UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA
E A MATEMÁTICA

KÉSIA CAROLINE RAMIRES NEVES

Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das Matrizes

Maringá
2009

KÉSIA CAROLINE RAMIRES NEVES

Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das Matrizes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros

Maringá
2009

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Neves, Késia Caroline Ramires
N518e Um exemplo de transposição didática : o caso das matrizes / Késia Caroline Ramires Neves. -- Maringá : [s.n.], 2009.
163 f.

Inclui bibliografia.
Orientador : Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2009.

1. Transposição didática. 2. Matrizes - Ensino. 3. Movimento da Matemática Moderna (MMM). 4. Educação matemática. I. Barros, Rui Marcos de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 21.ed. 510.7

FOLHA DE APROVAÇÃO*

Dedico este trabalho aos grandes amores da minha vida, Otávio e Giulia, que tiveram paciência e me apoiaram em todas as horas.

AGRADECIMENTO(S)

Agradeço:

Ao meu orientador Rui Marcos de Oliveira Barros que incentivou e me apoiou constantemente;

Aos professores Luiz Carlos Pais e Irinéa Batista, membros avaliadores de meu trabalho;

Aos professores Valdeni Soliani Franco, Clélia Maria Ignatius Nogueira e Regina Pavanello, que contribuíram com sugestões ao trabalho;

Aos professores que me enviaram materiais – Wagner Valente, Aparecida Duarte, Flávia Soares, Wagner Wuo, Mario Nakashima, Marcus Bessa;

A secretária do mestrado Tânia Gasparelo;

A CAPES;

As minhas irmãs Aline e Eveline, uma corrigindo meu trabalho com minuciosa atenção e a outra sempre cuidando da minha filha nos momentos que precisei;

A minha mãe Zuleica, pai Luiz, sogra Renata, sogro Nerilson, tia Lúcia e tia Neuza que sempre me incentivaram estudar mais e mais;

As minhas avós – Cida, Olga e Augusta que ao reconhecer minha luta me deram mais motivos para continuar;

A DEUS.

Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das Matrizes.

RESUMO

No decorrer da história, as Matrizes, os Determinantes e Sistemas de Equações Lineares – conteúdos de matemática do ensino médio – tiveram entre si, uma ordem sequencial de apresentação nos livros, certas vezes alterada. Em determinado período, por exemplo, era apresentado o conteúdo de Determinantes, depois uma simples definição de Matrizes Quadradas e posteriormente os Sistemas Lineares. Essa apresentação, que representa uma das possíveis permutações entre os três conteúdos, indica que em certo momento as Matrizes não eram um conteúdo escolar. Nesse caso, cabe fazer a pergunta: como as Matrizes tornaram-se conteúdo escolar e quando isso aconteceu? Quem iniciou este processo? Para responder tais questões, a presente pesquisa tomou como fundamentação teórica o conceito de Transposição Didática, divulgado por Yves Chevallard. Os procedimentos metodológicos adotados para que tal conceito fosse mais bem explorado foram do tipo metanálise, análise documental e análise de conteúdo, cada qual permitindo: que se avaliasse as diferentes interpretações que outros autores têm sobre a Transposição Didática – o que ampliou, do ponto de vista desta pesquisa, o entendimento sobre este conceito; que se destacasse quais foram os personagens do meio científico/acadêmico e escolar que proporcionaram a introdução das Matrizes no ensino – que foram os professores da Universidade de São Paulo e professores da rede básica de ensino do Estado de São Paulo, todos integrantes do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (USP-SP); que se identificasse nos livros didáticos analisados os elementos subjacentes ao processo de Transposição Didática das Matrizes; respectivamente. Com base nestes estudos foi possível compreender como ocorreu o processo de fazer das Matrizes um saber escolar, e também temporalizar quando isso aconteceu – década de 1960, período da introdução da Matemática Moderna no ensino básico. A presente pesquisa teve como objetivo principal responder as questões citadas anteriormente, mas a partir das análises, conseguiu revelar uma parte da história das Matrizes, a história da Transposição Didática das Matrizes, do período em que surge como saber escolar, e também como a Teoria das Matrizes se apresentou em livros didáticos, resultando num material que entrelaçou história da matemática, da educação matemática e da transposição didática das Matrizes.

Palavras-chave: Transposição didática. Matrizes. Matemática Moderna.

An Example of Didactic Transposition: the case of the Matrices.

ABSTRACT

Long of the history, the Matrices, the Determinant and Systems of Linear Equations, contents of Mathematics in high school had a sequencial order presentation in the books altered certain times. In certain period, for instance, the content was presented the Determinant contents, later a simple definition of Square Matrices and later the Linear Systems. Such presentation that represents one of the possible permutations among the three contents, indicates that in certain moment the Matrices weren't a school content. So, the question such how have the Matrices become a school content and when did it happen? Who did begin that process? To answer such questions, the present research has as theoretical base the concept of Didactic Transposition, published by Yves Chevallard. The methodological procedures adopted for that concept was explored better were of the type metanalysis, a documental analysis and content analysis, each one allowing an evaluation of the different interpretations that other authors have about the Didactic Transpositions that was developed from the point of view of this research, the understanding on this concept, that was detached the main characters of the scientific, academic and school places that provided the introduction in the teaching Matrices, that were the professors from the University of São Paulo and teachers from the basic public schools of São Paulo State, all members of the Study Group about the teaching of Mathematics (USP-SP); that it was identified in the analyzed text books the underlying elements to the process of Didactic Transposition of the Matrices, respectively. Based on these studies was possible to understand how the process of doing a school knowledge of the Matrices was built, and also, to find out when that happened, decade of 1960, period of the Introduction of the Modern Mathematics in the basic teaching. The present research had as main goal to answer the mentioned previously questions above, but starting from the analyses was possible to reveal a part of the Matrices history, the history of the Didactic Transposition of the Matrices, of the period in that appears as a knowing school, and also as the Matrices Theory was presented in text books, resulting in a material that interlaced history of the mathematics, of the mathematical education and of the didactic transposition of the Matrices.

keywords: Didactic Transposition. Matrices. Modern Mathematics.

LISTA DE SIGLAS

CATEC – Centro de Treinamento do Ensino de Ciências

CBEM – Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática

FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras

FFCLUSP – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática

MMM – Movimento da Matemática Moderna

NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics*

NHC – Nova História das Ciências

PUC – Pontifícia Universidade Católica

TDM – Transposição Didática das Matrizes

UEL – Universidade Estadual de Londrina

UEM – Universidade Estadual de Maringá

UEPG – Universidade Estadual de Ponta Grossa

UFBA – Universidade Federal da Bahia

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

UFRS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

UNB – Universidade de Brasília

UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

USP – Universidade de São Paulo

Sumário

INTRODUÇÃO

A preocupação em justificar o porquê de se estudar determinados conteúdos escolares foi e ainda é escopo para muitos estudos na área da educação. *O que fazem estes conteúdos no currículo?!* – nos perguntamos.

Embora as normas educacionais sejam redigidas por pessoas competentes do sistema educacional, pelos menos assim deveria ser, podemos suspeitar das causas que as levaram a regulamentar o currículo de tal forma, ora inserindo um conteúdo, ora retirando.

Em meados da década de 60, período em que o Movimento da Matemática Moderna (MMM) chega à educação básica brasileira, o sistema de ensino[1] passou por uma grande revolução. Pensavam os responsáveis pelo Movimento que era preciso reformar o ensino da matemática, estipular uma nova grade curricular, algo que contemplasse a formalização, a lógica, a axiomatização, o rigor. Visando esse objetivo, o MMM acrescentou à matemática escolar novos conteúdos, como as Matrizes, por exemplo. Mas será que a herança deste período não nos trouxe uma literatura sobrecarregada, descontextualizada da realidade dos alunos?

Essa pergunta nos leva a pensar na inserção de conteúdos no ensino e a indagar outras questões, tais como: *Quando aparece pela primeira vez tal conteúdo no ensino? Por que ele apareceu só neste período? De que forma o introduziram? Por que o introduziram? Sofreu modificações para se tornar saber a ser ensinado? Que tipo de modificações sofreu? Tem aplicação direta*[2] *para os alunos e por isso se tornou saber escolar?*

No caso das Matrizes, por exemplo, tema atualmente estudado no ensino médio na

---

[1] Consideramos este sistema composto por professores renomados, pesquisadores da educação, ministros da educação, etc.

[2] Queremos dizer com *aplicação direta* as aplicações da matemática que são inerentes ao cotidiano do aluno, do comércio, ou seja, àquelas aplicações que contribuem para que o aluno tome decisões das mais variadas possíveis.

disciplina de matemática, muitos professores a tratam como um pré-requisito para o estudo posterior de sistemas de equações lineares ou determinantes. Outros ainda preferem trabalhar os sistemas de equações lineares e logo depois apresentar as matrizes como uma linguagem (matricial) matemática que facilita a resolução de sistemas. Entretanto, há professores que estudaram e ensinaram seus alunos introduzindo determinantes primeiro e só comentando a definição de matrizes quadradas, não citando nada mais sobre as matrizes nem no desenvolvimento dos determinantes, nem na resolução de sistemas lineares. Então, em algum momento, as matrizes nem eram um conteúdo escolar.

De frente a todas estas possibilidades é plausível que pensemos como e quando as matrizes se tornaram um saber escolar, por que a troca de abordagem dos conteúdos? Para isso, devemos atentar a duas problemáticas acerca dessas possibilidades, que é a questão da trajetória histórica e das transposições sofridas pelas matrizes até se apresentarem nos textos escolares.

Considerando o conteúdo Matrizes, a nosso ver, estas problemáticas e consequentes perguntas, surgem no ambiente de ensino por alguns motivos: do desconhecimento de aplicações com Matrizes no cotidiano do aluno; pelos livros didáticos, em geral, não mostrarem outras finalidades para se trabalhar as Matrizes, a não ser como pré-requisito para outro conteúdo; pelas Matrizes não terem uma história bem divulgada; por não haver justificativas convincentes para as Matrizes serem um conteúdo a ser ensinado; etc..

Da busca bibliográfica de trabalhos que envolviam a Álgebra das Matrizes, verificamos uma carência da reconstituição histórica deste conteúdo. Possivelmente esta seja uma das conseqüências de não termos nos livros didáticos nenhum relato ou pequeno trecho que fale sobre elas, dentre outros motivos particulares de interesse das editoras ou mesmo do sistema de ensino como um todo, que pode não ver relevância em historiar o tema.

Além disso, a Álgebra Linear (que engloba os conteúdos de Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares, dentre outros) do ensino médio, “é provavelmente o mais anacrônico e mal concebido de todo o programa de Matemática do Ensino Médio” (LIMA, 2001, p.465). Segundo Lima (2001), após analisar livros didáticos do ensino médio num trabalho em conjunto com outros autores de livros, as Matrizes (em alguns livros) são apresentadas ao leitor como “vindos não se sabe de onde nem para que”, “como objetos caídos do céu” (LIMA, 2001, p.25, 63).

Ainda, para reforçar o desconhecimento do porque das Matrizes serem um conteúdo escolar, citemos o seguinte trecho tirado da Proposta Curricular para o ensino de matemática do 2º grau do ano de 1994:

> O que é fazer combinações lineares de equações de um sistema, senão aplicar, da maneira que mais nos convém, os princípios Aditivo e Multiplicativo da igualdade para resolvê-lo?
> Não há necessidade, portanto, de que o aluno passe por um curso de Matrizes para posteriormente resolver sistemas lineares. Por que uma aluno do 2º grau deveria, então, aprender Matrizes?
> Talvez porque ele vá precisar desse conhecimento em algum curso do 3º grau como por exemplo Matemática, Física, Computação, Engenharia. Ora, nesse caso, "matrizes" deveria ser trabalhado como tema específico desses cursos, mesmo porque a parcela de alunos do 2º grau que se dirige a esses cursos é muito pequena em relação ao número de estudantes desse grau de ensino. Além disso, aprender Matrizes no 3º grau, num curso específico, seria mais significativo para o aluno, uma vez que essa aprendizagem decorre da necessidade de resolver alguma situação, além de ser mais rápida. (São Paulo (Estado). Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 1994, p.20)

São pelos motivos explicitados nos parágrafos anteriores que escolhemos como tema da pesquisa as Matrizes. Na realidade, este conteúdo ainda é uma incógnita no ensino. Diante da complexidade em ter que justificar a inserção deste conteúdo no currículo escolar (e consequentemente, nos livros didáticos), além de reconstituí-lo historicamente (já que é pouco historiado nos livros), pensamos na possibilidade de fechar estas lacunas produzindo um material que servisse como referência histórica e que destacasse as transformações didáticas[3] ocorridas com este saber até que o mesmo se tornasse conteúdo escolar.

Este objetivo principal teve como ponto de partida uma inquietação maior: *por que afinal, as Matrizes se tornaram conteúdo escolar?* Sabemos que elas em algum momento, não faziam parte dele. Baseados nisso, traçamos objetivos mais específicos que delinearam nosso trabalho, tais como:

- Buscar trabalhos científicos que revelassem a produção científica da Teoria das Matrizes a fim de conhecer e reescrever a história deste tema;
- Investigar que influências ideológicas apareceram no contexto educacional brasileiro que determinaram às regulamentações dos currículos escolares até que estes inserissem as Matrizes na grade de ensino;
- Verificar que transformação textual sofreu o conteúdo das Matrizes desde sua produção científica até a sua inserção nos livros didáticos escolares.

Dessa forma, compomos o trabalho em cinco capítulos mais a conclusão, e os

---

[3] Por hora, chamaremos de *transformações didáticas* o que mais tarde denominaremos como sendo as *transposições didáticas*. São estas transposições que levam um saber do "patamar" *científico* para o do *saber a ensinar* e posteriormente, deste último, até o *saber ensinado ou escolar*, o que garante ao conteúdo um lugar no currículo escolar.

redigimos na tentativa de responder as inquietações desta pesquisa.

O primeiro capítulo, designado à fundamentação teórica, trata de esclarecer o conceito de *Transposição Didática*. Escolhemos este conceito por acreditar que é seguindo as conceitualizações nele envolvidas que um *saber*, cientificamente construído, tem sua trajetória explicada até ser considerado um saber escolar.

As "definições" expostas no decorrer deste capítulo nos auxiliaram a buscar resquícios do processo de transposição didática das Matrizes em livros didáticos, um adotado no ensino superior e outro no ensino básico.

Além disso, neste primeiro capítulo, apresentamos uma discussão entre treze trabalhos que trazem como parte de sua fundamentação teórica o conceito de transposição didática. Com essa discussão pretendemos enriquecer o entendimento do conceito de transposição didática, acentuar pontos de vista convergentes entre autores de dissertações e/ou teses e também especificar as divergências verificadas entre os textos.

Já no segundo capítulo dividimos a pesquisa histórica sobre as Matrizes demarcando dois períodos. O primeiro apresenta o que outras teorias deixaram como herança para que matemáticos do século XIX estudassem o que se denominaria mais tarde a Teoria das Matrizes. No segundo período, refizemos a trajetória da produção do saber Matrizes de 1850 a 1930.

O que tencionamos com o segundo capítulo é refazer a história das Matrizes, expondo com isso, a produção científica que resultou neste saber.

No terceiro capítulo, após investigar o período que provavelmente a transposição didática das Matrizes (ocorrida do saber científico para o saber a ser ensinado) teria acontecido, situamos o processo desta transposição no tempo do Movimento da Matemática Moderna. Explicamos as hipóteses que nos levaram a acreditar que o Movimento da Matemática Moderna foi um fio condutor que gerou vários processos de transposição didática, como o que ocorreu com as Matrizes, a Teoria dos Conjuntos, a Lógica, a Geometria Plana, etc..

Devido a isso, neste capítulo, fizemos uma explanação sobre o período pré-moderno e do período da Matemática Moderna, buscando entender que motivos levaram a Matemática Moderna ser introduzida no ensino brasileiro.

É sabido que dentre uma crescente inquietação do sistema de ensino com relação a uma melhora dos programas escolares, falta de preparação dos professores e metodologias didáticas mais inovadoras, e outras influências, tais como: preocupação de aumentar o número de pessoas qualificadas tecnologicamente (conseqüência da fase pós-guerra), qualificar pessoas para formarem outros profissionais, etc., surgiu o Movimento da Matemática Moderna.

Este Movimento, propagado no período que consideramos o ápice da revolução do ensino da matemática, foi também, como supomos, o período em que as Matrizes tornaram-se conteúdo escolar. Consequentemente, entendemos que a inclusão deste conteúdo, neste período, se devia a idéia de reorganizar a matemática com uma estrutura algébrica, que resultasse numa linguagem notacional com economia na escrita e para os cálculos de sistemas lineares.

Seguidamente, no capítulo 4, elaboramos uma análise noosférica[4] que se incumbiu de mostrar quais foram os personagens responsáveis pelo processo de transposição das Matrizes no período da Matemática Moderna.

Neste capítulo, por exemplo, ao investigar as ideologias dos personagens que participaram do Movimento da Matemática Moderna, compomos um entrelaçamento de vertentes que uniu: história das Matrizes quando estas "chegaram" ao ensino, história da educação matemática e suas dinâmicas educacionais com relação a modificações curriculares e elaborações de programas de ensino, e também fatos que marcaram a história de uma transposição das Matrizes, que saía da academia e estava a caminho das salas de aula.

O quinto e último capítulo refere-se à análise de livros didáticos, um deles sendo de ensino superior e outro de ensino básico. A finalidade deste capítulo foi a de identificar nestes livros elementos da transposição didática ocorrida com o saber Matrizes – de sua produção científica ao ensino superior, mas principalmente a transposição dos textos acadêmicos para o escolar, comparando assim, os elementos que aparecem em um, mas que não aparecem no outro. Essa comparação possibilitou determinarmos quais resquícios foram embutidos na textualização dos livros após o processo de transposição didática.

Este último capítulo recapitula algumas considerações dos anteriores, no sentido de inter-relacionar os elementos expostos nos outros capítulos com os que podem aparecer nos livros didáticos. O capítulo propõe analisar textos sobre as Matrizes modificados pela transposição didática, ou seja, conhecidas as influências do MMM e como as Matrizes "saíram" das comunidades científicas, olhar que transformações ela sofreu didaticamente e textualmente até a sua introdução na rede de ensino básico.

A estrutura dessa dissertação ficou assim estabelecida:

[4] Análise noosférica – nome que designará a análise que explicará a noosfera (elemento que faz parte do processo da transposição didática) envolvida num processo de transposição didática.

- Conhecer a fundamentação teórica da transposição didática e discutir as concepções de outros autores embasados pelas que concebemos após os estudos deste conceito;
- Refazer o percurso histórico das Matrizes, apontando os saberes que auxiliaram na construção desse conteúdo;
- Expor a Matemática Moderna como agente no processo de transposição didática, fase em que as manifestações em relação ao ensino da matemática se expressaram amplamente, transformando conteúdos e/ou incorporando outros, às grades curriculares do ensino secundário;
- Analisar livros didáticos, um do ensino superior e outro do ensino básico, ambos do período do Movimento da Matemática Moderna, tentando, por uma análise de conteúdo, identificar os aspectos elementares do processo de transposição didática impostos na textualização destes livros.

Para compreender o processo da transposição didática, nos baseamos basicamente no livro de Yves Chevallard *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, de 2005, e para verificarmos quais são as interpretações apresentadas em trabalhos acadêmicos (teses e dissertações) acerca do conceito de transposição didática, fizemos uma pesquisa pelo sistema da CAPES para elencar quais foram os trabalhos que se reportaram ao estudo da transposição didática.

Ainda, na tentativa de absorver todos os trabalhos que poderiam citar a transposição didática como fundamentação teórica, observamos entre os trabalhos mais recentes quais foram suas fontes bibliográficas sobre tal assunto, caminhando assim para a investigação de pesquisas pioneiras que tratassem da transposição didática.

A rede de trabalhos encontrados nos permitiu observar as convergências e as divergências existentes a partir das interpretações feitas por diferentes autores sobre um mesmo conceito.

Esse tipo de estudo documental ou bibliográfico, segundo Fiorentini & Lorenzato (2006, p.102-103), é chamado de *metanálise*.

> A metanálise é uma <u>revisão sistemática de outras pesquisas</u>, visando realizar uma <u>avaliação crítica</u> das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos. (FIORENTINI & LORENZATO, 2006, p.103 – grifo nosso)

Para refazer a historicidade do conteúdo das Matrizes até o período em que ela se solidifica como estrutura algébrica (década de 30), buscamos trabalhos acadêmicos nas universidades mais antigas do país: USP, UNICAMP, UNESP, UEM, UEL, UFRS, PUC, UFSC, UFBA, UNB. Navegamos pela internet para encontrar artigos, obras, ou trabalhos acadêmicos, nacionais ou estrangeiros, que falassem de Matrizes. Dessa pesquisa bibliográfica, encontramos o artigo *"Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930)"*, de Frédéric Brechenmacher[5] (2006), que traz no corpo do texto recortes das obras originais de Cayley e Sylvester, considerados os "pais" da Teoria das Matrizes.

Além do artigo de Brechenmacher (2006), contamos com os trabalhos de Carl Benjamin Boyer (1999), Howard Eves (2004), John J. O'Connor e Edmund F. Robertson (1996), Simone Luccas (2004) e Nicholas J. Higham (2008).

Estudar a História das Matrizes, por si só, neste trabalho, consistiu em apresentar a síntese final do saber científico em questão. Contudo, o estudo histórico numa segunda etapa da pesquisa, também nos serviu como processo metodológico, pois investigar documentos supondo períodos determinados, contatando pesquisadores, bibliotecários, para constituir um banco de dados historiográfico é um procedimento metodológico historiográfico.

Ainda, em relação à investigação histórica, esse procedimento adotado foi determinante para a revisão bibliográfica e escolha de quais fontes priorizar, constituindo, posteriormente, o *corpus* analisado nos capítulos 3, 4 e 5, sobre a Matemática Moderna, a Análise Noosférica e Análise de Livros didáticos, respectivamente.

Por meio de várias leituras de artigos de jornais, teses e dissertações do período da introdução da Matemática Moderna, concluímos que os livros didáticos dessa época, assim como atas de congressos sobre o ensino de matemática, depoimentos relatados em jornais, etc., seriam os mais propícios a nossa pesquisa, pois nos mostrariam as marcas da introdução de novos conteúdos ao ensino da matemática no período "Moderno" e também, possivelmente, evidenciaria a ideologia intrínseca ao Movimento que impulsionava aos líderes defender a tal Matemática Moderna.

Com a demarcação do período em que analisaríamos a transposição didática das

---

[5] Frédéric Brechenmacher é professor da *Ecole Supérieure des Art Appliqués*. Paris. PhD em História das Ciências pelo *Centre Alexandre Koyré de recherches em histoire des sciences et des techniques.* Pesquisa sobre: história das ciências e matemática; aspectos culturais das práticas algébricas usadas nas várias disciplinas, dos séculos XIX e XX. O trabalho de Brechenmacher, estudado nesta pesquisa faz parte de sua tese de doutorado "Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)" e encontra-se no site da Escola Normal Superior e do Ministério Nacional de Educação – dez. 2006 (*Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale* (December 2006) - http://www.dma.ens.fr/culturemath/. 65 pages).

Matrizes e estabelecida as fontes que poderiam contribuir a nossa pesquisa, fechamos este trabalho como exemplo de investigação bibliográfica intensa e que aponta outras tantas como ótimas leituras.

CAPÍTULO 1

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E SEU OBJETO DE ESTUDO: O SABER

> [...] preparar un lección es sin duda
> trabajar con la transposición didáctica
> (o más bien, en la transposición didáctica) ;
> jamás es hacer la transposición didáctica.
> Cuando el enseñante interviene
> para escribir esta variante local del texto del saber que
> el llama su curso, o para preparar su curso
> (es decir, para realizar el texto del saber
> en el desfiladero de su propia palabra),
> ya hace tiempo que la transposición didáctica
> ha comenzado...
> (CHEVALLARD, 2005, p.20).

O objetivo deste capítulo é explicar o trabalho da Transposição Didática assinalando os elementos envolvidos neste processo e, na medida do possível, os exemplificando considerando as Matrizes como saber de referência, além de outros saberes matemáticos.

Para tanto, supomos que seja necessária uma breve comparação entre *saber* e *conhecimento*, já que o entendimento do conceito da transposição didática evidenciado nesta pesquisa é baseado na concepção dos tipos de saberes e não dos tipos de conhecimentos. Isto quer dizer que *saber* e *conhecimento* não serão tidos como sinônimos para esta pesquisa[6].

Por conseguinte, é necessário esclarecer a diferenciação entre *saber científico* e *saber escolar.*

---

[6] Neste trabalho utilizamos os termos *saber* e *conhecimento* com os significados oriundos da Didática Francesa. Em outras áreas, como por exemplo, a Filosofia, os significados não são compatíveis com os aqui apresentados.

Posteriormente à explanação das conceitualizações dos saberes é apresentada a seção que trata do conceito[7] da transposição didática, sendo sequencialmente dividida em duas partes:

- A primeira parte apresenta conceitos que explicam *como ocorre* o processo de transposição didática principiado por Yves Chevallard.
- A segunda identifica os elementos que compõem a *textualização do saber*, processo importante pelo qual a transposição didática se mostra mais evidente.

A última seção, 1.3, discute sobre algumas concepções de autores que também trabalharam com o conceito de transposição didática. Acredita-se que desta forma o conceito de transposição didática será complementado, tendendo a consolidação de uma teoria.

[7] Conceito – o sentido de conceito que designaremos a este trabalho é aquele em que "supera" a definição e abarca mais explicações com o intuito de que o leitor compreenda um termo de maneira mais abrangente, ou seja, o conceito não seria uma definição acabada e somente isso, mas a construção de uma idéia em constante avaliação, permitindo novas aplicações. Também, nas palavras de Pais: "o conceito é algo em permanente processo de devir, estamos sempre nos aproximando de sua objetividade, generalidade e universalidade, sem considerá-lo uma entidade acabada, tal como concebido por uma visão platônica"; [...] "Definir é necessário, mas é muito menos que conceituar, porque o texto formal de uma definição só pode apresentar alguns traços exteriores ao conceito" (PAIS, 2005, p.55-56). Dessa forma, apresentamos a definição de transposição didática e ainda complementos explicativos da mesma, buscando com isso, formar um conceito. Porém, a transposição didática neste trabalho também pode representar uma proto-teoria, no sentido de que explica um fenômeno que se realiza nas práticas do sistema de ensino, embora não seja possível afirmar ainda se ela pode ser aplicada a todos os saberes escolares.

1.1 SABER E CONHECIMENTO

O homem, juntamente com o progresso da humanidade, como o ocorrido na Revolução Industrial e períodos de descobertas científicas, sentiu a fragilidade dos saberes fundamentarem-se na intuição, no senso comum ou na tradição. Devido a isso, o homem se viu na situação de dispor os seus saberes com embasamentos metodicamente elaborados que, consequentemente, os tornariam fontes confiáveis.

Segundo Laville e Dionne (1999, p.22) a trajetória para que os saberes se tornassem fontes racionais confiáveis foi longa. Somente há um século é que o saber dado pela forma científica ("descrevendo o mundo que o rodeia") se estabeleceu no Ocidente.

No século XVII, por exemplo, os cientistas se viam obrigados a fazer observações empíricas do real antes de interpretá-lo pela mente, recorrendo à matemática para traduzir suas observações e explicações. Desde então, pensava-se num saber como algo racionalizável cada vez mais.

> [...] constrói-se a partir da observação da realidade (*empirismo*) e coloca essa explicação à prova (*experimentação*). O raciocínio indutivo conjuga-se então com o raciocínio dedutivo, unidos por esta articulação que é a hipótese: é o *raciocínio hipotético-dedutivo*. Este, cada vez mais associado às ciências matemáticas, para apreender a dimensão dos fenômenos, é também auxiliado pela construção de novos instrumentos de medida (tempo, distância, calor, peso, etc.). (LAVILLE & DIONNE, 1999, p.23, grifos dos autores).

O que Laville e Dionne (1999, p.23) destacam é que, a partir dos instrumentos de medição e da linguagem lógico-formal, o método científico surgiu, pois a especulação[8] não se baseando somente ao exercício do pensamento, mas também à observação, experimentação e mensuração, uniu-se ao empirismo[9] e deu origem ao método científico.

Isto quer dizer que a forma de descrever o raciocínio foi estabelecida – a hipotético-dedutiva – e o método científico encontrou parâmetros e sequências metódicas para efetivá-lo. Então, os saberes mostraram-se como teorização das práticas científicas.

---

[8] Especulação – criação do saber apenas pelo exercício do pensamento, geralmente sem qualquer outro objetivo que o próprio conhecimento. (LAVILLE & DIONNE, 1999, p.23).
[9] Empirismo – conhecimento pelos sentidos, pela experiência sensível. (LAVILLE & DIONNE, 1999, p.23).

> Mas é no século XIX que a ciência triunfa. No domínio das ciências da natureza, o ritmo e o número das descobertas abundam. Mas, saem dos laboratórios para ter aplicações práticas: a ciência e tecnologia encontram-se. A *pesquisa fundamental*, cujo objetivo é conhecer pelo próprio conhecimento, é acompanhada pela *pesquisa aplicada*, a qual visa a resolver problemas concretos. (LAVILLE & DIONNE, 1999, p.25, grifos dos autores).

"Nasceram" os saberes, ditos científicos, declararam-se em textos produzidos cientificamente. Desse trabalho da ciência, podemos supor que os saberes foram constituídos e consolidados por meio de produções científicas, imbuídos da objetividade científica, da busca pela exposição precisa dos fenômenos.

É evidente que existem os saberes do cotidiano, mas estes são aceitos pelas suas atribuições pragmáticas e embora façam parte da cultura, apresentam finalidades diferentes daquelas dos saberes ditos científicos. Os saberes científicos são validados por uma cadeia de deduções e os do cotidiano são validados por crenças que se confirmam pela ausência de outros que os contradigam[10] (GÓMEZ-GRANELL, 1998).

Em contrapartida, ao *conhecimento*, fica designado o papel subjetivo da pesquisa científica, algo mais intuitivo. É uma relação entre pesquisador e objeto, ou seja, uma análise e conclusão pessoal que tem o pesquisador sobre o objeto.

Deste modo, enquanto em todo processo de construção de um *conhecimento* há a subjetividade e um olhar individual do sujeito sob o objeto, construindo este conhecimento, a construção do *saber* se dá de forma diferenciada e, em geral, envolve critérios mais objetivos, científicos, histórico e cultural, submetendo-se à aprovação de uma comunidade para reconhecê-lo como tal (PAIS, 2008, p.13).

[10] No texto de Carmen Gómez-Granell – *Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática* – as concepções da autora se identificam com a descrição de *saber* que escrevemos neste trabalho. Porém, no texto desta autora, ela dá o nome de *conhecimento* ao que aqui denominamos *saber*. O caso é que a autora não faz distinções entre o conhecimento particular e o conhecimento científico como o fazemos aqui e, para tanto, fica subentendido então neste trabalho que o *saber* é algo validado por uma comunidade, enquanto o *conhecimento* é adquirido de modo particular por cada indivíduo.

1.1.1 SABER CIENTÍFICO E SABER ESCOLAR

Para iniciar o item *1.1.1* é interessante pensar na seguinte indagação de Chevallard:

> Existe transposição didática? O objeto de ensino é *verdadeiramente* diferente do objeto de saber ao qual ele corresponde?[11] (CHEVALLARD, 2005, p.47 – grifo do autor – tradução nossa).

Esta pergunta de Chevallard é fundamental para introduzir esta seção e o objetivo em 1.1.1 será respondê-la segundo o entendimento de algumas vertentes.

Adotada a distinção entre saber e conhecimento presume-se que a opção por tratar de saberes, e não de conhecimentos, seja a mais adequada ao conceito da transposição didática, por entender o saber como sendo mais objetivo e como resultado avalizado. Entretanto, estes saberes podem se remodelar, por vezes continuam sendo saber *científico* e outras vezes o saber "vai para a escola", torna-se *escolar*.

É importante deixar claro que o conteúdo que se ensina na escola é tido como um saber, e não um conhecimento, pois o conteúdo que se é ensinado não surge aleatório e subjetivamente, sem parâmetros, do pensamento de um único indivíduo. O que se ensina na escola é um conteúdo consolidado, aceito como verdade por uma comunidade educacional, com a linguagem educacional, e é posteriormente outorgado como saber escolar.

Além disso, a escola é uma instituição social que existe para preservar e transmitir "saberes". Esse é um dos seus objetivos, preservar e transmitir para os mais jovens aquilo que foi avalizado pela própria sociedade (incluindo nesta sociedade os cientistas, obviamente). Portanto, o conteúdo escolar é saber avalizado por duas instâncias: a sociedade e a comunidade educacional.

Valente (2003), no texto *"Saber científico, saber escolar e suas relações: elementos sobre a reflexão sobre a didática"*, aponta as vertentes que discutem sobre as relações dos saberes científicos e escolares. Segundo ele

> Um olhar retrospectivo nos mostra que as discussões pedagógicas dos anos 1980 parecem não evidenciar a problemática das relações entre saberes científicos e

[11] ¿Existe la transposición didáctica? ¿El objeto de enseñanza es *verdaderamente* diferente del objeto de saber al que le responde? (CHEVALLARD, 2005, p.47).

> escolares. Em meio à luta para a construção de uma *pedagogia crítica*, os textos, em sua quase totalidade, contentam-se em cunhar os saberes escolares genericamente como "conjunto dos elementos essenciais do conhecimento humano", "saber historicamente elaborado pela humanidade", "saberes universais", etc. (VALENTE, 2003, grifo do autor).

De acordo com este autor somente na década de noventa, no Brasil, estas relações entre os saberes são consideradas como uma das problemáticas do sistema de ensino e se tornam, por conta disso, objeto de estudo de pesquisas na educação.

Dentre as vertentes que iniciaram as discussões no Brasil sobre os "tipos" de saberes – *Nova História das Ciências* (NHC)[12]; *As Histórias das Disciplinas Escolares; Didática das Disciplinas* – a presente pesquisa delimitou-se a tratar da Didática das Disciplinas, na qual se enquadra o trabalho da Transposição Didática. Esta escolha se deve ao fato de entender o trabalho da transposição didática como algo que contempla as problemáticas que transformam o saber, pelos olhos de um "observador" (Yves Chevallard) que vê o ensino de "fora para dentro", ou seja, sem a "contaminação" do contexto educacional ou do modelo disciplinar.

A bem da verdade, o objetivo da transposição didática é o de propiciar o contínuo processo de atualizações dos saberes escolares (conteúdos escolares) advindas dos saberes científicos (produto das comunidades científicas).

Na concepção da didática das disciplinas os saberes escolares, assim como outras formas de saberes, envelhecem com relação ao modelo social em que estão inseridos, o que os obriga a se apresentar com uma nova "roupagem". Esta nova "roupagem" é buscada em elementos inerentes aos saberes científicos e, portanto, herda as alterações dos saberes científicos quando estes se modificam ao viver uma crise paradigmática.

Vale lembrar que as transposições realizadas com os saberes escolares da matemática, não distorcem as definições, teoremas e/ou a essência dos saberes – resultados oriundos das práticas científicas – só porque foram contextualizados para a educação básica. As transposições didáticas na matemática, diferentemente do que pode acontecer com outras ciências, apenas reformulam o texto do saber escolar com elementos da prática da transposição.

É dessa idéia de renovação dos saberes que Chevallard propõe o processo de transposição didática. Segundo ele, o Movimento da Matemática Moderna – objeto que Chevallard toma como base de seus estudos sobre transposições – se manifestava como rico objeto de estudo para problematizar tal processo, isto porque este Movimento pressupunha

---

[12] Os três tipos de vertentes foram identificadas pelo texto de Valente (2003).

mudanças quanto aos textos matemáticos e a forma de abordá-los com os estudantes. Consequentemente, no período do Movimento, alterações textuais ocorreram com os saberes, criações de novas abordagens para com os saberes surgiram e a inserção de outros saberes no ensino fez com que a matemática se atualizasse com relação às exigências modernas da época.

A forma de entender os saberes escolares a partir da análise da origem de conceitos que em algum momento fizeram parte do saber científico e que posteriormente sofreram um processo de transposição é o "objeto de estudo" da transposição didática. Logo, "dentro da perspectiva da didática das disciplinas, o significado dos conteúdos escolares deverá ser buscado na *história das transposições* efetuadas para constituí-lo" (VALENTE, 2003 – grifo nosso).

Chevallard explica que

> O saber produzido pela transposição didática será, portanto, um saber exilado de suas origens e separado de sua produção histórica na esfera do saber científico, legitimando-se, no entanto, em saber ensinado, como algo que não é de nenhum tempo nem de nenhum lugar, e não se legitima mediante o recurso da autoridade de um produtor, qualquer que seja ele. [...] O saber ensinado supõe um processo de naturalização, que lhe confere a evidência incontestável de coisas naturais; sobre esta natureza "dada", a escola espera agora sua jurisdição, fundadora de valores que, mais adiante, administra a ordem didática. (CHEVALLARD, 2005, p.18 – tradução nossa)[13].

Da explicação de Chevallard pode-se inferir que, uma vez transformado, o saber escolar desvincula-se do saber científico por conseqüência do processo de transposição didática realizado, torna-se atemporal, sem autor e sem local de origem; parece ser a coisa mais natural que existe e espera da escola o que fazer com ele. Por isso é importante a reconstituição histórica das transposições, para saber que caminho percorreu o saber até chegar à escola.

Por outro lado, na ótica da História das Disciplinas Escolares, os saberes escolares (conteúdos escolares) perfazem sua trajetória histórica não buscando seus significados na história das transposições, mas buscando na história das disciplinas escolares.

Esta visão defendida por Chervel (1990) faz entender que os saberes ensinados na escola para alcançarem seu *status* de saberes escolares, necessitam submeter-se ao crivo do

[13] El saber que produce la transposición didáctica será por lo tanto un saber exiliado de sus Orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar, y no legitimándose mediante el recurso a la autoridad de un productor, cualquiera que fuere. [...] O saber enseñado supone un proceso de naturalización, que le confiere la evidencia incontestable de las cosas naturales; sobre esta naturaleza "dada", la escuela espera ahora su jurisdicción, fundadora de valores que, en adelante, administran el orden didáctico. (CHEVALLARD, 2005, p.18).

modelo disciplinar, o qual se apresenta por uma "combinação, em proporções variáveis, de um ensino de exposição, de exercícios, de práticas de incitação e de motivação e de um aparato de testes, provas e exames que lhe dão legitimidade e conformação" (CHERVEL, 1990, p.207 *apud* VALENTE, 2003).

Portanto, segundo Chervel, o saber científico dá margem para que se crie a partir dele o saber escolar. Porém, no entendimento da presente pesquisa, o modelo de Chervel torna a história do saber científico como projétil engessado, estanque, que não mais contribui com o saber escolar quando este se produz na ambiência educativa, pois, consolidados os saberes pelo modelo disciplinar, a história destes saberes não mais incutirá transformações aos saberes.

Do ponto de vista da Nova História das Ciências, entende-se aqui, a "grosso modo", que o saber científico e escolar é um só saber, não havendo distinção entre naturezas constitutivas, o saber "nasce" de certo processo e vai se re-elaborando. Neste modelo, os saberes se diferenciam apenas pelas denominações que receberam – saber *científico* e saber *escolar* – dependendo do público que quer atingir.

> [...] o texto científico é um objeto construído segundo regras variáveis no tempo e no espaço social, um objeto que seria ingênuo considerar transparente em si mesmo, como se relatasse fatos brutos. Aqui como nos outros domínios, o estudo das 'traduções' sucessivas que os saberes conhecem – desde as cadernetas de laboratório, a correspondência, os croquis, os rascunhos de artigos até as versões publicadas, os tratados, manuais de cursos, apresentações para não especialistas e conferências para o grande público –, desde há muito destacou que o status de evidência e de lógica dos resultados se modifica a cada contexto. Cada reescritura tem funções múltiplas – heurística, demonstrativa, didática, reflexiva, filosófica –, cujo peso relativo varia segundo os locais e os públicos aos quais se dirige. (PESTRE, 1996, p. 37 *apud* VALENTE, 2005, p.22, 23).

