognitiva do sujeito e são organizadores, instrumentos de assimilação. A seguir, apresentamos uma discussão da noção de esquema de acordo com a TCC.

2.4 O Esquema

De acordo com Vergnaud (2009a) o conceito de esquema foi introduzido por Piaget, embora vários filósofos do século XIX, como Kant e psicólogos do século XX tivessem mencionando-o, especialmente Revault d’Allones (1915, 1920) e Janet (1928) na França.

Piaget foi o primeiro a fornecer exemplos concretos e convincentes do significado de esquema com suas descrições sobre o desenvolvimento da criança. De acordo com Pais (2008), Piaget ampliou a concepção de esquema quando propôs situações mais dinâmicas e incorporou componentes que interferem na conceitualização.

Exemplo desta afirmação é a demonstração de que gestos e atos perceptíveis são a base empírica para uma análise das ações do sujeito. Portanto, a organização sequencial de atividades e a sucessão de níveis de generalidade para uma determinada situação é primitiva e referência primordial para o conceito de esquema.

Para Vergnaud (2009b) esquema é a organização invariante do comportamento para uma classe de situações voltadas à aprendizagem específica de um conceito. Pode indicar quais elementos cognitivos fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Desta forma, o conceito de esquema requer mais atenção, porque é um ponto muito importante para analisar como o aluno adquire o conhecimento, ou seja, a forma operacional do conhecimento, como distinta da forma predicativa.

Para exemplificar a noção de esquema, Vergnaud (1993) descreve que a ação do aluno ao desenvolver o esquema da enumeração de uma pequena coleção não deixa de abranger uma organização invariante.

A coordenação dos movimentos, dos gestos que a criança faz - apontar os dedos ao objeto ou apenas observá-los e contá-los mentalmente e, até mesmo nos dedos, ou apenas enunciar coordenadamente uma sequência numérica - são ações importantes que fazem parte do esquema que a criança dispõe e mobiliza para realizar a enumeração.

Neste mesmo exemplo, o autor ressalta que a ênfase ou a repetição do último número da série que a criança enunciou revela a utilização de conceitos anteriores, pois a criança identifica o último número ordinal do conjunto enumerado como a cardinalidade do conjunto.

Se a contagem da criança atingir o quarto elemento, então o conjunto terá quatro elementos. Por isso, é importante analisar os gestos da criança e reconhecer os invariantes utilizados por ela.

Segundo Vergnaud (1993) a confiabilidade do esquema para o sujeito baseia-se no conhecimento que ele detém, das relações entre o algoritmo e as características da situação problema que ele tem a resolver.

De acordo com Magina et al. (2008, p.13), o esquema apresenta a forma como o aluno organiza os invariantes de ação ao tratar com um conjunto de situações, podendo ser caracterizado como: “local, ser organizador dos invariantes necessários em uma dada situação e para atuar naquela situação de maneira implícita*”,* ou seja, as competências e concepções dos educandos relacionam-se na análise das tarefas matemáticas realizadas por eles.

Tendo descrito os principais elementos que fundamentam a TCC, poderíamos ainda nos perguntar: Como Vergnaud define um campo conceitual? A literatura utilizada nos sugere que Vergnaud (1993, 1996) o define como um conjunto de situações, cuja apropriação, requer o domínio de vários conceitos de naturezas distintas.

As situações (S) referem-se às atividades desenvolvidas pelos estudantes a partir do reconhecimento dos invariantes operatórios (I) que, por sua vez, são expressos por um conjunto de representações simbólicas (Y). Desta forma, apresentamos e discutimos, com detalhes, nas seções 2.5 e 2.6, o campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas, respectivamente, em que destacamos os esquemas para cada categoria proposta por Vergnaud.

2.5 O Campo Conceitual da Estrutura Aditiva

O campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação de tais operações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como tarefas matemáticas (VERGNAUD, 1993).

Este campo conceitual é composto pelos conceitos de cardinalidade, de medida, de transformação temporal (ganhar e perder), pelas relações de comparação quantificada, de composição binária de medidas, de composição de transformações e relações. Para análise da aprendizagem das estruturas aditivas deve-se considerar as mudanças ocorridas no decorrer do tempo, bem como a dimensão (unidimensional, bidimensional) na qual os estudantes operam os elementos envolvidos na situação (SANTANA, 2010).

Dominar as estruturas aditivas implica ser capaz de resolver diversos tipos de situações problemas, o que significa que não basta saber operar um cálculo numérico. Magina et al. (2008) afirma que por trás de uma operação simples, como por exemplo, $3 + 5$ podem existir situações problemas tão sofisticadas que muitos alunos podem ter dificuldades em resolvê-las. A complexidade na variedade de situações pode ser exemplificada nas situações indicadas a seguir:

Situação 1: Hoje, na minha sala de aula estão presentes 3 meninos e 5 meninas. Quantas pessoas vieram à aula hoje?

Situação 2: Ana comprou um caderno por R$3,00 e ficou com R$5,00 na carteira. Quanto possuía Ana antes de realizar a compra?

Situação 3: Duda tem 3 anos. João é 5 anos mais velho do que Duda. Quantos anos tem João?

Situação 4: Pedro participou de um jogo de videogame com seus primos. Ao término da primeira fase ele tinha perdido 3 pontos. Ao término da segunda fase ele tinha 5 pontos. Qual o total de pontos que ele fez na segunda fase para ficar com saldo positivo de 5 pontos?

Para resolver estas situações problemas é necessário realizar a operação $3 + 5 = 8$. Entretanto, a maneira de organizar as informações das situações diferem umas das outras, embora se utilize da mesma operação aritmética para resolvê-las.

Isto indica que a interpretação e os esquemas utilizados para solucionar uma situação problema dependem também do enunciado proposto. Por isso as concepções dos alunos surgem nas ações realizadas ao interagir com as situações, enquanto que a competência está diretamente relacionada com os sucessivos níveis de complexidade destas.

Assim, a competência para resolver problemas das estruturas aditivas desenvolve-se num longo período de tempo, e ainda mais, um campo conceitual é construído pelas experiências diárias e escolares que o aluno vivencia.

Para Vergnaud (2009b, p.199) existem tipos variados de relações aditivas, o que implica cálculos relacionais que podem compreender adições e subtrações diferentes.

Os cálculos relacionais são relações combinadas nas situações problemas. No caso das transformações temporais, ora perde, ora ganha. Essas relações podem ser dinâmicas ou estáticas (tem 3 e ganhou 5, ficou com 8 ou tem 5, tem 3, então tem 8). As relações também podem ser de comparação (tem 5 a mais do que), por isso os cálculos relacionais podem compreender adições ou subtrações.

As relações aditivas são relações ternárias que podem ser encadeadas de maneiras distintas e resultar em estruturas aditivas variadas. Este campo conceitual é classificado de acordo com os níveis de dificuldade das situações problemas e o raciocínio requerido para resolvê-la.

> Esta classificação tem por objetivo oferecer uma estrutura teórica que auxilie o professor no entendimento do significado das diferentes representações simbólicas da adição e subtração, e de servir de base para o desenho de experiências sobre esses processos matemáticos em sala de aula. A razão teórica para as distinções na classificação é de origem tanto psicológica quanto matemática (MAGINA et al., 2008, p.19).

A seguir, descrevem-se os seis esquemas ternários fundamentais que compõe o campo das estruturas aditivas proposto por Vergnaud (2009b, p.200). Para compreender as diferenças destas categorias apresentamos os esquemas relacionais inerentes ao mesmo domínio de referência, fornecemos exemplos correspondentes, e fazemos análises das equações numéricas equivalentes aos esquemas.

Para facilitar a compreensão dos diferentes códigos utilizados para representar os esquemas da estrutura aditiva, apresentamos no Quadro 05, símbolos ou objetos e o que estes representam.

Quadro 05 - Símbolos e representações dos esquemas

Símbolo/ Objeto	O que representa
Retângulo	Um número natural
Círculo ou elipse	Um número relativo
Chave (vertical ou horizontal)	A composição de elementos de mesma natureza
Flecha (vertical ou horizontal)	Uma transformação ou uma relação, ou seja, a composição de elementos de natureza diferente.

Fonte: Vergnaud (2009b, p.201).

A ***primeira categoria*** é aquela em que duas medidas se compõem para resultar em uma terceira medida. Esta por sua vez, compõe-se de duas classes de problemas, as quais serão nomeadas 1_a e 1_b para identificação e descrição.

1_a: Conhecendo-se duas medidas elementares, é possível encontrar a composta.

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{array}\right\}\ \boxed{x}$$

Situação 1_a: A sala de aula de Pedro é composta por 9 meninas e 8 meninos. Quantos alunos têm ao todo a sala de Pedro?

O esquema referente a esta situação é válido quando $a = 9$, $b = 8$. A equação correspondente é: $a + b = x$. Então, temos, $9 + 8 = 17$. Ou seja, a sala de Pedro têm 17 alunos. Assim, a lei de composição correspondente é a adição de dois números naturais. A dificuldade pode variar, conforme os números dados, o conteúdo e o enunciado das informações.

1_b: Conhecendo-se uma das medidas elementares e a composta, pode-se determinar a outra medida elementar.

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{x}\end{array}\right\}\ \boxed{c}$$

Situação 1_b: Ana tinha 8 lápis novos, dos quais 5 já foram usados. Quantos lápis novos Ana ainda têm para usar?

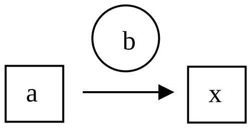
Nesta classe de situações problemas pode-se determinar a solução pela operação de subtração. No entanto, também se pode resolvê-la pelo procedimento conhecido por complemento, que no caso é representado por $x + 5 = 8$.

Cabe destacar que a subtração $x = c - a$ é a operação inversa da adição $a + x = c$ ou $x + a = c$, que representa o esquema desta classe de situação. Neste caso, tem-se $a = 5$, $c = 8$, então $x = 3$.

De acordo com Vergnaud (2009b) seria um erro considerar a subtração como operação subordinada à adição. No entanto, o autor expõe que nesta categoria, a operação de subtração é subordinada, pois “a busca do complemento entre uma medida elementar e uma medida composta não tem sentido a menos que primeiramente se atribua um sentido à composição de duas medidas elementares” (Ibid., p.216).

A ***segunda categoria*** é aquela em que uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida. Pode-se diferenciar 6 classes de problemas, as quais nomearemos 2_a, 2_b, 2_c, 2_d, 2_e e 2_f. Estas variam de acordo com a transformação, negativa ou positiva, e conforme a pergunta concernente ao estado inicial, ao estado final e à transformação.

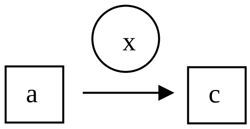
2_a: Conhecendo-se o estado inicial e a transformação positiva, pode-se determinar o estado final.



Situação 2_a: Antônio tinha R$15,00 e ganhou de seu pai R$7,00. Quanto Antônio têm agora?

O esquema que se refere a esta situação ocorre quando $a = 15$, $b = +7$. E o estado final é dado pela equação correspondente: $a + (+b) = x \Longrightarrow 15 + (+7) = 22$. Logo $x = 22$. Assim, a lei de composição correspondente é a aplicação de uma transformação sobre uma medida (estado inicial), isto é, a adição de um número natural (15) a um número relativo $(+7)$, para resultar no estado final (22).

2_b: Conhecendo-se o estado inicial e o estado final pode-se determinar a transformação positiva.

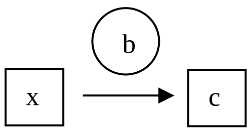


Situação 2_b: Carol tinha 12 figurinhas. Jogou com seu irmão e ganhou algumas figurinhas de modo que agora ela tem 22. Quantas figurinhas Carol ganhou?

O esquema que se refere a esta situação ocorre quando $a = 12$, $c = 22$. A transformação é dada pela equação correspondente: $a + (+x) = c \Longrightarrow 12 + (+x) = 22$.

Logo temos $x = c - a \Longrightarrow x = 22 - 12$, ou seja, $x = +10$. A lei de composição correspondente é a subtração entre o estado final (22) e o estado inicial (12) para resultar na transformação positiva $(+10)$.

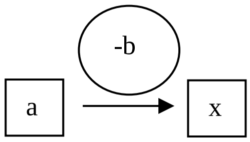
2_c: Conhecendo-se uma transformação positiva e o estado final pode-se obter o estado inicial.



Situação 2_c: Carla achou R$ 2,00 na calçada. Ela guardou em seu cofre. Agora ela tem R$11,00. Quanto Carla possuía antes?

O esquema que se refere a esta situação ocorre quando $b = +2$, $c = 11$. O estado inicial é fornecido obtendo-se o resultado da equação correspondente: $x + (+b) = c \Longrightarrow x = c - (+b) \Longrightarrow x = 11 - (+2) \Longrightarrow x = 9$. A lei de composição correspondente é a subtração entre o estado final (11) e a transformação $(+2)$ para resultar na no estado inicial (9).

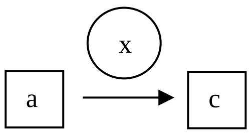
2_d: Conhecendo-se o estado inicial e a transformação negativa pode-se obter o estado final.



Situação 2_d: João tem 8 balas. Ele deu 3 para sua irmã. Com quantas balas ele ficou?

O esquema que se refere a esta situação ocorre quando $a = 8$, e a transformação negativa, $b = -3$. Logo, o estado final é obtido a partir da equação correspondente: $a + (-b) = x \Longrightarrow 8 + (-3) = x$. Neste caso o símbolo $(+)$ é a lei de composição que corresponde à aplicação de uma transformação negativa sobre o estado inicial para resultar no estado final. Então João ficou com 5 balas, ou seja, $x = 5$.

2_e: Conhecendo-se o estado inicial e o estado final pode-se obter a transformação, que nesta classe é negativa.

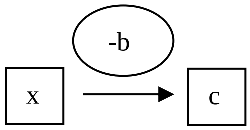


Situação 2_e: Paulo tinha 11 bolinhas de gude e jogou uma partida com seu primo. Agora ele tem 7 bolinhas de gude. Assim, quantas bolinhas de gude ele perdeu na partida?

O esquema que se refere a esta classe de situação ocorre quando $a = 11$, e $c = 7$. Assim, a transformação é obtida a partir da equação correspondente:
$a + x = c \Longrightarrow x = c - a \; ou \; a - c = -x$. Logo, temos: $11 + x = 7$. O que implica em: $11 - 7 = -x$. Então, se tem a transformação negativa (-4), ou seja, Paulo perdeu 4 bolinhas na partida. Neste caso, a lei de composição corresponde à aplicação da

operação de subtração entre o estado inicial e o estado final, para resultar em uma transformação negativa.

2_f: Conhecendo-se o estado final e a transformação negativa, obtem-se o estado inicial.



Situação 2_f: Bianca tem certa quantia de bonecas. Ela deu 8 bonecas para suas amigas brincarem e agora tem 6 bonecas. Quantas bonecas ela possuía?

Nesta classe de situação temos o esquema em que a transformação é negativa (-8) e o estado final é $c = 6$. Assim, o estado inicial é obtido a partir da equação correspondente: $x + (-b) = c \Rightarrow x = c - (-b)$. Logo, temos: $x + (-8) = 6$. Então, $x = 6 - (-8)$. Assim, tem-se que o estado inicial é $x = 14$, ou seja, Bianca possuía 14 bonecas. Neste caso a lei de composição corresponde à aplicação da operação de subtração entre o estado final e a transformação negativa para obter o estado inicial.

Vergnaud (2009b) esclarece que das classes da segunda categoria, 2_a e 2_d são as mais simples de se calcular, pois referem-se à aplicação direta de uma transformação (positiva ou negativa) ao estado inicial, para resultar o estado final. O cálculo relacional, nestes casos, torna-se mais fácil do que nas demais classes, embora os alunos possam possuir dificuldade em determinar o estado final em situações pertencentes à classe 2_d, caso o estado inicial seja menor que a própria transformação. Entretanto, a operação de subtração que se obtém nos esquemas das classes 2_a e 2_d não precisa ser definida com a inversa da adição, pois tem significação própria.

Com relação ao cálculo relacional das classes 2_b e 2_e, estes são mais complexos, pois obter a transformação quando se conhece os estados inicial e final não ocorre de maneira análoga quando a transformação é positiva e negativa. Na classe 2_b a transformação pode ser obtida pela equação correspondente ao esquema, dada por: $x = c - a$, enquanto que na classe 2_e temos $-x = a - c$. Nestes casos o aluno pode se utilizar de dois procedimentos para solucionar as situações pertencentes a estas classes: o procedimento do complemento ou da diferença.

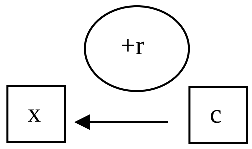
O complemento, muito utilizado pelo comércio para calcular o troco a um cliente, consiste buscar, sem realizar subtração, o que é preciso acrescentar ou retirar ao estado inicial para obter o estado final. Quando o aluno utiliza este procedimento, ele não reflete sobre a transformação, se não do modo direto: partir do estado inicial, aplicar a transformação, chegar ao estado final. Desta forma, se não encontrar com facilidade a transformação, ele pode fazer tentativas e corrigi-las em função do resultado que obteve para o estado final (VERGNAUD, 2009b).

O procedimento da diferença permite que o aluno raciocine sobre a transformação e nas relações que as unem ao estado inicial e final, consiste em buscar a transformação pela subtração entre os estados final e inicial.

Vergnaud (2009b) ressalta que o cálculo relacional das classes 2_c e 2_f são os mais complexos da segunda categoria, pois a solução válida implica a inversão da transformação direta e o cálculo do estado inicial pela aplicação ao estado final desta transformação. Nestas classes o procedimento do complemento só faz sentido quando a transformação é positiva. Já o procedimento estado inicial hipotético consiste em formular uma hipótese sobre o estado inicial, aplicar a transformação direta para resultar no estado final.

A ***terceira categoria*** é aquela em que uma relação estática liga duas medidas. Pode-se diferenciar 6 classes de problemas, as quais nomearemos 3_a e 3_b – referido desconhecido, 3_c e 3_d - relação desconhecida, 3_e e 3_f – referente desconhecido. É necessário perceber a “relação” como uma comparação entre os grupos. Neste caso, o estudante deve partir do valor conhecido do grupo de referência (que é o referente), adicionar ou subtrair um valor (que é a relação entre os dois grupos) para obter o valor do outro grupo (referido).

3_a: Conhecendo-se uma das medidas (referente) e a relação, pode-se determinar a outra medida (referido).



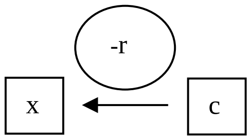
Situação 3_a: André possui 14 carrinhos. André têm 5 a mais do que Thiago. Quantos carrinhos têm Thiago?

Referido:14

Referente: x

O esquema que se refere a esta situação ocorre a relação é positiva, isto é, quando $r = +5$. A equação correspondente ao esquema é: $x + (r) = c \Longrightarrow x + (5) = 14$. Logo $x = 9$, ou seja, Thiago tem 9 carrinhos.

3_b: Conhecendo-se uma das medidas (referente) e a relação, pode-se determinar a outra medida (referido). No entanto, nesta classe, a relação é negativa.



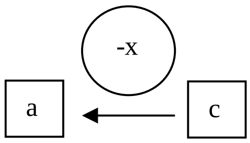
Situação 3_b: Paulo possui 6 canetas. Paulo têm 5 a menos do que Henrique. Quantas canetas têm Henrique?

Referido:6

Referente: x

A equação correspondente ao esquema é: $x + (-r) = c \Longrightarrow x + (-5) = 6$. Logo $x = 11$, isto é, Henrique tem 11 canetas.

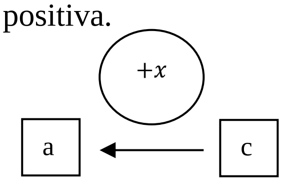
3_c: Conhecendo-se as medidas, referente e referido, pode-se determinar a relação negativa.



Situação 3_c: João tem 25 figurinhas e Maria tem 12. Quantas figurinhas Maria têm a menos do que João?

Nesta classe temos o esquema: relação desconhecida (x), $a = 25$ e $c = 12$. A equação correspondente é: $a + (-x) = c \Longrightarrow a - c = x \Longrightarrow x = 25 - 12 \Longrightarrow x = 13$. Ou seja, Maria possui 13 figurinhas a menos do que João.

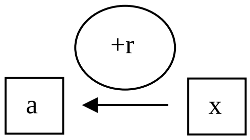
3_d: Conhecendo-se as medidas, referente e referido, pode-se determinar a relação positiva.



Situação 3_d: Paula têm R$13,00 e Laura têm R$24,00. Quantos reais Laura têm a mais do que Paula?

Nesta classe a relação é positiva (x). A equação correspondente é: $a + (x) = c \Longrightarrow x = c - a \Longrightarrow x = 24 - 13 \Longrightarrow x = 11$. Ou seja, Laura têm R$11,00 a mais do que Paula.

3_e: Conhecendo-se uma das medidas (referido) e a relação positiva, pode-se determinar a outra medida (referente).



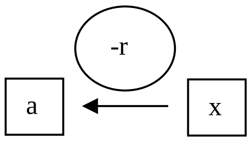
Situação 3_e: Paulo possui 3 canetas. João têm 5 canetas a mais do que Paulo. Quantas canetas têm João?

Referido: 3

Referente: x

A equação correspondente ao esquema é: $a + (r) = x \Longrightarrow 3 + 5 = x \Longrightarrow x = 8$. João têm 8 canetas.

3_f: Conhecendo-se uma das medidas (referido) e a relação negativa, pode-se determinar a outra medida (referente).



Situação 3_f: Antônio têm 12 bolinhas de gude. Carlos têm 5 bolinhas a menos do que Antônio. Quantas bolinhas de gude possui Carlos?

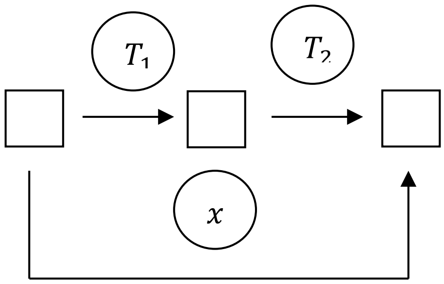
Referido: 12

Referente: x

A equação correspondente ao esquema é: $a + (-r) = x \Longrightarrow a - x = r \Longrightarrow 12 - 5 = x \Longrightarrow x = 7$. Portanto, Carlos têm 7 bolinhas de gude.

A ***quarta categoria*** é aquela em que duas transformações se compõem para resultar em uma transformação. Nesta categoria temos duas grandes classes de situações, cada uma contendo oito subclasses. Apresentamos resumidamente todas as subclasses por meio das tabelas 3 e 4, e na sequência exibimos alguns exemplos. Considere T_1 e T_2 as transformações elementares e T_3 a transformação composta.

<u>Primeira classe:</u> conhecendo-se duas transformações elementares, pode-se encontrar a transformação composta. Na sequência apresenta-se o esquema referente às subclasses desta primeira classe.



O Quadro 06 exibe as possíveis combinações entre as transformações elementares (T_1 e T_2), quando $|T_1| > |T_2|$ e $|T_1| < |T_2|$, que geram as oito subclasses.

Quadro 06 - Possibilidades da primeira classe da quarta categoria

	Transformação elementar 1 conhecida	Transformação elementar 2 conhecida	Transformação composta desconhecida	Nomenclatura
$|T_1| > |T_2|$	$T_1 > 0$	$T_2 > 0$	$T_3 > 0$	4_{1a}
	$T_1 < 0$	$T_2 < 0$	$T_3 < 0$	4_{1b}
	$T_1 > 0$	$T_2 < 0$	$T_3 > 0$	4_{1c}
	$T_1 < 0$	$T_2 > 0$	$T_3 < 0$	4_{1d}
$|T_1| < |T_2|$	$T_1 > 0$	$T_2 > 0$	$T_3 > 0$	4_{1e}
	$T_1 < 0$	$T_2 < 0$	$T_3 < 0$	4_{1f}
	$T_1 > 0$	$T_2 < 0$	$T_3 < 0$	4_{1g}
	$T_1 < 0$	$T_2 > 0$	$T_3 > 0$	4_{1h}

Fonte: Autores – Adaptado de Vergnaud (2009b, p.217).

Note que as situações 4_{1a} e 4_{1e}, além de apresentarem o mesmo esquema, são combinadas de maneira análoga. Assim, vamos descrevê-las uma única vez.

4_{1a} (4_{1e}): Conhecendo-se as transformações elementares com $|T_1| > |T_2|$ ou com $|T_1| < |T_2|$, sendo $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$, pode-se determinar a transformação composta $T_3 > 0$.

Situação 4_{1a} (4_{1e}): Paulo participou de um jogo de bolas de gude. Na primeira partida ele ganhou 13 bolinhas de gude. Na segunda partida ele ganhou 6 bolas. Ao final das duas partidas, quantas bolas ele ganhou?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + T_2 = x$, em que $T_1 = +13$ e $T_2 = +6$. Portanto, $T_3 = +19$, ou seja, Paulo ganhou 19 bolas.

As situações 4_{1b} e 4_{1f}, apresentam o mesmo esquema e a mesma equação. Portanto, descrevemo-las uma única vez.

4_{1b} (4_{1f}): Conhecendo-se as transformações elementares com $|T_1| > |T_2|$ ou com $|T_1| < |T_2|$, sendo $T_1 < 0$ e $T_2 < 0$, pode-se determinar a transformação composta $T_3 < 0$.

Situação 4_{1b} (4_{1f}): Joana participou de um jogo de cartas. Na primeira partida ela perdeu 3 pontos. Na segunda partida ela perdeu 2 pontos. Ao final do jogo, quantos pontos ela perdeu?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + T_2 = x$, em que $T_1 = -3$ e $T_2 = -2$. Portanto, $T_3 = -5$. Isto implica que, ao final do jogo Joana terá perdido 5 pontos.

Das demais subclasses, exemplificamos apenas 4_{1c} e 4_{1d}, pois 4_{1g} e 4_{1h} podem ser obtidas de maneira análoga.

4_{1c}: Conhecendo-se as transformações elementares com $|T_1| > |T_2|$, sendo $T_1 > 0$ e $T_2 < 0$, se obtém a transformação composta $T_3 > 0$.

Situação 4_{1c}: João participou de um jogo de boliche com duas rodadas. Na primeira rodada ele ganhou 7 pontos. Na segunda rodada ele perdeu 3 pontos. Com quantos pontos ele terminou o jogo?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + T_2 = x$, em que $T_1 = +7$ e $T_2 = -3$. Portanto, $T_3 = +4$. Isto implica que, ao final do jogo João terá 4 pontos.

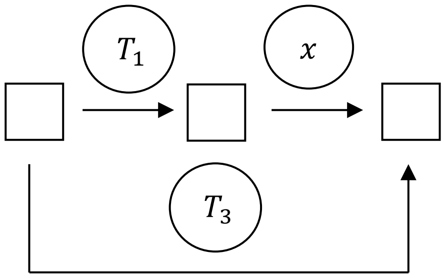
4_{1d}: Conhecendo-se as transformações elementares com $|T_1| > |T_2|$, sendo $T_1 < 0$ e $T_2 > 0$, se obtém a transformação composta $T_3 < 0$.

