

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A
CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

MARIANA MORAN

AS APREENSÕES EM GEOMETRIA:
um estudo com professores da Educação Básica acerca de
Registros Figurais

MARINGÁ - PR
2015

MARIANA MORAN

AS APREENSÕES EM GEOMETRIA:
um estudo com professores da Educação Básica acerca de
Registros Figurais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

MARINGÁ - PR
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

M829a Moran, Mariana
As apreensões em geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais / Mariana Moran. - - Maringá, 2015.
248 f. : il. : (algumas color.), figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2015.

1. Geometria. 2. Educação matemática. 3. Semiótica. Representação Semiótica - Teoria dos registros. I. Franco, Valdeni Soliani, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática.

CDD 21. ed 516.13

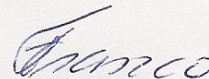
MGC - 001839

MARIANA MORAN BARROSO

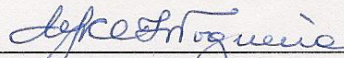
**As apreensões em Geometria: *um estudo com professores da
Educação Básica acerca de Registros Figurais***

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ensino para a Ciência e a Matemática.

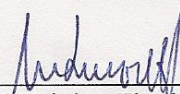
BANCA EXAMINADORA



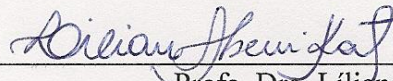
Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM



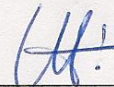
Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira
Centro Universitário de Maringá - UNICESUMAR



Prof. Dr. Mérciles Thadeu Moretti
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



Profa. Dra. Lílian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM



Prof. Dr. Marcelo Carlos de Proença
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 28 de Agosto de 2015.

“Era o relógio de meu avô, e quando o ganhei de meu pai ele disse Estou lhe dando o mausoléu de toda a esperança e todo desejo; é extremamente provável que você o use para lograr o reducto absurdum de toda a experiência humana, que será tão pouco adaptado às suas necessidades individuais quanto foi às dele e às do pai dele. Dou-lhe este relógio não para que você se lembre do tempo, mas para que você possa esquecê-lo por um momento de vez em quando e não gaste todo seu fôlego tentando conquistá-lo. Porque jamais se ganha batalha alguma, ele disse. Nenhuma batalha sequer é lutada. O campo revela ao homem apenas sua própria loucura e desespero, e a vitória é uma ilusão dos filósofos e néscios”.

William Faulkner

Dedico este trabalho a memória do meu pai Cesario Vicente Principe Moran, em quem eu me espelhei, me inspirei e é responsável por toda e qualquer conquista que eu tive ou vier a ter durante a minha vida. Te amo.

AGRADECIMENTOS

No percurso deste trabalho, várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente para que o projeto inicial se tornasse, de fato, uma tese. Por isso, sou profundamente grata:

A Deus, por me dar condições para que eu pudesse realizar esse sonho e por ter colocado pessoas no meu caminho que me ajudaram a prosseguir e a chegar ao final dessa conquista.

A meu orientador, Valdeni Soliani Franco, pelo qual tenho um imenso carinho, por ter me acolhido como sua orientanda, por não ter medido esforços em me orientar e pelo entusiasmo contagiante durante as nossas pequenas descobertas na pesquisa.

A meu marido, Paulo Edson Barroso, que esteve sempre presente nos momentos bons e nos momentos ruins, sempre me apoiando e me incentivando com palavras e gestos de carinho.

A meus pais, que me ajudaram na escolha de ser professora e que hoje são responsáveis pela profissional que me tornei.

A meus irmãos, que sempre demonstraram orgulho e participaram das minhas conquistas pouco a pouco.

A minhas amigas/irmãs, Karla e Evelyn, que me incentivaram e incentivam até hoje e com as quais compartilhei viagens e compartilharei muitas outras ainda.

Aos meus colegas de profissão Veridiana, Fábio, João, Talita e Luciano pelo companheirismo nas viagens a trabalho e pelos momentos de descontração. E, também ao colega Willian André, pela admirável dedicação em corrigir minuciosamente cada detalhe de linguagem e também de ideias da tese.

A professora Clélia Maria Ignatius Nogueira, que me viu engatinhar e agora, aos poucos, está me vendo crescer e permite que eu caminhe ao seu lado aprendendo cada dia mais.

Aos professores doutores Veridiana Rezende, Clélia Maria Ignatius Nogueira, Mércles Thadeu Moretti, Lilian Akemi Kato, Marcelo Carlos de Proença pelas contribuições e leitura atenciosa do meu trabalho contribuindo para que o sucesso fosse alcançado.

Aos professores da Educação Básica que participaram de modo significativo com a pesquisa dedicando parte de seu tempo e, principalmente, a professora Marisa pela atenção e auxílio durante a coleta dos meus dados.

A Fundação Araucária pelo apoio financeiro durante os seis últimos meses.

RESUMO

MORAN, M. **As apreensões em geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais. 2015. 242p. Tese (doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

Esta pesquisa, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, foi realizada com o intuito de analisar as influências do tipo de registro figural nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas em geometria. Como procedimentos metodológicos, foi realizado um curso de extensão para professores da Educação Básica da rede pública de ensino, que abordou conteúdos de geometria por meio dos registros figurais: Materiais Manipuláveis (MM), *Softwares* de Geometria (SG) e Expressões Gráficas (EG), e teve a participação de 30 professores. Na segunda etapa da pesquisa, aconteceram aplicações de uma sequência de tarefas com alguns professores voluntários que participaram do curso de extensão - um total de 15 colaboradores. A sequência foi aplicada individualmente e elaborada com vistas a explorar uma diversidade de situações e conceitos para identificar os traços das apreensões que o contato com os registros figurais provoca nos sujeitos participantes. As resoluções individuais dos professores colaboradores foram analisadas e agrupadas em uma tripla análise: análise da compreensão, análise das razões e análise matemática. Esta foi realizada com base nos raciocínios matemáticos expostos pelos participantes na forma de registros discursivos e não discursivos, e também em suas falas e escritas durante a aplicação considerando sucessos, hesitações e fracassos na tentativa de resolver as tarefas. Os resultados dessa investigação apontam que, ao utilizar diferentes registros figurais na resolução de problemas de geometria, fatores referentes aos tratamentos, às mobilizações de registros, às apreensões - sejam elas perceptivas, operatórias ou discursivas -, e à resolução de problemas são influenciados pelo tipo de registro figural disponível, gerando consequências diretas na busca da solução do problema. Constatou-se também que a influência do tipo de registro figural está associada às exigências da tarefa em que o registro figural está disponível. Nas tarefas que exigiam deduções matemáticas (língua formal), a EG e o SG foram os registros mais favoráveis, possibilitando o raciocínio dedutivo aliado ao tratamento figural. O SG ainda proporcionou a movimentação das figuras e dos elementos figurais, o que auxiliou no entendimento das hipóteses da tarefa e no raciocínio para sua solução. Nas tarefas em que se exigiu um tratamento figural como parte do problema, os MM se destacaram por possibilitar tentativas empíricas - como recortes, uso de régua, dobraduras - que pudessem resultar na solução para o problema.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria. Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

MORAN, M. **Apprehension in geometry**: a study on figural records with teachers from Basic Education. 2015. 242p. Thesis (PhD) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

This research, based on the Theory of Registers of Semiotic Representations, by Raymond Duval, was conducted in order to analyze the influence of the type of figural record in perceptual, operative and discursive apprehensions in geometry. As methodological procedures, an extension course for teachers from Basic Education of the public school system was offered, addressing geometry content through figural records: Manipulatives (MM), Geometry Softwares (SG) and Graphic Expressions (EG). The course was attended by 30 teachers. In the second stage of the research, a sequence of activities was applied with some volunteers who participated in the extension course - a total of 15 collaborators. The sequence was applied individually and elaborated with the aim of exploring a variety of situations and concepts to identify the aspects of apprehensions provoked on the collaborators by the contact with the figural records. The individual resolutions by the collaborating teachers were analyzed and grouped into a triple analysis: analysis of the understanding, analysis of the reasons and mathematical analysis. This was based on mathematical reasoning exposed by the participants in the form of discursive and non discursive records, and on their oral and written comments along the application as well, considering successes, hesitations and failures in the attempt to solve the tasks. The results of the research show that, by using different figural records to solve geometry problems, factors related to treatments, mobilization of records, apprehensions – whether perceptive, operative or discursive –, and the solving of problems are influenced by the type of figural record available, creating direct consequences in the search for the problem's solution. It was also found that the influence of the type of figural record is associated with the demands of the problem in which the figural record is available. In tasks requiring mathematical deductions (formal language), the EG and SG were the most favorable records, enabling deductive reasoning allied to figural treatment. SG has also provided the movement of figures and figural elements, supporting the understanding of the problems' hypothesis and the reasoning for their solution. In tasks that required a figural treatment as part of the problem, MM stood out for enabling empirical attempts – such as cutting, use of ruler, folding – which could help in the solution of the problem.

Keywords: Mathematics Education. Geometry. Theory of Registers of Semiotic Representations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Transformação de um triângulo em dois triângulos congruentes entre si.	25
Figura 2: Classificação de unidades figurais.	31
Figura 3: Problema proposto.	32
Figura 4: Diferentes organizações perceptivas de figuras.	34
Figura 5: Decompor em quatro partes iguais.	36
Figura 6: Decompor em quatro partes iguais – solução.	37
Figura 7: Modificação estritamente homogênea.	38
Figura 8: Modificação homogênea.	38
Figura 9: Modificação heterogênea.	39
Figura 10: Teorema de Pitágoras.	39
Figura 11: Modificação ótica do quadrado.	40
Figura 12: Uma situação de homotetia.	40
Figura 13: Modificação posicional (rotação).	41
Figura 14: Unidades elementares e funções discursivas.	45
Figura 15: 1º caso.	49
Figura 16: 2º caso.	49
Figura 17: A aproximação de uma curva por uma sequência de segmentos de reta.	61
Figura 18: Tarefa 1.	77
Figura 19: Solução da Tarefa 1.	78
Figura 20: Modificações posicionais no retângulo.	79
Figura 21: Recorte da parte 1 para sobrepor na parte 2.	80
Figura 22: Tratamento figural no MM.	81
Figura 23: Divisão do retângulo em quatro partes iguais.	89
Figura 24: Retângulo no SG.	92
Figura 25: Tarefa 2.	100
Figura 26: Movimentos do ponto M	101

Figura 27: Projeção do ponto M .	102
Figura 28: Posição dos pontos A , M e B .	110
Figura 29: Representação na EG.	116
Figura 30: Tarefa 3.	121
Figura 31: Reconfigurações intermediárias.	121
Figura 32: Tratamento de P3 no SG.	123
Figura 33: Registro figural de P1 na EG.	123
Figura 34: Tratamento de P7 na EG.	124
Figura 35: Tratamento de P8 na EG.	125
Figura 36: Tratamento de P6 na EG.	125
Figura 37: Tratamento de P6 no SG.	126
Figura 38: Tratamento de P9 no SG.	127
Figura 39: Tratamento de P15 no SG.	128
Figura 40: Tratamento de P11 na EG.	128
Figura 41: Solução de P14 na folha de respostas.	129
Figura 42: Tratamento de P15 na EG.	130
Figura 43: Registro numérico de P2 com o MM.	132
Figura 44: Registro numérico de P3 com o SG.	132
Figura 45: Registro algébrico de P2.	133
Figura 46: Resolução de P14 no MM.	141
Figura 47: Modificação mereológica de P2 na EG.	144
Figura 48: Operação de P8 no SG.	145
Figura 49: Modificações de P12 no SG.	147
Figura 50: Registro discursivo de P3.	153
Figura 51: Resposta de P4.	154
Figura 52: Resposta de P8.	155
Figura 53: Operação figural de P6 no MM.	155
Figura 54: Solução 2 de P3 no SG.	157

Figura 55: Solução 1 de P3 no SG.	158
Figura 56: Soluções de P6 na EG e no SG.	158
Figura 57: Solução de P8 na EG.	158
Figura 58: Soluções de P14 no MM e na EG.	159
Figura 59: Tarefa 4.	159
Figura 60: Solução da Tarefa 4.	160
Figura 61: Tratamento de P1 no SG.	160
Figura 62: Movimento dos vértices do retângulo no SG.	161
Figura 63: Tratamento de P5 no MM.	161
Figura 64: Tratamento de P4 no MM.	162
Figura 65: Tratamento de P2 na EG.	162
Figura 66: Tratamento de P4 na EG.	162
Figura 67: Tratamento de P9 na EG.	163
Figura 68: Tratamento de P10 na EG.	164
Figura 69: Tratamento de P9 no MM.	165
Figura 70: Tratamento de P10 no MM.	165
Figura 71: Tratamento de P8 no MM.	165
Figura 72: Tratamento de P14 no MM.	166
Figura 73: Tratamento de P13 no MM.	167
Figura 74: Tratamentos figurais de P11 e P13 na EG.	167
Figura 75: Registro em língua natural de P14.	168
Figura 76: Tratamento de P12 no SG.	168
Figura 77: Solução de P9 descrita na folha de respostas.	186
Figura 78: Solução de P11 na folha de respostas.	193
Figura 79: Tarefa5.	195
Figura 80: Solução da Tarefa 5 no <i>software</i> Cabri.	196
Figura 81: Tratamento de P2 na EG.	197
Figura 82: Tratamento de P4 na EG.	198

Figura 83: Tratamento de P5 na EG.....	198
Figura 84: Tratamento de P6 na EG.....	200
Figura 85: Tratamento de P10 na EG.....	201
Figura 86: Tratamento de P13 na EG.....	201
Figura 87: Modificações posicionais no SG.....	210
Figura 88: Tratamento figural no MM.	230
Figura 89: Representação na EG.	230
Figura 90: Representação no SG.	232

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Conversão.	26
Quadro 2: Registro das línguas.....	43
Quadro 3: Classificação dos tipos de registros semióticos.....	46
Quadro 4: Assimetria dos sentidos das conversões quando a linguagem é um dos registros mobilizados.	50
Quadro 5: Análise das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador.	59
Quadro 6: Instituições dos professores colaboradores com a pesquisa.	67
Quadro 7: Ordem dos registros figurais de cada grupo.....	71
Quadro 8: Tratamentos figurais na Tarefa 1.....	82
Quadro 9: Mobilização de outros registros na Tarefa 1.	85
Quadro 10: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 1.	90
Quadro 11: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 1.	94
Quadro 12: Resolução da Tarefa 1.....	100
Quadro 13: Tratamentos figurais na Tarefa 2.....	105
Quadro 14: Mobilização de um segundo registro na Tarefa 2.....	107
Quadro 15: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 2.	111
Quadro 16: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 2.	114
Quadro 17: Tratamento de P3 no SG.	122
Quadro 18: Tratamentos figurais na Tarefa 3.....	131
Quadro 19: Mobilização de outros registros na Tarefa 3.	136
Quadro 20: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 3.	143
Quadro 21: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 3.	150
Quadro 22: Tratamentos figurais na Tarefa 4.....	170
Quadro 23: Mobilização de outros registros na Tarefa 4.	172
Quadro 24: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 4.	179
Quadro 25: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 4.	184
Quadro 26: Resolução da Tarefa 4.....	195

Quadro 27: Tratamentos figurais na Tarefa 5.....	203
Quadro 28: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 5.	208
Quadro 29: Modificações e exploração heurística na Tarefa 5	212
Quadro 30: Resolução da Tarefa 5.....	223
Quadro 31: Considerações sobre os registros figurais	226

SUMÁRIO

RESUMO	6
ABSTRACT	7
1 Introdução.....	16
2 A Teoria da Representação Semiótica.....	21
2.1 Representação Semiótica	21
2.2 Os Registros de Representação Semiótica	23
2.3 As transformações de representações semióticas	24
2.3.1 Tratamento de representações semióticas	25
2.3.2 Conversão de representações e mudança de registros.....	26
3 Os Registros de Representação Semiótica em Geometria	29
3.1 A geometria e os registros semióticos	29
3.2 Registros figurais.....	30
3.2.1 Tratamento nos registros figurais.....	32
3.3 As apreensões em geometria	33
3.3.1 Apreensão perceptiva de formas	34
3.3.2 Apreensão discursiva	36
3.3.3 A apreensão operatória e o papel heurístico das figuras	38
3.4 Registros das línguas	41
3.4.1 Língua natural e língua formal	44
3.5 Registros discursivos e não discursivos	45
3.6 Mobilização de registros	47
4 Materiais Manipuláveis, <i>Softwares</i> de Geometria e Expressões Gráficas	52
4.1 A resolução de problemas de geometria por meio das diferentes representações	52
4.2 A importância da escolha das representações nas tarefas de geometria	53
4.2.1 Materiais Manipuláveis (MM).....	55
4.2.2 <i>Softwares</i> de Geometria (SG)	57
4.2.3 Expressões Gráficas (EG)	61
5 Materiais e Métodos	64
5.1 Metodologia da pesquisa.....	64
5.2 O percurso da pesquisa	65
5.3 A coleta dos dados	67
5.4 Os sujeitos colaboradores da pesquisa	67
5.5 A aplicação da sequência de tarefas	68

5.5.1	Elaboração e organização da sequência de tarefas.....	69
5.6	Instrumentos da pesquisa	71
5.7	Os pressupostos estabelecidos para as análises	72
6	Apresentação das tarefas e análise dos resultados.....	74
6.1	Análise da Tarefa 1.....	77
6.1.1	Análise da compreensão.....	79
6.1.2	Análise das razões.....	86
6.1.3	Análise matemática.....	97
6.2	Análise da Tarefa 2.....	100
6.2.1	Análise da compreensão.....	101
6.2.2	Análise das razões.....	108
6.2.3	Análise matemática.....	118
6.3	Análise da Tarefa 3.....	120
6.3.1	Análise da compreensão.....	122
6.3.2	Análise das razões.....	136
6.3.3	Análise Matemática	152
6.4	Análise da Tarefa 4.....	159
6.4.1	Análise da compreensão.....	160
6.4.2	Análise das razões.....	172
6.4.3	Análise matemática.....	189
6.5	Análise da Tarefa 5.....	195
6.5.1	Análise da compreensão.....	196
6.5.2	Análise das razões.....	204
6.5.3	Análise matemática.....	217
7	Conclusões.....	224
	Referências	235
	Apêndice A.....	239
	Apêndice B.....	242
	Apêndice C.....	245

1 Introdução

Durante o estudo e as pesquisas no curso de Mestrado da autora desta tese, surgiu a possibilidade de conhecimento de teorias que norteiam a Didática da Matemática. Os pressupostos e a abrangente área de pesquisa dessas teorias despertaram o interesse por uma investigação que pudesse ser realizada em um ambiente de Laboratório de Ensino de Matemática. Essa investigação foi realizada durante a vigência do curso de Mestrado, e se estendeu até o presente momento, em atividades profissionais e acadêmicas direcionadas à geometria.

O tema desta pesquisa – os registros figurais na geometria – adveio de estudos realizados durante o atual curso de Doutorado sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das experiências em monitorias e organização de projetos de extensão com o orientador do trabalho. Nessas ocasiões observou-se que o raciocínio intrínseco e a visualização de objetos geométricos têm estreita relação com a utilização de representações semióticas, já que os objetos da matemática, principalmente, são inacessíveis visualmente.

Entende-se por Registros de Representação Semiótica, de acordo com Duval (2009), a consideração de sistemas semióticos que identificam o objeto matemático e uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro que possibilita a compreensão do conceito envolvido. Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação e autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, realizou diversos trabalhos sobre a utilização peculiar da língua materna na aprendizagem da matemática e também sobre as diversas representações que podem ser mobilizadas na visualização dos objetos matemáticos.

Nesse período, de Mestrado e Doutorado da autora desta pesquisa, cursos de extensão voltados para a aplicação de teorias da Didática da Matemática foram oferecidos para professores de matemática da rede pública de ensino de Maringá e região. Tais projetos foram vinculados à Universidade Estadual de Maringá e à Universidade Estadual do Paraná, e alguns deles enfatizaram o trabalho com a Expressão Gráfica, os Materiais Manipuláveis e os *Softwares* de Geometria como registros figurais. Além disso, a autora da tese têm orientado, também nesse período, pesquisas de Iniciação Científica, Trabalhos de Conclusão de Curso, artigos de Especialização e do Programa de Desenvolvimento

Educacional¹ que investigam o uso desses registros figurais na aprendizagem de geometria na Educação Básica.

O trabalho com a geometria, especificamente, decorre das experiências do orientador da tese na área e da leitura de pesquisas que revelam a carência e as dificuldades no ensino e aprendizagem desse conteúdo estruturante.

O estudo de pesquisas relacionadas aos registros de representação semiótica e às geometrias, tais como Duval (1999; 2003; 2005; 2009; 2011; 2012; 2014), Flores e Moretti (2004), Gálvez (1996), Lorenzato (1995), Moretti (2002) e Pavanello (2004), evidenciaram a importância dos registros figurais, e também, em alguns trabalhos, a ênfase em uma maior preocupação com o ensino e a aprendizagem da geometria. Assim, diante dessas leituras, a autora desta tese vislumbrou a necessidade de realizar uma investigação sobre a influência do tipo do registro figural nas explorações apreensivas² durante a resolução de problemas de geometria por professores de matemática da rede pública de ensino.

Este estudo se justifica, sobretudo, por oferecer aos professores e futuros professores da Educação Básica e do Ensino Superior uma investigação sobre as influências, no que diz respeito às apreensões perceptivas, operatórias e discursivas, dos tipos de registros figurais durante a exploração de conceitos de geometria em um contexto de resolução de problemas. Além disso, apresenta as possibilidades de representações figurais que podem ser utilizadas no trabalho com conteúdos de geometria em aulas de matemática.

Assim, a pesquisa foi norteada pela seguinte questão: *como o tipo de registro figural (MM, SG, EG) influencia nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas de figuras geométricas de professores de matemática da Educação Básica?*

Com o intuito de responder esse problema, o objetivo geral consistiu na investigação, por meio de registros discursivos e não discursivos³ e das falas e escritas, *da influência do tipo de registro figural nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas em figuras geométricas de professores de matemática da Educação Básica.*

¹ O Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) é um programa do estado do Paraná que estabelece um diálogo entre os professores do Ensino Superior e da Educação Básica, por meio de atividades teóricas e práticas orientadas.

² Nesta tese, serão investigadas as apreensões no sentido de Duval (1999), ou seja, as apreensões perceptivas, operatórias e discursivas.

³ Na subseção 3.5, há uma explicação detalhada do que pode considerado um registro discursivo e um registro não discursivo.

Para se alcançar o objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- investigar se a “maneira matemática” ou a “natural de ver” um objeto geométrico depende de seu registro de representação;
- analisar a potencialidade heurística de figuras 0D, 1D, 2D e 3D⁴ representadas nos registros figurais: Materiais Manipuláveis, *Softwares* de Geometria e Expressões Gráficas;
- analisar se o tipo de registro inibe ou facilita o reconhecimento de unidades figurais;
- pesquisar se o tipo de registro auxilia ou dificulta a resolução de problemas;

Para o desenvolvimento da tese, contou-se com a participação de professores de matemática da rede pública de ensino de Maringá e região. A escolha por trabalhar com professores parte do princípio de que esses sujeitos compreendem conceitos básicos de geometria. Desse modo, é possível fazer a análise das influências dos registros figurais com esses professores, de tal modo que o objeto de estudo sejam os registros, e não o conhecimento dos colaboradores.

No decorrer da pesquisa, mostrou-se necessária a realização de um curso de extensão oferecido a 30 (trinta) professores de matemática da rede pública de ensino de Maringá e região. Tal curso abordou alguns conceitos básicos de geometria com o uso das representações semióticas na forma de Expressão Gráfica, Materiais Manipuláveis e *Softwares* Geométricos. Três meses depois dessa primeira parte, foi aplicada uma sequência de tarefas com quinze professores voluntários que também participaram do curso, com o intuito de cumprir o objetivo da pesquisa.

Nesse contexto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica ofereceu fundamentações para as investigações propostas na pesquisa, principalmente porque ela abrange, no conhecimento matemático, aspectos de “referência a um objeto” e de “transformação em outras representações” (DUVAL, 2011); e, além desses aspectos cognitivos, proporciona diversas opções metodológicas para o trabalho com a matemática.

Com o objetivo de realizar a pesquisa com professores de matemática da Educação Básica, almejou-se que, ao tratar de resolução de problemas de geometria com diferentes registros figurais, os professores não apresentassem dificuldades relevantes de

⁴ Essa notação é utilizada para designar a dimensão dos objetos. Por exemplo: 0D indica objeto sem dimensão; 1D se refere a um objeto unidimensional e, assim por diante.

conteúdos de geometria. Dessa forma, buscou-se centrar a pesquisa nas questões relacionadas às apreensões dos registros figurais, e o fato de o professor não ter demonstrado conhecimento de determinado conteúdo não teve relação direta com o tipo de registro figural apresentado.

Desejando responder o problema de pesquisa, optou-se pela aplicação de uma sequência de tarefas previamente elaborada composta por problemas de geometria, possibilitando o acompanhamento do raciocínio de cada sujeito com vistas a realizar a investigação à qual se destinou.

Os problemas que contemplaram o instrumento de pesquisa foram elaborados com base na possibilidade de diversidade de reações e respostas que pudessem ser analisadas à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para as análises, buscou-se identificar, nas falas e escritas, e nos registros discursivos e não discursivos dos professores, os raciocínios mobilizados em cada tipo de registro figural, com atenção especial aos aspectos referentes às apreensões perceptivas, operatórias e discursivas de figuras. Os cinco problemas que compõem a sequência de tarefas correspondem a conteúdos de geometria do Ensino Fundamental e Médio.

Com relação à estrutura da tese, ela é composta por sete seções que foram divididas de modo a tentar esclarecer parte da teoria que subsidia a pesquisa, a metodologia utilizada e as análises realizadas.

A segunda seção, intitulada *A Teoria da Representação Semiótica*, apresenta uma introdução a essa teoria e também uma explicação sobre seus registros. Além disso, são apresentados os tipos de transformações semióticas na matemática – tratamento e conversão de registros.

A seção 3, *Os Registros de Representação Semiótica em geometria*, apresenta uma explanação sobre esse assunto, principalmente no que diz respeito aos registros figurais e os registros das línguas. Nessa seção, buscou-se, também, esclarecer conceitos concernentes às apreensões perceptivas, operatórias e discursivas em geometria, objetivando proporcionar subsídios para a compreensão das análises dos dados. Também foi abordada a diferença entre registros discursivos e não discursivos, além dos requisitos necessários para que possa haver uma mobilização entre os registros semióticos.

Na quarta seção, intitulada *Materiais Manipuláveis, Softwares de Geometria e Expressões Gráficas*, são apresentados os registros figurais utilizados para a produção da pesquisa. No decorrer dessa seção, foram apresentadas informações relevantes a respeito

do que constituem os Materiais Manipuláveis, os *Softwares* de Geometria e as Expressões Gráficas, além de considerações sobre os problemas em geometria por meio das diferentes representações e em quais níveis, de acordo com Duval (2012b), os problemas podem ser classificados.

Os *Materiais e os métodos* são apresentados na seção 5, que descreve o trabalho de campo da pesquisa - a saber, a caracterização da pesquisa e o seu percurso, como se deu a coleta dos dados e os sujeitos colaboradores. Também descreve a aplicação da sequência de tarefas, bem como sua elaboração e organização, a metodologia empregada, os instrumentos utilizados e os pressupostos para as análises dos dados.

A seção 6 é composta pela *Apresentação das tarefas e análise dos resultados*. Nessa seção, faz-se a apresentação da sequência de tarefas realizada com os professores colaboradores da pesquisa, bem como a análise dos cinco problemas que compõem a sequência.

O texto é finalizado com as *Conclusões*, apresentando algumas respostas e considerações extraídas dos dados e análises das tarefas, seguidas das *Referências* e *Apêndices*.

2 A Teoria da Representação Semiótica

Nesta parte do texto, apresenta-se uma introdução à Teoria da Representação Semiótica, e também uma explicação sobre seus registros. Apresenta-se os tipos de transformações semióticas na matemática bem como o tratamento e a conversão dos registros de representação semiótica.

2.1 Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica teve início em 1986, com o filósofo e psicólogo de formação Raymond Duval. O pesquisador francês se dedica à psicologia cognitiva e desenvolveu parte de suas pesquisas, de 1970 a 1995, no *Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques*⁵ – IREM –, de Estrasburgo, na França. Atualmente, é professor emérito em ciências da educação da *Université du Littoral Côte d'Opale*, na cidade de Boulogne-sur-mer (FREITAS; REZENDE, 2013).

Sua teoria é fundamentada em três modelos de análise de signos⁶, e considera as contribuições e os limites de cada um. São eles: o de Peirce, entre os anos 1890 e 1910, desenvolvido nos Estados Unidos; o de Saussure, a partir de 1916, na Suíça; e trabalhos de Frege, entre 1892 e 1894, na Alemanha.

Suas questões orientadoras consistem em três problemas semióticos, expostos em Duval (2011):

- Peirce: “Como analisar a variedade dos tipos de representações no processo de interpretação de seu sentido?” (p. 29). O projeto principal era descrever o papel das representações e dos signos, partindo das formas mais simples até aquelas de exploração científica. O elemento “interpretação” foi associado à definição clássica de signo.
- Saussure: “O que constitui uma língua como um sistema comum de sentido, apesar das mudanças e variações resultantes de suas múltiplas utilizações?” (p. 29). Saussure faz distinção entre o sistema semiótico⁷ que constitui uma língua e a utilização que os

⁵ Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática

⁶ Os signos estabelecem uma relação de referência para designação do objeto, enquanto as representações proporcionam uma relação de causalidade, por estarem no lugar do objeto ou o evocarem. Ambos jamais devem ser confundidos com o próprio objeto (DUVAL, 2011).

⁷ Um sistema semiótico é formado por registros de representação – línguas (formal e não formal), figuras, gráficos, etc. – e por códigos – código binário, alfabetos, etc. (DUVAL, 2011).

locutores fazem dela. Ele não se preocupa com o uso da linguagem (discurso), interessando-se somente pela língua.

- Frege: “Como explicar o progresso rigoroso e não tautológico do raciocínio matemático?” (p. 29). Frege se interessou pela produção semiótica que tinha valor de prova e descoberta ao mesmo tempo. Concentrou-se em resolver o dilema entre a independência que a matemática tem de toda experiência e a experiência sensível necessária para chegar a resultados generalizados. Para isso, fez uma distinção clara entre *sentido de uma expressão* e *referência dessa expressão* – significante e significado.

Dessa forma, baseado nessas três teorias, Duval (2011, p. 38) afirma:

as representações semióticas são as frases em linguagem natural⁸, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços. Muitas vezes associamos os signos a essas unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou os gestos da mão. O que equivale a considerar os signos como as ‘coisas’ pelas quais é preciso começar para dar um sentido!

É importante salientar que as representações semióticas não desempenham, por exemplo, o mesmo papel das representações mentais. Ou seja, as representações semióticas apresentam dificuldades próprias de significação e funcionamento, diferente das representações mentais, que recobrem um conjunto de imagens que permite ao indivíduo somente uma observação de acordo com suas próprias associações (DUVAL, 2012c).

Assim, ao se trabalhar com objetos na matemática, por exemplo, tais objetos são entes matemáticos que podem ser reconhecidos somente por meio de suas representações. Porém, é preciso ter cuidado para que os sujeitos em fase de aprendizagem não confundam os objetos matemáticos com suas representações. Tal fato pode levar a uma perda de compreensão em que os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis, simplesmente por estarem fora do contexto em que foram aprendidos (DUVAL, 2009).

Mas, então, surge o paradoxo da compreensão em matemática, escrito por Duval (2003, p. 21): “Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?”. Daí a importância de se trabalhar com representações variadas e, além disso, com aquelas que não limitem a

⁸ Linguagem natural é o mesmo que língua materna ou língua natural (DUVAL, 2011).

capacidade de compreensão e aprendizagem, já que esses objetos não possuem existência física.