Segundo Valente (2003, 2005) a posição da NHC é a de considerar o ensino como uma das modalidades da produção científica, considerando o saber escolar parte deste processo, ou seja,

> [...] análise dessa modalidade de reprodução *(o autor refere-se a reprodução do meio escolar)* revela não somente o caráter importante da transmissão do saber, mas também o papel que o ensino tem na própria constituição dois saberes científicos. (VALENTE, 2003, 2005 – inclusão do grifo).

Apesar desta pesquisa não tomar como linha de pensamento as idéias das duas vertentes apresentadas anteriormente, o que se propôs em 1.1.1 foi mostrar resumidamente as conceitualizações existentes para os saberes científicos e escolares, defendidas pelas vertentes conhecidas no Brasil. Espera-se assim que se entenda como acontece a prática da transposição didática e sua diferença entre outras práticas, e que neste entremeio o *objeto de ensino* (na transposição didática) se faz diferente do *objeto de saber* por meio da linguagem utilizada, e não em relação à essência do conteúdo que se quer transmitir.

1.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Yves Chevallard, precursor dos estudos sobre a transposição didática, iniciou suas pesquisas com relação às transposições criticando com respaldo os aspectos positivos e negativos das produções textuais do sistema de ensino, avaliando e explicando o percurso de transposição de um nível[14] de saber para outro, destacando além de tudo, as intervenções de diferentes grupos sociais neste processo.

Este conceito, introduzido pelo sociólogo Michel Verret, em 1975, foi aprofundado e apresentado pelo educador e pesquisador francês Chevallard, na década de oitenta. Da repercussão deste conceito, novos adeptos se propuseram a discuti-lo, como: Luiz Carlos Pais (1999, 2008), Philippe Perrenoud (1993), Conne (1996, in: Brun, J., (org.)), entre outros.

Um dos trabalhos de Chevallard mais citado recentemente é o livro *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné* (1998). Justamente esta obra, traduzida para o espanhol (*La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, 2005), serviu de suporte teórico para esta pesquisa.

Chevallard entende que a Didática da Matemática, como ciência, necessita de objetos de estudo e para ele, a Transposição Didática é um desses objetos. Este objeto, por sua vez, versa sobre o *saber*, já que o mesmo deve passar pelo crivo da didática. Por isso foi conveniente deixar clara a diferente natureza de construção do conhecimento e construção do saber, pois a transposição didática trata apenas deste segundo, o *saber*.

A "definição" mais freqüentemente utilizada pelos estudiosos a cerca do conceito da transposição didática é a que foi prescrita por Chevallard:

> Um conteúdo do saber que tenha sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. Este "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado de *transposição didática.* (CHEVALLARD, 2005, p. 45 – grifos do autor – tradução nossa)[15].

[14] Nível – o uso desta palavra não quer distinguir níveis com graus de importância diferentes; ela será usada como sinônimo de patamar.

[15] Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica*. (CHEVALLARD, 2005, p. 45).

Vale lembrar que para Chevallard, o processo de transposição de um saber científico a um saber escolar propicia ao estudo epistemológico de um dado saber e também à análise didática do mesmo. Como ele ressalta:

> [...] a análise da transposição didática, sem que se confunda pela análise epistemológica, se faz evidente porque é a transposição didática que permite a articulação da análise epistemológica com a análise didática, e se converte num longo guia de uso da epistemologia para a didática. (CHEVALLARD, 2005, p.23 – tradução nossa)[16].

Do *saber sábio*, ou *científico*, ao *saber ensinado* ou *escolar*, a transposição didática trata de alguns termos bem definidos, a saber, os mais importantes seriam:

- a noosfera;
- as criações didáticas;
- a vigilância epistemológica;
- a ruptura epistemológica;
- as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas;
- a desincretização do saber;
- a despersonalização do saber;
- a programabilidade da aquisição do saber;
- a publicidade do saber;
- o controle social das aprendizagens;
- o envelhecimento biológico e moral do saber;
- a relação antigo/novo de um texto do saber;
- a cronogênese e a topogênese;
- os regimes didáticos ou regimes epistemológicos;
- a obsolescência externa e interna.

Elencados os elementos subjacentes ao processo da transposição didática e feita esta breve explanação sobre este processo, a presente pesquisa irá se basear sob o conceito de transposição didática como sendo uma ferramenta teórica que explica as transformações textuais e contextuais de um *saber científico* ao *saber ensinado*. Mais especificamente,

---

[16] [...] cuando se le asigna al saber sabio su justo lugar en el proceso de transposición y, sin que el análisis de la transposición didáctica sustituya indebidamente al análisis epistemológico *stricto sensu*, se hace evidente que es precisamente el concepto de transposición didáctica lo que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, y se convierte entonces en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica. (CHEVALLARD, 2005, p.23).

verificará este processo em relação ao saber Matrizes.

A análise dos materiais de ensino feita subsequente estará diretamente veiculada pelo conceito da transposição didática e é parte indispensável desta pesquisa esclarecer os elementos apresentados anteriormente, que serão indicativos para uma análise de conteúdo. Estes elementos, ou termos, da transposição didática estão baseados nos capítulos da obra *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*.

1.2.1 ELEMENTOS DO PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA – PARTE 1

Como foi dito na introdução deste capítulo, o processo da transposição didática se dividirá em duas partes.

Nesta primeira serão apresentados os conceitos de noosfera, vigilância epistemológica, ruptura epistemológica, controle social das aprendizagens, cronogênese e topogênese, regimes didáticos ou regimes epistemológicos, e obsolescência externa e interna e requerem uma atenção diferenciada da dispensada aos elementos que compõem o texto do saber.

Estes termos se agrupam, sob o ponto de vista desta pesquisa, a um rol de conceitos que servem para uma ação mais reflexiva do professor, que propiciam ao docente analisar sua prática de ensino. São conceitos implícitos no processo da transposição didática, que não se mostram na textualização do saber, e por isso não serão analiticamente estudados em textos didáticos como os outros elementos: criações didáticas; noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas; desincretização; despersonalização; programabilidade; publicidade; envelhecimento biológico e moral; relação antigo/novo.

A noosfera

Segundo Pais (2008, p.16),

> O conjunto das fontes de influências que atuam na seleção dos conteúdos que deverão compor os programas escolares e determinam todo o funcionamento do processo didático recebeu, de Chevallard, o nome de noosfera, da qual fazem parte cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes de educação. O resultado do trabalho seletivo da noosfera resume-se não só à determinação dos conteúdos, como também influência a estruturação dos valores, dos objetivos e dos métodos que conduzem a prática de ensino. (PAIS, 2008, p.16).

Alguns autores como Valente (2003, 2005) e Develay & Astolfi (1995) concordam que da noosfera participam os agentes da educação que determinam os conteúdos dos programas escolares – os didatas – parecem entender que aí não estão inseridos os professores e nem os cientistas. A citar como exemplo, no texto de Valente, *A matemática escolar: epistemologia e história* (2005, p.21), lê-se que a noosfera “promove um trabalho distante da sala de aula, à parte do trabalho do professor”.

Será então por isso que no período da Matemática Moderna, por exemplo, a literatura inserida por ela no ensino, deixou-nos uma herança sobrecarregada de conteúdos matemáticos que nem os próprios professores tinham conhecimentos para desenvolvê-los?

A compreensão sobre a noosfera evidenciada nesta pesquisa se mostra contrária a dos estudiosos elencados anteriormente, pois defende que a exclusão de professores e cientistas, do âmbito da noosfera, não é uma regra e nem benéfico. Podem participar dela professores comprometidos com as exigências da educação, quando se reúnem a instituições responsáveis pelos programas de ensino, como também, cientistas que se preocupam de que maneira os saberes estão sendo abordados ou transmitidos, contribuindo junto à divulgação destes saberes para uma melhor educação. Uma observação se faz necessária: tanto os professores como cientistas ao atuarem num processo de transposição didática devem impreterivelmente conhecer todos os elementos do mesmo. Dessa forma, talvez muitos dos conteúdos tivessem mais sentido para os alunos de hoje.

Segundo Chevallard, à noosfera cabe a função de fazer a seleção dos conteúdos, estabelecendo a dialética entre o sistema de ensino e o ambiente que a rodeia e neste caso, mais uma vez, os professores que atuam nas salas de aula podem dar sua contribuição sobre a seleção de conteúdos quando num encontro regional, por exemplo.

É no âmbito da noosfera que a transposição didática traduzirá de fato, a resposta do desequilíbrio entre os saberes, criados e comprovados pelos matemáticos, pais e professores. Neste ambiente (a noosfera), se produz e se resolve, todo conflito do sistema escolar, diminuindo ou eliminando os problemas que chegariam aos professores. Porém, vale lembrar que a noosfera apesar de ter o seu lugar privilegiado de expressões, deve manter, dentro dos limites aceitáveis, a autonomia do funcionamento didático[17] realizado na escola (CHEVALLARD, 2005).

[17] Funcionamento didático: é a atividade didática, ou seja, o estudo, realizado na sala de aula unindo professor e aluno. Embora enfatizemos este funcionamento didático como uma ação que ocorre dentro da escola, ela pode acontecer fora dela quando o estudo sobre um conteúdo é realizado por um aluno ou professor, de forma individual.

A vigilância e a ruptura epistemológica

Chevallard, quando propôs explicar o processo de transposição didática, certamente pensou em fazer deste processo um objeto de estudo também dos professores em sala de aula.

Esta afirmativa se confirma quando Chevallard alega que a existência da transposição didática está atrelada ao princípio da *vigilância epistemológica.* Vigilância esta que, tanto o didata como o professor, podem, no decorrer de sua profissão, fazer acontecer. Mas do que se trata esta vigilância?

Quando o didata pergunta: *o que é este objeto de ensino que o professor rotula em sua aula?* – seja qual for o objeto; *que relação o objeto de ensino tem com o objeto matemático a que implicitamente ele se refere?;* ele está sendo vigilante e vigilante epistemologicamente por indagar sobre a natureza do objeto, como se concebe este objeto no ensino e qual a relação entre a construção deste objeto e sua abordagem didática.

Chevallard garante que desta forma o didata ou o professor verão

> [...] a identidade do fim (o objeto designado como ensinável[18]) e dos meios (o objeto de ensino, tal como foi moldado pela transposição didática) e proporá a questão da *adequação*: Será que houve por acaso uma conversão do objeto? Neste caso, qual? (CHEVALLARD, 2005, p.49 – grifo do autor – tradução nossa)[19].

Veja que estar em estado de vigilância não é uma tarefa fácil, pois será requisitado do professor um "conhecer" mais aprofundado dos conteúdos/objetos de ensino, ter ao menos idéia da construção dos saberes dos quais irá tratar. É por isso que Chevallard diz:

> O exercício do princípio de vigilância na transposição didática é uma das condições que determinam a possibilidade de uma *análise científica* do sistema didático. (CHEVALLARD, 2005, p.51 – grifo do autor – tradução nossa)[20].

No caso das Matrizes, por exemplo, que há dificuldade de encontrar textos relatando sua história, o estado de vigilância ficaria defasado, pois a relação do objeto de ensino com o

[18] Ensinável – este termo será usado por não haver outro mais adequado à tradução do trecho citado.

[19] [...] el enseñante ve la identidad del fin (el objeto designado como enseñable) y de los medios (el objeto de la enseñanza, tal como lo ha moldeado l transposición didáctica), el didacta plantea la cuestión de la *adecuación*: ¿no hay acaso conversión de objeto? Y en ese caso, ¿cuál? (CHEVALLARD, 2005, p.49).

[20] El ejercicio del principio de vigilancia en la transposición didáctica es una de las condiciones que determinan la posibilidad de un *análisis científico* del sistema didáctico. (CHEVALLARD, 2005, p.51).

objeto de saber não se realizaria perfeitamente. Este trabalho é um exemplo da ruptura epistemológica já que levanta questões do tipo: *O conteúdo sofreu modificações para se tornar saber a ser ensinado? Que tipo de modificações sofreu? Tem aplicação direta para os alunos e por isso se tornou saber escolar?* A resposta a estas perguntas surgem de um momento de vigilância epistemológica, no qual se busca conhecer a trajetória de um saber, pelo que ele passou até se tornar o saber aprendido e ensinado de hoje.

Caso o professor tenha dúvida em relação ao objeto de ensino, se houve conversão ou não do objeto de saber para o objeto de ensino, então é porque está havendo sinal de *ruptura epistemológica*. Segundo Chevallard, a ruptura é a atitude de não enxergar mais os objetos de ensino de forma transparente, é colocá-lo à prova. Isso acontece quando o professor começa fazer interpelações sobre a natureza epistemológica dos objetos de ensino. Para Chevallard o saber escolar não está na escola simplesmente por estar, algo o trouxe até ali e de que forma chegou é o início da dúvida.

É importante ressaltar que é nesta ocasião que o professor pode iniciar uma análise da transposição didática ocorrida com tal objeto de ensino. Mas para isso ele precisará enxergar que o trabalho da transposição didática é o de intervir na epistemologia do conhecimento – o que possibilita a passagem do saber científico ao saber ensinado. Para muitos a transposição didática é um mal necessário e embora ela esteja acontecendo para facilitar a trajetória do saber, a análise desta transposição é incômoda e complexa, difícil de obter adeptos.

O controle social das aprendizagens

O *controle social da aprendizagem do saber* é ligado tenazmente à textualização, mas não necessariamente evidenciado na textualização. Ele torna possível ao professor o controle quantitativo da aprendizagem do saber apresentado ao aluno. A avaliação permitida pela textualização e conseqüente linearidade e temporalidade é um controle social outorgado ao professor.

Por exemplo, quando o professor separa do conteúdo o que considera mais importante e põe à prova esta seleção, é uma indicação de que o controle exercido por ele predomina em relação aos interesses dos alunos. A seleção que faz do conteúdo é possível desde que a textualização seja linearizada e compreenda uma duração didática[21] praticável. Este controle sob o conteúdo, o que ele considera como sendo mais importante para os alunos, é um exemplo de controle social da aprendizagem.

A cronogênese e a topogênese

A cronogênese e a topogênese referem-se a elementos que marcam os diferentes lugares ocupados pelo professor e aluno no sistema de ensino.

A cronogênese, no caso, seria a distinção entre professor e aluno quanto ao tempo didático[22] burocrático[23]. Isso quer dizer que o professor seria o programador temporal do saber, somente no sentido de demarcar o tempo de ensino – "acelerando" ou "retendo" um conteúdo, visto que de resto, o professor não tem o poder de que todo saber por ele ensinado seja aprendido no exato momento que acontece a abordagem do conteúdo; ao aluno, supondo não ser ele o "detentor" do saber, caberia apenas a tarefa de responder se o conteúdo foi assimilado/aprendido ou não, usando para isso algum meio de verificação de aprendizagem. Como o próprio Chevallard (2005, p.82) descreve

> [...] o professor se distingue igualmente do aluno enquanto ao eixo temporal da relação didática, *porque é capaz de antecipar:* o aluno pode dominar perfeitamente o passado – admitamos, ao menos por um instante – *mas só o professor pode dominar o futuro*. [...] o professor não só se constitui num "suposto saber" senão também num "*suposto antecipar*". (CHEVALLARD, 2005, p.82 – grifos do autor – tradução nossa)[24].

Neste caso a cronogênese coloca os papéis de professor e aluno em **patamares**[25]

---

[21] Duração didática – uma organização (período) prevista pelo professor para se trabalhar em sala de aula com algum saber.

[22] Tempo didático – tempo em que acontecem as ações de ensinar e aprender, mais especificamente, seria o momento em que o estudo acarreta numa aprendizagem.

[23] Tempo didático burocrático – termo designado ao tempo estabelecido pelas normas da escola para que se cumpra o cronograma de ensino.

[24] [...] el maestro se distingue igualmente Del alumno en cuanto al eje temporal de la relación didáctica, *porque es capaz de anticipar*: El alumno puede dominar perfectamente el pasado – admitámoslo, al menos por un instante – *pero sólo el maestro puede dominar el futuro*. [...] El profesor no solo se constituye en un "supuesto saber" sino también en un "*supuesto anticipar*". (CHEVALLARD, 2005, p.82).

[25] Patamares – esta palavra será usada nesta pesquisa no sentido de localizar as diferentes posições que ocupam professor e aluno no funcionamento didático.

diferentes, pois mesmo que em algum momento do funcionamento didático, professor e aluno, se igualem no que diz respeito ao domínio de um saber, somente o professor tem o "poder" de programar o que o aluno aprenderá no futuro, é ele quem domina o tempo didático.

Por sua vez, a topogênese diferencia os patamares em que se encontram alunos e professores em relação à construção do saber.

Novamente o professor seria o programador, mas desta vez programaria as etapas de construção de um saber e não o tempo que cada uma levaria para ser concluída. Exemplificando: o professor seria o "engenheiro de uma obra", o qual planejaria uma sequencia de passos, saindo da base da construção para alcançar seu objetivo, ou seja, abordaria os pré-requisitos, posteriormente o conteúdo que propôs a ensinar e finalmente daria noções de futuras abordagens; ao aluno, nesse caso, caberia a tarefa de indagar, conjecturar, mas possivelmente ele não conseguiria ordenar uma sequencia para a construção de um saber, pois o saber envolve ainda outros saberes, muito deles desconhecidos pelos alunos.

Regimes didáticos ou regimes epistemológicos

Para se compreender melhor o termo *regime didático ou epistemológico*, Chevallard escreveu:

> O conhecimento do aluno e o conhecimento do professor não diferem exclusivamente *no plano da quantidade*. A transposição didática tende a organizar *qualitativamente* a diferença dos lugares; tende a instituir duas "maneiras" de conhecer, a produzir dois registros distintos de atos epistemológicos. (CHEVALLARD, 2005, p.86 – grifos do autor – tradução nossa)[26].

Dentro de um regime epistemológico existem, nesse caso, formas de conhecer distintas. O professor, por exemplo, ao dominar um vasto leque de saberes pode conhecer algo novo buscando apenas uma apresentação teórica do saber. Já o aluno, conhece algo novo mais facilmente se experimentá-lo, aplicá-lo a uma situação próxima a ele.

---

[26] El saber del enseñado y el saber del enseñante no difieren exclusivamente *en el plano de la cantidad*. La transposición didáctica tiende a organizar *cualitativamente* la diferencia de los lugares: tiende a instituir dos "maneras" de saber, a producir dos registros distintos de actos epistemológicos. (CHEVALLARD, 2005, p.86).

Essa consideração de que professor e aluno se apropriam dos saberes diferentemente fica evidenciada também na textualização do saber quando há repartições entre teoria e prática (exercícios). De uma parte do conteúdo se vê a teoria – definições, teoremas, etc. –; de outra, se vê os exercícios e problemas propositalmente colocados para os alunos, que conhecerão o saber por meio da comprovação, da verificação, da aplicação dos dados, ou seja, de maneira mais empírica.

Assim, uma parte do regime epistemológico é outorgada a quem domina a construção do saber (no caso, o professor), pois o professor conhece e manipula o saber diferentemente de como o aluno o faz. A outra parte do regime abrange os que irão iniciar a construção do saber (os alunos).

Neste momento fica mais claro entender o conceito de topogênese, ou seja, os patamares que se encontram professor e aluno perante o domínio do saber. O processo de transposição didática se encarrega de determinar na textualização do saber qual parte ficará para quem trabalhar – o professor se ocupa de explicar a teoria, o aluno fica com a parte de resolver os exercícios.

A diferenciação destes regimes epistemológicos, isto é, de que patamar do “conhecer um saber” professor e aluno se enquadram, auxilia a firmar no âmbito da sala de aula o contrato didático[27].

Apesar da distinção dos regimes, pode haver, às vezes, intercâmbio entre professor e aluno – e o domínio do saber será de igual para igual. Por exemplo: quando numa aula o aluno surpreende o professor com algo que ele nunca havia pensado sobre o objeto de ensino, os regimes didáticos igualam-se (pelo menos neste momento), mas, em geral, não é isso que se espera que aconteça.

[27] Contrato Didático – segundo Pais (2002, p.80), “Astolfi e Develay (1994) apresentam uma análise da noção de contrato didático, lembrando que é a partir dele que as regras pertinentes ao sistema constituído pelo professor, aluno e conhecimento podem ser estudadas para um melhor domínio do processo de ensino e aprendizagem. As várias relações decorrentes do funcionamento desse processo, acrescidas do caráter especifico do saber científico ou matemático, tornam mais compreensíveis a partir do desvelamento de regras que constituem o contrato e de seus pontos de ruptura”.

Obsolescência externa e obsolescência interna

Em *1.1.1* foi comentado que *"na concepção da didática, os saberes escolares, assim como outras formas de saberes, envelhecem com relação ao modelo social em que estão inseridos, obrigando-os a se apresentarem com uma nova 'roupagem'"*. Este comentário se fundamenta na noção de envelhecimento dos saberes escolares observado por Chevallard.

> [...] os objetos de ensino são vítimas do *tempo didático*, estão submetidos a uma erosão e a um desgaste "moral", que pressupõe sua *renovação* no curso de um ciclo de estudo. Podemos dar o nome de *obsolescência interna ou relativa* a esse fenômeno de desgaste dentro de um *ciclo de ensino*, para opor-se a obsolescência *externa ou absoluta*, relativa à sociedade em geral. (CHEVALLARD, 2005, p.79 – grifos do autor – tradução nossa)[28].

Quando ocorre a obsolescência externa ou absoluta, ela diminui ou até mesmo anula a distância entre os lugares (topogênese) do professor e aluno em relação ao domínio do saber em questão; ou seja, o envelhecimento de um saber escolar em relação à sociedade – que para Chevallard é como um envelhecimento histórico e cultural do saber, que já não há utilidade para a sociedade – faz com que alunos e professores o possam dominá-lo igualmente, mostrando que o saber é tão obsoleto que qualquer sujeito poderia compreendê-lo sozinho. Como Chevallard (2005, p.90 – tradução nossa) ironiza, quando o saber escolar sofre a obsolescência externa, "qualquer pai (ou quase) poderia substituir o docente em sua tarefa de ensinar se não fosse por uma questão material de tempo disponível"[29].

Já a obsolescência interna se refere ao envelhecimento do saber escolar em relação à duração de um ciclo de ensino. A grosso modo, esta obsolescência é como se fosse um "cronômetro" para o funcionamento didático; quando o objeto de ensino já se tornou obsoleto para continuar tratando dele, então o seu funcionamento didático terminou.

No caso das Matrizes, por exemplo, é de se questionar se a transposição didática ocorrida com este saber – caso tenha acontecido, pois ainda verificaremos isso – foi pelo fato de algum conteúdo escolar ter passado por uma obsolescência interna que necessitou de algo

---

[28] [...] los objetos de enseñanza son víctimas del *tiempo didáctico*, están sometidos a una erosión y a un desgaste "morales", que presuponen su *renovación* en el curso de un ciclo de estudio. Podemos dar el nombre de *obsolescencia interna o relativa* a ese fenómeno de desgaste dentro de un *ciclo de enseñanza*, para oponerlo a la obsolescencia *externa o absoluta*, relativa a la sociedad en general. (CHEVALLARD, 2005, p.79).

[29] Cualquier padre (o casi) podría sustituir al docente en su tarea de enseñanza si no fuera por una cuestión material de tiempo disponible. (CHEVALLARD, 2005, p.90).

novo, supostamente como as Matrizes, para que deixasse de ser obsoleto. Nesse caso, as matrizes surgem no ensino como novo assunto, capaz de renovar outro conteúdo. Mas será que essa hipótese se confirma? Veremos, no decorrer desta pesquisa, a confirmação ou não desta hipótese.

1.2.2 ELEMENTOS DO PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA – PARTE 2

Na *parte 1*, discorremos sobre alguns termos nomeados por Chevallard que, do ponto de vista desta pesquisa, servem para que o professor ou pesquisador da educação matemática reflita sobre: a epistemologia da matemática; como um novo saber é colocado à escola; a hierarquia escolar e como professor e aluno num processo de transposição didática participam de maneiras diferentes desta hierarquia; como o saber torna-se obsoleto e em que medida isso acontece.

Já na subseção *parte 2* elencamos os outros termos, também já citados – as criações didáticas, as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas, a desincretização do saber, a despersonalização do saber, a programabilidade da aquisição do saber, a publicidade do saber, o envelhecimento biológico e moral do saber, e a relação antigo/novo de um texto do saber – por entendermos que estes são elementos explícitos do processo da transposição didática, pertencentes a uma categoria do trabalho de transposição que evidencia suas etapas de ação, visível na *textualização* dos saberes.

Dessa forma, a partir do entendimento destes elementos será possível, por exemplo, verificar nos textos de livros didáticos quais são os passos que autores de livros percorrem, implicitamente ou não, que se identificam às categorias do processo de transposição didática. Poderemos ainda, por meio da análise destes termos ou categorias, responder se o conteúdo sofreu modificações textuais e/ou conceituais desde sua produção científica até o momento que se tornou saber escolar.

As criações didáticas

As criações didáticas são elementos resultantes de uma transposição didática que se concretizam em ferramentas matemáticas, auxiliando o processo de ensino de algum conteúdo escolar. Nem sempre da realização de uma transposição origina-se uma criação didática, mas como o próprio Chevallard descreve:

> Podemos considerar a existência de uma transposição didática, como processo de um conjunto, como situações de *criações didáticas de objetos* (de conhecer e ensinar ao mesmo tempo) que se fazem "necessárias" pelas *exigências* do funcionamento didático. (CHEVALLARD, 2005, p.47 – grifos do autor – tradução nossa)[30].

Estas criações nascem de uma necessidade intrínseca do objeto de saber estudado e auxiliam a compreensão dos mesmos. Não têm como finalidade tornar-se conteúdo de ensino, todavia, em alguns casos, são empregadas como tal.

São exemplos de criações didáticas: os produtos notáveis que surgiram para auxiliar a fatoração de equações algébricas, a descrição dos números complexos em matrizes quadradas para simplificar cálculos e melhorar a relação entre números complexos e a forma polar de escrevê-los, os diagramas de Venn que serviram como recurso para representação gráfica, os fatoriais que "nasceram" para simplificar notações dos cálculos de probabilidades e da análise combinatória, etc.. Dessa forma, podemos esperar pela identificação de outras criações didáticas existentes no quadro educacional ou científico.

Segundo Pais (2008, p.17) as criações "motivadas por supostas necessidades do ensino para servirem como recursos para outras aprendizagens" não são fruto exclusivo de trabalho científico. Logo, qualquer pessoa comprometida com o melhoramento do ensino pode, na intenção de melhorar o ensino/aprendizagem, "inventar" uma criação didática.

As noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas

Dentre tantos pré-requisitos para que se faça um bom trabalho de ensino da matemática, existem alguns que Chevallard denominou de: noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas. Ele aconselha ao professor que saiba cada uma delas para que tenha um discernimento fundamental da didática adotada na prática de ensino. Segundo ele não há uma fronteira absoluta entre essas noções, entretanto, ao conhecê-las, o professor poderá distinguir seus objetos de trabalho, tais como: os conteúdos matemáticos, as

[30] Podemos considerar la existencia de una transposición didáctica, como proceso de conjunto, como situaciones de *creaciones didácticas de objetos* (de saber y de enseñanza a la vez) que se hacen "necesarias" por las exigencias del funcionamiento didáctico. (CHEVALLARD, 2005, p.47).

ferramentas matemáticas e as estruturas mentais e lógicas, matemáticas.

Para Bosch e Chevallard (1999 *apud* PAIS, 2008, p.38) "a teoria da transposição didática situa o saber matemático no centro das atenções", o que justifica a necessidade de conhecer os tipos de noções envolvidas a cada saber matemático. Isso quer dizer que o saber matemático exige dos educadores e professores de matemática conhecer como se dá a apropriação das noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas, isso seria o mesmo que conhecer a epistemologia da matemática. Para tanto, podemos estabelecer três exemplos de campos distintos de apropriação de conhecimentos consequentemente ligados as tais noções epistemológicas da matemática:

1. O indivíduo tomará conhecimento de certo conceito por meio da *aprendizagem escolar*, instigado a resolver problemas ou pelo processo de treinamento;
2. Compreenderá conceitos a partir da *identificação de padrões e parâmetros*, se apropriando dos conhecimentos da experiência dos sentidos;
3. Apreenderá competências a partir da *vivência social*, tais como: questionar, argumentar e resumir.[31]

Visto estes três tipos de campos que permitem a apropriação de conhecimentos, poderíamos dizer que o sujeito toma conhecimento dos saberes matemáticos, de maneiras diferentes, porque as noções da matemática são diferentes e assim, resumindo esta exemplificação, o primeiro campo propiciaria o conhecimento da noção matemática, o segundo da noção paramatemática e o terceiro da noção protomatemática.

As noções matemáticas são os conteúdos em si, ou como Chevallard designa, são os objetos de saber possíveis de serem ensinados. Neste caso, fazem parte desta categoria todos os objetos de saber que o professor trabalha na escola e que se enquadram no primeiro campo citado anteriormente. É a partir destes objetos, ou noções, que o professor espera que o aluno reconstrua ou aponte uma demonstração, identifique ou estabeleça propriedades relevantes a dado conceito, reconheça certo número de ocasiões em que as noções matemáticas são empregadas (CHEVALLARD, 2005, p.59). São exemplos de noções matemáticas: a noção de número, de grupo, de multiplicação, etc..

Já as noções paramatemáticas são "idéias que se caracterizam como ferramentas auxiliares da atividade matemática, mas que, normalmente, no contexto da educação básica, por exemplo, não se constituem em objetos de estudo" (PAIS, 2008, p.36). É o caso do segundo campo supracitado.

[31] Cabe ao professor propiciar um ambiente de aprendizagem em que todos estes campos sejam contemplados.

Segundo Chevallard,

> As *noções paramatemáticas* (e *a fortiori*, as noções matemáticas) são objetos os quais o docente toma consciência, aos que dá um nome (“parâmetro”, “equação”, “demonstração”); em resumo, objetos que entram em seu campo de *percepção didática.* (CHEVALLARD, 2005, p.60 – grifos do autor – tradução nossa)[32].

Um exemplo dado por Chevallard para explicar uma noção paramatemática seria: “quando o aluno não sabe a resposta para o enunciado: ‘Resolver e discutir a equação x2 – λx + (λ + 1) = 0’, o professor pode concluir que o aluno ‘não compreendeu’ a noção de parâmetro’”, pois, segundo ele, as noções de “parâmetro”, “equação”, “demonstração” são exemplos de noções paramatemáticas.

As noções protomatemáticas por sua vez, são dos três campos, àquelas implícitas ao ato de construção de conceitos e independentes de um saber específico, ou seja, não podem ser especificamente textualizadas, pois pertencem ao plano subjetivo e cognitivo do sujeito. Noções relativas ao terceiro campo anteriormente citado.

Embora não sejam textualizadas, as noções protomatemáticas estão diretamente ligadas aos outros dois tipos de noções que são passíveis de textualização. Consideremos a seguinte recomendação do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) que enuncia algumas noções protomatemáticas:

> [...] Os alunos devem aprender a: formular perguntas chaves, analisar e conceitualizar problemas, definir problemas e objetivos, descobrir padrões e similaridades, buscar dados apropriados, experimentar, transferir habilidades e estratégias a novas situações, utilizar seus conhecimentos de base para explicar as noções matemáticas. (*RECOMMENDATIONS FOR SCHOOL MATHEMATICS OF THE 1980* da *NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS apud* CHEVALLARD, 2005, p.62 – tradução nossa)[33].

Estas recomendações estão escritas, semelhantemente, também nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

As noções protomatemáticas, assim como as outras duas noções, devem estar

[32] Las *nociones paramatematicas* (y *a fortiori*, las nociones matemáticas) son objetos de los cuales el docente toma conciencia, a los que da un nombre (“parámetro”, “ecuación”, “demonstración”, etc.”: en resumen, objetos que entran en su campo de *percepción didáctica*. (CHEVALLARD, 2005, p.60).

[33] *[…] Los alumnos deben aprender a – formular preguntas claves; – analizar y conceptualizar problemas; – definir el problema y el objetivo; – descubrir pautas y similaridades; – buscar los datos apropiados; – experimentar; – transferir habilidades y estrategias a nuevas situaciones; – utilizar sus conocimientos de base para aplicar las matemáticas.* (*RECOMMENDATIONS FOR SCHOOL MATHEMATICS OF THE 1980* da *NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS apud* CHEVALLARD, 2005, p.62).

contempladas no contrato didático estabelecido entre professor e aluno, uma vez que subentendem tratar de assuntos matemáticos, de ferramentas matemáticas e também das relações da matemática com o universo e pensamento cognitivo. Ainda que nem sempre fiquem explicitadas, ao menos o professor deve prevê-las, pois a ruptura destas noções num determinado tempo didático pode mostrar ao professor que seu(s) aluno(s) apresenta(m) índice de defasagem em conteúdos ou com relação a noções anteriores. Assim, por exemplo, quando um aluno de um curso superior não entende certas propriedades do conjunto dos números reais, pode ser que suas noções protomatemáticas acerca de infinitude e/ou de ilimitabilidade apresentem lacunas significativas que o impeçam de aprender algo mais.

Chevallard explica muito bem o envolvimento entre os três tipos de noções, dizendo:

> Noções matemáticas, noções paramatemáticas, noções protomatemáticas constituem extratos cada vez mais profundos do funcionamento didático do saber. *Sua consideração diferencial é necessária para a análise didática*; por isso a análise da transposição didática de qualquer noção matemática (por exemplo, a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) supõe a consideração de noções paramatemáticas (por exemplo, as noções de *fatoração e de simplificação*), e que por sua vez devem ser consideradas a luz de certas noções protomatemáticas (a noção de "padrão", de "simplicidade", etc.). (CHEVALLARD, 2005, p. 65 – grifos do autor – tradução nossa)[34].

O que deve ficar bem claro é que todas estas noções são aprendidas no meio escolar ou fora dele, mas que apenas as noções matemáticas e paramatemáticas são passíveis de serem trabalhadas em sala de aula. As noções protomatemáticas também são consideradas nos sistemas de ensino, mas não são objetos de estudos escolares.

No caso desta pesquisa buscaremos identificar se as matrizes se enquadram no campo das noções matemáticas, paramatemáticas ou protomatemáticas.

---

[34] Nociones matemáticas, nociones paramatemáticas, nociones protomatemáticas constituyen estratos cada vez más profundos del funcionamiento didáctico del saber. *Su consideración diferencial es necesaria para el análisis didáctico*: por eso el análisis de la transposición didáctica de cualquier noción matemática (por ejemplo la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) supone la consideración de nociones paramatemáticas (por ejemplo, las nociones de *factorización y de simplificación*), las que a su vez deben ser consideradas a la luz de ciertas nociones protomatemáticas (la noción de "patrón", de "simplicidad", etc.). (CHEVALLARD, 2005, p. 65).

A desincretização, despersonalização, programabilidade e publicidade dos saberes

Os elementos desta seção, como se verá, estarão intimamente ligados aos textos dos saberes escolares, embora pareçam ausentes da estrutura dos textos. Foram introduzidos por Michel Verret em 1975, mas aprofundados e disseminados por Chevallard.

O primeiro deles, a *desincretização do saber*, é o elemento que particiona o saber em "saberes 'parciais', cada um dos quais se expressará num discurso (ficticiamente) autônomo" (CHEVALLARD, 2005, p.69 – tradução nossa). Desta forma, o texto do saber tomará "moldes" que o fará se tornar um texto mais didático.

A partir da desincretização dos saberes, pode-se mais facilmente designar os "lugares" que devem ocupar as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas, pois no processo de desincretização delimita-se o que será o conceito em si, as ferramentas matemáticas e as relações do saber com outros saberes.

Tomemos como exemplo o *saber* de "espaço tridimensional" e identifiquemos "seus saberes parciais" e as noções respectivas:

- Ao dizer que *existe sempre uma correspondência biunívoca entre uma terna (x, y, z) e um ponto no espaço tridimensional*, estamos considerando o *saber* de correspondência biunívoca, entre ternas e pontos, que corresponde a uma noção matemáticas, ao conceito em si;
- Quando identificamos a parametrização – *pontos do espaço tridimensional devem ser parametrizados por uma terna* – sabemos que significado tem a **tri**dimensionalidade, ou seja, temos uma noção paramatemática, a ferramenta notacional é por meio da parametrização;
- Entendendo que *o espaço tridimensional é o espaço em que vivemos*, sabemos que o lugar que ocupamos não poderia ser outro a não ser o tridimensional, o que se configura como uma noção protomatemática, que relaciona a tridimensionalidade com o espaço que vivemos.

Chevallard explica o processo de desincretização (ou delimitação) como sendo ainda, responsável pela descontextualização do saber

> O processo de explicitação textual do saber (noções matemáticas) produz correlativamente um efeito que faz-se implícito (noções protomatemáticas) que se baseiam nos pré-requisitos, enquanto não são reconhecidos como tais. O efeito de *delimitação* produz ainda – *um fato essencial do ponto de vista da epistemologia – a descontextualização do saber*, sua deslocalização da *rede de problemáticas e problemas* que lhe dão seu "sentido" completo, a *ruptura do jogo intersectorial* constitutivo do saber em seu movimento de criação e de realização. (CHEVALLARD, 2005, p.71 – grifos do autor – tradução nossa)[35].

Já a *despersonalização do saber* é algo mais simples de entender, pois significa que um saber tornou-se público, para todos e de ninguém, universal. Este fato deve-se a condição de que

> A textualização conduz, em segundo lugar, a dissociação entre o pensamento, enquanto o expressa com subjetividade, e suas produções discursivas; o sujeito fica afastado de suas produções e o saber está então, submetido a uma transformação no sentido de despersonalização. (CHEVALLARD, 2005, p.71 – tradução nossa)[36].

Dessa maneira, a despersonalização permite recontextualizar o saber para uma situação próxima do aluno, pois o saber, sendo universal, pode-se aplicar a vários contextos. E embora, de certa forma, a universalidade do saber distancie este mesmo do seu "produtor científico", a despersonalização não implica anular/apagar a história dos saberes.

Portanto, o *saber* ao ser textualizado sofre inicialmente as intervenções de *desincretização* e *despersonalização*. Posto que, o texto é produzido para alguém o ler, a textualização do mesmo considera ainda elementos de programabilidade e publicidade.

Ao estabelecer a *programabilidade do saber*, numa textualização, está se admitindo que a aquisição do *saber* se dê de maneira progressiva e racional, seguindo o desenvolvimento do discurso utilizado no texto. Por exemplo, quando se estuda o conteúdo de geometrias não euclidianas, e vislumbra-se a possibilidade de torná-lo conteúdo ou saber escolar é porque admite-se a possibilidade de enquadrá-lo num determinado "espaço de tempo" mediante a textualização. É a textualização que permitirá pensar em temporalizar o saber. Quando se textualiza é possível pensar: *"Isto pode ser visto em uma semana, cada seção num dia, etc."*,

---

[35] El proceso de explicitación textual del saber (nociones matemáticas) produce correlativamente un efecto que lo hace implícito* (nociones protomatemáticas) que se basa en los prerrequisitos, en tanto no son reconocidos como tales. El efecto de *delimitación* produce además – *hecho esencial desde el punto de vista de la epistemología – la descontextualización del saber*, su desubicación de la red de problemáticas y problemas que le otorgan su "sentido" completo, *la ruptura del juego intersectorial* constitutiva del saber en su movimiento de creación y de realización. (CHEVALLARD, 2005, p.71).