Situação 4_{1d}: Carla realizou uma atividade para seu pai em duas etapas. Na primeira etapa, ela não atingiu o objetivo, e por isso perdeu 4 horas de lazer com videogame para a semana seguinte. Na segunda etapa, ela recebeu 2 horas de lazer com o videogame. Após as duas etapas, qual tempo ela terá para jogar videogame?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + T_2 = x$, em que $T_1 = -4$ e $T_2 = +2$. Portanto, $T_3 = -2$. Isto implica que, após realizar as atividades propostas por seu pai, Carla ficará com duas horas a menos de lazer com o videogame.

Vergnaud (2009b) destaca que quando se considera situações da subclasse 4_{1d}, em que se deve juntar dois números de sinais contrários, obtendo-se uma transformação negativa, fica evidente que se tem situações mais difíceis que as outras.

Segunda classe: conhecendo-se a transformação composta (T_3) e umas das transformações elementares (T_1), pode-se encontrar a outra transformação elementar (T_2). Ressaltamos que podemos também conhecer a transformação elementar (T_2) e encontrar (T_1), obtendo-se as mesmas combinações para as subclasses a seguir. O esquema que representa esta segunda classe da quarta categoria é o que segue:



O Quadro 07 exibe as possíveis combinações entre a transformação elementar (T_1) e a composta (T_3), quando $|T_1| > |T_3|$ e $|T_1| < |T_3|$, que geram as oito subclasses.

Quadro 07 - Possibilidades da segunda classe da quarta categoria.

	Transformação elementar 1 conhecida	Transformação composta conhecida	Transformação elementar 2 desconhecida	Nomenclatura
$\lvert T_1\rvert > \lvert T_3\rvert$	$T_1 > 0$	$T_3 > 0$	$T_2 < 0$	4_{2a}
	$T_1 < 0$	$T_3 < 0$	$T_2 > 0$	4_{2b}
	$T_1 > 0$	$T_3 < 0$	$T_2 < 0$	4_{2c}
	$T_1 < 0$	$T_3 > 0$	$T_2 > 0$	4_{2d}
$\lvert T_1\rvert < \lvert T_3\rvert$	$T_1 > 0$	$T_3 > 0$	$T_2 > 0$	4_{2e}
	$T_1 < 0$	$T_3 < 0$	$T_2 < 0$	4_{2f}
	$T_1 > 0$	$T_3 < 0$	$T_2 < 0$	4_{2g}
	$T_1 < 0$	$T_3 > 0$	$T_2 > 0$	4_{2h}

Fonte: Vergnaud (2009b, p.218).

4_{2a}: Conhecendo-se a transformação elementar $T_1 > 0$ e a composta $T_3 > 0$, em que $|T_1| > |T_3|$, pode-se determinar a transformação elementar $T_2 < 0$.

Situação 4_{2a}: Paulo jogou duas partidas de bolas de gude. Na primeira partida ele ganhou 11 bolinhas de gude. No final da segunda partida ele ficou com um total de 7 bolinhas. Ao final das duas partidas, quantas bolas ele perdeu?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + x = T_3$. Assim, $x = T_3 - T_1$, em que $T_1 = +11$ e $T_3 = +7$. Portanto, $T_2 = -4$. Isto é, Paulo perdeu 4 bolinhas de gude ao final das duas partidas.

4_{2b}: Conhecendo-se a transformação elementar $T_1 < 0$ e a composta $T_3 < 0$, em que $|T_1| > |T_3|$, pode-se determinar a transformação elementar $T_2 > 0$.

Situação 4_{2b}: Ana participou de um jogo de videogame. Após o primeiro tempo ela estava com saldo negativo de 11 pontos. No segundo tempo ela marcou alguns pontos, de modo que ao término do jogo ela está com saldo negativo de 5 pontos. Quantos pontos ela marcou durante o segundo tempo para obter este resultado?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + x = T_3$, ou seja, $x = T_3 - T_1$, em que $T_1 = -11$ e $T_3 = -5$. Portanto, $T_2 = +6$. Ou seja, Ana marcou 6 pontos durante o segundo tempo da partida.

As situações 4_{2c} e 4_{2g}, além de apresentarem o mesmo esquema e a equação correspondente, são combinadas de maneira análoga. Assim, vamos descrevê-las uma única vez.

4_{2c} (4_{2g}): Conhecendo-se a transformação elementar $T_1 > 0$ e a composta $T_3 < 0$, em que $|T_1| > |T_3|$ ou $|T_1| < |T_3|$, pode-se determinar a transformação elementar $T_2 < 0$.

Situação 4_{2c} (4_{2g}): Antônio participou de um jogo de perguntas e respostas, em duas fases. Na primeira fase ele conquistou 11 pontos. Quando o jogo terminou, ele estava com saldo negativo de 3. Quantos pontos ele perdeu na segunda fase para obter este resultado?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + x = T_3$, então, $x = T_3 - T_1$, em que $T_1 = +11$ e $T_3 = -3$. Portanto, $T_2 = -14$. Assim, Antônio perdeu 14 pontos na segunda fase.

As situações 4_{2d} e 4_{2h}, apresentam o mesmo esquema e a equação correspondente, combinadas de maneira análoga. Por isso, vamos descrevê-las por meio de uma situação.

4_{2d} (4_{2h}): Conhecendo-se a transformação elementar $T_1 < 0$ e a composta $T_3 > 0$, em que $|T_1| > |T_3|$ ou $|T_1| < |T_3|$, pode-se determinar a transformação elementar $T_2 > 0$.

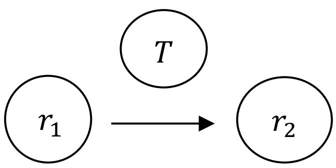
Situação 4_{2d} (4_{2h}): A mãe de Pedrinho colocou laranjas numa cesta para ele levar à sua avó. No caminho, Pedrinho chupou 5 unidades, mas ficou preocupado, assim parou no sítio do Senhor Raul e colheu algumas laranjas. Ao chegar à casa de sua avó, contou-as e percebeu que havia 6 laranjas a mais do que as que sua mãe havia colocado pela manhã. Quantas laranjas Pedrinho pegou no sítio do Senhor Raul?

A equação correspondente ao esquema desta subclasse é: $T_1 + x = T_3$, em que $T_1 = -5$ e $T_3 = +6$. Portanto, $T_2 = +11$. Logo, Pedrinho pegou 11 laranjas no sítio de Raul.

Omitimos exemplos das situações 4_{2e} e 4_{2f}, pois estas podem ser obtidas com enunciados análogos aos das situações 4_{2a} e 4_{2b}.

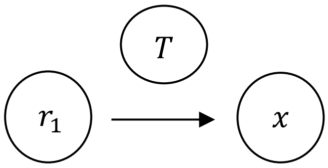
A ***quinta categoria*** é aquela em que uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo. No entanto, nesta categoria "serão reencontradas as classes estudadas no caso da segunda categoria (busca do estado final, da transformação e do estado inicial) com subclasses mais numerosas, levando em conta as várias possibilidades que existem para o sinal e o valor absoluto" (VERGNAUD, 2009b, p.222).

A seguir, o esquema referente à quinta categoria. Considere T a transformação que opera sobre o estado relativo r_1 para resultar no estado relativo r_2.



Destacamos que na segunda categoria a transformação opera entre medidas e nesta quinta categoria a transformação opera entre relações. As situações envolvidas nesta quinta categoria envolvem aquelas nas quais se desconhece ora a primeira relação, ora a segunda relação, ora a transformação.

A <u>primeira classe</u> particular de situações da quinta categoria são aquelas nas quais são conhecidas a primeira relação e a transformação e o estudante fica encarregado de em determinar a segunda relação. Assim, temos o seguinte esquema:



A relação r_1 pode envolver uma comparação positiva, e será denotada $a > b$, ou uma comparação negativa, e nesse caso a denotaremos $a < b$. Essa classe particular de situações da quinta categoria pode ser apresentada mediante a descrição dada no Quadro 08.

Quadro 08 - Possibilidades da primeira classe da quinta categoria.

	Relação 1 conhecida	Transformação conhecida	Relação 2 desconhecida	Nomenclatura
$\lvert a-b\rvert > \lvert T\rvert$	$a > b$	$T > 0$	$a > b$	5_{1a}
	$a > b$	$T < 0$	$a > b$	5_{1b}
	$a < b$	$T > 0$	$a < b$	5_{1c}
	$a < b$	$T < 0$	$a < b$	5_{1d}
$\lvert a-b\rvert < \lvert T\rvert$	$a > b$	$T > 0$	$a > b$	5_{1e}
	$a > b$	$T < 0$	$a < b$	5_{1f}
	$a < b$	$T < 0$	$a < b$	5_{1g}
	$a < b$	$T > 0$	$a > b$	5_{1h}

Fonte: Autores.

Note que a transformação pode envolver um acréscimo, e será denotada por $T > 0$, ou envolver um decréscimo, e nesse caso será denotada como $T < 0$. Para facilitar a compreensão do leitor exemplificamos estas duas transformações, bem como uma relação positiva ($a > 0$) e uma relação negativa ($a < 0$):

- Exemplo de uma relação positiva: Em seu aniversário José era 2 cm mais alto do que Maria.
- Exemplo de uma transformação positiva: Passados dois anos, José cresceu 3 cm a mais do que Maria. Transforma uma grandeza identificada com o número 2 numa grandeza identificada com o número 5.
- Exemplo de uma relação negativa: A seleção de Voleibol do Rio tem 5 pontos a menos do que a seleção de Minas.
- Exemplo de uma transformação negativa: Na última rodada do campeonato a seleção de voleibol do Rio ganhou 3 pontos. Transforma uma grandeza identificada com o número 5 numa grandeza identificada com o número 2.

A seguir apresentamos um exemplo de cada uma das oito subclasses pertencentes à quinta categoria, descritas na tabela 5.

5_{1a}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a transformação positiva $T > 0$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a > b$.

Situação 5_{1a}: Em 2010 José era 5 centímetros mais alto do que Maria. Passados dois anos, José cresceu 3 centímetros a mais do que ela. Após esses dois anos, José ficou mais alto ou mais baixo do que Maria? Quantos centímetros?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = +5$ e $T = +3$. Portanto, $r_2 = +8$. Logo, José está 8 centímetros mais alto do que Maria. Note que a operação de adição é a lei de composição correspondente à operação de uma transformação sobre um estado relativo.

5_{1b}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a transformação negativa $T < 0$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a > b$.

Situação 5_{1b}: Em 2010 José era 5 centímetros mais alto do que Maria. Passados dois anos, José cresceu 2 centímetros a menos do que Maria. Após esses dois anos, José tem quantos centímetros a mais na altura do que Maria?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = +5$ e $T = -2$. Portanto, $r_2 = +3$. Logo, José está 3 centímetros mais alto do que Maria.

5_{1c}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a transformação positiva $T > 0$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a < b$.

Situação 5_{1c}: No campeonato brasileiro de Voleibol, a seleção do Rio tinha 5 pontos a menos do que a seleção de Minas. Nessa última rodada a diferença entre as pontuações das equipes diminuiu 3 pontos. Quantos pontos a mais ou a menos têm a seleção do Rio em relação à de Minas?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = -5$ e $T = +3$. Portanto, $r_2 = -2$. Logo, a seleção do Rio têm 2 pontos a menos do que a de Minas.

5_{1d}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a transformação negativa $T < 0$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a < b$.

Situação 5_{1d}: No campeonato brasileiro de Voleibol, a seleção do Rio tinha 5 pontos a menos do que a seleção de Minas. Nessa última rodada a diferença entre as pontuações das equipes aumentou 3 pontos. Quantos pontos a mais ou a menos têm a seleção do Rio em relação à de Minas?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = -5$ e $T = -3$. Portanto, $r_2 = -8$. Logo, a seleção do Rio têm 8 pontos a menos do que a de Minas.

5_{1e}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a transformação positiva $T > 0$, em que $|a - b| < |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a > b$.

Situação 5_{1e}: Em 2009, José era 1 centímetro mais alto do que Maria. Passados dois anos, José cresceu 4 centímetros a mais do que ela. Após esses dois anos, José ficou mais alto ou mais baixo do que Maria? Quantos centímetros?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = +1$ e $T = +4$. Portanto, $r_2 = +5$. Logo, José ficou 5 cm mais alto do que Maria.

5_{1f}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a transformação negativa $T < 0$, em que $|a - b| < |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a < b$.

Situação 5_{1f}: Em 2010, João era 2 centímetros mais alto do que Pedro. Passados dois anos, João e Pedro continuaram a crescer, entretanto, João cresceu 5 centímetros a menos do que Pedro. Quem ficou mais alto? Quantos centímetros?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = +2$ e $T = -5$. Portanto, $r_2 = -3$. Logo, João está 3 centímetros mais baixo do que Pedro. Portanto, Pedro ficou 3 centímetros mais alto do que João.

5_{1g}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a transformação negativa $T < 0$, em que $|a - b| < |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a < b$.

Situação 5_{1g}: No ano de 2007, Paulo era 2 centímetros mais baixo do que Pedro. Em 2012, Paulo cresceu 5 centímetros a menos do que Pedro. Quem ficou mais baixo? Quantos centímetros?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = -2$ e $T = -5$. Portanto, $r_2 = -7$. Logo, Paulo ficou 7 centímetros mais baixo do que Pedro.

5_{1h}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a transformação positiva $T > 0$, em que $|a - b| < |T|$, pode-se determinar o estado relativo final $a > b$.

Situação 5_{1h}: No ano de 2007, Paulo era 2 centímetros mais baixo do que Pedro. Em 2012, Paulo cresceu 5 centímetros a mais do que Pedro. Quem ficou mais alto? Quantos centímetros?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_3$, em que $r_1 = -2$ e $T = +5$. Portanto, $r_2 = +3$. Logo, Paulo ficou 3 centímetros mais alto do que Pedro.

Vamos agora às situações nas quais são conhecidas a transformação e a segunda relação e deve-se descobrir a primeira relação.

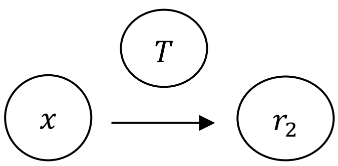
A <u>segunda classe</u> particular de situações dessa quinta categoria são aquelas nas quais são conhecidas a transformação e a segunda relação e o estudante fica encarregado de descobrir a primeira relação, que é apresentada mediante a descrição dada pelo Quadro 09. Ressaltamos que apresentaremos apenas alguns exemplos para não tornar a leitura cansativa.

Quadro 09 - Possibilidades da segunda classe da quinta categoria.

	Relação 1 desconhecida	Transformação conhecida	Relação 2 conhecida	Nomenclatura
$\|a-b\| > \|T\|$	$a > b$	$T > 0$	$a > b$	5_{2a}
	$a > b$	$T < 0$	$a > b$	5_{2b}
	$a < b$	$T > 0$	$a < b$	5_{2c}
	$a < b$	$T < 0$	$a < b$	5_{2d}
$\|a-b\| < \|T\|$	$a > b$	$T > 0$	$a > b$	5_{2e}
	$a > b$	$T < 0$	$a < b$	5_{2f}
	$a < b$	$T > 0$	$a > b$	5_{2g}
	$a < b$	$T > 0$	$a < b$	5_{2h}

Fonte: Autores.

O esquema referente à segunda classe de situações da quinta categoria é o que segue:



Apresentamos exemplos das situações 5_{2b} e 5_{2g}.

5_{2b}: Conhecendo-se a relação final $a > b$ e a transformação negativa $T < 0$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar o estado relativo inicial $a > b$.

Situação 5_{2b}: Na semana passada o time A e o time B ocuparam lugares diferentes na classificação do campeonato de futebol em virtude do total de pontos marcados. Na metade desta semana, a diferença entre eles diminuiu 2 pontos ao jogarem com times distintos. Após esta rodada, o time A passou a ter 7 pontos a mais do que o time B. Assim, quantos pontos a mais ou a menos o time A possuía na classificação da semana passada em relação ao time B?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_2$, o que implica em: $r_1 = r_2 - T$. Assim, temos: $r_2 = +7$ e $T = -2$. Portanto, $r_1 = +9$. Logo, o time A possuía 9 pontos a mais do que o time B no início da semana passada.

5_{2g}: Conhecendo-se a relação final $a < b$ e a transformação positiva $T > 0$, em que $|a - b| < |T|$, pode-se determinar o estado relativo inicial $a > b$.

Situação 5_{2g}: No início de 2010, João e Maria possuíam alturas diferentes. No início de 2011 João cresceu 2 cm a mais do que Maria, de modo que no inicio de 2012 ele tinha 7 cm a mais do que ela. Assim, quantos centímetros a mais ou a menos João possuía no início de 2010 em relação à Maria?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_2$, o que implica em: $r_1 = r_2 - T$. Assim, temos: $r_2 = +2$ e $T = +7$. Portanto, $r_1 = -5$. Logo, João possuía 5 cm a menos do que Maria no inicio de 2010.

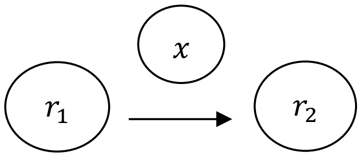
A terceira classe particular da quinta categoria é aquela em que se conhecem as relações inicial e final e cabe ao estudante descobrir a transformação. As situações desta classe podem ser descritas no Quadro 10.

Quadro 10 - Possibilidades da terceira classe da quinta categoria.

	Relação 1 conhecida	Transformação desconhecida	Relação 2 conhecida	Nomenclatura
$\|a - b\| > \|T\|$	$a > b$	$T > 0$	$a > b$	5_{3a}
	$a > b$	$T < 0$	$a > b$	5_{3b}
	$a < b$	$T > 0$	$a < b$	5_{3c}
	$a < b$	$T < 0$	$a < b$	5_{3d}
$\|a - b\| < \|T\|$	$a > b$	$T > 0$	$a > b$	5_{3e}
	$a > b$	$T < 0$	$a < b$	5_{3f}
	$a < 0$	$T < 0$	$a < b$	5_{3g}
	$a < b$	$T > 0$	$a > b$	5_{3h}

Fonte: Autores.

O esquema referente à terceira classe de situações da quinta categoria é o que segue:



Vamos ilustrar apenas as situações 5_{3a} e 5_{3b}, pois as demais situações podem ser exemplificadas por enunciados semelhantes.

5_{3a}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a relação final $a > b$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar a transformação positiva $T > 0$.

Situação 5_{3a}: Até a rodada passada o time A possuía 5 gols a mais do que o time B. Nessa rodada eles se enfrentaram e o time A agora tem 7 gols a mais do que o time B. Quantos gols a mais o time A marcou em relação ao time B na última rodada?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_2$, o que implica em: $T = r_2 - r_1$. Assim, temos: $r_2 = +7$ e $r_1 = +5$. Portanto, $T = +2$. Logo, o time A marcou 2 gols a mais do que o time B na última rodada.

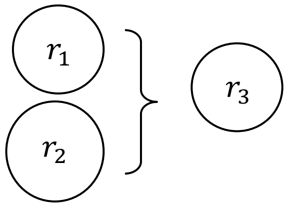
5_{3b}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a relação final $a > b$, em que $|a - b| > |T|$, pode-se determinar a transformação positiva $T < 0$.

Situação 5_{3b}: Até a rodada passada o time A possuía 5 gols a mais do que o time B. Nessa rodada eles se enfrentaram e o time A agora tem 3 gols a mais que o time B. Qual foi a diferença de gols a favor do time B nessa partida?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + T = r_2$, o que implica em: $T = r_2 - r_1$. Assim, temos: $r_2 = +3$ e $r_1 = +5$. Portanto, $T = -2$. Logo, o time A marcou 2 gols a menos do que o time B nessa partida.

Desta forma finalizamos a exemplificação da quinta categoria, dividida em 3 classes (na busca pelo estado relativo inicial ou final ou a transformação), cada uma contendo 8 subclasses, totalizando 24 subclasses.

A ***sexta categoria*** é aquela em que dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo. Serão reencontradas nesta categoria as classes estudadas na primeira categoria, mas, no lugar de medidas temos as relações, com subclasses mais numerosas. Ressaltamos que esta categoria pode também estar próxima da quarta categoria, pois temos relações no lugar de transformações (VERGNAUD, 2009b). O esquema referente à sexta categoria é composto por:



Destacamos que esta categoria pode estar dividida em duas classes, as quais geram novas subclasses.

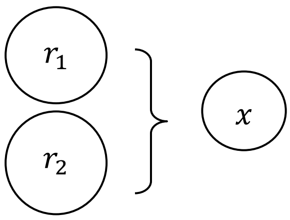
A <u>primeira classe</u> é aquela em que se conhece a relação elementar (r_1) e a relação de composição (r_2), para obter a relação desconhecida (r_3). Vamos considerar a relação r_1 do tipo $a > b$ ou do tipo $a < b$. Para r_2 consideramos $b > c$ ou do tipo $b < c$ e para r_3 consideramos $a > c$ ou do tipo $a < c$. As situações desta classe podem ser descritas pelo Quadro 11

Quadro 11 - Possibilidades da primeira classe da sexta categoria.

	Relação r_1 conhecida	Relação r_2 conhecida	Relação r_3 desconhecida	Nomenclatura
$\lvert a-b\rvert > \lvert b-c\rvert$	$a > b$	$b > c$	$a > c$	6_{1a}
	$a > b$	$b < c$	$a > c$	6_{1b}
	$a < b$	$b > c$	$a < c$	6_{1c}
	$a < b$	$b < c$	$a < c$	6_{1d}
$\lvert a-b\rvert < \lvert b-c\rvert$	$a > b$	$b > c$	$a > c$	6_{1e}
	$a > b$	$b < c$	$a < c$	6_{1f}
	$a < b$	$b > c$	$a > c$	6_{1g}
	$a < b$	$b < c$	$a < c$	6_{1h}

Fonte: Autores.

O esquema referente a esta classe é:



6_{1a}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a relação de composição $b > c$, em que $|a-b| > |b-c|$ pode-se determinar a relação final $a > c$. Note que a subclasse 6_{1e} pode ser obtida por procedimento análogo a 6_{1a}.

Situação 6_{1a}: Denise tem R$5,00 a mais do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$7,00 a mais do que Lilian. Quanto Denise tem a mais do que Lilian?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + r_2 = x$. Assim, temos: $r_1 = +5$ e $r_2 = +7$. Portanto, $x = +12$. Logo, Denise tem R$12,00 a mais do que Lilian.

6_{1b}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a relação de composição $b < c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação final $a > c$.

Situação 6_{2a}: Denise tem R$5,00 a mais do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$3,00 a menos do que Lilian. Quanto Denise tem a mais do que Lilian?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + r_2 = x$. Assim, temos: $r_1 = +5$ e $r_2 = -3$. Portanto, $x = +2$. Logo, Denise tem R$2,00 a mais do que Lilian.

6_{1c}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a relação de composição $b > c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação final $a < c$.

Situação 6_{1c}: Denise tem R$5,00 a menos do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$4,00 a mais do que Lilian. Denise tem quanto a mais ou a menos do que Lilian?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + r_2 = x$. Assim, temos: $r_1 = -5$ e $r_2 = +4$. Portanto, $x = -1$. Logo, Denise tem R$1,00 a menos do que Lilian.

6_{1d}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a relação de composição $b < c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação final $a < c$. Verifica-se que a subclasse 6_{1h} pode ser obtida por procedimento análogo a 6_{1d} e por isso vamos omitir exemplo para 6_{1h}.

Situação 6_{1d}: Denise tem R$5,00 a menos do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$7,00 a menos do que Lilian. Lilian tem quanto a menos do que Denise?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + r_2 = x$. Assim, temos: $r_1 = -5$ e $r_2 = -7$. Portanto, $x = -12$. Logo, Denise tem R$12,00 a menos do que Lilian.

6_{1f}: Conhecendo-se a relação inicial $a > b$ e a relação de composição $b < c$, em que $|a - b| < |b - c|$ pode-se determinar a relação final $a < c$.

Situação 6_{1f}: Denise tem R$5,00 a mais do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$7,00 a menos do que Lilian. Denise tem quanto a mais ou a menos do que Lilian?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + r_2 = x$. Assim, temos: $r_1 = +5$ e $r_2 = -7$. Portanto, $x = -2$. Logo, Denise tem R$2,00 a menos do que Lilian.

6_{1g}: Conhecendo-se a relação inicial $a < b$ e a relação de composição $b > c$, em que $|a - b| < |b - c|$ pode-se determinar a relação final $a > c$.

Situação 6_{1g}: Denise tem R$5,00 a menos do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$7,00 a mais do que Lilian. Denise tem quanto a mais ou a menos do que Lilian?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $r_1 + r_2 = x$. Assim, temos: $r_1 = -5$ e $r_2 = +7$. Portanto, $x = +2$. Logo, Denise tem R$2,00 a mais do que Lilian.

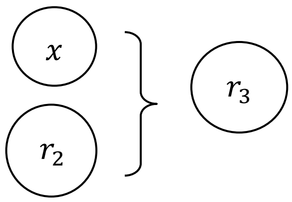
A <u>segunda classe</u> é aquela em que se conhece a relação de composição (r_2) e a relação (r_3), de modo que a relação inicial não é conhecida (r_1). As situações desta classe podem ser descritas pelo Quadro 12.

Quadro 12 - Possibilidades da primeira classe da sexta categoria.

	Relação r_1 desconhecida	Relação r_2 conhecida	Relação r_3 conhecida	Nomenclatura
$\|a - b\| > \|b - c\|$	$a > b$	$b > c$	$a > c$	6_{2a}
	$a > b$	$b < c$	$a > c$	6_{2b}
	$a < b$	$b > c$	$a < c$	6_{2c}
	$a < b$	$b < c$	$a < c$	6_{2d}
$\|a - b\| < \|b - c\|$	$a > b$	$b > c$	$a > c$	6_{2e}
	$a > b$	$b < c$	$a < c$	6_{2f}
	$a < b$	$b > c$	$a > c$	6_{2g}
	$a < b$	$b < c$	$a < c$	6_{2h}

Fonte: Autores.

O esquema referente à segunda classe é composto por:



6_{2a}: Conhecendo-se a relação final $a > c$ e a relação de composição $b > c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação inicial $a > b$. Note que a subclasse 6_{1e} pode ser obtida por procedimento análogo a 6_{1a}. Desta forma, podemos obter exemplos de situações da subclasse 6_{2e}, por isso não o faremos.

Situação 6_{2a}: Denise tem certa quantia a mais do que Marli. No entanto, Marli tem R$8,00 a mais do que Lilian, de modo que Denise tem R$11,00 a mais do que Lilian. Assim, quanto Denise tem a mais do que Marli?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $x + r_2 = r_3$, o que implica em: $x = r_3 - r_2$ Assim, temos: $r_3 = +11$ e $r_2 = +8$. Portanto, $x = +3$. Logo, Denise tem R$3,00 a mais do que Marli.

6_{2b}: Conhecendo-se a relação final $a > c$ e a relação de composição $b < c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação inicial $a > b$.

Situação 6_{2b}: Ana tem certa quantia a mais do que Rui. No entanto, Rui tem R$6,00 a menos do que João, e Ana tem R$11,00 a mais do que João. Assim, quanto Ana tem a mais do que Rui?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $x + r_2 = r_3$, o que implica em: $x = r_3 - r_2$ Assim, temos: $r_3 = +11$ e $r_2 = -6$. Portanto, $x = +17$. Logo, Ana tem R$17,00 a mais do que Rui.