Porém, tratando-se da geometria, Duval (2012b) explica que os objetos, quando representados, podem ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver. Ou seja, ao se visualizar somente um desenho (na forma de expressão gráfica) de um objeto matemático - a figura bidimensional de um poliedro, por exemplo -, não é simples notar que esse objeto tem características particulares, como regularidades, paralelismos, ortogonalidades, ângulos agudos, obtusos ou retos, entre outras. Logo, faz-se necessário o contato com várias representações de um mesmo objeto para que suas propriedades e características fiquem evidentes, o que auxilia na sua compreensão.

Nesse momento, surge a necessidade de se conceituar, de acordo com Duval (2011), um registro de representação semiótica.

2.2 Os Registros de Representação Semiótica

Os registros de representação semiótica constituem as formas de representar objetos com o propósito de auxiliar na aprendizagem de algum conceito. Para isso, o sujeito trabalha “dentro” de sistemas semióticos que, de acordo com Duval (2009, 2012c), cumprem basicamente três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

1. **a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado:** deve respeitar regras de utilização, de identificação, de reconhecimento da representação e a possibilidade de sua utilização para tratamentos; constitui um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis com o fim de identificar *uma representação de alguma coisa* em determinado sistema;
2. **o tratamento:** transformar a representação inicial em outra, obedecendo às regras do próprio sistema, o que constitui uma relação de conhecimento;
3. **a conversão:** converter a representação produzida em um sistema para outro, sem perda de conceitos, de modo a explicar outras significações relativas ao que está sendo representado.

Como exemplo de um sistema semiótico na geometria, é possível pensar no registro figural. Este é utilizado para representar determinadas figuras geométricas que podem ser modificadas de acordo com o que a situação exigir dentro do mesmo sistema.

Então, para Duval (2011), os registros são sistemas semióticos, criadores de novos conhecimentos, que satisfazem, basicamente, duas condições:

- produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptível ou instrumentalmente;
- permitem transformações em novas representações.

Pensando na análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos relacionados ao raciocínio por meio de registros de representação, Duval (2009) identifica fenômenos que estão estreitamente ligados entre si. São eles: a possibilidade de diversificação dos registros de representação semiótica; a diferenciação entre o representante e o representado⁹; e a coordenação entre os diferentes registros.

Duval (2011) também difere códigos de registros. Para ele, a diferença principal está na maior ou menor complexidade dos sistemas semióticos e seu tipo de produção, tendo em vista que os registros possibilitam a transformação do conteúdo das representações produzidas, enquanto os códigos não a permitem. Trabalhar com diferentes registros exige criações cognitivas para as operações semióticas; já o trabalho com códigos se restringe somente à programação externa de ações sobre as sequências:

para considerar um sistema semiótico como um registro, é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica. São essas operações criativas que caracterizam um registro, e não as regras de combinações válidas, para um sistema formal, ou de signos utilizáveis, para um código. Assim, cada frase produzida é irreduzível às palavras que ela combina. Duas frases podem empregar exatamente as mesmas palavras e não ter o mesmo sentido. Por exemplo: “O gato come o rato” e “O rato come o gato” (DUVAL, 2011, p. 83).

2.3 As transformações de representações semióticas

Para compreender as transformações de representações semióticas, é necessário pensar nas funções cognitivas desempenhadas por essas transformações. Para isso, Duval (2009, 2012c) estabelece, em primeiro lugar, a diferença entre “semiose” e “noesis”. É denominada “semiose” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e é denominado “noesis” o próprio conceito, ou seja, a apreensão conceitual de um objeto,

⁹ “Essa diferenciação é geralmente associada à compreensão do que uma representação representa e, então, à possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la nos procedimentos de tratamento” (DUVAL, 2009, p. 38).

obtida nos atos cognitivos. Mas Duval (2012c, p. 270) alerta que “é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose**”, isto é, não existe **noesis** (conceito) sem **semiose** (representação).

Sendo assim, um sistema semiótico, visto como um registro de representação, permite algumas atividades cognitivas fundamentais, ligadas à semiose: o **tratamento** e a **conversão** de representações.

2.3.1 Tratamento de representações semióticas

O tratamento é uma transformação que ocorre internamente ao registro, ou seja, são realizadas operações necessárias para uma questão ou um problema sem sair do registro inicial. São exemplos de tratamentos: a paráfrase e a inferência, que são formas de tratamento em língua natural que cumprem o papel de reformular determinado enunciado com o objetivo de explicá-lo ou substituí-lo; a reconfiguração, que é um tipo particular de tratamento para as figuras geométricas que possibilita sua exploração heurística¹⁰; a anamorfose, uma forma de tratamento figural que consiste em modificações óticas da figura; e o cálculo, que é um tratamento feito sob a escrita simbólica de algarismos e de letras (DUVAL, 2009, 2012b, 2012c).

Para cada registro, existem regras de tratamento para se expandir uma representação. Essas regras, “uma vez aplicadas, resultam em uma representação de mesmo registro que a de partida” (DUVAL, 2009, p. 57).

Um exemplo de tratamento comum, no registro figural, é a transformação de um triângulo em dois triângulos com a mesma área, conforme a Figura 1:

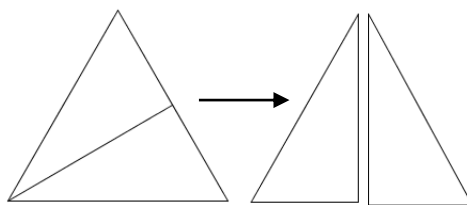


Figura 1: Transformação de um triângulo em dois triângulos congruentes entre si.

Fonte: Autora.

¹⁰ Tanto a reconfiguração quando as propriedades heurísticas de uma figura serão abordadas mais adiante.

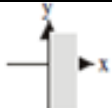
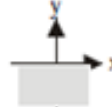
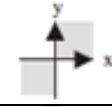


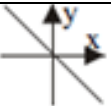
2.3.2 Conversão de representações e mudança de registros

Segundo Duval, “converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (2009, p. 58). A conversão é uma transformação externa ao registro de partida, que conserva a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial.

Duval (2009, 2012c) exemplifica: a ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma figura; a tradução implica em sair de uma representação em uma língua dada para outra língua; a descrição é a conversão de uma representação não verbal na forma de esquemas, figuras, gráficos, em uma representação linguística; a codificação é transcrever uma representação em outro sistema semiótico, diferente do inicial. É possível pensar, também, na transformação dos dados do enunciado de um problema (língua natural) em forma de equação (escrita simbólica).

Não existe e não podem existir regras de conversão do mesmo modo que regras de tratamento: “**A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento**” (DUVAL, 2012c, p. 272). São exemplos de conversão, a língua natural (I) para a expressão algébrica (II) e para a representação gráfica cartesiana (III), conforme representado no Quadro 1:

Quadro 1: Conversão.

I	II	III
1. ... o conjunto de pontos que têm abscissa positiva	$x > 0$	
2. ... que têm ordenada negativa	$y < 0$	
3. ... cujas abscissa e ordenada têm o mesmo sinal	$xy > 0$	
4. ... cujas abscissa e ordenada têm sinais diferentes	$xy \leq 0$	
5. ... cuja ordenada é igual à abscissa	$y = x$	
6. ... cuja ordenada é oposta à abscissa	$y = -x$	

Fonte: Duval (2012c, p. 274).

Então, pensando em uma aprendizagem fundada sobre a coordenação de registros, é demonstrável, em resultados de trabalhos apresentados por Duval (2012c, p. 276), que “a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática”.

Para Duval (2003), os fracassos ou os bloqueios dos alunos, independente do nível de ensino, têm estreita relação com os monorregistros¹¹: “Existe um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes” (DUVAL, 2003, p. 21). Para o pesquisador, esse fato também impede o aluno de utilizar seus conhecimentos prévios e, conseqüentemente, de adquirir novos conhecimentos.

No tocante à coordenação entre os diferentes registros, existe um “percalço”, assim denominado por Duval (2012a), no funcionamento do pensamento durante uma atividade de coordenação matemática. Esse “percalço” constitui-se na diferença entre o funcionamento natural do pensamento e o processo de substituição de uma expressão ou representação que não se situa no mesmo nível da semelhança. Ou seja, “Passa-se de uma frase para uma expressão simbólica, de uma representação gráfica para uma expressão simbólica ou de uma figura a outra que é de toda diferente” (DUVAL, 2012a, p. 97). Essa situação cognitiva é caracterizada pelo autor como congruência semântica. Desse modo, nos casos em que não há correspondência direta entre os conteúdos, sendo estes não equivalentes entre si, Duval (2012a) fala da não congruência semântica.

Assim, “o problema da congruência ou da não congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro” (DUVAL, 2012a, p. 105). O autor também destaca a importância da não congruência na aprendizagem matemática por meio de três exemplos:

- a passagem entre a representação geométrica da reta e a representação simbólica dos números reais (na escrita decimal, na escrita fracionária, no encaixamento de intervalos etc.). Ambas as representações se referem ao mesmo objeto – os números reais – no entanto há uma certa distância de compreensão na passagem de uma representação a outra;
- o discurso natural na compreensão de enunciados de problemas. É necessário fazer uma transposição do que os enunciados de problemas se referem à forma matemática para resolvê-los;

¹¹ Monorregistro, para Duval (2003), é a não mobilização simultânea entre registros.

- a passagem do enunciado de uma relação matemática para a escrita algébrica. Da mesma forma que nos problemas, é necessário reescrever a relação matemática em termos algébricos e estes são diferentes da forma como o enunciado de uma relação matemática expõe.

Com esses exemplos, é possível identificar que uma das maiores dificuldades para a grande parte dos alunos está na congruência e na não congruência semântica no momento da substituição de representações ou expressões. Desse modo, quando o aluno é capaz de coordenar espontaneamente os vários registros de representação de um mesmo objeto, significa que ocorreu a construção do conhecimento de determinado conteúdo ou conceito já que o aluno não fica restrito a uma única representação.

3 Os Registros de Representação Semiótica em Geometria

Nesta seção, são explanados os Registros de Representação Semiótica em geometria, principalmente os registros figurais e os registros das línguas. No decorrer do texto, buscou-se também esclarecer conceitos que se referem às apreensões perceptiva, operatória e discursiva em geometria, com o objetivo de proporcionar subsídios para a compreensão das análises dos dados. Também foi abordada a diferença entre registros discursivos e não discursivos, além dos requisitos necessários para que possa haver uma mobilização entre os registros semióticos.

3.1 A geometria e os registros semióticos

A não existência física dos objetos matemáticos - em particular, geométricos - e a dificuldade de compreensão, pelos alunos, da geometria, desperta a necessidade de procurar representações e metodologias para se trabalhar com esse conteúdo sem desconsiderar os aspectos cognitivos do sujeito.

A representação do objeto influencia diretamente a compreensão de seu conceito e propriedades, tornando fundamental a escolha do tipo de representação exigida pela situação em que se trabalha.

No caso da geometria na Educação Básica, Duval (1999) explica que a atividade matemática se realiza em dois registros: o das figuras e o da língua natural. O registro das figuras é utilizado para visualizá-las e reconhecer, desse modo, algumas de suas propriedades; e o registro da língua natural enuncia definições, teoremas, hipóteses, descreve os objetos etc.

Porém, fazer uma transformação de registro, em geometria, não consiste simplesmente em mudar de registro, assim como da representação algébrica para a gráfica, no Cálculo: “É necessário que os tratamentos figurais e discursivos se efetuem simultaneamente e de maneira interativa”¹² (DUVAL, 1999, p. 147). Deve haver uma coordenação entre os tratamentos realizados na língua natural e na figura. Duval (1999) afirma que a maioria dos alunos entre o 6º e o 9º ano está longe de adquirir essa

¹² Utilizou-se a tradução do original para o espanhol feita por Myriam Vega Restrepo: “es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultaneamente y de manera interactiva”. Todas as traduções da versão utilizada são de autoria da pesquisadora.

coordenação, e as tarefas propostas nesses níveis de ensino não parecem suficientes para favorecer esta aquisição.

A seguir, são apresentados os registros das figuras e da língua natural para a geometria.

3.2 Registros figurais

Apesar da utilidade de as representações figurais no ensino de geometria serem reconhecidas por professores e pesquisadores matemáticos, Duval (1999) ressalta que poucos trabalhos têm se dedicado ao estudo dos diferentes tratamentos e à importância desses registros.

Em muitos conceitos, principalmente de geometria, o uso de imagens pode auxiliar na compreensão e resolução de um problema. A imagem ou figura pode modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre aspectos a serem considerados para se chegar à conclusão necessária. A imagem poderá oferecer novas perspectivas da ideia proposta pelo texto, sem abandoná-lo.

Moreira (1996, p. 3) observa que “Imagens são representações específicas que retêm muitos dos aspectos perceptivos de determinados objetos ou eventos, vistos de um ângulo particular, com detalhes de uma certa instância do objeto ou evento”. A figura auxilia a resolver problemas matemáticos por desempenhar um importante papel do ponto de vista cognitivo e na maneira de se ver e compreender o problema.

Duval (2011) apresenta três características que conferem às figuras um poder cognitivo particular. Em primeiro lugar, o seu valor intuitivo, que permite interpretações comuns com um simples olhar. Em seguida, proporcionam o reconhecimento de objetos, como imagens desenhadas, e, por fim, podem ser “construídas instrumentalmente seja com régua, com o compasso ou com um *software*, pois com um desenho à mão livre não poderíamos nem distinguir uma reta de uma curva, nem verdadeiramente considerar as relações entre grandezas!” (DUVAL, 2011, p. 84).

Para que possa haver uma figura, Duval (1999) explica que é necessário de alguma forma um contraste ou um destaque sobre um suporte material do tipo folha de papel, tela de computador, entre outros, possibilitando uma representação visual de dois grandes tipos, conforme a Figura 2 e explicação a seguir:

- o número de dimensões: 0D (um ponto), 1D (uma linha) ou 2D (uma área);
- variações qualitativas: de forma (linha reta ou linha curva; contorno aberto ou contorno fechado de uma área), de tamanho, de orientação (em relação ao plano frontal-paralelo¹³), variações de granulação, de cor etc.

Desse modo, as variações dimensionais e qualitativas constituem uma figura e possibilitam determinar elementos que são denominados, por Duval (1999), de unidades figurais elementares. As variáveis dimensionais e qualitativas possibilitam nas figuras a distinção entre objetos planos e espaciais, por exemplo. Segue, na Figura 2, o cruzamento da dimensão com as variáveis visuais qualitativas, estabelecendo-se as unidades figurais elementares para o registro das representações geométricas, feito por Duval (1999, p. 150):

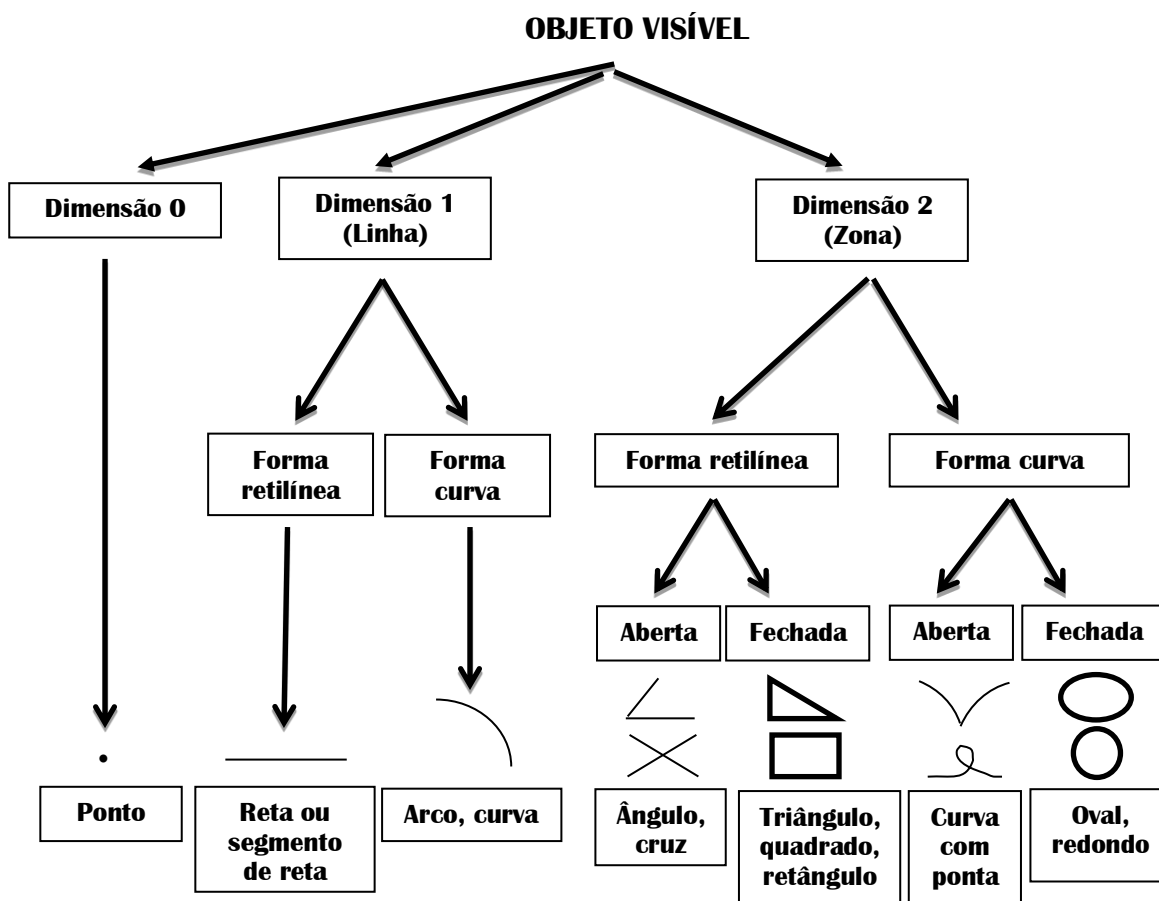


Figura 2: Classificação de unidades figurais¹⁴.

Fonte: Autora, baseado em Duval (1999, p. 150).

Duval (1999) observa que certas dificuldades na aprendizagem da geometria podem estar relacionadas com unidades figurais diferentes para um mesmo objeto. Por

¹³ O plano frontal-paralelo é um “Plano vertical e paralelo ao plano que contém a figura”, da tradução em espanhol “Plano vertical y paralelo al plano que contiene la figura” (DUVAL, 1999, p. 149).

¹⁴ “Classificación de unidades figurales elementales” (DUVAL, 1999, p. 150).

exemplo, é possível representar o *ponto* em três unidades figurais diferentes: a de dimensão 0 (\bullet); de dimensão 1 (em forma de “cruz”, vértice ou intersecção); e de dimensão 2, em forma de “canto”.

A tarefa a seguir é encontrada em Duval (1999, p. 154):

Considerando que $A'C'$ e AC são paralelas; $A'B'$ e AB são paralelas; $B'C'$ e BC são paralelas. Provar que A é o ponto médio de $B'C'$ ¹⁵.

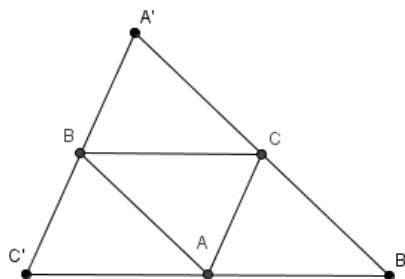


Figura 3: Problema proposto.

Fonte: Autora, baseado em Duval (1999, p. 154).

Nesse problema, proposto por Duval (1999) a estudantes do *troisième*¹⁶, é possível identificar que a figura apresenta seis unidades figurais de dimensão 1, descritas no enunciado do problema, e também oito unidades figurais de dimensão 2, que são triângulos e paralelogramos. Para resolver o problema, é necessário que o olhar do sujeito se volte a essas unidades de dimensão 2, principalmente aos paralelogramos $ACBC'$ e $AB'CB$, porém Duval (1999) afirma que essas são as menos imediatamente visíveis.

3.2.1 Tratamento nos registros figurais

Como visto anteriormente, o tratamento é uma transformação realizada internamente ao registro. Desse modo, realizar um tratamento em registros figurais consiste em efetuar operações material ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica de modo a se obter uma modificação configural dessa figura (DUVAL, 2012c).

Como um suporte intuitivo, as figuras oferecem perspectivas diferentes e, além disso, auxiliam na resolução de problemas. Neste trabalho, foi investigado, dentre outros

¹⁵ “ $A'C'$ y AC son paralelas; $A'B'$ y AB son paralelas; $B'C'$ e BC son paralelas. Probar que A es el punto medio de $B'C'$ ”.

¹⁶ “A série *troisième* (9º ano) corresponde à última série do ensino fundamental no Brasil” (DUVAL, 2012b, p. 123).

aspectos, o papel heurístico das figuras em diferentes representações por meio de operações que modificam a figura e seu papel heurístico.

O papel heurístico de uma figura, em problemas de geometria, consiste na existência de uma congruência entre os tratamentos propriamente figurais e o desenvolvimento de um raciocínio dedutivo válido (DUVAL, 1999). Porém, os objetos de raciocínio não precisam ter necessariamente a mesma dimensão da representação das unidades figurais, mas devem permitir a realização de operações figurais para a resolução do problema proposto. Duval (1999) explica que esses tratamentos se assimilam aos tratamentos matemáticos, porém, não podem ser confundidos com legitimidade, ou justificativas matemáticas, devendo ser utilizados como suporte para a posterior formalização matemática.

A possibilidade de tratamentos figurais remete às relações parte-todo da figura, sendo dos tipos: óticas (visuais), posicionais e modificações em geral, possibilitando uma potencialidade heurística para as figuras.

Duval (1999) explica que, durante a compreensão de uma figura, dois níveis são distinguidos: um primeiro nível corresponde à apreensão gestáltica da figura, ou seja, ocorre o reconhecimento quase que imediato das diferentes unidades figurais discerníveis em uma figura dada; um segundo nível, referente à apreensão operatória das figuras, proporciona modificações das relações das partes com o todo, das unidades figurais reconhecidas e da figura dada: “Não pode haver ensino da geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões às quais uma figura dá lugar”¹⁷ (DUVAL, 1999, p. 155-156).

3.3 As apreensões em geometria

Considerando as geometrias, pensa-se em figuras que possuem propriedades heurísticas a serem exploradas. Essas figuras podem ser representadas de diversas formas, e o sujeito em interação com essas representações fica suscetível a interpretações autônomas. A essas interpretações das figuras, Duval (2012b, p. 120) denomina apreensões.

¹⁷“No puede haber enseñanza de la geometria que no tome en consideración las diferentes aprehensiones a las cuales una figura da lugar”.

As apreensões em geometria podem ser sequencial, perceptiva, operatória e discursiva. Duval (2012b) explica que as três últimas formas têm sido propostas em algumas orientações didáticas, porém, ao serem aplicadas em tarefas, elas se confundem pelo simples fato de que as figuras já possuem uma referência intuitiva. Desse modo, o aspecto cognitivo e o raciocínio em geometria devem ser levados em consideração.

A presente tese trata das apreensões perceptiva, operatória e discursiva, visto que a sequencial tem por objetivo a reprodução de dada figura - que não é, neste momento, o foco do estudo, embora tenhamos percebido sua manifestação em algumas das tarefas aplicadas para essa tese.

Todas as explicações feitas a seguir, em relação às apreensões, direcionaram a investigação durante a análise e coleta de dados, e partem da teoria do pesquisador Raymond Duval.

3.3.1 Apreensão perceptiva de formas

Uma figura é uma organização de elementos que podem ser pontos, traços (retas) ou zonas (regiões). Os pontos e os traços caracterizam-se por serem discretos e contínuos, respectivamente, enquanto que as zonas distinguem-se por suas formas determinadas por seu contorno.

Por exemplo, se os elementos figurais forem traços, a organização perceptiva se baseia na lei do fechamento e da continuidade: quando diferentes traços geram um contorno simples e fechado (DUVAL, 2012b, p. 121), conforme a Figura 4:

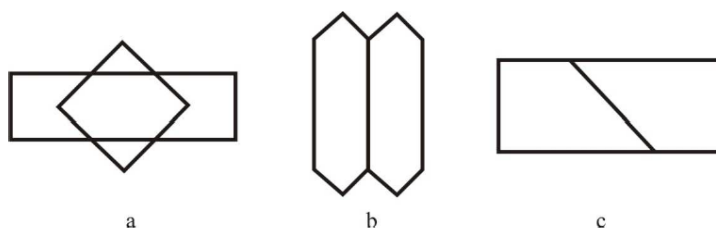


Figura 4: Diferentes organizações perceptivas de figuras.

Fonte: Duval (2012b, p. 121).

De acordo com a lei do fechamento e da continuidade, nas três figuras apresentadas na Figura 4, é possível notar:

- em (a), a superposição de um quadrado e um retângulo;
- em (b), duas formas idênticas com um lado em comum;

- em (c), um retângulo repartido em duas formas.

Porém, essa lei exclui organizações perceptivas mais simples, impedindo a visualização de outras formas. Por exemplo, em (a), ao invés de dois polígonos regulares (1 quadrado e 1 retângulo), poder-se-ia ver cinco formas poligonais (2 triângulos, 2 pentágonos e 1 hexágono).

No contato do sujeito com uma figura em um contexto de uma tarefa, são geradas duas reações contraditórias: uma imediata e automática (apreensão perceptiva de formas), e outra controlada pela interpretação dos elementos figurais.

A reação imediata e automática é identificada como uma “maneira normal de ver” as figuras. Duval (2011) explica que, nesse caso, características como a dimensão de unidades figurais não são reconhecidas, e muito menos levadas em conta por quem visualiza a figura.

Já a “maneira matemática de ver” as figuras geométricas está baseada na interpretação dos elementos figurais, o que possibilita passar de um modo de ver a outro espontânea e rapidamente. Por exemplo, na Figura 4 (c), é possível reconhecer: um retângulo e um segmento de reta; ou dois trapézios; ou quatro arestas e um segmento de reta. Identificar essas unidades figurais não tão explícitas, porém importantes, vai além de um simples reconhecimento perceptual das formas, e exige prática de quem está visualizando (DUVAL; GODIN, 2005).

Em uma apreensão perceptiva de figuras, destaca-se:

- ✓ a uniformidade de estímulos (contrastes bruscos de brilho) em uma figura;
- ✓ leis de agrupamento de estímulos (simplicidade, fechamento, proximidade) e identificação de formas;
- ✓ noções de profundidade e distância (tamanho, superposição, perspectiva em relação a um ponto de fuga, inclinação em relação a um plano paralelo ao que contém a figura) e número de dimensões: 2D ou 3D.

“A figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente” (DUVAL, 2012b, p. 120).

A figura representada tem uma estrutura perceptiva autônoma. Porém, ao ser compreendida, dependerá da congruência semântica entre a figura e o enunciado, conforme pesquisas feitas por Duval (2012b) com alunos do *troisième*.

3.3.2 Apreensão discursiva

Os problemas de geometria exigem uma forma de raciocínio que depende, dentre outros fatores, de uma interpretação de enunciados e de figuras. Muitas vezes, é possível explorar propriedades pertinentes a uma figura sem que haja necessidade de um enunciado. Porém, quando uma figura geométrica não evidencia suas propriedades à primeira vista, a partir de seus traçados e de suas formas, mas com base no que é dito, há uma subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva (DUVAL, 2012b). Essa subordinação é extremamente relevante, quando se pensa que a mesma figura pode ser uma figura geométrica completamente diferente, se se modificar o enunciado das hipóteses. Esse fato diz respeito ao nível do problema, e é detalhado na subseção 4.2.

Resultados de pesquisas de Duval (2012b) revelaram que a maioria dos alunos se apega à apreensão perceptiva, pois estes leem o enunciado do problema, desenham a figura e concentram-se totalmente nela, sem voltar ao enunciado. Por isso, os problemas em que o enunciado é semanticamente congruente à figura privilegiam esse perfil de alunos.

Por exemplo, o caso das geometrias euclidiana e não euclidiana. Uma curva pode ser uma reta, dependendo de em qual contexto de geometria ela está inserida. Uma figura deve ser olhada em função das propriedades ou das condições formuladas nas suas hipóteses.

Também é possível elaborar problemas com graus de dificuldade diferentes para uma mesma figura. Considere-se a Figura 5, a seguir:

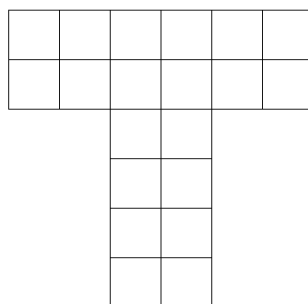


Figura 5: Decompor em quatro partes iguais.
Fonte: Autora, baseado em Duval (1999, p. 157).

Enunciado 1: É possível decompor a Figura 5 em quatro pedaços de mesma área e mesma forma suscetíveis de serem justapostos? (DUVAL, 1999, p. 157).

Enunciado 2: A Figura 5 é formada por vinte quadradinhos. Divida-a em quatro pedaços de mesma área e mesma forma (FLORES; MORETTI, 2004, p. 06).

Nesse exemplo, os dois enunciados têm congruência semântica com a figura. Mas o fato de o enunciado 2 mencionar os vinte quadradinhos aumenta a congruência semântica, fazendo com que o aluno pense em uma divisão de vinte por quatro, resultando no número de quadradinhos que cada parte deve conter. Já no enunciado 1, a quantidade de quadradinhos não é mencionada, ficando a cargo do sujeito uma reconfiguração que origine figuras de mesma área e forma entre si, compostas por cinco quadradinhos cada. E, então, no momento em que a apreensão operatória entra em cena, ocorre uma não congruência semântica, pois a figura base para resolver o problema não tem a mesma forma do desenho da figura proposta, conforme a Figura 6, a seguir:

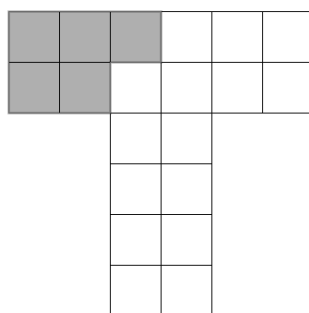


Figura 6: Decompor em quatro partes iguais – solução.
Fonte: Autora.

Em atividades de demonstração, a apreensão discursiva de uma figura deve privilegiar a articulação dos enunciados, construindo uma rede semântica de propriedades e objetos que auxiliem na interpretação das unidades figurais. Nesse caso, existe uma grande diferença entre redigir uma lista de instruções e uma demonstração. No primeiro caso, Duval (2012b) explica que há uma linearidade de discurso que exige apenas uma sequência de passos sucessivos para sua execução em que os enunciados são ordens. Já no segundo caso, a linearidade do discurso não é inicialmente dada, sendo necessário, ao sujeito, o conhecimento conceitual para que a ideia seja organizada em uma rede de relações.

Com relação à congruência semântica entre figuras e enunciados, é importante observar que esta possibilita ou não a entrada para a resolução de um problema. Porém, para chegar ao “resultado final”, ela não é suficiente. É preciso recorrer à apreensão operatória.

3.3.3 A apreensão operatória e o papel heurístico das figuras

A apreensão operatória está relacionada com as várias modificações e reorganizações que podem ser feitas nas figuras de forma a ajudar na resolução de algum problema proposto. Fazer operações em uma figura implica em realizar tratamentos figurais.

As modificações que podem ser realizadas nas figuras se subdividem em: mereológicas, óticas e de posição:

- modificação mereológica:

É a divisão de uma figura em unidades figurais de mesma dimensão que podem ser combinadas em outra figura ou em diferentes subfiguras, consistindo em um processo heurístico (DUVAL, 2012c, p. 288).