[36] La textualización lleva a cabo, en segundo lugar, la disociación entre el pensamiento, en tanto que expresado como subjetividad, y sus producciones discursivas: el sujeto está expulsado fuera de sus producciones; el saber está entonces sometido a una transformación en el sentido de despersonalización. (CHEVALLARD, 2005, p.71).

ou seja, programa-se o assunto.

Além disso, a *programabilidade do saber*, uma vez apresentada na forma seqüencial, pode tornar, aparentemente, o aprendizado mais fácil. Quanto a isso, Michel Verret escreve:

> O texto *é uma norma de progressão do conhecimento*. O texto tem um princípio e um fim (provisório) e opera por encadeamento de razões. Se se concebe a aprendizagem como equivalente ao progresso que manifesta a estrutura própria do texto, este permite medir aquele e se faz possível uma didática essencialmente "isomorfa" que se determina a servi-los. (*apud* CHEVALLARD, 2005, p.73 – grifos do autor – tradução nossa)[37].

Mas vale lembrar, pelas palavras de Chevallard que

> *A fortiori*, é muito necessário que o processo de aprendizagem seja *seqüencial*, mas a ordem da aprendizagem não é isomorfa em relação à ordem de exposição do saber; *a aprendizagem do saber não é um apoio do texto do saber.* (CHEVALLARD, 2005, p.74 – grifos do autor – tradução nossa)[38].

Já a *publicidade do saber* tem o papel de explicitar por meio de definições as compreensões e extensões do saber, é na realidade a "divulgação" do saber. Com a *publicidade do saber* se conhece quais são as finalidades dos assuntos textualizados, como por exemplo, ao divulgar sua obra em prefácios, os autores descrevem seus objetivos e tudo o mais; os prefácios seriam então as fontes de publicidade.

Como já dito, os quatro últimos elementos citados estão indispensavelmente embutidos no processo de textualização dos saberes, por conseguinte, serão eles os aspectos que mais tentaremos identificar na textualização da Teoria das Matrizes.

---

[37] El texto *es una norma de progresión en el conocimiento*. Un texto tiene un principio y un fin (provisorio) y opera por encadenamiento de razones. Si se concibe el aprendizaje como equivalente al progreso que manifiesta la estructura propia del texto, éste permite medir a aquél y hace posible una didáctica esencialmente "isomorfa" cuyas escansiones determina. (MICHEL VERRET *apud* CHEVALLARD, 2005, p.73).

[38] *A fortiori*, es muy necesario que le proceso de aprendizaje sea *secuencial*: pero el orden de aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; *el aprendizaje del saber no es calco del texto del saber*. (CHEVALLARD, 2005, p.74).

O envelhecimento biológico do saber e envelhecimento moral

É bastante coerente a idéia de que qualquer texto pode passar por um processo de envelhecimento, no sentido de possuir informações ultrapassadas, ou de estar escrito com uma linguagem incompatível com a utilizada pelos leitores.

O processo da transposição didática tem a responsabilidade, dentre outras coisas, de fazer com que o saber que chega até a sala de aula seja interpretado e entendido pelo aluno, numa *linguagem* condizente à geração que o estuda. Chevallard ressalta que para um texto do saber ser aceito ou reconhecido, perante a comunidade que o requisita, é necessário que haja certa *compatibilidade* entre a linguagem das informações trazidas no texto e as exigências da comunidade.

Para tanto, a transposição didática lança mão de artifícios, tais como: reciclar a linguagem do texto do saber; recorrer a especialistas do ensino ou da comunidade científica para que atualize as aplicações, adotar novos procedimentos ou métodos de tratamento do saber.

Quando um saber se torna ultrapassado no sentido de que qualquer pai de aluno pode ensiná-lo, ocupando o lugar do professor, a ação da transposição didática recorre aos especialistas daquele saber para que o aproxime do aluno, mas passando por uma reciclagem, obtendo uma "nova roupagem". Isso faz com que os pais de alunos se surpreendam e não mais tenham o domínio sob tal saber, nessa ocasião, eles podem pensar: *"Nossa! Não entendo o que diz aqui... as coisas mudaram bastante. Preciso estudar isso com calma novamente"*.

Essa ação da transposição didática só é possível porque concebe dois tipos de envelhecimento que ocorrem com o *saber*: o *envelhecimento biológico* e o *envelhecimento moral*.

O envelhecimento biológico trata das definições, conceituações e conjecturas explicitadas de forma científica, por uma comunidade científica que, com o passar do tempo, ou com uma mudança de paradigma, tornaram-se obsoletas. O saber científico como está parcialmente nos currículos escolares pode, dada à ocorrência deste tipo de envelhecimento, acarretar no ensino também uma mudança de paradigma científico.

Pode ocorrer que conceitos matemáticos anteriormente ensinados deixem de ocupar seu *status* no ensino, pelo indício da refutação do mesmo, ou melhor, pelo indício do envelhecimento biológico dele.

O envelhecimento “moral”, como assinala Chevallard, pode ser entendido como um desgaste natural como tudo que se modifica, ou “cai da moda”. Este desgaste moral ocorre em relação às exigências da sociedade. O

> [...] envelhecimento “moral” – encontrado no saber ensinado coloca-se em desacordo com a sociedade num sentido amplo, no entanto, se ele estiver em conformidade (quando ou onde) com as disciplinas não teria nada para criticá-lo. (CHEVALLARD, 2005, p.31 – grifo do autor – tradução nossa)[39].

Na realidade “os objetos de ensino são vítimas do tempo didático, estão submetidos a uma erosão e a um desgaste ‘moral’, que pressupõe sua renovação no curso de um ciclo de ensino” (CHEVALLARD, 2005, p.79, tradução nossa).

Segundo Alves Filho,

> O saber sábio é uma proposição humana “acerca de”, que uma vez aceita e universalizada, passa a pertencer à cultura da humanidade e se eterniza nas publicações, livros e registros bibliotecários. Já a vida útil de um objeto do *saber a ensinar* pode ser temporária. Em outras palavras, esse objeto pode ser “descartável”. Pressões dos grupos da noosfera determinam quais conteúdos devem passar pela Transposição Didática e quais, no contexto mais amplo, não apresentam significado no espaço escolar. Outros que, com o passar do tempo, banalizam-se no contexto social-cultural, deixam de ser objetos de ensino e, portanto, são descartados. (ALVES FILHO, 2001, p. 83 – grifos do autor).

Como é possível observar, quando o *desgaste* ocorre no interior de um ciclo de ensino, Chevallard denomina de *obsolescência interna* ou *relativa*, e quando esse fenômeno de desgaste é em relação à sociedade em geral, chamamos de *obsolescência externa* ou *absoluta*. Para que se converta este quadro de desgastes e se renove o objeto de saber, é necessário aprimorar a dialética antigo/novo inerente a qualquer texto do saber.

E sobre esta dialética antigo/novo podemos fazer algumas considerações.

A dialética antigo/novo

A dialética antigo/novo pode se fazer presente em todos os momentos de apresentação dos conteúdos. Quando, ao iniciar um conteúdo novo, buscamos conhecimentos prévios dos

---

[39] [...] envejecimiento “moral” – el saber enseñado se encontraría en desacuerdo con la sociedad en un sentido amplio, aunque, llegado el caso, si se lo juzgara estrictamente según los criterios de la disciplina correspondiente no habría nada que reprocharle. (CHEVALLARD, 2005, p.31).

alunos, estamos agindo segundo esta dialética; ou quando, ao trabalhar um conteúdo, apresentamos problemas mais atuais e que remeterão ao pensamento de novas estratégias ou à necessidade de novos conceitos, também estamos agindo conforme esta dialética.

De acordo com Chevallard (2005, p.77 – tradução nossa), para que "um objeto de saber possa integrar-se como objeto de ensino nesse processo, é preciso que sua introdução, num determinado momento da duração didática, apareça como objeto de 'duas caras'", ou, antigo/novo.

Num primeiro momento, o objeto de saber deve aparecer como algo novo, que "produz uma abertura nas fronteiras do universo dos conhecimentos já explorados" (CHEVALLARD, 2005, p.77 – tradução nossa). Num segundo momento o novo saber já se tornou antigo e assim o círculo antigo/novo entre os saberes continua. É necessário que o saber novo, que posteriormente se torna antigo, continue aparecendo no decorrer do ensino, possibilitando a identificação do aluno com o universo formado de antigos saberes.

Cada apresentação de um saber novo que o professor traz à sala de aula, ele insere saberes antigos, já dominados pelos alunos. Instantaneamente o saber novo envelhece com elementos antigos, contudo, o professor consegue prever o que virá posteriormente e incita os alunos a pensar em algo ainda desconhecido, essa é a dialética antigo/novo que marca o lugar do professor em dominar o tempo didático burocrático.

Essa dialética entre saber antigo e novo evidencia dentro do sistema de ensino a noção de cronogênese, ou seja, a dialética é outro exemplo de que somente o professor pode conduzi-la, uma vez que é ele quem determinará qual saber se tornará antigo e qual se apresentará como novo.

Fica outorgada ao professor a tarefa de melhor "envelhecer" os novos conteúdos, fazendo uso dos conhecimentos prévios dos alunos, isto é, praticando a dialética antigo/novo.

1.3 PESQUISAS NO BRASIL SOBRE A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA: UM PANORAMA GERAL DE TESES E DISSERTAÇÕES

A presente seção foi organizada para fins didáticos a outras pesquisas, isto é, para servir como manual de consulta a quem interessar o assunto de transposição didática.

Os trabalhos consultados e analisados fizeram parte de uma revisão bibliográfica minuciosa, mas que não teve como pretensão um estudo tipo *estado da arte*. Isso porque, os objetivos principais desta seção não consistiram em resumir o que cada trabalho realizou e sim, em:

- fazer uma discussão sobre o que os autores de trabalhos acadêmicos e/ou artigos, compreenderam do conceito de transposição didática ao buscar teóricos – fontes primárias – que discorreram sobre esse tema;
- apresentar as idéias implícitas e explícitas nos trabalhos que do ponto de vista desta pesquisa puderam ampliar a conceituação da transposição didática.

Estes objetivos foram no decorrer da primeira subseção sendo concretizados e na segunda subseção, fecharam as discussões acerca de dois conceitos que a literatura atual veio chamar de transposição didática interna e transposição didática externa.

A escolha por discorrer sobre os dois conceitos supracitados deve-se ao fato de que não estão bem definidas para alguns autores as suas conceituações, o que dá margem a dubiedade e discussões.

Para cumprir os objetivos, recorremos a 13 referências entre teses, dissertações e artigo e que seguem a organização seguinte:

1. *A eletrostática como exemplo de transposição didática*, de J. P. Alves Filho et al. Artigo do livro *Ensino de física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora*, 2001;
2. *Noções matemáticas e paramatemáticas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I: uma intervenção através da engenharia didática*, de Elson Quil Cardozo. Dissertação da Universidade do Vale do Itajaí, 2003;
3. *Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: apresentação de uma proposta pedagógica*, de Simone Luccas. Dissertação da Universidade Estadual de Londrina, 2004;
4. *Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica*, de Mauro César Gonçalves. Dissertação da PUC, 2004;

5. *Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*, de Márcia Maria Bernal. Dissertação da UFSC, 2004;
6. *Investigando o processo de transposição didática interna: o caso dos quadriláteros*, de Marcus Bessa de Menezes. Dissertação da UFPE, 2004;
7. *Competências, interdisciplinaridade e contextualização: dos Parâmetros Curriculares Nacionais a uma compreensão para o ensino das ciências*, de Elio Carlos Ricardo. Tese da UFSC, 2005;
8. *A relação dos professores de matemática com o processo de transposição didática, pelo entendimento da interdisciplinaridade, da contextualização e da complexidade do conhecimento*, de Rosimeire Rodrigues Wagner. Dissertação da UEPG, 2006;
9. *As equações algébricas no ensino médio: um estudo de uma seqüência didática utilizando software* gráfico, de Júlio Kiyokatsu Inafuco. Dissertação da UFSC, 2006;
10. *Contrato didático e transposição didática: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6ª série do ensino fundamental*, de Anna Paula de Avelar Brito Menezes. Tese da UFPE, 2006;
11. *Análise de um processo de estudo de semelhança*, de Reginaldo da Silva. Dissertação da Universidade Fed. do Pará, 2007;
12. *Equação e seus multisignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico*, de Alessandro Jacques Ribeiro. Tese da PUC, 2007;
13. *A física ensinada e a cultura: uma análise relacional do conhecimento de física em escolas públicas de ensino médio*, de Wagner Wuo. Tese da PUC, 2005.

É conveniente ressaltar que os trabalhos 1, 7 e 13 não tiveram como assunto específico a transposição didática na matemática, mas esta abertura as outras ciências destacou qual é a visão da transposição didática que tem cada uma delas.

1.3.1 MÚLTIPLOS OLHARES SOB O PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Para apresentar de forma concisa as interpretações sobre o conceito de transposição didática que cada trabalho discorreu, optou-se por seguir a sequencia citada anteriormente. Dessa forma, o primeiro trabalho da sequencia é o de Alves Filho (2001) – A eletrostática como exemplo de transposição didática.

Assim como outros autores, Alves Filho também citou a "definição" que Chevallard[40] (2005) fez sobre o conceito de transposição didática. Definição esta que destacamos na seção 1.3:

> Um conteúdo do saber que tenha sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. Este "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado de *transposição didática.* (CHEVALLARD, 2005, p. 45 – grifos do autor – tradução nossa).

O que é interessante observar do trabalho de Alves Filho (2001), em virtude desta pesquisa (TDM[41]), é o ponto de vista que o autor tem sobre o saber ensinado. Na visão deste autor o saber ensinado não resulta de uma transposição didática, mas sim, de uma simplificação.

> Como se observa, o material didático à disposição do professor do ensino médio difere daquele direcionado ao ensino universitário. Enquanto o último sofreu uma Transposição Didática de fato, o outro pode ser entendido como um processo de simplificação que busca adequar linguagem e recursos matemáticos mínimos para manter o corpo estrutural do *saber a ensinar*. É esse último material didático que o 'professor do ensino médio', de modo geral, toma como referência para preparar suas aulas. (ALVES FILHO et al, 2001, p. 86 – grifo do autor).

Alves Filho (2001) diz que as simplificações podem ocorrer de algumas formas, tais como: na linguagem utilizada, se estendendo também aos recursos matemáticos utilizados, interferindo tanto na conceituação, como nas eventuais demonstrações matemáticas; e na

---

40 CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado,* Tradução: Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

41 TDM – Transposição Didática das Matrizes. Esta abreviação servirá, para que nos parágrafos, não se confunda de qual pesquisa estamos tratando; se dos autores da revisão bibliográfica ou se desta pesquisa.

forma de apresentação dos conceitos, quando interfere na sequencia ordenada do conteúdo, descaracterizando o processo histórico de sua elaboração. Ele cita o exemplo de Pinheiro (1996):

> Um exemplo disso é que, de maneira geral, quando um livro didático utilizado no ensino médio apresenta a Mecânica Clássica, a visão aristotélica de movimento, quando aparece, é apresentada como uma concepção ingênua e incompleta, que foi superada pelo paradigma newtoniano. Força, massa, aceleração, referencial inercial são conceitos apresentados sob forma seqüenciada e harmônica, como se fossem conceitos simples, que se encerram em si mesmos. Não é levado em conta que os significados desses conceitos dependem do papel que eles desempenham no interior da teoria. (PINHEIRO, 1996, p.50 *apud* ALVES FILHO et al, 2001, p.85-86).

Estudando o trabalho de Alves Filho, pode-se concluir que, na Física, aparentemente, o *saber a ensinar* que chega até os livros didáticos do ensino médio passa por uma simplificação de seus conceitos e que a partir desta simplificação é que o professor prepara e planeja suas aulas. Mas sendo assim, se o *saber ensinado* não é resultado de uma transposição didática e sim, de uma simplificação, o professor não pode participar do processo de transposição didática se o que chega para ele não faz mais parte disso.

Na matemática, o *saber a ensinar* ou *saber ensinado*, não se envereda por caminhos diferentes; ou o saber é como o prescrito pelas pesquisas científicas ou é um conceito falho, uma definição errônea. Na matemática não há espaço para que uma definição ou conceito ensinado tenha interpretações ambíguas, pode ocorrer uma simplificação na linguagem utilizada, mas não no "conceito". Pode ocorrer também uma mudança de apresentação dos conteúdos, mas não interferindo no processo de transposição de um saber.

Talvez, as ciências Física e Matemática sejam textualizadas diferentemente, sofrendo simplificações – caso da Física, pelo fato dos paradigmas científicos de cada uma, serem ou não, mais flexíveis a mudanças, ou ainda porque os saberes científicos percorrem caminhos diferentes, se sujeitando a práticas epistemológicas diferentes.

Nas palavras de Cardozo (2003), o caminho que percorre o *saber científico* até o *saber ensinado*, é bem definido: "[...] <u>o desafio da didática da matemática é fazer a contextualização desse saber ensinado sem reduzir o significado das idéias matemáticas que o originaram</u>" (CARDOZO, 2003, p.23 – grifo nosso).

Mas, o uso do termo "simplificação" por Alves, nos mostra que a transposição didática se faz em um "organismo vivo", a sociedade, e que as possíveis "simplificações" existentes na textualização do saber escolar, devem estar respaldadas, ou toleradas, pela sociedade naquele momento. A transposição didática merece também, ser compreendida em sua dimensão social.

O segundo autor, que já foi citado, Cardozo (2003), fala desse aspecto.

Cardozo, ao explicar o processo de transposição didática, toma por referência Caillot[42] (1996). Ele cita Caillot ao dizer que a idéia principal da transposição didática "... é que a referência de um conteúdo dado de ensino, e aquilo que o legitima, é o saber sábio elaborado pela comunidade dos pesquisadores, comunidade presa em sua dimensão social e histórica" (CAILLOT, 1996, p.1 *apud* CARDOZO, 2003, p.22).

E explica:

> De acordo com essa idéia, a transposição didática ocorre no seio de cada comunidade e depende muito intimamente do sujeito (pesquisador), que faz a transformação do saber sábio em um saber "ensinável". A transposição didática ocorre, então, através dessa noosfera, e, resulta daí não só a escolha dos conteúdos a ensinar, como também a determinação de objetivos, métodos e valores que conduzirão o processo de ensino. (CARDOZO, 2003, p.22).

Apesar de Cardozo citar em seu trabalho o trecho acima, ele não esclareceu explicitamente quais seriam os objetivos, métodos e valores que a transposição didática conduziria ao processo de ensino. É certo que, com a publicação de diretrizes ou parâmetros curriculares, com a escolha de manuais escolares (livros didáticos), com a elaboração de Projetos Políticos Pedagógicos ou com recomendações locais, dadas pelos coordenadores pedagógicos podem ser identificados alguns valores, métodos e objetivos.

No próximo trabalho estudado, o de Luccas (2004), também se encontra citações do termo "simplificação". A autora frisa a questão da adequação da textualização do saber escolar ao educando, sem a qual a compreensão do saber textualizado seria prejudicada:

> A Transposição Didática compreende uma série de transformações adaptativas feitas no conhecimento produzido pelo pesquisador, o qual Chevallard denomina de saber sábio, que possibilita aos educandos o acesso ao saber, de forma adequada e compreensível, sem que este sofra deformações no decorrer deste percurso, o que causaria problemas no ensino e, conseqüentemente, na sua aprendizagem. (LUCCAS, 2004, p.14).

Para realizar seu trabalho, Luccas (2004) recorreu aos textos do próprio Chevallard[43]

---

[42] CAILLOT, M. La Théorie de La Transposition Didactique est-elle Transposable? In: Au-delá des didactiques, Le didactique: debáte autor de concepts féderatéurs. Claude Raisky e Michel Caillot (org.) De Boek Université,1996. Trad. De Méricles Tadeu Moretti e Cláudia R. Flores, Mímeo, 2000.

[43] CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Tradução: Claudia

(2000) e dessa forma, redigiu:

> Chevallard afirma, em sua obra, que o objeto do saber e o objeto a ensinar são objetos distintos, sendo necessário, portanto, a existência da transposição didática. Ele ressalta também, que "considera a existência de uma transposição didática, como processo de um conjunto, como situações de criações didáticas de objetos que se fazem 'necessárias' para as exigências do funcionamento didático". (LUCCAS, 2004, p. 47).

Ao que foi observado da pesquisa da autora, ela compartilha da concepção defendida por Alves Filho (2001) no que se refere à simplificação do saber quando textualizado para os livros didáticos do ensino médio:

> [...] a transposição didática referente à passagem do saber a ensinar para o ensinado acontece somente nos livros e periódicos destinados ao ensino universitário, ou seja, no ensino superior, enquanto que nos livros do ensino médio não há uma transposição didática. (LUCCAS, 2004, p.122).

A autora supõe que a simplificação sofrida pelo saber, ou ausência da segunda transposição didática[44] suprimida em qualquer área, deve-se a uma precária formação dos responsáveis que trabalham com a transposição didática, o que acarreta num fracasso do ensino (LUCCAS, 2004, p.123).

O trabalho desta autora, além de propor um exemplo do processo de transposição didática, faz explicações muito claras sobre a história e filosofia dos saberes que fizeram parte da sua pesquisa, destacando-se, na nossa opinião, como um dos trabalhos mais bem elaborados dentre os listados anteriormente.

O próximo trabalho, do autor Gonçalves (2004), analisou documentos da década de 70, 80 e 90 e ateve-se mais ao estudo de Chevallard que trata das praxeologias dos saberes existentes no processo de ensino.

Quanto ao conceito de transposição didática, o autor citou e explicou um quadro dos elementos mais importantes e inerentes a este processo, isto segundo Almouloud[45] (2000) – autor no qual Gonçalves se apoiou. Os elementos explicados foram: saber sábio, saber a ensinar, objetos a ensinar, objetos do saber, objetos de ensino, saber escolar, saber ensinado e

---

Gilman. 1.reimp. 3 ed. Buenos Aires: AIQUE, 2000.

[44] Esta segunda transposição, a transposição didática interna, será explicada a seguir. No caso de Luccas ela acredita que não ocorre esta segunda transposição didática, nem na física, nem em qualquer área, apesar de defender que teoricamente deveria acontecer.

[45] ALMOULOUD, S.A. *Fundamentos da didática da matemática*. CEMA, PUC-SP: 2000.

saber disponível.

É interessante ressaltar que todos os elementos foram cuidadosamente "definidos", o que torna Gonçalves (2004) boa referência para consulta. Os três últimos elementos, por exemplo, serão destacados na próxima subseção.

No trabalho de Bernal (2004), a Praxeologia, termo empregado na Teoria Antropológica do Saber, também foi o foco central da pesquisa. No entanto, a autora emprestou do conceito de transposição didática as "definições" de alguns elementos deste processo, tais como: a conceituação de saber sábio, saber a ensinar, saber ensinado e noosfera, e os destacou muitas vezes do início ao fim da pesquisa, fazendo considerações importantes.

Apesar da autora não tomar a transposição didática como eixo norteador da pesquisa e nem citar as transposições internas e externas, ainda que tenha usado parte da fundamentação teórica da transposição didática, o trabalho se mostra bem coeso no que diz respeito ao estudo das praxeologias dos saberes.

Já o trabalho de Menezes (2004), a abordagem do tema transposição didática foi mais aprofundada. O autor, orientando-se pelo conceito de transposição didática de Chevallard, tomou as concepções subjacentes do conceito e foi além, apresentou o conceito da transposição didática em duas etapas: a transposição didática interna e a transposição didática externa, que serão comentadas na subseção seguinte.

Esta divisão em duas transposições, como já foi dito na apresentação desta seção, é confusa para muitos autores, talvez pelo fato de serem recentes as discussões dos conceitos envolvidos. Ela subentende que há uma transposição didática interna – realizada pela noosfera, regulamentando e estabelecendo programas curriculares – e outra externa – realizada pelo professor quando planeja e contextualiza sua aula.

Ainda que o trabalho de Menezes (2004) explique, com clareza, os dois tipos de transposição, ao concluir, ele escreve:

> [...] Chevallard se limita a explicar a "transformação" dos saberes ditos científicos em saberes a serem ensinados, realizada por uma pequena parcela da sociedade que pensa, segundo óticas às vezes muito distintas, o funcionamento didático, a qual chama de *noosfera*. (MENEZES, 2004, p.129).

Discordamos do autor quando utiliza o termo "pequena parcela". Ao que tudo indica, se fosse uma pequena parcela a realizar a transposição didática, os professores estariam alheios a isso, pois são muitos, uma grande massa.

A questão a ser destacada é: Essa grande parcela da sociedade, os professores, realizam a transposição didática ou participam de etapas da mesma?

Segundo Chevallard (2005) os professores trabalham com a transposição didática e não, a *fazem*. Assim, Menezes (2004), em suas conclusões finais, estaria de acordo com o enfoque de Chevallard. Porém, no decorrer da dissertação do autor fica muito claro que, para ele, o professor realiza a transposição didática, a saber, a transposição didática interna; logo, a parcela que faria/realizaria a transposição didática seria grande.

Como se pode observar, os trabalhos apresentam marcas de uma “teoria” em construção, fato que causa discussões acerca das diferentes interpretações. Esse é o caso da transposição didática no Brasil.

Outro trabalho que discutiu a prática da transposição didática amplamente, e que revelou a importância epistemológica deste processo, foi o de Ricardo (2005).

A tese deste autor é difícil resumir em poucas palavras, pois seu perfil erudito e esclarecedor tornam-na uma leitura prazerosa. Não se trata, como se observa pelo título – *Competências, interdisciplinaridade e contextualização: dos Parâmetros Curriculares Nacionais a uma compreensão para o ensino das ciências*, de uma temática voltada apenas à matemática.

Assim como o trabalho de Alves Filho (2001) – da Física, ela traz informações relevantes que se diferenciam da visão de transposição didática na matemática. Isso porque, Ricardo também revelou que na Física escolar o saber não tem sua legitimidade epistemológica garantida, permitindo que a textualização dos saberes escolares da Física apresentem conceitos deturpados.

Analisando as concepções detalhadas no trabalho de Ricardo (2005), o que se apreende é que a transposição didática carrega consigo preceitos epistemológicos que, ao serem trabalhados para o ensino, dariam novo sentido à aprendizagem. Contudo, do ponto de vista do autor, isso não tem acontecido. Por exemplo: ao conhecer o traçado epistemológico de determinado saber, a noosfera, o professor, o aluno, todos os componentes entenderiam o significado do saber com maior precisão. Este *traçado* epistemológico poderia ser considerado o próprio processo de transposição didática, ou seja, o *caminho* que o saber leva desde sua produção até sua transformação em *saber a aprender/conhecer*; e isso levaria a melhorias no ensino.

Este estudo, segundo o autor,

> [...] não é mais que uma vigilância epistemológica e aponta para o início da aproximação com a noção de competências, pois pode indicar caminhos para uma

> transposição de saberes que atendam às exigências que a sociedade faz à escola. (RICARDO, 2005, p.166).

Assim como o fez Ricardo (2005), também esta pesquisa (TDM) tem o intuito de chamar a atenção para verdadeiros estudos epistemológicos, dos processos de transposição didática que ocorrem com os saberes.

O que interessa destacar da pesquisa de Ricardo (2005), para que se faça crescer neste trabalho (TDM) as discussões sobre o conceito de transposição didática, é o parágrafo citado abaixo:

> [...] na medida em que a transposição didática, e também a noção de competências, coloca em questão a pertinência dos saberes escolares, não é somente a sua legitimidade epistemológica que está em jogo, mas principalmente e, talvez, unicamente, a sua legitimidade cultural, pois nesse caso esta é uma forma ampliada daquela, já que o *status* de saber sábio é outorgado pela cultura. Entende-se agora porque não é fácil colocar em dúvida a importância do que é ensinado na escola, pois pareceria que se estaria discutindo a relevância da ciência para a sociedade. Compreende-se também porque a transposição didática é uma violência contra a integridade do ato de ensinar, conforme Chevallard. Depois de constatado que há diferenças entre, por exemplo, a física ensinada na escola e a física dos físicos, a credibilidade assegurada pela legitimidade epistemológica atribuída à física não é garantida para o seu ensino. (RICARDO, 2005, p. 168).

Embora no parágrafo supracitado, Ricardo demonstre preocupação acerca da legitimidade dos saberes que se ensina na escola, há uma contradição em suas palavras que nos permite inferir: na realidade, assim como se defende desde o começo desta pesquisa (TDM), cabe sim ao professor, ao educador, ao didata, a quem a melhoria do ensino interessar, questionar o que é relevante da ciência para a sociedade. Não questionar os conceitos, os assuntos, as produções científicas, quando são divulgadas e compreendidas, é o mesmo que se omitir e aceitar todas as imposições que acontecem, sendo elas benéficas ou não.

Novamente é oportuna a pergunta central desta pesquisa:

Como as Matrizes tornaram-se conteúdo escolar?

Esta pergunta instiga a pensar na importância deste saber para a sociedade; de que maneira ele chegou às escolas?” As escolas não representam o lugar de propagação dos ideais, da cultura, dos saberes? Então, o que das Matrizes é relevante para a sociedade escolar e para a sociedade em geral a tal ponto de torná-la objeto de estudo?

Não questionar é deixar uma produção científica na prateleira, sem uso, sem serventia, sem divulgá-la, pois só respondendo para que serve é que passa a fazer sentido. Logo, com toda essa reflexão, é necessário sim, sempre interrogar a legitimidade dos resultados da ciência e não interrogar propriamente o porquê da ciência para a sociedade; fazer isso é o mesmo que querer conhecer a epistemologia dos saberes.

Isso remete à idéia proposta nesta pesquisa (TDM) de querer conhecer do início ao fim o processo de transposição didática das matrizes, a epistemologia envolvida neste saber.

Assim como Cardozo (2003), a próxima autora a ser comentada, Wagner (2006), também destaca a dependência/influência de fatores sociais e culturais na transposição didática.

Nas palavras de Wagner (2006) – fundamentadas em Brasil[46]·(2001) – o saber, ao se tornar objeto de ensino abarca ainda outros influentes, como os sociais e culturais e, para tanto, cabe-lhes estudos de âmbito histórico, político, sociológico e outros, que apesar de serem tão importantes como o epistemológico, não foram todos contemplados nesta pesquisa (TDM).

> O conhecimento matemático estruturado, formalizado com base no rigor científico deve ser transformado, de maneira que o aluno possa compreendê-lo. Esse processo, em que o conhecimento científico é transposto em saber a ser ensinado não é uma mudança apenas epistemológica. Sofre ainda influência das esferas sociais e culturais, que fazem com o processo de transposição didática não tenha como produto apenas o saber escolar. Saberes intermediários, como aproximações provisórias, que são necessárias e auxiliam na formação de capacidades intelectuais, também se fazem presentes no processo. Os saberes intermediários são também chamados de saberes contextualizados. (WAGNER, 2006, p.65).

Muito sucinta, a autora apresenta num mesmo parágrafo o que a levou estudar a transposição didática e o que significa para ela este processo:

> [...] se a proposta é de fato preocupar-se com outro tipo de ensino, com sentido e aplicações práticas dentro e fora da escola, o professor deve considerar um outro aspecto: a necessidade de transpor o ensino sábio ao ensino a ser ensinado. O que chamamos de transposição didática do conhecimento. (WAGNER, 2006, p.55).

Apesar de breve, a autora conseguiu demonstrar com clareza sua concepção sobre o que seria um bom ensino e qual a contribuição da transposição didática para este processo.

Em Inafuco (2006), o conceito da transposição didática segue a mesma “definição” de Chevallard (2005), citada no início desta subseção. Para efeito desta pesquisa (TDM), o mais

---

[46] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. 3.ed.- Brasília: A Secretaria, 2001.

importante destaque do trabalho do autor, é a afirmação a seguir:

> A escola é responsável pelo *saber ensinado* que corresponde ao que o professor ensina, *registrado no plano de aula*, não sendo necessariamente igual ao que o aluno aprende, nem o que se intencionava ensinar. (INAFUCO, 2006, p.19 – grifo nosso).

A afirmação citada leva a crer num processo de transposição didática realizado pelo professor. Porém, essa constatação não foi verificada explicitamente no trabalho de Inafuco (2006).

Assim como Gonçalves (2004) e Bernal (2004), Inafuco (2006) voltou-se mais ao estudo das praxeologias dos saberes, mesmo tomando a transposição didática como um dos pólos temáticos de sua pesquisa.

A observação que podemos fazer é a de que os trabalhos em geral, usam apenas alguns dos elementos da transposição didática para pesquisa, a saber, seriam estes: a noosfera, o saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado. Esta constatação dá-nos mais um motivo para que, façamos da pesquisa com as Matrizes, um trabalho minucioso dos elementos presentes na transposição didática alegada nesta dissertação.

Todavia, em outros trabalhos, como o de Brito Menezes (2006), há uma discussão bastante enriquecedora sobre a transposição didática.

Baseando-se em Chevallard[47] (2001), Arsac[48] (1989) e Bordet[49] (1997), a autora apresentou num longo trecho os aspectos do processo de transposição didática. A seguir destacamos tal trecho pela sua validade e para fins de consulta. Os aspectos seriam estes:

> • EPISTEMOLÓGICO porque diz respeito, essencialmente, a um *saber* produzido na comunidade científica, que deverá ser comunicado e socializado. O que o caracteriza, como ele se estrutura, de que forma ele foi desenvolvido; enfim, qual a sua epistemologia, são as questões centrais quando olhamos para o saber.
>
> • SOCIOLÓGICO porque é necessário considerar como ele se constitui historicamente, qual a sua relevância em um determinado tempo e contexto históricos, quais os "desgastes" e "usura" por ele sofrido, dentre outros aspectos relevantes. Nesse sentido, Bordet (1997, p.46) nos remete a Chevallard, analisando que um saber não se torna *sábio* (savant) por si próprio, mas por uma determinação da sociedade (Brousseau, 1998 também fala algo nessa direção). Ele complementa essa idéia, afirmando que, segundo suas próprias palavras: *"O ensino de um saber,*

---

47 CHEVALLARD,Y; BOSCH, M. & GASCÓN, J.. *Estudar Matemáticas:* O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

48 ARSAC, G.. *La transposition didactique en mathématiques*. Em: ARSAC, G.; DEVELAY, M. & TIBERGHIEN, A. *La Transposition Didactique en Mathématiques, en Physique, en Biologie.* Lyon: IREM et LIRDS. 3-36. 1989.

49 BORDET, D.. *Transposition didactique:* une tentative d'éclarcissement. Em: DEES, nº 110, dezembro, 1997.

com efeito, é sempre a realização de um projeto social, mais ou menos largamente compartilhado, pertencente pelo menos a um certo grupo social" (Bordet, 1999, p.46). Ainda contribuindo para essa análise sociológica, Arsac (1989) discute que há uma pressão social para a comunicação dos saberes e para uma utilidade social do mesmo (de preferência em curto prazo).

• E, por fim, PSICOLÓGICO, porque no universo da sala de aula o aluno deverá se apropriar desse saber reconstruí-lo a partir das situações de ensino por ele vivenciadas. O saber a ensinar entrará em cena no jogo didático que envolve *professor-aluno-saber* e sofrerá, então, novas adaptações e deformações, passando a ser objeto de negociação dos parceiros da relação didática. (BRITO MENEZES, 2006, p.72-73 – grifos da autora).

Das palavras do destaque anterior, escritas por Brito Menezes, vê-se o entendimento coerente que a autora teve ao estudar Chevallard, Arsac e Bordet. Além disso, a autora tratou de discorrer sobre os elementos do processo de transposição didática e produziu com isso, um trabalho de alta qualidade.

Também seguindo a teorização de Chevallard sobre a transposição didática, Silva (2007), outro autor da revisão bibliográfica, apresentou seu ponto de vista sobre este conceito. Segundo ele

> Chevallard usa o conceito de transposição didática para formular uma teoria que lhe subsidia a analisar questões relevantes da Didática da Matemática. A transposição didática para Chevallard é uma ferramenta competente para avaliar a transformação do saber científico ou sábio para aquele que consta nos currículos e livros/textos, como também deste último naquele que, de fato, é ensinado nas salas de aula. Através da transposição didática Chevallard avalia as transformações do saber sábio em um objeto de ensino. (SILVA, 2007, p.26).

Compartilhando da mesma rede de autores que acreditam haver uma transposição didática realizada pelo professor, como Luccas (2004), Menezes (2004), Inafuco (2006) e Brito Menezes (2006), Silva, afirma explicitamente que uma das etapas da transposição didática é feita pelo professor e muito mais, afirma ainda que é o professor que realiza a transposição do saber sábio para o saber ensinado:

> [...] o professor vive envolvido com certas relações delicadas. Uma delas é fazer a transposição didática do saber sábio, que é criado no contexto da comunidade científica, para o saber ensinado que será aplicado no contexto da comunidade estudantil. Na realidade, fazer essa transposição é mais complexo do que parece, pois, parte do saber científico, passando pelo saber a ser ensinado até chegar ao saber ensinado, e essa transposição do saber sábio – do seu local de criação – para a sala de aula, implica em relações em que o professor não é detentor de todas as decisões que dizem respeito às adaptações. (SILVA, 2007, p.29).

Como será exposta na próxima subseção, a presente pesquisa (TDM) chegou à conclusão de que o professor *não realiza* a transposição didática, mas sim, participa de uma etapa dela, pois o professor, dentre tantos personagens, é apenas um, que se for muito engajado, pode contribuir com o processo, mas não realizá-lo completamente.

Continuando a citar os destaques que contribuíram para alargar ainda mais o entendimento do conceito de transposição didática, evidenciemos do trabalho do penúltimo autor, Ribeiro (2007), o seguinte trecho que comenta qual foi a inspiração para que a conceituação da transposição didática existisse:

> [...] limitavam-se a distinguir objetos matemáticos, paramatemáticos e protomatemáticos. O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise, conduziu-me a propor uma teorização em que qualquer objeto pudesse aparecer. [...] Assim se passa de uma máquina restrita para pensar um universo didático *restrito* para uma maquinaria de mais vasto alcance, apta, em princípio, a permitir-nos situar imediatamente a *didática no seio da antropologia*. (CHEVALLARD, 1992, p.86-87 *apud* RIBEIRO, 2007, p.46).

Como se verifica, Chevallard tinha em mente trabalhar as relações entre as noções matemática, paramatemática e protomatemática, o que o levou a teorizar e propor a transposição didática como conceito que explicasse tais relações. Além disso, outros fatores, como as distinções que ele observara nas textualizações dos saberes, o levaram a exprimir um conceito que hoje conhecemos por transposição didática.

Seguindo coerentemente as idéias de Chevallard, Ribeiro (2007) fez um trabalho excepcional explicando, senão alguns dos elementos mais difíceis da teorização da transposição didática: a noção matemática, a noção paramatemática e a protomatemática.

O trabalho de Ribeiro, mais do que explicar estes elementos, os observa na literatura e os expõe na sua pesquisa.

No último trabalho analisado, de Wagner Wuo (2005), foi observado que o autor não empregou a teorização da transposição didática como foco central da pesquisa, embora tenha usado o conceito explicado por Chevallard sobre a transformação do saber científico em saber escolar. O trabalho apresentou considerações muito oportunas que merecem destaque:

> O exame realizado nos livros permitiu notarmos, em uma parcela considerável, que a forma de apresentação de alguns conceitos particulares lembra a transposição didática conforme a coloca Chevallard. Tomando-se por exemplo a cinemática (stricto sensu), os conceitos de velocidade, aceleração, etc., são originados na física, mas não são apresentados com todas as características da ciência. Sofrem uma série de mudanças: redução aos movimentos com velocidade ou aceleração constantes, simplificação matemática para uma álgebra elementar, criação de novas definições

> como as de movimento progressivo e retrógrado (criações didáticas), tradução dos conceitos para o ambiente vivencial e cotidiano, valorização de aspectos não tão evidenciados pela ciência como a extensa análise gráfica. Tais "adequações" seriam então resultados do processo da *transposição didática* em atendimento às necessidades e finalidades do ensino.
> Entretanto, num sentido mais amplo, em que se propõe partir de um saber científico *perfeitamente definido*, para estabelecer o saber a ser ensinado e o saber propriamente ensinado, com essas características a transposição didática não pode ser confirmada. (WUO, 2005, p.97 – grifos do autor).