6_{2c}: Conhecendo-se a relação final $a < c$ e a relação de composição $b > c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação inicial $a < b$.

Situação 6_{2c}: Ana tem certa quantia a menos do que Rui. No entanto, Rui tem R$6,00 a mais do que João, e Ana tem R$11,00 a menos do que João. Assim, quanto Ana tem a menos ais do que Rui?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $x + r_2 = r_3$, o que implica em: $x = r_3 - r_2$ Assim, temos: $r_3 = -11$ e $r_2 = +6$. Portanto, $x = -17$. Logo, Ana tem R$17,00 a menos do que Rui.

6_{2d}: Conhecendo-se a relação final $a < c$ e a relação de composição $b < c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação inicial $a < b$. Note que a subclasse 6_{2h} pode ser obtida por procedimento análogo a 6_{2d}.

Situação 6_{2d}: Denise tem certa quantia a menos do que Marli. No entanto, Marli tem R$8,00 a menos do que Lilian, de modo que Denise tem R$11,00 a menos do que Lilian. Assim, quanto Denise tem a menos do que Marli?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $x + r_2 = r_3$, o que implica em: $x = r_3 - r_2$ Assim, temos: $r_3 = -1$ e $r_2 = -8$. Portanto, $x = -3$. Logo, Denise tem R$3,00 a menos do que Marli.

6_{2f}: Conhecendo-se a relação final $a < c$ e a relação de composição $b < c$, em que $|a - b| < |b - c|$ pode-se determinar a relação inicial $a > b$.

Situação 6_{2f}: Em um campeonato de futsal, o time A tem alguns pontos a mais do que o time B. Já o time B tem 5 pontos a menos do que o time C e o time A tem 3 pontos a menos do que o time C. Então, quantos pontos a mais o time A tem em relação ao time B?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $x + r_2 = r_3$, o que implica em: $x = r_3 - r_2$ Assim, temos: $r_3 = -3$ e $r_2 = -5$. Portanto, $x = +2$. Logo, o time A tem 2 pontos a mais do que o time B.

6_{2g}: Conhecendo-se a relação final $a > c$ e a relação de composição $b > c$, em que $|a - b| > |b - c|$ pode-se determinar a relação inicial $a < b$.

Situação 6_{2g}: Em um campeonato de futsal, o time A tem alguns pontos a menos do que o time B. Já o time B tem 5 pontos a mais do que o time C e o time A tem 3 pontos a mais do que o time C. Então, quantos pontos a menos o time A tem em relação ao time B?

A equação correspondente ao esquema desta classe é: $x + r_2 = r_3$, o que implica em: $x = r_3 - r_2$ Assim, temos: $r_3 = +3$ e $r_2 = +5$. Portanto, $x = -2$. Logo, o time A tem 2 pontos a menos do que o time B.

Na sequência, apresentamos o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

2.6 O Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como atividades matemáticas, tais como “proporção simples e múltipla, função n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor” (VERGNAUD, 1993, p. 9).

Para uma análise da aprendizagem das estruturas multiplicativas, diferente das estruturas aditivas, que são compostas por relações ternárias, deve-se considerar relações quaternárias e por isso, esta estrutura não é representada pela escrita convencional da multiplicação, $a \times b = c$, pois essa representação escrita possui apenas três termos.

Nas relações multiplicativas, Vergnaud (2009) ressalta que podemos distinguir duas categorias principais, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. Estas possuem relação entre si, pois quando realizamos uma análise dimensional e utilizamos, por exemplo, um operador-função para a solução de situações problemas de isomorfismo de medidas, podemos encontrar o produto de medidas. Para compreender esta afirmação, vamos discutir a seguinte situação problema: “Um avião voa durante 6 horas à velocidade de 650 quilômetros por hora. Que distância ele percorre?” (VERGNAUD, 2009, p. 258).

Para interpretar os dados da situação vamos distribuí-los adequadamente por tempo em horas e distância em quilômetros. Esta relação forma um isomorfismo de medidas.

Tempo em horas	Distância em quilômetros
1	650
6	*x*

A resolução desta situação consiste em multiplicar a medida 6 horas pelo operador-função 650 Km/h. Note que esta relação pode também ser interpretada da seguinte forma: $x\ km = 6\ horas\ \times 650\ km/hora$, ou seja, temos para a dimensão a equação: $medida\ da\ distância = medida\ em\ horas\ \times medida\ da\ velocidade$, que é representada por $d = t \times v$ ou $d = v \times t$. Esta equação retoma a relação definida por Vergnaud (2009b) como produto de medidas.

De acordo com Vergnaud (2009b) pode-se interpretar o produto de medidas como um isomorfismo duplo, ou, dupla proporcionalidade. Geralmente, os estudantes possuem mais dificuldades com o produto de medidas do que com o isomorfismo, a não ser que este seja interpretado como dupla proporção. O autor destaca também que existem dimensões simples, como comprimento, tempo, peso, custo, dimensões produto compostas por área e volume, e as dimensões quociente, dos quais pertencem a velocidade, densidade ou valor unitário. Entretanto, estas duas últimas dimensões, são muitas vezes, compostas por dimensões simples. Por exemplo,

$$\textit{área} = \textit{comprimento} \times \textit{largura}, \textit{velocidade} = \frac{\textit{distância}}{\textit{tempo}}.$$

Desta forma, os conjuntos de composições numéricas – multiplicações, divisões, regra de três simples e composta, e composições sobre as dimensões pertencem às relações multiplicativas.

Na sequência, descrevemos as classes de problemas do tipo multiplicativo, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas, proposto por Vergnaud (2009b, p. 239). Para compreender as diferenças destas categorias apresentamos esquemas relacionais inerentes ao mesmo domínio de referência, fornecemos exemplos correspondentes, e realizamos análises das equações numéricas equivalentes aos esquemas.

O ***isomorfismo de medidas*** é uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo, duas a duas, medidas diferentes, e uma dessas quantidades corresponde ao valor unitário. Há três classes de problemas, subdivididas em multiplicação, divisão em que se busca o valor unitário, e a divisão em que se busca a quantidade de unidades. Vergnaud (2009b) destaca que essas três classes do isomorfismo de medidas, podem ser subdivididas em numerosas subclasses, variando apenas o conjunto numérico (inteiros pequenos e grandes, números decimais e decimais inferiores a 1), bem como a busca pelo valor unitário ou a quantidade de unidades.

Primeira classe de isomorfismo de medidas

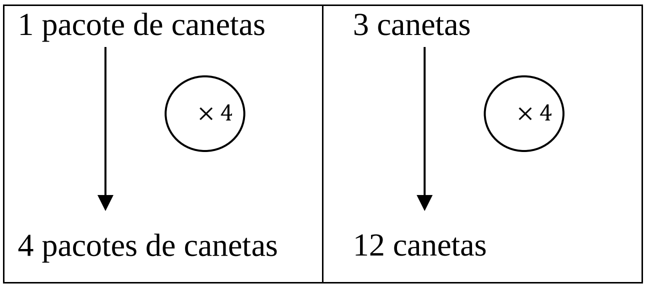
Na <u>*multiplicação*</u> conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades, em dois tipos de medidas, conforme indicadas no esquema a seguir.

Quantidade a	Quantidade b
1 $\longrightarrow$	a
b $\longrightarrow$	x

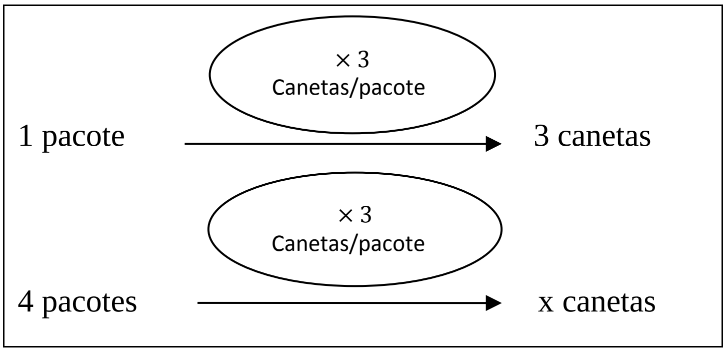
Situação: Ana tem 4 pacotes de canetas. Em cada pacote há 3 canetas. Quantas canetas Ana possui?

Quantidade de pacotes de canetas	Quantidade de canetas
1	3
4	x

A equação correspondente é: $\frac{1}{4} = \frac{3}{x} \Longrightarrow 1.x = 4.3 \Longrightarrow x = 12$, ou seja, Ana tem 12 canetas. O cálculo relacional desta situação ocorre pela multiplicação. Conforme Vergnaud (2009b), os valores 1 e 4 representam quantidades de pacotes de canetas, e 3 e x representam a quantidade de canetas, ou seja, são todos medidas, mas de naturezas distintas. O operador vertical é um operador sem dimensão ou escalar, que permite passar, de uma linha à outra, na mesma categoria de medidas.



O operador horizontal representa uma função relacional que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, nesse caso, expressa a passagem entre a quantidade de canetas por pacotes, ou seja, expressa o quociente $\frac{caneta}{pacote}$.



Assim, há duas possibilidades de determinar a quantidade x de canetas. A primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão $(\times 4)$ à quantidade de três (03) canetas. A segunda consiste em aplicar a função relacional: quantidade de quatro (04) pacotes vezes um três canetas/pacote $(\times 3)$ para obter a quantidade de canetas.

Essa análise permite compreender que, efetuando-se a multiplicação 4×3, é fornecida uma relação entre a quantidade de pacotes e canetas/pacote. Essa relação quaternária também pode ser analisada das seguintes maneiras:

- x canetas estão para 3 canetas, assim como 4 pacotes de canetas estão para 1 pacote de caneta.
- x canetas estão para 4 pacotes de canetas, assim como 3 canetas estão para 1 pacote de canetas.

Segunda classe de isomorfismo de medidas

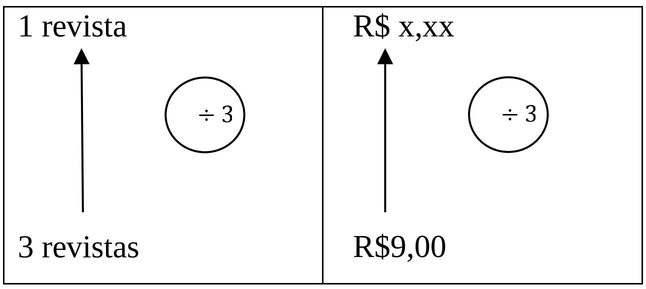
Na *divisão: busca do valor unitário* temos o esquema a seguir.

Quantidade a	Quantidade b
1 →	x
b →	c

Situação: Carlos pagou R$9,00 por 3 revistas. Quanto custa cada revista?

Quantidade de revistas	Valor pago (R$)
1 →	x
3 →	9

A equação correspondente é: $\frac{1}{3} = \frac{x}{9} \Longrightarrow 3.x = 1.9 \Longrightarrow x = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$, ou seja, Carlos pagou R$3,00 em cada revista. O cálculo relacional desta situação ocorre por divisão de valores com intuito de obter o valor unitário da revista. De acordo com Vergnaud (2009b), o operador vertical é um operador sem dimensão ou escalar, que permite passar, de uma linha à outra, na mesma categoria de medidas.



O operador horizontal representa uma função relacional que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, nesse caso, expressa a passagem entre a quantidade de revistas pelo valor pago em cada revista.

$$1 \text{ revista} \xrightarrow{\times R\$3{,}00/revista} R\$3{,}00$$

$$3 \text{ revistas} \xrightarrow{\times R\$3{,}00/revista} R\$9{,}00$$

Terceira classe de isomorfismo de medidas

Na *<u>divisão: busca da quantidade de unidades</u>* temos o esquema a seguir.

Quantidade a	Quantidade b
1 →	a
x →	c

Situação: João tem R\$20,00 e quer comprar cadernos que custam R\$5,00 cada um. Quantos cadernos poderá comprar?

Quantidade de cadernos	Preço (R\$)
1 →	5
x →	20

A equação correspondente é: $\frac{1}{x} = \frac{5}{20} \Longrightarrow 5.x = 1.20 \Longrightarrow x = \frac{20}{5} \Longrightarrow x = 4$, ou seja, João poderá comprar 4 cadernos iguais. O operador vertical é um operador sem dimensão ou escalar, que permite passar, de uma linha à outra, na mesma categoria de medidas, neste caso, vale 4.

1 caderno	R\$5,00
↓ $\times 4$	↓ $\times 4$
4 cadernos	R\$20,00

O operador horizontal representa uma função relacional que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, nesse caso, expressa a passagem entre a quantidade de canetas por pacotes = caneta/pacote.

	$\div R\$5{,}00 \; /caderno$	
1 caderno	$\longleftarrow$	R$5,00
	$\div R\$5{,}00 \; /caderno$	
x cadernos	$\longleftarrow$	R$20,00

A segunda classe de situações problemas é o ***produto de medidas.*** *É* uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma delas é o produto de outras duas, tanto no plano numérico, quanto no plano dimensional.

O produto de medidas permite distinguir duas classes de problemas: a multiplicação e a divisão.

Primeira classe de produto de medidas

A *multiplicação* é aquela em que se busca a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares.

Situação: Maria tem 3 blusas iguais, mas de cores diferentes, sendo uma azul, uma branca e outra cinza. Ela possui também, 4 saias de cores: marrom, preta, roxa e vermelha. De quantas maneiras distintas Maria poderá se vestir?

De acordo com Vergnaud (2009b) o esquema para representar esta situação é uma tabela cartesiana, pois o produto cartesiano de conjuntos fundamenta a estrutura do produto de medidas.

Para analisar esta situação chamaremos o conjunto das Blusas de B, de modo que, $B = \{a, b, c\}$ e o conjunto de saias, $S = \{m, p, r, v\}$. O conjunto de todos os pares que é possível formar $P = B \times S$, indicado no Quadro 13.

Quadro 13 - Possibilidades de formar conjuntos (saias e blusas).

		Saias			
		m	p	r	v
Blusas	a	(a, m)	(a, p)	(a, r)	(a, v)
	b	(b, m)	(b, p)	(b, r)	(b, v)
	c	(c, m)	(c, p)	(c, r)	(c, v)

Fonte: Vergnaud (2009, p.254).

A equação correspondente é: $x\ pares\ de\ roupas = 3\ blusas \times 4\ saias$.

Para os números, temos: $x = 3 \times 4$.

Para as dimensões, temos: $pares\ de\ roupas = blusas \times saias$.

Segunda classe de produto de medidas

A *divisão* é aquela se deseja encontrar as medidas elementares, conhecendo-se uma medida elementar e a medida produto. Estão subdivididas em produto discreto-discreto, produto contínuo-contínuo e produto contínuo-contínuo e noção de média.

Produto discreto-discreto: Trocando somente de saia e blusa, Ana pode montar 18 trajes diferentes. Se Ana têm 3 saias, quantas blusas ela possui?

Esta situação problema exemplifica a diferença entre uma divisão (uma forma da relação multiplicativa) e uma divisão que envolve o isomorfismo de medida (VERGNAUD, 2009b). Para encontrar a quantidade de blusas que Ana possui é necessário dividir o número de trajes pelo número de saias da seguinte forma: $18\ trajes = 3\ saias \times x\ blusas$

Para os números, temos a equação: $18 = 3.x$

Para as dimensões, temos: $trajes = saias \times blusas$.

Então, resolvendo a equação, obtemos: $18 = 3.x \Longrightarrow \frac{18}{3} = x \Longrightarrow x = 6$. Ou seja, para montar 18 trajes nestas condições, Ana precisa ter 6 blusas.

Produto contínuo-contínuo: A sala de aula de Lilian têm área de $24m^2$. Sabendo que a largura desta sala é de 6m, qual é o comprimento?

Para os números, temos a equação: $24m^2 = 6m.x$

Para as dimensões, temos: $área = largura \times comprimento$.

Então, resolvendo a equação, obtemos: $24m^2 = 6m.x \Longrightarrow \frac{24m^2}{6m} = x \Longrightarrow x = 4m$. Ou seja, o comprimento da sala de aula é de 6m.

Produto contínuo-contínuo e noção de média: Sabendo que o volume de uma caixa d'água é $90m^3$ e que a superfície desta caixa tem área $30m^2$ qual é a altura desta caixa?

Para os números, temos a equação: $90m^3 = 30m^2.x$

Para as dimensões, temos: $volume = área \times altura$.

Então, resolvendo a equação, obtemos: $90m^3 = 30m^2.x \Longrightarrow \frac{90m^3}{30m^2} = x \Longrightarrow x = 3m$. Ou seja, a altura da caixa d'água é de 3m.

De acordo com Vergnaud (2009b) o estudo das estruturas multiplicativas apresenta diversificados tipos de multiplicação e de divisão, e essa variedade de situações problemas devem ser cuidadosamente abordadas em sala de aula, para que os estudantes tenham contato e reconheçam a estrutura que compõem estas situações, e, consequentemente, desenvolvam estratégias de resolução. É a variedade de situações que o educando enfrenta, bem como, os invariantes e representações que podem contribuir para a formação e o desenvolvimento de conceitos envolvidos na estrutura multiplicativa.

SEÇÃO 3 – ESTRUTURA ADITIVA DOS NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Nesta seção apresentamos uma releitura do artigo de Nancy Mack, intitulado *Learning fractions with understanding: building on informal knowledge.* Este artigo foi publicado no periódico JRME que é destinado a professores e pesquisadores da área da Educação Matemática.

O trabalho de Mack contempla atividades realizadas com os números racionais na representação fracionária, em específico, àquelas pertencentes à estrutura aditiva, ou seja, que envolve adição e subtração de frações.

A escolha deste artigo ocorreu em virtude de apresentar, em detalhes, as respostas dos alunos ao resolverem as atividades propostas pela pesquisadora.

Adição e Subtração de Frações

O artigo *Learning fractions with understanding: building on informal knowledge* de Nancy Mack, foi publicado em 1990, no *Journal for Research in Mathematics Education*, volume 21.

Neste artigo a autora descreve a pesquisa realizada durante seis semanas com oito alunos que cursavam a 6ª série (atualmente, 7º ano) em uma escola na cidade de Madison, Wisconsin, EUA. O objetivo deste estudo foi examinar o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre os números racionais na representação fracionária a partir de duas perspectivas: (i) desenvolver o conhecimento informal dos estudantes sobre os números racionais na representação fracionária – nomeado simplesmente por frações pela autora e (ii) investigar as formas que os alunos são e não são capazes de construir o conhecimento informal para dar sentido a símbolos da fração e procedimentos que envolvia tais símbolos.

Resultados de pesquisas indicam que o conhecimento informal dos alunos sobre as frações devem ser analisados para auxiliá-los na compreensão do significado deste novo tipo de número, pois os principais tipos de erros cometidos pelos estudantes são devidos a procedimentos incorretos utilizados em operações aritméticas entre frações (BEHR et al., 1983; KERSLAKE, 1986; CARPENTER, 1988).

De acordo com Mack (1990) o conhecimento informal dos alunos refere-se à ação de juntar e separar conjuntos e estimar quantidades envolvendo frações. Além disso, Leinhardt (1988) afirma que os alunos podem realizar com êxito as operações aritméticas envolvendo frações, sempre que os problemas apresentados pertencem ao contexto de situações da vida real destes educandos.

Para o desenvolvimento da pesquisa, Mack (1990) realizou as sessões individualizadas e entrevistas clínicas com os alunos. A maioria das situações problemas foi apresentada verbalmente aos estudantes para favorecer a participação e encorajá-los a falar durante a resolução das atividades. Foram utilizados materiais manipuláveis, por exemplo, tiras e círculos de papel.

Durante as sessões de ensino, a pesquisadora buscou privilegiar atividades que:

- Representassem situações do mundo real, para aproximar a quantidade representada por materiais manipuláveis;
- Utilizassem as respostas por estimativa para resolver adição e subtração entre frações;

As tarefas foram baseadas em quatro ideias centrais: (a) as partes de uma unidade é dividida em partes menores, (b) uma fração representada simbolicamente é um número único, e não dois números inteiros independentes, (c) as ideias de equivalência estão relacionadas com representações manipuláveis e simbólicas, e (d) a adição e subtração de frações, representadas simbolicamente, requerem denominadores comuns.

Na sequência, discutimos as atividades desenvolvidas pelos estudantes, e destacamos algumas respostas para identificar elementos da TCC.

Atividade 1A: solução envolvendo particionamento.

Em geral, as soluções dos alunos às situações problemas envolviam a ideia de particionamento da unidade em partes iguais. Os estudantes aproximaram as informações contidas nos problemas por frações referindo-se ao número de partes, por exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ representa uma parte considerada do total de quatro partes.

No Quadro 14, apresentamos o diálogo entre a pesquisadora e o estudante Ned. Ilustra-se a solução da situação problema proposta envolvendo o particionamento da unidade em partes iguais.

Quadro 14: Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Ned.

Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Ned (MACK, 1990, p.21).	Tradução dos autores
I: Suppose you have two lemon pies and you eat 1/5 of one pie, how much lemon pie do you have left? **Ned**: You'd have I 4/5. First of all you had 5/5 to start with. Then if you ate one you'd have four pieces left out of the five, and you still have one whole pie left.	**Eu:** Suponha que você tenha duas tortas de limão e você come 1/5 de uma das tortas, quanto da torta de limão sobrou? **Ned:** Você teria 4/5. Primeiro de tudo, você tinha 5/5 no início. Então você comeu um pedaço e deixou quatro pedaços de cinco, e você ainda tem uma torta inteira.

Fonte: Mack (1990, p.21).

Análise segundo a TCC

Esta atividade trata da relação parte-todo, em que o estudante precisa identificar que o todo foi dividido em cinco (5) partes iguais, que representa o denominador deste número racional na representação fracionária.

O conhecimento informal do aluno foi aplicado coerentemente nesta situação, o que Vergnaud (1993) considera um conceito em ação. Nestas situações o aluno necessita desenvolver algumas competências, como por exemplo, identificar a unidade, realizar divisões (o todo se conserva, mesmo quando dividimos em partes iguais, há a conservação da unidade), manipular a ideia de conservação da área (em representações contínuas).

A conservação da unidade é considerada como a compreensão de que a quantidade (contínua ou discreta) permanece invariável, enquanto outros aspectos (forma, posição) se modificam.

Para o estudante compreender que uma quantidade permanece invariável após realizar modificações, como por exemplo, repartição de uma coleção ou a fragmentação de um todo, sobre a forma ou a disposição de um objeto (no caso, as tortas de limão foram divididas em 5 pedaços iguais), o aluno deve ter compreendido que estas modificações são resultado de transformações mentalmente reversíveis (LIMA, 2008).

De acordo com Vergnaud (2009b) se o estudante não adquiriu a conservação de área, por exemplo, temos o início de um problema gerador de dificuldades para a aprendizagem do conceito de fração, pois uma das condições essenciais para a compreensão de tal conceito não é observada pelo aluno. Além do mais, a soma das frações constituídas de um todo deve ser percebida pelo sujeito como igual a este todo. Esta condição implica que o pensamento do estudante deve ser conservativo com relação à área - grandeza contínua que foi utilizada.

Atividade 2A: comparação de frações.

Os estudantes desenvolveram com sucesso numerosos problemas apresentados no contexto de situações do mundo real. No entanto, possuiam dificuldades em solucionar problemas representados simbolicamente, mesmo sendo semelhantes aos problemas do mundo real.

Para exemplificar a afirmação anterior, vamos discutir as respostas dos alunos dadas a seguinte situação problema:

"*Suponha que você tenha duas pizzas do mesmo tamanho, e você deseja cortar uma das pizzas em seis pedaços iguais. A outra pizza você deseja cortar em oito pedaços iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, qual destes pedaços será maior?*[11]".

A maioria dos alunos respondeu que o maior pedaço de pizza seria obtido a partir da pizza que foi dividida em seis partes iguais. A resposta dada por Bob representa esta resposta:

"Bob: A pizza cortada em seis tem menos pedaços, portanto, cada pedaço será maior do que a outra pizza, dividida em oito pedaços[12]*".*

Para Vergnaud (2009b) este é um invariante denominado conceito em ação pertinente. O estudante utilizou a interpretação de quociente, e indica a compreensão da representação na forma de fração a/b, utilizada para expressar a divisão de *a* por *b.*

É relevante destacar importância deste conceito em ação mobilizado pelos estudantes, pois quanto maior o número de divisões de determinado objeto ou coleção de elementos, menor será a área de cada uma de suas partes.

---

[11] Suppose you have two pizzas of the same size, and you cut one of them into six equal-sized pieces and you cut the other one into eight equal-sized pieces. If you get one piece from each pizza, which one do you get more from? (MACK, 1990, p.21).
[12] The one cut into six has fewer pieces so there's more in each piece.

No entanto, Julie discordou desta resposta e justificou que:

"Julie: O pedaço dividido em oito partes é a maior".

A afirmação de Julie é um teorema em ação falso, de acordo com a TCC, pois a justificativa está baseada na enumeração de naturais, e seu domínio de validade é considerado verdadeiro apenas para um conjunto de problemas.

De acordo com Mack (1990) a explicação de Julie para esta resposta está baseada no fato de que o número oito é maior do que o número seis. Para a TCC, esta justificativa é um teorema em ação verdadeiro para o domínio dos números naturais e, portanto, a pizza dividida em oito partes iguais possui cada uma das fatias maiores do que a pizza dividida em seis partes. Entretanto, isto não se verifica para o domínio dos números racionais.

De acordo com Mack (1990) as frações apresentadas no contexto de uma situação problema do mundo real sugerem que o conhecimento informal dos alunos relacionado à comparação de quantidades fracionárias estava desconectado do conhecimento da representação de fração.

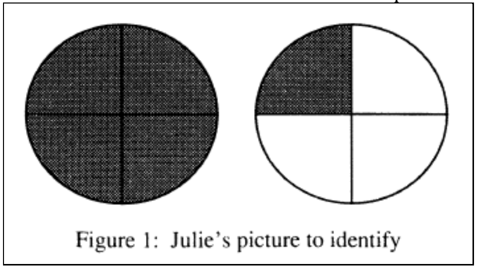
Além disso, a explicação dos alunos para mostrar que 1/8 é maior do que 1/6 sugere que o conhecimento sobre o número racional na representação fracionária é caracterizada por equívocos que se originaram na tentativa de aplicar regras e operações de números naturais para frações (VERGNAUD, 1993).

Atividade 3A: adição de frações a partir da representação figural.

De acordo com Mack (1990) os estudantes tiveram dificuldade em identificar a unidade fracionária nas situações problemas representada simbolicamente e concretamente. Os alunos trataram a representação simbólica envolvendo coleções de unidades como se fosse uma única unidade. Mesmo quando as situações foram apresentadas concretamente, os alunos tendem a considerar todas as partes representadas como a unidade. A resposta do aluno Aaron ilustra esse equívoco: *"Fração é a parte de um todo".*

A Figura 01 apresenta uma situação problema em que a pesquisadora solicitou aos alunos que identificassem que fração representava a parte pintada/hachurada da imagem.

Figura 01: Representação de $\frac{5}{4}$.



Fonte: Mack (1990, p.22)

No Quadro 15, apresentamos o diálogo entre a pesquisadora e a estudante Julie. Ilustra-se a solução da situação problema proposta a partir da Figura 01.

Quadro 15: Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Julie.

Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Julie (MACK, 1990, p.21).	Tradução dos autores
I: (showing Julie the picture in Figure 1) How much is shaded? **Julie:** Five-eighths. **I:** Suppose I said those were pizzas. **Julie:** (interrupting) Oh , 1 1/4!	**Eu:** (Mostrando a imagem da Figura 1 para Julie) Quanto é a parte sombreada? **Julie**: Cinco oitavos. **Eu:** Suponha que aquelas imagens eram pizzas. **Julie:** (interrompendo) Oh, 1 1/4!

Fonte: Mack (1990, p.21).

Análise segundo a TCC

A resposta dada por Julie, que indica a parte hachurada da figura por $\frac{5}{8}$ nos sugere que ela interpretou, inicialmente, a unidade com oito partes. Além disso, por se tratar de uma adição, verifica-se a presença de um falso teorema em ação (VERGNAUD, 2009b) somar numeradores e, denominadores, separadamente.

Este tipo de teorema em ação é comum durante o início da aprendizagem de adição de frações, e pode permanecer na estrutura cognitiva por toda a vida escolar do educando.

De acordo com Mack (1990) após a mediação da pesquisadora, em que relacionou os círculos à pizzas, Julie modifica a resposta, e informa que a parte hachurada equivale a uma unidade inteira e $\frac{1}{4}$. Esta resposta nos sugere que ela era capaz de determinar a unidade apropriada quando o problema foi apresentado no contexto de uma situação do mundo real.

Para Vergnaud (2009b) a primeira resposta dada por Julie, em que conta a quantidade de partes que os círculos foram divididos (8 partes) está relacionado a estratégia da enumeração dos números naturais. Por isso caracteriza-se como teorema em ação falso.

Nota-se que a interpretação da relação parte-todo, contar o total de partes para determinar o todo (denominador) e então as partes pintadas para determinar o numerador está presente na fala destes alunos.

A relação entre as partes e o todo da Figura 01 é importante, pois as partes devem ser iguais para que se tenha fração. O aluno deve relacionar as partes com o todo, e também, as partes de uma com a outra. Isto significa que se considerou uma parte que coube exatamente (um número inteiro de vezes) no todo considerado, ou seja, a parte se repetiu como "unidade" em relação ao todo (VERGNAUD, 2009b; LIMA, 2008).

De acordo com Vergnaud (2009c) a representação da Figura 01 é constituída de sistemas de objetos possivelmente pertinentes ao qual o estudante é levado a utilizar durante a atividade. Isto quer dizer que para o educando é pertinente associar a imagem da Figura 01 ao método de dupla contagem, ou seja, contar o número total de partes e então as partes hachuradas, sem entender o siginificado deste número. Esta ideia é proveniente do início do ensino de frações baseado na interpretação parte-todo (NUNES e BRYANT, 1997).

Atividade 4A: subtração entre um número inteiro e uma fração.

Os estudantes enfrentaram algumas situações que utilizaram com sucesso o seu conhecimento informal sobre frações para dar sentido aos símbolos e aos procedimentos aritméticos.

Uma das situações em que os alunos foram capazes de construir em seu conhecimento informal sobre frações, envolvia subtração entre um número inteiro e um número fracionário. No Quadro 16, apresentamos o diálogo entre a pesquisadora e o estudante Aaron.

Quadro 16: Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Aaron.

Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Aaron (MACK, 1990, p.23).	Tradução dos autores
I: When you add fractions, how do you add fractions? **Aaron:** Well, you go across. You add the top	**Eu:** Quando você adiciona frações, como você adiciona frações? **Aaron**: Bem, você vai somando. Você soma os

numbers together and the bottom numbers together.	números de cima e adiciona os números de baixo, separadamente.
I: Now I want you to solve this problem (shows Aaron a piece of paper with 4 - 7/8 printed on it).	**Eu:** Agora eu quero que resolva este problema (Mostra a Aaron um pedaço de papel que está escrito 4 - 7/8).
Aaron: (Writes 4 - 7/8 on his paper) Well, you change this (the 4) to 4/4.	**Aaron:** (Escreve 4 – 7/8 no seu papel) Bem, você pode alterá-lo (o 4) para 4/4.
I: Why 4/4?	**Eu:** Por que 4/4?
Aaron: Cause you need a whole, so you have to have a fraction and that's that fraction, and then you have to reduce, or whatever that's called, that (the 4) times two, so you'll have 8/8. Eight eighths minus seven, so it's 1/8.	**Aaron:** Porque você precisa de um todo, de modo que você tem que ter uma fração e isso é uma fração, e então você tem que reduzir, ou o que quer que seja, que (o 4) vezes dois, então você vai ter 8/8. Oito oitavos menos sete oitavos, por isso é 1/8.
I: Now suppose I told you have four cookies and you eat 7/8 of one cookie, how many cookies do you have left?	**Eu:** Agora suponha que eu lhe disse que você tem quatro bolinhos e você come 7/8 de um bolinho, quantos bolinhos você deixou?
Aaron: You don't have any cookies left. You have an eighth of a cookie left.	**Aaron:** Você deixou qualquer bolinho. Você tem um oitavo de um bolinho.
I: If you have four cookies...	**Eu:** Se você tem quatro bolinhos...
Aaron: (interrupting) Oh! Four cookies!	**Aaron:** (interrompendo) Ah! Quatro bolinhos!
I: ...and you eat 7/8 of one cookie, how many cookies do you have left?	**Eu:** ... e você come 7/8 de um bolinho, quantos bolinhos você deixou?
Aaron: Seven-eighths of one cookie? Three and one eighth.	**Aaron:** Sete oitavos de um bolinho? Três e um oitavo.
I: Now how come you got 3 1/8 here (referring to what Aaron had just said) and you got 1/ 8 there (referring to paper)?	**Eu:** Agora, como é que você tem 3 1/8 aqui (referindo-se ao que Aaron tinha dito) e você tem 1/8 lá (referindo-se ao papel)?
Aaron: (Pauses, looking over problem). I don't know. (Contemplates problem; repeats problem). Well, because on this you're talking about four cookies, and on this you're talking about one.	**Aaron:** (Pausa, olhando para o problema). Eu não sei. (Contempla o problema; repete o problema). Bem, neste está falando de quatro bolinhos, e sobre este, você está falando de um.

Fonte: Mack (1990, p.23).

Análise segundo a TCC

Na primeira fala do estudante Aaron do Quadro 16 verifica-se um teorema em ação falso, análogo ao identificado na atividade 3A. No entanto, durante o diálogo com a pesquisadora, o estudante explica que para realizar a subtração ele deve ter duas frações, por isso transforma o número 4 em 4/4, e na sequência multiplica por 2 para obter a fração 8/8. Equivocadamente, Aaron afirma que $4 - \frac{7}{8} = \frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$.

A estratégia utilizada por Aaron indica seu conhecimento prévio de adição de frações: para adicionar ou subtrair frações é necessário ter denominadores iguais. Entretanto, neste momento do processo de ensino, o estudante não considera que retirou uma unidade de quatro e a reescreveu como uma fração, $1 = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$.

De acordo com Mack (1990) é necessário proporcionar ao aluno contextualização da atividade proposta com situações do mundo real. Para Vergnaud (1993) é necessário possuir instrumentos de linguagem para veicular a informação pertinente a determinadas situações problemas, tanto na expressão da solução ou na verbalização que acompanham o raciocínio, quanto no próprio enunciado do problema.

> A conceitualização matemática não se limita à compreensão das relações e propriedades como instrumentos, abrangendo também a transformação desses instrumentos em objetos do pensamento, não podemos ficar indiferentes aos meios de que dispõem professor e aluno para tal transformação (VERGNAUD, 1993, p.21).

Nesse sentido, é necessário fazer o estudante refletir sobre suas respostas para mostra-lhe possíveis equívocos, tal como realizado pela pesquisadora e ilustrado no Quadro 16. O fato de modificar a pergunta e enunciá-la no contexto do mundo real proporcionou ao aluno refletir sobre sua fala e a construir uma estratégia consistente para resolver a situação problema.

A pesquisadora continuou o diálogo com Aaron para fazê-lo refletir sobre o procedimento que deveria realizar na subtração entre um número inteiro e uma fração. O Quadro 17 ilustra o diálogo envolvendo subtração de frações.

Quadro 17: Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Aaron.

Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Aaron (MACK, 1990, p.24).	Tradução dos autores
I: Suppose you have a board four feet long and you cut off a piece 7/8 of a foot long to make a shelf. How much of the board do you have left? **Aaron:** (Looks at the problem he had written earlier, 4/4 - 7/8.) **I:** Don't look at your problem [on paper]. (Repeats board problem).	**Eu:** Suponha que você tenha uma placa de quatro metros de comprimento e você quer cortar um pedaço de 7/8 de comprimento para fazer uma prateleira. Quanto da placa sobrou? **Aaron:** (Olha o problema que ele tinha escrito antes, 4/4 - 7/8). **Eu:** Não olhe para o seu problema [em papel]. (Repete o problema da placa).

Aaron: (Draws a line for the board, first thinking 7/8 of the whole board. Instructor repeats the problem; Aaron marks off the board to show four feet). Oh, I know now, 3 1/8 feet.	**Aaron:** (Desenha uma linha para a placa, primeiro pensando 7/8 de todo. O instrutor repete o problema; Aaron marca fora da placa para mostrar quatro metros). Ah, eu sei agora, 3 1/8 metros.
I: Very good. Now you said the problem couldn't be worked.	**Eu:** Muito bom. Agora você disse que o problema não poderia ser trabalhado.
Aaron: You have to multiply to find the same denominator, which is eight, so four times two is eight and this four times two is eight, so it's 8/8. (Writes 3 8/8 - 7/8 = 3 1/8 on his paper.)	**Aaron:** Você tem que multiplicar para encontrar o mesmo denominador, que é oito, pois quatro vezes dois é oito e este quatro vezes este dois é oito, por isso é 8/8. (Escreve no papel 3 8/8 - 7/8 = 3 1/8).
I: Now where'd you get this 3 8/8?	**Eu:** Agora, onde você arranjou esse 3 8/8?
Aaron: This used to be 3 4/4, and 4/4 is one, and I need that so I can take a piece away.	**Aaron:** Isto costumava ser 3 4/4 e 4/4 é um, e eu preciso deste para que eu possa ter um pedaço de comprimento.
I: You couldn't figure that problem out last time.	**Eu:** Você não podia imaginar este problema da última vez.
Aaron: I thought four was the same as 4/4, but it's really the same as 3 4/4, 3 8/8, 3 2/2, 3 1/1....	**Aaron:** Pensei que quatro era o mesmo que 4/4, mas na verdade é o mesmo do que 3 4/4, 3 8/8, 3 2/2, 3 1/1.
I: I want you to solve this problem: 4 1/8 minus 5/8.	**Eu:** Eu quero que você resolva este problema: 4 1/8 menos 5/8.
Aaron: (Immediately writes 3 8/8 - 5/8 = 3 3/8.)	**Aaron:** (Imediatamente escreve 3 8/8 - 5/8 = 3 3/8).
I: Let's use the [fraction] pieces to see if that's right.	**Eu:** Vamos usar as [frações] peças para ver se é isso mesmo.
Aaron: (Puts out 3 1/8 circles.) Wait, 3 1/8 (looks at his paper)... I can't change it to 8/8 for some reason.	**Aaron:** (Coloca 3 1/8 círculos) Espere, 3 1/8 (olha para o papel) ... Não posso alterá-lo para 8/8, por algum motivo.
I: Why not?	**Eu:** Por que não?
Aaron: It's gottab e changed to 9/8. (Changes 3 8/8 to 3 9/8 on his paper.)	**Aaron:** Tem que ser alterado para 9/8. (Muda para 3 8/8 para 3 9/8 no seu papel.)
I: Why 9/8?	**Eu:** Por que 9/8?
Aaron: Because there's one piece over there and you have to add it.	**Aaron:** Porque há uma peça ali e você tem que adicioná-lo.
I: How'd you figure that out?	**Eu:** Como você descobriu isso?
Aaron: It just seems like that's the right thing, cause if there's 8/8 and there's one over here, you have to add it. You can't just forget about it, and that'd make 4/8, 3 4/8, well, 3 1/2. (Writes answer on his paper).	**Aaron:** Parece apenas que é a coisa certa, porque se há 8/8 e há um aqui, você tem que adicioná-lo. Você não pode simplesmente esquecê-la, e que ia fazer 4/8, 3 4/8, bem, 3 1/2. (Escreve a resposta no seu papel).

Fonte: Mack (1990, p.24).

Análise segundo a TCC

O conhecimento prévio de Aaron incluiu os efeitos de instrução formal. O comentário “adicionar os numeradores e, adicionar os denominadores”, apresentado no Quadro 16, nos sugere o quão frágil esse conhecimento era e como era desconectada do seu conhecimento informal sobre a adição e subtração de frações.

Posteriormente, Aaron usou seu conhecimento informal para resolver o problema de tal forma que foi significativo para ele.

O movimento de ida e volta entre os problemas em diferentes contextos parecia fornecer relações entre as representações simbólicas e o conhecimento informal de Aaron, o que lhe permitiu construir um algoritmo significativo para problemas do mundo real, e desta forma ele pudesse estender o algoritmo para resolver outras situações problemas, como por exemplo, 4 1/8 - 5/8.

Para Vergnaud (2009b) a estratégia desenvolvida por Aaron é considerada um conceito em ação e, além disso, é consistente na estrutura cognitiva deste educando, pois mobilizou durante a ação e utilizou conhecimentos coerentes para resolver a situação.

> O funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende do estado de seus conhecimentos, implícitos ou explícitos. Deve-se, pois, dar grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, a suas continuidades, rupturas, passagens forçadas, à complexidade relativa das classes de problemas, procedimentos e representações simbólicas, à análise dos erros principais e dos principais insucessos (VERGNAUD, 1993, p.25).

A resposta de Aaron “para que eu possa ter um pedaço aqui” e “há um pedaço lá” nos indica que este aluno considera a fração como as partes de um todo e trata cada parte como uma unidade separadamente.

Os outros alunos responderam o problema envolvendo subtração de uma fração a partir de um número inteiro de uma forma semelhante à de Aaron. Todos os oito alunos progrediram durante a sequência de ensino (MACK, 1990), passando por sua sequência de problemas de subtração (4 - 7/8, 4 1/8 - 5/8, 4 1/8 - 1 5/8) antes de discutir frações equivalentes e resolver problemas que envolviam adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Todos os alunos também construíram algoritmos significativos para converter números mistos e frações impróprias, eles resolveram problemas de subtração com reagrupamento.

A principal consequência da construção do conhecimento informal dos alunos sobre as frações foi que os estudantes, na maioria das vezes, desenvolveram algoritmos alternativos, que poderiam ser chamados de teoremas em ação, pois são verdadeiros em outro contexto. Estes algoritmos, eficientes ou não, diferiam dos algoritmos que são tradicionalmente ensinados na escola.

Para os alunos esses algoritmos foram significativos e tal construção favoreceu a compreensão dos algoritmos tradicionais. Os alunos desenvolveram os algoritmos alternativos para problemas de subtração com reagrupamento.

Atividade 5A: subtração entre frações mistas.

Seis estudantes desenvolveram o procedimento descrito a seguir para resolver problemas do tipo: $4\frac{1}{8} - 1\frac{5}{8}$:

$4\frac{1}{8} - 1\frac{5}{8} = (4-1) + \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{8}\right)$, no entanto, no agrupamento $\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{8}\right)$, o termo $\frac{1}{8}$ é menor do que $\frac{5}{8}$. Portanto, de acordo com Mack (1990) os estudantes indicaram que deveriam reagrupar os termos e, então, subtrair $\frac{5}{8}$ de 3.

$\left(3 - \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) = \left(2\frac{8}{8} - \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) = 2\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}$.

A sequência de passos sugere que para construir este algoritmo alternativo os alunos combinaram os passos utilizados na 3ª atividade com o seu conhecimento de números inteiros e em seguida, o conhecimento de situações problemas envolvendo a subtração de um número inteiro por uma fração.

De acordo com Vergnaud (1993) esta estratégia é um conceito em ação pertinente. O estudante mobiliza o conhecimento anteriormente obtido, e que para ele é significativo: reescrever um número inteiro em um número racional na representação fracionária, ou seja, o numerador é igual à unidade considerada.

Outra informação relevante utilizada pelo estudante faz referência ao conceito de fração associado a uma figura, que de acordo com Silva (1997) pode ser um obstáculo à aprendizagem, pois dividir uma pizza em partes iguais e retirar um pedaço desta é pertinente, mas para o aluno não faz sentido realizar a operação $\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{8}\right)$, visto que está retirando uma parte maior $\left(\frac{5}{8}>\frac{1}{8}\right)$.

Para Bezerra (2001) este tipo de resposta evidencia que o aluno ainda não conseguiu operar com o novo conjunto numérico (racionais na representação fracionária), assim, representa com o conhecimento anterior a nova situação, isto é, o conjunto dos naturais.

Outro algoritmo alternativo utilizado pelos estudantes era converter números mistos em frações impróprias. Os alunos são tradicionalmente ensinados a converter números mistos para frações impróprias multiplicando o número do denominador pelo número inteiro, em seguida, adicionar os numeradores para obter o novo numerador da fração imprópria.

No Quadro 18 apresenta-se o diálogo entre a pesquisadora e a estudante Teresa para a atividade em que foi solicitada a conversão de um número misto em fração imprópria.

Quadro 18: Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Teresa.

Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Teresa (MACK, 1990, p.26).	Tradução dos autores
I: I want you to write 3 5/8 as an improper fraction. **Teresa:** Twenty nine-eighths, eight goes into three, I mean 8/8 goes into one, so it's 8, then 16, then another one is 24, plus 5 is 29. **I:** Now write 14/3 as a mixed numeral. **Teresa:** (Writes 3/3 3/3 3/3 3/3 2/3). Four and two-thirds. I had to write it down or else I'd get it mixed up in my head.	**Eu:** Eu quero que você escreva 3 5/8 como uma fração imprópria. **Teresa:** 29/8 (vinte e nove oitavos), oito multiplica três, quero dizer, 8/8 multiplica por um, isso é 8, então 16, em seguida, o outro é 24, mais 5 é 29. **Eu:** Agora escreva 14/3 como um número misto. **Teresa:** (Escreve 3/3 3/3 3/3 3/3 2/3) Quatro e dois terços. Eu tinha que escrevê-lo, ou então eu ia misturar em minha cabeça.

Fonte: Mack (1990, p.26).

Análise segundo a TCC

A maneira como Teresa converteu a fração imprópria em fração mista exemplifica um algoritmo alternativo desenvolvido para esta atividade, e que para a estudante é significativo. A estratégia utilizada pela aluna é do tipo conceito em ação (VERGNAUD, 2009b) e está relacionada com o subconstruto de quociente.

Atividade 6A: adição de frações com numeradores diferentes.

O Quadro 19 descrito a seguir ilustra o diálogo entre a pesquisadora e a estudante Laura, em que foram discutidos os procedimentos para a adição de frações com denominadores diferentes.

Quadro 19: Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Laura.

Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Laura (MACK, 1990, p.27).	Tradução dos autores
I: (Shows Laura a paper with 7/8 + 5/6 printed on it). Now I want you to estimate the answer to this problem, 7/8 plus 5/6. **Laura:** (Immediately writes on her paper: 35/48 + 35/48= 100/96) **I:** Where did you get the 35/48 plus 35/48? **Laura:** Well, you try to figure out what number 5 and 7 can go into, which is 35. That's where I got the 35, and then you find out what 8 and 6 go into, which is 48, and then they were like, if they were under each other then you'd put where it equals, and then you put the number here and then you add them.	**Eu:** (Mostra para Laura um papel escrito 7/8 + 5/6). Agora eu quero que você estime a resposta para este problema 7/8 + 5/6. **Laura:** (Imediatamente escreve em seu papel: 35/48 + 35/48 = 100/96). **Eu:** Onde você conseguiu a 35/48 mais 35/48? **Laura:** Bem, você tenta descobrir qual o número 5 e 7 podem combinar, que é 35. Isso é onde eu tenho 35, e depois tenta descobrir a multiplicação entre o 8 e 6, que é 48, e então eles permanecem no mesmo lugar, se eles estavam um sob o outro, então você vai colocar onde é igual e depois de colocar o número no lugar certo, em seguida, você deve adicioná-los.

Fonte: Mack (1990, p.27).

Nesta atividade o equívoco cometido por Laura nos sugere que ela estava repetindo uma rotina usada em sala de aula, pois em sua fala “combinar os números 8 e 6” dá indícios de que ela multiplicou os denominadores, e multiplicou os numeradores, sem relacionar com os denominadores. O esquema “multiplicar os denominadores” para obter um número comum às parcelas que serão adicionadas faz parte ao processo de adição de frações com denominadores diferentes, entretanto, a ação de multiplicar os numeradores é um equívoco. Este é um erro, diferente de um teorema em ação falso, que pode ter domínio de validade restrito a um conjunto de situações.

No segundo passo, após reescrever, equivocadamente, as frações com denominadores iguais, a estudante apresenta um teorema em ação falso. Somar numerador com numerador e, denominador com denominador é uma regra utilizada frequentemente pelos estudantes, sustentada por invariantes operatórios falsos que os levam a decidir por essa ação e, por consequência inferir que ela confere validade ao resultado.

Podemos inferir que os invariantes inadequados apresentados pelos estudantes podem prevalecer, nos estudantes, durante toda vida escolar. Por isso, a importância de proporcionar contatos com diversas situações que envolvem o mesmo conceito. Segundo Vergnaud (1993), quando o sujeito está frente a uma nova situação, mobiliza o conhecimento desenvolvido anteriormente e tenta adaptá-lo.

Outros alunos também apresentaram este tipo de erro ao adicionar frações, por isso foi necessário trabalhar atividades que contemplaram situações do mundo real e a utilização de materiais concretos, como os círculos fracionários.

Atividade 7A: adição de frações com numeradores iguais.

O Quadro 20 descrito a seguir ilustra o diálogo entre a pesquisadora e o estudante Tony, em que foram discutidos os procedimentos para a adição de frações com denominadores iguais.

Quadro 20: Diálogo entre a pesquisadora e o estudante Tony.

Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Laura (MACK, 1990, p.27).	Tradução dos autores
I: When you add fractions, how do you add them?	**Eu:** Quando você adiciona frações, como você faz para adicioná-las?
Tony: Across. Add the top numbers across and the bottom numbers across.	**Tony:** Adicionando. Adicione os números superiores (numeradores) e os inferiores.
I: I want you to think of the answer to this problem in your head. If you had 3/8 of a pizza and I gave you 2/8 more of a pizza, how much pizza would you have?	**Eu:** Eu quero que você encontre a resposta para este problema em sua cabeça. Se você tivesse 3/8 de uma pizza e eu te desse mais 2/8 de uma pizza, quanto de pizza você teria?
Tony: Five-eighths. (Goes to his paper on his own initiative and writes 3/8 + 2/8 =, gasps, stops, then writes 5/8). I don't think that's right. I don't know. I think this (the 8 in 5/8) just might be 16. I think this'd be 5/16.	**Tony:** Cinco oitavos (vai para o seu papel, por iniciativa própria e escreve 3/8 + 2/8 =, suspiros, pausa, então escreve 5/8). Eu acho que isto não está certo. Eu não sei. Eu acho que isso (o 8 em 5/8) só poderia ser 16. Eu penso que deve ser 5/16.
I: Let's use our pieces to figure this out. (Tony gets out 3/8 and then 2/8 of the fraction circles and puts the pieces together). Now how much do you have?	**Eu:** Vamos usar nossas peças para descobrir isso. (Tony pega 3/8 e em seguida 2/8 das frações em círculos e, coloca os pedaços juntos). Agora, quanto você tem?
Tony: Five eighths. It seems like it would be sixteenths.... This is hard.	**Tony:** 5/8. Parecia que seria dezesseis. Isso é difícil.

Fonte: Mack (1990, p.27).

Análise segundo a TCC

O protocolo descrito anteriormente indica que quando se trata de problemas com denominadores iguais (unidade comum) e pertencentes ao contexto do mundo real os estudantes possuem maior facilidade em resolvê-los, o que não aconteceu com a mesma facilidade quando a pesquisadora solicitou que os estudantes adicionassem frações com denominadores iguais a partir da representação figural, descrita na atividade 3A.

Na situação dada o sujeito dispõe de diferentes tipos de conhecimentos para identificar os objetos e suas relações e, a partir disso estabelecer objetivos e regras de conduta pertinentes. Para Vergnaud (2009b) o esquema mobilizado pelo aluno é um conceito em ação que tem relação com a interpretação parte-todo: unir as parcelas (numeradores) de um mesmo todo, e indica que o estudante compreende a unidade dividida partes iguais.

O conceito de invariante operatório permite falar sobre os mesmos termos da identificação dos objetos materiais e suas relações, da interpretação das informações nas situações, onde há espaço para a incerteza, a dúvida (Vergnaud, 1996). É o que percebemos na fala de Tony, em que demonstra incerteza se deve ou não somar os denominadores.

Enquanto situação problema da estrutura aditiva esta atividade pode ser classificada na 1ª categoria, em que duas medidas se compõem para resultar em uma terceira medida (VERGNAUD, 2009b).

A pesquisa realizada por Mack (1990) indica que esses estudantes têm pouca compreensão de símbolos de fração e algorítmos, e concepção limitada sobre a relação parte-todo, muito embora tenham considerável conhecimento informal sobre frações.

Alguns pesquisadores argumentam que a abordagem da relação parte-todo (contar o total de partes e então as partes hachuradas) direcionada aos educandos pode limitar, severamente, a compreensão do número racional na representação fracionária e causar-lhes dificuldades em longo prazo (BEHR et al, 1983; KERSLAKE, 1986).

Segundo Vergnaud (1993), os significantes, tais como: fala, escrita, desenhos e diagramas, são indispensáveis para a seleção, tratamento de informações e relações de pertinência. Por esta razão, a necessidade de organizar situações didáticas significativas para os conceitos de adição e subtração de números racionais na representação fracionária.

Vergnaud (1993) ressalta que os conceitos só adquirem sentido para os educandos nas situações problemas, por isso, faz-se necessário possibilitar-lhes a experiência com uma variedade de situações e, em níveis de sucessão de generalidade, partindo de atividades práticas.

SEÇÃO 4 – ESTRUTURA MULTIPLICATIVA DOS NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Nesta seção, apresentamos releituras, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, de artigos que contemplaram atividades realizadas com números racionais em sua representação fracionária, em específico, aquelas que envolvem multiplicação e divisão.

Na seção 4.1 apresentamos o artigo *Children's sense of division of fractions* de Sylvia Bulgar, foi publicado em 2003, no *Journal Mathematical Behavior*, 22º volume.

Na seção 4.2, o artigo *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions* de Dina Tirosh, publicado em 2000, no *Journal for Research in Mathematics Education*, 31º volume.

E na seção 4.3, o artigo *Prospective Teachers' Reasoning and Response to a Student's Non-Traditional Strategy When Dividing Fractions* de Ji-Won Son e Sandra Crespo, publicado em 2009, no *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12º volume.

A escolha destes artigos justifica-se pelo fato de explicitarem, em detalhes, as atividades propostas e as respostas dos alunos.