Duval (2005, p. 14) classifica a decomposição mereológica em três tipos:

- a) estritamente homogênea: a decomposição preserva a forma da figura de partida, ou seja, as partes obtidas têm a mesma forma que o todo. O quadrilátero na Figura 7 exemplifica claramente esse tipo de modificação:

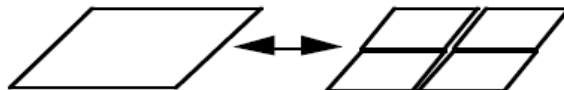


Figura 7: Modificação estritamente homogênea.

Fonte: Duval (2005, p. 14).

- b) homogênea: as unidades figurais obtidas pela decomposição têm forma diferente da figura de partida, porém mesma forma entre si. O quadrilátero da Figura 8 pode ser decomposto em dois triângulos, conforme segue:

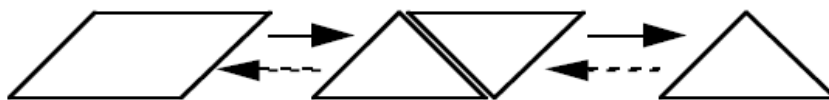


Figura 8: Modificação homogênea.

Fonte: Duval (2005, p. 14).

Essa decomposição é visualmente reversível, e pode ser feita simplesmente ao se visualizar a forma da figura de partida.

- c) heterogênea: as unidades figurais obtidas após a decomposição possuem formas diferentes entre si. Por exemplo, a transformação de um paralelogramo em um retângulo, conforme Figura 9.

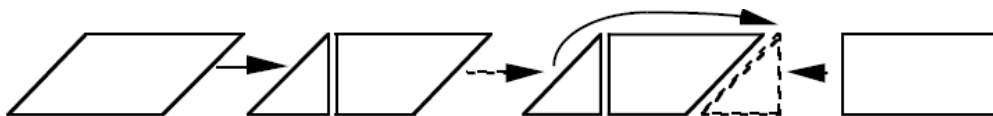


Figura 9: Modificação heterogênea.

Fonte: Duval (2005, p. 14).

Para tal transformação, foi necessário dividir o paralelogramo em um triângulo e em um trapézio e, desse modo, fazer o reagrupamento dessas duas unidades figurais.

Para a decomposição mereológica, Duval (2005) destaca as seguintes particularidades:

- ela pode ser feita materialmente (da mesma forma que juntar as peças de um quebra-cabeça), graficamente (por meio de traços) ou visualmente (não mentalmente);
- muitas vezes, a divisão mereológica não tem relação direta com o discurso matemático e, por esse motivo, necessita de um apoio visual para se identificar propriedades geométricas e resolver problemas propostos.

Tais modificações proporcionam a exploração da produtividade heurística de uma figura e originam o processo de reconfiguração: **“De fato, as partes elementares obtidas por fracionamento, podem ser reagrupadas em várias subfiguras todas pertencentes à figura inicial”** (DUVAL, 2012b, p. 128).

A seguir, tem-se um exemplo de um tratamento puramente figural de reconfiguração que constitui uma representação autossuficiente para o conhecido teorema de Pitágoras (DUVAL, 2005, p. 31).

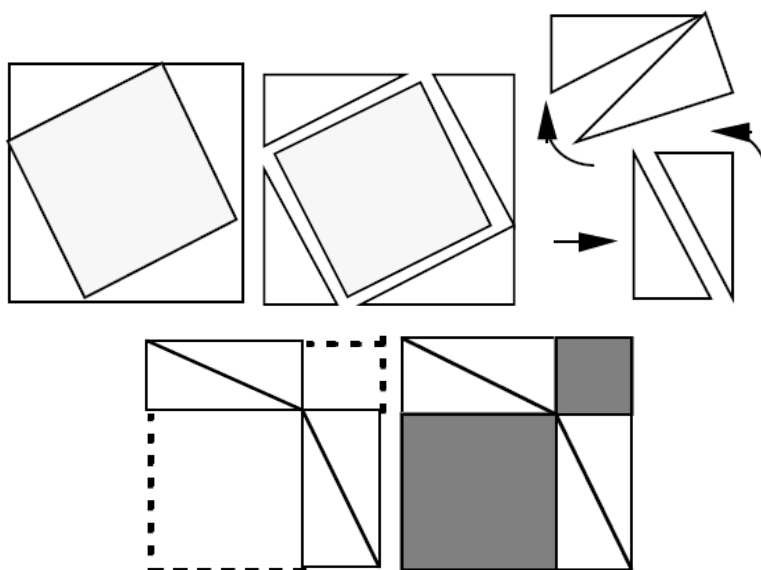


Figura 10: Teorema de Pitágoras.

Fonte: Duval (2005, p. 31).

Inicialmente, são realizadas operações de separação mereológica heterogênea na unidade figural inicial (o quadrado), transformando-a em outras unidades figurais (1 quadrado e 4 triângulos) – primeira reconfiguração. Em seguida, os quatro triângulos são justapostos, formando-se dois retângulos – segunda reconfiguração, de modo a se obter a mesma região da figura inicial (o quadrado).

Além da operação de reconfiguração, há também o mergulhamento. Este também está ligado às operações mereológicas na apreensão operatória. Duval (2012b) explica que o mergulhamento é inverso à reconfiguração, pois se trata de um prolongamento da figura.

- modificação ótica:

Essa operação consiste em manter a mesma forma e orientação da figura inicial, fazendo variar somente o tamanho: aumentar ou diminuir uma figura transformando-a em outra, de modo que esta seja vista como sua imagem.

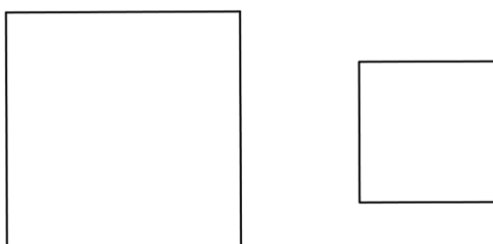


Figura 11: Modificação ótica do quadrado.

Fonte: Baseado em Duval (1999, p. 158).

Tal deformação também possibilita a justaposição em profundidade de duas figuras semelhantes com uma modificação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, como um jogo de lentes e espelhos (DUVAL, 2012b, 2012c).

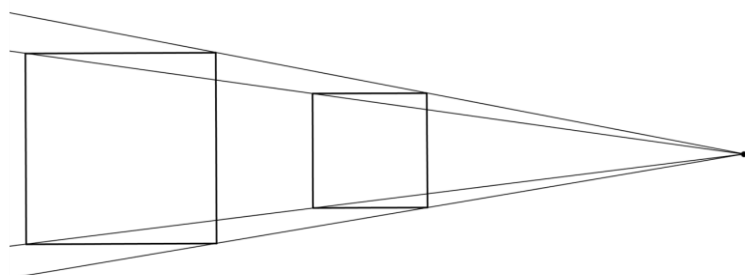


Figura 12: Uma situação de homotetia.

Fonte: Baseado em Duval (1999, p. 159).

Fatores tais como a figura inicial e a figura modificada possuírem a mesma orientação e o mesmo centro de homotetia auxiliam na visibilidade dessa operação (DUVAL, 2012c).

- modificação posicional:

Consiste em preservar o tamanho e a forma da figura de partida, mas com variação de orientação, com deslocamento (translação), rotação e reflexão da figura com relação ao campo de referência em que ela se encontra (DUVAL, 2012b, 2012c).

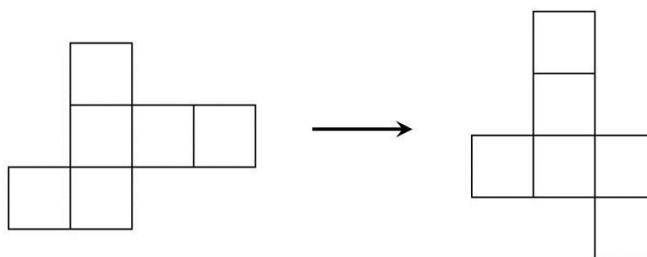


Figura 13: Modificação posicional (rotação).

Fonte: Duval (1999, p. 165).

Nesta tese, o estudo das figuras, no que consiste à apreensão operatória, está condicionado mais às modificações mereológicas e posicionais do que óticas. É destacada a aplicação da operação de reconfiguração sem se abordar o mergulhamento.

3.4 Registros das línguas

Entende-se por registros das línguas um sistema semiótico que privilegia as operações discursivas e vai além da função de comunicação, possibilitando conhecimentos. Esse registro não é puramente matemático, porém é utilizado para formular definições, enunciar teoremas, justificar soluções, dentre outras coisas na matemática.

A utilização da língua em matemática não tem muita relação com aquela praticada no cotidiano, e a esse fato Duval (2011) denomina a primeira fratura da incompreensão. Tal fratura é identificada, principalmente, quando é exigida do aluno a interpretação do enunciado de um problema para que ele possa converter a língua natural em uma língua formal¹⁸ e reciprocamente.

¹⁸ Língua formal é a escrita simbólica por meio de letras que cumpre funções proposicionais, de quantificadores, de variáveis e de operadores (DUVAL, 1999).

Duval (2011) explica que entre a língua natural e os outros registros existe uma distância cognitiva considerável, o que dificulta a conversão dos enunciados da língua natural para representações em outro registro.

Perguntas sobre a natureza da linguagem, sobre seu papel no funcionamento do pensamento e sobre sua aprendizagem despertam, conforme Duval (1999), questões relativas ao seu uso numa situação de aprendizagem. São elas:

- a língua consiste em algo diferente dos outros sistemas semióticos como os esquemas e as imagens?
- qual a diferença entre a língua natural e as línguas formais?
- por que a língua dá lugar a empregos tão diferentes como a conversação, enunciados de teoremas matemáticos ou enunciados literários na escrita?

Duval (1999) explica que a última pergunta é crucial, em vista das dificuldades de língua encontradas tanto no ensino da língua materna quanto da matemática.

Nesse sentido, para estudar as funções que devem cumprir o emprego de uma língua, de modo a possibilitar a passagem da língua natural para a língua formal, Duval (1999) as separou em funções metadiscursivas e funções discursivas.

As funções metadiscursivas são independentes dos registros de representação, e desempenham, basicamente, três funções: a *comunicação*, o *tratamento* e a *objetivação*.

A *comunicação* desempenha o papel de reagrupar elementos para transmitir, difundir ou mudar uma informação no interior de um espaço social. As línguas naturais são os sistemas semióticos mais apropriados para cumprir tal função, porém, outros sistemas podem servir de “linguagem” sem serem necessariamente “línguas”.

O *tratamento* é extremamente significativo, pois transforma uma informação recebida, permitindo extrair dela conteúdos explícitos ou implícitos: “É no registro da língua, natural ou formal, que o raciocínio se desenvolve e encontra toda a sua potência”¹⁹ (DUVAL, 1999, p. 83). Da mesma forma que a *comunicação*, a função de *tratamento* também opera em sistemas não linguísticos, como, por exemplo, a representação de um mesmo número em diferentes bases.

A terceira e última função metadiscursiva é a *objetivação*. Esta possibilita ao sujeito a tomada de consciência de coisas não conscientes até o momento, e, por conta de sua exteriorização com fins de organização, essas ideias se tornam claras. A *objetivação*

¹⁹ “Es en el registro de la lengua, natural o formal, que el razonamiento se desarrolla y encuentra toda su potencia”.

também não está relacionada somente à linguagem, podendo ser realizada em sistemas semióticos figurativos como o desenho, por exemplo.

As funções discursivas são as funções cognitivas que devem ser cumpridas por um sistema semiótico, possibilitando um discurso (DUVAL, 1999). Basicamente, Duval (1999) estabeleceu quatro funções discursivas para que haja um discurso. São elas:

- designação de objetos (função referencial);
- constituição de um enunciado completo (função apofântica);
- articulação de enunciados completos (função de expansão discursiva);
- transformação potencialmente recorrente de um enunciado completo (função de reflexividade).

Para sintetizar essa passagem da língua natural para a língua formal, foi elaborado o seguinte quadro:

Quadro 2: Registro das línguas.
REGISTRO DAS LÍNGUAS

LÍNGUA NATURAL → LÍNGUA FORMAL	
FUNÇÕES	
DISCURSIVAS	METADISCURSIVAS
REFERENCIAL	COMUNICAÇÃO
APOFÂNTICA	TRATAMENTO
EXPANSÃO DISCURSIVA	OBJETIVAÇÃO
REFLEXIVIDADE	

Fonte: Autora.

Nota-se que, embora as formas de expressão resultem de operações discursivas, estas últimas não são necessariamente advindas de marcas linguísticas (DUVAL, 1999). Nesse sentido, as escritas simbólicas, como sistema de numeração, escrita algébrica e línguas formais, também são consideradas registros discursivos, desempenhando os papéis de produção, apreensão e organização de expressões.

Transpondo esta teoria para o ambiente educacional e considerando que o discurso se caracteriza como o encontro cultural do professor com seus alunos, podemos o conceituar da seguinte forma:

o discurso é o emprego de uma língua para ‘dizer alguma coisa’, ou seja, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não são somente potencialidades significantes de uma língua. Em razão disto, a prática de

um discurso é inseparável de um certo funcionamento cognitivo (DUVAL, 1999, p. 82)²⁰.

Dentre outros contextos, é em um ambiente de espaço escola, que por meio do discurso, as ideias são transmitidas, demonstrando que este está além das funções das línguas sendo responsável pela reprodução de um conhecimento e sua conseqüente construção.

3.4.1 Língua natural e língua formal

A língua formal é estabelecida por uma escrita simbólica que comporta quatro tipos de unidades elementares: as letras com função proposicional, os símbolos com função de quantificadores, as letras com funções de variáveis (dependentes ou independentes) e os símbolos com funções de operadores ou de conectivos proposicionais (DUVAL, 1999).

A escrita simbólica cumpre funções discursivas como a função referencial, a função apofântica e a função de expansão discursiva, vistas anteriormente. Esse fato permite que a escrita simbólica possa ser considerada uma língua.

Embora a língua formal e a língua natural cumpram as mesmas funções discursivas, essas não apresentam nenhuma semelhança em suas estruturas (DUVAL, 1999). A passagem do registro da língua natural para a língua formal apresenta obstáculos, principalmente relacionados às funções referenciais e apofânticas, pois estas necessitam de um emprego da língua formal com um simbolismo característico, e dos denominados “conectivos proposicionais” correspondentes à língua natural, respectivamente. Com relação à função de expansão discursiva, esta ocorre internamente a cada registro, o que facilita sua compreensão (DUVAL, 1999). Esses assuntos não são aqui aprofundados, por não fazerem parte dos objetivos da pesquisa.

²⁰“el discurso es el empleo de una lengua para ‘decir alguna cosa’, es decir, para hablar de objetos físicos, ideales o imaginarios, que no son solo las potencialidades significantes de una lengua. En razón de esto, la práctica de un discurso es inseparable de un cierto funcionamiento cognitivo”.

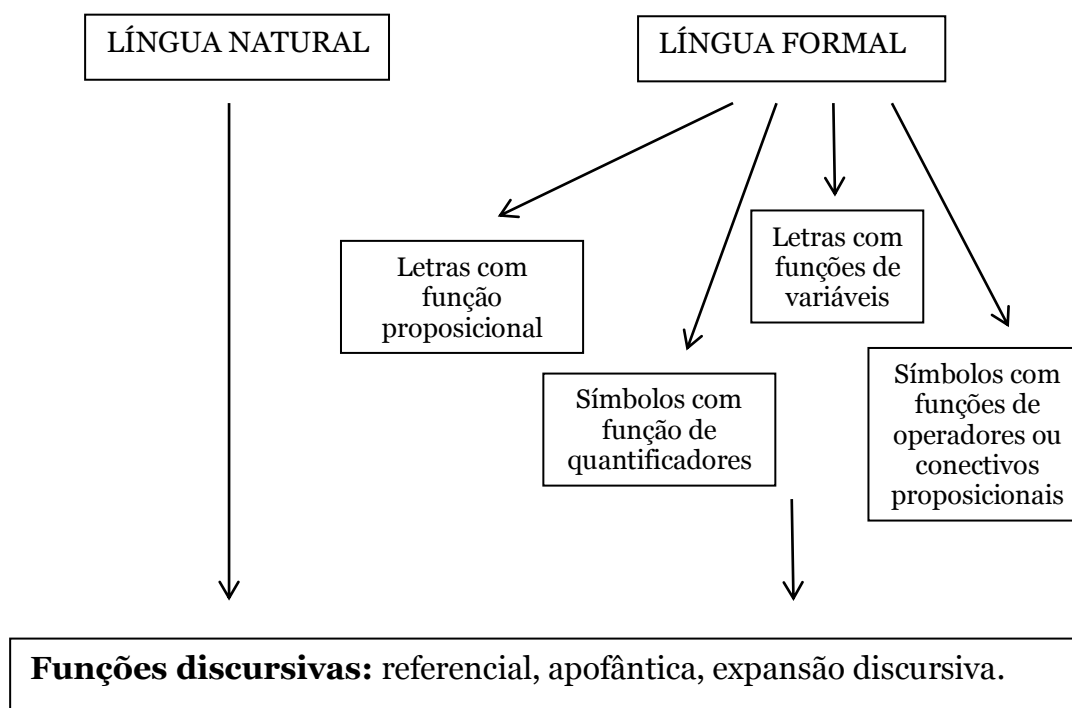


Figura 14: Unidades elementares e funções discursivas.
 Fonte: Autora.

3.5 Registros discursivos e não discursivos

Na realização de provas e justificações matemáticas, as transformações de representações semióticas em forma de tratamentos são necessárias e suficientes, do ponto de vista matemático. Ou seja, os tratamentos são realizados especificamente dentro do registro escolhido, desde que este abarque as hipóteses em questão.

Porém, Duval (2011) esclarece que, ao analisar o funcionamento cognitivo do pensamento exigido pela matemática, nota-se a necessidade da coordenação de diversos registros para a compreensão de determinado assunto. Tal necessidade surge, também, da intenção de auxiliar o tratamento no registro escolhido. Como, por exemplo, a geometria que, com frequência, apoia-se no registro figural para efetuar tratamentos também no registro da língua natural: “Em outras palavras, em matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro” (DUVAL, 2011, p. 116).

Duval (2011) não se preocupa em listar todos os registros utilizados em matemática, mas sim, com interesse teórico e metodológico, apresenta uma classificação

baseada unicamente em duas características fundamentais: os registros discursivos e os não discursivos.

Os registros discursivos não se originam somente das línguas natural e formal, da mesma forma que os não discursivos não são somente aqueles que basicamente podem ser representados por imagens, gráficos e figuras em geral. Na realidade, esses registros devem possibilitar suas transformações específicas de acordo com cada caso e em cada situação particular, satisfazendo algumas condições. Desse modo, não é possível simplesmente classificá-los sem considerar suas operações.

Duval (2011) também classifica os registros em multifuncionais e monofuncionais, como os que são utilizados fora da matemática e os que próprios da matemática, respectivamente. O autor sintetizou essas informações no seguinte quadro:

Quadro 3: Classificação dos tipos de registros semióticos.

REGISTROS	DISCURSIVOS (Linearidade fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização de expressões)	NÃO DISCURSIVOS (Apreensão simultânea de uma organização bidimensional)
MULTIFUNCIONAIS (Os tratamentos não são algoritmizáveis)	<u>As línguas</u> : três operações hierarquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio). Duas modalidades de produção: oral/escrita.	<u>Ícônica</u> : produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas, características das partes do objeto. Configuração geométrica: três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológicas, desconstrução dimensional das formas).
	<u>Representações</u> Auxiliares transitórias para as operações livres ou externas.	
MONOFUNCIONAIS (As transformações de expressões são algoritmizáveis)	<u>As escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas</u> (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais). Uma modalidade de produção: escrita.	Junção entre os pontos ou nós e orientação marcada por flechas. Gráficos cartesianos: operação de zoom, interpolação, mudança de eixos. Esquemas.

Fonte: Autora, baseado em Duval (2011, p. 118).

Duval (2011) observa que a conversão de um registro a outro é uma operação cognitivamente não reversível. Ou seja, não existe uma equivalência lógica²¹ entre os registros. Converter em um sentido não implica na possibilidade de fazê-lo com o mesmo grau de dificuldade no sentido inverso: “A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha” (DUVAL, 2011, p. 118). A conversão nos dois sentidos promove uma coordenação concomitante de vários registros, cumprindo funções cognitivas de conhecimento.

No caso das figuras em geometria, ao apresentá-las aos alunos, ocorrem designação de seus objetos, enunciação de seus resultados e raciocínios de modo oral ou escrito, e, por conseguinte, os alunos as reproduzem com o fim de conservar suas características e propriedades (mesmo que desconstruindo-as dimensionalmente) de modo instrumental e, quando necessário, realizando reconfigurações para obter outros resultados.

3.6 Mobilização de registros

O processo cognitivo, realizado para compreender a matemática, mobiliza sempre pelo menos dois registros (DUVAL, 2011). Embora muitas vezes tal fato não seja observado do ponto de vista matemático, implicitamente é exigida a coordenação de um segundo registro para a compreensão necessária da atividade matemática. Em um problema de geometria, por exemplo, pode-se mobilizar a linguagem de um enunciado para a representação em forma de figura e, finalmente, a escrita na língua formal.

Nota-se que “*Não é suficiente justapor representações de registros diferentes para que os alunos ‘vejam’ as correspondências entre as unidades de sentido matematicamente pertinentes das diferentes representações justapostas*” (DUVAL, 2011, p. 100). A conversão dos registros deve acontecer espontaneamente para que se opere a tomada de consciência no sujeito e a discriminação das unidades significantes dos registros de partida nos registros de chegada. Duval (2009) distingue os registros, considerando a natureza das unidades significantes e o modo de discriminação:

- para unidades discretas, como as línguas formais;
- para unidades não separáveis, como as figuras;

²¹ A equivalência lógica, na matemática, é também conhecida como uma bi-implicação, e é representada pelo símbolo “ \Leftrightarrow ”, que também pode ser lido como “se, e somente se” (GERÔNIMO; FRANCO, 2010).

- em vários níveis possíveis de determinação funcional das unidades, como as línguas naturais.

Discriminar as unidades significantes próprias de cada registro é condição necessária para a atividade de conversão (DUVAL, 2009). As unidades significantes não aparecem separadas e independentes umas das outras, podendo ser tanto de palavras, símbolos, ambos, ou inoperantes, no caso das figuras. Duval (2009) explica que a discriminação das unidades significantes de uma representação pode ser feita variando um só fator a cada vez, de modo a se explorar todas as variações possíveis de uma representação num registro.

É possível fazer a identificação das unidades significantes a partir do seguinte método, proposto por Duval (2009) com base em Saussure:

Se nos ativermos a uma representação R num registro A e sua conversão R' num registro B, podemos observar:

- as variações de R em A que não exercem **mudança para R' em B**,
- as variações de R em A que, ao contrário, exercem uma **variação concomitante de R' em B** (DUVAL, 2009, p. 102).

O segundo caso, Duval (2009) denomina de variações cognitivas. Desse modo, situações de aprendizagem centradas na coordenação de registros requerem uma forma de exploração das variações cognitivas realizadas na representação de um registro a outro.

No caso da coordenação entre figura e discurso em geometria, Duval (1999) explica que não existe desenho que represente uma situação por si mesmo. Ou seja, um mesmo desenho pode representar situações matemáticas completamente diferentes e, portanto, servir de suporte intuitivo para raciocínios diferentes. Nesse sentido, ao se utilizar uma figura como representação de um objeto para resolução de um problema, as variações cognitivas são os tratamentos figurais que interagem com os tratamentos discursivos.

Duval (2011, p. 119) explica que “mudar de registro numa representação dada ou obtida após um tratamento muito elementar é o primeiro gesto do pensamento em matemática”. Esse gesto – a conversão – deve ser quase automático, e é essencial para o encaminhamento matemático, porém fatores como a variação de congruência ou não congruência entre os registros influenciam nessa mobilização. Por exemplo, o problema a seguir proposto por Duval (1999, p. 154-155) a alunos que finalizavam o *troisième*:

1º caso:

$A'C'$ e AC são paralelas, $A'B'$ e AB são paralelas, $B'C'$ e BC são paralelas. Provar que A é o ponto médio de $B'C'$ ²².

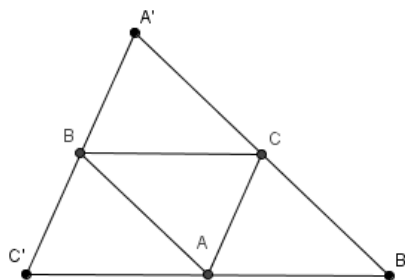


Figura 15: 1º caso.

Fonte: Autora, baseado em Duval (1999, p. 154).

2º caso:

$ABED$ e $BCED$ são paralelogramos. Provar que B está na metade de AC ²³.

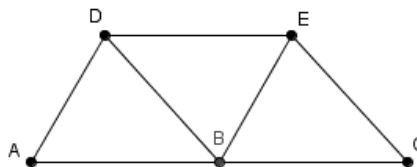


Figura 16: 2º caso.

Fonte: Autora, baseado em Duval (1999, p. 155).

Esse problema foi apresentado anteriormente, na subseção 3.2, com o intuito de classificar as suas unidades figurais. Neste momento, é feita uma análise da congruência entre enunciado e figura, conforme Duval (1999).

No segundo caso, o enunciado faz referência ao objeto “paralelogramo”:

Isto quer dizer duas coisas: primeira, existe congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis e aquelas que “inicializam” os tratamentos que permitem a resolução e, segundo, existe congruência entre as representações dos dois registros. *Tem-se um problema muito mais fácil, não do ponto de vista matemático, mas sim do ponto de vista cognitivo!*²⁴ (DUVAL, 1999, p. 155).

No primeiro caso, vê-se, espontaneamente, um triângulo pequeno, inscrito em um triângulo grande, já que o enunciado não se refere, em momento algum, a paralelogramos.

²² “ $A'C'$ y AC son paralelas; $A'B'$ y AB son paralelas; $B'C'$ e BC son paralelas. Probar que A es el punto medio de $B'C'$ ” (DUVAL, 1999, p. 154).

²³ “ $ABED$ y $BCED$ son paralelogramos. Probar que B está en la mitad de AC ” (DUVAL, 1999, p. 154).

²⁴ “Esto quiere decir dos cosas: uno, hay congruência entre las unidades figurales diretamente visibles y aquellas que ‘inicializan’ los tratamientos que permiten la resolución y, dos, hay congruência entre las representaciones de los dos registros. *Esto hace el problema mucho más fácil, no desde un ponto de vista matemático, sino desde un ponto de vista cognitivo!*”.


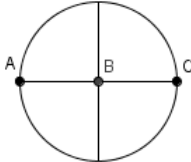
Nesse caso, certas unidades figurais foram privilegiadas por conta da organização perceptiva do sujeito, já que não há congruência entre a figura e o enunciado.

Duval (2011) observa que os professores, em geral, têm a tendência de escolher os problemas em que as conversões a realizar são congruentes, deixando os casos de não congruência para trabalhar em forma de investigação, com alunos mais avançados. Nesse sentido, Duval (2011) questiona a prática de apresentação desses problemas, já que poderia ser impróprio apresentar os que exigem conversões não congruentes a alunos que demonstram dificuldades. Ou seja, Duval (2011) ressalta que existe uma gama de apresentações possíveis do problema, podendo ser com o uso de materiais, jogos e outras formas, requerendo, de qualquer maneira, a mobilização de um segundo registro de representação semiótica.

Por outro lado, o autor (DUVAL, 2009) explica que é possível encontrar, em um mesmo livro didático de matemática, “vai-e-vens” incessantes entre frases em língua natural, símbolos, figuras e gráficos, sem se recorrer ao trabalho da atividade cognitiva de conversão de representações. Isso significa que operações de conversão e aprendizagens conceituais que poderiam ser exploradas aparecem como atividades naturais ou adquiridas pelos alunos.

As dificuldades das conversões se devem a dois motivos discriminados por Duval (2011). O primeiro é o fato de que as conversões podem estar implícitas ou explícitas para a resolução de um problema, conforme o Quadro 4. O segundo se deve à distância cognitiva entre as representações de um mesmo objeto em dois registros diferentes. Em geral, Duval (2011) afirma que a distância cognitiva entre os registros discursivos e os registros não discursivos é sempre maior do que parece e, além disso, existe uma assimetria entre os dois sentidos de conversão, conforme o exemplo a seguir:

Quadro 4: Assimetria dos sentidos das conversões quando a linguagem é um dos registros mobilizados.

LINGUAGEM \Rightarrow FIGURA	FIGURA \Rightarrow LINGUAGEM
<p>1) Traçar um segmento de reta AC</p> 	 <p>1) B é o ponto médio de AC 2) Traçar um círculo de centro B, passando por A e C.</p>

Fonte: Autora, baseado em Duval (2011, p. 123).

É possível notar que, na primeira parte do quadro, há uma designação verbal (segmento) para uma unidade figural, enquanto na segunda há uma unidade figural para duas designações verbais (ponto médio e centro). Com esse fato, vê-se a assimetria de conversão entre linguagem \rightarrow figura e figura \rightarrow linguagem. Logo, as conversões de representações são operações cognitivas não reversíveis. Tal fato contribui ainda mais para a compreensão do objeto matemático por meio da diversidade de registros.

Também nota-se que, para transformar o figural em linguagem, é necessário utilizar a produção mental para uma produção escrita. Para tal ato, Duval (2011) explica que é necessário, por parte do sujeito, um controle das produções escritas, que é gerado por meio de um circuito de atividade cognitiva bem mais amplo e mais potente que o constituído pelas produções orais e mentais.

Nesse contexto, além de a mobilização para a produção escrita possibilitar a tomada de consciência do que antes o sujeito não tinha consciência (DUVAL, 2011), sua análise por uma terceira pessoa permite reconhecer a organização conceitual e cognitiva do indivíduo, permitindo refletir sobre suas apreensões, objetivo deste trabalho.

4 Materiais Manipuláveis, *Softwares* de Geometria e Expressões Gráficas

Esta seção tem como objetivo apresentar os registros figurais utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa. No decorrer do texto, são apresentadas informações a respeito do que constituem os Materiais Manipuláveis (MM), os *Softwares* de Geometria (SG) e as Expressões Gráficas (EG), e são mostradas as potencialidades de cada uma dessas representações para a geometria. Também são abordadas, nesta parte do texto, considerações sobre os problemas em geometria por meio das diferentes representações e em quais níveis os problemas podem ser classificados, de acordo com Duval (2012b).

4.1 A resolução de problemas de geometria por meio das diferentes representações

Na presente pesquisa, considera-se os problemas de geometria como tarefas que, na maioria das vezes, se apoiam num visual geométrico, dado ou não pelo enunciado, para que seja possível encontrar sua solução. Geralmente, os problemas de geometria diferem de outros problemas de matemática, principalmente pela sua originalidade. A esse respeito, Duval (2012b) destaca a exigência, para sua solução, de uma forma de raciocínio que faz referência a uma axiomática local que é desenvolvida no registro da língua natural e que conduz à língua formal. A sua exploração heurística, origina formas de interpretações autônomas: as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial de figuras.

Dessa forma, para se resolver problemas de geometria, é necessário que haja uma tomada de consciência das três primeiras formas de apreensão da figura, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio que deve ser empregado.

Além disso, Duval (1999) afirma que o raciocínio em geometria possibilita particularidades no que diz respeito ao processo cognitivo do aluno, desenvolvendo percepções para: explorar heurísticamente uma situação dada; construir modelos para determinadas ações; articular um raciocínio que conduz à prova e à explicação.

Pensando nessas percepções que o raciocínio em geometria desenvolve, Duval (2011) separou um campo de trabalho em geometria por duas dimensões: a primeira concerne ao aspecto (forma, dimensão, grandeza, medida, cálculo) dos objetos geométricos que é privilegiado no trabalho pedido; e a segunda, a sequência temporal das tarefas com base nos instrumentos utilizados para sua resolução. Durante a sequência de tarefas

proposta aos professores colaboradores desta pesquisa, foi realizada uma variação nos tipos de registro figural em cada tarefa, sendo eles: materiais manipuláveis, *softwares* de geometria e expressões gráficas, conforme será detalhado na subseção 6.6.1.