Deste trecho segue uma reflexão: o sentido amplo que o autor destaca, seria de que os saberes científicos deveriam chegar à escola, perfeitamente imutáveis. Mas seria bastante complexo ensinar os saberes científicos conforme sua linguagem e peculiaridades de origem. Dessa forma, o papel da transposição didática é realmente transpor estes saberes numa linguagem mais acessível, com uma textualização mais elementar, mas sem deixar os conceitos equivocados.

Vale lembrar que os trabalhos que relatam que os saberes escolares não cumprem a textualização em concordância com a ciência de origem, são específicos da área de Ensino de Física. O mesmo não ocorre com a área de Ensino de Matemática, na qual as definições e axiomas não têm outra maneira de se apresentarem senão a original, a que foi produzida em meio científico. A maioria das alterações dizem respeito ao uso de vocabulário mais acessível à faixa etária, mas deturpam a conceituação.

Na visão de Wuo (2005), os saberes escolares não cumprem uma conceituação tão rígida e condizente com a produção científica original, porque há uma dependência de outros fatores contingentes no desenvolvimento das textualizações escolares, tais como: "a tecnologia, a história, a sociologia, as outras ciências, a arte, que desempenham um papel não de meros complementos e curiosidades, mas estão ligados a uma visão da ciência dentro da cultura humana" (WUO, 2005, p.97).

O autor ainda conclui que "neste caso, não haveria somente um fluxo de saber do corpo científico estrito para o meio escolar, mas um fluxo muito mais complexo envolvendo muitos outros campos da cultura" (WUO, 2005, p.97).

Podemos ressaltar que de acordo com Wuo (2005), a textualização dos livros didáticos escolares sofre sim, influências de outras áreas e não só da ciência de origem. Porém, não concordamos na crença de que são estas influências que distanciam o saber escolar de seus conceitos originais, ainda que haja uma forte tendência a contextualizações nos textos escolares e que estas podem imprecisar os conceitos. Baseando-nos em Luccas (2004), julgamos que o que torna equivocada a transposição didática do saber científico ao escolar é a precária formação dos responsáveis que trabalham com a transposição didática (LUCCAS, 2004, p.123), principalmente no estágio da textualização.

Assim como Wuo (2005), outros autores da revisão bibliográfica (Alves Filho (2001), Brito Menezes (2006), Ricardo (2005)), também defendem a idéia de outras influências se exprimirem nas textualizações dos saberes escolares, além das científicas, e aí entra em jogo outra teorização muito atual, a das Práticas Sociais de Referência.

Em poucas palavras, visto que a contribuição do assunto das Práticas Sociais de Referência tem auxiliado em muito as pesquisas na educação – citemos um trecho do trabalho de Ricardo (2005):

> [...] é preciso esclarecer que a noção de práticas sociais de referência nasceu, segundo o próprio Martinand, nas didáticas das ciências experimentais e nas disciplinas tecnológicas e não teve como objetivo criticar e/ou complementar a teoria da transposição didática, embora tenha sido usada em articulação com esta, em alguns casos, para uma visão mais geral do problema. (RICARDO, 2005, p.184).

A teorização das práticas sociais articula-se apropriadamente a da transposição didática e não tem a finalidade de completar a transposição didática, como defendem alguns autores. Isso porque, como dito na própria citação, elas "surgiram" das didáticas das ciências experimentais e não da matemática, como foi o caso da transposição didática. É uma teorização que atualmente ganha espaço nas pesquisas, unindo-se convenientemente ao estudo das transposições.

Apesar de todos os trabalhos abordarem outras concepções além das expostas aqui, esperamos que esta breve apresentação tenha contribuído para que a conceituação da transposição didática seja melhor compreendida.

1.3.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA E TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA EXTERNA

As designações, transposição didática externa e transposição didática interna são decorrentes da própria separação feita por Chevallard quando cita uma transposição didática *lato sensu* e outra *stricto sensu*.

Seguindo a interpretação de Ricardo (2005), isso fica mais evidente:

> A noosfera é o lugar onde se pensa o funcionamento didático segundo ideologias diferentes, constituindo, conforme Chevallard, *"o centro operacional do processo de transposição"* (1991, p.34) e expressa o trabalho externo da transposição didática, que é a de estabelecer o saber a ensinar – é uma transposição didática *lato sensu*. O trabalho interno, que delimita o saber ensinado, ocorre no interior do sistema de ensino e se fixa sobre um conteúdo de saber preciso – é uma transposição didática *stricto sensu*. (RICARDO, 2005, p.172 – grifos do autor).

A *transposição didática interna* e *externa* são então, as distinções feitas no processo de transposição didática segundo os agentes que as realizam e como eles as realizam.

No trabalho de Brito Menezes (2006) estes conceitos estão bem explícitos e são interpretados seguindo autores como Chevallard[50] (1991), Bordet[51] (1997), Arsac[52] (1989) e Henry[53] (1991).

Segundo Menezes quando o *saber* é designado a tornar-se um *saber escolar* ele sofre dois grandes momentos de transformação:

- "a 'transposição didática (externa)' que acontece na *noosfera*, onde são selecionados os saberes que entrarão no jogo didático; onde o saber científico ganha a 'roupagem didática', a partir de currículos e programas de ensino" (BRITO MENEZES, 2006, p.34 – grifos da autora). Tais "programas, currículos, livros didáticos" aparecem como instrumentos reguladores, que normatizarão o que se deve ensinar na escola, consolidando

---

[50] CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage. (1991)

[51] BORDET, D.. Transposition didactique: une tentative d'éclarcissement. Em: DEES, nº 110, dezembro, 1997.

[52] ARSAC, G.. La transposition didactique en mathématiques. Em: ARSAC, G.; DEVELAY, M. & TIBERGHIEN, A. La Transposition Didactique en Mathématiques, en Physique, en Biologie. Lyon: IREM et LIRDS. 3-36. (1989)

[53] HENRY, M.. Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique em vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques. Laboratoire de Mathématiques – IREM, Besançon. (1991)

uma primeira etapa da transposição didática, a transposição didática externa (BRITO MENEZES, 2006, p.75, 76);

- e a transposição didática interna que se trata daquela que atua na relação professor-aluno-saber dentro da sala de aula. "Nesse segundo momento da transposição didática, não mais a 'noosfera' se institui como elemento central dessa transformação, mas sim, o próprio professor, considerando a sua relação com o *saber* e com o *aluno*" (BRITO MENEZES, 2006, p. 34 – grifos da autora).

No entendimento desta autora o professor e o saber se relacionam mutuamente.

> Essa relação determina, em larga medida, de que forma ele – a autora está falando do professor – organizará as situações de ensino a serem propostas, que postura ele assumirá perante os alunos; enfim, qual será o seu papel e de forma ele negociará o *contrato didático*, e que 'cara' ele vai dar ao saber, no processo de *transposição didática*. (BRITO MENEZES, 2006, p.37 – grifos da autora).

Por haver uma relação entre professor e saber, a autora esclarece que há um processo interno de transposição didática, mais especificamente realizado pelo professor; ou seja, o professor seria o responsável por uma reformatação e/ou recontextualização, uma etapa de adaptação do *saber a ensinar* descrito em manuais e livros didáticos, a fim de torná-lo *saber ensinado*. Esta adaptação se efetivaria no momento da relação didática e, segundo a autora, é o que Chevallard (1991) quis dizer com *trabalho interno de transposição didática* (BRITO MENEZES, 2006, p. 83 – grifos da autora).

Esta adaptação que se efetiva, acontece, na visão da autora, na relação didática professor-aluno, o que para ela é o momento final da transposição didática.

Compartilhando da mesma idéia, já esclarecia Menezes (2004):

> O passo final na transformação sofrida pelo saber científico é aquele que acontece *intramuros* da sala de aula, cujos parceiros envolvidos são, a rigor, professor e aluno, e que tem no professor o elemento humano responsável por tal transposição. Logicamente, não podemos pensar que a *transposição didática interna* depende unicamente do professor; ela envolve questões bem mais amplas, que conferem uma complexidade considerável a tal processo. (MENEZES, 2004, p.29 – grifos do autor).

As concepções deste autor e da autora Brito Menezes são baseadas nos mesmos pesquisadores, os quais são: Chevallard (1991) e Câmara dos Santos[54] (1995, 1997a). Isso é

[54] CÂMARA DOS SANTOS, M.. Le rapport au savoir de l'eiseignant de mathématique en situation didactique:

facilmente identificável nos trabalhos dos autores e pelas interpretações sobre a transposição didática expostas pelos dois. Como exemplo, citemos a interpretação de Menezes:

> Se retomarmos a discussão de que o professor está no centro do processo de transposição didática interna, algumas questões importantes precisam ser consideradas. Segundo Câmara dos Santos (1995, 1997a), o professor dá uma nova roupagem ao saber, cria um texto didático impregnado pela sua *relação ao saber* e pela sua *subjetividade*.
> [...] Assim, o que o professor faz na sala de aula não é traduzir fielmente o texto do livro didático para os alunos, mas, sim, transformá-lo, 'reescrevê-lo', criando, conforme admite Chevallard (1991), um *metatexto*. (BRITO MENEZES, 2006, p.85 – grifos da autora).

Portanto, a concepção da autora é de que na transposição didática interna, a textualização do saber ensinado, é o resultado do trabalho dialético *consciente* e *inconsciente* que o professor realiza quando transforma o saber escolar segundo seu planejamento. O professor acredita ser fiel ao texto científico do saber, mas ao fazer escolhas e planejar, ele organiza uma forma de tradução do saber escolar, ele usa de um processo intencional (BRITO MENEZES, 2006, p.86).

Com idéias similares as de Menezes, Alves Filho, já em 2001, escrevia:

> Ao professor cabe contemporizar tais correntes de interesse – referindo-se aos interesses da instituição escolar – no momento da preparação de sua aula e no instante em que na sala de aula exerce o magistério.
> Nesse momento, as pressões externas levam o professor a praticar uma nova Transposição Didática. Nesse novo saber é mais evidente a interferência das concepções pessoais do professor, dos interesses e opiniões da administração escolar, dos alunos e da comunidade em geral. (ALVES FILHO, 2001, p.86).

O que o autor quis dizer, mesmo não dando nomes, é que o professor realiza uma segunda transposição didática, hoje conhecida como transposição didática interna e, apesar de descrever este trecho em seu trabalho, noutro momento ele afirma que o professor trabalha com simplificações dos saberes e não com uma transposição dos saberes.

Evidentemente, as dúvidas de qual é o papel do professor no processo da transposição didática, faz parte de alguns trabalhos. Mostram-se em trechos que se contradizem e permanecem em outros trabalhos. Para desfazer estes conflitos, esta pesquisa buscou elucidar

---

une approche par l'analyse de son discours. Tese de Doutoramento, Université Paris-X. (1995)
CÂMARA DOS SANTOS, M. *A relação ao conhecimento do professor de matemática em situação didática: uma abordagem pela análise de seu discurso*. Anais da XX Reunião da ANPEd. Caxambu, MG. (mimeo) (1997a).

um pouco mais a questão da transposição didática interna e externa.

Em Brito Menezes (2006), por exemplo, não foram observadas contradições no entendimento dos conceitos de transposição didática interna e externa. Ela quis mostrar que o professor faz a transposição didática e assim o fez, segundo sua interpretação após a leitura de Chevallard (1991):

> O que Chevallard quer propor, no nosso entendimento, é que a transposição didática já vem sendo feita desde há muito tempo, quando a *noosfera* – a esfera 'pensante' – propõe um tratamento, uma 'didatização', uma deformação do saber científico, para torná-lo apto a ser ensinado. Mas se consideramos que a Transposição Didática Interna marca um novo momento, uma nova etapa desse processo, talvez possamos dizer que o professor não apenas ***está na*** transposição didática, mas que ele, legitimamente, ***faz*** a transposição didática. (BRITO MENEZES, 2006, p.86 – grifos da autora).

Embora pareça convincente a explanação dos autores Alves Filho (2001), Menezes (2004), Ricardo (2005) e Brito Menezes (2006) sobre haver duas transposições didáticas, o que se defende neste trabalho (TDM) é um processo de transposição didática único, que age do início ao fim seguindo normas, conceituações e parâmetros bem definidos por uma noosfera. Ao professor não cabe a tarefa de realizar uma transposição didática, pois, como o próprio Chevallard explica:

> Preparar uma aula sobre logaritmo vem a ser então: fazer a transposição didática da noção de logaritmo. Ora, preparar uma aula é sem dúvida trabalhar a transposição didática (ou ainda, na transposição didática); não é fazer a transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p.18 *apud* BRITO MENEZES, 2006, p.86).

A nosso ver, para concluirmos esta subseção, sustentamos a idéia de que o professor somente em alguns casos *faz* a transposição didática. Entendemos que o professor apenas *participa* de uma etapa dela como um instrumento de divulgação do saber, ensinando e perpetuando a transmissão dos saberes.

Entretanto, caso o professor se dispusesse a produzir um novo saber que resultasse no *saber ensinado*, realizando assim a transposição didática interna, ele necessitaria cumprir (sob o olhar desta pesquisa) algumas exigências, tais como:

- "resgatar a contextualização histórica da produção do saber sábio, diminuindo o excesso do artificialismo e da neutralidade do saber a ensinar" e do saber ensinado (ALVES FILHO et al, 2001, p. 90);
- conhecer as atualizações científicas publicadas em fontes reconhecidas, interando-se do

que há de novo com o saber em questão;

- conhecer a epistemologia do saber em questão;
- aprimorar as abordagens e contextualizações do saber;
- dominar a linguagem adequada do saber para re-escrevê-lo conforme o vocabulário dos alunos e o estágio de compreensão deles.

Esta situação, a qual de fato do nosso ponto de vista, aconteceria a transposição didática interna, é a mais plausível para dizer que o professor *faria/realizaria* a transposição didática.

Mas esta é uma questão condicional que cabe somente ao professor decidir pela elaboração de um novo saber ou não, tendo ele a liberdade de optar por copiar livros-texto sem mudar uma vírgula do que está escrito ou retransfomar a textualização de livros didáticos produzindo um novo texto do saber.

Ora,

> [...] a transposição didática evidencia que existe uma diferença entre os saberes que são verbalizados pelos professores em sala de aula e os saberes que são propostos no texto escolar. A existência dessa diferença coloca em *xeque* a validade do que é ensinado pelo professor, fazendo com que o saber ensinado possa perder sua legitimidade. (MENEZES, 2004, p.134 – grifo do autor).

E é por isso que adotamos certo ceticismo quanto a uma segunda transposição didática, pois na maioria das vezes, quando o professor tenta contextualizar um saber da sua forma, ele acaba por embaraçá-lo, colocando a legitimidade do que se ensina sob suspeita.

CAPÍTULO 2

HISTÓRIA DAS MATRIZES

[...] todas as vezes que ensinamos
um certo conteúdo de matemática,
é necessário indagar qual foi o contexto
de sua origem e quais são os valores que
justificam sua presença atual no currículo escolar.
[...] Acreditamos que o estudo da história da matemática,
assim como a análise de seu aspecto científico
e o seu quadro de referência
possibilitam uma abordagem mais adaptada
para a consideração dessas questões relativas
ao contexto de valorização do conteúdo.
Essa postura revela uma posição crítica
do educador frente aos conteúdos ensinados.
(PAIS, 2002, p.26).

Neste capítulo apresentamos o entrelaçamento de idéias e linhas de pesquisa que constituem os registros da história da teoria das matrizes, dos determinantes e sistemas de equações lineares – estes últimos, por não serem o principal objeto de nossa investigação, serão menos evidenciados.

Na seção 2.2 mostraremos a construção dessa história transcorrida nos países europeus, em particular na Inglaterra, onde os precursores da teoria em questão alcançaram seus primeiros resultados.

Esta etapa, que consta da reconstituição histórica da "produção" das matrizes, decorre de dois objetivos principais:

i. O primeiro trata-se de conhecer o conceito de Matrizes, suas particularidades e a formalização da sua linguagem, pois dessa forma acreditamos que seja possível identificar o que da teoria das matrizes foi inserido nos livros acadêmicos;

ii. O segundo refere-se a buscar indícios da evolução do conceito das matrizes, que eventualmente possam explicar o porquê das matrizes estarem, atualmente, nos livros didáticos e/ou programas oficiais da educação básica.

Tendo em vista esses objetivos, demos início a busca por fontes primárias que tivessem algo registrado sobre a história das matrizes e apesar das tentativas, o que encontramos foram fontes secundárias, tais como: Boyer (1999), Eves (1997), Brechenmacher (2006), O'Connor & Robertson (1996), Luccas (2004) e Higham (2008).

As obras estudadas, embora não sejam fontes primárias, incluem no interior de seus textos, citações importantes de matemáticos renomados. Por exemplo, em Brechenmacher (2006), há citações dos textos escritos por Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1814-1897), Eduard Weyr (1852-1903), Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), Herbert Westren Turnbull (1885-1961), Alexander Craig Aitken (1895-1967) e Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852), entre outros.

Destaca-se como importante fonte bibliográfica o artigo de Frédéric Brechenmacher (2006), pois o autor descreveu mais expansivamente a história das matrizes e, além disso, organizou os originais dos matemáticos renomados citados anteriormente, seguindo uma *rede de textos ou rede interligada* (BRECHENMACHER, 2006).

A metodologia adotada por Brechenmacher, a qual ele denominou "rede de textos" foi baseada na escolha de um momento de referência, os anos 30. Posteriormente, o autor iniciou uma investigação bibliográfica sobre todas as referências dos tratados publicados nos anos 1920-1930 que comentassem sobre as matrizes. Este primeiro *corpus* de textos foi completado seguidamente por esgotamento sistemático das referências bibliográficas. O exame do *corpus* geral obtido por Brechenmacher permitiu que ele fixasse um período, de 1850 a 1930, o qual marcava o desenvolvimento da Teoria das Matrizes. Esta etapa do seu trabalho o obrigou a fazer um corte mais preciso para que fosse identificado como os textos e atores do período considerado organizaram-se em redes.

A análise das referências bibliográficas permitiu a Brechenmacher distinguir redes coerentes de textos, que se entrelaçavam ao usar dos métodos matriciais dos anos 1930, período em que ocorreram interligações entre analogias geométricas, práticas combinatórias, decomposições polinomiais, cálculo simbólico, aritmético, ponto de vista vetorial, etc..

Os métodos matriciais foram elaborados independentemente uns dos outros, mas foi necessário, do ponto de vista de Brechenmacher, descrever as condições destas elaborações antes de fazer a pergunta das comunicações, das convergências, ou seja, da maneira como culturas locais se entrelaçavam e participavam de uma história plural.

Segundo Brechenmacher, seu artigo desenvolveu alguns momentos específicos sobre a teoria das matrizes a fim de indicar implicitamente que o saber matemático tem modos de pensamentos e práticas inseparáveis de um contexto cultural datado. Ele destacou que a história das matrizes permitiu revelar aspectos culturais das matemáticas anteriores às teorias estruturais e unificadoras como a álgebra linear dos anos 1930.

Em seus estudos ele observou que as matrizes eram representadas como um quadro de números, mas também como uma causa determinante, uma família de vetores, uma aplicação linear $E \to F$, um endomorfismo $E \to E$, um sistema de equações diferenciais lineares ou uma forma bilinear. Por outro lado, ele também ressaltou que um matemático contemporâneo podia interpretar de diferentes maneiras uma mesma representação matricial, isto é, um mesmo objeto podia ser representado por matrizes diferentes. (Brechenmacher, 2006, p.2)

Identificado no período de 1850-1930 os pontos de convergência entre os estudos que envolviam matrizes, Brechenmacher destacou os atores de sua rede de textos: Sylvester, Cayley, Weyr e Frobenius.

Antes do período especificado 1850-1930 é evidente que as contribuições dos estudos com determinantes e sistemas lineares foram imprescindíveis para que “simples” tabelas se tornassem um objeto matemático em si, ou seja, as Matrizes.

Dessa forma, para efeitos práticos de redação, dividimos os períodos históricos do desenvolvimento do conceito de matrizes em duas fases.

A primeira fase abrange a produção matemática da antiguidade – fase em que os estudiosos se utilizavam de tabelas ou tabuletas, ou ainda, quadros –, passa pelo período em que os determinantes e sistemas lineares foram foco de pesquisas e usavam tabelas para seus cálculos, e finaliza no momento em que de fato as matrizes surgem como objeto de pesquisa para os matemáticos. Este período compreende os anos entre 300 a.C. até 1850 d.C..

Na segunda fase é que surge, ou se sedimenta uma noção e uma estrutura notacional conveniente, que recebe o nome de MATRIZ. Esta fase compreende os anos entre 1850 até 1930. Esta parte do capítulo 2 seguirá a mesma rede de textos estipulada pelo trabalho de Brechenmacher, isso porque o trabalho dele entre todas as referências citadas no capítulo 2 é o que nos apontou mais informações sobre as matrizes. Ainda que saibamos de outras redes de textos que poderiam ser formadas, decorrentes de trabalhos científicos da física, ou por matemáticos de outros continentes, a rede de textos e autores que Brechenmacher apresenta, expondo Cayley, Frobenius, Sylevster, é condizente também às citadas pelas outras obras que pesquisamos.

2.1 DOS ANTEPASSADOS AO SÉCULO XIX

Não é surpresa que a noção de matrizes, como tabelas, e o cálculo de determinantes, são provenientes do estudo de sistemas de equações lineares. Já na época dos babilônios, estudavam-se os problemas que conduziam às equações lineares simultâneas e alguns deles estão preservados nas tabuletas de argila que resistem até hoje.

Um exemplar destas tabuletas babilônicas, datada por volta de 300 a.C. e que apresenta um problema com duas equações e duas incógnitas, está preservado e diz que:

> Há dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadradas. Um produz grãos na razão de dois terços de saca por jarda quadrada enquanto o outro produz grãos na razão de meia saca por jarda quadrada. Se o total produzido é mil e cem sacas, qual é o tamanho de cada campo? (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996, p. 1 – tradução nossa).[55]

Além disso, as datas registradas em livros de história da matemática declaram que os sistemas lineares foram realmente uma matemática dos anos 300 a.C.. Dessa forma, podemos dizer que existem provas documentadas de que o estudo de sistemas lineares precede o conceito de matriz. Nas palavras de Luccas (2004, p.39-40), também confirmamos esta afirmação:

> [...] podemos dizer que os Determinantes surgiram a partir do estudo que alguns pesquisadores desenvolveram ao trabalharem com Sistemas de Equações.
> Os Determinantes estiveram estritamente relacionados aos Sistemas de Equações até, aproximadamente, meados do século XVIII, quando os franceses Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796) e Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), respectivamente, declararam a independência de tal assunto matemático, atribuindo-lhe uma exposição lógica e estabelecendo conexão ao conhecimento num todo.
> Durante todo o estudo, mas principalmente no trabalho com os Determinantes, a disposição dos termos em forma de tabelas foi chamando a atenção de outros pesquisadores como J. J. Sylvester, A. L. Cauchy, H. J. S. Smith, C. Jordan, Weierstrass, Hamilton e Grassmann, entre outros e, principalmente de Arthur Cayley (1821 – 1895), considerado o *fundador* do conhecimento matemático denominado – **Matrizes**.
> Assim como aconteceu com os Determinantes, inicialmente relacionados aos Sistemas de Equações, as Matrizes surgiram fortemente ligadas aos Determinantes, entretanto, após o trabalho desenvolvido por Cayley, elas também conquistaram

[55] There are two fields whose total area is 1800 square yards. One produces grain at the rate of $^2/_3$ of a bushel per square yard while the other produces grain at the rate of $^1/_2$ a bushel per square yard. If the total yield is 1100 bushels, what is the size of each field (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.1).

> independência por meio de sua estruturação lógica. (LUCCAS, 2004, p.39-40, grifos da autora).

Além disso, no capítulo VIII do livro de matemática de maior influência na China, escrito durante a dinastia Han, *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*, datado de aproximadamente 200 anos antes de Cristo, temos um interessante exemplo registrado pela civilização chinesa, mostrando que neste período, este povo, se aproximava do conceito de matriz mais que os babilônicos. Os chineses, além de redigirem problemas mediante o registro escrito de sistemas de equações lineares, compunham tabelas que designavam “tábua de contar”, ou seja, organizavam os coeficientes do sistema de equações na forma de linhas e colunas (LUCCAS, 2004, p.42, grifos da autora).

Um dos problemas chineses é ilustrado em Eves (1997):

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 1997, p.268).

A tabela que se ajustava ao problema era a seguinte:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

É interessante destacar que já naquela época os chineses haviam elaborado um processo de escalonamento similar ao que realizamos hoje, e que pode ser encontrado em qualquer livro atual que trate de Matrizes e Sistemas Lineares. Quanto a esta resolução, sistematizada no século XVIII, por Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Luccas explica que Gauss

> [...] foi o sistematizador de um processo de resolução de Sistemas de Equações Lineares denominado *Método de Eliminação*. A essência de tal método consiste em facilitar a busca pela solução de um sistema, transformando-o em outro mais simples, equivalente ao sistema dado, ou seja, que apresente a mesma solução.
> Ao realizar essa transformação, objetiva-se alcançar um sistema equivalente que esteja apresentado na forma escalonada. (LUCCAS, 2004, p.47 – grifo da autora).

Embora, desde a antiguidade, os sistemas de equações lineares fossem uma “técnica” para a resolução de certos tipos de problemas, o próximo registro existente, segundo O'Connor & Robertson (1996), está na obra *Ars Magna* (1545) do italiano Girolamo Cardano (1501-1576), quase dois mil anos depois do registro dos babilônicos. Nesse trabalho, Cardano, fornece uma regra para resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas e a ela deu o nome de "mãe das regras". Essa regra é praticamente o que se conhece hoje por "regra de Cramer"[56].

O próximo registro, evidenciado por O'Connor & Robertson (1996), é um trabalho datado de 1683 do matemático japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708), que escreveu como resolver problemas utilizando-se de tabelas, exatamente como os chineses o fizeram ao organizar seus dados por meio de linhas e colunas. Este trabalho de Kowa, é similar ao de Cardano, de 1545, distancia-se em 138 anos das primeiras evidências publicadas na *Ars Magna*.

O método de Kowa de 1683, muito semelhante ao atualmente usado para o cálculo de determinantes, como o "método de Sarrus", é considerado um resultado advindo dos cálculos de Kowa com "quadrados mágicos".

> Seki apresenta também regras para a construção de quadrados mágicos de $(2n+1)^2$ celas. Nos casos mais complicados dos quadrados com número par de celas, Seki fornece primeiro uma regra para a construção de quadrados mágicos de 4^2 celas, depois de $4(n+1)^2$ e $16n^2$ celas. Ele também simplificou o tratamento de círculos mágicos. Talvez o mais original e importante trabalho de Seki seja a criação de determinantes, em alguma época antes de 1683. Leibniz, a quem usualmente é creditada a idéia de determinantes, fez sua descoberta em 1693, quando estabeleceu que três equações lineares em x e y podem ser consistentes somente quando o determinante formado pelos seus coeficientes se anule. (CAJORI[57], 2007, p. 130).

A generalização de Kowa (1683) que elimina os valores desconhecidos de um Sistema de Equações foi desenvolvida praticamente ao mesmo tempo no Ocidente, pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) em 1693, ou seja, dez anos depois do método estipulado por Kowa.

---

[56] Apesar de ter sido o escocês Colin Maclaurin (1698 – 1746), a desenvolver uma regra para resolução de sistemas lineares, 21 anos antes do suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752), Maclaurin não batizou a regra com seu nome e, portanto, hoje a conhecemos como "regra de Cramer". (LUCCAS, 2004, p.39).

[57] Interessante observar que Florian Cajori (1859-1930) nasceu AM St. Aignan na Suíça e emigrou aos 16 anos para os EUA. Obteve o doutorado na Universidade de Tulane e em 1918 ocupou a cadeira de História da Matemática, especialmente criada para ele, na Universidade de Berkeley, permanecendo lá até sua morte em 15 de agosto de 1930. A edição do livro utilizado é tradução de adaptações da segunda edição do original A History of Mathematics publicada em 1919. Daí a inexistência do conceito de matriz em sua obra.

> Ambos alcançaram a mesma generalização, porém por “caminhos” e com objetivos distintos. Enquanto Seki Kowa buscava simplificar Sistemas de Equações para solucionar um problema geométrico, Leibniz tentava mostrar a versatilidade do uso da notação numérica no lugar de uma notação algébrica, sendo que para tal ele utilizou, como exemplo, um Sistema de Equações Lineares. (LUCCAS, 2004, p.38).

A evidência de que Leibniz apresentou um método para eliminar valores desconhecidos de um sistema linear, está explícita numa carta escrita por ele endereçada a L’Hôpital (1661-1704). Nela dizia que o sistema das equações

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{aligned}$$

possuía uma solução porque

$$10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$$

(O'CONNOR & ROBERTSON, 1996).

Notemos que a condição anterior é exatamente a que faz com que a matriz dos coeficientes tenha o determinante igual a 0.

Então, a partir do que Leibniz conseguiu explicitar na carta, ele se convenceu de que uma boa notação matemática para sistemas de coeficientes era a chave para progredir. Seus manuscritos publicados contêm mais de 50 maneiras diferentes de escrita dos sistemas de coeficientes, e este estudo abrange um período de 50 anos de sua vida (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996).

Durante esse período Leibniz conseguiu demonstrar a regra de Cramer e percebeu que um determinante poderia ser expandido usando qualquer coluna, o que é hoje conhecido como expansão de Laplace. Consequentemente, Leibniz ao estudar tais problemas trilhou um caminho que conduziria naturalmente ao conceito de matriz.

Portanto, segundo Luccas,

> [...] enquanto Leibniz recorre a um raciocínio fundamentado nos conhecimentos da Análise Combinatória para enunciar seu teorema geral, provável herança de sua dissertação Sobre a Arte Combinatória, e também de sua concepção filosófica, Kowa recorre a diagramas e tabelas, possivelmente originários de trabalhos desenvolvidos por ele com quadrados mágicos, e a elementos da Análise Combinatória, mais precisamente à operação permutação. (LUCCAS, 2004, p.76).

Além disso, a busca por métodos que resolvessem problemas de sistemas lineares foi intensa. Outros matemáticos, como Maclaurin, Cramer e Cardano, por exemplo, apresentaram um método que consistia em não mais eliminar valores desconhecidos, mas sim, que tentava encontrá-los (LUCCAS, 2004, p.38). O estudo dispensado a encontrar métodos para resolução de sistemas lineares foram a “gênese do processo que empregamos atualmente no cálculo de determinantes” (LUCCAS, 2004, p.51).

Conseqüentemente, os trabalhos que envolviam determinantes começaram a aparecer com certa freqüência no século XVII. Houve publicações de Étienne Bezout (1730-1783) em 1764, de Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) em 1771, de Pierre-Simon Laplace (1749-1827) em 1772 e de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) em 1773.

O próximo passo importante seria dado pelo matemático Gauss em 1801:

> O termo 'determinante' foi introduzido primeiramente por Gauss nos *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) ao discutir formas quadráticas. Ele utilizou a palavra determinante porque esse elemento determina as propriedades da forma quadrática. Entretanto, o conceito não é o mesmo que aquele que utilizamos hoje. No mesmo trabalho, Gauss destaca os coeficientes de formas quadráticas colocando-os em uma disposição retangular. Ele descreve a multiplicação de matrizes (que ele pensava como composição, já que não havia chegado ao conceito de álgebra matricial como temos hoje) e a inversa de uma matriz no contexto particular das disposições retangulares dos coeficientes das formas quadráticas. (O’CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.3 – tradução nossa)[58][59]

Contudo, foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857), no ano de 1812 quem usou a palavra “determinante” em seu sentido moderno. O trabalho de Cauchy foi o mais completo e adiantado sobre os determinantes (O’CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.5).

Outros trabalhos que também colaboraram para a construção do conceito das matrizes apareceram nos anos de 1826 com Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), em 1850 com Leopold Kronecker (1823-1891) e em 1860 com Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897). Estes dois últimos previram que do estudo com transformações lineares se chegaria a uma tabela bem estruturada, assim como a teoria das matrizes se mostra hoje.

Mas foi em 1841 que dois fatos importantes aconteceram. O primeiro foi a maneira algorítmica com que foram apresentados os determinantes nos três tratados sobre

---

[58] The term 'determinant' was first introduced by Gauss in *Disquisitiones arithmeticae* (1801) while discussing quadratic forms. He used the term because the determinant determines the properties of the quadratic form. However the concept is not the same as that of our determinant. In the same work Gauss lays out the coefficients of his quadratic forms in rectangular arrays. He describes matrix multiplication (which he thinks of as composition so he has not yet reached the concept of matrix algebra) and the inverse of a matrix in the particular context of the arrays of coefficients of quadratic forms. (O’CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.3).

[59] Esta informação também se encontra em Boyer, 1974, p. 376.

determinantes publicados por Jacobi, neles as entradas não eram especificadas como numéricas ou funcionais, poderiam ser qualquer um dos dois conceitos. O segundo foi uma publicação de Cayley na qual eram traçados dois riscos verticais que delimitavam o determinante, notação que utilizamos até hoje (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.5).

Esses trabalhos de 1841 apresentavam uma importante diferença no tratamento das matrizes. Antes disso, elas eram consideradas como tabelas numéricas associadas a coeficientes de sistemas lineares. Eram estáticas.

Já nesses trabalhos de 1841 pode-se identificar as tabelas como um novo conceito, dessa vez dinâmico, associado ao movimento, regido por transformações lineares.

A primeira vez com que as matrizes foram tratadas mediante o uso de letras e suas operações foram consideradas como as resultantes de regras operatórias usuais sobre essas letras, com exceção da lei da comutatividade, foi em 1844 com Ferdinand Gotthold Max Eisentein (1823-1852) (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996, p.6).

A importância desse fato está na abstração do tratamento de matrizes e determinantes. Se antes disso a contextualização era tão importante a ponto de impedir a compreensão da tabela numérica como objeto matemático e não um conjunto de números agrupados devido ao contexto, depois de Eisenstein os matemáticos poderiam perceber o elemento matriz como um só objeto matemático, passando a estudá-lo como tal.

Na próxima parte desta seção, será evidenciado justamente os trabalhos de Sylvester, Cayley e Weyr que contribuíram para novas aplicações das matrizes. Antes, porém, é preciso destacar as heranças advindas da "escola inglesa" de Cambridge, que colaboraram para os estudos de ambos.

Escola algébrica inglesa

Antes de procurar na teoria das matrizes de Cayley as premissas de estruturas algébricas, como as álgebras associativas, é preciso revelar a herança que conduziu Cayley e Sylvester aos estudos algébricos.

Em 1858 Cayley escreveu uma memória sobre a teoria das matrizes, que se consagrou por ser composta em virtude dos trabalhos da geração de matemáticos que precederam a Cayley e Sylvester. Esta geração de matemáticos ficou conhecida como "*escola algébrica inglesa*" da primeira metade do século XIX (BRECHENMACHER, 2006, p.18).

O resultado da memória de Cayley – a generalização de funções racionais às expressões simbólicas – era, com efeito, uma das grandes preocupações da escola algébrica inglesa[60], que desde então deveu a Cayley este grande avanço (BRECHENMACHER, 2006, p.18).

Primeiramente, Sylvester se interessou pelas relações entre as causas determinantes e propriedades geométricas resultantes da intersecção de duas cônicas. Estes estudos que iniciaram próximo aos anos 1850 revelaram a iniciação a uma nova estrutura em forma de tabela. Este foi o prelúdio de estudos que anos mais tarde chegariam nas denominadas Matrizes.

Seguidamente, Cayley, ao interagir com os resultados de Sylvester, empregou a notação matricial, e foi além, compôs a TEORIA DAS MATRIZES.

Ambos os trabalhos atenderam aos anseios da escola algébrica inglesa e estabeleceram um marco para a história das estruturas algébricas.

[60] [...] os membros de "network" de Cambridge impunham uma filosofia calcada na álgebra que era caracterizada pela importância dada às operações sobre os objetos. (BRECHENMACHER, 2006, p.19, grifos do autor – tradução nossa).

2.2 DOS ANOS 1850 A 1930

Na segunda metade do século XIX dois personagens se destacaram na produção de estudos que colaboraram para a consolidação do conceito de matriz. São eles: James Joseph Sylvester e Arthur Cayley.

Faremos uma breve apresentação destes dois personagens segundo Boyer (1999), Higham (2008), MacTutor (2008) e Brechenmacher (2006):

- *Cayley era de boa índole e tinha um bom temperamento. Sylvester era irrequieto e impaciente;*
- *Cayley estudara em Cambridge (em Trinity) e Sylvester estudara em Cambridge (em St. John);*
- *Sylvester iniciara sua vida de professor lecionando por três anos na University College, em Londres. Anos depois passou sua vida lidando com negócios e estudando direito, foi quando conheceu Cayley. Em 1850, após o encontro com Cayley, Sylvester decidiu abandonar a advocacia e tornou-se um matemático;*
- *O interesse de Sylvester pela teoria das matrizes veio durante suas caminhadas com Cayley, com quem trabalhou na área de direito na corte de Lincolns' Inn, antes de ir para a América;*
- *Após o encontro com Sylvester em 1850 e posteriormente sua dedicação total a matemática, Cayley aceitou o posto de professor em Cambridge;*
- *Cayley ocupa o terceiro lugar entre os escritores de matemática mais prolíferos em toda história desta ciência, perdendo apenas para Euler e Cauchy. Em Collected Mathematical Papers, de Cayley há 966 artigos, num total de treze volumes com cerca de 600 páginas cada um, abordando todas as áreas da matemática;*
- *Cayley lia e se interava frequentemente sobre os trabalhos de outros matemáticos. Sylvester não se interessava pelos trabalhos realizados por outros matemáticos, não aceitava críticas;*
- *Em 1854, Sylvester aceitou um posto na Royal Military Academy em Woolwich e em 1876 transferiu-se para a América do Norte, lecionando na Johns Hopkins University;*
- *Em meados dos seus setenta anos de idade, Sylvester aceitou um posto de professor na Universidade de Oxford;*

- *Sylvester sempre foi fiel à álgebra, não estudando outras áreas da matemática; Cayley foi eclético ao escrever matemática, falava sobre geometria, análise e álgebra.*

A história da noção de matriz começa em 1858, data da publicação de uma famosa memória de Cayley, chegando aos anos 30 do século XX como um elemento básico na arquitetura do saber algébrico. “A aquisição deste estatuto elementar numa teoria, a álgebra linear, deu às matrizes uma identidade forte e, ao mesmo tempo, esmagou a pluralidade da sua história” (BRECHENMACHER, 2006, p.3). James Joseph Sylvester, Arthur Cayley e Eduard Weyr tornaram-se personagens ocultos em função de uma teoria que responderia por si própria, uma teoria que, consolidada, encobriria sua trajetória histórica.

Nos anos de 1920 a 1930, por exemplo, ocorreram muitas publicações sobre as matrizes. As formas de representações figuradas invadiram os textos matemáticos publicados em todas as línguas, no domínio da investigação científica como no do ensino (BRECHENMACHER, 2006, p.4).

Mas como uma noção, já anunciada em 1858 por Cayley, poderia ser ainda novidade nas décadas de 1920 e 1930?

Segundo H.W. Turnbull e A.C. Aitken (1932 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.2), em seu tratado *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, de 1932, dizia que a novidade da teoria das "matrizes canônicas" está na utilização das "propriedades" do "idioma matricial" em oposição a uma teoria clássica, a teoria das formas bilineares, unida a grandes nomes do fim século XIX como Weierstrass, Kronecker e, sobretudo, Frobenius.