4.1 Divisão de Números Naturais por Frações

O artigo *Children's sense of division of fractions* de Sylvia Bulgar, foi publicado em 2003, no *Journal Mathematical Behavior*, volume 22. Este periódico é destinado a professores e pesquisadores em educação matemática em nível internacional. Neste artigo, a autora apresenta alguns resultados da pesquisa realizada em uma escola pública que atendia estudantes do jardim de infância até a quarta série, em um pequeno distrito suburbano, em New Jersey.

A pesquisa descrita por Bulgar (2003) foi realizada por Carolyn A. Maher, e teve a colaboração de Amy Martino e outros pesquisadores da Rutgers University Graduate School Education, em New Brunswick, New Jersey, em 1993.

O objetivo da pesquisa foi a introdução de conceitos sobre números racionais na representação fracionária, antes do ensino formal deste conteúdo para os alunos que cursavam a quarta série durante o ano letivo de 1993. De acordo com Bulgar (2003), a escolha desta série justificou-se em função de que o algoritmo das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações, que de acordo com o currículo daquele país, ocorre na série seguinte, ou seja, na quinta série.

A classe em que a investigação foi realizada era composta por 25 estudantes, 14 meninas e 11 meninos, com faixa etária entre 9 a 10 anos. Foram realizadas 50 sessões de atividades, com duração de 60 minutos a 90 minutos cada uma, durante todo o ano letivo de 1993.

Em particular, neste artigo, Bulgar (2003) relata apenas os resultados obtidos nas sessões 21, 22 e 23, em que o objeto de estudo era a divisão de um número natural por frações. Para encaminhar a pesquisa, a autora relata que os alunos foram convidados a investigar e desenvolver estratégias para resolver situações problemas a partir da atividade *Holiday Bows*[13]. Destaca-se que estes estudantes trabalharam em duplas ou grupos.

No artigo, a autora expõe o diálogo de alguns alunos e as respostas dadas por eles durante a atividade. Isto possibilitou analisá-los com aporte teórico da TCC.

Para desenvolver a atividade *Holiday Bows* os estudantes receberam alguns materiais, como fitas coloridas, cordas, tesoura e fita métrica para construírem suas estratégias acerca de cada situação problema. A fita de cor vermelha continha 6 metros de comprimento, a dourada 3 metros, a azul 2 metros e a branca 1 metro.

Na atividade os estudantes deveriam determinar quantos laços de tamanhos particulares, e de forma fracionária, poderiam ser obtidos a partir do comprimento de cada fita colorida. No Quadro 21 apresentam-se, ordenadamente, as situações que os alunos deveriam investigar com os materiais manipuláveis que receberam.

[13] Laços Festivos.

Quadro 21 - Tarefa “Laços festivos”

1 – Fita branca	**Comprimento do laço de fita**	**Número de laços obtidos**
1 metro	1/2 metro	2 laços
1 metro	1/3 metro	3 laços
1 metro	1/4 metro	4 laços
1 metro	1/5 metro	5 laços
2 – Fita azul	**Comprimento do laço de fita**	**Número de laços**
2 metros	1/2 metro	4 laços
2 metros	1/3 metro	6 laços
2 metros	1/4 matro	8 laços
2 metros	1/5 metro	10 laços
2 metros	2/3 metro	3 laços
3 – Fita dourada	**Comprimento do laço de fita**	**Número de laços**
3 metros	1/2 metro	6 laços
3 metros	1/3 metro	9 laços
3 metros	1/4 matro	12 laços
3 metros	1/5 metro	15 laços
3 metros	2/3 metro	4 laços e meio
3 metros	3/4 metro	4 laços
4 – Fita vermelha	**Comprimento do laço de fita**	**Número de laços**
6 metros	1/2 metro	12 laços
6 metros	1/3 metro	18 laços
6 metros	1/4 matro	24 laços
6 metros	1/5 metro	30 laços
6 metros	2/3 metro	9 laços
6 metros	3/4 metro	8 laços

Fonte: Bulgar (2003, p. 323).

Ressalta-se que estes alunos não tinham sido ensinados formalmente sobre os algoritmos da divisão de frações, assim, tiveram que desenvolver estratégias para resolver as situações problemas propostas, com intuito de dividir um número natural por uma fração.

Em cada situação, era fornecida uma fita colorida, o comprimento do laço que deveriam obter e, em seguida, os alunos deveriam desenvolver estratégias para determinar a quantidade de laços obtidos em cada caso. Desta forma, os estudantes investigaram, discutiram e indicaram quantos laços de comprimentos fracionários, por exemplo, de 1/2 metro, 1/3 metro, 1/4 metro e 1/5 metro, poderiam ser obtidos em 1 metro de fita branca.

Nesta pesquisa, Bulgar (2003) identificou que as principais estratégias utilizadas pelos estudantes envolviam conhecimentos adquiridos com os números naturais. Outras justificativas foram dadas por meio da ação de medir ou pela representação fracionária, isto é, pelas quantidades de partes que podiam obter em cada pedaço de fita.

Destaca-se que cada um dos três métodos envolvia a contagem. Para Bulgar (2003) há uma conexão entre contagem e frações, pois o trabalho com frações é um processo em que iteramos quantidades particionadas, e desta forma é formulado pela subestrutura de partições binárias.

Na sequência, discutimos as estratégias desenvolvidas pelos estudantes durante a atividade *Holiday Bows*, em que destacamos as respostas deles para identificar elementos da TCC.

Atividade 1B: 1ª estratégia - Justificativa envolvendo números naturais

Para resolver a situação proposta os estudantes converteram o metro em 100 centímetros antes de realizar a divisão, para que assim pudessem identificar quantos laços, de comprimento fracionário, continha cada unidade de fita colorida (1 metro, 2 metros, 3 metros e 6 metros). No Quadro 22, há o diálogo dos alunos Alex e Jon, em que discutem uma estratégia para identificar quantos laços de 1/3 metro de comprimento poderiam ser obtidos em 1 metro de fita.

Quadro 22: Diálogo entre Alex e Jon.

Diálogo entre os alunos Alex e Jon (BULGAR, 2003, p.325)	Tradução dos autores
Alex: I know that fourths is twenty-five. It would be right here. [He examines the ribbon placed on top of the meter stick]	**Alex:** Eu sei que um quarto é 25 cm. Seria bem aqui. [Ele examina a fita colocada em cima do metro]
Jon: I think . . . I think I got thirty and a half	**Jon:** Eu acho. . . Eu acho que tenho 30 e meio
Alex: thirty and a half? That'd be thirty, sixty that's one whole that's sixty-one um plus thirty, is only ninety-one and a half. What'd you get, thirty and a half?	**Alex:** 30 e meio? Isso seria 30, 60 que é um todo, 61 mais trinta, é apenas 91 e meio. Como você chegou em 30 e meio?
Jon: yeah	**Jon:** sim.
Alex: I figure it's thirty-two. thirty-two and thirty-two is sixty-four and then thirty-two is ninety . Hold on a minute	**Alex:** eu acho que é 32. 32 e 32 é 64 mais 32 é 90. Espere um minuto
Jon: thirty-two and a half. So then it would be sixty-five. thirty-two and sixty-five is ninety-seven.	**Jon**: 32 e meio. Então seria 65. 32 mais 65 é 97.
Alex: Let's try it again.	**Alex:** Vamos tentar novamente.
Jon: thirty-three. thirty-three.	**Jon:** 33. 33.
Alex: thirty-three	**Alex**: 33

Jon & Alex: sixty-six **Jon**: No, sixty-six. sixty-six. ninety-nine. **Alex:** yeah **Jon:** and a half so it'd be a hundred	**Jon & Alex:** 66 **Jon:** Não, 66. 66. 99. **Alex:** Sim **Jon**: e a metade seria cem.

Fonte: Bulgar (2003, p.325).

Análise segundo a TCC

Os gestos, a tomada de decisão, a linguagem e o diálogo entre os alunos Alex e Jon são registros da atividade matemática realizada. A representação das grandezas em jogo e de suas relações com a atividade solicitada, dizem respeito à conceitualização da divisão a partir do conhecimento sobre os números naturais.

Os estudantes indicaram que 1 metro tinha 100 centímetros, e com este comprimento de fita podiam obter 3 laços do mesmo comprimento, ou seja, realizaram uma divisão por 3. Neste caso, a estratégia de converter grandezas da mesma natureza facilitou a compreesão dos alunos.

Entretanto, realizaram essa estratégia por tentativa e erro, pois nota-se no diálogo entre Alex e Jon:

Alex: “um quarto é 25 centímetros”.

Jon: “acho que é 30,5”

Alex: “30,5 mais 30,5 é 61, 61 mais 30,5 é 90”.

O esquema utlizado pelos estudantes é relevante, pois indicaram o conhecimento de que a fita deve ser dividida em três partes iguais, e esse conceito é essencial para a conceitulização de frações.

As ideias extraídas da prática formalizaram os conhecimentos construídos na ação. De acordo com a TCC a forma predicativa da ação no discurso vem em auxílio à forma operatória construída em situação pelo aprendiz (VERGNAUD, 2009c).

O invariante identificado no discurso dos estudantes é do tipo conceito em ação, considerado pertinente na ação em situação. Ressaltamos que este era o primeiro contato dos estudantes com a divisão de um natural por uma fração, e provavelmente por esse motivo eles mobilizaram o conhecimento prévio sobre os números naturais.

Com relação à representação utilizada, converter 1 metro em 100 centímetros, Vergnaud (2009c) afirma que:

> [...] o sujeito em situação também é levado a interpretar a informação bem além dos observáveis que dispõe. Esse fluxo permanente de percepções, de ideias, de imagens, de gestos e de palavras interiorizadas é uma característica essencial do pensamento, que ela conduz a considerar a percepção como parte integrante da representação (VERGNAUD, 2009c, p.24).

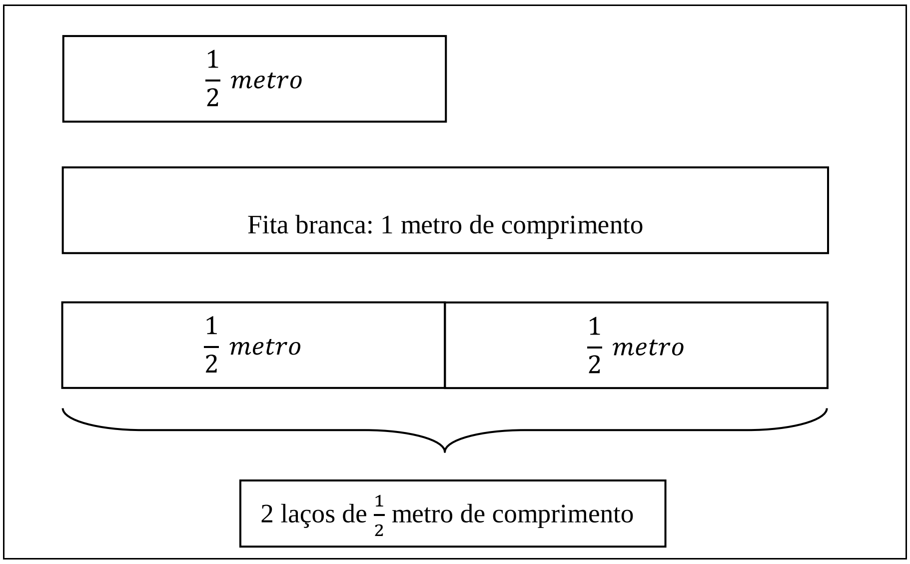
Assim, a ação interiorizada - conversão de unidades - é parte integrante da representação utilizada pelos alunos. A representação é constituída de objetos pertinentes ao sujeito, aos quais considera e utiliza durante a atividade. É esse significado dado pelo estudante que permite considerar os invariantes operatórios como elementos essenciais para a representação (VERGNAUD, 2009c).

Inferimos que se os alunos tivessem realizado a conversão em milímetros, isto é, 1 metro equivale a 1000 milímetros, eles teriam obtido uma aproximação ainda melhor para o comprimento dos laços, pois já dominavam o conceito em ação.

Atividade 2B: 2ª estratégia - Justificativa envolvendo medida

De acordo com Bulgar (2003) os estudantes também utilizaram a medição como estratégia para desenvolver a atividade *Holiday Bows*. Eles criaram uma unidade de medida de comprimento igual ao laço desejado, colocaram-no junto à determinada quantidade de fita, e então contaram quantas vezes esta unidade de medida se repetia sobre a fita, conforme ilustrado na Figura 02.

Figura 02 – Representação da justificativa envolvendo medida.



Fonte: Autores.

Seguindo este procedimento para determinar a quantidade de laços poderiam obter nas fitas azul (2 metros), dourada (3 metros) e vermelha (6 metros) bastava utilizar o laço de 1/2 metro confeccionado, repeti-lo sobrepondo sobre as fitas e, contar quantos laços foram obtidos (por meio da medição de segmentos verificam quantas vezes os laços são repetidos sobre a fita).

Para exemplificar a estratégia utilizada, apresenta-se no Quadro 23 o diálogo entre pesquisador e os alunos Alex e Jon. Os estudantes explicaram ao pesquisador que com a fita branca, de 1 metro de comprimento, era possível fazer 2 laços com 1/2 metro de comprimento cada.

Quadro 23: Diálogo entre Alex, Jon e pesquisador.

Diálogo entre os alunos Alex e Jon (BULGAR, 2003, p.326)	Tradução dos autores
Jon: This [points to white ribbon which is one meter in length] acts as two	**Jon:** Este [aponta para fita branca de um metro de comprimento] age como dois laços.
Alex: Well, yeah. This acts as ...	**Alex:** Bem, sim. Este age como...
PRIN: Why does this act as two?	**PRIN:** Por que esse laço age como dois?
Alex: Because this [the white ribbon which is one meter in length] is the half. If you cut this in half.	**Alex:** Porque esta [a fita branca que tem um metro de comprimento] é a metade. Se você cortar este ao meio.
PRIN: OK	**PRIN:** OK
Alex: You have two parts.	**Alex**: Você tem duas partes.
PRIN: OK.	**PRIN:** OK.
Jon: So you put that up to it [they put the white one-meter length ribbon against the blue two-meter piece of ribbon].	**Jon**: Então você coloca até aqui [eles colocaram a fita branca com um metro de comprimento sobre a fita azul que tinha dois metros de comprimento].
Alex: It's two. And then you need. This [points to the white ribbon] is a half of that [points to blue ribbon] so you need one more and that's four.	**Alex**: São dois. E é o que você precisa. Esta [aponta para a fita branca] é a metade daquela [aponta para a fita azul] você precisa de mais uma desta, então são quatro.
So then this [points to the white ribbon] could act as three as cutting it into thirds as putting six thirds up to two but it's two meters is the whole so actually this if two meters is the whole.	Então esta [aponta para a fita branca] poderia agir como três, ou seja, cortá-la em três partes, com a colocação de seis terços até dois, mas estes dois metros é o todo, então realmente os dois metros é o todo.
PRIN: Right	**PRIN**: Certo.
Alex: then this [points to white ribbon] is the. This is the half.	**Alex:** então é esta [aponta para fita branca]. Esta é a metade.
PRIN: Right	**PRIN**: Certo.

Fonte: Bulgar (2003, p.326).

Análise segundo a TCC

O processo de reflexão sobre a produção do conhecimento revelado na fala dos alunos Alex e Jon evidenciam esquemas subjacentes à atividade matemática realizada. De acordo com Vergnaud (2009c) quando o sujeito atribui significado à situação, mobiliza seus esquemas prévios para aplicá-lo ao novo contexto. Este é o momento em que o sujeito se pergunta: "O que sei disso?".

Neste caso, os alunos consideraram a justificativa envolvendo números naturais, em que já conheciam a quantidade de laços que era possível de se obter em 1 metro de fita. A partir desta informação, construíram o procedimento para a produção de uma solução para a situação em que tinham 2 metros de fita.

Destacamos que há diferenças significativas entre produzir um procedimento e registrá-lo. Descrever um procedimento (verbal ou escrito) exige do sujeito novo posicionamento em relação aos objetos de conhecimento e suas representações, o que o leva a refletir sobre suas formas de pensar, e então validar a solução, para aferir se o procedimento desenvolvido faz sentido ao sujeito, ou se está correto ou não.

A ação de descrever o procedimento verbalmente indica esquemas mobilizados pelos alunos durante a resolução da situação. Eles partem de conhecimentos adquiridos previamente e adaptam à nova situação. Para Vergnaud (1993, p.1) "se pretendemos dimensionar concretamente a função adaptativa do conhecimento, devemos preservar um lugar central para as formas que ela assume na ação do sujeito". Assim, a análise do papel da linguagem e do simbolismo na conceitualização é muito importante para a TCC.

Na situação em que os alunos indicaram quantas vezes um laço de comprimento igual a 1/2 de metro caberia em uma fita de 2 metros de comprimento, eles esticaram a fita e com sobreposições, contaram quantas vezes o laço de 1/2 metro se repetia. Para a TCC, o conhecimento operatório desenvolvido pertence à classe de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, mas que após reflexão e experimentação podem levá-lo a desenvolver uma estratégia coerente à situação proposta.

Enquanto invariante operatório, o esquema mobilizado pelos estudantes Alex e Jon pode ser classificado como conceito em ação pertinente, visto que é uma proposição verdadeira para identificar a quantidade de laços em determinado comprimento de fita muito embora não seja a melhor estratégia quando se trabalha com grandes comprimentos.

De acordo com Bulgar (2003) outros alunos também fizeram esta medição para 1 metro de fita. A partir da justificativa envolvendo os números naturais, em que identificaram que em 1 metro de fita poderiam obter 3 laços de 1/3 de metro de comprimento, multiplicaram esta quantidade por 2, para a fita de 2 metros, ou por 3, para a fita de 3 metros de comprimento. Neste caso, os alunos começaram a mudar sua forma de pensar sobre a situação proposta, pois modificam suas estratégias e realizam uma multiplicação. Essa é uma das propostas da TCC “situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos” (VERGNAUD, 1993, p.1).

Para a multiplicação com números fracionários podemos associar a concepção parte-todo às concepções de operador e de medida, fazendo analogias com as operações com os números naturais, já conhecidas pelos alunos.

A respeito do assunto, Behr et al. (1983) acreditam que a multiplicação de números fracionários pode ser introduzida como uma extensão da multiplicação de números inteiros, a partir de situações que pedem para que seja encontrada a parte de uma parte como, por exemplo, a metade de um terço.

Atividade 3B: 3ª estratégia - Justificativa envolvendo representação fracionária

Para desenvolver a estratégia envolvendo ideias sobre a representação fracionária os estudantes utilizaram informações anteriores, e desta forma consideraram que cada metro de fita tinha um número igual de laços fracionados. Assim, eles multiplicaram este número pela quantidade de metros ou adicionaram o número de laços encontrados em cada metro.

Embora não estamos discutindo, neste momento, o conceito de adição entre números fracionários é importante fazer o aluno relacionar este conceito em ação, de que a multiplicação é a soma sucessiva de parcelas iguais.

Na Figura 03 é apresentado o esquema dos estudantes Art e Katy, em que indicam a estratégia utilizada para determinar a quantidade de laços de 2/3 metro de comprimento que podem obter em 12 metros de fita.

Primeiramente, os alunos dividiram a fita em 12 metros. Pela experiência obtida nas atividades anteriores, as estudantes indicaram que cada metro poderia ser dividido em 3 laços de 1/3 metro de comprimento. Na sequência, realizaram a contagem da quantidade de laços com comprimento de 2/3 m. Concluíram desta maneira que, era possivel obter 18 laços de 2/3 metro de comprimento em 12 metros de fita.

Figura 03: Esquema utilizado por Art e Katy.

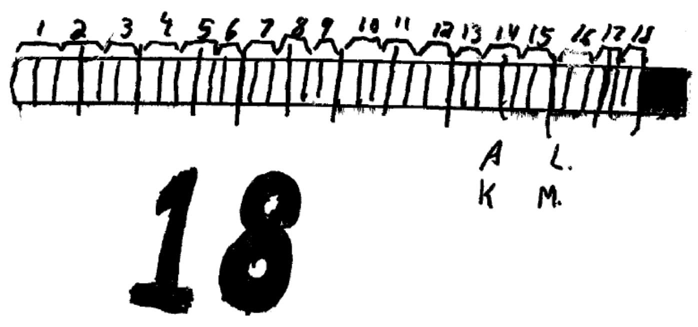


Fig. 2. Art and Katy's diagram.

Fonte: Bulgar (2003, p.328).

Análise segundo a TCC

De acordo com Vergnaud (1993, p.2), observa-se no conceito de esquema "uma sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados. Este processo é necessariamente acompanhado por descobertas".

É nos esquemas mobilizados pelos estudantes que observamos os conhecimentos em ação desenvolvidos pelo sujeito. Na ação descrita, os educandos buscam os conhecimentos anteriormente adquiridos – dividir cada metro em 3 partes iguais, para reorganizar o esquema e reagrupar a quantidade de laços com comprimentos de 2/3 de metro.

Desta forma, o invariante mobilizado pelos alunos é classificado pela TCC como conceito em ação. A situação proposta pela pesquisadora foi apresentada aos estudantes verbalmente. Entretanto, não possuíam materiais para manipular, somente lápis e papel.

Vergnaud (1993) chama atenção para o funcionamento cognitivo dos alunos, que envolve operações que se automatizam progressivamente e, além disso, as situações problemas propostas aos educandos deve ocorrer em diferentes níveis de generalidade para proporciona-lhes experiências diversificadas.

O diagrama elaborado pelas estudantes Art e Katy é um invariante, instrumento decisivo na construção da representação. Os invariantes asseguram à representação sua eficácia, o que proporciona aos educandos:

- Refletir sobre a realidade da situação proposta;
- Realizar um cálculo relacional coerente à situação dada.

4.1.1 Classificação da atividade Laços Festivos (Holiday Bows) enquanto situação problema da estrutura multiplicativa para números racionais na representação fracionária

A releitura deste artigo permitiu estabelecer, a partir do Quadro 21, situações problemas pertencentes à estrutura multiplicativa, em específico, àquelas indicadas na categoria isomorfismo de medidas para a representação fracionária.

Recorde-se que, o isomorfismo de medidas é uma relação quaternária entre quatros unidades, na qual as quantidades têm, duas a duas, medidas de naturezas diferentes. Assim, pode-se propor 4 situações problemas para esta categoria:

Situação 1: É necessário 1/3 de metro de tecido para fazer uma capa de almofada. Sabendo que Ana quer fazer 6 capas de almofadas iguais, quantos metros de tecido serão necessários?

Esquema da situação 1:

Quantidade em metros	Quantidade de capas de almofadas
$\frac{1}{3}$ →	1
x →	6

A *equação correspondente* ao esquema 1 é dado por:

$$\frac{\frac{1}{3}}{x} = \frac{1}{6} \Longrightarrow 1.x = 6.\frac{1}{3} \Longrightarrow x = \frac{6}{3} \Longrightarrow x = 2$$

O cálculo relacional para a situação 1 ocorre por meio de multiplicação, e de acordo com Vergnaud (2009, p. 243 e 244) pode-se identificar também a presença do operador vertical, que vale 6. Note que 1/3 e *x* são números que representam quantidades de tecido em metros. Os valores 1 e 6 são números representam as quantidades de capas de almofadas. Em ambos os casos tem-se medida, embora sejam de naturezas distintas. O operador vertical de valor 6 é um operador sem dimensão e sem escalar, mas que permite passar de uma linha a outra na mesma categoria de medidas.

Para ilustrar a afirmação anterior representamos o operador vertical da seguinte maneira:

1/3 m de tecido $\Big\downarrow \times 6$ x m de tecido	1 capa de almofada $\Big\downarrow \times 6$ 6 capas de almofadas

O operador horizontal é uma função relacional que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, nesse caso, expressa a passagem entre a quantidade de capas de almofadas e quantidade de tecido em metros.

1 capa de almofada $\xrightarrow{\times \frac{1}{3}}$ 1/3 m de tecido

6 capas de almofadas $\xrightarrow{\times \frac{1}{3}}$ x m de tecido

Assim, há duas possibilidades de determinar a quantidade *x* de metros de tecido. A primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão $(\times 6)$ à quantidade de uma (01) capa de almofada. A segunda consiste em aplicar a função relacional: quantidade de seis (06) capas de almofada vezes um terço $\left(\times \frac{1}{3}\right)$ para obter a quantidade em metros de tecido.

Essa análise permite compreender que, efetuando-se a multiplicação $6 \times \frac{1}{3}$ não estamos multiplicando tecido por capas de almofadas, mas indica que uma relação entre a quantidade de capas de almofadas e a quantidade de tecido em metros foi estabelecida. Essa relação quaternária também pode ser analisada das seguintes maneiras:

- *x* metros estão para 1/3 metro, assim como 6 capas de almofadas estão para 1 capa de almofada.
- *x* metros estão para 6 capas de almofadas, assim como 1/3 metro está para 1 capa de almofada.

Situação 2: Para Ana fazer uma capa de almofada, é necessário uma certa quantidade de tecido. Sabendo que ela faz 6 almofadas com 2 metros deste mesmo tecido, quanto ela utiliza para fazer uma almofada?

Esquema da situação 2:

Quantidade em metros	Quantidade de capas de almofadas
x $\longrightarrow$	1
2 $\longrightarrow$	6

A *equação correspondente* ao esquema 2 é dado por:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{6} \Longrightarrow 6.x = 1.2 \Longrightarrow x = \frac{2}{6} \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Na situação 2, de acordo com Vergnaud (2009, p.240), a resolução ocorre por uma divisão, mas que pode ser interpretada sem considerar procedimentos canônicos, pois novamente temos a presença dos operadores: vertical (escalar) – multiplicação por seis $(\times 6)$; e horizontal (função, entre quantidades de capas de almofadas e de metros de tecido) – divisão por três $\left(\times \frac{1}{3}\ ou\ \div 3\right)$.

Situação 3: Para fazer uma fralda de tecido Dona Laura usa 1/4 m de tecido. Ela utilizou 3/4 m para fazer várias fraldas. Quantas fraldas ela confeccionou?

Esquema da situação 3:

Quantidade de blusas (peças)	Quantidade de tecido (metros)
1 $\longrightarrow$	$\frac{1}{4}$
x $\longrightarrow$	$\frac{3}{4}$

A *equação correspondente* ao esquema 3 é dado por:

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \Longrightarrow \frac{1}{4}.x=\frac{3}{4}.1 \Longrightarrow x=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} \Longrightarrow x=\frac{3}{4}.\frac{4}{1} \Longrightarrow x=3$$

Esta situação é resolvida por regra de três simples, na qual o estudante irá manipular a multiplicação e a divisão de frações para determinar a quantidade de fraldas que Dona Laura confeccionou. Nesta questão é importante ressaltar que podemos interpretá-la por meio de cálculo relacional com base nas informações dadas. Ora, se uma fralda é feita com 1/4 de metro de tecido, e Dona Laura utilizou 3/4 de metro de tecido, podemos observar o operador, que neste caso é vertical e sem dimensão $(\times 3)$. Isto quer dizer que para passar de 1/4 m para 3/4 m ocorreu uma multiplicação por 3.

Com esta situação o professor poderá ressaltar aos alunos, caso tenham dúvidas com relação ao procedimento de divisão de frações, como relacionar os dados e verificar se o procedimento adotado na resolução da situação está correto.

Situação 4: São necessários 2 metros de tecido para fazer 6 capas de almofadas de 1/3m de comprimento cada uma. Quantas capas de almofadas podem ser feitas com 2/3m de comprimento cada uma em 2 m de tecido?