Duval (1999, 2012b) também discriminou os problemas de geometria em níveis como:

Nível 1: aqueles problemas para os quais há congruência entre uma apreensão operatória da figura e um tratamento matemático possível. Neste nível, uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

Nível 2: aqueles problemas para os quais a apreensão discursiva é, ao contrário, necessária ou porque não há congruência ou porque ela é explicitamente solicitada como justificativa teórica.

E, com relação ao nível 3, Glaeser²⁵ (1971, p. 103-104 *apud* DUVAL 2012b, p. 136) esclarece:

Nível 3: aqueles problemas que exigem mais do que uma apreensão discursiva, sendo necessário o recurso aos esquemas formais lógicos específicos tais como a demonstração por absurdo, o dilema ou raciocínio disjuntivo, a demonstração por contraposição.

Na análise dos dados desta tese, os problemas utilizados para a sequência de tarefas foram classificados em níveis, já que se observou que estes variavam não somente conforme seu tipo, mas de acordo com o registro figural utilizado para sua resolução.

Com base na análise dos dados que será apresentada na seção 6, observa-se também a importância do tipo de registro de representação figural quando a intenção é abordar ou até mesmo resolver problemas de geometria. A seguir, serão realizadas algumas explicações a esse respeito.

4.2 A importância da escolha das representações nas tarefas de geometria

Para esta pesquisa, utiliza-se os Materiais Manipuláveis, os *Softwares* de Geometria e as Expressões Gráficas para representar figuras geometricamente. Essas três formas de “ver” as figuras são consideradas registros figurais de representação semiótica, ou seja, sistemas semióticos que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em resolução de problemas para reconhecimentos de propriedades geométricas. Para tal propósito, Duval (2011) estabelece algumas questões:

²⁵ GLAESER, G. *Mathématiques pour l'élève professeur*. Paris: Hermann, 1971.

Essa maneira de ver é a forma comum de ver as imagens e perceber os objetos reais? Ou é preciso subordiná-la a um “conhecimento conceitual” de que ela dependerá e que a guiará? Ou, ao contrário, ela depende das operações de reorganização puramente visuais das figuras que seriam próprias da maneira matemática de “ver”? (DUVAL, 2011, p. 85).

Duval explica que a terceira hipótese é equivalente a assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico. Dessa forma, enquadram-se, nesse registro, as representações que descrevem operações puramente figurais que permitem transformar qualquer figura em outra com a “finalidade de aparecer uma solução ou de produzir um contra exemplo ou ainda de modelar uma situação” (2011, p. 85). Ainda nesse mesmo raciocínio, o pesquisador explica que uma representação figural só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação figural: “Existem aquelas que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais $2D/2D^{26}$ (ou objetos $3D/3D$) em outras de mesma dimensão” (DUVAL, 2011, p. 88).

Duval (2011, p. 98) afirma que “Como exemplo de registros, consideramos a língua e as figuras geométricas euclidianas cujas formas podem ser reconhecidas ou construídas materialmente em $3D/3D$ ”. Duval (2011) acredita que a abordagem empírica no estudo de objetos num contexto de problemas pode ser identificada como uma mudança nos objetivos e na maneira de ensinar geometria. Afirma também que uma representação concreta não somente motiva o ensino, mas torna os objetos geométricos imediatamente acessíveis aos alunos.

Muitas vezes, em tarefas de geometria, é solicitado ao aluno que represente ou reproduza determinados objetos geométricos, ou o enunciado do problema é complementado por meio de uma representação figural. Tais representações poderão se referir ao mesmo objeto, porém ser diferentes por conta dos instrumentos que as reproduzem.

Tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista geométrico, as tarefas podem ser completamente diferentes conforme o tipo de instrumento utilizado na reprodução de uma figura (DUVAL, 2005). De modo geral, as operações a serem realizadas têm relações diretas com o tipo de instrumento que está sendo utilizado.

²⁶ “Toda passagem de uma dimensão a outra representa para o numerador da ‘fração’, (mD/nD) um salto cognitivo considerável, e, analogamente a passagem de uma representação física para uma representação numérica (mudança do denominador)” (DUVAL, 2011, p. 87). Ou seja, o numerador representa a dimensão real da figura e o denominador a dimensão de sua representação.

“Os instrumentos que se toma para poder reproduzir uma figura dada direcionam a maneira de olhar”²⁷ (DUVAL, 2005, p. 14) e, em consequência favorecem em maior ou menor escala o raciocínio geométrico. Isso significa que determinados problemas de geometria podem ser resolvidos mais facilmente quando o instrumento utilizado para a representação figural evidencia aspectos importantes desta figura.

Passos (2000) afirma que a visualização nas atividades de geometria pode ser considerada um dos processos referentes às diferentes maneiras de representar.

A seguir, é feita uma breve discussão, baseada em pesquisas e nas aplicações dos problemas deste trabalho, a respeito das potencialidades e limitações dos materiais manipuláveis, dos *softwares* de geometria e das expressões gráficas quando estes são utilizados como registros de representações figurais.

4.2.1 Materiais Manipuláveis (MM)

Neste trabalho, será entendido por Material Manipulável todo material útil ao ensino que pode ser manuseado, desde poliedros construídos a recortes em cartolina. Porém, são considerados registros de representação semiótica figurais os materiais manipuláveis que puderem ser utilizados com fim didático e que cumprirem duas condições básicas (DUVAL, 2011):

- possibilitar a produção de representações que permitem o acesso a objetos perceptiva ou instrumentalmente inacessíveis;
- e proporcionar uma rede de operações específicas que permita a transformação de representações produzidas em novas representações.

As experiências que podem ser realizadas com esses materiais se enquadram como uma oportunidade para a exploração de conceitos e propriedades geométricas. Porém, o uso de determinados Materiais Manipuláveis como um tipo de registro figural não pode estar centrado na ideia de que sempre resultará em sucesso no que diz respeito às apreensões e, conseqüentemente, à aprendizagem. Por isso, é importante atentar-se ao fato de que existem vários tipos de Materiais e estes devem ser adequados ao propósito a que se destinam. Por exemplo, Lorenzato (2006) explica que alguns MM não possibilitam modificações em suas formas, como é o caso dos sólidos geométricos, construídos em

²⁷ “Les instruments que l’on prend pour pouvoir reproduire une figure donnée commandent la manière de la regarder”. Tradução do original feita pela autora desta tese.

madeira ou cartolina, enquanto outros permitem transformações por continuidade por serem dinâmicos, facilitando ao aluno a realização de redescobertas, percepção de propriedades e construção de conhecimento. Nesses casos, o professor deve avaliar em que circunstância ou momento deve utilizar ou não cada material.

Além disso, as tarefas com ações centradas nos MM também devem solicitar a mobilização do registro discursivo para que ocorra uma gestão da atividade intencional, bem como a tomada de consciência do conceito em questão (DUVAL, 2011). Com relação a Lorenzato (2006), este explica que, ao se utilizar qualquer tipo de material, é primordial a atividade mental por parte do aluno, enquanto o professor deve planejar cuidadosamente a passagem do concreto ao abstrato, formalizando o conteúdo.

Com os Materiais Manipuláveis, é possível representar objetos geométricos 3D, preservando sua dimensão de modo a identificar seus elementos figurais e manipular os objetos para visualizá-los em diferentes perspectivas.

As operações figurais que podem ser realizadas com esses materiais são advindas de recortes, colagens, translações, rotações, comparações, entre outros, auxiliam no raciocínio para a resolução matemática de um problema geométrico. Ou seja, o uso de MM motiva os participantes a pensar, elaborando suas próprias estratégias e ações.

Para Lorenzato (2006) os Materiais Manipuláveis favorecem a realização de descobertas e permitem um trabalho menos formal. Eles também possibilitam que os participantes identifiquem os conceitos elementares da matemática e construam várias representações mentais, baseadas nas representações semióticas aparentes, favorecendo a aprendizagem e o reconhecimento dos elementos geométricos.

Não se constrói um conhecimento simplesmente tocando, observando ou manipulando objetos. A ação do sujeito e, posteriormente, a abstração sobre o que foi vivenciado, são fundamentais para a construção do conhecimento e um bom aproveitamento do material. “Na disciplina de Matemática, [...], o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 23).

Também é possível verificar, mostrar ou chegar a resultados matemáticos por meio dos MM. Porém, estes não substituem as provas matemáticas, servindo somente para ilustrar certos raciocínios e auxiliar na busca de soluções.

Com relação à desconstrução dimensional de uma figura, ao se utilizar os Materiais Manipuláveis, podem surgir equívocos e/ou limitações na identificação da

dimensão de suas unidades figurais. Por exemplo, tentar desconstruir um quadrado (2D/3D), transformando-o em quatro segmentos de reta (1D/3D). Ou seja, quando se trata de objetos 0D, 1D ou 2D, suas representações em 3D comprometem sua compreensão, já que a dimensão da representação não é a mesma do objeto a ser representado.

Outro fator interessante é a manifestação do empirismo que o material pode despertar no sujeito. A manipulação de objetos materiais provoca no indivíduo a curiosidade de ações como “tentativa e erro” para comprovar ou não afirmações matemáticas. E, muitas vezes, faz com que o indivíduo recorra a aspectos métricos sem pensar na possibilidade de erros e falácias que os Materiais Manipuláveis podem sugerir. Duval (2011, p. 92) explica que, “Para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos”. Tahan (1962) já ressaltava que não basta que o sujeito tenha experiências com os Materiais Manipuláveis: ele precisa raciocinar durante o uso desses.

Porém, Passos (2006, p. 77) observa que,

Embora tenha ocorrido, por parte de muitos professores, uma compreensão restrita desse método, por entenderem que a simples manipulação de objetos levaria à compreensão, estudos mostraram a existência de estreita relação entre a experimentação e a reflexão.

Assim, a interação “sujeito – objeto” deve ser mediada pelo professor de modo a indicar ao aluno o caminho a ser percorrido sem, porém, percorrer esse caminho no lugar do aluno.

4.2.2 Softwares de Geometria (SG)

Duval (2011) acredita que a construção de figuras também pode ser feita utilizando-se *softwares*, pois estes conferem às figuras a confiabilidade e a objetividade que possibilitam efetuar verificações, observações. O *software* também possibilita a visualização das representações dos objetos a serem trabalhados.

Do mesmo modo, Borba e Penteado (2001) afirmam que os *Softwares* de Geometria proporcionam, dentre outras coisas, a geração de conjecturas orais e escritas com ênfase na experimentação. O uso de *softwares* também possibilita uma mobilidade, pelo sujeito, de operações com os objetos geométricos. Por exemplo, o “arrastar” de um vértice, a construção de polígonos e poliedros, a visualização de um objeto por várias perspectivas, além de medidas de comprimento e cálculos de área, dentre outras interações.

O fato de *softwares* permitirem o “arrastar” de figuras ou de suas partes sem perda de vínculos e a utilização de um recurso que Gravina (1996) denominou de “régua e compasso eletrônicos” que preserva as relações geométricas, é o que diferencia o desenhar ou construir figuras de outros registros. Além disso, os *softwares* possibilitam manipular e conjecturar em matemática.

Essas funções citadas podem ser reconhecidas como funções de tratamento, e Duval (2011) afirma serem “instantâneas” e “ilimitadas”, quando efetuadas em um *software*, possibilitando uma ideia de simulação que permite a exploração heurística de problemas matemáticos.

Nesse sentido, Duval (2011) expõe sua concepção a respeito do uso dos *softwares* computacionais nas aulas de matemática, chegando a afirmar que o monitor e o teclado vieram para substituir o papel, a caneta e o quadro negro. Baseado nesse raciocínio, o pesquisador explana as contribuições do computador para o desenvolvimento da atividade cognitiva no sujeito em formação:

Os computadores não constituem um novo registro de representação. E isso por uma razão simples: *as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual.* [...] No entanto, *eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos.* Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 137).

É possível observar que os SG e as EG desempenham basicamente as mesmas funções e compõem um mesmo registro, porém com potências de tratamentos diferentes. A possibilidade ou não de se realizar tratamentos nessas representações tem consequências diretas no que diz respeito às apreensões das figuras ao resolver problemas de geometria. É nesse aspecto que está fundamentada a diferença entre a resolução de problemas por meio das EG ou por meio dos SG.

O uso do computador também requer do sujeito a elaboração e execução de tarefas cognitivas por meio da interação com seu *menu* de comandos.

No Quadro 5, Duval (2011, p. 138) explicita uma breve análise das tarefas cognitivas requeridas do sujeito durante a utilização de um *software* matemático:

Quadro 5: Análise das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador.

Menu de comando	Ação	Atividade cognitiva mobilizada
Lugar vazio para uma equação.	Escolher um termo para uma instrução ou compor uma sequência de várias instruções.	Conhecimento dos termos matemáticos e decomposição da figura esperada em função da escolha dos termos do menu.
Uma lista de termos designando os objetos matemáticos e as operações matemáticas ou não.	Escrever uma equação.	Conversão automática de uma equação também já dada, ou coordenação preliminar para escolher o tipo de equação a fim de obter o tipo de curva ou a superfície esperada.
Uma tabela de ícones.	Apoiar sobre um ícone.	Reconhecimento do ícone que codifica a instrução correspondente ao pedido.
O <i>mouse</i> ou o <i>tablete</i> .	Deslocar manualmente o <i>mouse</i> .	Coordenação do gesto e da visão para manipular a figura obtida.

Fonte: Autora, baseado em Duval (2011, p. 138).

É possível observar que as ações do sujeito estão interligadas entre o problema a ser resolvido, os comandos disponíveis pelo *software* e a atividade cognitiva necessária para a resolução do problema. Desse ponto de vista, a tarefa a ser executada nesse ambiente pode ser mais complexa pelo maior número de variáveis envolvidas no processo de resolução.

Neste trabalho foram utilizados o *software* GeoGebra e o *software* Cabri Géomètre 3D.

O GeoGebra é um *software* gratuito, que abrange conceitos de geometria, álgebra, cálculo e estatística. Ele foi desenvolvido inicialmente pelo austríaco Markus Hohenwarter, e colocado na rede internacional de computadores no ano de 2002. Com esse *software*, é possível construir os elementos básicos de geometria, além de figuras, gráficos de funções; fazer cálculo de áreas, de seções cônicas que podem ser modificadas dinamicamente, dentre outras funções, todas envolvendo estatística, cálculo, geometria e álgebra.

O *software* GeoGebra possibilita a visualização de várias janelas simultâneas, de acordo com a necessidade, de modo a viabilizar o andamento do trabalho desejado. É possível ter à disposição janelas de álgebra, de geometria, de ferramentas e de comandos

ao mesmo tempo.

O Cabri Géomètre 3D, outro *software* utilizado nesta pesquisa para representação de figuras geométricas é uma ferramenta que auxilia no ensino da geometria, e foi desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no *Institut D'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble*, na França.

Esse *software* permite ao usuário a construção de figuras de geometria em 0D, 1D, 2D e 3D, e possibilita a movimentação dos objetos geométricos de modo a conservar as propriedades atribuídas inicialmente.

Assim, por meio dessas ferramentas, foi possível investigar como são manifestadas as apreensões em geometria e as potencialidades heurísticas das figuras, pois a utilização dos *Softwares* de Geometria possibilita a representação de objetos 0D, 1D, 2D e 3D, preservando suas dimensões. Também permite observar cada objeto geométrico com a dinamicidade e o ponto de vista necessário para a resolução de um problema, por exemplo. Duval (2015, p. 7) explica que:

Os programas computacionais atuais oportunizam, não só construir as figuras, mas explorar transformações de figuras por um simples deslocamento de um “objeto”: um ponto, um segmento, etc.

Outra vantagem é a realização de construções e operações e a facilidade em apagá-las ou salvá-las, quantas vezes for necessário, até a chegada de conclusões novas e da solução do problema: “Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que suas construções são dinâmicas [...]. Isso permite que o sujeito faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas” (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010, p. 11).

Os *Softwares* de Geometria também permitem a construção de figuras geométricas planas e espaciais; a identificação de elementos figurais, como pontos médios; a construção precisa de planos e retas paralelas e perpendiculares com comandos básicos; o cálculo exato de comprimentos e áreas de figuras geométricas planas; além da visualização exterior e interior de objetos tridimensionais por várias perspectivas.

No entanto, o fato de os *softwares* serem dinâmicos e permitirem a movimentação de unidades figurais pode induzir o sujeito a generalizar conclusões e resultados que são verdadeiros somente para casos particulares, por exemplo.

Outro ponto que deve ser discutido é a facilidade com que os SG permitem apelar a aspectos métricos, enquanto estão sendo solicitadas provas matemáticas. Tal ponto não é

de todo negativo, visto que os aspectos métricos oferecidos pelos SG são exatos e, desse modo, podem contribuir para a busca de uma solução que não poderia ser encontrada sem acesso a esse tipo de informação.

Por fim, Borba (1999) afirma que o uso de tecnologias em geral pode deixar os alunos suscetíveis a novas descobertas que proporcionam mudanças e progressos no conhecimento.

4.2.3 Expressões Gráficas (EG)

É primordial destacar também que, com base no conceito de registro figural de Raymond Duval, admite-se nesta pesquisa as figuras realizadas por meio da Expressão Gráfica como um registro figural com a finalidade de simbolizar, perceptivelmente, informações e também dados numéricos que poderiam ser difíceis de serem aprendidos diretamente (MACHADO, 1999).

Entende-se por Expressões Gráficas as figuras construídas manualmente com o uso de materiais para desenhos e para figuras em geral, materiais como régua, transferidor, esquadro, compasso, lápis, etc. As figuras assim construídas formam imagens passíveis de comunicar uma ideia, um conceito ou um pensamento.

A Expressão Gráfica é um dos recursos mais comuns utilizados nas aulas de construções geométricas da Educação Básica e também do Nível Superior. Além disso, seus materiais são de fácil acesso para o estudante que a utiliza.

Considere-se a representação da Figura 17, a seguir:

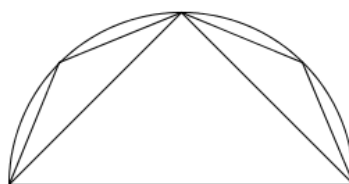


Figura 17: A aproximação de uma curva por uma sequência de segmentos de reta.

Fonte: Autora, baseado em Duval (2011, p. 107).

Nessa figura, é possível sempre marcar pontos intermediários entre os já marcados, de modo a obter, cada vez mais, segmentos menores. Ao se repetir por várias vezes esse processo, a cadeia de segmentos se aproxima visualmente da curva desenhada. Duval (2011) explica que, nesse momento de aproximações sucessivas, ocorre um salto do

visual discreto para o visual contínuo, e este passa pelo enigma da relação impossível que é o desafio de aproximar uma curva por uma sequência de segmentos de reta. Nesse momento, a Expressão Gráfica torna-se um sistema semiótico produtor, ou criador, de novas representações em que as unidades figurais (os segmentos de reta) são matematicamente pertinentes.

Com relação à diferença entre desenho e figura, Duval (2011, p. 91) explica que

O “desenho” é a configuração particular que mostra no papel, no quadro negro ou no monitor do computador, enquanto a “figura” seria as propriedades do objeto representado pelo desenho ou, ainda, a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto.

A construção de figuras com materiais de desenho exige do sujeito precisão e conhecimento de conceitos, propriedades e teoremas de geometria para chegar ao objetivo proposto.

As Expressões Gráficas representam um tipo de registro figural convencional, consistindo em um dos registros mais utilizados nas aulas de geometria, por sua facilidade de acesso e forte presença nos livros didáticos de matemática.

Para fazer uma representação na forma de expressão gráfica, o aluno poderá dispor de folhas de papel, lápis, borracha, régua graduada ou não, compasso, esquadro – ou seja, instrumentos comuns para desenho -, e dos conhecimentos específicos para a ação.

Com base nas aplicações da sequência de tarefas deste trabalho, foi possível observar que os professores possuem maior intimidade com o uso desses instrumentos durante a resolução dos problemas de geometria, arriscando possíveis soluções por meio de esboços de desenhos.

Ao se usar as EG para o registro de figuras, há uma recorrência maior aos aspectos algébricos para a resolução dos problemas, diferente do uso dos materiais manipuláveis e dos *softwares*. Ou seja, há uma tendência a se recorrer ao uso da álgebra para o cálculo de possíveis proporções e relações que permitem traduzir e solucionar os problemas propostos. Às vezes, há um apelo aos aspectos métricos, mas não tanto quanto aos algébricos.

Em representações de figuras tridimensionais, observa-se que a compreensão destas fica comprometida, pois, apesar de todas as contribuições da perspectiva, a expressão gráfica não retrata as reais dimensões e posições dos lados e faces dos objetos. Flores (2007, p. 21) comenta que, no caso de desenhos de figuras tridimensionais em

planos, “Não importa o modo que o desenhamos, haverá, certamente, uma vista privilegiada, as outras estarão ocultas”. Tal fato interfere na compreensão da figura, pois dificulta sua visualização.

Passos (2000) ressalta que, para desenhar um objeto geométrico, o indivíduo precisar ser capaz de imaginar o resultado final, antecipar mentalmente e inferir corretamente a forma plana (bidimensional) e as transformações necessárias para apresentá-la na forma espacial (tridimensional), por exemplo.

Dessa forma, é necessário, além de tudo, que o indivíduo mobilize conhecimentos específicos sobre o objeto a ser representado ou também reconheça suas propriedades e principais características ao visualizá-lo na forma de expressão gráfica.

5 Materiais e Métodos

Na presente seção, são descritos os procedimentos metodológicos do trabalho de campo: apresenta-se o percurso da pesquisa, como se deu a coleta dos dados e os sujeitos colaboradores. Também é descrita a aplicação da sequência de tarefas, sua elaboração e organização, a caracterização e os instrumentos de pesquisa utilizados, a metodologia empregada e os pressupostos para as análises dos dados.

5.1 Metodologia da pesquisa

Procurando investigar como se dá a influência do MM, do SG e da EG nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas, foi realizada uma pesquisa qualitativa, de caráter interpretativo, na modalidade de estudo de casos múltiplos, que contou com o auxílio de 15 professores de matemática da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino de Maringá e região.

Esta pesquisa qualitativa é inspirada na perspectiva interpretativa, em que a investigação reconstrói uma experiência, utilizando métodos diretos ou que se aproximam dessa experiência (PONTE, 2006). Bogdan e Biklen²⁸ (1994, *apud* PONTE, 2006) insistem que deve haver uma preocupação por parte dos investigadores em compreender efetivamente o pensamento subjetivo dos participantes (*insider*) nos seus estudos, sem, contudo, utilizar o seu próprio ponto de vista (*outsider*).

Conforme Yin (2010), o estudo de caso contribui para pesquisas baseadas em fenômenos individuais, grupais, organizacionais, sociais, políticos e relacionados, respondendo a questões do tipo “como” e “por que” esclarecem a natureza do estudo. Ponte (2006, p. 107) afirma que, “Na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores”. É importante esclarecer que, com os experimentos de estudos de caso, é possível fazer generalizações às proposições teóricas e não às populações ou universos (YIN, 2010).

²⁸ BOGDAN, R., & BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.

O presente trabalho caracteriza-se como um estudo de casos múltiplos. Yin (2010) explica que esse tipo de estudo pode cobrir diferentes casos e, então, tirar um único conjunto de conclusões. Dessa forma, a análise em um estudo de casos múltiplos é feita de modo a sondar se os grupos de casos diferentes compartilham algumas similaridades que merecem ser consideradas instâncias do mesmo tipo do caso geral.

A escolha pela investigação sobre as representações figurais deu-se a partir da seguinte afirmação de Duval (1999, p. 148):

Até o momento, poucos estudos têm sido dedicados a uma análise detalhada desses diferentes tratamentos; e muito menos à sua importância. Isto ocorre especialmente em relação ao registro das Figuras²⁹.

Duval (2015) também afirma que o primeiro passo na aprendizagem da geometria é aprender a ver contra o reconhecimento perceptivo das formas, e nesse reconhecimento, o autor explica que está incluso a desconstrução dimensional das formas 2D que permanece totalmente ignorada no ensino e pelas teorias didáticas dominantes.

Os tratamentos e operações às quais o pesquisador se refere são os provenientes de registros figurais e registros discursivos em contextos de problemas de geometria. Nesse sentido, pensou-se na possibilidade de se explorar os registros figurais por diferentes meios, enfatizando os tratamentos e as apreensões que esses registros suscitam.

5.2 O percurso da pesquisa

Buscando investigar as apreensões em diferentes registros figurais, considerou-se pertinente a realização de um Curso de Extensão, oferecido pelo Centro de Ciências Exatas/Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá com o Núcleo Regional de Ensino de Maringá, intitulado “As Geometrias por meio de Diferentes Representações”, para 30 professores da rede pública de ensino. Tal curso foi ministrado e organizado pela autora e pelo orientador deste trabalho durante o período de 14 de março a 13 de agosto de 2013, totalizando 40 h e os conteúdos abordados estão especificados no Apêndice B.

²⁹ “Hasta la fecha, muy pocos trabajos se han dedicado a un análisis detallado de estos diferentes tratamientos; menos aún a la importancia que tienen. Esto se cumple de manera particular en lo relativo al registro de las figuras”.

A necessidade da execução do curso antes das aplicações individuais com os professores procede da importância do conhecimento dos registros figurais na forma de MM, SG e EG. A intenção foi dar oportunidade aos professores para que pudessem, além de conhecer, trabalhar com esses registros, pois, durante todo o desenvolvimento do curso, foram propostas tarefas em sala de tal forma que os professores utilizassem tais registros para realizá-las.

Os temas trabalhados foram divididos em quatro blocos:

Bloco 1 – 12 h

- estudo dos polígonos por meio de Expressões Gráficas;
- estudo dos polígonos por meio de Materiais Manipuláveis;
- estudo dos polígonos com o uso do GeoGebra.

Bloco 2 – 12 h

- estudo dos círculos e suas partes por meio de Expressões Gráficas;
- estudo dos círculos e suas partes por meio de Materiais Manipuláveis;
- estudo dos círculos e suas partes com o uso do GeoGebra.

Bloco 3 – 8 h

- construindo fractais e estudando topologia por meio de Expressões Gráficas;
- construindo fractais e estudando topologia por meio de Materiais Manipuláveis;
- construindo fractais no *software* GeoGebra.

Bloco 4 – 8 h

- Aplicando em sala de aula: nesse bloco, os professores participantes apresentaram aplicações de algumas das tarefas feitas durante o curso, realizadas por eles em sala de aula com seus alunos.

No período de novembro de 2013 a março de 2014, ocorreram as aplicações da sequência de tarefas com alguns dos professores participantes do Curso de Extensão, o que possibilitou a coleta dos dados para a pesquisa.

5.3 A coleta dos dados

Os dados foram coletados por meio da aplicação de uma sequência de tarefas, de tal forma que os raciocínios matemáticos foram expostos como registros discursivos e não discursivos e explicações por extenso em uma folha de registro. Também foram feitas gravações de áudio das falas durante a aplicação e suas transcrições para a análise.

Em conformidade com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos - COPEP³⁰ -, da Universidade Estadual de Maringá, duas cópias do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A), com explicações éticas e sobre a pesquisa, incluindo a necessidade das gravações de áudio, foram entregues aos professores colaboradores, solicitando suas assinaturas.

5.4 Os sujeitos colaboradores da pesquisa

Para se cumprir com êxito a investigação exposta no objetivo geral da pesquisa, contou-se, como sujeitos colaboradores, com 15 professores de matemática da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino de Maringá e região.

Quadro 6: Instituições dos professores colaboradores com a pesquisa.

INSTITUIÇÕES	CIDADE	NÍVEL
Escola Estadual Osvaldo Aranha	Lobato	Ensino Fundamental
Escola Estadual Princesa Izabel	Paíçandu	Ensino Fundamental
Escola Estadual Ipiranga	Maringá	Ensino Fundamental
Escola Estadual Prof. Francisco José Periotto	Mandaguaçu	Ensino Fundamental
Colégio Estadual Adaile Maria Leite	Maringá	Ensino Fundamental e Médio
Colégio Estadual João XXIII	Maringá	Ensino Fundamental e Médio

³⁰ O COPEP compõe o comitê de ética da Universidade Estadual de Maringá, que se responsabiliza por apreciar os protocolos de pesquisas em que há envolvimento de seres humanos e que são desenvolvidos na instituição. A função do comitê é salvaguardar a dignidade, os direitos, a segurança e o bem-estar dos sujeitos da pesquisa. Ver www.ppg.uem.br. O parecer favorável à pesquisa foi recebido pelo COPEP em 07/03/2014, sob CAAE N° 23293114.0.0000.0104.

Colégio Estadual Santa Maria Goretti	Maringá	Ensino Fundamental e Médio
Colégio de Aplicação Pedagógica	Maringá	Ensino Fundamental e Médio
Colégio Estadual Helena Kolody	Sarandi	Ensino Fundamental e Médio
Colégio Estadual Prof. Benoil F. M. Boska	Ourizona	Ensino Fundamental e Médio
Colégio Estadual Vera Cruz	Mandaguari	Ensino Fundamental e Médio
Colégio Est. Márcia Vaz Tostes de Abreu	São Jorge do Ivaí	Ensino Fundamental e Médio

Fonte: Autora.

No quadro, constam somente 12 instituições, pois em algumas escolas há mais de um professor.

A seleção dos professores colaboradores na pesquisa contou com dois pré-requisitos:

- a participação no Curso de Extensão mencionado anteriormente: tal exigência se deve à necessidade de os professores terem um conhecimento base das representações figurais nas quais a pesquisa se apoia para cumprir com êxito o objetivo proposto;
- a voluntariedade: todos os professores participantes do Curso de Extensão foram convidados, porém somente aqueles que se dispuseram a participar da pesquisa foram entrevistados, totalizando 15 professores colaboradores.

5.5 A aplicação da sequência de tarefas

Em primeiro lugar, é preciso esclarecer o motivo da escolha pela expressão “sequência de tarefas”. De acordo com Swan (2014), “tarefa”, em um contexto de sala de aula, é definida como qualquer coisa que é pedida pelo professor para que os alunos realizem, e é considerada mais do que um problema, pois pode mudar à medida que os alunos a interpretam. Já a “atividade” é tida como a resposta do aluno: a atividade (ação) do aluno em resposta à tarefa. Então, no caso do presente trabalho, será usada a expressão “sequência de tarefas” ao invés de “sequência de atividades”.

A sequência de tarefas foi aplicada individualmente após três meses do término do Curso de Extensão oferecido, se iniciando em novembro de 2013 e encerrando-se em

março de 2014. Cada aplicação foi feita com gravação de áudio mediante a prévia autorização do professor (ao assinar o termo de consentimento). As 15 gravações foram transcritas na íntegra com o intuito de analisar o raciocínio empregado por cada professor colaborador durante a resolução de cada problema proposto.

Inicialmente, almejava-se coletar os dados referentes às apreensões durante o Curso de Extensão com todos os professores participantes. Todavia, durante a realização do curso, notou-se que observações mais pontuais deveriam ser realizadas e questionadas no que se refere ao raciocínio do professor diante do tratamento em registros figurais. Sendo assim, optou-se por aplicar uma sequência de tarefas individuais aos sujeitos, com a presunção de que, mesmo diante da dificuldade para resolver algum problema, a pesquisadora pudesse questioná-los, tentando compreender seu raciocínio, em busca de mais informações sobre as apreensões.

As aplicações da sequência de tarefas foram individuais, nas quais a pesquisadora tentou, assim como sugerem Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004), ser capaz de estabelecer uma relação de confiança com os sujeitos, ser uma boa ouvinte, formular perguntas, ter familiaridade com as questões investigadas e ter flexibilidade para se adaptar a situações inesperadas.