De acordo com Turnbull e Aitken (T&A), o recurso à notação matricial marcava uma ruptura em relação a uma prática tradicional dos tratados de álgebra das gerações precedentes[61]. Dois argumentos são desenvolvidos para justificar esta evolução:

- Primeiro, a notação matricial é apresentada como eficaz porque permite enunciar "teoremas gerais" num "mínimo de lugar";
- Em segundo lugar, pelo entendimento de todos os autores dos anos 1920-1930, assim como T&A, a linguagem matricial se apresentava como uma estrutura “simples”, com valores pedagógicos inquestionáveis

(1932 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.4 – tradução nossa)[62].

[61] Esta popularidade das matrizes é apenas temporária. Após 1940, a consideração da dimensão infinita na teoria dos operadores dará uma importância menor à representação matricial. (BRECHENMACHER, 2006, p.4 – tradução nossa)

[62] D'abord, la notation matricielle est présentée comme *efficace* car permettant des énoncés de "théorèmes généraux" en un "minimum de place"; Surtout, et comme tous les auteurs des années 1920-1930, T&A mettent

Na introdução do seu tratado sobre a teoria dos grupos publicado em 1916, Blichfeldt incentivava o estudo das matrizes por mostrar "vantagens" com relação a "imagem mental" da "forma matricial" em oposição a "representação linear" das formas bilineares (BRECHENMACHER, 2006, p.4).

No início do século XX, os partidários da representação em quadro, como Autonne e Châtelet na França, Cullis na Grã-Bretanha, ainda eram raros. Mas a idéia segundo a qual o controle da representação matricial permitiria assimilar "mais simplesmente" "teoremas gerais" de diferentes teorias foi assunto para numerosos tratados de álgebra publicados nos anos 1930 (BRECHENMACHER, 2006, p.5).

A teoria das matrizes tratava de reduzir as matrizes às suas formas mais simples ou formas canônicas, ou seja, de elaborar práticas de "transformações", de "reduções" das "formas", normalizadas por um critério de "simplicidade (BRECHENMACHER, 2006, p.5).

Assim, Turnbull e Aitken (T&A) introduziram um novo termo que evidenciaria o aspecto de "simplicidade" da linguagem matricial, o termo era "submatrizes".

> ***Matrizes divididas em Submatrizes.***
> *É conveniente estender o uso das leis fundamentais da combinação para matrizes, ao passo de considerar a construção de uma matriz baseada não em elementos, mas como a junção de submatrizes, ou matrizes menores, dos elementos. Como exemplo, a matriz*
>
> $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
>
> *pode ser escrita*
>
> $$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$
>
> *onde*
>
> $$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$
>
> *O caráter operacional é conferido à representação matricial que decompõe-se cultivando a analogia com as figuras da geometria (fala-se assim de retângulo, triângulo, diagonal). O método matricial constrói-se articulando práticas combinatórias de extrações sob matrizes, decomposições polinomiais, um cálculo simbólico das potências de matrizes, uma aritmética das linhas e as colunas e o*

---

en avant les *valeurs pédagogiques* d'une représentation présentée comme "simple". (TURNBULL & AITKEN, 1932 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.4).

> *ponto de vista vetorial de decomposição de um espaço sob espaços estáveis pela ação de uma transformação linear* (TURNBULL & AIKEN, 1932. p.5-6 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.6)[63].

Segundo Brechenmacher (2006, p.6) as diferentes demonstrações do teorema de Jordan, as aplicações a diferentes problemas como a investigação das matrizes que comutam com uma matriz dada, foram tantos os exemplos da eficácia de uma prática algébrica que recorre às formas, imagens – que Picard designava ainda em 1910 como "desenhos" –, que nos anos 30, elas invadiram os textos matemáticos.

Nos anos 1920-1930, os métodos operacionais desenvolvidos sobre a representação matricial são objeto de comunicações nos congressos e de publicações em todas as línguas. Estes métodos se sobrepõem ao caráter unificador da representação matricial a partir de práticas algébricas anteriormente distintas, fazem da teoria das matrizes uma teoria internacional que participa na reorganização do saber algébrico efetuada nessa época com a elaboração da álgebra linear. (BRECHENMACHER, 2006, p.7)

A representação matricial teve um impacto surpreendente no início do século XX, isso porque, ela se destacou numa época que via a emergência de estruturas baseadas em novas noções frequentemente qualificadas de abstratos e unificadores como os grupos, os módulos e os vetores. No entanto, o caráter unificador da teoria das matrizes nos anos 30, foi fundado sobre práticas operacionais, que, longe a ser abstraídas, foram associadas à uma forma de

---

[63]**Matrices partitioned into Submatrices.**
It is convenient to extend the use of the fundamental laws of combination for matrices to the case where a matrix is regarded as constructed not so much from elements as from submatrices, or minor matrices, of elements. For example, the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

can be written

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

Comme l'illustrent les extraits suivants et la démonstration du théorème de Jordan donnée en encart 3, un *caractère opératoire* est conféré à la représentation matricielle que l'on *décompose* en cultivant l'analogie avec les figures de la *géométrie* (on parle ainsi de rectangle, triangle, diagonale). La méthode matricielle se construit en articulant des pratiques *combinatoires* d'extractions de sous matrices, des *décompositions polynomiales*, un *calcul symbolique* des puissances de matrices, une *arithmétique* des lignes et des colonnes et le point de vue vectoriel de *décomposition d'un espace* en *sous espaces stables* par l'action d'une transformation linéaire. (TURNBULL & AIKEN, 1932. p.5-6 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.6).

representação por imagens.

Por esta razão, o problema da história dos métodos matriciais frequentemente passou despercebido de trabalhos históricos focalizados sobre as noções abstratas e estruturais da álgebra linear. A representação matricial, de resto, frequentemente foi utilizada nos discursos históricos como uma representação inofensiva, natural, privada de história. Devido a isso, segundo Brechenmacher (2006), a história das matrizes nos impõe uma série de problemáticas:

> *Como compreender que a teoria das matrizes canônicas unifica-se em 1930 ao redor de métodos operacionais enquanto que tais métodos já estavam presentes numa memória de Cayley em 1858?*
> *Porque este desvio de 80 anos?*
> *Pode-se suspeitar que a noção de matriz do século XXe não era a mesma que a de Cayley, então é necessário fazer a pergunta das evoluções na identidade da noção de matriz levando a nossa atenção sobre as práticas operacionais elaboradas entre 1858 e 1930.*
> *Mas os autores como escolher os textos e, sobre quais levar o nosso estudo?*
> *Antes dos anos 30, o caráter operacional da representação em quadro não era identificado como um problema matemático. No início do século, por exemplo, o relatório de Picard sobre a tese de Châtelet (1910), que tratava de esclarecer as práticas do "cálculo dos quadros", manifestava um grande ceticismo sobre o interesse matemático de um trabalho de doutorado consagrado à "desenhos". Se o cálculo dos quadros retornasse já ao tempo de Châtelet à uma tradição antiga, forte das contribuições de Cauchy, de Hermite, de Jordan ou de Poincaré, os métodos associados continuavam a ser implícitos. Como abordar a história dos métodos operacionais associados às matrizes enquanto que a representação que o subjaziam não era identificada como problemática antes da teoria das matrizes canônicas dos anos 30? (BRECHENMACHER, 2006, p.8 – tradução nossa)*[64].

Para compreendermos as problemáticas subjacentes ao conceito das matrizes, dividiremos a seção 2.2 em quatro momentos: os estudos de Sylvester, os de Cayley, os de Sylvester e Cayley, e os de Weyr, tentando assim, chegar à convergência entre os textos destes autores, caminhando para os anos 1930, quando a representação matricial alcançou um

[64] Comment comprendre que la théorie des matrices canoniques s'unifie en 1930 autour de procédés opératoires alors que de tels procédés étaient déjà présents dans un mémoire de Cayley en 1858 ? Pourquoi cet écart de 80 ans ? Si l'on peut soupçonner que la notion de matrice du XXe siècle n'est pas la *même* que celle de Cayley, il faut alors poser la question des *évolutions* dans *l'identité* de la notion de matrice en portant notre attention sur les *pratiques opératoires élaborées entre 1858 et 1930*. Mais comment choisir les textes et les auteurs, sur lesquels porter notre étude ? Avant lês années trente, le caractère opératoire de la représentation en tableau n'était pas identifié comme un *problème* mathématique. Au début du siècle, par exemple, le rapport de Picard sur la thèse de Chatelet (1910), consacrée à *expliciter* les pratiques du « calcul des tableaux », manifestait un grand scepticisme sur l'intérêt mathématique d'un travail de doctorat consacré à des « dessins ». Si le calcul des tableaux renvoyait déjà au temps de Chatelet à une tradition ancienne, forte des contributions de Cauchy, Hermite, Jordan ou Poincaré, les procedes associés restaient *implicites* (9). *Comment aborder l'histoire des procédés opératoires associes aux matrices alors que la représentation qui les sous-tend n'est pas identifiée comme problématique avant la théorie des matrices canoniques des années trente* ? (BRECHENMACHER, 2006, p.8).

lugar de destaque nas comunicações científicas. Embora a divisão da seção 2.2 vá permitir uma explanação da história das matrizes, o período de 80 anos citado no trecho anterior de Brechenmacher também não foi mais aprofundado nesta pesquisa por dificuldades em buscar fontes fora do país.

2.2.1 SYLVESTER E AS MATRIZES

As matrizes apareceram no trabalho de Sylvester, no âmbito de seus estudos geométricos, mais especificamente na identificação de interseções de duas cônicas[65]. Entre 1850 e 1851, ele publicou quatro memórias consagradas ao problema das interseções entre cônicas e quádricas([66]). Na realidade, as matrizes apareceram nesses trabalhos como resultados secundários, e só mais tarde se tornaram o principal objeto de pesquisa de Sylvester (BRECHENMACHER, 2006, p. 10).

Em Novembro de 1850, no artigo "On the intersections, contacts and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates" publicado na Cambridge and Dublim Mathematical Jornal, Sylvester abordou os tipos de interseções que poderiam acontecer entre duas cônicas.

A caracterização das interseções de cônicas já tinha sido tratada por Plücker (1801-1868) em 1828 e a originalidade do trabalho de Sylvester residia, sobretudo, no recurso ao cálculo das causas determinantes em oposição ao método analítico desenvolvido pelos cientistas franceses da Escola Politécnica como Hachette (1769-1834) em (1802), e Cauchy ou Biot (1774-1862) em (1826). Para Sylvester, o método analítico tradicional não permitia considerar equações "arbitrárias", ao contrário do caráter intrínseco do cálculo das causas determinantes que era mais flexível a isso (BRECHENMACHER, 2006, p.10).

A fim de caracterizar os cinco tipos de interseção, Sylvester comparou as decomposições algébricas polinomiais $|U+\lambda V|$ – onde U e V eram as matrizes das formas quadráticas associadas a duas cônicas respectivamente e λ era uma variável qualquer[67] –, com as decomposições da causa determinante $|U+\lambda V|$ através de "menores" extraídos de uma matriz (BRECHENMACHER, 2006, p.11). Este problema consistia basicamente em relacionar as interseções de duas cônicas U e V com a multiplicidade das raízes da equação $|U+\lambda V| = 0$.

---

[65] Uma cônica é uma curva plana obtida pela interseção de um plano e um cone.

[66] Na ordem cronológica, as quatro publicações de Sylvester são as seguintes: "On the intersections, contacts and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates" [1850a], "”Additions to the articles "On an new class of theorems" and on Pascal theorem”" [1850b], "An enumeration of the contactos of lines and superfaces of the second order" [1851a], "On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions" [1851b]. (Brechenmacher, 2006).

[67] Quando não há nenhum contato, por exemplo, as matrizes U e V associadas a cônicas, têm polinômios característicos do tipo: $U = x^2 + y^2 + z^2$ e $V = ax^2 + by^2 + cz^2$. As três raízes de $det(V+\lambda U) = 0$ seriam: $\lambda = -a$, $\lambda = -b$, $\lambda = -c$.

Em 1851 Sylvester publicou duas memórias e generalizou os seus trabalhos às interseções quádricas e, mais geralmente, a formas quadráticas U e V composta por n variáveis. A extração efetiva dos menores de uma causa determinante – ou melhor dizendo, determinantes de matrizes menores – de ordem n apoiou-se, então, sobre uma representação em quadro retangular que Sylvester designou como Menores da *Matriz*:

> [...] devemos começar com, não um quadrado, mas um arranjo oblongo de termos constituído, por exemplo, de *m* linhas e *n* colunas. Este arranjo, ele mesmo não representa uma causa determinante, mas uma Matriz a partir da qual podemos formar diferentes sistemas de causas determinantes fixando um número *p* e selecionando à vontade *p* linhas e *p* colunas, os quadrados correspondentes que podem ser designados determinantes de p^e ordem. (SYLVESTER, 1851a, p. 296 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.14 – tradução nossa)[68].

Já a segunda memória de Sylvester, *"On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions"* (1851b), é consagrada ao enunciado das propriedades dos menores como invariantes de transformações lineares. Neste contexto, foi definida explicitamente a noção de "matriz" como "mãe dos menores de uma causa determinante" (BRECHENMACHER, 2006, P.15).

Neste trabalho Sylvester "descobriu" como uma boa notação matemática poderia transformar alguns conceitos em novos objetos matemáticos para serem estudados. Destacamos o seguinte trecho no qual ele explica isso.

> Defini numa publicação precedente, uma "Matriz" como uma seqüência retangular de termos, à qual pode ser gerada de diferentes sistemas de causas determinantes, como o útero de um parente comum; estas causas determinantes aparentadas são longe a ser isoladas nas suas relações umas das outras, estão sujeitas à certas leis simples de dependência mútua e anulação simultânea. A representação condensada de tal matriz, retomando a notação que desenvolvi a partir da de Vandermonde, será
>
> $$\begin{Bmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n \end{Bmatrix}$$
>
> [...] é fantástico que uma teoria de tal pureza analítica encontra a sua origem em especulações geométricas. De acordo com o meu amigo Hermite algumas indicações podem supor que uma teoria semelhante encontrar-se-ia nas *Recherches Arithmétiques* de Gauss. A minha notação é semelhante à de Vandermonde e fiquei familiar desde a publicação da minha precedente memória [de Novembro de 1850] à ajuda do notável tratado de Spottiswoode, *On the elementary Theorems of*

---

[68] […] we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of *m* lines and *n* columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number *p* and selecting at will *p* lines and *p* columns, the square corresponding to which we may be termed determinants of the *pth* order. (SYLVESTER, 1851a, p. 296 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.14).

> *Determinant*s. Vandermonde estava no bom caminho e não hesitou em afirmar a superioridade da nossa notação sobre a empregada pelos métodos comuns, esta notação tem uma importância para os progressos da análise, comparável à superioridade da notação do cálculo diferencial sobre o sistema de fluxos. Porque, com efeito, o que é o que é o cálculo da causa determinante se não uma álgebra da álgebra, um cálculo que permite combinar e prever os resultados de operações algébricas de maneira similar à álgebra, ela mesmo que nos dispensa operações específicas da aritmética. (SYLVESTER, 1851b, p.296 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p. 15, grifos do autor – tradução nossa)[69].

É importante observar que a origem do conceito moderno de matriz – baseado nos estudos de Sylvester – está associado: aos métodos de cálculo de “menores” extraídos de um quadro (que seria chamado de matriz), o que facilitaria os cálculos de determinantes; mais particularmente à uma prática específica que articula extrações de menores à uma decomposição polinomial a fim de resolver o problema colocado pela ocorrência de raízes características múltiplas no processo de interseção de duas cônicas.

O problema geral de catalogar todos os sistemas de menores extraídos de uma causa determinante suscitou, em 1855, o interesse de Cayley para a noção de matriz, o que fez com que ele publicasse três artigos sucessivos, todos em 1855.

---

[69] I have in previous papers defined a « Matrix » as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent ; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another, but subject to certain simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. The condensed representation of any such matrix, according to my improved Vandermondian notation, will be

$$\left\{\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \end{matrix}\right\}$$

[…] It is wonderful that a theory so purely analytical should originate in a geometrical speculation. My friend M. Hermite has pointed out to me, that some faint indications of the same theory may be found in the Recherches Arithmétiques of Gauss. The notation which I have employed for determinants is very similar to that of Vandermonde, with which I have become acquainted since writing the above, in Mr Spottiswoode’s valuable treatise On the elementary Theorems of Determinants. Vandermonde was evidently on the right road. I do not hesitate to affirm, that the superiority of his and my notation over that in use in the ordinary methods is as great and almost as important to the progress of analysis, as the superiority of the notation of the differential calculus over that of the fluxional system. For what is the theory of determinants? It is an algebra upon algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in the same way as algebra itself enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic. All analysis must ultimately clothe itself under this form. (SYLVESTER, 1851b, p.296 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p. 15).

2.2.2 CAYLEY E AS MATRIZES

O interesse de Cayley pelas matrizes (ainda chamadas quadros retangulares) decorreu das intensas colaborações matemáticas entre ele e Sylvester, ainda na primeira metade do século XIX, e dessas colaborações, Cayley publicou um artigo, em 1855, intitulado "*Observações sobre a notação das funções algébricas*" (BRECHENMACHER, 2006, p.16).

Neste mesmo ano, Cayley adotou pela primeira vez a noção de matriz como uma "notação cômoda" (tanto para Sylvester quanto para Cayley esta era a visão que tinham de matrizes) para representar a teoria das equações lineares e as formas quadráticas, ou seja, Cayley observou a possibilidade de empregar a notação matricial para representar as "funções lineares" que intervêm na "teoria das aplicações homográficas". Consequentemente, empregar as matrizes dessa forma, forneceu elementos para que, mais tarde, Cayley enunciasse o teorema que apresentaria um método para o cálculo das funções lineares (BRECHENMACHER, 2006, p.17,18).

Segundo Cayley (*apud* BRECHENMACHER, 2006, p.16):

> Um sistema de quantidades arranjadas na forma de quadrado, mas de resto completamente independentes (não falo aqui das matrizes retangulares). Esta notação parece-me muito cômoda para a teoria das equações lineares; escrevo por exemplo
>
> $$(\xi, \eta, \zeta, ...) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & ... \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & ... \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & ... \\ . & & & \\ . & & & ... \\ . & & & \end{vmatrix} (x, y, z, ...)$$
>
> para representar o sistema das equações
>
> $$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z..., \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z..., \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z..., \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$
>
> (CAYLEY, 1855b , p.282 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.16 – tradução nossa)[70].

---

[70] Un système de quantités rangées en forme de carré, mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires). Cette notation me paraît très commode pour la théorie des équations linéaires. ; j'écris par exemple

Em seguida, num trabalho de 1858, intitulado "Uma memória sobre a teoria das matrizes", Cayley manifestara uma evolução da noção de matriz. A partir deste momento, a matriz não seria mais uma simples “notação cômoda”; o que permitiria distinguir um objeto, como um sistema linear, de uma forma quadrática da sua causa determinante.

As matrizes tornavam-se objeto de uma “teoria”, o que acarretaria numa nova visão sobre inúmeras pesquisas na matemática. Este avanço da teoria das matrizes deve-se também aos estudos de Cayley que culminaram no considerável “Teorema Notável”, o qual alavancou as pesquisas da época (BRECHENMACHER, p. 17).

Podemos recuperar as palavras de Cayley, de 1858, quando se reporta ao Teorema Notável:

> [...] não obstante, é possível dar forma as potências (positivas ou negativas, integrais ou fracionárias), de uma matriz, e daqui chegar à noção de uma função racional e integral, ou geralmente de toda a função algébrica, de uma matriz. Obtenho o teorema notável segundo o qual qualquer matriz satisfaz uma equação algébrica da sua própria ordem [...]. O teorema mostra que qualquer função racional de uma matriz pode ser considerada como uma função racional de grau igual ou maior ao da matriz menos uma unidade: num sentido, a mesma coisa é verdadeira para qualquer função algébrica de uma matriz. (CAYLEY, 1858, 17 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.18 – tradução nossa)[71].

Depois da Memória de Cayley e a repercussão do Teorema Notável, os trabalhos de Cayley foram citados e comentados pelos matemáticos que trabalhavam, no fim do século

---

$$(\xi,\eta,\zeta,\ldots)=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \ldots\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \ldots\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \ldots\\ . & & & \\ . & & & \ldots\\ . & & & \end{vmatrix}(x,y,z,\ldots)$$

pour représenter le système des équations

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha x+\beta y+\gamma z\ldots,\\ \eta &= \alpha' x+\beta' y+\gamma' z\ldots,\\ \zeta &= \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z\ldots,\\ &.\\ &.\\ &.\end{aligned}$$

(CAYLEY, 1855b , p.282 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.16).

[71] […] it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional), of a matrix, and hence to arrive at the notion of a rational and integral function, or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order […]. The theorem shows that every rational and integral function (or indeed every rational function) of a matrix may be considered as a rational and integral function, the degree of which is at most equal to that of the matrix, less unity: it even shows that in a sense, the same is true with respect to any algebraical function whatever of a matrix. (CAYLEY, 1858, 17 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.18)

XIX.

Ainda, segundo Boyer (1999), a memória de Cayley de 1858 era um estudo das transformações lineares. Ele explica:

Se, por exemplo, aplicamos após a transformação

$$T_1\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

uma outra transformação

$$T_2\begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

o resultado (que aparecera já antes, por exemplo nas Disquisitiones arithmeticae de Gauss em 1801) é equivalente à transformação composta

$$T_1T_2\begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}.$$

Se, de outro lado, invertemos a ordem de T_1 e T_2, de modo que T_2 é a transformação

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

e T_1 é a transformação

$$\begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

então essas duas aplicadas sucessivamente equivalem à transformação única

$$T_1T_2\begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y \end{cases}.$$

A troca da ordem das transformações em geral produz um resultado diferente. Expresso na linguagem das matrizes,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix},$$

mas

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

(BOYER, 1999, p.407-408).

Este exemplo, como se observa, é o exemplo de uma operação multiplicativa não comutativa, desse modo as matrizes faziam parte do grupo das álgebras associativas não-comutativas.

De acordo com Boyer (1999, p.408), Cayley definiu não somente a multiplicação entre matrizes, mas também a adição entre matrizes, a multiplicação entre um escalar e uma matriz e determinou que característica teria a matriz identidade e a matriz nula.

A partir de 1890, o trabalho de Cayley, *Uma memória sobre a teoria das matrizes*, o qual apresentava estas "leis" de operações sobre as matrizes, foi considerado como um dos primeiros trabalhos originais da teoria das álgebras associativas.

A satisfação de Cayley com relação às possibilidades aritméticas das matrizes quadradas, mostrando que poderiam ser estudadas como um novo objeto matemático, é vista na seguinte citação:

> Veremos que as matrizes (todas as tomadas da mesma ordem) comportam-se como quantidades simples: podem ser adicionadas, multiplicadas ou compostas umas com as outras; a lei de adição das matrizes é precisamente semelhante à da adição das quantidades algébricas comuns, no que diz respeito à multiplicação (ou a composição) ela tem uma especificidade porque as matrizes não são, em geral, comutativas. (CAYLEY, 1858, p.17, *apud* BRECHENMACHER, 2006, p. 19 – tradução nossa)[72].

Dessa forma a teoria das matrizes permitiu que se explorasse propriedades de métodos simbólicos e que se definisse leis operacionais que dão à matriz-mãe de menores de Sylvester um comportamento similar ao das "quantidades algébricas comuns".

Com estas leis operacionais deduzimos que uma das grandes preocupações da escola inglesa, que era a generalização de funções racionais às expressões simbólicas, citada anteriormente, ficou resolvida. No entanto, os problemas de cálculos de potências e raízes de matrizes, ilustrados na memória de Cayley, “retornaram a uma preocupação tradicional da escola inglesa desde os trabalhos de Herschell (1792-1871), em 1813, sobre a notação dos operadores diferenciais e a propriedade $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x)$” (BRECHENMACHER, 2006, p.19).

Para este outro problema, Cayley mostrou que qualquer função racional de uma matriz, em especial $\sqrt{M}$, poderia exprimir-se como uma "função inteira" de grau inferior ao da própria matriz, e definiu as operações sobre as matrizes que se revelavam necessárias para exprimir $\sqrt{M}$ por funções inteiras (BRECHENMACHER, 2006, p.19).

[72] It will be seen that matrices (attending to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, etc.: the law of addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities ; as regards to their multiplication (or composition) there is the peculiarity that matrices are not in general convertible. (CAYLEY, 1858, p.17, *apud* BRECHENMACHER, 2006, p. 19).

Como funcionou este desenvolvimento, mostraremos resumidamente:

> A equação $M^2 = 1$ admite outras soluções que ±1. É para o estudo desta propriedade específica das equações de matrizes que Cayley desenvolve um método baseado no emprego do teorema notável.
> [...] O método de Cayley consiste em fatorar a equação $M^3 - AM^2 + BM - C = 0$ por $M^2 - 1$. Se $1 + B = 0$ e $A + C = 0$, obtém-se:
> $$(M^2 - 1)(M + C) = 0$$
>
> Como observa Cayley, sua intenção era deduzir desta última equação a conclusão $M^2 - 1 = 0$ e $M^2 = 1$. Ora, isto é todo o objeto da última parte da memória de Cayley, ou seja, que pode-se deduzir da equação em matrizes $(M^2 - 1)(M + C) = 0$, a equação $M^2 - 1 = 0$ apenas se a matriz $M + C$ tem uma causa determinante não nula. (BRECHENMACHER, 2006, p.21 – tradução nossa)[73].

Como podemos observar, Cayley foi uma peça essencial para a evolução de teorias da escola inglesa, esclarecendo e desenvolvendo tanto métodos simbólicos como também construindo teorias. Todo este avanço, decorrido no período de 1855 a 1858, veio caracterizar a matriz não mais como a mãe dos menores do determinante, mas pelas leis de um cálculo simbólico e pelo resultado do teorema notável.

Do período de 1858 a 1890, porém, segundo Brechenmacher (2006, p.23), a teoria das matrizes, que foi introduzida por Cayley, estagnou-se, sendo citada somente mais tarde, quando novamente foi amplamente estudada. Brechenmacher, com relação a isso, lançou as seguintes perguntas:

> - Como interpretar esta estacionada da herança da teoria das matrizes de Cayley?
> - Como o texto de Cayley adquire uma posteridade tão forte após décadas de indiferença?
> - Estas duas perguntas misturam-se em uma só: a noção de matriz de 1890 é ela a mesma que a de Cayley de 1858? É necessário, com efeito, entre a definição de 1858 e a herança de 1890, reconhecermos uma dupla origem histórica da noção de matriz. (BRECHENMACHER, 2006, p.23 – tradução nossa)[74].

---

[73] L'équation *M2=1* admet d'autres solutions que *±1*. C'est pour l'étude de cette propriété particulière des équations de matrices que Cayley développe une méthode basée sur l'emploi du théorème remarquable. [...]La méthode de Cayley consiste à factoriser l'équation $M^3 - AM^2 + BM - C = 0$ par $M^2 - 1$. Se $1 + B = 0$ et $A + C = 0$, on obtient:
$$(M^2 - 1)(M + C) = 0$$
Comme le fait remarquer Cayley, on aimerait déduire de cette dernière équation la conclusion $M^2-1=0$ et $M^2=1$. Or, et c'est tout l'objet de la dernière partie du mémoire de Cayley, on ne peut déduire de l'équation en matrices $(M^2-1)(M+C)=0$, l'équation $M^2-1=0$ que dans le cas où la matrice $M+C$ a un déterminant non nul. (BRECHENMACHER, 2006, p.21).

[74] Comment interpréter cette éclipse dans l'héritage de la théorie des matrices de Cayley ? Comment le texte de Cayley acquiert-il une postérité si forte après des décennies d'indifférence ? Ces deux questions se mêlent en une seule : la notion de matrice de 1890 est elle la même que celle de Cayley de 1858 ? *Il faut en fait, entre la définition de 1858 et l'héritage de 1890, reconnaître une double origine historique de la notion de matrice.* (BRECHENMACHER, 2006, p.23– grifos do autor).

Apesar deste período de 32 anos (1858-1890) que a pesquisa de Cayley ficou "esquecida", vale lembrar que no período de 1882 a 1885, Sylvester fez uma releitura de seus próprios trabalhos de 1851 e leituras também dos trabalhos de Cayley, e chegou a resultados promissores.

2.2.3 SYLVESTER, CAYLEY E AS MATRIZES

No período de 1882 a 1885, Sylvester, após reler a memória de Cayley (1858) e rever seus estudos de 1851, melhorou seus resultados sobre como escrever as "funções potências e raízes da substituição linear, associada como uma função numérica das raízes da equação $\det(\varphi - \lambda I) = 0$" (BRECHENMACHER, 2006, p.24, tradução nossa).

No caso de ocorrência de raízes múltiplas, por exemplo, a noção de matriz como geradora dos menores, permitiu dar todas as soluções e então, Sylvester atribui esta articulação de idéias, ao caso específico tratado por Cayley em 1858.

As conclusões de Sylvester manifestaram uma nova leitura da memória de Cayley de 1858. A partir de 1884, uma matriz tornou-se, para Sylvester, não somente uma quantidade, mas uma quantidade que verificava uma equação algébrica, "a equação idêntica". A caracterização das matrizes cuja equação idêntica era de grau menor que a equação característica foi o principal objeto de pesquisa dos trabalhos de Sylvester a partir de 1884 (BRECHENMACHER, 2006, p.29).

2.2.4 A TEORIA DAS MATRIZES NA EUROPA – EDUARD WEYR E A RELAÇÃO ENTRE AS MATRIZES E AS FORMAS BILINEARES

O primeiro matemático europeu a empregar a noção de matriz em referência à Cayley foi o geômetra de Praga Eduard Weyr. Seus primeiros trabalhos foram inspirados nas publicações feitas por Sylvester entre os anos de 1882 a 1885, em especial as releituras de Sylvester sob seus próprios trabalhos e sob a memória de Cayley de 1858 (BRECHENMACHER, 2006, p.28).

A partir de 1884, Weyr voltou-se aos estudos de Sylvester em que tratava de exprimir funções racionais de matrizes. Neste ano, Sylvester viu que a noção de matriz permitia resolver as dificuldades postas pela ocorrência de raízes latentes múltiplas, primeiro para o problema das interseções de cônicas de 1851, e seguidamente, para o da expressão das funções racionais de uma aplicação homográfica em 1882 (BRECHENMACHER, 2006, p.30).

Em 1885, Eduard Weyr investiu nos trabalhos de Sylvester, mais particularmente ao das noções de "nulidade" e de "matriz derrogatória". As considerações obtidas destes trabalhos foram aplicadas, seguidamente, ao problema da caracterização das substituições lineares, formuladas aumentando a "distribuição das matrizes em espécies". Dessa forma, o resultado de Weyr implicava em: duas matrizes de mesma espécie têm mesma característica.

Em 1890, ele elaborou uma síntese teórica que misturava noções anteriormente distintas de formas bilineares e matrizes. A memória intitulada "Sobre as formas bilineares" (publicada em *Monasberichte für Mathematik und Physik*), de sua autoria, teve por objetivo reorganizar a teoria das formas bilineares pela noção "mais abstrata" de matriz:

> O objetivo de considerações que seguem [...] é introduzir um novo meio de ação na teoria das formas bilineares pela consideração de sistemas de valores associados a uma matriz, este método permite a solução de vários problemas e, em especial, do problema da transformação simultânea de duas formas bilineares, resolvida por Weierstrass.
> [...] Uma forma bilinear
>
> $$\sum_{(h,k)} a_{hk} x_h y_k \text{ (h, k = 1, 2, ..., n)}$$
>
> é determinada perfeitamente por uma matriz $\{a_{hk}\}$ de ordem n, ou seja por um sistema de nxn coeficientes ordenados de n linhas e de n colunas; [...] Na seqüência

> consideraremos o conceito de forma bilinear com o, mais abstrato, de matriz. (WEYR, 1890, 163 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.33 – tradução nossa)[75].

Segundo Brechenmacher (2006, p.33), antes da memória publicada por Weyr em 1890, nenhuma relação tinha sido feita entre as teorias de Cayley (sobre as matrizes) e de Frobenius (sobre as formas bilineares), por outro lado, nos anos que seguiram a publicação de Weyr, as matrizes invadiram os textos matemáticos publicados na Alemanha, interagindo, através de Weyr, com a teoria das formas bilineares.

Na reorganização da teoria das formas bilineares proposta por Weyr, em 1890, uma matriz não tinha mais uma existência autônoma, mas era associada a um sistema de valores e à noção essencial de independência linear dos sistemas.

Em resumo, os trabalhos de Weyr, de 1885, sobre a "distribuição das matrizes em espécies", fizeram com que uma verdadeira reversão teórica na teoria das formas bilineares acontecesse. A teoria que ele elaborou não era mais centrada em enunciados de invariantes polinomiais, mas sim no caráter operacional da representação matricial a fim de decompô-la às formas canônicas.

---

[75] L'objectif des considérations qui suivent [...] est d'introduire un nouveau moyen d'action dans la théorie des formes bilinéaires par la considération de systèmes de valeurs associés à une matrice, cette méthode permet la solution de plusieurs problèmes et, en particulier, du problème de la transformation simultanée de deux formes bilinéaires, résolu par Weierstrass.

[…] Une forme bilinéaire $\sum_{(h,k)} a_{hk} x_h y_k$ (h, k = 1, 2, ..., n) est parfaitement déterminée par une matrice du n^e ordre *{ahk}*, c'est à dire par un système de *nn* coefficients ordonnés en *n* lignes et *n* colonnes ;[...] Dans la suite nous considérerons le concept de forme bilinéaire avec celui, plus abstrait, de matrice. (WEYR, 1890, 163 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.33).

2.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Entre a primeira definição de matrizes como mãe dos menores de uma causa determinante, elaborada por Sylvester, em 1851, e a decomposição matricial de Weyr, as matrizes suportaram significados e práticas múltiplas.

Na década de 1850 as matrizes mãe dos menores de Sylvester, por exemplo, resultavam das extrações de menores de uma causa determinante; por outro lado, as matrizes, para Cayley, eram atribuídas ao cálculo simbólico.

Mais uma vez, em contextos diferentes, as matrizes de Sylvester e Cayley apresentaram suas particularidades. As matrizes para Sylvester eram relacionadas ao problema da multiplicidade das raízes de uma equação obtida por um cálculo determinante; para Cayley, elas visavam a generalização de funções racionais às expressões simbólicas, como buscava a tradicional escola algébrica inglesa.

Já para Weyr, as práticas matriciais interagiam concomitantemente à teoria das formas bilineares.

Segundo, Brechenmacher (2006, p.37), as releituras feitas pelos matemáticos Cayley, Sylvester e Weyr, sobre seus próprios trabalhos ou de outros pesquisadores, dão um exemplo de como práticas, elaboradas sobre um longo período e em contextos diversos, encontram-se provocando um enriquecimento do campo dos significados.

Em suas conclusões, Brechenmacher afirma que a identidade das matrizes é construída sob noções que precedem de um mesmo autor. Ele exemplifica sua afirmação dizendo que as noções de Weyr e Cayley são a mesma: “São, por um lado, a mesma, de acordo com Weyr; ele mesmo que, a partir do primeiro parágrafo da sua memória, atribui a noção de matriz à Cayley” (BRECHENMACHER, 2006, p.37).

Por outro lado, segundo ele, seriam noções diferentes dado que a referência à Cayley mistura-se à citação de outros trabalhos como os de Frobenius (1878), de Kronecker (1884) ou Sylvester (1884).

Posteriormente, Brechenmacher concluiu esta relação entre as supostas noções das matrizes, dizendo que a memória de Weyr constrói uma nova identidade entre matrizes e formas bilineares pela qual a noção de matriz de Cayley, evolui, enriquece, altera seu significado.

Um indício desta evolução seria: enquanto Cayley define as matrizes como "quantidades arranjadas na forma de quadrado", a definição de Weyr é baseada na escrita de uma "equação simbólica" à maneira de Frobenius; Weyr se utiliza da representação de "quadrado", elaborada por Cayley, como método de resolução de problemas e vai daí, chegar ao seu "cálculo das matrizes" (BRECHENMACHER, 2006, p.37).

Brechenmacher, dessa forma, reconstruiu a história das matrizes permeada pelos matemáticos de sua rede de textos pré-determinada. Contudo, ele ainda observou o trabalho de outro matemático – Jean Louis Sauvage –, prescrito por Brechenmacher a uma rede de textos diferente dos autores citados (Sylvester, a Cayley e Weyr), mas que fez um paralelo com Weyr quanto aos estudos com as matrizes, pois ambos eram da mesma época.

Sobre Sauvage, Brechenmacher escreveu:

> O método de *composição* dos menores de Sauvage pode assemelhar-se com o da *decomposição* das matrizes de Weyr, porém as duas abordagens são realmente muito diferentes. *Enquanto Sauvage apóia-se sobre uma analogia entre a forma do quadro e as formas geométricas, Weyr desenvolve um processo de iteração pelo cálculo das potências sucessivas de compartimentos de uma matriz e são operações sobre as matrizes que fazem emergir os menores e combinando-as umas com as outras.* Em oposição ao método *estático* de Sauvage, a combinatória das matrizes tem um aspecto *dinâmico específico que põe a representação em movimento*. (BRECHENMACHER, 2006, p.39-40 – grifos do autor – tradução nossa)[76].

Na seqüência dos trabalhos de Weyr, a noção de matriz ganhou uma popularidade crescente. A prática polinomial que ela permitia foi adotada para a teoria dos sistemas hipercomplexos por Scheffers (1890), para a teoria das representações de grupos por Molien (1893) e para a teoria das formas bilineares de Frobenius (1894) (BRECHENMACHER, 2006, p.40).

As matrizes tiveram no final do século XIX um momento decisivo na Alemanha. No entanto, nessa época, a representação matricial foi raramente empregada e era essencial apenas para representar uma causa determinante.

Elas eram denotadas por símbolos alfabéticos, A, B, etc. e, sobretudo empregadas para representar a identidade de uma teoria sobre noções distintas (formas bilineares e quadráticas, substituições lineares, sistemas diferenciais etc.).

[76] Si la méthode de *composition* des mineurs de Sauvage peut sembler proche de la *décomposition* des matrices de Weyr, les deux approches sont en réalité très différentes. *Tandis que Sauvage s'appuie sur une analogie entre la forme du tableau et des formes géométriques, Weyr développe un processus d'itération par le calcul des puissances successives de compartiments d'une matrice et ce sont des opérations sur les matrices qui font émerger les mineurs et les combinent les uns par rapport aux autres.* Par opposition à la méthode *statique* de Sauvage, la combinatoire des matrices a un aspect *dynamique spécifique qui met la représentation en mouvement*. (BRECHENMACHER, 2006, p.39-40).

Sua popularização na Alemanha foi acompanhada de uma identificação à teoria das formas bilineares. Esta identificação manifestava, de resto, uma história construída pelos matemáticos da época, que viam em Cayley [1858] e Frobenius [1879] duas origens de uma mesma teoria (BRECHENMACHER, 2006, p.40).

Apesar da fusão entre as teorias de Cayley e Frobenius, a de se lembrar que numerosos trabalhos que não se referiram explicitamente às matrizes ou a teoria das formas bilineares, foram unidos a contextos diferentes uns dos outros constituindo estas duas teorias.

Decomposição, recomposição, os métodos distintos do cálculo das invariantes e a decomposição às formas canônicas serão reconhecidos como complementares a teoria das matrizes nos anos 1930, por exemplo. Segundo Brechenmacher, estes complementos, ao se “misturarem”, construíram a teoria das matrizes canônicas.