Note que nesta situação a relação fornecida é inversamente proporcional, e por isso pode ser classificada em nível de dificuldade mais elevado do que as situações anteriores.

Esquema da situação 4:

Quantidade em metro	Quantidade de capas de almofadas
$\frac{1}{3}$ ⟶	6
$\frac{2}{3}$ ⟶	x

Embora o esquema da situação 3 também esteja organizado como as situações 1 e 2, a maneira de resolvê-lo é diferente, uma vez que a quantidade de tecido necessário, em metros, é inversamente proporcional.

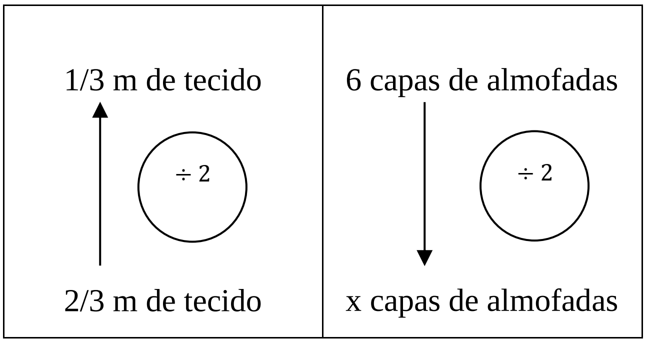
A *equação correspondente* a situação 4 é o que segue.

$$\frac{6}{x}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \frac{6}{x}=\frac{2}{1} \Longrightarrow 2x=6 \Longrightarrow x=3$$

A compreensão do cálculo da situação 3 parece ser complexa, mas podemos interpretá-la da seguinte forma: se considerarmos que podemos fazer 6 capas de almofada de 1/3m de comprimento cada uma com 2 metros de tecido, então, com a mesma quantidade de 2 metros de tecido, quantas capas de almofadas de 2/3m cada uma poderemos fazer?

Note que estamos dobrando o comprimento de cada pedaço de tecido para cada capa de almofada, logo a quantidade de novas capas de almofadas que poderemos fazer nestas condições será inversamente proporcional, isto é, a quantidade de capas de almofadas será a metade do valor inicial. Eram 6 capas de almofadas, agora serão 3 capas de almofadas.

Conforme Vergnaud (2009), podemos identificar o operador vertical, que vale (2), ou seja, basta dividir 6 capas de almofadas por 2 (escalar) para obtermos a quantidade de capas de almofadas de comprimento 2/3 m.



Note que na situação 4, classificada como inversamente proporcional, a dificuldade em determinar o operador vertical é maior do que para as situações anteriores. Observe que até mesmo os operadores verticais são inversamente proporcionais.

Destacamos também que há uma dificuldade maior em resolver situações problemas das estruturas multiplicativas com números racionais do que com números inteiros. E mais ainda, se considerarmos os racionais representados por frações ao invés de decimais. Isto pode ser observado se compararmos as seguintes situações:

> 1. Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?
> 2. Minha mãe quer comprar tecido a R$24,80 o metro para fazer um vestido e um paletó. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar? (VERGNAUD, 2009b, p.239).

Nestas situações pertencentes à categoria de isomorfismo de medidas, Vergnaud (2009b) expressa que há diferenças significativas entre as facilidades de operar com números inteiros e decimais, e entre grandezas discretas e grandezas contínuas. De acordo com o autor são necessárias explicações suplementares para fazer o estudante compreender na situação problema 2 que o preço de 3,50 metros de tecido é equivalente à adição do preço de 1 metro, mais o preço de 1 metro, mais o preço de 1 metro e o preço de 1/2 (meio) metro deste tecido.

Bulgar (2003) destaca que as dificuldades dos alunos com frações podem estar relacionadas com o fato de que não interpretam as frações como algo a ser contado ou como uma quantidade. E esta dificuldade pode ser ainda maior se considerarmos frações ao invés de decimais, pois:

> Tradicionalmente, os alunos são ensinados sobre os algoritmos de frações para atenção ao nível deles na base contextual significativa. As crianças que são capazes de realizar algoritmos processualmente não têm, necessariamente, uma profunda compreensão da matemática por trás destes números. Entretanto, quando os problemas não se encaixam perfeitamente na estrutura dentro da qual o algoritmo foi ensinado, até mesmo os alunos competentes podem ter dificuldade (Ibid., p.320, tradução nossa)[14].

Para Bulgar (2003) o conhecimento matemático é representado simbolicamente, muitas vezes, sob a forma de representações, as quais são chamadas de estruturas. Quando os alunos pensam sobre uma situação matemática, primeiro constroem uma representação, que geralmente é feita na forma de uma representação mental. A construção dessas representações pode ser assistida pelo uso de lápis e papel ou materiais manipuláveis.

Nesse aspecto, existem várias subestruturas, que juntas, podem formar uma estrutura de construção para a contagem. E de acordo com Bulgar (2003) estas representações para a contagem podem ser facilmente substituídas entre números inteiros e frações, ou seja, faz-se uma extensão da estrutura de contagem dos inteiros para a estrutura de contagem das frações. Este processo é uma subtrama de partições binárias, utilizado para auxiliar no desenvolvimento de representações.

> A sub estrutura binária é uma representação de um conjunto que é dividido em dois subconjuntos. Por exemplo, quando adicionamos ou subtraimos estamos nos conectando a este tipo de representação. Um tipo especial de subtrama binária é aquele em que há apenas um elemento de um dos

[14] Traditionally, students are taught algorithms about fractions with little attempt to ground them in a meaningful contextual basis. Children who are able to carry out algorithms procedurally do not necessarily have a deep understanding of the mathematics behind them. Therefore, when problems do not fit neatly into the structure within which the algorithm was taught, even competent students can have difficulty (BULGAR, 2003, p. 320).

> subconjuntos. É este tipo especial de sub estrutura binária que ajuda a criar representações para processos iterativos. Particionar uma unidade em frações requer que o estudante seja capaz de tomar uma unidade composta de subunidades e operar sobre ele enquanto, simultaneamente, divide-o em partes iguais. Os estudantes reorganizam sua base de sistemas numéricos a fim de construir esquemas fracionários. O surgimento do sistema de equi-particionamento é um desses reorganizadores de esquemas. O inteiro é dividido em um determinado número de partes iguais e qualquer uma das seções particionadas pode ser iterado para reconstruir o todo. Isto envolve uma sequência de números ligados. Conectados em seqüências numéricas, seqüências de números que são compostos de contáveis seções consecutivas de uma unidade de segmentado, são utilizados para estimar onde a partição da primeira peça terá de ser iterada (Ibid., p.321, tradução nossa)[15].

Desta forma, é possivel auxiliar os estudantes na extensão das ideias construídas com os números inteiros para as frações, pois quando os alunos possuem a ideia de uma propriedade, novas construções podem ter lugar, que desenvolvem a partir de experiências anteriores, e criam processos de assimilação para a compreensão de atividades com frações.

Vergnaud (1993) considera que existem vários fatores que interferem a formação e o desenvolvimento de conceitos, e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações problemas. A aprendizagem dos números racionais na representação fracionária supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, em virtude dos teoremas em ação identificados, e, portanto, demanda tempo e abordagem adequada, contemplando as situações problemas e representações, tanto por meio de lápis e papel, quanto por materiais manipuláveis.

4.2 Divisão de Frações – O Conhecimento dos Futuros Professores de Matemática

O artigo *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions* de Dina Tirosh, foi publicado em 2000,

[15] The binary subframe is a representation for a set that is partitioned into two subsets. For example, when we add or subtract we are connecting to this type of representation. A special type of binary subframe is one where there is only one element in one of the subsets. It is this special type of binary subframe that helps create representations for iterated processes (Speiser & Walter, 2000). Partitioning of a unit into fractions requires that a student be able to take a unit comprised of subunits and operate on it while simultaneously dividing into equal partitions (Tzur, 1999). Children reorganize their basic numerical schemes in order to build fractional schemes. The emergence of the equi-partitioning scheme is one such reorganized scheme. The whole is partitioned into a given number of equal parts and any one of the partitioned sections can be iterated to reconstruct the whole. This involves a connected number sequence. Connected number sequences, number sequences which are comprised of countable consecutive sections of a segmented unit, are used to estimate where to partition the first piece which will have to be iterated (BULGAR, 2003, p. 321).

no Journal for Research in Mathematics Education, volume 31. Este trabalho descreve uma pesquisa realizada com 30 alunos que cursavam o segundo ano de licenciatura em Matemática da Faculdade de Professores do Estado de Israel.

De acordo com Tirosh (2000) o projeto de pesquisa teve por objetivo investigar e descrever o que sabem os futuros professores sobre o objeto de conhecimento (Subject-Matter Knowledge - SMK) dos números racionais na representação fracionária em três dimensões: algorítmica, intuitiva e formal.

Para coletar dados referentes ao conhecimento dos futuros professores sobre a divisão de frações a pesquisadora aplicou um questionário inicial, realizou entrevistas e, desenvolveu um curso para promover o conhecimento do objeto matemático. Entretanto, é descrito neste artigo apenas os resultados obtidos no questionário (TIROSH, 2000).

As atividades propostas no questionário inicial estavam centradas em procedimentos algorítmicos para a divisão de frações. Os estudantes foram estimulados a questionar por que os algoritmos matemáticos, teoremas, e operações estão estabelecidos de tal maneira e de forma inquestionável, o que proporcionou a eles a reflexão sobre sua própria compreensão de conceitos matemáticos.

Tirosh (2000) descreve os principais tipos de erros que os alunos cometem durante a divisão de frações, organizados em três classes: (i) erros baseados no algoritmo, (ii) erros baseados na intuição e (iii) erros baseados no conhecimento formal (TIROSH, 2000).

Erros baseados no algoritmo: os mais comuns são trocar o dividendo pelo divisor, ou inverter os termos do dividendo e divisor antes de multiplicar numeradores e denominadores. De acordo com Tirosh (2000), tais erros geralmente ocorrem quando um algoritmo é visto como uma série de passos memorizados.

Erros baseados na intuição: são provenientes da interpretação de divisão partitiva, em que um objeto ou uma coleção de objetos são divididos em partes iguais. Esta interpretação é uma extensão das propriedades das operações com os números naturais para as frações, e impõe três restrições sobre a operação de divisão: “o divisor deve ser um número inteiro; o divisor deve ser menor do que o dividendo; e o quociente deve ser menor do que o dividendo[16]" (Ibid., p.7).

Erros baseados no conhecimento formal: são provenientes tanto às concepções limitadas da noção de fração quanto ao conhecimento inadequado relacionados com as propriedades das operações com frações (FISCHBEIN, DERI, NELLO E MARINO, 1985).

No Quadro 24 apresentamos exemplos de erros cometidos pelos estudantes, elencados por Tirosh (2000), em cada classe. Juntamente, faremos nossa análise, com embasamento teórico proposto pela TCC.

Quadro 24 – Classificação de invariantes segundo a TCC.

Tipo de erro, segundo Tirosh (2000, p.7).	Exemplo de cálculo apresentado pelos alunos	Análise segundo a TCC
Erros baseados no algoritmo	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{2} = 2$	O aluno tentou utilizar a regra "na divisão de frações, inverter o 2º termo da fração (divisor) e em seguida, multiplicar os termos", mas equivocou-se e inverteu o dividendo.
Erros baseados na intuição	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$	A justificativa do aluno para este caso está baseada na divisão entre números naturais: o dividendo é maior do que o divisor. Para a TCC este caso é um teorema em ação, pois mobiliza um conhecimento válido para o domínio dos números naturais. Embora o estudante cometesse um equívoco em trocar o dividendo pelo divisor, ele demonstrou ter conhecimento adequado para operar numa divisão entre frações, bem como $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
Erros baseados no conhecimento formal	$1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$	A justificativa para a troca do dividendo pelo divisor consiste na afirmação: "a divisão é comutativa". Entretanto, a comutatividade tem validade na adição e multiplicação de naturais. Desta forma, tem domínio de validade restrita, o que para a TCC é um teorema em ação.

Fonte: Autores.

Embora os exemplos de erros das categorias (ii) e (iii) ocorram de maneira análoga, às origens para estes são diferentes, e o professor deve ter conhecimento destas fontes de erros para realizar atividades adequadas e auxiliar seus alunos a superar tais equívocos.

---

[16] (a) The divisor must be a whole number; (b) the divisor must be less than the dividend; and (c) the quotient must be less than the dividend (TIROSH, 2000, p.7, tradução nossa).

Os erros classificados por Tirosh (2000) como baseados na intuição e no conhecimento formal são classificados por Vergnaud (1993) como teoremas em ação, pois podem ser verdadeiros ou falsos. As experiências dos estudantes com os números naturais são generalizadas para com os racionais na representação fracionária.

Dentre as proposições verdadeiras para a divisão entre números naturais estão: “o divisor sempre é um número inteiro”, “divisor e/ou quociente sempre são menores do que o dividendo”.

Entretanto, estas proposições são falsas na divisão entre números racionais na representação fracionária e/ou decimal, pois podem ocorrer casos em que o divisor é maior do que o dividendo, como por exemplo, $\frac{1}{2} \div 2$, ou o quociente é maior do que o dividendo, como por exemplo, $2 \div \frac{1}{4} = 8$.

Analogamente, a proposição de que “a divisão é comutativa” é falsa para a operação de divisão tanto nos números naturais como nos números racionais. Entretanto, é verdadeira para as operações de adição e multiplicação de números naturais e racionais, por isso pode ser considerada um teorema em ação (VERGNAUD, 1993).

Teste diagnóstico

No artigo, a autora expõe o diálogo de alguns alunos e as respostas dadas por eles durante a aplicação do teste diagnóstico. Isto possibilitou analisá-los com aporte teórico da TCC.

O teste aplicado aos futuros professores permitiu identificar o conhecimento destes sobre a divisão de frações, tanto em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, quanto ao objeto de conhecimento. Na sequência, apresentamos as atividades propostas e faremos nossas inferências, segundo a TCC.

Atividade 1C: divisão entre frações.

A primeira atividade proposta solicitava aos acadêmicos que resolvessem quatro equações envolvendo divisão entre frações. As respostas dos estudantes estão apresentadas no Quadro 25, seguido de inferências teóricas dadas pela TCC.

Quadro 25 – Classificação de invariantes identificados na atividade 1C.

Equação envolvendo divisão entre frações (TIROSH, 2000, p.9).	Cálculo apresentado pelos acadêmicos (TIROSH, 2000, p.9).	***Análise segundo a TCC***
$\frac{1}{4} \div 4 =$	$\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$	Dois alunos indicaram que o quociente entre $\frac{1}{4}$ e 4 é igual a um (1). Neste erro, os estudantes substituíram a operação de divisão pela multiplicação. Para eles, ainda não faz sentido ter o dividendo menor do que o divisor.
	$\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	Os demais estudantes indicaram o resultado correto, $\frac{1}{16}$. Inverteram o divisor e multiplicaram os termos para obter o valor do quociente. Este é um conceito em ação para a TCC, pois mobilizaram conceitos válidos durante a ação.
$\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} =$	$\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$	Por meio da memorização de uma técnica o estudante tentou utilizar a regra "na divisão de frações, inverter os termos do divisor e em seguida, multiplicar os termos", mas equivocou-se e inverteu os termos do dividendo e do divisor.
	$\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$	Os demais alunos utilizaram o algoritmo da divisão entre frações corretamente. Este esquema considerado pela TCC um conceito em ação.
$4 \div \frac{1}{4} =$	$4 \div \frac{1}{4} = 16$	A justificativa verbal dada pela maioria dos estudantes é proveniente da relação parte-todo. A resposta dada: "Cada unidade tem 4 pedaços de $\frac{1}{4}$, então em 4 unidades tem 16 pedaços" é coerente, muito embora não seja a melhor estratégia a ser utilizada com números grandes. Entretanto, é considerada pela TCC como conceito em ação.
$320 \div \frac{1}{3} =$	$320 \div \frac{1}{3} = 106{,}666\ldots$	Dois alunos apresentaram este resultado. Eles dividiram 320 por 3, o que demonstra não compreender a divisão entre frações. Para os estudantes o resultado fazia sentido, pois, na divisão o quociente diminui, e ainda, o dividendo é maior do que divisor. Isso é verdade para os números naturais. Assim, pode ser considerado um teorema em ação pela TCC, pois, não é válido para os números racionais.
	$320 \div \frac{1}{3} = 320 \times \frac{3}{1} = 960$	Os demais estudantes apresentaram o quociente correto. O esquema mobilizado é interpretado pela TCC como conceito em ação.

Fonte: Autores.

Na primeira atividade proposta por Tirosh (2000) a sequência de ações que os estudantes têm a efetuar é breve, entretanto, não seria possível, tanto para a criança quanto para o adulto, se as ações não se apoiassem sobre o conhecimento das relações pertinentes para tal estrutura: na divisão entre frações, manter o dividendo e inverter o divisor, para então multiplicar os termos. Não se aplica a regra sem tê-la compreendido.

De acordo com Vergnaud (2009b) os algoritmos são também relações, e por isso, são calculáveis: grande parte das operações que se desenvolvem no plano das representações tem por objetivo encontrar algoritmos. Se as ações dos estudantes se situam no plano da realidade, os algoritmos pertencem ao domínio da representação, portanto são regras de ação e deve dar conta do conjunto de comportamentos que podemos observar.

Portanto, é tarefa do professor buscar as relações que o educando compreendeu, tanto para a parte compreendida de modo equivocado como a parte que ignora simplesmente. Por isso é necessário identificar teoremas e conceitos em ação mobilizados pelos estudantes durante atividades de aprendizagem (VERGNAUD, 2009b).

Os estudantes não adquirem hábitos, mas regras, as quais podem usar em problemas novos. Estes alunos não as adquirem solidamente, a menos que as compreendam e percebam as relações que as regras mantêm com a estrutura relacional das situações problemas às quais se aplicam.

Atividade 2C: **Problema 1 -** Uma fita de cinco metros de comprimento foi dividida em 15 partes iguais. Qual é o comprimento de cada pedaço desta fita?

De acordo com Tirosh (2000) dos 30 acadêmicos, 8 deram 15/5 como resposta ao problema 1. Enquanto que o correto seria 5/15.

Para a TCC o problema 1 envolve o isomorfismo de medidas, e pode ser interpretado da seguinte maneira:

Esquema do problema 1, de acordo com a TCC:

Comprimento (metro)	Pedaços de mesmo comprimento (unidades)
x	1
5	15

A *equação correspondente* ao esquema do problema 1 é dado por:

$$\frac{5}{x} = \frac{15}{1} \Rightarrow 15.x = 5.1 \Rightarrow x = \frac{5}{15} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Para a resolução desta situação utiliza-se regra de três simples, obtendo-se que cada pedaço de fita tem 1/3 metro. Para a análise vertical, centrada na noção de operador escalar (sem dimensão) permite passar de uma linha à outra na mesma categoria de medidas. Desta forma, o operador vertical é dado pela divisão por 15 ($\div$ 15). Podemos representar o operador vertical da seguinte maneira:

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \text{5 m de fita} & \text{15 pedaços de fita} \\ \quad \downarrow \; \div 15 & \quad \downarrow \; \div 15 \\ \text{1/3 m de fita} & \text{1 pedaço de fita} \\ \hline \end{array}$$

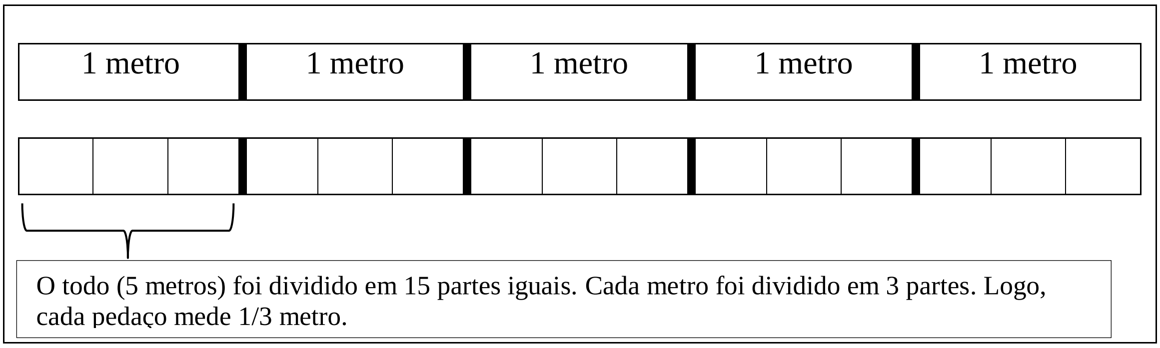
O operador horizontal é uma função relacional que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, nesse caso, expressa a passagem entre a quantidade de partes (pedaços) de fita e a quantidade total de fita (metros).

$$\text{15 pedaços de fita} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \text{5 metros de fita}$$

$$\text{1 pedaço de fita} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \text{1/3 m de fita}$$

Assim, há duas possibilidades de determinar o comprimento *x*, em metro, de cada pedaço de fita. A primeira consiste em aplicar o operador vertical, sem dimensão, ($\div$ 15) aos 5 metros de fita. A segunda consiste em aplicar a função relacional: 1 pedaço de fita vezes um terço $\left(\times \frac{1}{3}\right)$ para obter o comprimento de um pedaço de fita. Na Figura 04 representa-se uma solução do problema a partir da relação parte-todo.

Figura 04 - Representação de uma solução para o problema 1.



Fonte: Autores.

Apesar de não ser propriamente uma teoria didática, a TCC, neste caso, mostra que se o professor a conhecesse, poderia ter planejado antecipadamente situações nas quais se explorariam o uso do operador horizonteal e do operador vertical.

Atividade 3C: **Problema 2 -** Quatro amigos compraram 1/4 kg de chocolate e dividiram igualmente. Quantos quilogramas de chocolate cada pessoa recebeu?

De acordo com Tirosh (2000), 12 acadêmicos deram como resposta ao problema 2, a seguinte equação: $\frac{1}{4} \times 4$. O que é um erro. Os demais utilizaram o primeiro conceito em ação descrito no Quadro 25. Esquema do problema 2, de acordo com a TCC:

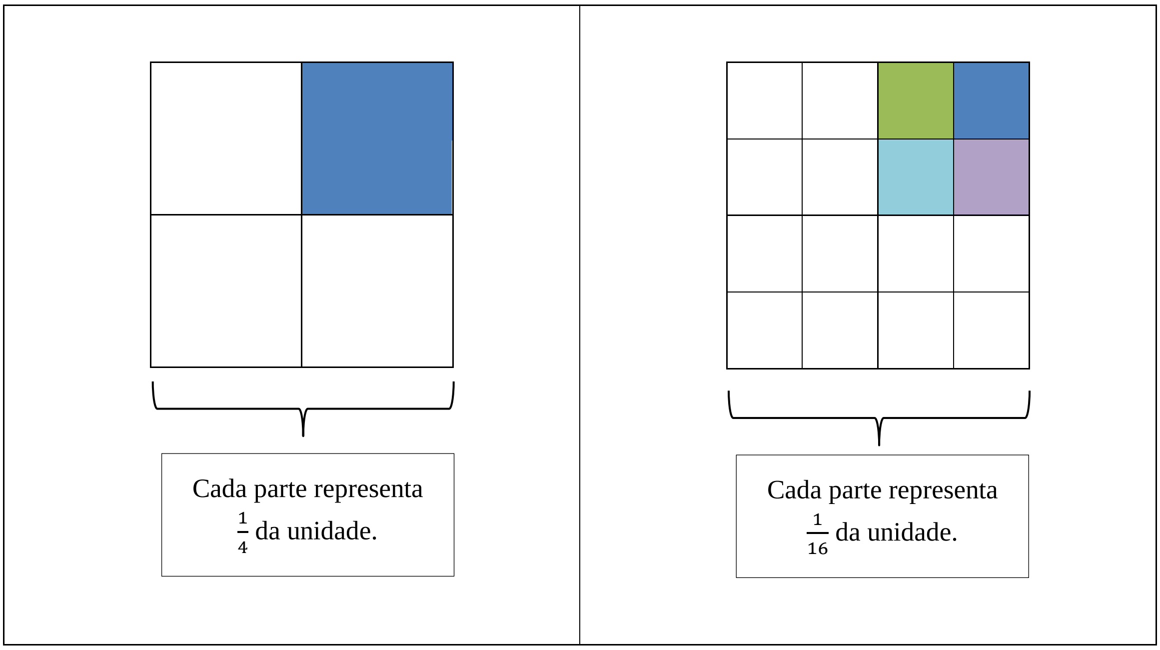
Sujeito	Chocolate (quilogramas)
4 $\longrightarrow$	$\frac{1}{4}$
1 $\longrightarrow$	x

A *equação correspondente* ao esquema do problema 2 é dada por:

$$\frac{4}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{x} \Longrightarrow 4.x = \frac{1}{4}.1 \Longrightarrow x = \frac{\frac{1}{4}}{4} \Longrightarrow x = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} \Longrightarrow x = \frac{1}{16}$$

Para a resolução desta situação, utiliza-se regra de três simples, e na sequência realiza-se a divisão, obtendo-se que, cada pessoa recebeu 1/16 Kg de chocolate.

Figura 05 - Representação de uma solução para o problema 2.



Fonte: Autores.

A Figura 05 ilustra a representação da solução para o problema 2, e favorece a compreensão de que “o quociente deve ser menor do que o dividendo” (TIROSH, 2000, p.7), muito embora nem sempre isto ocorra com os números racionais na representação fracionária. É o que discutimos na 4ª atividade.

Atividade 4C: **Problema 3 –** Quatro (4) kg de queijo foram acondicionados em embalagens de 1/4 kg cada um. Quantos pacotes devem embalar esta quantidade de queijo?

Esquema do problema 3, de acordo com a TCC:

Quantidade de queijo (Kg)	Quantidade de pacotes (unidades)
4 $\longrightarrow$	x
$\frac{1}{4}$ $\longrightarrow$	1

A *equação correspondente* ao esquema do problema 3 é dada por:

$$\frac{4}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \frac{1}{4}.x = 4.1 \Rightarrow x = 4.\frac{4}{1} \Rightarrow x = 16$$

Note que esta situação é resolvida por regra de três simples, na qual o estudante irá manipular a multiplicação e a divisão para determinar a quantidade de pacotes em que serão embalados 4 Kg de queijo. Desta forma, conclui-se que para embalar 4 Kg de queijo em pacotes contendo ¼ Kg de queijo cada, tem-se 16 pacotes.

A resposta dada pelos acadêmicos “Cada quilograma de queijo gera 4 pacotes de $\frac{1}{4}$ Kg, então 4 Kg gera 16 pacotes” permite mostrar-lhes que nem sempre o quociente é menor do que o dividendo. Neste caso ocorre o contrário: o dividendo é menor do que o quociente ou ainda o dividendo é maior do que o divisor, que são teoremas em ação válidos para domínio dos números naturais.

Os problemas 1 e 2 são do tipo partitivo, e o 3º é um problema de medição. Para a TCC estes problemas podem ser classificados como isomorfismo de medidas.