Para as respostas de cada problema, foram solicitadas justificativas oralmente e por extenso (língua natural e formal), pois Duval (2011, p. 99) afirma que “Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros”, e “em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização”. Essa estrutura na condução das aplicações da sequência, com a teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 1999), que permite investigar e analisar as respostas dos sujeitos, possibilitou responder ao problema central da presente pesquisa, recordando: *como o tipo de registro figural (MM, SG, EG) influencia nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas de figuras geométricas de professores de matemática da Educação Básica?*

5.5.1 Elaboração e organização da sequência de tarefas

Para a composição da sequência de tarefas, foram considerados os pressupostos de Duval (1999, 2011), bem como a exploração dos registros figurais no que concerne à

“maneira matemática” de se compreender as figuras nas situações que foram propostas: Materiais Manipuláveis, *Softwares* de Geometria e Expressão Gráfica.

A sequência de problemas foi construída sem interesse em sua ordem de apresentação, pois não visava à aquisição ou descoberta de propriedades matemáticas, já que a aplicação foi feita com professores de matemática. O objetivo da sequência foi explorar essas propriedades por meio dos registros figurais numa progressão de manipulações práticas ou concretas até seus registros discursivos e uma comunicação em geral. Duval (2011, p. 140) afirma que “a questão chave da interpretação é então aquela das transferências internas de um modo a outro e de um registro a outro”.

Sendo assim, após um estudo dos aspectos envolvidos na investigação das apreensões em geometria, bem como a conversão dos registros (figural ↔ discursivo), o tratamento e a exploração heurística de figuras, e também após uma pesquisa de tarefas/problemas que possibilitassem essas investigações, uma sequência de tarefas foi estabelecida.

A sequência de tarefas foi composta por cinco problemas, todos envolvendo conceitos de geometria e possíveis de serem resolvidos utilizando-se tanto os Materiais Manipuláveis quanto os *Softwares* de Geometria e as Expressões Gráficas. Esses foram previamente selecionados e disponibilizados, no momento da aplicação, pela pesquisadora aos professores colaboradores para resolução.

A ideia inicial foi disponibilizar todos os registros figurais – na forma de Materiais Manipuláveis, *Softwares* e Expressões Gráficas – em todas as tarefas, porém com uma ordem pré-estabelecida em cada tarefa. Ou seja, o professor colaborador tentaria resolver a tarefa por meio do primeiro registro; caso não conseguisse, iria para o segundo registro (já pré-estabelecido pela pesquisadora), e, caso também não resolvesse o problema, utilizaria o terceiro e último registro.

Porém, durante a primeira aplicação da sequência de tarefas, foram observadas duas situações importantes no que diz respeito à apresentação dos registros:

- 1) a necessidade de disponibilizar, em ordem, ao professor colaborador, todos os registros, mesmo que o problema tivesse sido resolvido (corretamente ou não) com o primeiro registro apresentado. Dessa forma, foi possível investigar se os registros apresentados posteriormente influenciavam na solução do problema, bem como se surgiriam novas ideias durante a resolução;

2) a importância de variar a ordem do tipo de registro figural durante as aplicações. Antes de se iniciar a aplicação da sequência de tarefas, foi pensada uma ordem para a disponibilidade dos registros aos professores. Sendo assim, o total de 15 professores colaboradores foi dividido em três grupos de cinco professores cada, e, nas aplicações com cada grupo, cada tarefa foi apresentada seguindo uma ordem diferente no tipo de registro figural. A necessidade dessa variação surgiu ao se pensar na possibilidade de que a ordem do tipo de registro poderia influenciar na resolução do problema; ou que os registros utilizados anteriormente para resolver a mesma tarefa poderiam auxiliar no raciocínio para se chegar à solução almejada com o próximo registro. Sendo assim, a ordem estabelecida para cada grupo foi a seguinte:

Quadro 7: Ordem dos registros figurais de cada grupo.

	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
<u>Tarefa 1</u>	SG → EG → MM	MM → SG → EG	EG → MM → SG
<u>Tarefa 2</u>	EG → SG → MM	MM → EG → SG	SG → MM → EG
<u>Tarefa 3</u>	MM → SG → EG	EG → MM → SG	SG → EG → MM
<u>Tarefa 4</u>	SG → MM → EG	EG → SG → MM	MM → EG → SG
<u>Tarefa 5</u>	MM → EG → SG	SG → MM → EG	EG → SG → MM

Fonte: Autora.

A ordem no tipo de registro figural do grupo 1 foi aleatória e, conforme é possível observar no Quadro 7, foi rotacionada para os grupos 2 e 3.

A pesquisa foi caracterizada como estudo de caso múltiplo, pelo fato de se estudar os três grupos e fazer análise separadamente.

5.6 Instrumentos da pesquisa

Dos cinco problemas aplicados, três foram retirados de trabalhos de Duval (1999, 2005, 2012b); um, da pesquisa de Mello (1999); e o outro foi elaborado pela pesquisadora, com base em Moretti (2002). Todos abarcando assuntos de Ensino Fundamental e Médio, envolviam conceitos presentes nos documentos oficiais e livros didáticos de matemática do Estado do Paraná desses níveis de ensino. Cada tarefa é apresentada e discutida na Seção 6.

A sequência de tarefas contou com gravação de áudio e registro da resolução de cada problema ou tarefa solicitada ao professor colaborador em uma folha entregue pela pesquisadora. Até mesmo os problemas nos quais os professores não chegaram à solução, houve o pedido da explicação escrita ou por extenso sobre o máximo de conclusões retiradas a respeito do problema com base nos tipos de registros figurais oferecidos para a resolução. Essa estruturação dos dados, além de permitir analisar os registros mobilizados pelos professores para a resolução dos problemas, possibilitou observar os tratamentos efetivados e a interpretação figural realizada pelo professor com base em cada tipo de registro oferecido (MM, SG, EG).

Desse modo, a sequência de tarefas teve como objetivo observar se há alguma relação entre as apreensões perceptivas, operatórias e discursivas com o tipo de registro figural, seja ele material ou na forma de *softwares* de geometria ou desenhos feitos à mão.

5.7 Os pressupostos estabelecidos para as análises

As resoluções individuais dos professores colaboradores foram analisadas com base em seus raciocínios matemáticos, expostos na forma de registros discursivos e não discursivos, e também em suas falas e escritas durante a aplicação, considerando-se os sucessos, hesitações e fracassos com atenção especial aos indícios de apreensões maiores, menores, ou nenhuma, que o registro figural utilizado pôde suscitar. Foram usadas a produção oral e a escrita para a análise porque Duval (2011, p. 105) afirma que “a produção oral e escrita não têm os mesmos papéis na tomada de consciência, [...] das unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma representação”. Ou seja, pode parecer simples falar sobre determinado assunto oralmente, mas, diante da necessidade de escrever tal raciocínio, surgem questões manifestadas pela tomada de consciência e organização da escrita.

Para executar o método de análise sugerido por Duval (2011), é indispensável a visão dos pares de registros que a atividade matemática pode mobilizar - no caso, o registro figural e o registro discursivo. Duval (2011) explica que as transformações efetuadas num quadro de resolução de problemas podem recorrer a vários registros e permitem fazer uma análise completa da produção feita pelo sujeito, considerando-se as produções implícitas ou laterais nas quais as produções matemáticas explícitas se apoiam.

O fato de pesquisas didáticas privilegiarem quase sempre a observação do trabalho dos sujeitos fez Duval (2011) levantar um problema complexo na análise das produções, que é o fato de ora serem consideradas produções matemáticas e ora não.

Pensando nisso, o autor estabelece uma tripla análise das produções dos alunos, que será estendida às produções dos professores colaboradores deste trabalho:

- a) uma análise matemática, referente à validade do encaminhamento e do sucesso;
- b) uma análise da compreensão, ou seja, do alcance em termos de autonomia e progressão;
- c) uma análise das razões, seja de sucesso ou aquisição, seja de fracassos ou bloqueios, isto é, os fatores que foram ou não considerados na sequência de tarefas proposta.

Dentro dessa tripla análise, foram observadas minuciosamente as seguintes especificidades, com o objetivo de analisar os dados desta pesquisa:

- ✓ se o problema foi ou não resolvido;
- ✓ se houve mobilização de registros durante a resolução do problema;
- ✓ a maneira de compreender a figura em cada registro figural, bem como o reconhecimento de seus elementos figurais;
- ✓ se os registros figurais desconstroem ou reforçam conceitos;
- ✓ se os registros figurais desestabilizam ou corroboram o conceito envolvido;
- ✓ o caminho percorrido para a resolução do problema, ou seja, se houve o uso de tratamento figural heurístico e/ou conversão de registros;
- ✓ se o tipo de registro figural possibilitou congruência entre as hipóteses dadas no enunciado e os tratamentos;
- ✓ se o tipo de registro figural possibilitou congruência entre os tratamentos e o raciocínio dedutivo.

Com base nesses pressupostos estabelecidos e no método de análise sugerido por Duval (2011), buscou-se investigar a influência do tipo de registro figural nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas.

6 Apresentação das tarefas e análise dos resultados

Esta seção consiste na apresentação da sequência de tarefas e análise das aplicações que foram realizadas com professores de matemática da Educação Básica, colaboradores desta pesquisa. Conforme apresentado na seção 5, o instrumento de pesquisa contou com uma sequência de cinco tarefas de geometria, que foram aplicadas a todos os sujeitos da pesquisa. As questões propostas tratavam de conceitos básicos de geometria sobre: congruência de triângulos, áreas, ponto médio de um segmento, conceitos de paralelogramo, noções espaciais e planas. As tarefas são apresentadas nesta seção, seguidas de seus respectivos objetivos e análises.

Para a análise de cada tarefa, foram considerados as falas, as escritas, e os registros discursivos e não discursivos dos professores entrevistados durante o contato com os materiais, no intuito de elaborar uma **análise da compreensão**, uma **análise das razões** e uma **análise matemática**, ou seja, conforme a tripla análise sugerida por Duval (2011).

No decorrer das análises, fragmentos das entrevistas e das respostas escritas dos professores são destacados para justificar as conclusões realizadas. As informações analisadas estão subdivididas em unidades de análise com a seguinte prescrição: A1, A2, A3, A4, A5 e A6. E os professores colaboradores, indicados por P1, P2, P3, e assim por diante, até P15. Usa-se fonte em itálico sem aspas para as falas e fonte comum com aspas para a escrita dos professores entrevistados.

O objetivo da sequência de tarefas foi identificar como o tipo de registro figural (MM, SG e EG) influencia nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas de figuras geométricas de professores de matemática da Educação Básica.

Para tanto, a ordem de apresentação do tipo de registro figural foi variada durante a aplicação, conforme indicado na subseção 5.5.1. Desse modo, a análise das tarefas é apresentada separadamente. Para cada tarefa, tem-se a A1 do grupo 1, grupo 2, grupo 3 e considerações; A2 do grupo 1, grupo 2, grupo 3 e considerações, e assim por diante, até a A6 do grupo 1, grupo 2, grupo 3 e considerações. Cada grupo é composto por cinco professores.

A pesquisadora iniciou a aplicação, entregando o primeiro problema com o enunciado digitado em uma folha com espaço para a resolução pelo professor colaborador (Apêndice C), acompanhada do primeiro tipo de registro figural. Independente de o

professor ter resolvido o problema, foi entregue o segundo registro figural e, posteriormente, o terceiro. Cada tarefa teve sua folha específica, na qual o professor resolveu e fez seus rascunhos. A interpretação do enunciado pelo professor colaborador fez parte da análise dos dados da tarefa.

O objetivo principal das tarefas propostas foi, por meio da variação do tipo de registro figural, discutir os seguintes aspectos distribuídos nas seguintes unidades de análise:

- **Análise da compreensão:** alcance em termos de autonomia e progressão. Para esta análise, foram utilizados os registros discursivos e os tratamentos feitos pelos professores colaboradores com cada um dos registros figurais.

A1: O uso de tratamento figural para resolver o problema

Caso tenha havido, identificar se ocorreram variações cognitivas (interação de tratamento figural com tratamento discursivo).

Foi analisado se, durante o contato com os diferentes tipos de registros figurais, houve a possibilidade de tratamentos figurais e também a simultaneidade com o tratamento discursivo. Duval (1999) explica que os tratamentos parecem vir de leis de organização figural de percepção visual e, como consequência do entendimento, ocorre um discurso teórico, usado para se comunicar - no caso, as variações cognitivas.

A2: A mobilização de um segundo registro para resolver o problema

Caso tenha havido, identificar se ocorreu discriminação das unidades significantes dos registros de partida no registro de chegada.

Com relação à mobilização de um segundo registro na tentativa de solucionar o problema proposto, Duval (2011) explica que, durante uma compreensão matemática, o sujeito mobiliza sempre, pelo menos, dois registros de representação semiótica. Ao analisar, neste trabalho, a mobilização de outros registros, buscou-se identificar a possível compreensão do problema, bem como de sua solução.

- **Análise das razões:** fatores como sucesso, aquisição, fracassos, bloqueios, que foram ou não considerados na resolução da tarefa proposta. Para esta análise, foram utilizados as falas, as escritas, os registros discursivos e os tratamentos realizados nos materiais (não discursivos), bem como o uso do MM (recortes e desenhos), as resoluções

ou tentativas de resoluções feitas no SG, e os desenhos e construções na representação da EG, feitos por cada professor colaborador.

A3: Apreensão perceptiva

Quando o sujeito se defronta com uma figura, ele extrai informações intuitivas, imediatas e automáticas a respeito dela. Nessa unidade, foi feita a análise com relação a essas percepções quando os professores colaboradores tiveram contato com cada um dos registros figurais.

As seguintes observações direcionaram a análise dos dados quanto a identificar a apreensão perceptiva com cada tipo de registro figural:

- se houve reações imediatas e automáticas diante da figura;
- se aspectos importantes (propriedades, formas, subfiguras, dinâmicas) da figura ficaram evidentes;
- se houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos (lei do fechamento, da continuidade, simplicidade, proximidade);
- se houve destaque de estímulos na figura (contrastos, dinâmicas).

A4: Apreensão operatória

Buscando encontrar a solução para um problema, o sujeito poderá efetuar determinadas operações nos registros figurais. Essas operações, quando associadas ao raciocínio dedutivo, consistem na exploração do processo heurístico da figura. Nessa unidade, foi feita a análise da influência do tipo de registro figural nessas operações que podem ser realizadas.

As seguintes observações nortearam a análise dos dados quanto a identificar a apreensão operatória das figuras:

- se foram realizadas modificações (mereológicas, posicionais e óticas) e reorganizações com o intuito de resolver o problema. Se houve modificações, identificar o(s) tipo(s);
- se houve possibilidade de exploração heurística da figura (congruência entre os tratamentos e o raciocínio dedutivo);
- se o tipo de registro figural possibilitou congruência entre as hipóteses dadas no enunciado e os tratamentos.

A5: Apreensão discursiva

Em atividades de demonstração, a apreensão discursiva de uma figura deve privilegiar a articulação dos enunciados, construindo uma rede semântica de propriedades e

objetos, bem como a interpretação discursiva das unidades figurais. Tal análise foi feita com cada grupo e em cada registro disponibilizado aos colaboradores.

As seguintes observações direcionaram a análise dos dados na verificação da apreensão discursiva suscitada por cada tipo de registro figural:

- se houve interpretação correta do enunciado do problema;
- se houve visualização e compreensão dos elementos figurais;
- se a apreensão perceptiva da figura ficou subordinada à apreensão discursiva.

- **Análise matemática:** validade do encaminhamento e do sucesso da resolução do problema. Para essa análise, foram utilizados os registros discursivos e os tratamentos realizados nos materiais, de modo a identificar se o problema foi ou não resolvido pelo professor colaborador e quais os fatores que contribuíram ou não para isso.

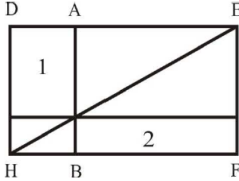
A6: Resolução do problema

Nessa unidade, foram analisados os seguintes aspectos:

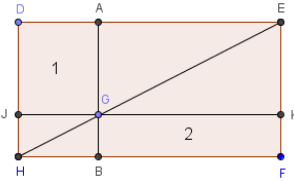
- se o problema foi resolvido corretamente;
- se houve o uso da língua formal, quando necessário;
- se houve recorrência a recursos como cálculos, proporções, medidas, etc.

6.1 Análise da Tarefa 1³¹

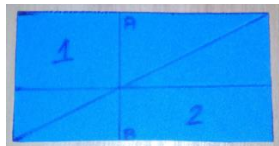
Tarefa 1:
Problema de Euclides: mostrar a igualdade das áreas 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} (DUVAL, 1999, p. 157).



Usando EG



Usando SG



Usando MM

Figura 18: Tarefa 1.

Fonte: Duval (2012b, p. 129) e Autora.

³¹ No início de cada aplicação da sequência de tarefas, foram disponibilizados, aos professores colaboradores, lápis, borracha, caneta, régua, tesoura, cola e folha de resposta. Os rascunhos foram realizados na própria folha de resposta.

Esse problema pode ser resolvido por uma modificação figural do tipo mereológica, fazendo-se uma operação de reconfiguração que consiste no fracionamento da figura inicial em subfiguras. Nesse caso, por congruência entre os triângulos $\widehat{G\hat{A}E} \equiv \widehat{E\hat{K}G}$ e entre $\widehat{H\hat{J}G} \equiv \widehat{G\hat{B}H}$, conclui-se a igualdade das áreas dos quadriláteros 1 e 2, conforme a Figura 19.

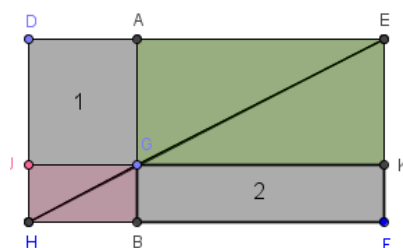


Figura 19: Solução da Tarefa 1

Fonte: Autora.

Essa tarefa ficou caracterizada como:

- um problema de Nível 1³² para o registro figural SG, por dois motivos: primeiro, há congruência entre uma apreensão operatória da figura e um tratamento matemático no momento em que a dinâmica do segmento \overline{AB} proporciona a subdivisão do retângulo em 4 subfiguras de mesma área, corroborando o tratamento necessário para a resolução do problema; e, segundo, uma apreensão discursiva explícita não é necessária, já que é possível movimentar o segmento em qualquer posição ao longo de sua diagonal com o uso do SG;
- um problema de Nível 2³³ para os registros figurais na forma de MM e EG, pois é exigido do sujeito que visualize algumas subfiguras (os triângulos $\widehat{G\hat{A}E}$, $\widehat{E\hat{K}G}$, $\widehat{H\hat{J}G}$ e $\widehat{G\hat{B}H}$) não especificadas no enunciado e aplique noções de congruência entre elas para chegar à sua solução. Além disso, a apreensão discursiva é totalmente necessária para que o sujeito preserve a informação de que as áreas 1 e 2 são iguais, qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} . Tal informação não é visível perceptivelmente sem a hipótese do enunciado.

³² “Nível 1: aqueles problemas para os quais há congruência entre uma apreensão operatória da figura e um tratamento matemático possível. Nesse nível, uma apreensão discursiva explícita não é necessária” (DUVAL, 2012b, p. 136).

³³ “Nível 2: aqueles problemas para os quais a apreensão discursiva é, ao contrário, necessária ou porque não há congruência (com a apreensão operatória) ou porque ela é explicitamente solicitada como justificação teórica” (DUVAL, 2012b, p. 136).

6.1.1 Análise da compreensão

A1: O uso de tratamento figural para resolver o problema

Para a resolução dessa tarefa, era extremamente necessário que tratamentos figurais fossem efetuados para demonstrar dedutivamente a igualdade das áreas 1 e 2. Dessa forma, como justificativa para a solução, o tratamento discursivo seria consequência do tratamento figural realizado.

Grupo 1 (SG → EG → MM)

Todos os professores efetuaram tratamento figural no SG e, no momento em que transladavam o segmento \overline{AB} por meio do ponto G, conforme a Figura 20, observavam (visualmente) que as áreas 1 e 2 continuavam as mesmas.

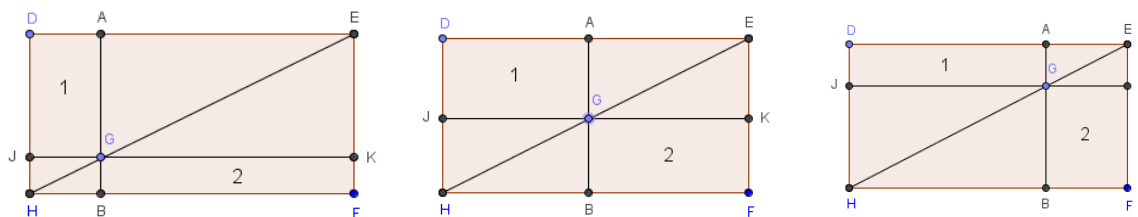


Figura 20: Modificações posicionais no retângulo

Fonte: Autora.

É interessante notar que a passagem desse ponto (ponto G) pelo ponto médio da diagonal do retângulo possibilitava aos professores intuir que as áreas 1 e 2 eram realmente iguais. Desses professores, somente dois descreveram o tratamento realizado no *software*:

P4: “Conforme desloca o ponto nitidamente percebe-se as figuras semelhantes”.

Ainda nesse grupo, foi constatado que nenhum professor efetuou tratamento figural com o registro da EG, e somente um realizou tratamento figural com o MM, fazendo o recorte da área 1 de modo que suas partes pudessem ser sobrepostas à área 2, e observando, assim, a igualdade das áreas, conforme a Figura 21:

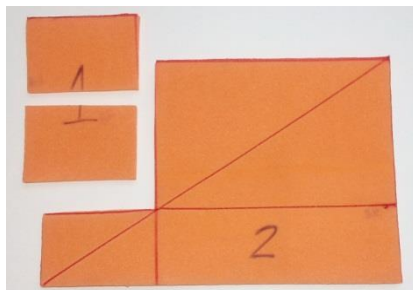


Figura 21: Recorte da parte 1 para sobrepor na parte 2.

Fonte: Autora.

Tal tratamento foi relatado pelo professor na folha de resposta.

Grupo 2 (MM → SG → EG)

Com o MM, três professores realizaram tratamento figural da mesma forma. Houve variação cognitiva no sentido de que esses professores efetuaram um tratamento discursivo para explicar o tratamento figural que haviam feito, como relata P8:

P8: “Usando o material manipulável foi possível mostrar a equivalência das partes recortando 1 e sobrepondo em 2”.

É possível notar que P8 acreditou que recortar a área 1 e sobrepor à área 2 seria o suficiente para mostrar a equivalência das partes, e não considerou a mobilidade do segmento \overline{AB} .

No SG, três professores transladaram o segmento \overline{AB} em busca de uma solução para o problema, porém somente dois deles relataram o tratamento realizado. Já no uso do registro da EG, nenhum professor efetuou qualquer tipo de tratamento figural para tentar encontrar uma solução para o problema.

Grupo 3 (EG → MM → SG)

Com a EG, um professor efetuou tratamentos figurais no desenho e descreveu, utilizando raciocínio dedutivo por meio de linguagem natural e formal, os tratamentos efetuados na figura.

Em seguida, ao disponibilizar o MM, todos os professores efetuaram tratamentos figurais no material; porém, o professor que já havia resolvido o problema dedutivamente, antes, o fez de forma diferente dos demais. Ou seja, quatro professores recortaram a área 1, de modo que ela pudesse ser sobreposta à área 2 ou vice-versa e, dessa forma, concluíram a igualdade das áreas. Já o outro professor recortou todas as subfiguras da figura (retângulos

e triângulos) e fez a sobreposição dos triângulos congruentes para concluir que as áreas 1 e 2 são iguais, conforme a Figura 22:

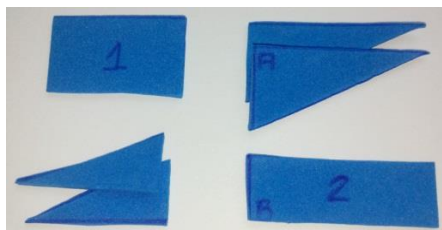


Figura 22: Tratamento figural no MM.

Fonte: Autora.

Com o SG, houve a interação de três dos cinco professores, efetuando a translação do segmento \overline{AB} e descrevendo o realizado, também atentos ao ponto médio da diagonal do retângulo, conforme abaixo:

P11: “Utilizando o geogebra, moveria o segmento AB de forma a dividir a figura em 4 retângulos de iguais medidas”.

P12: “Ao observar a figura e mover o ponto de intersecção, consegui visualizar de imediato o movimento e a semelhança das áreas 1 e 2, com base no ponto médio”.

Nos raciocínios transcritos, não se vê demonstrações dedutivas, mas simplesmente comprovações empíricas de que as áreas 1 e 2 são iguais, e que tal fato ocorre somente quando o ponto G se posiciona no ponto médio da diagonal do retângulo.

Considerações:

Nota-se que os tratamentos realizados em cada registro foram diferentes.

Destacando:

- MM: manuseio, recorte e sobreposição de partes;
- SG: translação do segmento \overline{AB} até o ponto médio da diagonal;
- EG: deduziu que as áreas dos triângulos eram iguais.

A partir das observações e dados dos grupos 1, 2 e 3, foi possível notar que, no que se refere a tratamentos que podem ser efetuados nas figuras, o *software* GeoGebra e o Material Manipulável possibilitaram mais transformações desse tipo, suscitando a criatividade e, conseqüentemente, o uso do raciocínio lógico em busca da solução para o problema. Cyrino e Baldini (2012) afirmam, com base em uma investigação em

dissertações e teses que versaram sobre o uso do *software* GeoGebra na formação de professores de matemática, que as transformações geométricas no plano que utilizam o GeoGebra proporcionam, dentre outras coisas, a construção do raciocínio hipotético-dedutivo e articulações entre níveis de raciocínio geométrico. Do mesmo modo, o uso do MM – objeto físico, conforme os PCN (1998) – propiciou maior exploração das características de regularidades da figura, destacando que seu uso nas aulas de geometria pode ter se tornado mais comum devido ao fato de tal recomendação ser feita nos PCN (1998, p. 51): “é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico”. Esses registros também encaminharam os sujeitos para que pudessem discursar a respeito de suas ideias, proporcionando uma organização estruturada do pensamento.

A seguir, apresenta-se um quadro em que estão destacados os registros figurais que mais possibilitaram, em cada grupo, a realização de tratamentos figurais e variações cognitivas dentre os sujeitos:

Quadro 8: Tratamentos figurais na Tarefa 1.

GRUPOS	TRATAMENTOS FIGURAIS	VARIAÇÕES COGNITIVAS
G1 (SG → EG → MM)	SG	SG
G2 (MM → SG → EG)	MM/SG	MM
G3 (EG → MM → SG)	MM	MM/SG

Fonte: Autora.

Observa-se que nem todas as mobilizações do segmento \overline{AB} no SG e nem todas as sobreposições e recortes no MM conduziram os sujeitos a uma demonstração dedutiva e um tratamento discursivo na língua formal, mas proporcionaram a visualização de propriedades e conceitos por meio dos tratamentos possíveis de se realizar.

A2: A mobilização de um segundo registro para resolver o problema

Para a resolução dessa tarefa, era necessário que, além do tratamento figural, o registro da língua formal fosse mobilizado, com o intuito de demonstrar matematicamente a congruência entre os triângulos $G\hat{A}E$ e $E\hat{K}G$, $H\hat{J}G$ e $G\hat{B}H$. Tal mobilização pode ser feita por meio da identificação das unidades significantes do registro de partida (figural), bem

como dos lados e ângulos congruentes, representados também no registro de chegada (língua formal ou simbólica).

Grupo 1 (SG → EG → MM)

Do total de cinco professores desse grupo, quatro mobilizaram outro tipo de registro durante o uso do SG. Seguem:

- P1 fez uma passagem do **registro figural** para o **registro numérico** no momento em que estabeleceu uma razão entre os lados das áreas 1 e 2.
- P2 fez uma passagem do **registro figural** para o **registro da língua formal**, discriminando as unidades significantes de cada registro e utilizando um raciocínio dedutivo que solucionou o problema:

P2: “O segmento \overline{EH} é a diagonal da figura DEFH, então o $\triangle DEH \approx \triangle EFH$. A diagonal \overline{EG} do retângulo AEIG o divide em 2 Δ s equivalentes. O mesmo ocorre no retângulo BGJA. Logo, temos que as partes 1 e 2 são equivalentes”.

- P3 fez uma passagem do **registro figural** para o **registro numérico** e, quando utilizou a ferramenta “polígono”, selecionou os dois retângulos e, com a ferramenta “área”, calculou a área de cada um deles e comprovou que eram iguais.
- P4 fez uma passagem do **registro figural** para o **registro da língua natural**, descrevendo o raciocínio que o fez concluir o problema, por extenso e em linguagem natural.

No uso da EG, obteve-se duas mobilizações de outros registros. Seguem:

- P1, que permaneceu na passagem feita anteriormente no SG, do **registro figural** para o **registro numérico**, estabelecendo razões e proporções entre as áreas.
- P3, que permaneceu na passagem do **registro figural** para o **registro numérico** medindo os lados dos polígonos 1 e 2 e calculando suas áreas.

No último registro entregue, o MM, obteve-se, também, duas mobilizações:

- P1 e P3, do **registro figural** para o **registro numérico**, efetuando o cálculo das áreas.

Vale enfatizar que P1 mudou do raciocínio de razão e proporção para o cálculo da área de cada polígono de modo a identificar se eram iguais, enquanto P3 permaneceu no cálculo das áreas, conforme os registros anteriores.

Grupo 2 (MM → SG → EG)

Para resolver essa tarefa com o MM, somente um professor efetuou uma mobilização de registro, sendo esta do **registro figural** para o **registro numérico**, medindo os lados dos polígonos 1 e 2 de modo a calcular suas áreas e comprovar a igualdade.

O próximo registro disponibilizado foi o SG e, nesse registro, outros dois professores efetuaram uma mobilização do **registro figural** para o **registro da língua formal**. Estes discriminaram as unidades significantes da figura (vértices, diagonal, segmentos de reta, retângulos); em seguida, utilizaram a linguagem simbólica para representar cada uma dessas unidades significantes (notação para vértices, segmentos, congruência, equivalência, igualdade), e um deles concluiu formalmente a demonstração da igualdade das áreas 1 e 2 de maneira correta.

Ao se disponibilizar o registro na forma de EG, três professores - inclusive o professor que já havia resolvido o problema dedutivamente - sugeriram o uso de régua para medir os lados dos polígonos 1 e 2 e comprovar a igualdade de suas áreas, ou seja, mobilizaram o **registro numérico**.

Grupo 3 (EG → MM → SG)

No registro da EG, quatro professores mobilizaram outros registros de representação, sendo três do **registro figural** para o **numérico**, e um do **registro figural** para o **registro da língua formal**. A mudança do figural para o numérico foi feita por meio de anotações de medidas e cálculo de área (dois professores) e pelo uso de razão e proporção (um professor):

P11: “Utilizando a expressão gráfica para a resolução, usei a régua para verificar as dimensões (comprimento x largura) das partes 1 e 2 e calculei as duas áreas demonstrando a igualdade entre elas”.

Depois, ao se disponibilizar o MM, nenhum professor efetuou qualquer tipo de mobilização do registro figural para outro tipo de registro, ficando restritos ao tratamento nesse material. Então, quando foi apresentada a mesma figura, porém no SG, houve manifestação de duas transformações de registros: P11, que havia feito a mudança do figural para o numérico na EG, fez no SG, uma mobilização do **figural** para a **língua formal**; e P13, que havia sugerido o uso de razão e proporção na EG, fez uso do cálculo das áreas 1 e 2, usando as ferramentas que o *software* disponibiliza.