Entre 1900 e 1930, jovens professores investigadores como Autonne, Séguier, de Lattès ou Chatelet emprestaram às virtudes pedagógicas das matrizes, permitindo-lhes expor as suas investigações mais recentes em tratados de ensino. Estas preocupações pedagógicas impulsionaram o desenvolvimento da teoria das matrizes canônicas, perfazendo uma dialética entre ensino e investigação, que conduziu à elaboração de uma cultura matemática comum que deu um caráter universal à representação matricial (BRECHENMACHER, 2006, p.41).

Conforme a constatação de Brechenmacher, nos tratados dos anos 1930, trabalhos matemáticos distintos do passado foram apresentados como participante de uma mesma teoria subjacente:

> A álgebra das matrizes é uma abstração matemática que subjaz teorias diversas. As formas bilineares e quadráticas, as álgebras lineares associativas ou sistemas hipercomplexos, as transformações lineares homogêneas e as funções lineares vetoriais são assim diferentes manifestações da álgebra das matrizes. Outros ramos das matemáticas como a teoria dos números, as equações diferenciais e integrais, as frações contínuas, a geometria projetiva etc. fazem uso deste assunto. De fato, numerosas propriedades fundamentais das matrizes primeiro têm sido descobertas numa aplicação específica, e apenas reconhecidas bem atrasado na sua generalidade. (MAC DUFFEE, 1933 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.41 – tradução nossa)[77].

---

[77] Matric algebra is a mathematical abstraction underlying many seemingly diverse theories. Thus bilinear and quadratic forms, linear associative algebra (hypercomplex systems), linear homogeneous transformations and linear vector functions are various manifestations of matric algebra. Other branches of mathematics as number theory, differential and integral equations, continued fractions, projective geometry etc. make use of certain portions of this subject. Indeed , many of the fundamental properties of matrices were first discovered in the notation of a particular application, and not until much later recognized in their generality. (MAC DUFFEE, 1933).

De acordo com Brechenmacher (2006, p.41), a teoria das matrizes foi um elemento importante do processo de unificação dos conhecimentos matemáticos que caracterizou o período de 1900 a 1930. Ela manifestou a construção de uma cultura comum a partir de práticas anteriormente distintas, mostrando-se ainda como objeto matemático que pôde fazer da história da álgebra linear uma história mais plural, não voltada apenas à emergência de estruturas, mas também atenta ao papel desempenhado pelas práticas, por conhecimentos e ideais sujeitos às redes das comunidades científicas.

Logo após a ascensão das matrizes na Alemanha e sua intensa influência à álgebra linear, as conseqüências da Segunda Guerra Mundial, em meados das décadas de 1930 e 1940, fizeram com que a matemática produzida nos países europeus migrasse para outros pólos de estudos, principalmente, para os dos Estados Unidos. Possivelmente, com a repercussão da teoria das matrizes, ela tenha sido um dos temas marcantes dos centros de pesquisa americanos.

Nessa época, sobretudo, havia a necessidade de uma matemática mais aplicada, e neste contexto, o cálculo de tabelas e a metodologia da pesquisa operacional foram dois fortes investimentos que acarretaram na explosão da codificação, da computação e outras máquinas programadas.

Além da difusão das matrizes percorrendo os grandes centros por motivos já citados (migração de produção científica de um pólo de pesquisa para outro; exigência de aplicabilidade matemática para fins econômicos e políticos da Segunda Guerra Mundial), podemos considerar de grande importância a propagação das estruturas algébricas realizada pelo grupo Bourbaki, de origem francesa, do qual falaremos mais adiante.

Por fim, poderíamos dizer que as marcas deixadas pelas matrizes em livros didáticos acadêmicos são uma pequena parcela considerando toda trajetória percorrida por esta teoria.

As matrizes ilustradas nos livros evidenciam uma presença marcante da notação de conjuntos, teoria que explodiu concomitantemente a das matrizes, também no início do século XX. Outro ponto marcante nos livros é o das leis operacionais das matrizes, juntamente com a determinação da matriz identidade e matriz nula, elementos desta teoria abordados em todo curso introdutório sobre as matrizes.

Estes pontos sobre a teoria das matrizes, identificados no livro de Jacy Monteiro (1959), foram alguns dos que compuseram tal teoria. Nossa pesquisa não teve acesso a livros que tivessem se destinado aos cursos superiores nas décadas de 1930 e 1940, o que supostamente nos permitiria verificar se outros elementos da teoria das matrizes fizeram parte de livros acadêmicos. Todavia, inferimos que o conteúdo das matrizes já iniciava sua transposição didática do saber científico para o saber a ser ensinado ao ensino superior, não ainda no Brasil, mas certamente na Europa, onde o grupo Bourbaki foi fundado.

CAPÍTULO 3

A MATEMÁTICA MODERNA COMO AGENTE DO PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Para compor este capítulo foi conveniente fazer um breve resumo de como o ensino secundário brasileiro encontrava-se no período pré-Matemática Moderna. Para tanto, contamos com os textos de três fontes primárias, a saber, as atas dos Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática, recortes de jornais[78] do período do Movimento da Matemática Moderna e o livro de Morris Kline *O fracasso da matemática moderna* (1976). Também nos apoiamos quando foi necessária, à verificação dos Programas de Ensino da Escola Secundária Brasileira (org. VECHIA & LORENZ, 1998).

Seguidamente, para falar da Matemática Moderna e revelar o porquê de considerá-la um agente do processo de transposição didática, nos valemos: das leituras dos trabalhos de D'Ambrosio (1987), Soares (2001), Borges (2005), Marques (2005), Rosa (2006), Nakashima (2007) e Duarte (2007). – não necessariamente citando todos eles; das atas dos Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática (CBEM – I, II, III); dos artigos de jornais da década de 60 e 70.

---

[78] Os recortes de jornais fazem parte de um acervo digitalizado, coletado por Mário Nobuyuki Nakashima. Apoiado nestes recortes e outras fontes primárias, Nakashima investigou "quem produziu os textos dos jornais, qual sua influência, como e quando ocorreram as divulgações do MMM e em que contexto vieram a ocorrer". Ao final da pesquisa, o autor concluiu que o "estreito relacionamento dos protagonistas do MMM com autoridades do governo, a amizade entre os jornalistas e os difusores do Movimento da Matemática Moderna, a valorização do ensino de Matemática como justificativa para minimizar o autoritarismo da ditadura, a censura prévia aos textos políticos e sociais aliada à neutralidade política da Matemática são alguns fatores que justificam o apoio dos jornais na divulgação desse Movimento. Ao mesmo tempo, os protagonistas do Movimento aproveitaram essa divulgação para propagar o ideário do Movimento para a sociedade". (NAKASHIMA, 2007)

3.1 BREVE HISTÓRICO DO PERÍODO PRÉ-MODERNO

Em 1931 o ensino da Matemática sofreu uma alteração profunda, passando a ser ministrado sob o enfoque do conceito de função. Este ponto de vista foi introduzido com a reforma Francisco Campos.

Segundo Marques (2005), que investigou o período pré-moderno no Brasil, Euclides Roxo foi o "precursor" das reformas brasileiras e como homem de renomado prestígio, suas propostas ou orientações eram aprovadas e implantadas.

> Euclides Roxo gozava de muito prestígio junto ao Ministro Francisco Campos, pois além de ser Diretor do Colégio Pedro II[79], também era membro do Conselho Nacional de Educação e membro da ABE – Associação Brasileira de Educação – posições que influenciaram na decisão do então Ministro na implementação dos novos programas de matemática da Reforma em 1931, de maneira que podemos afirmar que, tanto os programas quanto as instruções metodológicas de matemática, foram organizados e redigidos por Roxo.
> Assim, os programas que já vinham sendo experimentados no Colégio Pedro II, agora eram programas oficiais definidos pela Reforma Campos, com abrangência em todo território nacional. (MARQUES, 2005, p.29).

Desde os tempos das publicações de Euclides Roxo, a fusão entre aritmética e álgebra mostrava seus primeiros indícios de que se efetivaria no Brasil, visto que, Roxo tinha leituras das propostas de unificação das áreas da matemática, sugeridas por Felix Klein. Esse talvez tenha sido o prelúdio para o que se concretizaria depois, com a Matemática Moderna, ou seja, a unidade aritmética, álgebra e, geometria (MARQUES, 2005).

Já em 1942, nova alteração foi imposta ao ensino da Matemática com os programas estabelecidos na lei conhecida como reforma Capanema (QUINTELA, 3º CBEM, 1959, p.95).

Das revisões bibliográficas de Marques, ele salientou que a Reforma "Capanema referendava uma prática do cotidiano escolar induzida pela vulgata da Reforma Campos, sendo com isso, muito natural que os livros produzidos nos anos 1940 fossem muito parecidos com os dos finais dos anos 1930" MARQUES, 2005, p.46).

O que distinguia as duas reformas era basicamente a unificação das partes da matemática. Na reforma Campos estudava-se concomitantemente os conceitos aritméticos,

[79] O Colégio Pedro II foi referência para as demais escolas de nível médio no país até 1930 – período pré-moderno (COSTA, 2006, p.57)

algébricos e geométricos, e na reforma Capanema, estas partes eram estudadas separadamente, sendo no máximo duas delas unidas numa mesma série (QUINTELA, 3º CBEM, 1959, p.95).

O que aconteceu após a reforma Capanema, em meados de 1946, foi que os resultados dos cursos de admissão para o curso superior foram alarmantes, um fracasso. Chegara a fase da "decadência do ensino secundário", noticiava a mídia da época (3º CBEM, 1959).

É claro que, assim como hoje, os resultados desastrosos do ensino não herdavam somente deficiências da última tentativa de reforma, mas traziam também marcas das reformas anteriores. Também, assim, acontecera com a reforma Capanema, que aliada as falhas da reforma Campos e outras resoluções outorgadas pelo Ministério da Educação, culminaram em inquietações e idealizações de mais reformas.

Segundo Marques,

> No início da década de 1950, por iniciativa do Ministro da Educação e Saúde Simões Filho, uma nova revisão dos programas de conteúdos e das orientações pedagógicas das disciplinas do Ensino secundário, ginásio e colégio, seria realizada. Relativamente à disciplina matemática, os novos programas foram regulamentados pela portaria Ministerial nº 966, de 2 de outubro de 1951.
> Em entrevista coletiva à imprensa, o Ministro da Educação Simões Filho presta esclarecimentos em relação aos novos programas, que acenavam como simplificação dos Programas do Ensino Secundário. (MARQUES, 2005, p.51).

A simplificação da qual o programa da Portaria 1951 tratava tinha como "finalidade dar ao currículo maior flexibilidade, uma vez que o Brasil dos anos 1950, já apresentava uma maior diversidade da população escolar em relação aos anos 1930" (MARQUES, 2005, p.52).

Assim, após as reformas Campos (1931) e Capanema (1942), o ensino ainda veio sentir o "legado" da Portaria 1951 (1951). Nesta Portaria, como visto, ficou definido um programa mínimo de assuntos a serem ensinados, todos devidamente elaborados pelos professores do Colégio Pedro II. Mas, ao que Marques observou, a Portaria 1951 não alterou significativamente os conteúdos já estabelecidos pela Reforma Capanema (MARQUES, 2005, p.48).

Entretanto, a partir da verificação feita por esta pesquisa, foram constatadas as seguintes mudanças entre o Programa de 1942 e o de 1951, no caso da matemática:

- Matemática Ginasial – O Programa de 1942: abordava as noções fundamentais de geometria, como sólidos geométricos, superfícies, linhas, ponto, plano, reta, semi-reta, segmento, posições relativas de retas e planos, paralelas, perpendiculares e oblíquas; introduzia os conceitos gerais de poliedros, de números irracionais e de números complexos, assim como as operações destes dois últimos conjuntos; abordava o conceito de volume e as principais fórmulas dos sólidos geométricos; tinha a preocupação de trabalhar com o sistema métrico, inclusive citando unidades inglesas; introduzia a geometria dedutiva com proposições geométricas, hipótese, demonstração e conclusão. Isso tudo foi excluído para o Programa de 1951, o que incita a pensar quão "carregada" era a matemática da década de 40.

- Matemática Colegial – A ementa para a matemática colegial foi outorgada só no Programa de 1951, não constava no Programa de 1942 (VECHIA & LORENZ, 1998).

Anos posteriores ao Programa de 1951, acontecera o 1º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática (1955), e segundo Marques,

> [...] os debates em torno dos conteúdos não aclamavam por mudanças significativas. Não houve discussões acaloradas em torno da inserção ou exclusão de um determinado conteúdo, como aconteceu nas Reformas Campos e Capanema. Um dos focos dos embates nas plenárias do congresso era a definição das séries que determinado conteúdo deveria ser ministrado. Ao que parece, nos anos 1950, havia um consenso entre os professores de que era aquela matemática estabelecida na Portaria 1951, muito próxima da Capanema, que deveria ser trabalhada nas escolas. (MARQUES, 2005, p.100-101).

Segundo as palavras da professora Martha Maria de Souza Dantas (idealizadora e organizadora do 1º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática), na abertura do 1º Congresso (1955), esperava-se que, em resumo: os programas fossem despidos do caráter livresco e que dessem mais importância às aplicações; se evitasse recorrer à abstração para introduzir um assunto, deixando a cargo dos últimos anos do ensino esta tarefa; se evitasse o método dogmático que impunha o aprender antes do compreender; o método heurístico fosse aplicado às situações de ensino.

O que fica evidente e também foi verificado por Marques (2005) é que não se pode dizer, de modo algum, que os anos 1950 representavam um cenário para uma revolução na disciplina matemática, ou que os professores aspiravam por mudanças conteudistas, visto que, das observações do Congresso de 1955, não houve modificações nos programas quanto aos conteúdos e metodologias, mas sim, destaques quanto ao desprestígio da disciplina de matemática e diminuição de aulas semanais (MARQUES, 2005, p.102). Então, o que se pode dizer deste 1º Congresso é que os professores brasileiros buscavam reformas em suas obrigações profissionais e não especificamente em relação à matemática em si.

Para ele, a hipótese de que o Movimento da Matemática Moderna veio responder a um clamor dos professores brasileiros não é válida. "Esse movimento de dimensões internacionais não teve suas origens ou sua introdução motivada internamente. Suas motivações foram outras" (MARQUES, 2005, p.102).

Assim, o período que antecedeu a introdução da Matemática Moderna no Brasil ficou marcado pelo descontentamento do ensino da matemática em alguns quesitos, que já há algum tempo crescia e tornava-se pauta para várias discussões realizadas nos congressos nacionais. As palavras citadas na ata de apresentação do 3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática – *reforma* e *renovação* para o ensino (3º CBEM, 1959) – complementaram as aspirações que buscavam os professores quanto a mudanças em seus direitos e deveres profissionais, em 1955. Isso nos permite supor que em 1959 os professores já tinham preocupações também quanto às mudanças na matemática em si.

A seguir destacaremos pontos importantes para a compreensão da situação na década de 50, inclusive sobre os conteúdos que constaram nas atas dos três primeiros Congressos Brasileiros do Ensino da Matemática:

- O 1º Congresso (Salvador – Bahia, 1955) tinha como meta: conscientizar os professores da importância em despertar nos discentes o espírito de crítica, "desenvolvendo-lhes as preciosas qualidades de análise e de síntese e, ainda impregnando-lhes das fundamentais idéias de simetria e analogia"; conscientizar os professores de que suas aulas deveriam propiciar estudos da ciência e cultura; etc.. Vale ressaltar a recomendação desse Congresso quanto aos assuntos do ensino secundário, qual seja, estudar os assuntos de: progressões, números irracionais, potências com expoentes fracionários, logaritmos (como operação), equações exponenciais, trigonometria, análise combinatória, binômio de Newton, determinantes, sistemas lineares e geometria no espaço, conceitos elementares de variável e de função, limite (introdução e derivada), estudo do trinômio do 2º grau, noções sobre números complexos, polinômios e equações algébricas em geral. Em nenhum momento foi citado o tema das matrizes como saber a ser ensinado no ensino secundário (1º CBEM).
- No 2º Congresso (Porto Alegre – Rio Grande do Sul, 1957) os objetivos eram: examinar os conteúdos programáticos de matemática de todos os níveis escolares; examinar a pedagogia da matemática adotada; examinar os métodos e técnicas que eram adotadas; determinar o que de mais importante era preciso ensinar em matemática; examinar a metodologia adotada no ensino superior em decorrência das recentes pesquisas da época; atualizar os conceitos; estabelecer outras congregações, além do Colégio Pedro II, para avaliar os programas curriculares; viabilizar formas de reduzir a carga horária do professor em sala de aula; estudar e analisar sobre a formação científica e pedagógica do professor; etc.. É importante verificar que neste Congresso a Álgebra (assunto da 2ª série do colegial) tinha

como conteúdos base os polinômios, a análise combinatória simples e o binômio de Newton e em Análise Algébrica (3ª série do colegial) se via os números reais, números complexos, funções, limites, derivadas, determinantes e sistemas de equações lineares. Também neste Congresso não há evidências de que as matrizes tenham sido assunto prescrito ao ensino secundário (2º CBEM).

- Teve, no 3º Congresso (Rio de Janeiro, 1959), uma maior manifestação – maior manifestação em relação às ocorridas nos congressos anteriores – para que o ensino da matemática passasse por uma reforma, manifestação essa que levou de fato a educação brasileira a vivenciar o Movimento da Matemática Moderna nos anos 1960 a 1980. Neste Congresso, talvez por haver uma preocupação da *renovação* dos assuntos do ensino secundário e também por despontar a inquietude de conhecer as pesquisas matemáticas atuais, ficou decidido que os objetivos e novos conteúdos advindos das recentes pesquisas acadêmicas seriam propostos no próximo Congresso (3º CBEM).

Esta renovação dos *objetivos especiais de cada série do ensino secundário* corresponderia a uma das soluções que os participantes do 3º CBEM tanto desejavam. Dentre as temáticas do 3º CBEM, a que discutiria os *Objetivos do Ensino da Matemática na Escola Secundária*, apresentou a tese *O Ensino da Matemática no 2º Ciclo*, do professor Arnaldo Augusto Nova Antunes, na qual sugeria que ao estudo das noções de matrizes, acrescentasse também o dos determinantes.

O 3º Congresso apontou como recomendações gerais que: houvesse a introdução da Matemática Moderna nos currículos das Faculdades de Filosofia e orientação para os cursos que a introduzissem, além disso, orientou para que as Faculdades que já trabalhassem com esta Matemática não tivessem qualquer prejuízo caso modificações acontecessem; solicitou também, que para o 4º Congresso, os participantes apresentassem relatos de experiências feitas com a Matemática Moderna nas aulas do curso secundário (3º CBEM, 1959).

O Movimento da Matemática Moderna deu a partir do 3º Congresso os seus primeiros passos, justamente num momento em que se discutia a unificação das várias matemáticas – a aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria.

Neste período, ouvia-se muito falar em Bourbaki[80], pois ele trazia o slogan *La Mathématique, ou lês Mathématiques?* e ainda era considerado um ícone dos "mais privilegiados cérebros do mundo científico atual" (3º CBEM, 1959). As recomendações de

[80] Bourbaki – pseudônimo dado a um grupo de pesquisadores franceses para que os mesmos, em tempos de revolução do ensino, mantivessem resguardados seus nomes pessoais e ficassem livres de possíveis constrangimentos. Na próxima seção o grupo Bourbaki será descrito com maiores detalhes.

Bourbaki e que também se mostravam evidentes no 3º CBEM era a de que os vocábulos Aritmética, Álgebra, Geometria, etc, mesmo que se entrelaçassem, formando *a Matemática*, tivessem suas conceituações estabelecidas e individualizadas.

Este motivo incitou os pesquisadores de matemática e professores, não somente definir os objetivos específicos de cada série do ensino secundário, como também, delimitar quais seriam os conteúdos de cada tópico da Matemática Aritmética, Algébrica, Geométrica e Trigonométrica, compondo uma ementa curricular. Assim, por exemplo, à álgebra, caberia estudar os assuntos: determinantes, sistemas de equações lineares, progressões, logaritmos, polinômios, binômio de Newton, etc., mas ainda, nos programas “pilotos” expostos nos três primeiros congressos brasileiros, não estavam as matrizes[81].

Então, no 4º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática (Belém - Pará, 1962), a Matemática Moderna se fez presente, sendo tema central de discussões realizadas no evento.

Este Congresso teve um temário todo especial, pois completava 1 ano de introdução da Matemática Moderna no ensino secundário. Os grupos de estudos[82] formados nas faculdades da época comemoravam suas conquistas e experiências com o uso da Matemática Moderna, demonstrando nesta ocasião todo o empenho e satisfação de seus resultados. As temáticas do evento anunciavam os assuntos a serem abordados:

1. A formação dos professores de matemática e as faculdades de filosofia;
2. O aperfeiçoamento do professor de matemática;
3. Correlação entre o ensino na escola e o currículo das faculdades de filosofia;
4. Introdução da matemática moderna na escola secundaria;
5. Experiências realizadas em cursos regulares ou experimentais;
6. Reestruturação do ensino da matemática ante a lei de diretrizes e bases;
7. Didática da matemática na escola secundaria;
8. Verificação da aprendizagem;
9. Liberdade de ensino.

(FOLHA DE SÃO PAULO. Congresso de Matemática. 16 ago. 1962)

No trecho abaixo, do Jornal *O Estado de São Paulo* (21/11/1963), é identificável que o 4º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática foi o “divulgador oficial” da implantação da Matemática Moderna em todo o Brasil:

---

[81] A revisão dos três primeiros congressos brasileiros do ensino da matemática leva-nos a concluir esta afirmação.

[82] O grupo de estudos mais famoso desta época foi o GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, da USP-SP.

> Desde o IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matematica, realizado no ano passado, em Belém, onde foram aprovadas as teses reformistas do GEEM, a entidade atualiza professores para a "Operação Nova Matematica". Assim sendo, no proximo ano, varios estabelecimentos de ensino secundario de S. Paulo "apresentarão a matematica muito mais simplificada e até mesmo atraente aos jovens alunos que nela se iniciam. Aliás, em algumas provas de admissão ao ginasio já realizadas nesta fase do ano, observou-se normas completamente diferentes, com relação a seu conteudo, de inteiro agrado dos alunos e de seus pais". (O ESTADO DE SÃO PAULO, 21 nov. 1963 – grifos do autor).

Segundo os professores participantes do evento, o 4º Congresso superou e muito o esperado, não só quanto à parte científica propriamente dita, senão quanto ao aspecto social e cívico, tendo-se em vista os resultados obtidos (FOLHA DE SÃO PAULO. Congresso de Matemática. 16 ago. 1962).

Como podemos observar, a Matemática Moderna foi introduzida no ensino em 1961 e marcou com grande ênfase seu primeiro aniversário, sendo discutida e ovacionada como tema principal no 4º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática em 1962.

3.2 A MATEMÁTICA MODERNA E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

O Movimento da Matemática Moderna começou a se impor no Brasil a partir de 1961 por ocasião da fundação, em São Paulo, do *Grupo de Estudos do Ensino da Matemática* (GEEM), que reunia centenas de professores universitários e secundários de Matemática.

Para o professor Oswaldo Sangiorgi, defensor da introdução da Matemática Moderna no Brasil e fundador do grupo GEEM, se deveria ensinar a utilização de símbolos lógicos que correspondessem à precisão indispensável da ciência matemática o que, do ponto de vista desse professor, daria à matemática um aspecto moderno, faria da matemática, uma *Matemática Moderna*.

A esta nova matemática, Sangiorgi deu o apelido de Unidade Tripartida e explicou o motivo do nome segundo a herança deixada.

> A Matematica Moderna está fundamentalmente ligada a *três disciplinas basicas*, que lhe dão a *desejada unidade*: a Teoria dos Conjuntos, a Logica Matematica e as Estruturas.
> Nos fins do seculo XIX o matematico alemão Cantor iniciou o trabalho de unificação das matematicas, criando a teoria dos Conjuntos. A Logica Matematica, que fornece símbolos precisos para traduzir leis do pensamento, fixou-se e avançou graças aos estudos que desde Leibniz vêm sendo feitos por Boole, Peano, Hilbert, Godel, Bertrand Russel e Tarski. Finalmente, as Estruturas, que podem ser algebricas, de ordem, de espaço vetorial e topologicas, fundadas pelas pesquisas de Galois, no seculo XIX foram amplamente desenvolvidas posteriormente, de modo especial na França pelo famoso Grupo Bourbaki de pesquisas matematicas. (SANGIORGI. Folha de São Paulo, 12 jul. 1963 – grifos nosso).

A Matemática Moderna se tratava então, de uma adaptação para o ensino, sendo uma conciliação entre as três disciplinas básicas: Teoria dos Conjuntos, a Lógica Matemática e as Estruturas Algébricas. <u>Em resumo, o que se pretendia com a Matemática Moderna era que, por meio dos conceitos de conjunto e estrutura, se colocasse em evidência a unidade da linguagem matemática</u>. (MYRIAM XAVIER FRAGOSO. O Estado de São Paulo, 08 mai. 1964 – grifo nosso)

Dessa forma, o GEEM ministrou vários cursos para que a modernização da linguagem da Matemática e a introdução de novos programas atendessem aos objetivos da Matemática Moderna.

No dia 24 de agosto de 1965 a professora Lucienne Felix, da Universidade da França, assistente do matemático Henry Lebesgue, professora do Liceu La Fontaine de Paris e autora de famosos livros de Matemática Moderna, veio até o Brasil a convite do grupo GEEM proferir palestras sobre a matemática atual daquela época. Ela disse ao jornal *O Estado de São Paulo* em 10 de setembro de 1965: "o mais importante é o conhecimento em primeiro lugar pelos professores, das estruturas matematicas. Se o professor conhece cada estrutura, estará didaticamente encaminhado na Matemática Moderna".[83]

A Matemática Moderna "tomava força" e se tornava assunto de eventos internacionais. No congresso em Lima[84], por exemplo, a presença de ilustres matemáticos e educadores, como o professor Marshall Stone, dos Estados Unidos e G. Papy, da Bélgica, destacaram a importância do tema *Matemática Moderna*.

Na ocasião, o professor Papy falou sobre *"Novos currículos"*, exibindo o desenvolvimento da Matemática Moderna nas escolas belgas. Certamente, como educador de renome, ele influenciara os professores brasileiros presentes no congresso de Lima para esta questão de estipular novos currículos, entre outras coisas.

Dentre os assuntos discutidos neste congresso, a recomendação para o currículo do ensino médio era a de que, dos 15 aos 18 anos, o aluno estudasse: os números reais, espaço euclidiano, bases ortogonais, desigualdade de Cauchy-Schwarz, transformações lineares do plano, **matrizes de ordem 2,** o grupo de transformações ortogonais, números complexos, análise combinatória, noções de probabilidade, algoritmo de Euclides, teorema da fatoração única, polinômios, teorema do resíduo, introdução progressiva e descritiva de alguns conceitos topológicos (O ESTADO DE SÃO PAULO. Reunião sobre ensino da Matemática. 08 jan. 1967.).

Além disso, foi sugerido no congresso de Lima que todos os países envolvidos com a matemática moderna, organizassem grupos de estudos, seminários, eventos, boletins de divulgação de trabalhos teóricos e de experiências feitas com a aplicação da matemática moderna, etc. (O ESTADO DE SÃO PAULO. Reunião sobre ensino da Matemática. 08 jan. 1967.).

Assim, a Matemática Moderna persistiu por 10 anos. Mas o seu fracasso chegou. A *Conjuntivite Aguda*, a *Subversiva*[85], como era chamada a Matemática Moderna no "fim dos

[83] Podemos observar que a crença de "quem sabe matemática sabe ensinar muito bem" ainda era, nesta época, muito forte. Fato que perdura ainda hoje.
[84] Congresso realizado em Lima, Peru, de 4 a 12 de dezembro de 1966.
[85] Título de notas de jornais ao se referir a Matemática Moderna. (O ESTADO DE SÃO PAULO, 03 out. 1971) (FOLHA DE SÃO PAULO. Matemática moderna incita à subversão. 30 ago. 1980)

seus dias”, teve a mesma repercussão de quando sua introdução: notícias na mídia, debates em congressos buscando soluções, etc.

Nas palavras da professora Elza Furtado Gomide[86] (1980), do Departamento de Matemática Pura do Instituto de Matemática da Universidade de São Paulo, o fracasso da Matemática Moderna ficou muito bem explicado. Por julgar de extrema importância, conhecer os anseios e também as angústias dos personagens da história de um assunto, este trabalho citará alguns trechos da entrevista de Gomide cedida ao jornal *O Estado de São Paulo*, em 12 de abr. de 1980:

> “A idéia básica apresentada pelos defensores da Matemática Moderna tinha algum fundamento, era até bem razoável, na medida em que pretendia curar certos defeitos da escola tradicional – com ênfase dada aos cálculos complicados, com perda de tempo na manipulação de frações, expressões algébricas, etc.”
> (...) “pretendia-se, com a Matemática Moderna, substituir isso tudo por uma discussão das estruturas, os conjuntos de números, por exemplo. como eu dizia, havia algo de razoável nessa tese, porém ocorreu um exagero desastroso nos critérios de sua adoção. Um excesso de entusiasmo, acompanhado do pouco discernimento do que era realmente importante ministrar, para o real aprendizado dos alunos”.
> (...) “os programas antigos não eram inteiramente bons, é bem verdade. No entanto, o que se perdeu quase que totalmente, com a adoção da “Matemática Moderna”, foram os aspectos operacionais da Matemática, as possibilidades de aplicação da Matemática nas outras ciências, substituídas por um pretensioso e vazio formalismo.”
> (...) “o nível de distorções determinadas pela aplicação genérica e maciça da “Matemática Moderna” no País pode ser bem avaliado aqui no Instituto de Matemática da USP”.

E ela explica esta última afirmação:

> “Hoje em dia – explica a professora – em vez de aprender quanto vale ou qual o resultado da multiplicação do 3 pelo 5, os nossos jovens aprendem apenas que 3 vezes 5 é igual a 5 vezes 3, e que isso se chama propriedade comutativa. Não importando o valor do produto, o que talvez os alunos só venham a saber, e entender, bem mais tarde, quando forçados pela vida prática”.

E assim, a professora conclui:

> “Apenas quando tivermos um consenso real dessas distorções no ensino é que poderemos pressionar as autoridades do ensino, para que assumam uma posição mais ousada. Os senhores pais e professores precisam aprender a observar mais o grau de aprendizado de seus filhos, questionando as razões de suas deficiências”.
> (GOMIDE. Denunciada na USP falência da Matemática Moderna. O Estado de São Paulo, 12 abr. 1980.).

[86] Elza Furtado Gomide estudou juntamente com outros docentes do Instituto de Matemática da USP, os prejuízos trazidos pela implantação da Matemática Moderna no Brasil. (O ESTADO DE SÃO PAULO. Denunciada na USP falência da Matemática Moderna. 12 abr. 1980.)

Como se observa, a visão de modernização dos integrantes do Movimento da Matemática Moderna ficou limitada a modificações mais "estéticas" da escrita matemática do que propriamente a de ser uma ferramenta auxiliadora para os problemas do cotidiano. Pelo menos se foi a intenção modernizar para o bem estar social, o objetivo não foi alcançado.

A Matemática Moderna teve finalidades concernentes à textualização dos saberes: modificações quanto à linguagem, introdução de novos assuntos ao ensino, unificação das "várias" matemáticas, formalismo e axiomatização decorrentes da geração de matemáticos da época, tudo isso ao tempo de uma revolução mundial, resguardada por incentivadores de renome, que eram os estudiosos do grupo Bourbaki.

Como já dito, esta "nova" matemática queria, que por meio dos conceitos de conjunto e estrutura, se colocasse em evidência a unidade da linguagem matemática, o que só fez modernizar – se é que se pode chamar de modernização – a linguagem da Matemática e introduzir novos programas e assuntos mínimos ao currículo do ensino secundário e superior.

Estas modificações da linguagem da matemática e implantação de novos conteúdos ao ensino do secundário remetem a idéia de transformações dos saberes, visto que nos congressos foram apresentadas teses das experiências com os novos conteúdos e experiências que relatavam uma abordagem escrita amparada pela teoria dos conjuntos, ou seja, transformações de ordem curricular, de estética textual, de abordagem didática, etc.

É de considerar que os elementos subjacentes ao processo da transposição didática tenham sido contemplados no decorrer da implantação da Matemática Moderna nos programas curriculares brasileiros, tais como: desincretização dos saberes; distinções de quais seriam os conteúdos matemáticos e quais seriam tratados como noções paramatemáticas; publicidade, programabilidade e controle social da aprendizagem, por exemplo; isso porque, a Matemática Moderna trazendo os assuntos recentes das pesquisas científicas para o ensino superior (influência bourbakista), e deste, para o ensino secundário (influência que exercia os professores universitários sob os professores da rede de ensino básico), não poderia usar dos mesmos livros, do mesmo rigor, do mesmo formalismo, próprios do modelo acadêmico.

Ao final de tudo isso ainda resta algumas perguntas:

- Será que as Matrizes foram um dos assuntos implantados no currículo brasileiro por conseqüência da introdução da Matemática Moderna no Brasil?
- Que personagens determinaram quais seriam os assuntos mínimos a se estudar introduzindo a Matemática Moderna?

- As Matrizes também tiveram mudanças quanto à linguagem do seu conteúdo, assim como outros assuntos de matemática que tiveram de ser reescritos baseando-se na linguagem da teoria dos conjuntos e estruturas matemáticas?

Para dar resposta a estas questões, fizemos uma explanação das influências de alguns “figurões” da história e analisamos dois livros produzidos no período da Matemática Moderna. Assim, o capítulo 4 dará resposta(s) às duas primeiras perguntas e o capítulo 5 responderá a última pergunta.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE NOOSFÉRICA

Antes de iniciar este capítulo, relembremos um dos objetivos propostos para esta pesquisa: *examinar o envolvimento de uma noosfera*[87] *presente na introdução do conteúdo Matrizes no ensino básico*. Para tanto, destacaremos quais serão as fontes que julgamos suficientes para a concretização desse objetivo:

- **Artigos de jornais –** foram analisados os 344 artigos do acervo digitalizado *O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna*, de Mario Nobuyuki Nakashima (2007).
- **Congressos Nacionais de Ensino da Matemática –** investigamos as atas dos anais do I, II, III e V Congressos realizados entre o período de 1955 a 1966. Já o IV Congresso (1962) que seria o mais aproveitável a esta pesquisa, não foi publicado em anais[88]. Ainda assim, pelos artigos do acervo de Nakashima, foi possível avaliar a influência que o IV Congresso Nacional do Ensino da Matemática teve, com relação à introdução das Matrizes no ensino.
- **Teses e dissertações –** todas as teses e dissertações citadas na introdução do capítulo 3 também serviram como documentos para esta análise noosférica, pois trazem informações sobre os personagens que participaram do Movimento.

Além de descrever sobre uma noosfera que se fez presente quando se introduziu as Matrizes no ensino secundário, as perguntas lançadas ao final do capítulo 3 merecem respostas. Assim, a seguir, apresentaremos alguns personagens que supomos serem os

---

[87] É importante ressaltar que segundo o conceito de transposição didática, a noosfera também é composta por pais de alunos e cientistas – cientistas divulgadores de resultados ou de uma teoria. Porém, nesta análise, não tencionamos entrevistar pais de alunos e também não registramos entrevista com cientista algum.

[88] Esta informação consta na tese de Aparecida Rodrigues Silva Duarte (2007), uma das fontes estruturantes deste trabalho.

mesmos que implantaram as Matrizes no currículo brasileiro e que também introduziram a Matemática Moderna no ensino. São eles:

- Matemáticos – mais especificamente os do grupo Bourbaki – que divulgavam a renovação da matemática;
- Professores acadêmicos e pesquisadores de matemática – mas não propriamente os pesquisadores criadores da teoria das matrizes – que formaram o grupo GEEM e que tiveram como ideologia a reforma do ensino da matemática, buscando metodologias mais modernas e uma nova estrutura de conhecimentos que permitissem ao educando interagir com o mundo moderno a sua volta;
- Representantes do Ministério da Educação que apoiavam as iniciativas do GEEM, custeando viagens de professores universitários para efetivação de cursos no exterior e custeando parte dos eventos nacionais e regionais;
- Serviço de Expansão Cultural do Departamento de Educação que mantinha um convênio com o GEEM para que a realização das reuniões e outras atividades acontecessem;
- Professores do ensino básico que, ao participarem das reuniões realizadas pelo GEEM, experienciaram as propostas do grupo e socializaram seus resultados, contribuindo assim para algumas modificações textuais dos saberes;
- Autores de livros didáticos acadêmicos e escolares que influenciados pela matemática programada pelo Colégio Pedro II e também pelo grupo GEEM, publicaram vários livros, com poucas diferenças entre eles na sua textualização e na capa (em sua maioria, as capas citavam a palavra *Moderna* ou *Moderno*).

O parágrafo anterior responde quais foram os papéis de alguns integrantes da noosfera *Matrizes no Ensino*[89], mas com relação ao grupo Bourbaki e o grupo GEEM, a definição da contribuição que tiveram, ainda não está explícita. Então, apresentar as influências que estes últimos manifestaram, será o mesmo que responder algumas das perguntas deste trabalho, tais como:

- O grupo Bourbaki recomendou que as matrizes fossem um saber a ser ensinado?
- Por que o grupo GEEM é citado como parte da noosfera que introduziu o conteúdo das matrizes no ensino básico? O que eles fizeram?

Esperamos que dessa forma fique clara a noção de noosfera já comentada.

[89] *Matrizes no Ensino* – designaremos por este nome a noosfera que introduziu as matrizes no ensino básico.

4.1 O GRUPO BOURBAKI

Para justificar a presença de Bourbaki na noosfera *Matrizes no Ensino*, buscamos dados sobre o assunto em trabalhos que tratavam do tema Matemática Moderna. Sintetizando as informações dos trabalhos, vimos que os Bourbakistas não somente almejaram por uma matemática moderna como também viajaram por vários países para divulgá-la, tamanha era a vontade do grupo de se tornar referência mundial do ensino da matemática.

Bourbaki teve origem francesa e deu início às pesquisas na década de 30, período este em que as matrizes conquistavam seu auge como produção científica.

Defasados em relação às pesquisas germânicas, devido os resultados da 1ª Guerra Mundial, alguns matemáticos franceses decidiram viajar a outros países para se informarem das recentes pesquisas matemáticas. Assim, André Weil, figura central do bourbakismo desde sua criação, numa de suas viagens, estudara Álgebra Linear em Göttingen (Alemanha), em 1926, com Emmy Noether (DUARTE, 2007, p.73).

Emmy Noether, Hilbert e Bartel van der Waerden eram representantes renomados da Universidade de Göttingen, local onde se constituiu uma poderosa escola de Álgebra Linear (DUARTE, 2007, p. 73). Há unanimidade entre os historiadores matemáticos de que o estabelecimento do conceito de estrutura no âmbito científico matemático ocorre no campo da Álgebra e que o movimento estrutural na Álgebra consolida-se com a publicação do livro Moderne Algebra de Dr. Bartel Leendert van der Waerden, em 1930, dada a solidez, consistência e abrangência com que a obra apresenta as estruturas da Álgebra, legitimando o seu potencial matemático e explicitando o seu modo carnal de ser, isto é, deixando claro suas características materiais de presença enquanto objeto do campo algébrico.

A álgebra linear passou a ser, além de uma matemática sofisticada e de ponta, uma matemática "básica" para os componentes Bourbakistas.

Mas como surgiram os Bourbakistas?

Nicolas Bourbaki, responsável por uma revolução ocorrida na matemática, foi o pseudônimo adotado por um grupo[90] que se fazia passar por um matemático entusiasmado e otimista, disposto a reescrever a matemática com uma nova linguagem. Bourbakistas, nesse caso, foi o apelido adotado aos integrantes do grupo.

[90] Os primeiros membros deste grupo foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, Jean Leray, Szolem Mandelbrojt, René de Possuel e André Weil. (DUARTE, 2007, p. 75)

Segundo Duarte (2007, p.74), o grupo “Bourbaki nasce, pois, de preocupações pedagógicas, evoluindo, posteriormente, em direção à vontade de se tornar referência” (DUARTE, 2007, p. 74).