Atividade 5C: discussão sobre o algoritmo da divisão

A pesquisadora propôs aos acadêmicos uma discussão acerca do procedimento para a divisão entre frações, a partir do seguinte questionamento:

É fácil multiplicar frações, basta multiplicar os numeradores e os denominadores. Eu acho que deveríamos definir a divisão entre frações de forma semelhante:

$$Divisão: \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

No Quadro 26 apresenta-se o diálogo entre a pesquisadora e os estudantes Lili, Yael, Efrat, Miki, Tili, Sally para a atividade em que foi solicitado discutir o algoritmo para a divisão.

Quadro 26: Diálogo entre os acadêmicos Lili, Yael e Tili. VER ESTE QUADRO

Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Teresa (TIROSH, 2000, p.14).	Tradução dos autores
Lili: So, we are left with division. Let's do the same thing. For instance, 16 : 2 = 8. 16 = 16/1; 2 = 2/1. According suggestions, we get: $16 \div 2 = \frac{16}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{16 \div 2}{1 \div 1} = 8$ **Yael:** This is probably a specific case. We have to find an example in which this does not work. Let's try another example. **Yael:** No. It's impossible. If it was correct, why would anyone use the complicated invert-and-multiply algorithm?... We need only one example... Let's try expressions such as $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 2} = 1$ This works too. Let's try a number that is not	**Lili:** Então, ficamos com a divisão. Vamos fazer a mesma coisa. Por exemplo, 16 : 2 = 8. 16 = 16/1, 2 = 2/1. De acordo com sugestões, obtemos: $16 \div 2 = \frac{16}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{16 \div 2}{1 \div 1} = 8$ **Yael:** Este é provavelmente um caso específico. Temos que encontrar um exemplo em que isso não funciona. Vamos tentar outro exemplo. **Yael:** Não. É impossível. Se fosse correto, por que alguém iria usar o algoritmo complicado inverter e multiplicar? ... Precisamos apenas um exemplo ... Vamos tentar expressões como: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 2} = 1$ Isso funciona também. Vamos tentar um número

divided. **Yael:** Take, for instance, this example: $\frac{1}{8} \div \frac{2}{4} = \frac{1 \div 2}{8 \div 4} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$ Now we have a fraction in the numerator, and this is too complicated; we can't go on. So this is why division is defined by "invert and multiply. **Lili:** So, suggestion is good, but it is complicated. In some cases, like the last one, we will get stuck unless we use the invert-and-multiply algorithm. So better to use the invert-and-multiply algorithm, because it works in all cases. **Tili:** How would you show this? **Lili**: Substituting numbers is not enough because it is impossible to check all the possibilities. We should search for one example for which we will get different answers. **Lili**: But we need to show it for all cases. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x \Leftrightarrow x.\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, $\left(x.\frac{c}{d}\right).\frac{d}{c} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, $x.\left(\frac{d}{c}.\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, $x = \frac{ad}{bc}$, hence, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$	que não está dividido. **Yael:** Tomemos, por exemplo, este exemplo: $\frac{1}{8} \div \frac{2}{4} = \frac{1 \div 2}{8 \div 4} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$ Agora temos uma fração no numerador, e isso é muito complicado, não podemos ir em frente. Então é por isso que a divisão é definida por "inverter e multiplicar." **Lili:** Então, a sugestão é boa, mas é complicada. Em alguns casos, como o último, vamos ficar presos a menos que use o algoritmo de inverter e multiplicar. Então é melhor usar o algoritmo de inverter e multiplicar, porque ele funciona em todos os casos. **Tili:** Como você pode mostrar isso? **Lili**: Substituindo números não é suficiente, porque é impossível verificar todas as possibilidades. Devemos procurar um exemplo de que vamos obter respostas diferentes. **Lili**: Mas precisamos mostrar isso para todos os casos. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x \Leftrightarrow x.\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, $\left(x.\frac{c}{d}\right).\frac{d}{c} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, $x.\left(\frac{d}{c}.\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, $x = \frac{ad}{bc}$, portanto, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Fonte: Autores, adaptado de Tirosh (2000, p.14).

Análise segundo a TCC

De acordo com Vergnaud (2009b) a verificação do conhecimento do aluno está na ação realizada por ele frente à situações problemas. Para o autor, os matemáticos inventaram a noção de algoritmo, que permite esclarecer os elos entre conhecimento e ação: “Um algoritmo é uma regra (ou um conjunto de regras) que permite, diante de todo problema ou de uma classe dada de antemão, de conduzir à sua solução, se dele existe uma, ou, em caso de insucesso, de mostrar que não há uma solução” (VERGNAUD, 2009b, p.309).

No diálogo apresentado no Quadro 26, os estudantes partiram de um teorema em ação para chegar a um conceito em ação, o algoritmo para a divisão entre frações. Afirmamos que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ é um teorema em ação, pois conforme Nunes e Bryant (1997) esta é a primeira ideia (no início da escolarização) que os alunos possuem a respeito dos números racionais na represetação fracionária: dois números naturais que estão separados por uma barra, então as operações entre estes números ocorre separadamente. Os estudantes não compreendem a representação $\frac{a}{b}$ como um novo tipo de número.

Além do que, se a regra vale para a multiplicação: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, por que não vale também para a divisão? Os estudantes testam, por meio de exemplos numéricos, a regra: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$, que para alguns casos tem validade. Entretanto, encontram um contra exemplo, $\frac{1}{8} \div \frac{2}{4} = \frac{1 \div 2}{8 \div 4} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$, mostrando a falsidade deste algoritmo.

A discussão e os passos explicitados pelos acadêmicos são importantes para a TCC, visto que indicam como pensavam, ao mesmo tempo em que modificam suas ações.

Para Vergnaud (2009b) a análise relacional realizada pelos estudantes permitiu definir rigorosamente a validade de um algoritmo, tal como o ocorreu o desenvolvimento das ciências, por meio de descobertas, transformações, refutações e invariantes. Diante disto, Vergnaud (2009b, p.308), afirma que “a noção de invariante é o núcleo mais sólido que podemos encontrar na análise da noção do conceito”.

A partir do referencial teórico proposto pela TCC fez-se a análise dos dados da pesquisa realizada por Tirosh (2000), e discutimos acerca dos teoremas e conceitos em ação que os estudantes possuiam, encontrados na estrutura multiplicativa de números racionais na representação fracionária, bem como a categorização das situações problemas segundo Vergnaud (2009b).

4.3 Racioncínio de Futuros Professores e as Estratégias de Resolução para a Divisão entre Frações

O artigo *Prospective Teachers' Reasoning and Response to a Student's Non-Traditional Strategy When Dividing Fractions* de Ji-Won Son e Sandra Crespo, foi publicado em 2009, no *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12º volume. Este trabalho descreve uma pesquisa realizada com 34 acadêmicos, sendo 17 do programa de formação de professores para a escola elementar e 17 acadêmicos do curso de matemática de uma mesma universidade nos Estados Unidos.

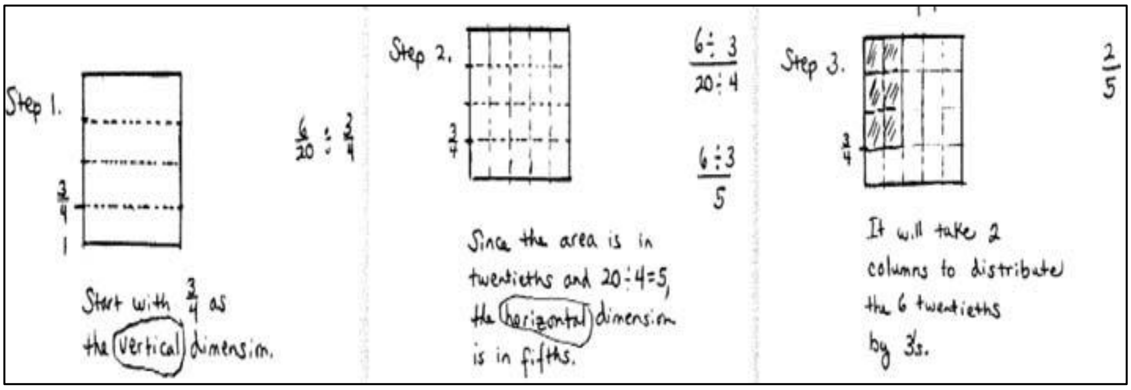
A inclusão de dois grupos diferentes de acadêmicos, com diferentes formações e experiências com a matemática, contempla o objetivo do artigo: coletar informações sobre o raciocínio dos futuros professores acerca da divisão entre frações.

De acordo com Son e Crespo (2009) a divisão entre frações é a operação mais difícil para os alunos do nível elementar, e pode ser entendida como uma extensão da divisão de números inteiros, pois o significado é o mesmo.

Embora existam múltiplas interpretações de uma divisão, a operação inversa da multiplicação é a mais frequentemente associada à divisão de frações. No entanto, as quatro seguintes interpretações também podem ser aplicadas à divisão: a partição, a medição, o inverso de um produto cartesiano, e a determinação de uma taxa de variação (SON; CRESPO, 2009).

A a*tividade 1D,* proposta aos acadêmicos, consistiu em determinar o quociente entre: $\frac{6}{20} \div \frac{3}{4}$. Uma das respostas dos alunos, selecionada em função da representação figural utilizada e pela resposta dada é apresentada na Figura 06.

Figura 06 – Passos da divisão entre frações.



Fonte: Son, Crespo (2009, p.237).

Análise segundo a TCC

Nos passos realizados pelo estudante verifica-se que utilizou um teorema em ação para calcular a divisão entre as frações, pois dividiu numerador com numerador e, dividiu denominador com denominador, sem justificar tal escolha. Provavelmente, esta ideia é oriunda do estudo sobre os números naturais.

Com relação à representação figural, o estudante dá indícios de que compreendeu a representação fracionária $\frac{6}{20}$ como um número, pois consegue representa-la adequadamente. Entretanto, não representou este número, $\frac{6}{20}$, dividido por $\frac{3}{4}$.

Esta é outra discussão necessária para o ensino de frações: representar por meio de figuras o resultado de adição, subtração e multiplicação entre frações são casos compreensíveis pelos alunos, mas a divisão entre frações não é tão fácil quanto parece. É o que discutiremos ao longo deste artigo.

A *atividade 2D* proposta, envolvia a divisão de uma fração mista por outra fração. Dentre as respostas dos alunos, os pesquisadores destacaram a explicação dada pela estudante Xie, ilustrada no Quadro 27.

Quadro 27 – Resolução da estudante Xie.

Resolução da estudante Xie (SON, CRESPO, 2009, p.240).	
$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$	*Our interpretation of the arithmetic properties used*
$=(7 \div 4) \div (1 \div 2)$	Fractions can be written as division expressions
$=(7 \div 4) \div 1 \times 2$	Removing parentheses and using inverse operation
$7 \div 1 \div 4 \times 2$	Division as inverse of multiplication; commutative property of multiplication applied to an equivalent multiplication expression $7 \times \frac{1}{4} \times 1 \times 2 = 7 \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2$
$=(7 \div 1) \div (4 \div 2)$	Reinserting parentheses
$=\frac{7 \div 1}{4 \div 2}$	
Tradução dos Autores	
$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$,	*Nossa interpretação das propriedades aritméticas utilizadas*
$= (7 \div 4) \div (1 \div 2)$,	Uma fração pode ser escrita para expressar uma divisão
$= (7 \div 4) \div 1 \times 2$,	Remover os parênteses e usar a operação inversa
$= 7 \div 1 \div 4 \times 2$,	A divisão é a inversa da multiplicação; propriedade comutativa da multiplicação aplicado para expressão equivalente da multiplicação $7 \times \frac{1}{4} \times 1 \times 2 = 7 \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2$,
$= (7 \div 1) \div (4 \div 2)$,	Reinserir os parênteses
$= \frac{7 \div 1}{4 \div 2}$.	

Fonte: Autores.

A maneira como o aluno procedeu neste método contém equívocos. Dá indícios de que a propriedade de comutatividade é válida na divisão entre racionais na representação fracionária. Entretanto, esta propriedade se verifica apenas na adição e na multiplicação entre racionais.

No último passo percebe-se que o aluno considerou que a divisão é comutativa, e reagrupou os termos para dividir convenientemente. Note que o resultado está correto, mas o processo utilizado está errado.

A explicação dada pela estudante Xie nos mostra que a estratégia utilizada está relacionada com o conhecimento prévio adquirido sobre os números e suas propriedades. Xie não conseguiu formalizar uma justificativa para a validade do processo desenvolvido.

Atividade 3D: o raciocínio dos futuros professores e as estratégias alternativas

Nesta atividade destaca-se o desempenho dos professores na resolução da seguinte divisão: $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$. Uma das tarefas era criar uma situação problema que tivesse como solução a divisão apresentada. No Quadro 28 apresentamos exemplos de enunciados propostos por diferentes acadêmicos.

Quadro 28 – Enunciados de Situações problemas.

Resolução do estudante Xie (SON, CRESPO, 2009, p.246).	
Mary has $\frac{2}{9}$ft of ribbon. It takes $\frac{1}{3}$ft to make a bow. How many bows can she make?	Jane is making three cakes. She has $\frac{2}{9}$ cups of baking soda left and need to divide it evenly among the three cakes. How much baking soda can she put in each cake?
Tradução dos Autores	
Problema 1: Mary tem $\frac{2}{9}$ de uma fita. Ela precisa de $\frac{1}{3}$ para fazer um laço. Quantos laços ela pode fazer com a fita?	Problema 2: Jane quer fazer 3 bolos. Ela tem $\frac{2}{9}$ de xícara de bicarbonato de sódio e precisa distribuir igualmente entre os 3 bolos. Quanto bicarbonato de sódio ela vai colocar em cada bolo?
O enunciado desta situação está de acordo com o cálculo relacional, pois tem-se $\frac{2}{9}$ de fita e deseja-se fazer laços de $\frac{1}{3}$ de comprimento, portanto, realiza-se a operação $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$, conforme solicitado.	O enunciado desta situação não está de acordo com o cálculo relacional, pois tem-se $\frac{2}{9}$ de bicarbonato de sódio para fazer 3 bolos. Portanto, realiza-se a operação $\frac{2}{9} \div 3$.

Fonte: Autores.

O enunciado do problema 2, nos sugere que o estudante não compreende a divisão entre frações, pois a informação “dividir em terços” e “dividir em 3 partes” representam situações diferentes, entretanto ele utilizou para representar o mesmo cálculo relacional: $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$.

No Quadro 29 apresentamos duas situações que evidenciam a diferença entre "dividir em terços" e "dividir em 3 partes". Quando dividimos em terços, obtém-se 3 pedaços de chocolate, enquanto que na divisão por 3 obtemos um pedaço menor, ou seja, um pedaço de chocolate com $\frac{1}{3}$ da unidade.

Quadro 29 – Representação figural com divisores 3 *e* $\frac{1}{3}$.

$1 \div \frac{1}{3} = 3$ (faz-se a pergunta: Mary deseja saber quantos pedaços de $\frac{1}{3}$ ela pode obter com uma barra de chocolate).		$1 \div 3 = \frac{1}{3}$ (faz-se a pergunta: Uma barra de chocolate foi dividida igualmente entre três pessoas. Quanto cada um recebeu?).	
	 Tem-se 3 pedaços de $\frac{1}{3}$.		 Tem-se $\frac{1}{3}$ da barra de chocolate.

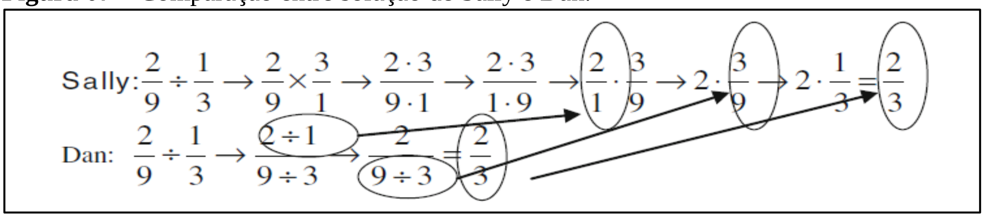
Fonte: Autores.

O problema 1, proposto ao estudante Xie, é classificado como isomorfismo de medidas pela TCC e pode ser interpretado pelo esquema dado a seguir:

Quantidade de fita (unidade de medida)	Quantidade de laços
$\frac{2}{9} \longrightarrow$	x
$\frac{1}{3} \longrightarrow$	1

Na 3ª atividade a pesquisadora também solicitou que os estudantes calculassem a divisão $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$. As estudantes Sally e Dan compararam o desenvolvimento do algoritmo para a divisão, apresentado na Figura 07.

Figura 07 – Comparação entre solução de Sally e Dan.



Fonte: Son e Crespo (2009, p.250).

Com relação ao cálculo apresentado por Sally, inferimos que este é um conceito em ação, em que a estudante mobilizou seu conhecimento referente à operação de divisão entre frações.

A estudante Dan utilizou um processo diferente para a divisão entre frações. Poderíamos inferir que o modelo utilizado é um teorema em ação, visto que, aparentemente, divide numerador por numerador e, denominador por denominador. Entretanto, ele não está incorreto, e faz sentido para a estudante, pois mobilizou durante a ação. A 4ª atividade esclarece o modelo utilizado pela estudante.

Atividade 4D: Algoritmo desenvolvido pelas estudantes Sally e Dan.

Nesta atividade foi solicitado aos acadêmicos que justificassem, por meio de algoritmo, as estratégias utilizadas para realizar o cálculo da 3ª atividade. No Quadro 30 apresentamos as justificativas dadas pelos estudantes para a divisão: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Quadro 30 – Método algébrico desenvolvido pelos acadêmicos.

Método algébrico desenvolvido pelos acadêmicos $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ (SON; CRESPO, 2009, p.250).	Análise segundo a TCC
Método de Dan $\frac{a \div c}{b \div d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \boxed{\frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{cb}} = \frac{ad}{bc}$	No início, o algoritmo alternativo utilizado por Dan parece estar errado, pois divide numerador por numerador e, denominador por denominador. Para finalizar faz referência ao modelo usual que conhecemos “mantém o dividendo e multiplica pelo inverso do divisor”. A questão é: o primeiro passo utilizado está errado ou correto? É proveniente do conhecimento adquirido com os números naturais ou não?
Método de Sally e Dan $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d} \boxed{= \frac{\frac{a}{c} \times cd}{\frac{b}{d} \times cd} =} \frac{ad}{bc}$	O algoritmo desenvolvido por Sally e Dan utiliza o mesmo princípio: dividir numerador por numerador e, denominador por denominador. Entretanto, esse método é válido na divisão entre frações? A igualdade de verifica? $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ Mostraremos que sim. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{b}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a \div c}{b \div d}$ Agora, é fácil compreender a validade deste algoritmo alternativo. Portanto, é um conceito em ação.

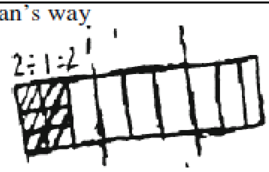
Fonte: Autores.

Atividade 5D: Representação pictórica.

Nesta atividade foi solicitado aos acadêmicos que representassem, por meio de figuras, a divisão $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$. Alguns dos resultados obtidos são ilustrados nas Figuras 08 e 09.

Figura 08 – Representação pictórica de Dan.

(1) Dan's way



9 parts÷3= 3 parts. Signified by the 3 dashed lines. Two parts ÷1=2 parts.
But 1/3 of 9=3 parts, not 2 parts. So we need to see how many ninths fit into 3rds evenly. This is 6/9, or 2/3.

Fonte: Son e Crespo (2009, p.252).

A representação pictórica está equivocada, pois continua com a representação de $\frac{2}{9}$. Se tivesse divido toda a figura em três partes (na horizontal) como fez com a parte hachurada, ele teria $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. Ou seja, não conseguiu representar o resultado da divisão solicitada.

Entretanto, na jusificativa escrita dada por Dan, nota-se também que a parte hachurada representa apenas $\frac{1}{3}$ da figura, enquanto podemos obter 3 partes de $\frac{1}{3}$. E isto é dito pela estudante: “Mas $\frac{1}{3}$ em 9 é igual a 3 partes, e não 2 partes. Portanto, temos que ver quantos terços cabem nas 9 partes. Isto é $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$”. Assim, consideramos que a linguagem escrita é um conceito em ação pertinente.

Figura 09 – Representação pictórica de Dan.

(2) Sally's way

$$\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{9} \text{ x } 3\right) = \frac{2}{3} \text{ of the whole}$$

Fonte: Son e Crespo (2009, p.252).

Na Figura 09 o invariante operatório utilizado por Sally é um conceito em ação. Podemos inferir que esta estudante possui conhecimento adequado a respeito da divisão entre frações.

O caso em que o divisor possui denominador maior do que o numerador é um dos casos mais difíceis da divisão entre frações para representar por meio de figuras, pois quando se realiza uma divisão, é fácil identificar o teorema em ação: “a divisão diminui e a multiplicação aumenta”. E neste caso, a representação figural mostra que ocorre o contrário, uma vez que a parte hachurada da figura aumentou. Isto ocorre, pois, devemos verificar que $\frac{1}{3}$ em $\frac{2}{9}$ se repete 3 vezes.

SEÇÃO 5 – CONSIDERAÇÕES

Apresentamos nesta seção uma sucinta descrição da pesquisa e as considerações finais a respeito dos resultados dela advindos.

A inserção da pesquisa científica no campo da Educação Matemática é uma das dificuldades com que se defronta o professor da escola para fazer uso dessas pesquisas em sua prática docente.

Com relação à conceitualização dos números racionais na Educação Básica vários fatores estão relacionados a essa dificuldade, sendo importante destacar o fato de que a maior parte da literatura está disponível em língua estrangeira, principalmente, aquelas pesquisas pioneiras, como os trabalhos de Kieren (1988) e Behr et al. (1983), que tratam do conceito de número racional e que envolvem um rico conjunto de interpretações[17] e processos integrados, relacionados a uma ampla gama de conceitos elementares, como por exemplo, a medição e as operações aritméticas com os números racionais na representação fracionária.

Observa-se, ademais, que as publicações brasileiras dirigidas aos professores da escola básica (que tratam do estudo dos números racionais na representação fracionária) avaliam e discutem o desempenho dos alunos e a concepção de professores do Ensino Fundamental sobre os cinco significados (subconstrutos) do número fracionário (SILVA, 1997; BEZERRA, 2001; TEIXEIRA, 2008; MERLINI, 2005; MOREIRA e DAVID, 2004). O trabalho desenvolvido por estes autores quase não contempla as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) de racionais na representação fracionária, e quando estas são discutidas, são realizadas do tipo clássico, ½ + ½, por exemplo.

[17] Subconstrutos considerados: relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Entretanto, em muitas pesquisas internacionais identificadas em periódicos de Qualis A1, identificamos atividades e situações problemas que contemplaram tais operações aritméticas para os números racionais na representação fracionária.

Para estrutura aditiva selecionamos o artigo de Nancy Mack, intitulado *Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge.* Este trabalho contemplou situações problemas sobre números racionais na representação fracionária e apresentou em detalhes as respostas dos alunos para as atividades, o que proporcionou identificar situações, invariantes e as representações utilizadas pelos estudantes, com embasamento teórico proposto pela TCC.

Para estrutura multiplicativa de números racionais em sua representação fracionária selecionamos três artigos. O trabalho de Silvia Bulgar, intitulado *Children's Sense-Making of Division of Fractions,* realizou atividades com alunos do Ensino Fundamental, teve como objeto de estudo a divisão de um número natural por frações, com a utilização de materiais manipuláveis.

O trabalho de Dina Tirosh, intitulado *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions,* comtemplou o estudo de divisão de frações com acadêmicos de Licenciatura em Matemática.

O artigo de Son e Crespo, intitulado *Prospective Teachers' Reasoning and Response to a Student's Non-Traditional Strategy When Dividing Fractions*, relatou a investigação realizada com acadêmicos de Licenciatura em Matemática e realizou atividades que contemplaram a representação pictórica, situações problemas e o algoritmo da divisão entre frações.

A justificativa para a escolha destes artigos ficou atrelada ao fato destes trabalhos apresentarem, em detalhes, as respostas dos alunos para as atividades, o que possibilitou identificar situações problemas, invariantes operatórios – teoremas e conceitos em ação, e as representações utilizadas pelos estudantes, segundo a TCC.

Desta forma, o objetivo deste estudo foi identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura de artigos internacionais que trataram de aspectos do ensino e da aprendizagem das estruturas aditivas e multiplicativas dos números racionais em sua representação fracionária.

Para tanto, realizamos um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária, com intuito de explorar esse assunto sob a ótica da TCC. Nossa investigação procurou responder a seguinte questão:

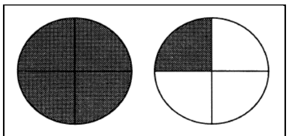
Quais elementos da Teoria dos Campos Conceituais – Situações, Invariantes e Representações – podem ser identificados a partir da releitura do conteúdo de artigos sobre o ensino e a aprendizagem das estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária?

Realizada a pesquisa, discutimos os resultados a partir da questão anterior.

Para a *Estrutura Aditiva de números racionais na representação fracionária*, identificam-se no trabalho de Mack (1990) atividades e situações problemas que contemplaram as operações de adição e subtração.

No Quadro 31 elencam-se Situações, Invariantes e Representações para a estrutura aditiva de racionais na representação fracionária.

Quadro 31 – Elementos da TCC para a Estrutura Aditiva.

Estrutura Aditiva de Números Racionais na Representação Fracionária			
Mack (1990)	**Elementos da TCC**		
Atividade	**Situação**	**Invariante**	**Representação**
1A	**1ª categoria: Composição de medidas** Suponha que você tenha duas tortas de limão e você come 1/5 de uma das tortas, quanto da torta de limão sobrou?	**Conceito em ação** O aluno identifica que a pizza foi dividida em 5 partes iguais, $\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Assim, tem $1+\frac{4}{5}$ de torta.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
2A	Suponha que você tenha duas pizzas do mesmo tamanho, e você deseja cortar uma das pizzas em seis pedaços iguais. A outra pizza você deseja cortar em oito pedaços iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, qual destes pedaços será maior?	**Conceito em ação** Quanto maior o número de divisões de uma pizza, menor será a área de cada uma de suas partes.	Linguagem escrita
		Teorema em ação $\frac{1}{8}>\frac{1}{6}$, pois $8>6$. Enumeração de naturais.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
3A	**1ª categoria: Composição de medidas**  Figure 1: Julie's picture to identify Quanto é a parte hachurada?	**Conceito em ação** Identifica a unidade dividida em 4 partes. Logo, representa 1 pizza inteira e $\frac{1}{4}$.	Representação pictórica Relacionou a figura à pizzas (linguagem do cotidiano).
		Teorema em ação Na adição entre frações somar numeradores e, somar denominadores. Compreende a unidade dividida em 8 partes.	Representação pictórica
4A	$4-\frac{7}{8}=?$	**Conceito em ação** $1=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$, desta forma:	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$

		$\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$, mais 3 unidades inteiras: $3+\frac{1}{8}$	
		Teorema em ação $4-\frac{7}{8}=\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$, Erro cometido: $4=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
5A	$4\frac{1}{8}-1\frac{5}{8}=?$	**Conceito em ação** Subtraiu os inteiros: $4-1=3$, e então, $\left(2\frac{8}{8}-\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)=2\frac{4}{8}$.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
6A	$\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=?$	**Teorema em ação** Somar numeradores e, somar denominadores (proveniente da adição de naturais).	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
7A	**1ª categoria: Composição de medidas** Se você tivesse 3/8 de uma pizza e eu te desse mais 2/8 de uma pizza, quanto de pizza você teria?	**Conceito em ação** Interpretação parte-todo: unir as parcelas (numeradores) de um mesmo todo, indica que o estudante compreende a unidade dividida partes iguais.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$

Fonte: Autores.