Considerações:

Por meio das informações descritas, é possível observar que o registro da EG foi o que proporcionou maior intenção de mobilização de outros registros de representação, porém, em sua quase totalidade, restringindo-se à passagem do **registro figural** para o **registro numérico**. Duval (2011) afirma que, para aprender, os sujeitos devem trabalhar sem recorrer inicialmente a aspectos métricos, ou seja, eles devem compreender inicialmente os aspectos qualitativos dos objetos geométricos que estão sendo trabalhados para poderem interiorizar as operações figurais e suas relações geométricas. Nessa tarefa, especificamente, não é aceitável a resolução por meio de cálculos numéricos, já que o segmento \overline{AB} não é fixo e o problema solicita uma demonstração da igualdade das áreas 1 e 2.

Na interação dos professores com o SG, observou-se também várias mobilizações para outros registros, sendo maior – 8 para 3 – do que no contato com o MM. O SG proporcionou o maior número de mobilizações do **registro figural** para o **registro da língua formal** (linguagem simbólica) com discriminação das unidades significantes, e o MM não provocou nenhuma transformação desse tipo, sendo todas do **figural** para o **numérico**, conforme descrito e observado anteriormente e no quadro a seguir:

Quadro 9: Mobilização de outros registros na Tarefa 1.

GRUPOS	REGISTRO NUMÉRICO	LÍNGUA FORMAL	LÍNGUA NATURAL
G1 (SG → EG → MM)	SG/ EG/ MM	SG	SG
G2 (MM → SG → EG)	EG	SG	-----
G3 (EG → MM → SG)	EG	EG/ SG	-----

Fonte: Autora.

Observou-se que, com o MM, há uma maior intenção de se utilizar a régua para medir e calcular as áreas das figuras. Lorenzato (2006) explica que, dependendo do grau de dedução lógica do sujeito, é possível que este confunda constatação de natureza perceptual com demonstração, e não sinta a necessidade de provas lógico-dedutivas, pois a percepção visual é a prova. Desse modo, o uso do MM induziu os sujeitos a realizar medidas das subfiguras, considerando-as suficientes para provar a igualdade das áreas solicitadas no enunciado da tarefa ao invés de utilizar um raciocínio lógico dedutivo.

6.1.2 Análise das razões

A3: Apreensão perceptiva

Com essa tarefa, é possível analisar se o registro figural influencia os professores a resolver por uma “maneira natural de ver” sem possibilitar a identificação das seis subfiguras (4 triângulos congruentes dois a dois e 2 áreas congruentes entre si) e sem suscitar uma “maneira matemática de ver” e compreender a figura para resolver o problema.

Grupo 1(SG → EG → MM)

Reações imediatas como cálculo de área, sobreposição e uso de razão e proporção foram manifestadas no contato com o SG. Ao se raciocinar e interagir no *software*, aspectos como a dinâmica do segmento \overline{AB} e a possível relação de igualdade entre as áreas 1 e 2 tiveram destaque entre os professores desse grupo, já que o movimento do segmento \overline{AB} sugere uma igualdade entre áreas quando este é posicionado no ponto médio da diagonal do retângulo. Porém, houve ocorrência da lei do fechamento e da continuidade, pois somente dois dos cinco professores identificaram unidades figurais elementares e subfiguras importantes, como, por exemplo, os triângulos congruentes que precisam ser visualizados para se resolver o problema, além dos retângulos a que o enunciado se refere:

Pesquisadora: *Aí, a pergunta é: qual justificativa poderia dar para ter essa certeza de que, em qualquer posição, eu vou ter essa área igual a essa?*

P4: *É justamente por aquilo lá, de todo quadrado ser um retângulo e pelo deslocamento dos pontos nas diagonais; é que, como esse retângulo liga uma diagonal à outra...*

Pesquisadora: *Certo.*

P4: *Ela traça, no caso, os dois triângulos que são semelhantes. Esse e esse. E conforme você vai deslocando, seja do lado de cá ou do lado de lá, ele sempre vai ser equivalente.*

Durante o uso da EG, reações imediatas, semelhantes às manifestadas no uso do SG, ocorreram, e também a lei do fechamento e da continuidade. Porém, o maior agravante é que, dos cinco professores, somente P2 e P4, que já haviam identificado aspectos importantes no SG, identificaram aspectos importantes da figura que pudessem contribuir para a resolução do problema na EG, esquecendo-se, inclusive, da hipótese de que as áreas 1 e 2 são iguais em qualquer posição do segmento \overline{AB} .

No uso do MM, houve destaque, como reação imediata e automática, o cálculo de áreas, recorte e sobreposição de figuras para que a igualdade das áreas fosse comprovada. Porém, nenhum professor (exceto P2 e P4, que já haviam identificado elementos figurais importantes com o SG) identificou subfiguras do retângulo que auxiliariam para a solução do problema.

Grupo 2 (MM → SG → EG)

Com o MM, reações espontâneas como utilizar o cálculo de áreas (um professor), e manusear, recortar e sobrepor (quatro professores), tiveram destaque no contato dos professores com esse registro:

P8: “Usando o material manipulável foi possível mostrar a equivalência das partes recortando 1 e sobrepondo em 2”.

Porém, a identificação de formas ficou restrita aos polígonos (áreas 1 e 2) aos quais o enunciado se refere, não proporcionando a quebra da lei do fechamento e da continuidade da figura mesmo após seu recorte. Destaca-se P8 como único professor desse grupo que identificou, com esse material, as subfiguras que a figura contém após seus recortes.

Com o SG – o próximo registro apresentado –, os professores P7 e P10 quebraram a lei do fechamento e da continuidade, identificando outras subfiguras, e o fizeram por meio da dinâmica do segmento \overline{AB} que o *software* proporciona ao sujeito.

Na representação da figura na forma de EG, três professores reagiram de maneira diferente do contato com os registros anteriores:

Pesquisadora: *Olha, essa é a Expressão Gráfica...*

P6: *Aqui não usa régua?*

Pesquisadora: *Te dei uma forma, a gente viu outra e agora vai ser com esse material...*

P8: *Não sei, mas acho que teria que ver a medida que tem aqui...*

Pesquisadora: *Aí, se eu te der o desenho...*

P10: *Pode medir, né?*

No contato com a figura na forma de EG, esses professores cogitaram, de imediato, a possibilidade de utilizar medidas para tentar resolver o problema.

Grupo 3(EG → MM → SG)

Os professores P12, P14 e P15 descreveram alguns aspectos importantes da figura na EG, como o deslocamento do segmento \overline{AB} ao longo da diagonal do retângulo, a identificação de ângulos congruentes nas subfiguras e as áreas 1 e 2. Porém, somente P14 identificou a congruência entre os triângulos, finalizando a resolução do problema nesse registro.

Observa-se que, quando foi disponibilizada a mesma figura na forma de MM, todos os professores desse grupo sugeriram o recorte e a sobreposição das áreas 1 e 2 para que o problema pudesse ser verificado. A seguir, é transcrita a fala de P13 ao utilizar o MM após ter tentado resolver a tarefa utilizando a EG:

Pesquisadora: *Certo. A outra ideia, por exemplo, se eu der esse tipo de material aqui, no caso, o material manipulável... é o mesmo problema, mostrar a igualdade dessas áreas. Se você teria alguma outra ideia.*

P13: *É, se você de repente, vamos ver... Às vezes assim ficaria até mais fácil de...*

Pesquisadora: *Aham...*

P13: *Eu poderia recortar aonde tem as linhas?*

Pesquisadora: *Isso, pode recortar à vontade.*

P13: *Não tem duas peças iguais só pra sobrepor, alguma coisa assim?*

Pesquisadora: *Ah, tá... deixa eu ver aqui... Não tenho.*

P13: *Ah, aqui precisa dois desse...*

Pesquisadora: *Perfeito!*

P13: *Dois desse cobriria.*

Pesquisadora: *Aham...*

P13: *Precisaria desses dois para poder demonstrar...*

Ou seja, P13 recortou a área 1 em duas partes e sobrepôs à área 2, afirmando que esta seria coberta pelas partes da área 1, e “demonstrando” a igualdade das áreas.

Após o recorte das subfiguras no Material Manipulável, observou-se que houve um desprendimento da lei do fechamento e da continuidade, de modo que os professores puderam identificar subfiguras que, antes do recorte, não haviam sido notadas.

A dinâmica do segmento \overline{AB} no SG despertou estímulos de visualização nos professores P11, P12 e P15, que reagiram imediatamente diante desse registro figural, com ideias tais como dividir o retângulo no ponto médio de sua diagonal, enquanto P13 pensou no cálculo das áreas.

Considerações:

Dessa forma, ao utilizar a Expressão Gráfica como um tipo de registro figural, foi possível observar que alguns aspectos matemáticos foram mais suscitados como reações imediatas e automáticas. Ideias como:

- o uso de medidas para concluir a igualdade das áreas;
- o uso de razão e proporção entre os lados;
- o uso de demonstração formal.

Com relação ao *Software* de Geometria, aspectos importantes da figura se tornaram mais evidentes, o que contribuiu para a interpretação de figuras e resolução de problemas. Como exemplo, a dinâmica do segmento \overline{AB} percorrendo a diagonal do retângulo que se destacou independente do enunciado, provocando estímulos na figura que possibilitam a visualização das subfiguras, principalmente quando o segmento de reta está posicionado no ponto médio da diagonal do retângulo, conforme a Figura 23, a seguir:

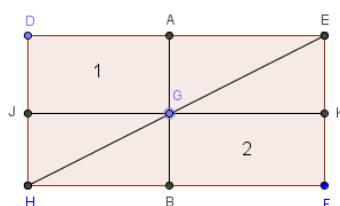


Figura 23: Divisão do retângulo em quatro partes iguais.

Fonte: Autora.

Em contrapartida, o Material Manipulável direcionou os olhos do sujeito para uma “maneira natural de ver” a figura, no momento em que suscitou, em sua maioria, o uso de recorte e sobreposição e o cálculo das áreas de modo a comprovar as igualdades. Lorenzato (2006) faz algumas objeções com relação ao uso dos MM, e uma delas é o fato de que estes, em geral, possibilitam o “uso pelo uso”, sem constatações lógicas (2006). Essa reação imediata não favorece um raciocínio dedutivo.

Em resumo, tem-se:

- 1) recorrer a instrumentos de medidas;
- 2) cálculo de áreas;
- 3) recorte e sobreposição de figuras;
- 4) razão e proporção;
- 5) deslocamento do segmento \overline{AB} ;
- 6) demonstração formal.

A seguir, é apresentado um quadro em que estão destacados os registros figurais que mais possibilitaram, em cada grupo, determinadas reações imediatas e automáticas dentre os sujeitos participantes:

Quadro 10: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 1.

GRUPOS	REAÇÕES IMEDIATAS E AUTOMÁTICAS					
	1	2	3	4	5	6
G1 (SG → EG → MM)	-----	MM	MM	EG/SG	SG	-----
G2 (MM → SG → EG)	EG	MM	MM	-----	SG	-----
G3 (EG → MM → SG)	-----	-----	MM	-----	EG/SG	EG

Fonte: Autora.

A4: Apreensão operatória

Na presente tarefa é necessário realizar uma reconfiguração intermediária por meio de divisão das partes da figura inicial em subfiguras; ou seja, uma modificação mereológica heterogênea que decompõe a figura em diferentes unidades figurais. Com a modificação mereológica, é feita uma modificação posicional de rotação e translação para se concluir a congruência dos triângulos e, conseqüentemente, a igualdade das áreas 1 e 2.

Grupo 1 (SG → EG → MM)

Com o objetivo de analisar se ocorreu uma exploração heurística da figura (ou, pelo menos, uma intenção de realizá-la) na representação do SG, observou-se que, dos cinco professores participantes desse grupo, um efetuou a sobreposição das áreas 1 e 2, enquanto outros dois efetuaram tratamentos na figura, identificando suas subfiguras, comparando-as, e explicando seus raciocínios dedutivamente. Todos os professores efetuaram uma modificação posicional na figura no momento em que transladavam o segmento \overline{AB} para observar as mudanças que ocorriam no SG. Porém, somente três professores manifestaram modificações mereológicas heterogêneas, que consistiram na decomposição da figura em várias subfiguras diferentes, de modo a poder compará-las para concluir o problema dedutivamente. Nesse registro, destacou-se a congruência entre hipótese (enunciado) e o tratamento, no que dizia respeito a qualquer que fosse a posição do segmento \overline{AB} , já que o *software* permitiu a mobilidade desse segmento ao longo da diagonal do retângulo, diferente dos demais registros.

Em seguida, ao se disponibilizar a figura na forma de EG, nenhuma operação figural diferente das anteriores foi manifestada, considerando-se que houve pouca congruência entre as hipóteses e a intenção de tratamentos, já que as únicas subfiguras destacadas pelos professores colaboradores nesse registro foram as áreas 1 e 2, que são citadas no enunciado do problema.

Finalmente, quando se disponibilizou a mesma figura na forma de MM, o professor que havia mencionado o uso de sobreposição das áreas 1 e 2, quando teve contato com o SG, permaneceu nessa ideia e recortou o material, realizando tal operação. Nesse grupo, nessa tarefa e nesse registro, não se destacou nenhuma manifestação diferente das já citadas nos registros anteriores.

Grupo 2 (MM → SG → EG)

Desse grupo, três professores exploraram a figura no momento em que recortaram o MM na tentativa de sobrepor a área 1 sobre a área 2, ou vice-versa. Tal reconfiguração se classifica como uma modificação mereológica heterogênea e também como uma modificação posicional da figura. O problema permaneceu na pouca congruência oferecida entre o enunciado do problema e a figura no que diz respeito à variação de posição do segmento \overline{AB} , que ficou esquecida pelo professor.

Em seguida, ao se disponibilizar a mesma figura no SG, todos os professores realizaram operação de reconfiguração no momento em que perceberam e efetuaram a translação do segmento \overline{AB} ao longo da diagonal do retângulo. Um professor, que não havia se manifestado com nenhuma operação no registro anterior, identificou as unidades figurais elementares e subfiguras, chegando a concluir o problema dedutivamente, conforme segue:

Pesquisadora: *Vamos ver no GeoGebra. Esse é o segmento \overline{AB} .*

P7: *Assim tá mais claro.*

Pesquisadora: *Então, onde quer que eu mude a posição do segmento \overline{AB} , essa área vai ser sempre igual a essa.*

P7: *Aham...*

Pesquisadora: *Aí, a questão é: por quê?*

P7: *Porque acontece isso, né?*

Pesquisadora: *Isso.*

P7: *Parece que está tão evidente.*

Pesquisadora: *É, né? Interessante... Pode comentar, se você quiser...*

P7: *Bom, não sei se eu... Primeiro, eu enxergo aqui que esse triângulo AGE é congruente a GKE, certo?*

Pesquisadora: *Perfeito!*

P7: *Que são congruentes, né?*

Pesquisadora: *Isso.*

P7: *Sempre que eu estendo aqui essa bissetriz, eles estão sendo congruentes.*

Pesquisadora: *Perfeito!*

P7: *Então, se eu olhar, esse triângulo aumenta, diminui a área do primeiro, porque vou arrastar esse.*

Pesquisadora: *Esse.*

P7: *É... automaticamente, seria esse triângulo menos esse valor desse que dá a área desse retângulo.*

Pesquisadora: *Certo!*

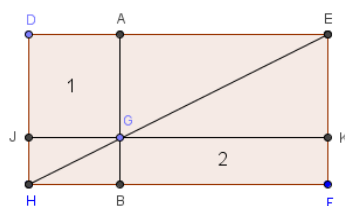


Figura 24: Retângulo no SG.

Fonte: Autora.

P7 realizava as modificações na figura no SG enquanto desenvolvia seu raciocínio oralmente. Houve tratamento figural associado ao raciocínio dedutivo.

Quando foi disponibilizado o terceiro e último registro figural – EG –, não houve ocorrência de manifestações diferentes das anteriores. Os mesmos elementos já identificados foram citados pelos professores, bem como as mesmas operações.

Grupo 3 (EG → MM → SG)

Nesse último grupo, dois professores exploraram a figura na EG, sendo que um deles explorou-a heurísticamente, efetuando uma reconfiguração que consistiu na modificação mereológica heterogênea e posicional de translação e rotação, de forma congruente ao raciocínio dedutivo que foi descrito por esses professores na folha de respostas. Porém, dos cinco professores, três não realizaram qualquer tipo de operação figural e, conseqüentemente, de exploração heurística nessa figura.

Ao se disponibilizar a mesma figura na forma de MM, quatro professores recortaram a figura e efetuaram modificações mereológicas e posicionais com as subfiguras obtidas, que consistiram basicamente na sobreposição das áreas 1 e 2. O professor que já havia feito por meio da EG também recortou o material, mas sobrepôs os triângulos congruentes de modo a enfatizar a dedução a que ele já havia chegado anteriormente.

Quando o SG foi disponibilizado, três dos cinco professores dividiram o retângulo em quatro partes iguais, visualizando a igualdade das áreas. Tal fato só foi possível de ser efetuado pela mobilidade do segmento \overline{AB} oferecido pelo *software*. Nesse sentido, pode-se caracterizar essa última operação como uma modificação mereológica homogênea (4 partes iguais, inclusive iguais à figura inicial) e modificação posicional de translação.

Considerações:

Com base em todas as operações efetuadas com os registros figurais disponíveis, é possível destacar as seguintes observações:

- o SG proporcionou congruência entre as hipóteses (enunciado) e os tratamentos figurais por dois motivos: a mobilidade do segmento \overline{AB} e a possibilidade de posicionar esse segmento no ponto médio da diagonal do retângulo, oferecendo uma visualização de quatro subfiguras de mesma área, sendo duas delas as solicitadas no enunciado. Nesse sentido, Duval (2012c) explica que existem fatores internos à figura que disparam ou inibem a visibilidade de operações, e um deles é a possibilidade da partição da figura em diversas subfiguras. Sendo assim, com o SG, foi possível visualizar subfiguras em tamanhos maiores ou menores, dependendo da localização do segmento \overline{AB} . Como visto, tal fato auxiliou na identificação da igualdade das áreas 1 e 2;
- o SG também se destacou por possibilitar uma operação de reconfiguração importante, que é a modificação posicional de translação do segmento \overline{AB} , e, conseqüentemente, proporcionar a pesquisa heurística da figura. Duval (2011, p. 137) acredita que os *softwares* exibem no monitor tratamentos tão rápidos quanto a produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada, comparada às possibilidades gráfico-visuais;
- durante o uso do MM, não houve congruência entre os tratamentos efetuados nesse registro e o raciocínio dedutivo necessário para resolver o problema, visto que as operações de recorte e sobreposição não são consideradas demonstrações matemáticas. Para Duval (2011), a representação concreta não somente motiva o ensino como também torna os objetos geométricos imediatamente acessíveis. Tal fato poderá, então, induzir o sujeito a confundir o objeto com sua representação, levando-o a estabelecer conclusões baseadas nas visualizações, e não em raciocínios matemáticos dedutivos;
- o MM se destacou por provocar nos professores colaboradores a ideia de recortar e manusear as subfiguras, de modo a realizar modificações mereológicas heterogêneas e modificações posicionais de rotação e translação;

- na figura na forma de EG, um professor realizou operações de reconfiguração, e os demais não efetuaram operações ou as fizeram do mesmo modo que nos registros anteriores, sem novidades.

Segue um quadro com os dados observados:

Quadro 11: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 1.

GRUPOS	RECONFIGURAÇÃO	EXPLORAÇÃO HEURÍSTICA
G1 (SG → EG → MM)	SG/EG/MM	SG
G2 (MM → SG → EG)	SG/EG	SG
G3 (EG → MM → SG)	MM	EG/SG

Fonte: Autora.

A5: Apreensão discursiva

Nessa tarefa, exige-se uma congruência entre as modificações figurais visíveis e o enunciado do problema no que diz respeito à igualdade das áreas, qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} , e o tipo de registro figural influenciará nessa congruência.

Grupo 1 (SG → EG → MM)

Houve interpretação correta do enunciado associado à figura por todos os professores desse grupo e, dessa forma, estes puderam identificar, em todos os registros disponíveis, todos os elementos figurais aos quais o enunciado se referiu, ou seja, identificaram o retângulo maior, as áreas 1 e 2, e o segmento de reta \overline{AB} .

Porém, P1 assimilou, inicialmente, o problema de Euclides com o uso de razão e proporção, e esse fato fez com que sua apreensão perceptiva ficasse subordinada à discursiva na tentativa de resolver o problema:

P1: Eu não me lembro como demonstrar isso... eu pensaria, quando fala em problema de Euclides, é uma proporção, né?

É interessante como P1 recorre à memória sem tentar raciocinar matematicamente, o que poderia direcioná-lo para a solução do problema. Então, ao final

da tentativa de resolver o exercício - mais especificamente, no contato com o MM -, P1 se desvencilhou da ideia do uso de proporção, conseguindo resolver o exercício por meio da comparação do cálculo das áreas 1 e 2.

Quanto aos demais professores desse grupo, não há observações relevantes no que diz respeito ao aspecto tratado nesta unidade.

Grupo 2 (MM → SG → EG)

Ao ler o enunciado do problema associado ao MM, P9 achou que, para mostrar a igualdade das áreas 1 e 2, deveria provar que essas partes eram “congruentes”, e tentou resolver o problema encontrando casos de congruência aplicados às áreas 1 e 2 - sem sucesso, obviamente. Em contrapartida, P8 fez o recorte das áreas 1 e 2, efetuando as sobreposições destas, e concluiu:

P8: *Não posso cortar, não posso fazer nada?*

Pesquisadora: *Pode cortar.*

P8: *Eu vou cortar, mas acho que não vai resolver.*

Pesquisadora: *Tá.*

P8: *Só 1 e o 2 eu posso?*

Pesquisadora: *Pode recortar o que você quiser.*

P8: *Posso cortar só assim?*

Pesquisadora: *Você pode cortar o quanto você quiser. Pode ficar à vontade para manipular o material da forma que você acha que deve.*

P8: *Não. Acho que não são iguais.*

Nesse momento, a apreensão perceptiva de P8 no MM se sobressaiu à apreensão discursiva. No enunciado do problema, foi solicitado que se mostrasse a igualdade das áreas, ou seja, elas eram iguais de acordo com a hipótese do problema, não havia dúvidas sobre isso. No entanto, após o contato com os demais registros de representação, P8 releu o enunciado e, no momento de fazer o seu registro discursivo, percebeu a limitação do MM, e concluiu que por sobreposição não seria possível mostrar a igualdade das áreas 1 e 2.

Com relação a P9, este continuou confundindo a igualdade das áreas com “congruentes” até o final da apresentação de todas as representações, sem compreender de fato o enunciado da tarefa.

Com relação à identificação dos elementos figurais no registro apresentado, destaca-se que, no MM, somente um professor desse grupo recorreu a aspectos métricos, deixando de lado a interpretação dos elementos figurais que compõem a figura do problema. Mas, diante do próximo registro, o SG, esse professor conseguiu visualizar

elementos figurais importantes e abandonou a ideia de medidas, tentando interpretar a figura geometricamente.

Assim, no momento em que o registro da EG foi disponibilizado, três dos cinco professores recorreram a aspectos métricos, incluindo o professor que havia pensado dessa forma no contato com o MM, não explorando mais os elementos figurais disponíveis.

Grupo 3 (EG → MM → SG)

Durante a aplicação desse mesmo problema para o grupo 3, destacou-se a compreensão correta de todos os professores com relação ao enunciado do problema, associado às figuras dadas.

Três dos cinco professores não exploraram elementos figurais da representação na EG, apelando para aspectos métricos, como cálculo de área e proporções. Porém, após o contato com o MM e o SG, esses mesmos professores mudaram o ponto de vista na interpretação da figura, e visualizaram os elementos figurais que auxiliariam para a resolução do problema, conforme a transcrição a seguir:

Pesquisadora: *Então, de que forma nós poderíamos mostrar que essa área é igual a essa?*

P11: *Sem medida nenhuma aqui descrita?*

Pesquisadora: *Não tem medida na figura.*

P11: *Sem nenhuma medida descrita?*

Pesquisadora: *Sem.*

P11: *Uma forma de verificar se as áreas são iguais seria medir e ver... Se eu jogar aqui 3, aqui 4, aqui 5. Vou jogar 1. Aqui 1,5, agora tenho que testar...*

Pesquisadora: *Entendi...*

P11: *Aqui estou jogando, fazendo uma estimativa, só olhando, mas eu poderia usar um instrumento de medida?*

[...]

Pesquisadora: *Então, esse é o 1, esse o 2. Com esse material, você teria alguma ideia diferente ou a mesma ideia?*

P11: *Eu teria que permanecer assim ou pode recortar?*

Pesquisadora: *Pode recortar; se quiser, eu pego a tesoura.*

P11: *Eu recortaria esse e encaixaria aqui dentro. Tem problema?*

Pesquisadora: *Não, pode fazer.*

[...]

Pesquisadora: *E no GeoGebra é a mesma situação. O segmento \overline{AB} aqui ou aqui, tanto faz, qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} , igual está no enunciado, provar a igualdade das áreas 1 e 2. Você teria alguma ideia diferente para resolver esse problema?*

P11: *Mexe novamente. A medida que ele se aproxima do ponto médio, elas ficam parecidíssimas, né?*

Pesquisadora: *Isso...*

P11: *Mas tem que comprovar isso?*

Pesquisadora: *É...*

Ressalta-se que, tanto no MM quanto na EG e no SG, era possível que os professores mudassem o segmento \overline{AB} de posição. No entanto, o SG se destacou por possibilitar rapidamente essa dinâmica de deslizamento do segmento, o que influencia na forma como a resolução da tarefa pode ser realizada, seja ela somente por tratamento figural ou por tratamento matemático (língua formal).

Considerações:

É possível notar que, conforme varia o tipo de registro figural, a interpretação discursiva dos elementos figurais acontece e vai mudando de acordo com o registro apresentado, ou seja, a apreensão discursiva da figura vai sendo aprimorada conforme o sujeito vai modificando o seu contato com o registro figural.

Dessa forma, no que se refere à apreensão discursiva e sua relação com o tipo de registro figural, foi possível notar que as modificações figurais visíveis - como, por exemplo, a mobilidade do segmento \overline{AB} no SG e a possibilidade de recorte e manuseio das subfiguras da figura no MM - auxiliaram os sujeitos nas interpretações figurais, vinculadas ou não ao enunciado do problema. As unidades figurais elementares, dispostas no registro da EG, não tiveram destaque por sua estática, o que não potencializa a criatividade e não sugere (como os demais registros) um possível tratamento que leva a algum tipo de conclusão do problema.

6.1.3 Análise matemática

A6: Resolução do problema

O problema pode ser resolvido corretamente desde que se visualize as subfiguras da figura inicial. O uso da língua formal é importante no que diz respeito à demonstração da congruência entre os triângulos representados subfiguralmente, não havendo necessidade de se recorrer a medidas e cálculos de área.

Conforme o enunciado dessa tarefa, resolver o problema de forma correta seria demonstrar dedutivamente que as áreas 1 e 2 são iguais. Desse modo, tentativas de resoluções foram realizadas pelos professores e são discutidas e apresentadas nesta unidade de análise.

Grupo 1 (SG → EG → MM)

Com o SG, dos cinco professores, três resolveram o problema, sendo:

- P2 e P4, por **dedução matemática**;
- P3, pelo **cálculo das áreas 1 e 2** por meio de ferramentas disponibilizadas pelo *software* (casos particulares).

Ao se mostrar a mesma figura na forma de EG, não houve mudança nas resoluções de P2, P3 e P4, e os demais professores também não tiveram ideias que encaminhassem para alguma solução.

O terceiro e último registro foi o MM. Nesse registro, dos cinco professores, dois resolveram o problema. Obteve-se as seguintes resoluções:

- P1, pelo **cálculo das áreas 1 e 2** (caso particular);
- P5, pelo **recorte e sobreposição** das áreas 1 e 2 (caso particular).

Nota-se que todos os professores, de alguma forma e com algum recurso, concluíram o problema.

Quanto ao uso da língua formal, para se descrever a resolução realizada, somente P2 registrou formalmente, fazendo uma conversão do registro figural para o registro da língua formal dedutivamente. P4 realizou um raciocínio dedutivo correto, porém não registrou em língua formal, somente em língua natural.

Grupo 2 (MM → SG → EG)

Com o MM, dos cinco professores, somente um conseguiu concluir o problema, sendo:

- P6, pelo **recorte e sobreposição** das áreas 1 e 2 (caso particular).

Ao se mostrar a mesma figura no SG, obteve-se:

- P7, que resolveu o problema por meio de **dedução matemática**.

Os demais professores não extraíram conclusões nesse registro que pudessem resolver o problema.

No terceiro e último registro – a EG –, não houve conclusões dos demais professores e, no momento de registrar discursivamente as conclusões a respeito do problema proposto, somente P7 o fez, utilizando o registro da língua formal.

Grupo 3 (EG → MM → SG)

Com a EG, dos cinco professores, dois resolveram o problema, sendo:

- P14, por **dedução matemática**;
- P15, pelo **cálculo das áreas 1 e 2** (caso particular).

Ao se mostrar a mesma figura na forma de MM, todos os professores – inclusive P14 e P15 – realizaram recorte e sobreposição das áreas 1 e 2, de modo a compará-las, tentando concluir a igualdade das áreas.

Ao se disponibilizar a mesma figura no SG, destacou-se:

- P11, P12 e P15, que efetuaram a divisão da figura inicial (o retângulo) em quatro partes iguais, utilizando o ponto médio da diagonal do retângulo (caso particular).

Oficialmente, pode-se dizer que somente P14 registrou discursiva e formalmente a solução do problema.

Considerações:

Com base na exposição das soluções encontradas pelos professores colaboradores, é importante ressaltar que a única solução satisfatória para o problema é a que pode ser representada por meio de um raciocínio lógico-dedutivo. E, para isso, os registros que mais contribuíram foram o SG e a EG, direcionando quatro professores para tal resolução. Com o uso do MM, observou-se uma distância entre a possibilidade de tratamento a ser realizado na figura e o raciocínio dedutivo que poderia ser expresso por meio da língua formal com o objetivo de resolver a tarefa com êxito. Então, a falta de congruência semântica entre o tratamento figural no MM e o tratamento matemático interferiu na conclusão correta da tarefa.

Na EG, destacou-se o cálculo de áreas e, no MM, o uso de recorte e sobreposição, os quais só podem ser verificados empiricamente. Duval (1999) explica que esses tratamentos figurais se assemelham aos tratamentos matemáticos, porém, não podem ser confundidos com legitimidade ou justificativas matemáticas, devendo ser utilizados como suporte para a posterior formalização matemática.

Segue um quadro com o resumo da frequência dos registros em resoluções, tentativa ou não, e o uso da língua formal matemática:

Quadro 12: Resolução da Tarefa 1.

REGISTRO FIGURAL	RESOLVEU A TAREFA			USOU LÍNGUA FORMAL
	Sim	Tentou	Não tentou	
Grupo 1 (SG → EG → MM)	SG	SG/MM	EG	SG/EG
Grupo 2 (MM → SG → EG)	SG	SG/MM	EG	SG
Grupo 3 (EG → MM → SG)	SG	MM	EG	EG

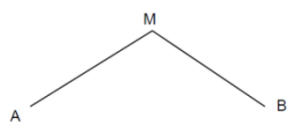
Fonte: Autora.

6.2 Análise da Tarefa 2

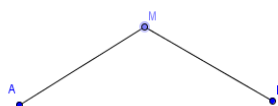
Tarefa 2: Sendo \overline{AM} e \overline{MB} segmentos de mesma medida, de acordo com o esquema, podemos concluir que:

- () M é o ponto médio do segmento \overline{AB} .
- () M não é ponto médio do segmento \overline{AB} .
- () Não foram dados os valores das medidas dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , portanto, nada podemos afirmar.

Justifique oralmente e por extenso (MELLO, 1999, p. 62).



Usando EG



Usando SG



Usando MM

Figura 25: Tarefa 2.

Fonte: Mello (1999, p. 62) e Autora.

A resposta correta é a 2ª alternativa: “M não é ponto médio do segmento \overline{AB} ”, pois, para que M seja ponto médio do segmento \overline{AB} é necessário, por definição, que M pertença ao segmento \overline{AB} , além do fato dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , terem a mesma medida.