Na década de 60, os jornais brasileiros esporadicamente noticiavam alguma reportagem sobre o grupo, visto que alguns dos Bourbakistas, como Dieudonné e Weil, vieram ao Brasil para divulgar suas propostas e foram reconhecidos pelos professores das universidades brasileiras como célebres matemáticos.

> Nicolas Bourbaki, grego, é um matematico que nunca existiu e que, indiretamente, é o responsavel por toda a renovação que se pretende introduzir no ensino da Matematica, transformando-a de um velho terror dos estudantes em algo ao alcance de todos. É o prof. Sangiorgi que também explica que sob o pseudonimo “Nicolas Bourbaki” agruparam-se, em 1944, matematicos franceses dos mais renomados (Dieudonné, Weil, Chouquet, Delsarte etc.) com o fito de apresentar os assuntos da Matematica com uma unidade até entao não cogitada. No entanto, escudaram-se sob o nome de Bourbaki porque suas idéias reformistas poderiam encontrar um clima não propício na época. (O ESTADO DE SÃO PAULO. O GEEM dispõe-se em 1964 a modernizar o ensino da Matemática. 21 nov. 1963)[91]

O grupo Bourbaki objetivava unificar a matemática num período em que se falava em “matemáticas”, usando para isso a linguagem da teoria dos conjuntos, ressaltando as estruturas-mães de ordem, algébricas e topológicas, revolucionando completamente o ensino da matemática em todo o mundo. E o grupo foi mais adiante; preocupado com as ações pedagógicas do ensino da nova matemática, seus integrantes interagiram com psicólogos e estudiosos da psicopedagogia, buscando assim alternativas que propiciassem uma aprendizagem adequada da matemática proposta por eles.

> Em particular, começaram a ser ressaltadas a correspondencia existente entre as Estruturas Operatorias da Inteligencia e as Estruturas Matematicas (principalmente as denominadas pelo grupo Bourbaki de “estruturas-mães”: algebricas, de ordem e topologicas). Coisas curiosas começaram então a ser observadas no ensino; a chamada Matematica Superior, apresentada com unidade através da linguagem dos Conjuntos e que enfatizava as estruturas dos Sistemas estudados, era mais facil de ser ensinada (ao lado de ser mais importante e atraente) do que a Matematica denominada elementar, pois tradicionalmente, desde os bancos escolares, nas poucas mensagens que podia transmitir era tão saturada de tecnicas operatorias que, geralmente, apresentava um tragico balanço: interessava a uns poucos, mas era odiada pela maioria.
>
> Havia, pois, uma imperfeição logica na chamada Matematica tradicional, principalmente por não usar a linguagem que a estrutura mental da criança queria

[91] Apesar dos Bourbakistas agruparam-se em 1944 com o objetivo de apresentar os assuntos da Matemática com uma unidade até então não cogitada, o grupo se formou em 10 de dezembro de 1934. (SCIENTIFIC AMERICAN BRAZIL. Gênios da Ciência, n. 12).

> “ouvir” e que só era falada devidamente – guardadas as devidas proporções – na Matematica Superior, estudada nas Faculdade de Filosofia, dentro do espírito bourbakista. (Trecho tirado de um extrato do seminário proferido pelo professor Oswaldo Sangiorgi no Departamento de Educação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP) (O ESTADO DE SÃO PAULO. Matemática moderna no Ensino: feliz encontro entre a lógica, a psicologia e a pedagogia. Caderno Atualidade Científica. 17 mai. 1964)

Dessa forma, os Bourbakistas, buscaram nos resultados da psicologia – em especial, os que foram alcançados pelo grupo de psicólogos liderado por Jean Piaget – unir as descobertas sobre as estruturas matemáticas ou estruturas-mães (como gostavam de chamar os Bourbakistas) com as estruturas operatórias da inteligência (estudo de Piaget), ainda que Piaget não tenha seguido seus estudos segundo este objetivo e tão pouco visando a uma matemática moderna.

Mas o que a fusão entre as descobertas de Piaget sobre as estruturas operatórias da inteligência e a determinação das estruturas matemáticas feitas pelo grupo Bourbaki acarretaram no ensino básico?

Esta fusão acarretou na elaboração de uma nova matemática, a Matemática Moderna. Seus idealizadores justificavam assim, uma reforma no ensino por meio das importantes descobertas da psicologia e da matemática bourbakista.

No entanto, de acordo com o grupo Bourbaki, o ensino básico estava muito distante da realidade da fusão supracitada, as dificuldades em renovar esta fase do ensino seriam grandes. Dieudonné, por exemplo, preocupava-se muito com este distanciamento e cita o caso do ensino secundário e superior:

> (...) o ensino secundário, que por sua própria natureza está bastante afastado do nível das pesquisas matemáticas contemporâneas, não tem sofrido modificações, a menos de alguns acréscimos superficiais, ou seja, consiste essencialmente nas últimas séries, de um pouco de Cálculo Infinitesimal. Não é, pois, surpresa, que seja cada vez maior a lacuna entre esse ensino e o que é ministrado na universidade. (DIEUDONNÉ, 1973a, p. 9 *apud* DUARTE, 2007, p. 82)

Para Dieudonné, além das modificações que o ensino secundário deveria acatar seguindo as pesquisas da época, as disciplinas que eram ministradas separadamente como a geometria analítica, a geometria projetiva, a teoria dos números complexos, a trigonometria, etc., poderiam apresentar-se numa só disciplina, a Álgebra Linear. Para ele, os estudantes deveriam familiarizar-se o mais cedo possível com as noções básicas da Álgebra Linear, para aprenderem a “‘*pensar linearmente*’” [grifo do autor] (DIEUDONNÉ, 1973a, p.12 *apud*

DUARTE, 2007, p. 83). Isto mostra mais uma vez que para os integrantes do grupo Bourbaki a Álgebra Linear era a matemática fundamental.

Dieudonné divulgou no Brasil as propostas Bourbakistas de axiomatização, unificação e re-estruração da matemática, ou seja, difundiu as idéias de uma Matemática Moderna. Como matemático de renome, encorajou aos matemáticos, professores da USP e de outras instituições, a aderir o Movimento da Matemática Moderna. Fez contatos com professores que viriam a fundar o grupo GEEM e proferiu palestras sobre temas atuais da matemática.

Além de Dieudonné, a contratação de André Weil para lecionar na FFCLUSP[92] – contratação intermediada por André Dreyfus, diretor da FFCLUSP – fez com que a difusão da Matemática Moderna adquirisse mais adeptos no Brasil.

André Weil, nesta época, foi muito requisitado por professores da USP para se tornar membro do departamento da FFCLUSP. Em especial, sua contratação foi almejada por Omar Catunda, professor de renome e catedrático da FFCLUSP. Catunda, tendo estudado *Sobre as funções e funções de matrizes* (separata do Jornal de Matemática da Universidade de São Paulo; 2 *apud* DUARTE, 2007, p.177) pode ter encontrado em André Weil um companheiro para discutir sobre conteúdos de Álgebra Linear e mais uma vez, possivelmente, o conteúdo das matrizes.

Enfim, as hipóteses que levantamos sobre as influências Bourbakistas não especificam diretamente que as matrizes chegaram ao Brasil por intermédio destes membros, nem mesmo podemos afirmar que Bourbaki tenha divulgado mais amplamente este tema ao mundo. Entretanto, juntando informações da divulgação da Álgebra Linear feita pelos Bourbakistas e também da difusão da Matemática Moderna realizada por eles, além de constatar que foi a partir do Movimento da Matemática Moderna, propagado no Brasil pelo grupo GEEM, que as matrizes foram introduzidas no ensino secundário, são plausíveis as nossas hipóteses, isto é, que as matrizes possivelmente foram um assunto dos trabalhos Bourbakistas e consequentemente da Matemática Moderna difundida por eles e pelo grupo GEEM.

Outra informação que podemos considerar é a de que foi com o surgimento do grupo Bourbaki que o ensino universitário alterou-se progressivamente – pois os Bourbakistas introduziram os temas resultantes das investigações matemáticas mais recentes, no ensino, e como alcançaram prestígio mundial, a propagação de suas imposições se consolidou. Ao tempo da Matemática Moderna, à medida que a ciência considerava um assunto importante, este recebia tratamento diferenciado e se refletia como conteúdo do ensino.

---

[92] FFCLUSP – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

> [...] o ensino universitário tinha-se vindo a alterar progressivamente com a introdução de temas resultantes da investigação matemática mais recente, como a álgebra abstracta, topologia, teoria das probabilidades, teoria dos conjuntos e lógica matemática. Um grupo de matemáticos franceses, sob o pseudónimo de Nicolas Bourbaki, começou a elaborar um tratado que pretendia integrar de modo coerente e impecavelmente rigoroso os principais desenvolvimentos desta ciência. Os grandes êxitos científicos e tecnológicos (televisão, radar, bomba atómica, computador) e a nova ordem mundial do pós-guerra deram origem a uma atmosfera de grande euforia no mundo científico. Os cientistas ganharam um grande peso social e começaram a protestar, de modo cada vez mais audível, contra o crescente fosso entre os conhecimentos ministrados aos alunos no ensino secundário e o os conhecimentos que consideravam desejáveis para o início dos estudos superiores. (PONTE, 1997)

Esta constatação de que o ensino universitário absorveu os estudos recentes da época e que neste mesmo período as Matrizes se despontavam como um destes estudos recentes nos permite conjecturar que as Matrizes chegaram ao ensino secundário por “força maior”, ou seja, chegaram ao ensino superior e disso ao ensino secundário, acontecendo nesse entremeio a pressão sob o ensino secundário de que se ensinasse requisitos básicos para os estudos acadêmicos.

Estas são as informações que por meio da interlocução entre trabalhos e documentos puderam evidenciar a influência Bourbakista na noosfera *Matrizes no Ensino*.

4.2 O GRUPO GEEM

Antes de iniciar a análise da participação dos integrantes do GEEM como componentes de uma noosfera, relembremos que o Movimento da Matemática Moderna tinha como um de seus objetivos renovar/modernizar a linguagem matemática. Esta linguagem seria amparada por símbolos lógicos e a sua estrutura se basearia em estruturas algébricas e topológicas, permitindo assim, com menos esforço, um melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno (GEEM. Jornal da Cecisp, jun. 1962, grifos do autor)

Com este objetivo, em 11 de outubro de 1960, o jornal *Folha de São Paulo* noticiava o

> amplo movimento destinado a reformar os programas e os metodos do ensino de Matematica, tornando-o mais possível, objetivo, sem perder de vista que "todo esforço nesse sentido deve conduzir-se do concreto para o abstrato, respeitando-se assim a natureza essencialmente abstrata" desta ciência. (FOLHA DE SÃO PAULO. Professores de São Paulo visam à reforma dos programas e métodos do ensino de matemática. 11 out. 1960.)

Formaram-se, em São Paulo, núcleos de estudos sobre a reforma no ensino da matemática tais como: o CATEC[93], o GEEM (coordenado pelo professor Osvaldo Sangiorgi) e um grupo coordenado pelos professores Castrucci (catedrático de matemática da FFCL) e Scipione Di Pierro Neto (do Colégio de Aplicação da USP).

Simultaneamente ao esforço de criar um movimento para reformar o ensino de matemática, o GEEM organizava conferências que tratavam da Introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário.

Inspirados pela força que alcançava o Movimento e preocupados em compor um quadro mínimo de conteúdos do secundário, o GEEM pensou em um programa que contemplasse assuntos mínimos fundamentais, de forma que garantisse a unidade da matemática e o caráter estrutural, mas que evidenciasse a evolução da matemática – ciência em constante desenvolvimento. O programa foi composto por 24 itens sobre assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o ginásio e 18 itens destinados ao curso colegial, apresentados pelo GEEM no IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática.

---

[93] CATEC – Centro de Treinamento do Ensino de Ciências, mantido pelo Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBECC) – Seção de São Paulo. (NAKASHIMA, 2007).

Como em nosso estudo o que interessa é a matemática do colegial, em específico o conteúdo das matrizes, mostraremos primeiro quais foram os assuntos mínimos para o colegial e posteriormente a sugestão para abordar o conteúdo das matrizes:

1. Função do 2º grau. Estudo completo do trinômio do 2º grau e aplicações.
2. Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Aplicações das relações trigonométricas nos triângulos.
3. Identidades, equações e inequações trigonométricas simples.
4. Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço. Paralelismo e perpendicularismo de retas e planos.
5. Diedros, triedros e ângulos poliédricos.
6. Poliedros: prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas.
7. Corpos redondos.
8. Transformações pontuais: translação, rotação, simetria e homotetia.
9. Noção de seqüência de números reais. Progressões.
10. Noção de potencia no campo real. Operações inversas. Logarítmos.
11. Análise combinatória e aplicações.
12. Elementos de Geometria Analítica Plana. Equação da reta e equação da circunferência. Equações reduzidas das cônicas.
13. Medidas dos sólidos geométricos.
14. **Sistema de equações lineares. Noção de matrizes: aplicações**.
15. Números complexos: operações fundamentais, propriedades.
16. Estudo dos polinômios.
17. Equações algébricas.
18. Noção de limite, continuidade e derivadas. Elementos de cálculo integral: aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

E com relação às matrizes, o programa apresentado pelo GEEM sugeria sua aplicação em sistemas lineares: “O estudo (se referindo aos sistemas lineares) pode ser feito através da teoria dos determinantes ou **preferivelmente**, pelas matrizes. Ressaltar as estruturas algébricas das operações com matrizes (anel e espaço vetorial)” (JORNAL DA CECISP. IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática: Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Colégio. jun. 1962 – grifo do documento).

Baseados na prévia dos assuntos mínimos fundamentais para o secundário, o GEEM realizava reuniões que discutiam experiências com tais assuntos.

Em 26 de maio de 1962, o GEEM promoveu uma reunião com professores da capital e do interior (33 pessoas). Esta reunião teve na pauta os relatórios de experiências que eram realizadas sobre a introdução da matemática moderna no curso secundário. Além disso, os integrantes marcaram a data de uma nova sessão que discutiria o que seria apresentado como material para o IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática. (FOLHA DE SÃO PAULO. Professores discutem ensino da Matemática Moderna. 27 mai. 1962.).

É importante ressaltar que nesta reunião os trabalhos de destaque foram: *Introdução do conceito de número e numeral na 1ª serie ginasial*, de Elza Babá e *Introdução de Matrizes*, de Rui Madsen Barbosa. Possivelmente, esta fora a primeira discussão em que se abordou o assunto das matrizes, previamente testado em sala de aula, explorado como conteúdo do ensino secundário.

Esta hipótese sustenta-se na afirmação do jornal que dizia ser na próxima reunião a definição dos assuntos do IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática, ou seja, ainda que o IV Congresso tenha "lançado" alguns conteúdos do secundário – como o das matrizes – antes disso já se discutia sobre os novos conteúdos. Nestas discussões, aproveitando a ocasião, aprovavam-se os assuntos que comporiam o IV Congresso, trabalhos estes, como os de Rui Madsen, apresentados na reunião de 26 de maio de 1962.

Mas é preciso indagar sobre os motivos que levaram o professor Rui Madsen Barbosa a testar o conteúdo das matrizes em sala de aula. Por que as matrizes e não outro conteúdo?

Como o objetivo deste trabalho não foi o de registrar entrevistas com os personagens citados e nem mesmo entrevistar pessoas que fizeram parte do período do Movimento da Matemática Moderna, podemos apenas supor que:

Primeiro) O professor Rui Madsen Barbosa, como professor e participante do Movimento da Matemática Moderna, sentiu interesse em abordar na sala de aula o assunto das matrizes por ser novidade tanto na comunidade científica como também no ambiente acadêmico da época.

Segundo) A literatura sobre as matrizes já era divulgada pelos Bourbakistas e professores da USP – que ministravam aulas na USP assim como os professores contratados Bourbakistas – e por membros do grupo GEEM, também pelo professor Omar Catunda, em seu artigo já citado anteriormente. Tinha a vantagem de envolver temas atuais das pesquisas em matemática e outras áreas, como a física, e a interdisciplinaridade deste conteúdo pode ter levado o professor Rui Madsen a testá-lo como conhecimento para o ensino básico.

Certamente as influências para o professor Rui Madsen surgiram das atividades realizadas pelo GEEM, atividades estas como os cursos de férias.

No curso de férias (realizado em 11/02/1963) do Serviço de Expansão Cultural do Departamento de Educação, em convênio com o GEEM, foram proferidas palestras, debates, aulas e exposições. Um destes assuntos foi a *Iniciação às matrizes*, tratado pelo professor Rui Madsen Barbosa e também *Aplicações das matrizes*, apresentada pelo professor Carlos A. Callioli. (FOLHA DE SÃO PAULO. Matemática moderna atraiu 120 professores secundários. 19 fev. 1963)

O GEEM também lançava slogans e é bem provável que fosse com o intuito de atingir mais professores secundaristas. Um dos slogans era o *2M*.

> A operação 2M significa MM: Matemática Moderna, É a Matemática tradicional reformulada com novas bases colocando o nosso ensino e estudos em paridade com os dos países mais desenvolvidos do mundo, de modo a atender não somente às necessidades mais importantes e inadiáveis da vida prática, como também às de carater técnico-científico e industrial. É a Matemática unificada, sem aqueles compartimentos estanques, quais sejam, as tradicionais matemáticas: Aritmética, Algebra, Geometria, Trigonometria, etc., às vezes indevidamente separadas compléta e totalmente uma da outra. (Professor Oswaldo Luiz Guimarães. A Matemática Moderna, o GEEM e a Operação 2M. O Estado de São Paulo, 30 jun. 1963)

Esta operação tinha a ambição de elevar o Brasil, igualando-o aos países desenvolvidos. Em nota ao Jornal *O Estado de São Paulo*, o professor Oswaldo Luiz Guimarães finalizou dizendo:

> [...] posso adiantar-lhes que com o pioneirismo do GEEM, a operação 2M coadjuvada por todos aqueles que querem dias melhores para a nossa Pátria, ao imprimirmos um cunho mais realista à cultura matemática da nossa juventude o Brasil passará a desfrutar posição das mais privilegiadas no cenário internacional, como nação não mais sub-desenvolvida e paupérrima e sim como nação adiantada, pois recursos de inteligência, abnegação e esforço não nos faltam. Faltam-nos sim, diretrizes para alcançarmos este progresso e maturidade. (O ESTADO DE SÃO PAULO. A Matemática Moderna, o GEEM e a Operação 2M., 30 jun. 1963)

E assim o GEEM continuou seus cursos e reuniões, tais como a de 5 e 6 de novembro de 1964 em que tratavam dentre outros temas o *uso de matrizes no colegial*.

Como pudemos notar, o grupo GEEM tinha uma obstinação marcante com relação ao ensino da álgebra linear, talvez pela influência dos Bourbakistas desta área que interagiam com os membros do grupo GEEM. Foi sobre tal assunto que muitos professores convidados ministraram palestras evidenciando a importância da álgebra linear no ensino básico.

Um deles foi o professor Artibano Micali, doutor pela Universidade de Paris e membro do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo. Micali, no dia 28 de outubro de 1965, proferiu a conferência sobre “Álgebra Linear e o Ensino Secundário”, sendo esta conferência uma das atrações do programa de comemoração do 4º aniversário do GEEM. (FOLHA DE SÃO PAULO, 09 out. 1965)

Já no ano de 1967, no período de 2 a 21 de janeiro, o GEEM promoveu mais um curso abrangendo o 1º e 2º ciclos de assuntos que abordavam conteúdos da matemática moderna. Este curso, voltado aos professores secundários, propôs os tópicos: teoria dos conjuntos, lógica matemática aplicada à escola secundária, álgebra moderna, álgebra linear[94], matrizes, problemas de contagem, probabilidades e iniciação à topologia. (FOLHA DE SÃO PAULO. Matemática Moderna, 2 cursos em janeiro. 18 dez. 1966.) Este curso que se encerrou no dia 22 de janeiro foi o 6º sexto promovido pelo GEEM e "formou" mais de 5000 professores.

Neste mesmo ano, em 17 de junho de 1967, o GEEM realizou duas sessões de estudos. Uma delas foi sobre *Aplicações de matrizes nas transformações geométricas*, proferida pelo professor Rui M. Barbosa. (FOLHA DE SÃO PAULO. GEEM promove sábado duas sessões.14 jun. 1967.)

Os anos se passaram e o GEEM continuou seus cursos de férias e eventos que divulgavam a Matemática Moderna, mas toda essa comoção não duraria muito tempo.

Em 1º de junho de 1969, o professor Scipione Di Pierro Neto, em entrevista ao jornal *O Estado de São Paulo*, fez várias críticas ao emprego incorreto dos objetivos da Matemática Moderna. Ele começou a revelar, ainda que timidamente, o fracasso desta almejada matemática:

> A Matemática se moderniza realmente, mas em longérrimos tempos. Sómente a intervalos muito grandes de tempo se identificam algumas mudanças que se poderiam dizer modernas. A elaboração de algumas operações com conjuntos e o uso de alguns símbolos da Lógica Matemática devem-se constituir em elementos auxiliares e até mesmo indispensáveis para o professor de Matemática da escola secundária. Mas o uso parcimonioso, adequado e justo a cada situação; o uso que fará entender ao aluno que êstes símbolos são antes auxiliares valorosos num processo de comunicação matemática e não a própria Matemática. Lamentávelmente, a confusão que se está estabelecendo é que esta simbologia, estas formas de representação passam a significar, agora, uma nova Matemática e não um simples processo de comunicação lógica na linguagem matemática.
> O aluno deve conhecer alguns elementos da Teoria dos Conjuntos, assim como alguns símbolos da Lógica Matemática, mas de modo natural e intuitivo no decurso do seu aprendizado matemático, e toda vez que êsse fato tiver uma função bem definida no processo da aprendizagem; aí a simbologia pode e, mais do que isso, deve ser usada. Ao contrário deve ser evitada quando for supérflua ou meramente formal e desse modo se evitará a moléstia que recebeu do ilustre prof. Alésio de Carolis o nome muito sugestivo de "conjuntivite", isto é, a elaboração durante muitas semanas e ás vezes meses dos elementos da Teoria dos Conjuntos ou

[94] É interessante destacar que a álgebra linear e as matrizes eram assuntos estanques, cada um com sua textualização e ferramentas matemáticas específicas. Hoje, a álgebra linear é uma disciplina estudada nas universidades e tem as matrizes como um de seus tópicos de estudo.

> similares. (O ESTADO DE SÃO PAULO. A Matemática na escola Moderna. 01 jun. 1969.)

É muito importante citar este trecho do professor Di Pierro Neto para revelar o descontentamento que a Matemática Moderna foi produzindo.

De fato, o que aconteceu foi que os professores do ensino básico não estavam preparados e nem tiveram tempo suficiente para se preparar a cada novo assunto e métodos didáticos que a nova matemática exigia. As notas de jornais demonstravam esse caos e revelavam a pressão que os professores sentiam:

> [...] os professores de matematica do secundario deviam ceder á pressão: por bem ou por mal, precisavam lecionar Matemática Moderna. Mas este imperativo imposto pelas circunstancias não podia eliminar o fato de não estarem eles, em absoluto, preparados para a tarefa.
> [...] Assistimos a um dilúvio de modernismo matematico. Até professores que empregavam o critério tradicional com exito, ao ceder á moda passaram a ser maus professores. A moda tornou-se mania e as livrarias encheram-se de livros de pseudo Matematica Moderna. (O ESTADO DE SÃO PAULO. A renovação da Matemática. 03 out. 1971.)

O grupo GEEM ainda tentou suas últimas chances de fazer da Matemática Moderna uma linha de estudos propícia ao ensino e convidou o professor Dienes – diretor do Centro de Pesquisas Psico-Matemáticas da Universidade de Sherbrooke, Canadá, para falar sobre a fundamentação da Matemática Moderna. (O ESTADO DE SÃO PAULO. A renovação da Matemática. 03 out. 1971.) Este evento ocorreu em comemoração ao 10º aniversário do GEEM.

E assim, em meados dos anos 80 a Matemática Moderna chegara ao seu fracasso total e como já dito, deste fracasso, novos estudos surgiram a fim de corrigir as imperfeições deixadas por este ideário.

Da contribuição do GEEM ficaram as marcas de um espírito revolucionário, que ao mesmo tempo motivava e desafiava a quem interessasse saber mais matemática. Não obstante, o GEEM também deixou uma enorme bagagem textual de assuntos novos da matemática, sem ter alcançado o objetivo de pedagogicamente adaptá-los ao ensino. Os professores que participavam dos cursos e eventos promovidos pelo GEEM não atingiram as metas da filosofia da Matemática Moderna e por fim, este grupo, tornou-se um ícone importante da história da educação matemática, que apesar das falhas tentou dar um passo adiante.

CAPÍTULO 5

INVESTIGANDO A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA POR MEIO DE TEXTOS DO SABER

O capítulo 5, em específico, aborda a produção textual do saber Matrizes em duas obras. Esta produção textual, assim como supomos no início da pesquisa, é resultado de uma transposição didática ocorrida com as Matrizes ao tempo da Matemática Moderna, sedimentada consequentemente em livros didáticos.

Trata-se de um capítulo no qual adotamos uma práxis mais técnica, que elencará as diferenças de escrita e de elaboração didática entre os dois livros escolhidos do período da Matemática Moderna. Os livros analisados servirão como fonte de pesquisa tanto para a seção 5.1 como também para a seção 5.2, e assim como num estudo de caso, representarão outros livros editados na mesma época.

A análise realizada será do tipo *análise de conteúdo*. *A priori*, adotamos um critério de categorização semântico (BARDIN, 2004, p.145), buscando categorias temáticas identificadas no livro de Chevallard *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Estas categorias por sua vez, subjacentes ao conceito de transposição didática, foram posteriormente empregadas como unidades de codificação que auxiliaram na identificação, destas mesmas, num outro contexto, agora não mais como códigos de definição de um tema, mas sim como uma categoria temática aplicada na produção de um texto.

Resumidamente, as unidades de codificação, anteriormente definidas a partir da leitura do livro de Chevallard – livro que apresentou as explicações de conceitos intrínsecos à transposição didática – foram analisadas nos livros didáticos com outro enfoque, ou seja, buscou-se identificar as aplicações destas unidades de codificação na textualização dos livros didáticos.

O primeiro livro escolhido para esta análise é de Luiz Henrique Jacy Monteiro, *Álgebra Linear* (vol. 1, 1959) e o segundo é do GEEM, *Matemática Moderna para o Ensino Secundário* (1962). Deste último, nos detivemos em maior parte ao capítulo *Introdução Elementar de Matrizes no Curso Colegial* (p.191-223), escrito por Ruy Madsen Barbosa, professor renomado da área algébrica e integrante muito participativo das atividades realizadas pelo GEEM.

Como participante do GEEM manteve um contato constante com Jacy Monteiro, também integrante deste mesmo grupo. Os dois, em ocasiões diferentes, ministraram cursos sobre matrizes no período em que o GEEM divulgava incansavelmente a Matemática Moderna pelo Brasil.

Nesta ocasião cabe justificar a escolha dos livros adotados como fonte de pesquisa.

Jacy Monteiro (1921-1975), como gostava de ser chamado, desde sua infância mostrou prodigioso talento para esportes. Porém, foi com a ciência exata que se revelou ainda mais genial. Estudou outras línguas e era dotado de uma memória excelente, o que lhe permitia traduzir as aulas em inglês e francês que tinha com professores estrangeiros da FFCLUSP (DUARTE, 2007), em tempo real.

As suas traduções resultaram em apostilas de notas de aula e assim, Jacy Monteiro tornou-se não só um auxiliar dos professores, mas um bom escritor, tanto que várias teses dos estudantes da FFCLUSP foram revisadas por ele. Anos posteriores, era ele quem estava lecionando (DUARTE, 2007).

> Até 1959, Jacy Monteiro lecionou Álgebra Moderna na Universidade Mackenzie, recebendo do centro Acadêmico de Filosofia o título de Sócio Honorário e o diploma de Honra ao Mérito, “testemunho do seu alto relacionamento com os estudantes de matemática e Física daquela Universidade”. (SANGIORGI, 1975 *apud* DUARTE, 2007, p.321).

Amigo de professores Bourbakistas, como Dieudonné e Weil, estudara Álgebra Comutativa e também lecionara no curso de Geometria Superior este mesmo tópico – o qual se inter-relaciona a Álgebra Não-Comutativa das Matrizes.

Tinha uma particular inclinação para a matemática algébrica o que lhe rendeu bons trabalhos nesta área. Um deles é o livro no qual nos apoiamos para compor este capítulo.

O livro em questão, *Álgebra Linear, vol.1 (1959)*, aborda os assuntos: espaços vetoriais, aplicações lineares e matrizes, e dualidade. Trata-se, portanto, de um livro acadêmico, publicado a partir da matéria lecionada na FFCLUSP, no ano de 1959.

É importante ressaltar que possivelmente, parte do que está escrito no livro de Jacy Monteiro fosse elaborado em meio a uma aula, ou quando Monteiro preparava suas notas de aula. Era também muito comum, professores trazerem aos alunos publicações recentes, inovadoras, sobre as pesquisas em matemática, incorporando tudo isso no processo de ensino.

> [...] era comum um professor abandonar suas notas, normalmente bem preparadas, a enveredar num processo criativo durante a aula. Claramente estavam ali porque viviam aquilo que estavam ensinando, criavam perante seus alunos e, sem acanhamento, criticavam e anulavam algo que estavam tentando fazer. [...] Uma pergunta ou um problema proposto a um professor era algo que ia para casa com ele, e dias, às vezes semanas depois, vinha uma satisfação, com a solução ou uma confissão de não ter conseguido. Retomar uma linha de raciocínio uma, duas semanas depois, era também algo comum. Aula era algo levado a sério, trazido de casa para a faculdade e da faculdade para casa. Era um envolvimento total do professor com seus alunos e com sua missão. Docência e pesquisa era algo que se fazia em simbiose. (D'AMBROSIO, 1988b, p.57 *apud* DUARTE, 2007, p.314-315).

Enfim, o livro de Monteiro, que fará parte deste trabalho, contém as marcas de um ensino em que o tempo da aula também era o tempo da pesquisa; em que as aulas baseavam-se em publicações recentes e na história científica dos saberes, momento no qual havia troca de idéias entre professor-aluno, uma vez que o "diálogo" professor-saber e saber-aluno eram mais intensos.[95]

Como o objetivo desta seção é comparar livros, do ensino superior e do ensino secundário, buscando identificar elementos de uma transposição didática ocorrida entre o *saber científico* para o *saber a ser ensinado*, nos parece conveniente adotar um livro produzido nas condições citadas anteriormente – feito no estilo do de Jacy Monteiro. Além disso, o livro do ensino secundário deve apresentar alguma proximidade em relação ao livro do ensino superior, algo que torne a comparação apropriada/interligada.

Para tanto, foi escolhido o capítulo de Ruy Madsen – também escrito a partir de notas de aulas do autor quando ministrava cursos de aperfeiçoamento a professores do ensino colegial – para compará-lo ao de Jacy Monteiro. Além do fato de ser uma produção do próprio Ruy Madsen, o capítulo traz uma informação fundamental: nas suas referências consta a citação do livro de Jacy Monteiro – Álgebra Linear I e II – e esta é a única brasileira entre todas as outras de autores estrangeiros. Isso nos leva a crer que Madsen tenha usado da

---

[95] Destacamos que na situação em que as aulas de Jacy Monteiro eram praticadas, a transposição didática interna de fato acontecia.

textualização elaborada por Jacy Monteiro. Eis que esta é uma das aproximações que buscávamos; a outra segue dos anos de publicação dos textos, um de 1959 e outro de 1962, o que hipoteticamente não admitiria uma nova publicação, neste meio tempo, de igual calibre que a de Jacy Monteiro, para servir de referência textual e conceitual sobre as Matrizes para Ruy Madsen.

Os livros escolhidos situam-se propositalmente no período da Matemática Moderna, visto que esta foi a fase de transição entre o ensino tradicional e o ensino considerado moderno, fase em que a concepção de moderno era fazer das últimas pesquisas acadêmicas um saber a ser ensinado, gerando, entre outras coisas, a introdução de novos conteúdos ao ensino secundário.

O livro do GEEM (1962), o qual traz o capítulo de Ruy Madsen, é o resultado da introdução dos novos conteúdos, advindos da Matemática Moderna, e por isso acreditamos que tenha sido ele a "oficializar" o conteúdo das Matrizes para o ensino secundário.

Outra informação que nos leva a crer que o livro do GEEM ajudou a implantar a Teoria das Matrizes no ensino secundário se deve à revisão bibliográfica feita *a priori* para compor este capítulo. Nesta revisão bibliográfica buscávamos livros das décadas de 1930 a 1980. Dentre estes livros queríamos identificar quais deles eram os mais citados em referências bibliográficas de outros livros da época, para então, podermos afirmar, quais livros serviam de referencial teórico para todos os outros. Primeiramente separamos os livros que continham o assunto de matrizes e os que não continham. Em seguida verificamos a bibliografia dos livros para selecionarmos os que eram os mais citados.

O total de livros verificados foi de 32, mas nenhum deles fez parte da década de 30, isso porque não conseguimos encontrar livros deste período. Com relação aos livros que traziam o assunto de matrizes, observamos que o livro de Jacy Monteiro, analisado nesta pesquisa, foi o único que trouxe as matrizes como assunto para o ensino superior, isso no ano de 1959. Já dentre os livros para o ensino secundário, apenas os da década de 60 em diante apresentaram em sua textualização o assunto das matrizes. Entre as décadas de 40 e 50 foi verificado que na textualização dos livros, em geral, ao tratar de determinantes havia uma definição bem resumida de matrizes quadradas, somente isso – pois era o que se necessitava para estudar o conceito de determinantes.

Dentre os 17 livros das décadas de 60, 70 e 80, apenas seis traziam a bibliografia consultada. Constam nessas bibliografias consultadas textos variados de Rui Madsen Barbosa e/ou Luiz Henrique Jacy Monteiro. Entre os seis livros, dois deles trouxeram o livro *Álgebra Linear,* vol. 1, como referência.

5.1 COMPARAÇÕES ENTRE AS TEXTUALIZAÇÕES DAS MATRIZES

Nesta seção trataremos das textualizações do *saber* Matrizes, destacando as diferentes maneiras de apresentá-lo para o ensino.

Dessa forma, espera-se que o texto produzido para o ensino secundário, revele que os conceitos intrínsecos a Teoria das Matrizes estão de acordo com àqueles apresentados no texto do livro acadêmico, que também é científico, porém, estarão com linguagem diferenciada, com menos notações.

Iniciemos pela definição das Matrizes.

Jacy Monteiro	Madsen Barbosa
Definição: Chama-se matriz sôbre um conjunto não vazio E a tôda família $(\alpha_{ij})_{(ij) \in IxJ}$ de elementos de E, onde I e J são conjuntos finitos de índices. (JACY MONTEIRO, 1959, p. 121)	**Conceito:** Um conjunto de números dispostos em forma de tabela retangular é chamado matriz retangular. (BARBOSA, 1962, p. 191)

As nomenclaturas:

Jacy Monteiro	Madsen Barbosa
Para cada i Є I, a família $(\alpha_{ij})_{j \in J}$ é denominada línha de índice i da matriz (α_{ij}) e para cada j Є J, a família $(\alpha_{ij})_{i \in I}$ é denominada coluna de índice j da matriz (α_{ij}). (JACY MONTEIRO, 1959, p. 121)	Da apresentação dos elementos consta no capitulo de Madsen o seguinte: Prefere-se designar todos os elementos pela mesma letra, indicando a sua posição na matriz com índices numéricos. [...] onde cada índice inferior consta de dois algarismos, o primeiro indicando a linha, e o segundo a coluna a que pertence o elemento. (BARBOSA, 1962, p. 192)

As operações:

Jacy Monteiro	Madsen Barbosa
Soma: Chama-se soma de duas matrizes (α_{ij}) e (β_{ij}) retangulares mxn, sôbre um mesmo corpo K, à matriz $(\alpha_{ij} + \beta_{ij})$, ou seja, $(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$. (JACY MONTEIRO, 1959, p. 127)	**Soma:** Dadas as matrizes $A = [a_{rs}]_{mxn}$ e $B = [b_{rs}]_{mxn}$ chamamos soma das matrizes a matriz $C = [c_{rs}]_{mxn}$ tal que : $c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}$ para qualquer dos índices. (BARBOSA, 1962, p. 201)
Produto de um escalar por uma matriz: Chama-se produto de um escalar α por uma matriz $(\alpha_{ij}) \in M(K,mxn)$, à matriz $(\alpha\alpha_{ij})$, ou seja, $\alpha \,.\, (\alpha_{ij}) = (\alpha\alpha_{ij})$. (JACY MONTEIRO, 1959, p. 128)	**Produto de um escalar por uma matriz:** Dada uma matriz, denomina-se matriz Produto por um Número Real a matriz que se obtém da primeira multiplicando-se todos os seus elementos pelo número real. Temos por definição: $x \,.\, [a_{rs}]_{mxn} = [x \,.\, a_{rs}]_{mxn}$ (BARBOSA, 1962, p. 203)
Produto de matrizes: Chama-se produto de uma matriz retangular (β_{ki}), pertencente a M(K; pxm), por uma matriz retangular (α_{ij}), pertencente a M(K; mxn), à matriz (γ_{kj}), pertencente a M(K; pxn), cujo elemento γ_{kj} de posição (k,j) é definido por $\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}$, para k = 1, 2, ..., p e j = 1, 2, ..., n. (JACY MONTEIRO, 1959, p. 132)	**Produto de matrizes:** Dada uma matriz mxp e outra pxn denomina-se MATRIZ PRODUTO, nessa ordem, a matriz mxn, cujos elementos são os produtos interiores correspondentes às suas posições. Isto é, os elementos da Matriz Produto são iguais a soma algébrica dos produtos dos elementos correspondentes da linha e coluna correspondentes à posição dêsse elemento. Temos portanto: $[a_{rs}]_{mxp} \times [b_{rs}]_{pxn} = [c_{rs}]_{mxn}$ com: $c_{rs} = L_r \, I \, C_s$ (BARBOSA, 1962, p. 204)

As ligações com outros saberes:

Jacy Monteiro	Madsen Barbosa
De modo geral as matrizes são relacionadas à teoria dos conjuntos, às aplicações lineares e aos sistemas de equações lineares.	De modo geral, no capítulo de Barbosa, não há relação com outro saber. As relações de matrizes com outros saberes são conferidas apenas em outros capítulos do livro. Isso mostra a desincretização realizada no ato de separar conteúdos.

Matrizes inversíveis:

Jacy Monteiro	Madsen Barbosa
Definição: Diz-se que uma matriz quadrada Um (sôbre um corpo K) de ordem n, é <u>inversível</u> quando existe $U^{-1} \in M_n(K)$ tal que $UU^{-1} = U^{-1}U = I_n$. A matriz U^{-1} é denominada <u>inversa</u> de U. (JACY MONTEIRO, 1959, p. 138)	Definição: Chama-se inversa de uma matriz A (quando existe) em relação à multiplicação a matriz A tal que: $A \times A' = A' \times A = I$ (BARBOSA, 1962, p. 216)

É preciso ressaltar que no livro de Jacy Monteiro fala-se das matrizes como uma álgebra associativa e no capítulo de Madsen Barbosa não é citado nada sobre isso. No livro de Jacy Monteiro também fica muito clara a designação dos índices inferiores dos elementos das matrizes, caracterizando-os como índices de linhas e colunas. Um equívoco é observado no capítulo de Barbosa com relação a isso, pois o mesmo não especifica, por exemplo, quem são os índices inferiores, de que conjuntos fazem parte.