A estrutura aditiva de números fracionários com mesmo denominador, normalmente, não apresenta complicadores para a compreensão dos alunos. A questão está em fazê-los entender que quando os denominadores são diferentes, as partes consideradas têm nomes diferentes, tais como meios, terços, quartos, dentre outras e, nesse caso, é necessário representar as frações em questão, em outras, equivalentes, ou seja, que apresentem o mesmo denominador. O próprio termo mostra sua função: o denominador denomina, dá nome às partes em que o inteiro foi dividido. (SILVA e ALMOULOUD, 2008).

Com relação aos invariantes operatórios detectados, é notório, e muito frequente nas respostas dos alunos, o principal teorema em ação mobilizado: somar numerador com numerador e, denominador com denominador. Kline comenta essa questão do seguinte modo:

> Quando usamos a adição de frações em situações reais, para somar $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$, por exemplo, nós reduzimos ambas a sextos e então somamos $\frac{3}{6}$ com $\frac{2}{6}$ para obter $\frac{5}{6}$. Entretanto, quando multiplicamos frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores de modo que $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Poderíamos somar frações somando os numeradores e os denominadores para obter $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Por que não usamos esse método? É mais simples, mas não se adapta às situações empíricas. Como outro exemplo, poderíamos considerar o produto

> de matrizes. O uso que se faz das matrizes requer que a multiplicação seja não comutativa, embora fosse possível definir uma multiplicação comutativa de matrizes. Uma vez que a multiplicação deve ser não comutativa, os fundamentos lógicos da teoria se ajustam a esse fato. Portanto, a lógica não dita o conteúdo da Matemática; o uso é que determina a estrutura lógica (KLINE, 1974, p.51).

À medida que se ampliam os campos numéricos e se estendem as operações para os novos conjuntos, os significados das operações aritméticas ganham sentido mais amplo e talvez, possamos dizer, mais algébrico.

Algumas noções associadas às operações com números naturais permanecem, enquanto outras, como por exemplo, a identificação da ideia de multiplicação com a de uma soma iterada, podem ser, progressivamente, superadas.

O estudo que fizemos nos indica que as questões que se colocam para o professor na sala de aula, como por exemplo, desenvolver as diferentes etapas do processo de expansão dos campos numéricos com os educandos, não se referem apenas às definições que apresentam os resultados das operações com a permanência de algumas propriedades ao novo campo numérico.

Ao contrário, referem-se, a uma compreensão das razões pelas quais as operações, com os novos números, devem ser efetuadas de certo modo e por que algumas propriedades permanecem válidas e outras não (MOREIRA e DAVID, 2004).

Na escola, as operações com os números racionais na representação fracionária e seus significados se constroem a partir da análise de uma diversidade de situações concretas (Vergnaud, 2009b). Desta forma, se torna necessário reconhecer, comparar com o caso dos naturais e estabelecer certas relações entre os números, retirando-se, como consequência dos significados e do uso, a validade das propriedades. Pois não é o significado dado a determinada situação que se ajusta às propriedades, mas o contrário, as propriedades se ajustam aos significados das operações.

As situações problemas identificadas para a estrutura aditiva de números racionais na representação fracionária pertencem à 1ª categoria – composição de medidas. Isto nos mostra que as situações problemas, quando são trabalhadas com os alunos, favorecem apenas um tipo de raciocínio da estrutura aditiva, o de composição de medidas.

As situações que envolvem raciocínios da estrutura aditiva são trabalhadas, pelos indivíduos, desde os primeiros anos de escolarização, no entanto existe uma diversidade de contextos, dentro de uma mesma situação, que interferem no grau de complexidade do cálculo relacional envolvido, e isto não é utilizado na pesquisa de Mack (1990).

Por isso, faltam situações que contemplem o conjunto de situações para a estrutura aditiva, formado por composição: de medidas, de transformações e de relações, transformação: de medidas e de relações, e, comparação de relações.

Identifica-se no trabalho de Mack (1990) que as principais representações utilizadas na forma fracionária são desenhos (representação pictórica – formato circular ou de pizza), linguagem natural escrita e a representação $\frac{a}{b}$. Destaca-se que quando os estudantes foram confrontados com situações problemas que representaram ações da vida cotidiana, estes obtiveram êxito e conseguiram resolver adequadamente as atividades.

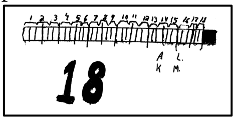
Descacamos também que, dentre os artigos encontrados e elencados no Quadro 01, apenas o artigo de Mack (1990) contemplou atividades pertencentes à estrutura aditiva de racionais na represnetação fracionária e explicitou as respostas dos alunos, o que possibilitou atender ao objetivo proposto nesta investigação.

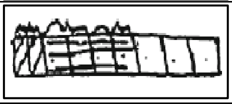
Para a *Estrutura Multiplicativa de números racionais na representação fracionária*, identifica-se nos trabalhos de Bulgar (2003), Son e Crespo (2009) e Tirosh (2000) atividades e situações problemas que contemplaram as operações de multiplicação e divisão entre frações.

No Quadro 32 elencam-se Situações, Invariantes e Representações para a estrutura multiplicativa de racionais na representação fracionária identificados em atividades desenvolvidas com alunos da 6ª série do Ensino Fundamental (BULGAR, 2003) e com acadêmicos de Matemática (TIROSH, 2000; SON e CRESPO, 2009).

Quadro 32 – Elementos da TCC para a Estrutura Multiplicativa.

Estrutura multiplicativa de Números Racionais na Representação Fracionária			
	Elementos da TCC		
Bulgar (2003)	**Situação**	**Invariante**	**Representação**
1B	**Isomorfismo de medidas** Quantos laços de $\frac{1}{3}$ metro de comprimento podem ser obtidos em 1 metro de fita?	**Conceito em ação** A fita deve ser dividida em três partes iguais.	Converter 1 metro em 100 centímetros.

2B	**Isomorfismo de medidas** Quantos laços de $\frac{1}{2}$ metro de comprimento cabem em 2 metros de fita?	**Conceito em ação** Esticar a fita e com sobreposições, contar quantas vezes o laço de $\frac{1}{2}$ metro se repetiu sobre a fita.	Sobreposição da medida.
3B	**Isomorfismo de medidas** Quantos laços de 2/3 metro de comprimento podemos obter em 12 metros de fita?	**Conceito em ação** Dividir cada metro em 3 partes iguais, reorganizar o esquema e reagrupar a quantidade de laços com comprimentos de 2/3 de metro.	Representação pictórica 
Tirosh (2000)	**Situação**	**Invariante**	**Representação**
1C	$320 \div \frac{1}{3} = 106{,}666 \ldots$	**Teorema em ação** Quociente menor do que o dividendo.	Linguagem escrita Representação decimal
2C	**Isomorfismo de medidas** Uma fita de cinco metros de comprimento foi dividida em 15 partes iguais. Qual é o comprimento de cada pedaço desta fita?	**Teorema em ação** O dividendo é maior do que o divisor. Resposta $\frac{15}{5}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
3C	**Isomorfismo de medidas** Quatro amigos compraram 1/4 kg de chocolate e dividiram igualmente. Quanto quilograma de chocolate cada pessoa recebeu?	**Teorema em ação** Dividir por 4 e multiplicar por 4 são operações equivalentes, pois apresentam como resultado: $\frac{1}{4} \times 4$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
4C	**Isomorfismo de medidas** Quatro (4) kg de queijo foram acondicionados em embalagens de 1/4 kg cada um. Quantos pacotes devem embalar esta quantidade de queijo?	**Conceito em ação** Cada quilograma de queijo gera 4 pacotes de $\frac{1}{4}$ Kg, então 4 Kg gera 16 pacotes.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
5C	**Algoritmo da divisão**	**Teorema em ação** Dividir numerador por numerador e, denominador por denominador. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$.	Representação $\frac{a}{b}$
Son e Crespo (2009)			
1D	$\frac{6}{20} \div \frac{3}{4} = ?$	**Teorema em ação** Dividir numerador por numerador e, denominador por denominador.	Representação $\frac{a}{b}$ Representação pictórica
2D	$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = ?$	**Teorema em ação** Comutatividade é válida na divisão entre frações.	Representação $\frac{a}{b}$
3D	Formular um enunciado para representar: $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$	**Conceito em ação** Mary tem $\frac{2}{9}$ de uma fita. Ela precisa de $\frac{1}{3}$ para fazer um laço. Quantos laços ela pode fazer com a fita? **Dividir em terços.**	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$

		Teorema em ação Jane quer fazer 3 bolos. Ela tem $\frac{2}{9}$ de xícara de bicarbonato de sódio e precisa distribuir igualmente entre os 3 bolos. Quanto bicarbonato de sódio ela vai colocar em cada bolo? **Dividir em 3**.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
4D	Desenvolver o algoritmo alternativo para representar a divisão: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.	**Conceito em ação** $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d} = \boxed{\frac{\frac{a}{c} \times cd}{\frac{b}{d} \times cd}} = \frac{ad}{bc}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
5D	Representar por figuras a divisao: $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$	**Teorema em ação** Representou $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$	
		Conceito em ação **Representou** $\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$	

Fonte: Autores.

Ensinar a divisão entre frações é um desafio para professores do ensino fundamental, pois é necessário desenvolver com os estudantes uma compreensão deste conceito mais do que uma compreensão algorítmica, que garante apenas a aplicação de procedimentos de cálculo. E para desenvolver tal compreensão é necessário considerar a natureza deste conceito e as formas de raciocinar do educando.

A perspectiva teórica de Vergnaud (1993, 2009b, 2009c) destaca que a compreensão psicológica dos conceitos matemáticos requer considerar os invariantes lógicos, os esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação.

Os esquemas de ação que orientam a maneira como os estudantes lidam com as situações de divisão são: a distribuição e a correspondência um-para-muitos (NUNES e BRYANT, 1997).

A distribuição está presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como se observa em situações de partilha, presente no esquema de correspondência um-para-um.

Entretanto, a divisão enquanto conceito inserido no campo das estruturas multiplicativas envolve a correspondência um-para-muitos, que requer que se opere com dois ou mais fatores simultaneamente (NUNES; BRYANT, 1997).

Os invariantes e os esquemas de ação indicam que muitas das dificuldades dos alunos residem na não compreensão das relações inversas entre os termos da divisão. Tais dificuldades decorrem de uma incompreensão acerca dos princípios invariantes inadequados relativos ao conceito de divisão (LIMA, 2008).

Segundo Nunes e Bryant (1997) um dos invariantes lógicos presentes na organização das ações dos alunos ao lidar com o conceito de divisão é: o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).

É fundamental que a divisão em partes iguais de um objeto considerado como unidade seja percebida pelo educando como a totalidade inalterada. Esta conservação de unidade é um elemento básico para a compreensão do conceito de fração.

Com relação aos invariantes operatórios inadequados podemos inferir que o conhecimento empírico dos alunos de que: na multiplicação o produto sempre aumenta e na divisão o quociente diminui, forjada durante a experiência dos educandos com os números naturais, desenvolvem teoremas em ação que devem ser transpostos durante o trabalho com os números racionais na representação fracionária.

De acordo com Greer (1994), para auxiliar os estudantes a superar os teoremas em ação elencados no Quadro 32, quando estes não são verdadeiros, é necessário analisar e refletir sobre os invariantes presentes nas operações com os números envolvidos. Esta ação é o fundamento que possibilitará a extensão do significado da multiplicação e da divisão para os números racionais na representação fracionária.

Ressaltamos a importância de oferecer contra-exemplos aos alunos para discutir os teoremas em ação identificados, como por exemplo, mostrar situações multiplicativas em que o produto diminui ao invés de aumentar, e situações em que o quociente aumenta numa divisão. Também é necessário realizar este trabalho para mostrar-lhes que com os números racionais, o dividendo nem sempre é maior do que o divisor, nem mesmo o dividendo é maior do que o quociente.

Na extensão de multiplicação e divisão para outros conjuntos numéricos algumas propriedades não se conservam, por isso é necessário uma reconstrução conceitual sobre as dificuldades que os estudantes possuem.

De acordo com Greer (1994) é natural que as primeiras frações que os alunos têm acesso sejam do tipo $1/n$ $(n \in \mathbb{Z}^{+})$, por isso, a ênfase está na divisão por n. No entanto, numa multiplicação por $3/4$ em que se divide por 4 e multiplica por 3, esta associação pode gerar dificuldades aos educandos. A associação entre $1/n$ e a divisão se reflete no erro comum apresentado pelos estudantes quando realizam $6 \div \frac{1}{3} = 2$.

Para Kieren (1994) a relação parte-todo auxilia na produção da linguagem fracionária, pois os livros textos de matemática escolares e o discurso do professor tendem a orientar o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar às partes que serão consideradas (numerador).

Este procedimento pode capacitar o aluno a produzir respostas corretas em algumas situações, entretanto, desenvolve um modelo mental inapropriado, como partes de um inteiro, ao invés de um modelo mais poderoso, proporcionado pela concepção de medida - comparação com a unidade (KIEREN, 1994).

O autor destaca também a importância de se relacionar as interpretações de quociente e operador multiplicativo no trabalho desenvolvido com as estruturas multiplicativas de racionais na representação fracionária.

Com relação aos elementos da TCC que identificamos no decorrer desta pesquisa, destacamos que as *situações*, na perspectiva adotada por Vergnaud (1993), devem ser propostas em variedade e em diferentes níveis de generalidade, pois as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão devem ser usadas com uma variedade de atividades modeladas de tal modo que os estudantes possam compreender a natureza do processo em que se relacionam aspectos do mundo real e as estruturas matemáticas.

> Na solução dos problemas da aritmética dita elementar, as crianças enfrentam muitas dificuldades conceituais. É, pois, em termos de esquemas que se deve analisar a escolha das boas operações e dos bons dados para resolver um problema em que existam várias possibilidades de opção. A tomada de informação na leitura do enunciado, a tomada de informações físicas (medidas, por exemplo), a busca de informações em documentos (livro escolar, quadros estatísticos, etc.), a combinação adequada destas informações para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, em geral obedecem a esquemas, sobretudo entre alunos que dominam tais situações (VERGNAUD, 1993, p.5).

A concepção moderna de ensino de Matemática não se afasta do "cálculo" a não ser para a ele melhor retornar, sob a forma do "cálculo relacional", o qual também está no centro da inteligência e do conhecimento (VERGNAUD, 2009b). Por trás de "3+5" há complexidades de raciocínios envolvidos e, com os racionais este trabalho também é importante, pois as situações dão sentido ao conceito.

Os *teoremas em ação* que identificamos para a estrutura aditiva e multiplicativa de racionais na representação fracionária são um caminho para analisarmos as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los na transformação do conhecimento intuitivo para o conhecimento explícito.

Estes teoremas também nos encaminham para diagnosticar o conhecimento dos estudantes, o que sabem e o que ainda não sabem, de modo que possamos oferecer-lhes situações para a compreensão de determinados conceitos matemáticos.

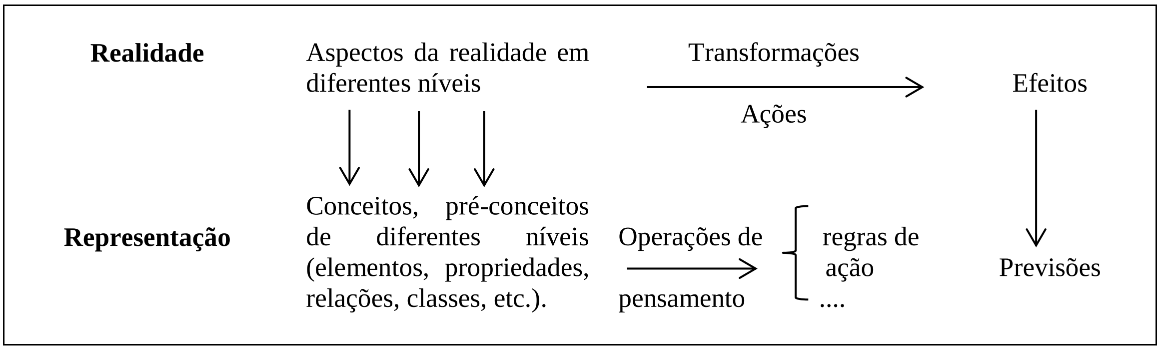
De acordo com Magina et al. (2008) os teoremas em ação podem indicar ao professor as principais dificuldades dos alunos, e a partir do conhecimento destas auxiliar os alunos a superá-las.

Em suma, um teorema em ação não é um verdadeiro teorema científico, tão pouco o conceito em ação é um conceito científico. Segundo Vergnaud (1993), pode-se discutir a veracidade ou não destes invariantes se o fizermos cientificamente e de forma explícita, pois podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos.

Com relação às *representações*, inferimos que o simbolismo matemático não é uma condição necessária nem mesmo suficiente para a conceitualização. Entretanto, contribui para a conceitualização, sobretudo para a transformação das categorias de pensamentos matemáticos, em objetos matemáticos (VERGNAUD, 1993).

De acordo com Vergnaud (2009b) não podemos compreender o papel da representação, exceto se, ela fosse observada como um reflexo da realidade, um instrumento da simulação desta e, portanto, um meio de prever os efeitos reais e de calcular as ações a serem executadas. A Figura 10 ilustra a relação entre a representação e aspectos da realidade presentes em situações problemas.

Figura 10 – Papel da representação para a TCC.



Fonte: Vergnaud (2009b, p.299).

De acordo com Vergnaud (2009b) não existe uma representação, mas múltiplas representações de formas diferentes e de diversificados níveis. Nas estruturas aditivas e multiplicativas identificamos representação pictórica (por meio de desenhos, imagens), a linguagem natural e escrita, a representação $\frac{a}{b}$, muito embora, em alguns casos, os estudantes não conseguiram converter a representação algébrica para a pictórica (como mostra o teorema em ação da atividade 5D proposta por Son e Crespo (2009)).

A linguagem natural é o meio essencial de representação e identificação das categorias matemáticas, mas não possui, como os diagramas e as equações, informações indispensáveis à seleção e ao tratamento das relações pertinentes.

De maneira geral, a estrutura teórica relacionada aos processos cognitivos, e fontes de equívocos, poderia apoiar os professores em suas tentativas de prever, interpretar, explicar e dar sentido a formas de pensar dos educandos.

Mais especíﬁcamente, os modelos teóricos de formas de pensamento, o papel dos modelos implícitos na resolução de problemas verbais das estruturas aditivas e multiplicativas, e os teoremas e conceitos em ação também poderiam ser usados para este propósito.

Aos futuros professores devem ser dadas oportunidades para observar os alunos envolvidos em atividades matemáticas, interpretar as respostas destes, para testar a eficiência dos vários esquemas mobilizados pelos estudantes, as maneiras de pensar, e de experimentar as vantagens e limitações destes esquemas.

Nossa intenção não é a de que os futuros professores devam estudar um inventário de equívocos dos alunos em vários tópicos, mas que devam conhecer teoremas e conceitos em ação mobilizados durante a resolução de situações problemas das estruturas aditivas e multiplicativas. A análise do papel da linguagem e do simbolismo participam da conceitualização.

O conhecimento dos professores das concepções alternativas das crianças deve estar ligado ao seu entendimento das fontes gerais de tais concepções. Em outras palavras, os programas de formação de professores devem familiarizar os futuros professores com vários, e às vezes errados, tipos comuns de processos cognitivos e como eles podem levar a diversas formas de pensar.

O funcionamento cognitivo de um sujeito em uma situação dada baseia-se no repertório de esquemas disponíveis, formados anteriormente. Existem vários exemplos de esquemas na aprendizagem Matemática. De acordo com Vergnaud (1993, p.5) "cada esquema se relaciona a uma classe de situações com características bem definidas".

Ao fim deste trabalho, tem-se consciência de que ele apontou diversas questões que ainda estão em aberto: como promover a extensão do esquema a uma classe mais ampla de situações? Como estender as operações dos naturais para os racionais positivos e quais as consequências dessa extensão? Quais situações ou conjuntos de situações dão significado aos conceitos envolvidos na estrutura aditiva e multiplicativa de racionais na representação fracionária?

Enfim, ainda resta pontuar que há um caminho a ser percorrido e este deverá ser voltado para a análise da aprendizagem significativa dos estudantes em situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de racionais na representação fracionária, e esta busca contínua mostra sua relevância aos propósitos da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ASTOLFI, JEAN-PIERRE; DAROT, ÉLIANE; GINSBURGER-VOGEL, YVETTE; TOUSSAINT, JACQUES. **As Palavras-Chave da Didáctica das Ciências.** Tradução: Maria Ludovina Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 2002.

BEHR, MERLYN.; LESH, RICHARD; POST, THOMAS R.; SILVER E. Rational Number Concepts. In: LESH, RICHARD; LANDAU, MARSHA (Eds). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,** (p. 91- 125). New York: Academic Press, 1983.

BEZERRA, J. B. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de Suas Representações:** Uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 2001.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília, 1997.

BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas.** Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

BULGAR, SYLVIA. Children's Sense-Making of Division of Fractions. In: **Journal of Mathematical Behavior**. 22. p.319–334. 2003.

CARPENTER, T. P. Teaching as problem solving. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. pp.187-202.

CATTO, G. G. **Registro de Representação e o Número Racional: Uma abordagem nos livros didáticos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 2000.

CERVO, AMADO LUIZ. BERVIAN, PEDRO ALCINO. **Metodologia científica.** São Paulo: Makron Books, 1996.

CURY, HELENA NORONHA. **Análise de Erros: O que Podemos Aprender com as Respostas dos Alunos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FIORENTINI, DÁRIO. LORENZATO, SERGIO. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2009.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M.; MARINO, M. **The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division.** Journal for Research in Mathematics Education, 16, 1985. pp.3-17.

FRANCHI, ANNA. Considerações Sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, SILVIA DIAS ALCÂNTARA MACHADO. **Educação Matemática: Uma Nova Introdução.** 3ª edição. São Paulo: EDUC, 2010.

GREER, BRIAN. Extending the Meaning of Multiplication and Division. In**:** CONFREY, JERE; HAREL, GUERSHON**. The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.** Albany: State University of New York Press, 1994.

KERSLAKE, D. **Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.** Windsor, Berkshire, England: NFER- NELSON, 1986.

KIEREN, THOMAS E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, MERLIN (Ed). **Number Concepts and Operations in the middle grades.** Hillsdale, Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1988, pp. 162-181.

KIEREN, THOMAS E. Multiple Views of Multiplicative Structure. In**:** CONFREY, JERE; HAREL, GUERSHON**. The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.** Albany: State University of New York Press, 1994.

KIEREN, THOMAS E. Language Use in Embodied Action and Interation in Knowing Fractions. In: HITT, FERNANDO; SANTOS, MANOEL (Eds). **Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education.** Cuernavaca – México: Eric, 1999. pp.127-145.

KLINE, MORRIS. **Why Johnny can´t add: the failure of the new math**. New York: Random House, 1974.

LEINHARDT, G. **Getting to know: Tracing student's mathematical knowledge from intuition to competence.** Educational Psychologist, 23 (2). 1988. pp. 119-144.

LIMA, CLAUDIO WOERLE. **REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E A MEDIÇÃO DE SEGMENTOS: Possibilidades com Tecnologias Informáticas.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP.

LIMA, JOSÉ MAURÍCIO DE FIGUEIREDO. Iniciação ao Conceito de Fração e o Desenvolvimento da Conservação de Quantidade. In: CARRAHER, TEREZINHA NUNES (Org.). **Aprender Pensando: Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação.** Petrópolis: Editora Vozes, 2008.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; GATIRANA, V.; NUNES, T.. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** 3ª edição. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES,T., BRYANT, P. **Educação Matemática 1: Números e Operações Numéricas.** 2ª edição. São Paulo: Cortez, 2009.

MACK, NANCY K. Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education, v. 21**, n. 2, p. 16-32, 1990.

MALASPINA, M. C. **O Início do Ensino de Fração: Uma Intervenção com Alunos de 2ª Série do Ensino Fundamental.** 2007. Dissertação. (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MERLINI, V. L. **O Conceito de Fração em Seus Diferentes Significados: Um Estudo Diagnóstico Com Alunos de 5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental.** 2005. Dissertação. (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MOREIRA, PLÍNIO CAVALCANTE; DAVID, MANUELA M.S. **Números Racionais: Conhecimentos da Formação Inicial e Prática Docente na Escola Básica**. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 21, p.1-19. 2004.

NUNES, TEREZINHA; BRYANT, PETER. **Crianças fazendo Matemática,** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAIS, LUIZ CARLOS. **Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa.** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

POST, T.; CRAMER, K.; LESH, M.; HAREL, G. Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E. (Eds.). **Research on the learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts.** Lawrence Eribaum and Associates, 1993.
Disponível em: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_6.html. Acesso em 01/09/2012.

ROMANATTO, M.C. **Número Racional: Relações Necessárias à sua compreensão**. Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, 1997.

SAEB (1996) Relatório SAEB 1996 – Matemática. Sistema de Avaliação do Ensino Básico. Brasília INEP, MEC.

SAEB (2001) Relatório SAEB 2001 – Matemática. Sistema de Avaliação do Ensino Básico. Brasília INEP, MEC.

SANTANA, EURIVALDA RIBEIRO DOS SANTOS. **Estruturas Aditivas: O Suporte Didático Influência a Aprendizagem do Estudante?** Tese apresentada ao Doutorado em Educação Matemática da Universidade Pontifícia Católica de São Paulo. São Paulo: PUC, 2010.

SEVERINO, ANTÔNIO JOAQUIM. **Metodologia do trabalho científico.** São Paulo: Editora Cortez, 2007.

SILVA, MARCELO CORDEIRO. **Reta graduada: um registro de representação dos números racionais.** 2008. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC-SP.

SILVA, MARIA JOSÉ FERREIRA. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 1997.

SILVA, MARIA JOSÉ FERREIRA. ALMOULOUD, SADDO AG. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo**. In: Bolema**, v. 21, n. 31. Rio Claro – SP, dez. 2008.

SON, JI-WON; CRESPO, SANDRA. Prospective Teachers’ Reasoning and Response to a Student’s Non-Traditional Strategy When Dividing Fractions. **In: Journal of Mathematics Teacher Education.** Vol. 12. pp.235–261. 2009.

TEIXEIRA, ALEXIS MARTINS. **O professore, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo. 2008.** Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC-SP.

TIROSH, DINA. Enhancing Prospective Teachers' knowledge of Children's Conceptions: The Case of division of Fractions. In: **Journal for Research in Mathematics Education.** Vol. 31, No. 1. p.5-25. 2000.

VERGNAUD, GÉRARD. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, GÉRARD. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas.** Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, GÉRARD. The Theory of Conceptual Fields. In: **Human Development.** Vol. 52, nº 2. Printed in Switzerland: Karger, 2009a, p. 83-94.
Acesso on line: <www.karger.com/hde>.

VERGNAUD, GÉRARD. **A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar**. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009b.

VERGNAUD, GÉRARD. O que é aprender? In: BITTAR, MARILENA; MUNIZ, CRISTIANO ALBERTO (Orgs.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009c.