Essa tarefa ficou caracterizada como:

- um problema de Nível 1 para o registro figural SG, pois, nesse tipo de registro, foi possível notar que os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} possuem mesma medida, independente da leitura do enunciado. A mobilidade do ponto M , realizada na mediatriz do segmento \overline{AB} possibilitou a convicção da igualdade das medidas de \overline{AM} e \overline{MB} . Logo, nesse caso, uma apreensão discursiva explícita não é necessária.
- um problema de Nível 2 para os registros figurais na forma de MM e EG, pois não há congruência entre as hipóteses e a figura, sendo necessária a comparação ou o uso de régua para que fosse confirmada a igualdade das medidas de \overline{AM} e \overline{MB} . Tal situação foi observada nos sujeitos que não se atentaram às hipóteses do problema, que afirmava que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Ou seja, a apreensão discursiva é explicitamente necessária nesses registros.

6.2.1 Análise da compreensão

A1: O uso de tratamento figural para resolver o problema

Para a resolução dessa tarefa, não foi necessário efetuar tratamentos figurais. Seu único objetivo era investigar se o registro figural poderia ser utilizado como uma representação correta e adequada do conceito de ponto médio. O tratamento figural poderia ser realizado, caso o sujeito sentisse a necessidade de transformar a representação em, de fato, uma representação para o conceito de ponto médio, já que esta não o era, conforme a Figura 26.

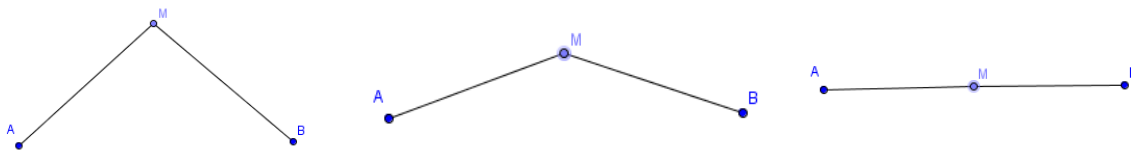


Figura 26: Movimentos do ponto M .

Fonte: Autora.

Grupo 1 (EG \rightarrow SG \rightarrow MM)

Dos cinco professores colaboradores nesse grupo, três efetuaram tratamentos figurais na EG, sendo:

- P1 dobrou o papel no ponto M e comparou as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} . Segue sua resposta:

P1: “Através de dobradura, sobrepondo os segmentos é visível a resposta”.

- P3 e P4 traçaram um segmento \overline{AB} e fizeram a projeção do ponto M no segmento, de modo a comprovar se $\overline{AM} = \overline{MB}$ após a projeção. Segue a imagem:

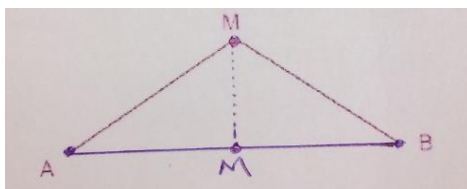


Figura 27: Projeção do ponto M .

Fonte: Autora.

Todos esses professores que efetuaram tratamento figural na EG relataram suas ideias na folha de respostas.

Logo depois, ao se disponibilizar a mesma figura no SG, P3 e P4 chegaram à conclusão de que A , B e M precisavam estar alinhados para M ser ponto médio, conforme a transcrição a seguir:

P3: Às vezes, temos na cabeça que ponto médio é aquele que divide o segmento em duas partes iguais, né? Então, aqui vai dar certo... aqui, já não...

P3 se referiu ao caso em que M está alinhado a A e B e ao caso em que não está, reconhecendo como deveria ser a representação correta do conceito de ponto médio. O mesmo aconteceu com P4:

P4: Agora, vendo no GeoGebra, puxando pra lá e pra cá, ele chega no ponto médio, chega na reta.

Pesquisadora: Entendi.

P4: É, na reta, alinhado, ele ficaria um ponto médio. Agora, você colocando ele lá em cima e pedir pra uma criança, vamos supor, calcular o ponto médio, a criança vai automaticamente calcular o médio de A até B . Ela vai medir dali ali e traçar ali, entendeu? Lógico que, se você der essa definição, ele vai ficar nessa mesma dúvida que eu fiquei.

Nesse registro, P2 e P5 efetuaram tratamento figural, ao movimentar o ponto M , mas não concluíram o problema.

Ao se disponibilizar a figura na forma de MM, somente P4 realizou tratamento figural, tentando, da mesma forma que no SG, movimentar o ponto M ; porém, quando o movimentava, as medidas \overline{AM} e \overline{MB} mudavam. Sua justificativa para o problema foi:

P4: “como as distâncias se diferem não considero o M como ponto médio, justamente pelo diferencial de medidas”.

Após o uso do SG, P4 movimentou o ponto M no MM do mesmo modo que no *software*, mas não concluiu o problema.

Grupo 2 (MM → EG → SG)

No MM, somente P8 efetuou o tratamento figural, movimentando o ponto M , porém não concluiu o problema com esse registro.

Em seguida, disponibilizou-se a mesma figura na forma de EG. Nesse momento, dos cinco professores, somente um efetuou tratamento figural, e explicou:

P6: *Se esticasse a linha, o segmento... eu acho que poderíamos afirmar que sim.*

P6 reconheceu, dessa forma, como deveriam estar posicionados os pontos A , M e B para que M fosse a representação de um ponto médio no segmento \overline{AB} .

Ao mostrar a mesma figura no SG, dos cinco professores, quatro efetuaram tratamentos, e três destes realizaram tratamento discursivo, explicitando suas ideias no registro discursivo:

P8: “No Geogebra percebe-se que mudando o lugar de M para que fique no mesmo segmento \overline{AB} , este será ponto médio”.

P10: “No geogebra fazendo os movimentos representou que está no ponto médio do segmento \overline{AB} ”.

É possível notar que P8 e P10 também chegaram à conclusão de que M é ponto médio quando este está no segmento \overline{AB} .

Grupo 3 (SG → MM → EG)

Nesse grupo, o problema foi iniciado com a representação figural no SG. Todos os professores do grupo efetuaram tratamento figural, conforme os registros discursivos:

P11: “Pelo geogebra é possível verificar que M seria o ponto médio do segmento \overline{AB} somente se os pontos A , M e B estivessem alinhados”.

P12: “Através do movimento do ponto M observamos que as medidas \overline{AM} e \overline{MB} continuam iguais, sem nenhuma dúvida”.

P13: “Embora os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} tenham a mesma medida e para que M seja o ponto médio os pontos deveriam ser colineares”.

P14: “ M é o ponto médio do segmento \overline{AB} pelo Geogebra”.

P15: “No geogebra com a mobilidade do ponto, a gente consegue visualizar o ponto médio, uma vez que os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} são de mesma medida, uma vez que estão alinhados”.

É possível observar que P11, P13 e P15 reconheceram a condição para que M fosse ponto médio.

Em seguida, ao se disponibilizar a figura na forma de MM, três dos cinco professores efetuaram tratamento figural, tentando movimentar o ponto M . Acredita-se que tal fato provavelmente ocorreu por conta da influência do SG, utilizado anteriormente. Ainda nesse registro, um desses três professores comparou as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} para identificar se eram iguais. A conclusão dos professores que efetuaram tratamento figural foi a mesma obtida no registro anterior.

Ao se disponibilizar a figura na forma de EG, dois professores efetuaram tratamentos figurais: P12 dobrou o papel no ponto M e comparou as medidas \overline{AM} e \overline{MB} , enquanto P15 fez a projeção do ponto M no segmento \overline{AB} , de modo a comprovar se $\overline{AM} = \overline{MB}$. Somente P12 explicou por extenso o tratamento efetuado.

Considerações:

Com base nas observações dos três grupos, é possível notar que:

- no registro na forma de EG, destacaram-se dois tipos de tratamentos: a comparação das medidas \overline{AM} e \overline{MB} , por meio da dobra da figura no ponto M , e a projeção do ponto M sobre o segmento \overline{AB} para comprovar se $\overline{AM} = \overline{MB}$;
- no registro na forma de MM, o tratamento figural mais efetuado foi a tentativa de movimentar o ponto M , embora tal fato tenha ocorrido, na maioria das vezes, após o contato com o registro no SG;
- no registro na forma de SG, destacou-se a mobilidade do ponto M , sem ênfase em aspectos métricos, à medida que este se tornava colinear aos pontos A e B.

Nessa unidade, conclui-se que, na maioria dos casos, a EG promoveu o estabelecimento de relações de medidas para resolver o problema, enquanto o SG indicou a mobilidade do ponto M até que as condições para M ser ponto médio (colinearidade de A,

B e *M*) estivessem satisfeitas. O registro que mais possibilitou tratamentos figurais e variações cognitivas foi o SG, que, conforme Borba (1999), auxilia na reorganização do pensamento.

A seguir, as informações a respeito dos registros em que se apresentou maior realização de tratamentos figurais e variações cognitivas:

Quadro 13: Tratamentos figurais na Tarefa 2.

GRUPOS	TRATAMENTOS FIGURAIS	VARIAÇÕES COGNITIVAS
G1 (EG → SG → MM)	EG	EG
G2 (MM → EG → SG)	SG	SG
G3 (SG → MM → EG)	SG	SG

Fonte: Autora.

A2: A mobilização de um segundo registro para resolver o problema

Para resolver essa tarefa, não há necessidade de mobilização de outro registro, visto que o problema visa a investigar se a representação figural apresentada é correta e adequada para a definição de ponto médio. Seu enunciado é completo e suficiente para analisar o registro figural e responder ao problema sem mobilizar qualquer outro tipo de registro de representação semiótica. O único registro que poderia ser mobilizado nesse caso, além do figural, é o registro da língua natural (tratamento discursivo), porém apenas com o intuito de organizar as ideias no tratamento figural.

Grupo 1 (EG → SG → MM)

Na EG, nesse grupo, somente um professor (P5) mobilizou outro registro, sendo o **registro numérico**, utilizando a régua e extraindo medidas de \overline{AM} e \overline{MB} com o objetivo de compará-las.

Logo depois, apresentou-se o esquema (figura) no SG. Nesse registro, os professores que não haviam mobilizado nenhum outro registro permaneceram do mesmo modo, enquanto P5 utilizou a ferramenta “distância, comprimento ou perímetro” e extraiu as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} para compará-las, mobilizando o mesmo registro manifestado no contato com a EG. Ou seja, P5 acreditou ser necessária e suficiente a condição de que, se dois segmentos têm a mesma medida, o ponto comum entre eles é um ponto médio.

No contato com o MM, a situação permaneceu idêntica aos registros anteriores. Somente P5 fez medidas do comprimento do barbante de \overline{AM} e \overline{MB} , utilizando a régua, enquanto os demais professores ou não resolveram a tarefa, ou somente efetuaram tratamentos figurais.

Grupo 2 (MM → EG → SG)

No grupo 2, a situação foi bem diferente. Com o MM, somente P7 não mobilizou outro tipo de registro de representação. P6, P8, P9 e P10 mobilizaram o registro numérico, efetuando medidas com a régua ou fazendo a comparação das medidas dos barbantes entre si.

Quando se disponibilizou a EG, os mesmos professores (P6, P8, P9 e P10) continuaram utilizando medidas:

P8: “Na expressão gráfica, usando régua e os conceitos de ponto médio, percebe-se que \overline{AM} é maior que o ponto médio”.

P10: *Dá um pouquinho de diferença, a hora que mede aqui no papel...*

P8 e P10 recorreram, portanto, ao **registro numérico**. Já P7 não fez qualquer tipo de conversão.

Logo depois, no contato com o SG, P7, P8 e P9 não mobilizaram outro registro, enquanto P6 e P9 utilizaram a ferramenta “distância, comprimento ou perímetro” e encontraram as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} , sem se atentar ao fato de que o enunciado dizia que $\overline{AM}=\overline{MB}$.

Grupo 3 (SG → MM → EG)

No registro do SG, nenhum professor desse grupo mobilizou outro registro, restringindo-se somente ao tratamento figural ou à observação da figura sem raciocínios aparentes. No contato com a EG, somente P12 mobilizou outro registro, sendo o **registro numérico**, quando comparou as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} . Os demais professores se enquadram na mesma situação anterior.

Com o MM, somente P15 fez a conversão do **registro figural** para o **registro numérico**, utilizando a régua e efetuando medidas. Nota-se que P15 não é o mesmo professor que também fez mobilização do figural para o numérico com a EG (P12).

Assim, nesse grupo, P11, P13 e P14 não mobilizaram nenhum outro registro no contato com qualquer tipo de registro figural apresentado.

Considerações

Observando as informações extraídas dos grupos 1, 2 e 3, observou-se que os registros na forma de MM e EG despertaram, em todos os grupos, a curiosidade de identificar as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} para compará-las. Nesses registros, o funcionamento natural do pensamento não se apresentou no mesmo nível de semelhança do processo de substituição nessas representações. Ou seja, não houve congruência semântica para esses professores no momento de substituir o conceito de ponto médio por sua representação nesses registros (DUVAL, 2012a). Com relação ao SG, quando este foi apresentado como primeiro registro (grupo 3), nenhum professor pensou em aspectos métricos; porém, quando este foi apresentado posteriormente à EG ou ao MM, ocorreu a ideia de encontrar as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} .

Como visto em A1, o SG se destacou, nessa tarefa, no aspecto de tratamento figural, enquanto o MM e a EG se destacaram na mobilização do **registro figural** para o **numérico**, conforme a tabela a seguir:

Quadro 14: Mobilização de um segundo registro na Tarefa 2.

GRUPOS	REGISTRO NUMÉRICO
G1 (EG → SG → MM)	EG/SG/MM
G2 (MM → EG → SG)	MM/EG
G3 (SG → MM → EG)	MM/EG

Fonte: Autora.

No caso dessa atividade, como já observado, não era necessária a mobilização de outro registro, já que M não pode ser considerado ponto médio por questões conceituais, e não de medida. Nesse sentido, Fonseca *et al* (2011) explicam que o simples desenho ou modelo concreto como forma de representação não desenvolve a capacidade de compreensão, pois é necessária a reflexão sobre essas representações. Antes de se começar a fazer cálculos ou até mesmo aplicar fórmulas matemáticas, são necessárias a observação

e reflexão sobre o objeto geométrico representado para se encontrar o caminho das conclusões corretas e cabíveis.

6.2.2 Análise das razões

A3: Apreensão perceptiva

Com essa tarefa, é possível analisar se o registro figural influenciará o professor a resolver a tarefa espontaneamente, isto é, por uma “maneira normal de ver”, afirmando que essa representação pode ser usada para o conceito de ponto médio.

Nesse caso, ocorre destaque da apreensão perceptiva sobre o conceito envolvido, pelo fato de os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} terem mesma medida, e também pela utilização da notação M para designar se o ponto que está sendo investigado é ou não ponto médio, tendo em vista que, normalmente, se usa M para referenciar o ponto médio em tarefas de geometria.

Grupo 1 (EG → SG → MM)

Dos cinco professores, quatro tiveram reações imediatas diferentes na EG:

P1: *Aí, eu já iria pra demonstração... eu já iria pro lado mais prático. Mas ele é visível... acho que não é ponto médio, olha a diferença.*

P2: *Pensando aqui, porque também depende do ângulo, né?*

P3: *Quando nós falamos ponto médio, é no segmento.*

P5: *Eu posso usar régua?*

É possível notar que P1 e P5 se atentaram ao tamanho dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , prendendo-se perceptivamente a figura sem levar em consideração que o enunciado diz que $\overline{AM} = \overline{MB}$, P1 cogita a possibilidade de M não ser ponto médio por causa das medidas, enquanto P3 percebe que M não está localizado sobre um segmento.

Então, mudando para o registro do SG, nenhum professor esboçou qualquer reação imediata e automática, e a dinâmica dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} contribuiu para que o conceito de ponto médio fosse reforçado no momento em que A , M e B ficaram colineares.

Por fim, no contato com o MM, P4, que não havia se manifestado até então, e P5, que já havia sugerido o uso da régua, pensaram na possibilidade de extrair medidas. Seguem as transcrições das falas:

P4: *Medir aqui, fazer a divisão e ver. Ai, medir daqui aqui, e daqui aqui.*

P5: *Demonstrar que é ponto médio... eu usaria uma régua.*

Grupo 2 (MM → EG → SG)

No momento inicial, com o MM, todos os professores tiveram, como reação imediata e automática, o apelo a aspectos métricos. Segue a transcrição de algumas falas:

P6: *Você não mediu ou você já tinha essas marcações prontas?*

P10: *Não pode usar régua, nada?*

Em seguida, ao se apresentar a EG, esses professores permaneceram na ideia de comprovar se as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} eram iguais para concluir se M era ou não ponto médio:

P6: *A questão aqui é as medidas...*

P9: *Mas eu fiquei com dúvida se isso aqui é uma medida certa.*

Destaca-se que P10 não utilizou a régua nesse momento e, intuitiva ou perceptivamente, concluiu que M era ponto médio, pois as medidas pareciam iguais.

Então, ao se apresentar a figura no SG, P7 e P9 continuaram fixos nas questões de medidas, porém, no sentido imediato, surgiram as seguintes falas:

P6: *Deixa ele reto.*

P8: *Aí, se abaixar, ele fica ponto médio... se mudar o lugar, ele não fica ponto médio...*

P10: *Fica reto.*

E, então, surgiu a possibilidade de A , M e B ficarem alinhados, e P8 concluiu corretamente o problema, percebendo que M seria ponto médio do segmento \overline{AB} nesse caso, desestabilizando a ideia demonstrada nos registros anteriores.

Grupo 3 (SG → MM → EG)

Nesse grupo, ao se apresentar o SG, P11 perguntou:

P11: *Tem mesma medida?*

E P14, logo após a visualização da figura no SG (conforme a Figura 28, a seguir), esboçou a seguinte reação:

P14: *Tá, e ele fica reto?*

Pesquisadora: *Assim?*

P14: *Fica retinho?*

Pesquisadora: *Fica também...*

P14: *Ah tá, porque se tivesse assim, não é segmento, né?*

Pesquisadora: *Como assim?*

P14: *Se tiver assim, daí não pode dizer que \overline{AB} é um segmento.*

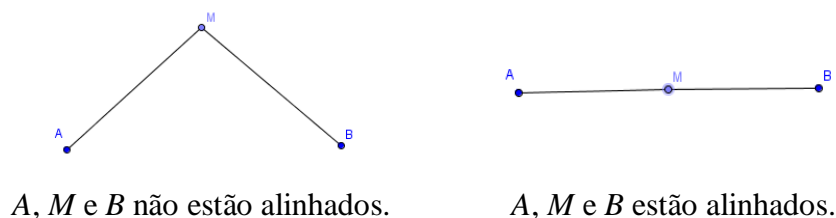


Figura 28: Posição dos pontos A , M e B .

Fonte: Autora.

Com a figura na forma de MM, somente P12 se manifestou, dizendo:

P12: *Não posso mexer?*

Pesquisadora: *Mexer como? Depende...*

P12: *Tirar daqui e trazer pra cá. Para testar se é ou não.*

Nesse momento, P12 estava tentando movimentar o ponto M , de modo que este ficasse alinhado com os pontos A e B . Porém, nessa tentativa, as medidas entre \overline{AM} e \overline{MB} se modificavam, e a dúvida sobre M ser ou não ponto médio não foi esclarecida. Talvez, isso se deva à influência da visualização anterior no SG, no qual o ponto M se movimentava e as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} continuavam iguais entre si. Os demais professores não esboçaram nenhuma reação de aspectos perceptivos que pudessem ser destacadas.

Então, ao utilizar a EG, P15, que não havia se manifestado, perguntou espontaneamente:

P15: *Não foram dados os valores, né? O ponto médio é o meio do segmento, né?*

E P12 também afirmou:

P12: *Agora, aqui, eu já olho e percebo que os segmentos não estão perfeitos; eles estão grossos; se eu for olhar mesmo onde termina esse segmento aqui, parece que ele está torto, não está bem traçado.*

Dessa forma, os aspectos perceptivos se sobressaíram aos conceituais, e até mesmo à leitura do enunciado do problema.

Considerações

No que diz respeito às questões perceptivas, é possível afirmar, com base nas observações relatadas, que os registros figurais na forma de MM e EG permitiram a identificação e o reconhecimento das unidades figurais, porém não contribuíram para a identificação do conceito de ponto médio. Nesses casos, ocorre uma excessiva preocupação perceptiva com as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} , como se a representação fosse o objeto geométrico, e esse fato dispersa a apreensão discursiva da hipótese do enunciado ($\overline{AM} = \overline{MB}$). Caso a apreensão discursiva fosse anterior à perceptiva, ou seja, se a hipótese do enunciado $\overline{AM} = \overline{MB}$ tivesse sido utilizada no contato com o MM e a EG, esses registros talvez desconstruíssem a possibilidade de existência do objeto matemático por suas imperfeições nas medidas.

No caso do SG, perceptivamente, a recorrência às medidas e a falta de atenção ao enunciado não foram desestabilizadas. Porém, o *software* proporciona ao menos a dúvida a respeito da colinearidade dos segmentos A , M e B , desviando o foco do olhar do sujeito, das medidas para a posição do ponto M . Tal fato provoca a busca de um raciocínio mais aguçado, menos intuitivo, e correto.

Desse modo, com base nos dados obtidos, é possível elencar a frequência das seguintes reações imediatas diante das figuras:

Quadro 15: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 2.

GRUPOS	REAÇÕES IMEDIATAS E AUTOMÁTICAS			
	Sem reação imediata	Aspectos métricos	Ponto médio do segmento	Demonstrações
G1 (EG → SG → MM)	SG	EG	EG	EG
G2 (MM → EG → SG)	SG	MM/EG	SG	—
G3 (SG → MM → EG)	MM	SG/MM/EG	SG	—

Fonte: Autora.

A4: Apreensão operatória

Para resolver tal tarefa, não há a necessidade de utilizar qualquer tipo de modificação nos registros figurais. Uma modificação posicional de translação poderá ser utilizada, caso o professor queira movimentar o ponto M de modo a deixá-lo colinear com os pontos A e B, e, dessa forma, constituí-lo como ponto médio do segmento \overline{AB} .

Grupo 1 (EG \rightarrow SG \rightarrow MM)

Nesse grupo, três professores efetuaram modificações posicionais na EG, sendo que um deles (P1) efetuou uma **modificação posicional de reflexão**, ao dobrar o desenho no ponto M , e outros dois (P3, P4) realizaram uma **modificação posicional de projeção**, conforme a Figura 27.

Nesse registro, P3 concluiu corretamente a tarefa por meio de uma investigação heurística da figura e registrou:

P3: “ M não é ponto médio do segmento devido a não estar sobre o segmento \overline{AB} ”.

Em seguida, no contato com o SG, somente P1 não realizou modificações. Os demais professores efetuaram uma **modificação posicional de translação** do ponto M . Com base nessa modificação, P2 escreveu:

P2: “Como o segmento $\overline{AM} = \overline{MB}$, M é o ponto médio dos segmentos dados independente do ângulo formado entre eles”.

Ou seja, esse professor não conseguiu identificar corretamente o ponto médio nesse momento.

Ao se apresentar a figura no MM, somente P4 modificou **posicionalmente**, por meio de uma **translação**, o ponto M , e os demais professores não se manifestaram nesse sentido.

Grupo 2 (MM \rightarrow EG \rightarrow SG)

Com o MM, P8 realizou uma **modificação posicional de translação** do ponto M , e os demais professores não efetuaram nenhuma operação nesse registro.

Mudando para a EG, somente P6 modificou **posicionalmente** a figura no material, transladando o ponto M , mas não deixou seu raciocínio com essa operação evidente em nenhum momento.

Com o SG, P6, P8, P9 e P10 fizeram **modificações posicionais de translação** do ponto *M*, sendo que P9 e P10 ainda não haviam realizado nenhum tipo de modificação com outros tipos de registros figurais.

Grupo 3 (SG → MM → EG)

No grupo 3, todos os professores efetuaram **modificações posicionais de translação** do ponto *M* no SG. Destaca-se a fala de P11:

P11: *Só que, aí, o segmento não tinha que estar na horizontal? Porque, se movimenta, parece que quebra em dois segmentos.*

Pesquisadora: *Então... daí, seria ou não seria ponto médio?*

P11: *Depende de onde ele está... se está alinhado.*

P11 demonstrou começar uma organização de suas ideias durante as modificações realizadas no SG, explorando a figura heurísticamente.

Em seguida, com o MM, P12, P14 e P15 fizeram a operação de **modificação posicional de translação** do ponto *M* nesse material. Acredita-se que tal fato ocorreu devido à influência das modificações realizadas anteriormente no SG. Nada se pode afirmar a respeito dos demais professores desse grupo, pois não manifestaram nenhuma ação nesse material.

Ao se apresentar a figura na forma de EG, observou-se que P12 e P15 efetuaram modificações, porém P12 fez **modificação posicional de reflexão** (dobrou a figura no ponto *M*), e P15 movimentou o ponto *M*, transladando-o verticalmente.

Considerações

No que diz respeito às apreensões operatórias de figuras em determinados registros figurais, é possível observar que:

- nos casos em que o MM foi disponibilizado após o SG, ocorreu, por parte dos professores colaboradores, a **modificação posicional de translação** do ponto *M* (dois professores no grupo 1 e três no grupo 3). Ou seja, a modificação realizada no SG influenciou as ações com o MM;
- o único caso em que ocorreu a **modificação posicional de reflexão** foi no registro figural da EG;

- no SG, ocorreu o maior número de casos de modificações na figura apresentada, sendo a **modificação posicional de translação**, e também o maior número de **explorações heurísticas da figura**.

A seguir, um quadro em que é exposto o registro de SG como o registro que mais promoveu reconfigurações e explorações heurísticas nos três grupos aplicados:

Quadro 16: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 2.

GRUPOS	RECONFIGURAÇÃO	EXPLORAÇÃO HEURÍSTICA
G1 (EG → SG → MM)	SG	SG
G2 (MM → EG → SG)	SG	SG
G3 (SG → MM → EG)	SG	SG

Fonte: Autora.

Com base nas observações feitas, pode-se concluir que fatores como o nível do problema, ou seja, a congruência entre as hipóteses do enunciado e a figura, foram determinantes para que operações figurais fossem efetuadas. Desse modo, como o problema com o registro figural na forma de SG está classificado em Nível 1, tais modificações foram mais provocadas nesse registro, possibilitando maior investigação heurística da figura.

A5: Apreensão discursiva

Nessa tarefa, há uma congruência visual ligada à congruência semântica no que diz respeito ao fato de que é possível comprovar com exatidão que as medidas \overline{AM} e \overline{MB} são iguais no SG. No MM e na EG, essas medidas também precisam ser verificadas, porém, devido à imperfeição dos objetos, tais medidas podem ser milimetricamente diferentes. Isso não é um problema para uma representação semiótica, já que a representação não é o objeto em si. No entanto, pode ser um agravante para sujeitos que não estabeleceram essa diferença, fundamental para a compreensão da matemática, entre representação e objeto matemático. Assim, no caso dessa tarefa, a apreensão perceptiva poderá ou não ficar subordinada à discursiva no que diz respeito às medidas de \overline{AM} e \overline{MB} , dependendo do tipo de registro figural.

Grupo 1 (EG → SG → MM)

Com a apresentação da figura na forma de EG, é importante destacar que três dos cinco professores não perceberam o que o enunciado dizia, pelo fato de se preocuparem com as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} . O enunciado do problema afirma:

“Sendo $\overline{AM} = \overline{MB}$ segmentos de mesma medida, de acordo com o esquema, podemos concluir que”.

Logo, não era necessário medir os segmentos em questão: a leitura da figura associada ao enunciado descartava a necessidade de se medir os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} . Nesses casos, não houve apreensão discursiva da figura. Outro fator a se destacar é que a figura na forma de EG aparentava ter milímetros diferentes nas medidas dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , e isso fez com que esses professores se preocupassem mais com as representações, não respeitando o que a hipótese do problema dizia, podendo ter ocorrido uma falta de subordinação da apreensão perceptiva à discursiva.

Em seguida, no registro figural do SG, P4, que não havia se atentado ao discurso do enunciado anteriormente, percebeu que este afirmava a igualdade das medidas dos segmentos, não sendo necessário medi-los. A apreensão perceptiva (visual) dessa igualdade no *software* fez com que ele repensasse e observasse novamente o enunciado. Porém, P1 e P5 continuavam preocupados com as medidas.

Assim, no MM, a situação não mudou. P1 e P5 ainda recorriam às medidas, enquanto os demais ou afirmavam que M era ponto médio ou pensavam em alternativas diferentes.

Com base nas falas e escrita dos professores desse grupo, notou-se que houve interpretação dos elementos figurais em todos os registros, bem como a identificação do ponto M e dos segmentos constantes na figura.

Grupo 2 (MM → EG → SG)

Com o MM, três professores (P8, P9 e P10) do grupo não se atentaram à hipótese do enunciado, que afirmava que $\overline{AM} = \overline{MB}$:

P8: *Eu penso que, quando eu abaixar esse segmento, aqui vai ficar maior do que a metade.*

Nesses casos, não houve apreensão discursiva da figura, pois a figura foi considerada isoladamente do enunciado da tarefa. E, particularmente para P10, a apreensão perceptiva não ficou subordinada à discursiva, conforme é possível observar na seguinte fala:

Pesquisadora: *Isso, você vai assinalar um “x” na resposta correta, de acordo com o enunciado, visualizando esse esquema.*

P10: *Que \overline{AM} e \overline{MB} são de mesma medida?*

Pesquisadora: *Isso...*

P10: *Não pode usar régua, nada?*

Ou seja, P10 percebe, pelo enunciado, que \overline{AM} e \overline{MB} são de mesma medida, mas pergunta se pode utilizar a régua para medir. A apreensão perceptiva do professor quanto a figura se destacou nesse momento.

Em seguida, na EG, somente P8, após observar a figura nesse registro, voltou ao enunciado e interpretou-o corretamente quanto às medidas dos segmentos em questão.

No SG, P6, P9 e P10 mediram os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , mesmo P6 e P8 já tendo se conscientizado da hipótese da igualdade das medidas no enunciado do problema. Tal fato demonstrou que, nesse registro, embora se aparentasse uma diferença milimétrica nos tamanhos de \overline{AM} e \overline{MB} (Figura 29), a apreensão perceptiva se sobressaiu à discursiva com esses professores.

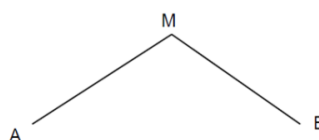


Figura 29: Representação na EG.

Fonte: Autora.

Grupo 3 (SG → MM → EG)

Nesse grupo, não houve qualquer sugestão ou intenção dos sujeitos de medir os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} no contato com o SG, talvez pelo fato de que, ao se transladar verticalmente o ponto M na mediatriz do segmento \overline{AB} , fique evidente, visualmente, a igualdade das medidas de \overline{AM} e \overline{MB} . Todos os colaboradores desse grupo fizeram a leitura da figura corretamente quanto às suas propriedades importantes.

Porém, ao se apresentar a mesma figura na forma de MM, P12 sentiu a necessidade de medir os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , demonstrando que sua apreensão perceptiva

não estava subordinada à discursiva nesse registro. Os demais professores não apresentaram dúvidas nesse aspecto.

Então, no contato com a EG, além de P12, que utilizou recursos de medida no MM e também na EG, P15 também recorreu aos aspectos métricos da figura. Ambos desprezaram a apreensão discursiva evidenciada no uso do primeiro registro.