5.2 IDENTIFICANDO EM LIVROS DIDÁTICOS OS ELEMENTOS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A seção 5.2, tem um caráter todo especial, pois trabalhamos até aqui para construí-la.

Versará sobre os elementos da transposição didática que são explicitados após a ação da transposição sob o saber Matrizes, e que se tratam da(s): criações didáticas; noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas; desincretização; despersonalização; programabilidade; publicidade; envelhecimento biológico e moral; relação antigo/novo.

Para que haja melhor compreensão, a cada elemento citado será apresentada uma breve explanação. Mas antes disso, é preciso destacar um fator que foi importante para realizar algumas das comparações que auxiliaram na identificação dos elementos da transposição didática: a contextualização. Esse fator, de acordo com esta pesquisa, é de suma importância, pois mostra evidências da *despersonalização* e do *envelhecimento moral dos saberes*.

Quando um saber está contextualizado, ele incorpora situações do passado, do presente ou do futuro. Com relação a isso, ele personifica o saber conforme as características sociais que quiser. Por exemplo: ao contextualizar as matrizes no passado, pode-se comentar sobre sua origem, citar Cayley e Sylvester e algum problema matemático que tiveram de enfrentar, ou algo parecido; ao contextualizar no presente, as matrizes poderiam se relacionar aos problemas da era computacional, remeter a Turing[96] e a teoria da codificação; etc.

Em se tratando do envelhecimento moral, o saber pode sofrer um desgaste moral, na medida em que qualquer pai ou avô poderia ensinar tal saber a um estudante uma vez que o mesmo está ultrapassado, é de uma época mais antiga. Nesse caso, ao ser contextualizado, o saber pode se modificar, mostrando problemas mais recentes, usando de uma nova linguagem ou envolvendo novos saberes para discuti-lo. Isso quer dizer que se envelhece uma forma de abordagem do saber para recompô-lo em outra mais atual e dinâmica. O saber se torna presente de novo.

---

[96] Alan Mathison Turing (Londres, 23 de Junho de 1912 – 7 de Junho de 1954) - foi um matemático britânico. Logo cedo se interessou pela ciência. A maior parte de seu trabalho foi desenvolvido na área de espionagem e codificação - criptoanálise, e por isso somente em 1975 veio a ser considerado um grande nome na história da computação que usava de matrizes codificadas. (WIKIPÉDIA, 2008) (MACTUTOR, 2008).

O capítulo de Madsen, por exemplo, traz toda uma contextualização para introduzir a noção de Matrizes. Descreve situações em que as Matrizes poderiam ajudar na contabilidade do faturamento de uma fábrica ou indústria, ou na contagem de pontos num jogo. Isso remete a idéia de que as Matrizes serviriam ao trabalho de uma empresa e, neste mesmo momento, o Brasil vivia sua tentativa de qualificar profissionais para as indústrias ou para as fábricas.

Já no livro de Jacy Monteiro as Matrizes não têm um contexto próprio, elas servem apenas como linguagem mais simplificada quando se vai tratar de aplicações lineares, são, por assim dizer, ferramentas de trabalho matemático. Contudo, ela se apresenta com a linguagem simbólica da teoria dos conjuntos – linguagem mais atual na qual a matemática era re-escrita – o que a coloca numa fase ainda não envelhecida pelo desgaste moral.

Como observado, o envelhecimento moral do saber Matrizes tanto para um livro como para o outro, na época da edição dos mesmos, não tinha acontecido. Ao contrário disso, "as Matrizes", aqui no Brasil, era um assunto recente tanto na academia como nas escolas, introduzidas pelos matemáticos Bourbakistas e outros que fizeram pesquisas no exterior, para atualizar o quadro de pesquisas nacional.

Outra observação feita após a comparação entre os livros que diz respeito à contextualização e, consequentemente, diz respeito à textualização do saber, refere-se a "fidelidade" com que os conceitos são apresentados, ou seja, eles não foram burlados ou simplificados só pelo fato de serem escritos ao público do secundário.

Embora os textos de Madsen e Monteiro tivessem finalidades diferentes, a fidelidade para com a escrita dos conceitos, faz subentender que o processo de transposição didática aplicado às matrizes foi de fato realizado adequadamente. Para melhor apresentar os elementos que foram identificados ou não neste processo, os indicaremos por subitens.

5.2.1 DESINCRETIZAÇÃO DO SABER

A desincretização do saber, por se tratar da parte na qual as conceituações de um assunto se subdividem, é contemplada em qualquer texto, tanto científico, literário, jornalístico, etc.; enfim, não importa que saber esteja envolvido, a organização sistemática pode tornar a leitura e a escrita mais metódica e coerente.

Não diferente, os textos dos saberes matemáticos também se apresentam de forma desincretizada, sistematicamente organizados. Essa desincretização de um assunto matemático possibilita a programabilidade do saber e também, em alguns casos, pode designar quais conceituações caberá ao professor abordar e quais os alunos pode estudar sozinhos.

O conteúdo das matrizes no livro de Jacy Monteiro, por exemplo, não foi tão desincretizado como o ocorrido no capítulo de Madsen Barbosa. A teoria foi redigida na forma de "texto corrido", não especificando com subtítulos o início de uma conceituação. Só para se ter uma idéia, no livro de Monteiro as matrizes foram divididas pelas seguintes partes:

2.1 – Matriz de uma aplicação linear;

2.2. Operações entre matrizes;

2.3 – Matrizes inversíveis; pôsto de uma matriz;

2.4 – Exercícios;

e no capítulo de Madsen Barbosa, as matrizes se apresentaram como:

Parte I – Elementos:

A. Preliminares;
B. Conceitos elementos;
    - B.1 – Conceito;
    - B.2 – Ordem;
    - B.3 – Representação geral de matriz;
    - B.4 – Matriz linha e matriz coluna;
    - B.5 – Igualdade de matrizes;
C. Exemplos gerais de matrizes;
D. Exercícios;

Parte II – Introdução às operações com matrizes;

A. Adição;
B. Subtração;
C. Multiplicação por número real;
D. Multiplicação de matriz por matriz;

Parte III – Operações;

A. Adição;
    A.1 – Definição;
    A.2 – Exemplo;
    A.3 – Matriz nula e a adição;
B. Matriz oposta;
    B.1 – Definição;
    B.2 – Exemplo;
C. Subtração;
    C.1 – Definição;
    C.2 – Exemplo;
D. Multiplicação de matriz por número real;
    D.1 – Definição;
    D.2 – Exemplo;
E. Multiplicação de matriz por matriz;
    E.1 – Produto interior;
    E.2 – Definição – Produto de matriz por matriz;
    E.3 – Exemplo;
    E.4 – Esquema prático;
F. Matriz diagonal;
    F.1 – Definição;
    F.2 – Matriz escalar – definição;
    F.3 – Matriz escalar na multiplicação de matrizes;
G. Matriz identidade;
    G.1 – Preliminares;

Parte IV – Propriedades – Estruturas;

A. Preliminares;
B. Monóide;
C. Grupo;
D. Grupo comutativo;
E. Anel;
F. Exercícios.

Como se pode observar a desincretização destes livros ficou bem diferenciada.

5.2.2 DESPERSONALIZAÇÃO DO SABER

Sobre a despersonalização[97], buscamos na textualização das matrizes algum personagem que apresentado sob uma situação-problema ou mesmo numa nota de rodapé, incitasse ao estudo do conteúdo. Isso remeteria a idéia de que as matrizes foram personalizadas, como se tivesse um motivo para estudá-las, pois alguém envolvido a este assunto já o teria feito.

Apesar de conhecer a história das matrizes e os personagens ligados a ela, no texto de Monteiro não foram identificados indícios de uma personalização. Isto quer dizer que o conteúdo das matrizes no livro de Monteiro "não tem dono", não é um saber próprio de alguém, mas sim, um saber para todos, universal, passível a modificações e até mesmo a novas contextualizações que remetam a novos personagens.

Dessa maneira, é evidente que a despersonalização realizada no ato da transposição didática das matrizes alcançou seu objetivo no texto de Monteiro, qual seja o de universalizar o saber, tornando-o acessível ao público discente da academia. Na apresentação do saber, no texto de Monteiro, não houve menção a um matemático ou cientista em específico, tão pouco temporalizou o assunto já que não o relacionou a nenhum personagem histórico.

Pelo contrário, no capítulo de Barbosa, as matrizes são relacionadas aos estudos oriundos de Sylvester, Cayley e Hamilton (meados de 1850 em diante).

> O têrmo MATRIZ foi introduzido em 1850 por Sylvester, usado em anos sucessivos por Hamilton e Cayley e hoje, pelos matemáticos modernos e cientistas em geral. (BARBOSA, Ruy Madsen, Matemática Moderna para o Ensino Secundário, 1962, p.191).

Na textualização de Barbosa, as matrizes, apesar de terem se mostrado como saber universalizado, ainda personalizaram o saber quando o relacionaram aos personagens de sua história.

---

[97] Personalização - **1**. Ato ou efeito de personalizar.
Personalizar - **1**. Atribuir qualidades de pessoa a; personificar. **2**. Nomear ou indicar a pessoa de. **3**. Dar caráter pessoal a; tornar pessoal. (FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda (Aut.). **Novo Dicionário Eletrônico Aurélio versão 5.0**. 3. ed.)

5.2.3 PROGRAMABILIDADE DO SABER

Como já descrito no subitem desincretização, este elemento do processo da transposição didática e a programabilidade do saber estão interligados. Uma vez desincretizado o conteúdo, o autor que irá redigi-lo pode organizar a sequencia de apresentação dos tópicos da maneira que ele julgar melhor.

No livro de Jacy Monteiro, a programabilidade adotada, diferiu daquela empregada no capítulo de Madsen Barbosa, além disso, ela esteve implícita no texto, pois o mesmo não se apresentou desincretizado. A programabilidade adotada foi:

- Definições gerais – definição de uma matriz qualquer, ordem e nomenclaturas dos elementos de uma matriz, definição de matrizes quadradas, definição de submatriz, conjunto de matrizes, definição de uma matriz da aplicação linear, definição de família de matrizes, aplicação biunívoca utilizando o conceito de matriz, unicidade da aplicação linear usando da nomenclatura das matrizes;
- Operações entre matrizes – adição de matrizes, produto de um escalar por uma matriz, definição de espaço vetorial envolvendo as matrizes, isomorfismo do espaço vetorial usando das matrizes, espaços vetoriais de dimensões finitas, produto entre matrizes, leis operacionais entre matrizes, como associatividade, distributividade, a operação da adição como uma estrutura de grupo comutativo, matriz unidade, operações que definem uma estrutura de anel, definição das matrizes que se enquadram numa álgebra associativa;
- Matrizes inversíveis e posto de uma matriz – definição de uma matriz inversível, condições para inversa de uma matriz ser única, relação entre matrizes inversíveis e endomorfismo, definição de posto de uma matriz.
- Exercícios sobre as matrizes e aplicação linear – 82 ao todo.

Já no capítulo de Madsen Barbosa, a programabilidade adotada foi:

- Conceito de matriz, ordem de uma matriz, representação geral das matrizes, matriz linha e matriz coluna – nomenclatura, igualdade de matrizes;
- Exemplos gerais de matrizes;
- Exercícios sobre os primeiros itens anteriormente citados – 4 no total;
- Operações com matrizes – exemplos das operações: adição de matrizes e apresentação da matriz nula, subtração de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz, multiplicação entre matrizes; definições das operações: adição e adição com matriz nula,

matriz oposta, subtração, multiplicação de uma matriz por um escalar, multiplicação entre matrizes;

- Definições – matriz diagonal, matriz escalar, matriz identidade.
- Exercícios sobre todos os itens anteriores – 7 ao todo;
- Propriedades de estrutura – propriedade associativa da adição, elemento neutro da adição, multiplicação associativa, elemento neutro da multiplicação;
- Estrutura de grupo – elemento inverso da adição, elemento inverso da multiplicação;
- Estrutura de grupo comutativo – comutatividade da adição, não-comutatividade na multiplicação,
- Estrutura de anel;
- Exercícios sobre todos os itens anteriores – 11 ao todo.

Outra diferença marcante com relação à programabilidade foi a apresentação dos exercícios.

No livro de Jacy Monteiro eles fizeram parte da última etapa programável, o que garantia ao professor expor todo conteúdo, praticamente esgotá-lo, para que depois os seus alunos tivessem o manuseio com o assunto das matrizes. Evidentemente, nada impedia o professor de listar alguns dos exercícios expostos ao final do conteúdo e os fosse inserindo no decorrer das aulas, assim os alunos iriam se apropriando do conteúdo quando o vissem numa aula.

Mas, se considerada a programabilidade do saber uma “regra” não flexível, o ato de colocar os exercícios ao fim de um assunto queria mesmo dizer que os alunos esperavam o conteúdo ser totalmente abordado para depois testá-lo.

O mesmo não ocorreu com o capítulo de Ruy Madsen, já que o mesmo teve como programação apresentar uma parte do conteúdo das matrizes, depois trabalhar exercícios, apresentar outra parte do conteúdo e depois exercícios, e assim por diante.

Essa última observação sobre a programabilidade acentua uma característica muito peculiar, que é a de confiar ao aluno uma autoprogramação dos seus estudos. No livro de Monteiro, a preocupação de sequenciar o conteúdo até o fim para só depois apresentar exemplos e exercícios, confiava ao aluno a tarefa dele mesmo organizar a programação do conteúdo das matrizes, o que iria fazer com os exercícios e a teoria, ficava a seu critério. Ao contrário, o capítulo de Madsen já organizava para os alunos um plano de estudos apresentado pela sequencia teoria-exercício-teoria-exercício ....

A programabilidade realizada no processo da transposição didática – *saber científico-*

saber a ser ensinado – das matrizes, exemplificada pelos dois textos analisados neste capítulo, marca a preocupação com relação a: maturidade dos estudantes, a capacidade de planejar estudos dirigidos e também quanto à forma mais adequada de apropriação de um saber.

5.2.4 PUBLICIDADE DO SABER

A publicidade exposta nos textos de Monteiro e Barbosa é bastante concisa, mas um destaque importante deve ser dado ao texto escrito no livro do GEEM, no que diz respeito às matrizes – talvez a verificação mais importante desta pesquisa. Para compreender toda a importância desse destaque, a citação seguinte será um pouco prolongada.

> Nós precisamos colocar à disposição todos os esforços que venham a ser exigidos para que a educação dada por nossas escolas – e em particular, a educação matemática dada por nossas escolas – é adequada para as exigências da nossa época. Eu agora indicarei alguns dos componentes de uma educação adequada para nossa época.
> [...] Um outro tópico novo no currículo da escola secundária é probabilidade e estatística. Eu já mencionei o livro texto para um curso de um semestre sôbre êsse assunto.
> [...] A teoria das matrizes é um exemplo final dos novos tópicos de matemática num currículo da escola secundária. Matrizes são relativamente novas em Matemática, tendo apenas 100 anos de idade; **elas exemplificam um novo e importante tipo de estrutura algébrica e o seu estudo concede um instrumento de grande significado e poder em muitos campos em que a matemática é aplicada**. (PRICE, G. BALEY, Matemática Moderna para o Ensino Secundário, 1962, p.30-31 – grifos nosso).

Como se pode observar, a publicidade das Matrizes no livro do GEEM além de citar a importância do conteúdo já para aquela época confirma que as Matrizes foram introduzidas por ser um novo e importante tipo de estrutura algébrica, recente na academia e em aplicações de outras áreas. O extrato citado também confirma que as Matrizes foram inseridas no período da Matemática Moderna, com o trabalho do GEEM – sendo exposto o conteúdo no IV CBEM e, logo depois, o lançado oficialmente no livro Matemática Moderna para o Ensino Secundário, de 1962.

Além dessa apresentação das matrizes, na introdução do capítulo de Madsen Barbosa, também há outra evidência da publicidade das Matrizes:

> Nós estudaremos uma parte da Matemática, cujas aplicações em vários setores científicos são inúmeras: em ramos de Eletricidade, em Dinâmica, em Cálculo Numérico, Programação Linear, etc..
> No ciclo colegial nos deteremos o mínimo necessário para colocarmo-nos em contato com esta teoria importantíssima. O têrmo MATRIZ foi introduzido em 1850 por Sylvester, usado em anos sucessivos por Hamilton e Cayley e hoje, pelos matemáticos modernos e cientistas em geral.
> No decorrer das lições os alunos observarão inclusive algumas aplicações das

> matrizes em questões da vida comum e que êsse conceito tão importante, tão útil, possivelmente já é do conhecimento intuitivo de muitos, faltando apenas ordená-lo e ampliá-lo, bem como notarão que além de interessante é bastante fácil. (BARBOSA, RUY MADSEN, Matemática Moderna para o Ensino Secundário, 1962, p.191).

Os dois livros utilizam da publicidade de maneiras diferentes. No de Monteiro a publicidade dos saberes ocorre apenas na introdução do livro, no do GEEM, ocorre na introdução do livro e também nas preliminares de cada capítulo. Vale destacar, que no texto de Jacy Monteiro as Matrizes não tiveram um destaque como conteúdo fundamental assim como o escrito no texto de Madsen, citado anteriormente. No livro de Monteiro dizia:

> No segundo parágrafo (sôbre matrizes) estudamos os seguintes tópicos: matrizes (definições), matriz de uma aplicação linear, operações entre matrizes, matrizes inversíveis e pôsto (coluna) de uma matriz. As definições das operações entre matrizes são sugeridas pelas correspondentes operações entre aplicações lineares. É essencial observar que neste curso damos maior ênfase ao estudo das aplicações lineares do que ao de matrizes; geralmente, o que fazemos é traduzir em linguágem de matrizes, o resultado já estabelecido para aplicações lineares. (JACY MONTEIRO, 1959, p.II).

5.2.5 NOÇÃO MATEMÁTICA E PARAMATEMÁTICA

Essa seção foi convenientemente colocada após a verificação dos indícios de desincretização, despersonalização, programabilidade e publicidade para que as dúvidas das matrizes serem ou não, uma noção matemática ou paramatemática, fossem definitivamente exauridas.

As noções paramatemáticas, como foram citadas na seção 1.2.2 são “idéias que se caracterizam como ferramentas auxiliares da atividade matemática, mas que, normalmente, no contexto da educação básica, por exemplo, não se constituem em objetos de estudo” (PAIS, 2008, p.36).

Para relembrar a idéia de noção paramatemática, pois julgamos ser um pouco mais complexa, citemos novamente Chevallard:

> As *noções paramatemáticas* (e *a fortiori*, as noções matemáticas) são objetos os quais o docente toma consciência, aos que dá um nome (“parâmetro”, “equação”, “demonstração”); em resumo, objetos que entram em seu campo de *percepção didática.* (CHEVALLARD, 2005, p.60 – grifos do autor – tradução nossa).

Dessa maneira, assim como “parâmetro”, “equação”, “demonstração”, a *linguagem* também seria uma noção paramatemática, o que de fato ocorre no livro de Jacy Monteiro.

Analisando as citações dos tópicos programados no texto de Jacy Monteiro, fica subentendido que a relação entre as matrizes e aplicações lineares é evidente e que na textualização, propriamente dita, as matrizes pouquíssimas vezes se desvinculam das aplicações lineares.

Além disso, para confirmar a finalidade que as matrizes tomam no livro de Jacy Monteiro, no final da citação anterior quando se lê:

> As definições das operações entre matrizes são sugeridas pelas correspondentes operações entre aplicações lineares. É essencial observar que neste curso damos maior ênfase ao estudo das aplicações lineares do que ao de matrizes; geralmente, o que fazemos é traduzir em lingüágem de matrizes, o resultado já estabelecido para aplicações lineares. (JACY MONTEIRO, 1959, p.II).

é notório que as matrizes não servem como objeto matemático, mas sim como *linguagem* da escrita matemática, como *ferramenta* matemática, o que a caracterizaria como uma noção paramatemática. Todavia, as matrizes ainda assim são estudadas, o que não contraria a concepção de Chevallard quando diz que em alguns casos as noções paramatemáticas podem ser estudadas.

Já no capítulo de Madsen Barbosa, as matrizes assumem realmente o papel de objeto matemático, estudadas pela sua importância num rol de conteúdos necessários ao ensino secundário.

5.2.6 ENVELHECIMENTO BIOLÓGICO E MORAL

No caso da textualização das matrizes não foram constatados exemplos de envelhecimento biológico ou moral haja vista que as matrizes representavam um conteúdo recente tanto para a academia como também para o ensino secundário.

É preciso destacar que no capítulo de Madsen Barbosa a ênfase dada as aplicações das matrizes para o cotidiano daquela época fizeram com que, hoje, este mesmo conteúdo, fosse estudado de maneira diferente. Ora, se as matrizes não tivessem tomado um enfoque diferenciado até então, é porque a transposição didática deste conteúdo estagnou-se, foi engessada ao tempo da Matemática Moderna.

Para isso, ressaltamos a importância de uma vigilância epistemológica do professor para com esse conteúdo; por que não, estudá-las hoje em dia ligadas ao saber da codificação e criptografia? Segue essa sugestão para futuras pesquisas e aplicações das matrizes com outros contextos nas aulas de hoje.

5.2.7 RELAÇÃO ANTIGO/NOVO DO SABER

A relação antigo/novo num texto pode ser identificada pela verificação dos pré-requisitos do saber em questão. Por exemplo, para falar de determinante, hoje em dia, é necessário conhecer a noção de matrizes. Ao introduzir os determinantes se envelhece a noção de matrizes deixando os determinantes com o status de saber novo e as matrizes de saber envelhecido.

Ainda, ao introduzir as matrizes num contexto mais dinâmico e atual, poderia se envelhecer uma forma de abordá-la para apresentá-la com uma roupagem mais nova, usando de uma linguagem textual diferente, por exemplo.

Os indícios desta relação antigo/novo no livro de Jacy Monteiro ficou demarcada mais com relação as aplicações lineares. Num primeiro capítulo elas foram apresentadas sem a necessidade da estrutura matricial e noutro capítulo exigiu conhecer essa estrutura para, numa nova roupagem, serem abordadas. Portanto, na textualização do livro de Jacy Monteiro as matrizes não só aparecem como novo assunto como também permite as aplicações lineares uma nova roupagem.

Já no caso do texto de Madsen Barbosa as matrizes aparecem como novo conteúdo, e só depois, no capítulo de Carlos Alberto Callioli é que são envelhecidas, pois o capítulo tratará de *Resolução de Sistemas de Equações Lineares, por Matrizes*.

Enfim, estes foram os elementos identificados no texto do saber Matrizes.

5.2.8 CRIAÇÕES DIDÁTICAS

Não foi produzida na transposição didática das matrizes nenhuma criação didática.

CONCLUSÃO

A presente pesquisa chega aos seus últimos parágrafos, sintetizando as principais idéias relacionadas ao processo de Transposição Didática aplicada ao conteúdo das Matrizes.

Inicialmente foram lançadas algumas questões norteadoras que no desenvolver de cada capítulo buscamos respondê-las. A partir da escolha do conteúdo a ser analisado – as Matrizes – reescrevemos estas questões da seguinte maneira:

Quando aparece pela primeira vez o conteúdo das Matrizes no ensino? Por que ele apareceu só neste período? De que forma o introduziram? Por que o introduziram? Sofreu modificações para se tornar saber a ser ensinado? Que tipo de modificações sofreu? Teve aplicação direta para os alunos e por isso se tornou saber escolar?

No primeiro capítulo, por exemplo, após a apresentação do conceito de Transposição Didática e os elementos inerentes a este processo, foi possível conferir que a Transposição Didática é uma proto-teoria que explica os motivos que levam um *saber científico* a ser transformado em *saber a ser ensinado*. Inferimos que assim como este trabalho, outros também contribuirão para que a Transposição Didática se torne realmente uma *teoria* a ser aplicada a qualquer *saber*.

Partindo-se da explanação dos elementos subjacentes ao processo da Transposição Didática, a busca pelas respostas das questões norteadoras foi mais facilmente alcançada como, por exemplo:

- da explanação do conceito de *noosfera* foi possível responder de que forma o conteúdo das Matrizes foi introduzido no sistema de ensino e que personagens participaram desta ação;
- da explanação dos elementos vigilância epistemológica e ruptura epistemológica inferimos que o trabalho desenvolvido nesta pesquisa é justamente o de uma vigilância que acarreta numa ruptura epistemológica, visto que o trabalho levanta questões sobre a epistemologia do saber Matrizes e seu processo de introdução e aplicação ao ensino;

- a partir da apresentação dos conceitos de obsolescência interna e externa sob um saber foi identificado que as Matrizes ainda não sofreram a ação da obsolescência externa, já que perante à sociedade, é ainda concebida como um saber atual e que não passou por uma crise paradigmática; em relação à obsolescência interna, foram outros saberes, como o caso dos sistemas lineares e determinantes, que fizeram com que as Matrizes se tornassem um saber fundamental para melhor desenvolvê-los no ensino. Caso contrário, se estes saberes (sistemas e determinantes) que já se tornavam obsoletos para um ciclo de ensino, não fossem reciclados com uma nova linguagem ou interação com novos saberes, talvez hoje não os tivéssemos mais na grade curricular.

O fato de introduzir as Matrizes no ensino para contribuir com o desenvolvimento de sistemas lineares e determinantes marcou o período que as Matrizes se tornaram saber escolar e ajudou responder porque foi nesse período que se tornaram saber escolar. Isso quer dizer que as respostas para: "*Quando aparece pela primeira vez o conteúdo das Matrizes no ensino? Por que ele apareceu só neste período?*", foram respondidas, ou seja, *as Matrizes apareceram no <u>momento</u> e <u>porque</u> os sistemas lineares e determinantes tornavam-se saberes obsoletos, que necessitavam da relação com novos saberes e de uma nova linguagem, que no caso, foi a matricial.*

Entretanto, com a investigação feita para construir o capítulo 2, foi identificado que o saber Matrizes tivera outros motivos para se tornar saber escolar. *Um deles se referia a sua "pequena idade"*. Seus estudos iniciaram em 1850 (cerca de 160 anos atrás) a partir dos matemáticos Sylvester e Cayley, relacionando as Matrizes a quadros de números e aos problemas: de uma causa determinante; decomposição de matrizes em menores determinantes; de representação de sistemas lineares (que até então eram feitas por formas bilineares); de figuras homógrafas.

O motivo da "pequena idade" nos levou a supor que a inserção das Matrizes no ensino se deu pela novidade que o assunto mostrava, ou seja, uma produção recente era necessária ser divulgada, pois implantar novos assuntos ao ensino que fossem aplicados à realidade do mundo contemporâneo era uma exigência da época.

Dessa forma, ao continuar a investigação da pesquisa, constatamos que o motivo suposto, citado anteriormente, tinha realmente coerência e se confirmou no decorrer dos estudos que comporia o capítulo 3 e 5, pois:

- ao constituir o capítulo 3, por exemplo, obtivemos a informação de que um dos objetivos da Matemática Moderna era introduzir novos conteúdos ao ensino – fato que ficou relatado em Congressos de Ensino da Matemática, no livro produzido pelo GEEM em

1962, nas palavras de renomados matemáticos que concediam entrevistas aos jornais da época do Movimento da Matemática Moderna e também em entrevistas concedidas a trabalhos acadêmicos;

- na composição do capítulo 5 foi verificado na análise feita do livro de Madsen Barbosa, no quesito *publicidade do saber*, que a educação matemática exigia modificações no ensino que correspondessem aos anseios da época – década de 60, período do Movimento da Matemática Moderna. Assim, procurou-se introduzir novos conteúdos de pesquisas matemáticas ao ensino, cumprindo dessa forma as tais exigências da época – um destes conteúdos foi sobre as Matrizes.

Com o capítulo 3, além de conhecer sobre as "ideologias" e finalidades da Matemática Moderna, foi verificado que os personagens que a implantaram no Brasil e no mundo tiveram fortes influências das pesquisas Bourbakistas. Com isso, observamos que outro motivo para que as Matrizes se tornassem conteúdo escolar seria constatado: *o INCENTIVO, quase que uma imposição, de alguns personagens influentes do meio acadêmico com suas convicções supostamente inquestionáveis*.

E assim o foi. As Matrizes além de reverter o quadro de obsolescência interna dos sistemas lineares e determinantes, de ser uma produção científica recente e propícia às exigências tecnológicas que despontavam na época, foram também introduzidas por serem uma possível "solução" aos problemas pertinentes ao ensino da época. Os personagens que as introduziram no ensino assim o fizeram por acreditar que a introdução de novos conteúdos reformaria o ensino da matemática, posto à prova pelos exames nacionais e instituições renomadas que determinavam os programas de ensino.

Tendo em vista estas constatações podemos confirmar que o período da inserção das Matrizes no ensino escolar se deu em no ano de 1961, com a primeira experimentação do tema nas escolas e posteriormente apresentado os resultados do experimento no IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática. Oficialmente o conteúdo foi implantado no ensino para todo o Brasil a partir da produção do livro do GEEM *Matemática Moderna para o Ensino* Secundário, em 1962.

No capítulo 4, dando continuidade à análise do processo de transposição didática das Matrizes, apresentamos os personagens da noosfera que participaram deste processo de transposição, indicando os objetivos que levaram estes personagens a inserir novos conteúdos ao ensino da matemática. Dentre estes objetivos estava: a renovação da linguagem matemática; a implantação de conteúdos que reforçassem o espírito e linguagem científica; a forma de apresentação dos conteúdos, contemplando as estruturas algébricas da matemática que, em especial, despontava a Teoria das Matrizes como uma dessas estruturas.

Estes objetivos intrínsecos a ideologia do Movimento da Matemática Moderna, tal qual buscava por uma revolução estruturante e metodológica do ensino da matemática, fez com que o conteúdo das Matrizes chegasse ao ensino já com as transposições adequadas ao ensino secundário.

Ao compor o capítulo 5 analisamos alguns dos elementos da Transposição Didática que contribuíram para que as Matrizes como saber científico, se tornasse conteúdo escolar, compreensível a idade dos alunos do secundário. Estes elementos foram: a desincretização do saber, a despersonalização do saber, a programabilidade da aquisição do saber, a publicidade do saber, as noções matemáticas e paramatemáticas, o envelhecimento biológico e moral do saber, a relação antigo/novo de um texto do saber.

Baseado no livro de Jacy Monteiro, *Álgebra Linear* (vol. 1, 1959) e no capítulo escrito sobre as Matrizes de Madsen Barbosa, inscrito no livro *Matemática Moderna para o Ensino Secundário* (1962), os elementos anteriormente citados foram identificados e comparados, resultando num exemplo de análise que contribuirá para outras futuras, inclusive que poderá lidar com livros de décadas diferentes.

Enfim, esperamos que a presente pesquisa tenha contribuído para divulgar um pouco da história das Matrizes, para divulgar a história da transposição didática das Matrizes (quando este conteúdo se tornou de fato um saber escolar) e que a análise realizada da leitura de atas de Congressos, artigos de jornais, teses e dissertações e livros, possa servir de exemplo como investigação histórica e pesquisa bibliográfica/documental.

Dessa pesquisa, compete agora a outros trabalhos, estudar a transposição didática de outros saberes possibilitando que num futuro próximo a transposição didática possa realmente se tornar uma teoria conveniente para explicar *qualquer* processo de transformação que possa ocorrer entre a passagem do saber científico ao escolar.

Além disso, desta presente pesquisa, outras também poderão completá-la aprofundando a análise epistemológica e filosófica das Matrizes, como também trabalhando com a Transposição Didática e a Praxeologia deste saber.

REFERÊNCIAS

ASTOLFI, J. P.; DEVELAY, M. **A didática das ciências.** São Paulo: Papirus, 1995. p.35-72.

ALVES FILHO, J. P. et al. A eletrostática como exemplo de transposição didática. In: PIETROCOLA, M. **Ensino de física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora**. Florianópolis: ed. da UFSC, 2001. p.77-99.

BARBOSA, R. M.. Introdução elementar de matrizes no curso colegial. In: **Matemática Moderna para o ensino secundário**. São Paulo: IBECC, 1962. p.191-223.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BERNAL, M. M. **Estudo do objeto proporção:** elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. Florianópolis, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). UFSC, 2004.

BOYER, Cari B. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

__________. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.

BRECHENMACHER, Frédéric. **Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930)**. Centro Alexandre Koyré. Culture*MATH* – Site expert ENS Ulm / DESCO - 20/12/2006. Disponível em: <http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/matrices_index.htm>. Acessado em: 08/2007.

BRITO MENEZES, A. P. de A.. **Contrato didático e transposição didática:** inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6ª série do ensino fundamental. Recife, 2006. Tese (Doutorado em Educação). UFPE, 2006.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARDOZO, E. Q.. **Noções matemáticas e paramatemáticas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I:** uma intervenção através da engenharia didática. Itajaí, 2003. Dissertação da Universidade do Vale do Itajaí, 2003.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado,** Tradução: Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DA MATEMÁTICA, I, 1955, Salvador. Salvador, 1957. **ANAIS I CBEM**. Universidade da Bahia, 1955.

____________. II, 1957, Porto Alegre. Porto Alegre, 1959. **ANAIS II CBEM**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1957.

____________. III, 1959, Rio de Janeiro. **ANAIS III CBEM**. CADES/MEC, Rio de Janeiro, 1959.

COSTA, J. C.O.. **O currículo de matemática no ensino médio e as prescrições da LDB 9394/96**. São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação). USP, São Paulo, 2006.

DUARTE, A. R. S.. **Matemática e Educação Matemática:** a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. São Paulo, 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 1997.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda (Aut.). **Novo Dicionário Eletrônico Aurélio versão 5.0**. Co-editoras: Margarida dos Anjos e Marina Baird Ferreira. 3. ed. Edição eletrônica – POSITIVO INFORMÁTICA LTDA.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FOLHA DE SÃO PAULO. São Paulo. 11/10/1960; 27/05/1962; 16/08/1962; 12/07/1963; 09/10/1965; 18/12/1966; 14/06/1967; 30/08/1980.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores: a construção do conhecimento escolar**. ARNAY, M.J.R. (Ed.). São Paulo:

Ática, 1998. v. 2, p. 15-41.

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. São Paulo, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2004.

HIGHAM, N. **Cayley, Sylvester, and early matrix theory**. Manchester: The University of Manchester, jan. 2008.

INAFUCO, J. K.. **As equações algébricas no ensino médio:** um estudo de uma seqüência didática utilizando software gráfico. Florianópolis, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Cientifica e Tecnológica). UFSC, 2006.

JACY MONTEIRO, L. H.. **Álgebra Linear**. 1. ed. São Paulo: USP, 1959.

JORNAL DA CECISP. São Paulo. 06;1962.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Editora Artes Médicas do Sul Ltda.; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Exame de textos:** análise de livros de matemática para o ensino médio. Augusto César Morgado (analistas) ... [et al.]. Rio de Janeiro: SBM, c2001.

LUCCAS, Simone. **Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: apresentação de uma proposta pedagógica**. Londrina, 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2004.

The Mac Tutor History of Mathematics archive. Disponível em: <www-history.mcs.st-and.ac.uk/>.

MARQUES, A. S.. **Tempos pré-modernos:** a matemática escolar dos anos 1950. São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2005.

MENEZES, M. B. de. **Investigando o processo de transposição didática interna:** o caso dos quadriláteros. Recife, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação). UFPE, 2004.

NAKASHIMA, M. N. **O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna**. São Paulo, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2007.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON E.F. In **Matrices and determinants**. Disponível em: History Topics Index. URL:< http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/history/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 08/2007.

O ESTADO DE SÃO PAULO. São Paulo, 30/06/1963; 21/11/1963; 08/05/1964; 17/05/1964; 10/09/1965; 08/01/1967; 01/06/1969; 03/10/1971; 12/04/1980.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, S. D.A. (org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. Revista. São Paulo: Educ, 2008. p.11-48.

______________. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PONTE, J. P.. **Didática da matemática**: ensino secundário. 1. ed. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, 1997.

PRICE, G. B. Progresso em matemática e suas implicações para as escolas. In: **Matemática Moderna para o ensino secundário**. São Paulo: IBECC, 1962. p.16-34.

RIBEIRO, A. J.. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática:** contribuições de um estudo epistemológico. São Paulo, 2007. Tese (Doutordo em Educação Matemática). PUC, 2007.

RICARDO, E. C. **Competências, interdisciplinaridade e contextualização:** dos Parâmetros Curriculares Nacionais a uma compreensão para o ensino das ciências, de. Florianópolis, 2005. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). UFSC, 2005.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**. 2º Grau. 3. ed. São Paulo: SE/CENP, 1994.

SILVA, R. da. **Análise de um processo de estudo de semelhança**. Belém, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências Matemáticas). Universidade Federal do Pará, 2007.

SCIENTIFIC AMERICAN BRAZIL. **A vanguarda matemática e os limites da razão**.

Edição Especial Gênios da Ciência, n. 12. São Paulo: Ediouro, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Saber científico, saber escolar e suas relações: elementos para reflexão sobre a didática. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v.4, n.10, p.57-67, 2003.

______________. **A matemática escolar:** epistemologia e história. Revista Educação em Questão, v.23, n.9, mai/ago., 2005.

VECHIA, A.; LORENZ, K. M.. **Programa de ensino da escola secundária brasileira:** 1850-1951. Curitiba: Ed. do Autor, 1998.

WAGNER, R. R.. **A relação dos professores de matemática com o processo de transposição didática, pelo entendimento da interdisciplinaridade, da contextualização e da complexidade do conhecimento**. Ponta Grossa, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação). UEPG, 2006.

WUO, Wagner. **A física ensinada e a cultura**: uma análise relacional do conhecimento de física em escolas públicas de ensino médio. São Paulo, 2005. Tese (Doutorado em Educação: História, Política e Sociedade). PUC, 2005.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABNT NBR 6023:2002 - Informação e documentação - **Referências** – Elaboração.

ABNT NBR 6027:2003 - **Sumário** – Procedimento.

ABNT NBR 6028:2003 - **Resumos** – Procedimento.

ABNT NBR 10520:2002 - **Apresentação de citações em documentos –** Informação e documentação.

ALMEIDA, Geraldo Peçanha de. **Transposição didática:** por onde começar? São Paulo: Cortez, 2007.

BARBOSA, Rui Madsen. Matrizes. In: BARBOSA, R. M. ... et al. **Matrizes, determinantes e sistemas lineares**. São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1967.

BATISTA, I.; LUCCAS, S. Abordagem histórico-filosófica e educação matemática: uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. **Revista Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo: EDUC, v.6, n.1, 1999.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1978.

BORGES, R. A. S.. **A Matemática Moderna no Brasil**: as primeiras experiências e propostas de seu ensino. São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, v.4, 1999.

D'AMBOSIO, B. S.. **The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for brazilian mathematics educacion**. Indiana, 1987. Thesis (Doctor Philosophy) – School of Educacion. Indiana University, Indiana, 1987.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução Maria Cristina

Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

LIMA, F. R.. **GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil**. São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2006.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976.

MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal:** primeiros estudos. São Paulo: Da Vinci, 2007.

NOBLE, Ben; DANIEL, James W. **Álgebra Linear Aplicada.** Traduzido por João Pitombeira de Carvalho. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil, 1986.

PERRENOUD, Philippe. **Construir as competências desde a escola**. Trad. Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. Traduzido por Martha Salerno Monteiro (coord.) ... [et al.]. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos:** uma abordagem histórica para aquisição do conceito. Dissertação de Mestrado de Ensino de Matemática. PUC – São Paulo, 1998.

POSSANI, C. O produto de matrizes**. Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática. n° 21, p. 35 -39, 1992.

SOARES, F. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** avanço ou retrocesso? Rio de Janeiro, 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Matemática, PUC, Rio de Janeiro, 2001.

Surgimento da teoria das matrizes. In: **A história das matrizes**. Disponível em: <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html> Acessado em: agosto de 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A Matemática Moderna nas escolas do Brasil: um tema para estudos históricos comparativos. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18, p.19-34, maio./ago. 2006.