Considerações

No que diz respeito aos aspectos que devem ser considerados para a análise da apreensão discursiva em cada registro figural, é possível concluir que:

- as modificações figurais foram mais visíveis com o uso do SG, e estas direcionaram os sujeitos ao raciocínio dedutivo conceitual de ponto médio. Tais modificações ocorreram nos registros da EG e do MM quando estes eram precedidos pelo SG;
- em função da hipótese dada no enunciado ($\overline{AM}=\overline{MB}$), a precisão visual das medidas, possibilitada pelo SG, proporcionou congruência entre o tratamento figural heurístico e a dedução do conceito de ponto médio. O mesmo não ocorreu com a EG, e, nesse registro, tal fato é incompreensível, pois a EG é um dos registros mais comumente utilizados para representações figurais. Com o MM, também observou-se a necessidade de o professor utilizar o recurso métrico. Com base em Lorenzato (2006), pode-se extrair a informação de que não é possível retirar conclusões somente observando Materiais Manipuláveis e, além disso, a visão pode direcionar a resultados falsos. Essa informação explica a necessidade de comprovação com instrumentos mais precisos - como a régua, por exemplo - com o material, mas não anula a falta de apreensão discursiva das hipóteses do enunciado, como foi o caso desse problema.

Com relação aos elementos figurais, de acordo com as falas e os registros discursivos dos professores, foi possível concluir que houve interpretação satisfatória desses elementos. Porém, no MM e na EG, foi dada maior ênfase nos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} do que no ponto M isoladamente. Duval (1999) afirma que o tratamento de uma situação matemática representada por uma figura de dimensão 2 exige, muitas vezes, que o sujeito restrinja seu olhar às unidades figurais de dimensões menores - por exemplo, 0 ou 1. No entanto, a percepção se focaliza automaticamente sobre as unidades figurais de dimensão 2. Tal fato direcionou a análise de que a maior preocupação dos professores, no MM e na EG, foi com relação às medidas dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} - que, por sua vez, possuem dimensão 1 -, ao invés de focalizarem na localização do ponto M (dimensão 0) no

esquema, já que M não era colinear a A e a B , não podendo ser um ponto médio do segmento \overline{AB} .

6.2.3 Análise matemática

A6: Resolução do problema

O problema pode ser resolvido corretamente desde que se conheça as condições para que se aplique a definição de ponto médio. É possível usar a linguagem simbólica para representar os segmentos, porém, a resolução do problema não depende dessa ação. Não é necessário recorrer a medidas, já que o enunciado deixa clara a igualdade dos comprimentos de \overline{AM} e \overline{MB} .

Grupo 1 (EG \rightarrow SG \rightarrow MM)

Nesse registro, os professores P1, P4 e P5 assinalaram a alternativa correta, “ M não é ponto médio do segmento \overline{AB} ”, porém justificaram que as medidas \overline{AM} e \overline{MB} eram diferentes:

P1: “Através da dobradura, sobrepondo os segmentos é visível a resposta”.

P4: “como as distâncias se diferem não considero o M como ponto médio, justamente pelo diferencial de medidas”.

P5: Pela expressão gráfica, fiz as medidas e conclui que M não é ponto médio de \overline{AB} , pois $\overline{AM} = 3$ cm e $\overline{MB} = 3,1$ cm.

Com essa atividade, observou-se o quanto são considerados os aspectos métricos em detrimento de conceitos e propriedades básicas de conteúdos de geometria e matemática.

No uso do SG, P3 e P4 assinalaram a alternativa correta e justificaram corretamente:

P3: “ M não é ponto médio do segmento devido a não estar sobre (colinear) o segmento”.

P5: “O ponto médio seria se estivesse traçado em linha reta a A e B e se eu não precisasse do segmento \overline{AM} e \overline{MB} ”.

Com o MM, não houve mudança nos raciocínios dos professores desse grupo.

Grupo 2 (MM → EG → SG)

No contato com o MM, P6, P9 e P10 afirmaram que M era ponto médio, enquanto P8 assinalou a alternativa correta, mas justificou dizendo que \overline{AM} e \overline{MB} tinham tamanhos diferentes, e P7 realizou a tarefa com sucesso nesse registro:

P7: “ M não é ponto médio, já que a trajetória de A e B não é feita por um segmento de reta”.

Ao se disponibilizar a figura representada na EG, as ideias dos professores quanto às respostas e suas justificativas não se alteraram. No entanto, no contato com o SG, P8 elaborou conclusões diferentes:

P8: “No material manipulável percebi que a altura de M influencia na distância até A . Na expressão gráfica, usando régua e os conceitos de ponto médio, percebe-se que \overline{AM} é maior que o ponto médio. No Geogebra percebe-se que mudando o lugar de M para que fique no mesmo segmento \overline{AB} , este será ponto médio”.

Os demais professores não registraram considerações diferentes das anteriores nesse momento.

Grupo 3 (SG → MM → EG)

Com o SG, quatro dos cinco professores assinalaram a alternativa correta e justificaram corretamente, conforme as transcrições a seguir:

P11: “Pelo geogebra é possível verificar que M seria o ponto médio do segmento \overline{AB} somente se os pontos A , M e B estivessem alinhados”.

P13: “Embora os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} tenham a mesma medida e para que M seja o ponto médio os pontos deveriam ser colineares”.

P14: “ M é o ponto médio do segmento \overline{AB} pelo Geogebra”.

P15: “No geogebra com a mobilidade do ponto, a gente consegue visualizar o ponto médio, uma vez que os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} são de mesma medida, uma vez que estão alinhados”.

P12 não concluiu a tarefa nesse registro, e também não recorreu a aspectos métricos na figura.

Em seguida, com o MM, P12, que não havia se manifestado anteriormente, comparou as medidas dos barbantes que representavam \overline{AM} e \overline{MB} , concluindo que M é ponto médio do segmento \overline{AB} , conforme a citação a seguir:

P12: “Material Manipulável = manuseando os pontos percebemos que os segmentos são iguais, mas deixa dúvidas, pelo fato dos pontos não serem perfurados sempre no mesmo lugar e também pela espessura dos pinos”.

Observa-se a crença, implícita na fala do professor, na ideia de que o material é o objeto geométrico, a ponto de se preocupar com a espessura dos pinos, sem se dar conta de que se trata somente de uma representação para o objeto. Nota-se a tênue separação entre o objeto representado e o objeto geométrico, para esse professor, quando se trata de MM.

Os demais professores não mudaram suas respostas nesse registro.

Então, com a EG, P12 continuou recorrendo a medidas e P15 utilizou a régua para medir os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} nesse registro. Os demais professores não apresentaram raciocínios diferentes dos anteriores.

Considerações

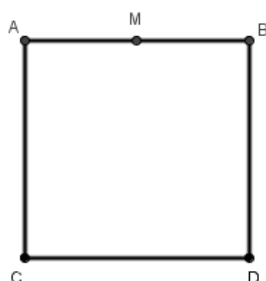
Com base nas informações apresentadas anteriormente, pode-se concluir que:

- um professor do grupo 1 resolveu o problema corretamente com a EG; um professor do grupo 2 resolveu o problema corretamente com o MM; seis professores (um do grupo 1, um do grupo 2, e quatro do grupo 3) resolveram corretamente o problema com o SG. Todos registraram discursivamente seus raciocínios com pouco uso de língua formal, pois, nesse caso, tal registro não era necessário.
- dois professores recorreram a medidas dos segmentos com o SG, sendo um do grupo 2 e um do grupo 3; três professores apelaram para aspectos métricos com o MM, sendo dois do grupo 2 e um do grupo 3; quatro professores exploraram aspectos métricos com a EG, sendo três do grupo 1 e um do grupo 3.

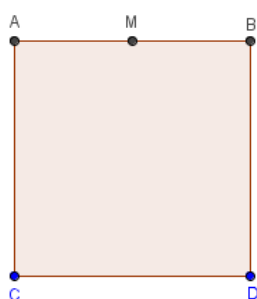
Portanto, é possível concluir que, com o SG, houve maior número de resoluções corretas do problema, porém alguns professores ainda recorreram a medidas (em um número menor do que os professores que o fizeram com o MM e a EG). Duval (2011) afirma que os aspectos métricos devem ser usados em últimos casos, considerando que, para se apreender uma figura, é necessário um processo cognitivo de conhecimento.

6.3 Análise da Tarefa 3

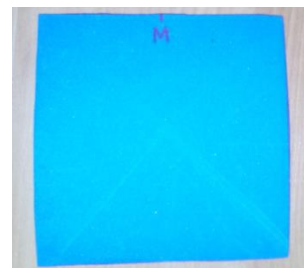
Tarefa 3: Fazer a partição deste quadrado em três partes de mesma área, a partir do ponto médio do lado AB (DUVAL, 2012b, p. 128).



Usando EG



Usando SG



Usando MM

Figura 30: Tarefa 3.

Fonte: Autora.

Duval (2012b) escreve que, em sua pesquisa, um aluno do *cinquième*³⁴ efetuou a partição do quadrado em seis colunas iguais, conforme a figura a seguir:

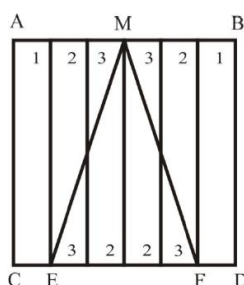


Figura 31: Reconfigurações intermediárias.

Fonte: Duval, 2012b, p. 128.

Conforme a numeração nas unidades figurais da Figura 31, o aluno explicou a igualdade das **reconfigurações** entre AMEC, MFE e MBDF.

Essa tarefa ficou caracterizada como:

- um problema de Nível 1, tanto no registro de representação figural na forma de MM, quanto no SG e na EG. Tal fato se deve à não necessidade de uma apreensão discursiva explícita durante o tratamento figural necessário. Tal tratamento é diretamente proveniente da operação a ser realizada na figura. A apreensão operatória deixa evidentes

³⁴ A série *cinquième* corresponde ao 7º ano do Ensino Fundamental no Brasil, ou seja, alunos com idade entre 12 e 13 anos.

os tratamentos figurais necessários para resolver a tarefa, com o raciocínio de dedutivo que justifica sua solução.

Na sequência, são apresentadas as análises.

6.3.1 Análise da compreensão

A1: O uso de tratamento figural para resolver o problema

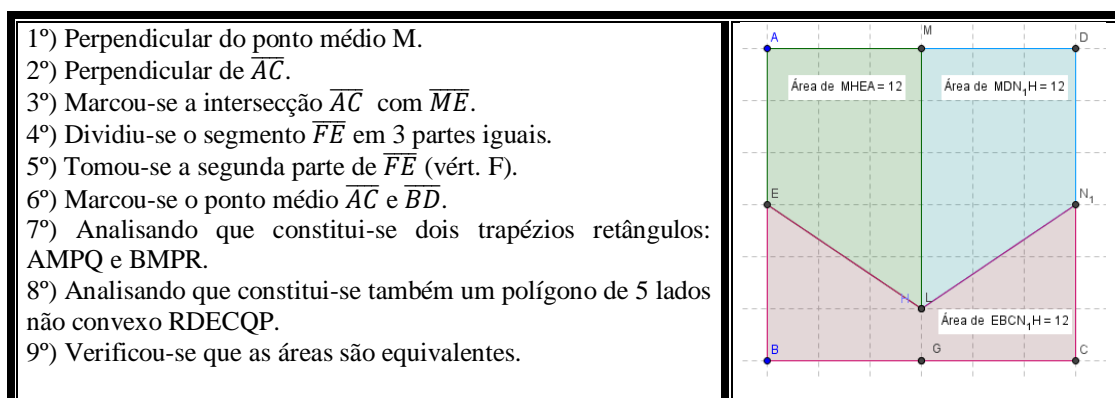
Para a resolução dessa tarefa, foi necessário o uso de tratamentos figurais de modo a particionar o quadrado dado em três partes de mesma área. O registro discursivo da língua formal pode ser utilizado para explicar o raciocínio desenvolvido durante o tratamento figural.

Grupo 1 (MM → SG → EG)

Nesse grupo, dos cinco professores, somente P1 e P2 efetuaram tratamentos figurais aleatórios nessa representação, sendo que P2 recorreu a recursos algébricos para fins de comprovação. Ambos não concluíram o problema nesse registro.

Na sequência, ao se disponibilizar a figura no SG, P3 e P5 realizaram alguns tratamentos figurais, sendo que somente P3 se aproximou da conclusão do problema por meio de construções no *software*. A solução de P3 não pode ser considerada correta, pois somente duas das três partes construídas na figura tiveram como um dos vértices o ponto *M*. A seguir, é apresentada a figura final de P3 e reproduzida a descrição das operações realizadas por ele:

Quadro 17: Tratamento de P3 no SG.



Fonte: Autora.

Porém, logo após redigir sua solução, P3 voltou ao SG e realizou mais tratamentos, chegando à seguinte solução:

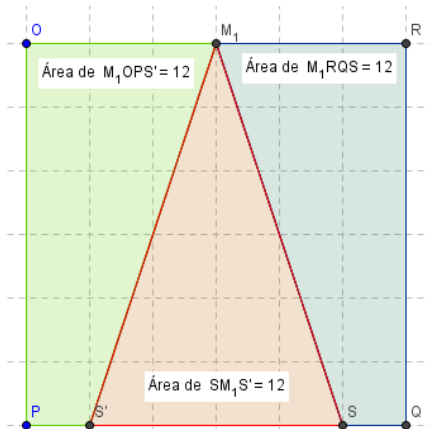


Figura 32: Tratamento de P3 no SG.
Fonte: Autora.

É possível notar que essa última solução está correta, porém P3 não efetuou justificativas por extenso, mas a reconheceu como uma solução para a tarefa.

Por fim, com o uso da EG, P1, P2, P4 e P5 efetuaram tratamentos figurais sem concluir o problema. Destacam-se as opiniões de P2 e P4 e a resolução de P1, conforme segue:

P2: “Para o aluno acredito que o material gráfico seria o que ele teria mais facilidade por poder fazer e desfazer as soluções pensadas”.

P4: “A partição por expressão gráfica seria mais fácil para ser assimilada uma vez que poderia traçar os pontos médios e fazendo as tentativas que os polígonos pudessem ser iguais. Traçando os pontos e fazendo as áreas chegaria mais próximo da realidade do aluno”.

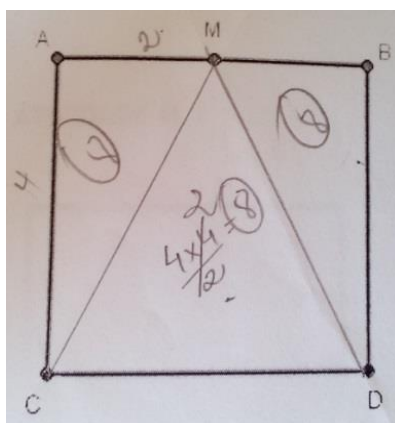


Figura 33: Registro figural de P1 na EG.
Fonte: Autora.

Observa-se que, talvez por falta de atenção, houve um erro de P1 no cálculo das áreas de dois dos três triângulos. Como a EG foi o último registro apresentado, P1 acreditou ter resolvido corretamente o problema sem se atentar ao seu erro.

Conclui-se que, nesse grupo, as variações cognitivas foram escassas, pois houve poucos tratamentos discursivos associados aos figurais.

Foi possível notar também que, com a EG, houve mais tratamento figural, porém sem soluções corretas. O SG foi o único registro que possibilitou uma variação cognitiva que originou uma solução correta (P3), pois contribuiu com os cálculos de áreas, direcionando o professor para a solução do problema. Além disso, foi possível a descrição do tratamento efetuado, o que, de acordo com Duval (1999), é tão importante para o ensino quanto os tratamentos figurais realizados, pois proporciona o domínio das ações sobre a figura.

Grupo 2 (EG → MM → SG)

Dos cinco professores desse grupo, nenhum conseguiu dar uma resposta para o problema com a EG:

- P7 dividiu o quadrado, utilizando o ponto médio, em três triângulos (2 iguais e 1 diferente) e, por meio de uma análise dedutiva, concluiu que seu raciocínio não estava correto. Depois, fez várias outras tentativas, porém sem justificativas matemáticas e, conseqüentemente, sem sucesso, conforme a Figura 34:

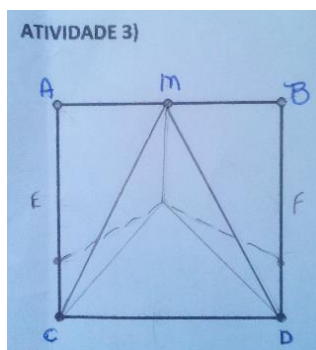


Figura 34: Tratamento de P7 na EG.

Fonte: Autora.

- P9 e P10 dividiram o quadrado em quatro partes iguais, na tentativa de visualizar e recorrer a ideias posteriores.

- P8 resolveu a tarefa, por meio da EG, de um modo diferente. A seguir, tem-se seu registro discursivo e sua representação figural na forma de EG, apresentada na Figura 35:

P8: “No registro consegui a partir de uma circunferência inscrita no quadrado, dividindo-o em três partes e prolongando essas partes até os lados da circunferência”.

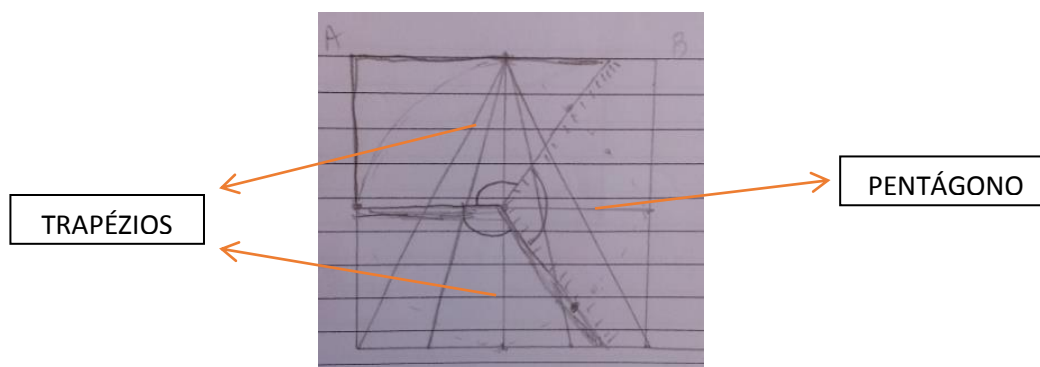


Figura 35: Tratamento de P8 na EG.

Fonte: Autora.

A ideia utilizada por P8 consistiu em construir uma circunferência inscrita no quadrado, e, a partir do segmento que une o centro ao ponto médio dado, construir ângulos de 120° , dividindo a circunferência em três partes iguais, e, com os lados dos ângulos construídos na divisão, marcar suas intersecções com os outros lados do quadrado. Porém, essa resolução está incorreta, pois os dois trapézios construídos possuem a mesma área, mas o pentágono possui área maior do que os trapézios. De qualquer forma, P8 utilizou um tratamento figural refinado, que não persistiu durante o contato com os demais registros.

- P6 tentou dividir o quadrado em três retângulos, sem utilizar o ponto médio em todas as subfiguras, conforme a Figura 36, a seguir:

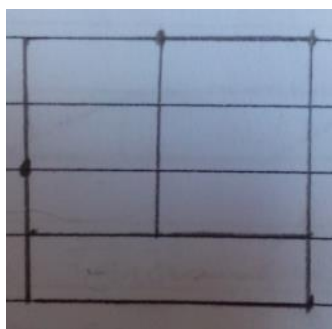


Figura 36: Tratamento de P6 na EG.

Fonte: Autora.

Segue uma transcrição da fala de P6:

P6: *Nesse caso, não quer dizer que as figuras têm que ser as mesmas, né?*

Pesquisadora: *Não, elas podem ter só a mesma área.*

P6: *Nossa! Eu com aquela dificuldade toda na área. Seria isso? Não estou partindo de nenhum pensamento geométrico aqui.*

Pesquisadora: *Entendi, você fez intuitivamente?*

P6: *É!*

Pesquisadora: *Aí, precisamos saber se as áreas são iguais...*

P6: *É. Se são equivalentes, né?*

Pesquisadora: *De que maneira podemos ver isso?*

P6: *Eu acho que não são, sabe por quê? Porque eu imaginei, se fechar quadrado aqui, essas duas estão maiores do que esta. Tipo, se eu fecho o quadrado aqui, sobra um triângulo aqui e aqui, eu não vou conseguir nunca. Esse aqui já não deu certo. Eu teria que pensar mais um pouco para poder fazer.*

Observa-se que P6 efetuou um tratamento figural, porém não tinha certeza se tal tratamento resolveria a tarefa. Em todo caso, a EG permitiu que um tratamento figural fosse pensado e realizado, e, com algumas reflexões e sem muitas explicações, P6 chegou à conclusão de que sua resolução não era satisfatória.

Ao se disponibilizar a figura no MM, P6 e P7 não efetuaram qualquer tratamento figural, enquanto P8, P9 e P10 tentaram recortar e dividir o quadrado em três triângulos de mesma área, sem sucesso. Mas, em contato com a mesma figura no SG, P6 utilizou a mesma ideia que teve na EG, e concluiu o problema do seguinte modo:

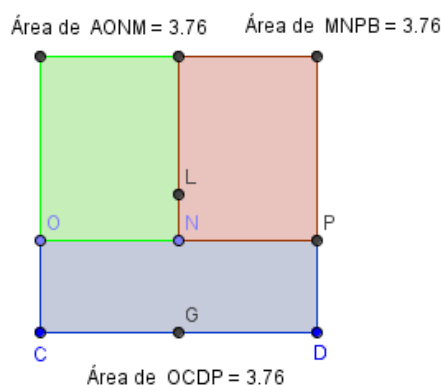


Figura 37: Tratamento de P6 no SG.

Fonte: Autora.

Com base no tratamento realizado, P6 explicou:

P6: “Utilizando a ideia de equivalência de área, partindo do exemplo da atividade 1, saindo do ponto médio, baseado na terça parte da medida do lado”.

Porém, nesse raciocínio, embora as áreas sejam iguais, o ponto médio não foi utilizado como elemento figural das três subfiguras requeridas pelo problema.

P7 fez vários tratamentos figurais, porém não conseguiu concluir o problema, assim como P8. P10 só conseguiu dividir em quatro partes de mesma área, e P9 dividiu em três partes, conforme a Figura 38:

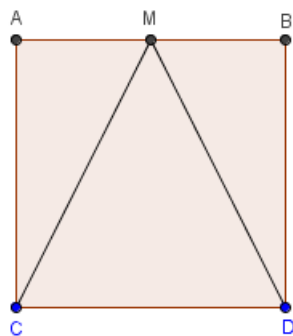


Figura 38: Tratamento de P9 no SG.

Fonte: Autora.

Depois de realizar o tratamento, P9 escreveu:

P9: “No geogebra através de polígonos foi possível fazer a atividade”.

Nota-se que P9 não percebeu que a solução estava errada.

Nesse grupo, houve mais variações cognitivas do que no grupo 1, porém nenhuma delas esteve associada a uma solução correta. A variação cognitiva permite que o sujeito efetue tratamentos figurais aliados a justificativas matemáticas (não necessariamente numéricas).

Foi possível notar, também, que P6 passou pelo registro figural na forma de EG e MM, e, no contato com o SG, resolveu do mesmo modo que na EG, porém comprovou a medida das áreas com a ferramenta de cálculo de área de polígonos do SG, o qual proporcionou que sua solução fosse justificada de alguma forma. A maioria dos tratamentos figurais foi realizada na EG, assim como a maioria das variações cognitivas. De acordo com Duval (1999), a geometria requer uma atividade cognitiva mais exigente, visto que os tratamentos efetuados separadamente em cada um dos registros não bastam para se chegar a resultados: é necessário que tratamentos figurais e discursivos ocorram simultaneamente.

Grupo 3 (SG → EG → MM)

No grupo 3, todos os professores realizaram tratamentos no SG, cada um a seu modo:

- P11 tentou dividir em três triângulos de mesma área, sem sucesso.
- P12, P14 e P15, ao efetuar os tratamentos, acabaram dividindo o quadrado em quatro partes de mesma área.

- P13 fez vários tratamentos, mas não conseguiu concluir o problema.

Após algumas tentativas, P15 chegou à seguinte construção:

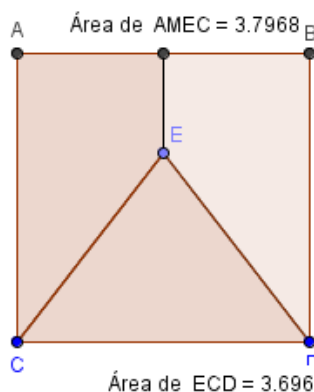


Figura 39: Tratamento de P15 no SG.

Fonte: Autora.

É possível notar que as medidas das áreas não ficaram exatamente iguais, mesmo aumentando o número de casas após a vírgula. Por isso, P15 afirmou não ter conseguido concluir o problema por meio do SG. No entanto, o maior problema está no fato de o ponto médio não ter sido usado em uma das subfiguras construídas.

Ao se disponibilizar a figura na EG, P11 fez um tratamento figural, utilizando medidas, conforme a Figura 40:

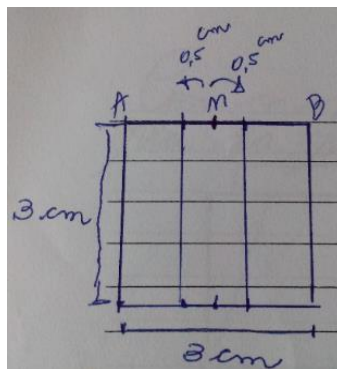


Figura 40: Tratamento de P11 na EG.

Fonte: Autora.

P11 pensou ter realizado um raciocínio correto, pois desenhou a representação de um quadrado, medindo 3 cm de lado, e marcou, a partir do ponto médio, 0,5 cm para a direita e 0,5 cm para a esquerda, dividindo a aresta do quadrado em três partes de 1 cm cada. No entanto, esse raciocínio baseou-se em medidas, e não em tratamentos figurais. Além disso, não houve relação entre o tratamento figural e o tratamento discursivo.

Para resolver o problema, P12 e P13 fizeram vários tratamentos e, utilizando a régua, traçaram vários segmentos de reta e em seguida os apagavam, não conseguindo concluir o problema. P14 não conseguiu resolver com o SG, porém teve uma ideia com o uso da EG:

P14: *Tem que tentar dividir esse quadrado em seis partes.*

Depois de vários tratamentos, P14 resolveu da seguinte forma:

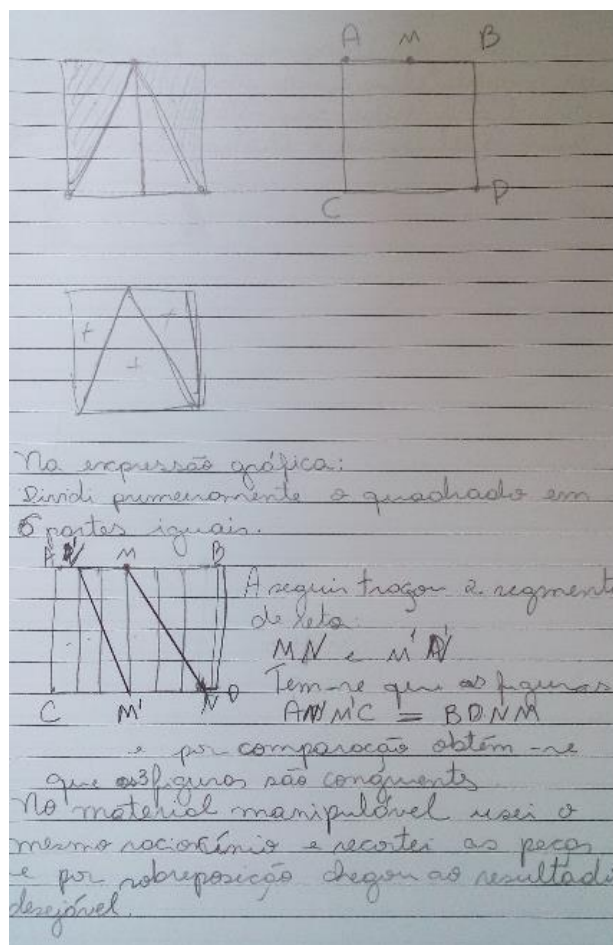


Figura 41: Solução de P14 na folha de respostas.

Fonte: Autora.

P14 explicou, por meio do registro discursivo, o seu raciocínio dedutivo, presente em suas variações cognitivas. Porém, não utilizou o ponto médio do lado AB , conforme solicitado no enunciado.

Nesse mesmo registro e para esse mesmo problema, P15 dividiu o quadrado em quatro partes, conforme a Figura 42:

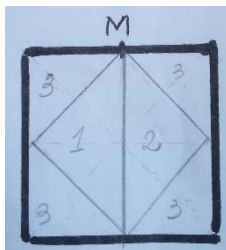


Figura 42: Tratamento de P15 na EG.

Fonte: Autora.

Segue a transcrição do que P15 escreveu depois de realizar o tratamento:

P15: “No material (EG) – uso da régua, foi utilizada a semelhança de triângulo e chegou-se a um resultado”.

Com o MM, P13 e P15 não efetuaram qualquer tipo de tratamento figural. No entanto, P11 pensou:

P11: *Poderia fazer o seguinte, olha, poderia medir aqui, lógico, e dividir essa medida em três.*

Ou seja, com o MM, P11 permaneceu atrelado a medidas, sem utilizar tratamento figural e raciocínio dedutivo. P12 tentou fazer vários segmentos de reta distintos, mas que sempre recaíam na divisão do quadrado em quatro partes de mesma área. P15 realizou o mesmo tratamento efetuado na EG fazendo recortes no MM.

Destaca-se que, nesse grupo, todos os professores efetuaram tratamentos figurais com o SG e com a EG. No MM, somente P12 e P15 realizaram algum tipo de tratamento, porém um dos tratamentos foi idêntico ao da EG, e o outro apresentou solução incorreta.

A maioria das variações cognitivas ocorreu no contato com o SG: foi nesse registro que os professores apresentaram a maior parte de raciocínios dedutivos associados aos tratamentos que efetuaram. Duval (2003) explica que os tratamentos devem estar estreitamente ligados aos procedimentos de justificação.

P14 não conseguiu resolver a tarefa com o SG. Logo depois, apresentou uma solução por meio da EG com um tratamento discursivo, e, em seguida, a mesma solução com o MM.

Considerações:

Segundo Duval, “Os registros permitem identificar todas as variáveis relativas aos processos cognitivos que comandam a compreensão em matemática” (2011, p. 150). Mais

especificamente, Duval determina dois tipos de variáveis cognitivas: a conversão e o tratamento. O segundo tipo permite efetuar operações específicas que constituem uma variável cognitiva de tratamento, e sua tomada de consciência é essencial para obter “condutas matemáticas de definição, prova, visualização, raciocínio e para desenvolver as práticas heurísticas sem as quais não podemos encontrar o que permite resolver um problema” (2011, p. 151).

Com base nos dados obtidos, foi possível concluir que, no que tangencia os tratamentos figurais a serem realizados para solucionar a tarefa, a figura na forma de EG possibilitou que fossem realizados mais tratamentos. Kluppel e Brandt (2014) afirmam, com base nas ideias de Duval, que as figuras são subjacentes a fatores próprios da representação figural. Nesse sentido, entende-se por que determinadas representações figurais permitem ou não uma melhor visibilidade pelo sujeito para o uso de tratamentos figurais para solucionar uma tarefa.

No entanto, ao associar esses tratamentos figurais a tratamentos discursivos, o SG suscitou raciocínios que proporcionaram variações nos processos cognitivos. Moretti e Luiz (2014), em relatos de atividades que versavam sobre a construção de gráficos, citam diversas vantagens quanto ao uso da informática - dentre elas, a rapidez na visualização e a facilidade nos casos de mudanças de escalas e parâmetros. Pensando nisso, é possível concluir que há melhor visibilidade dos tratamentos figurais quando estes podem ser modificados rapidamente e permitem a reflexão dedutiva sobre suas modificações para solucionar a tarefa.

A seguir, um quadro com os grupos e o tipo de registro mais utilizado em cada grupo, tanto nos tratamentos quanto nas variações cognitivas:

Quadro 18: Tratamentos figurais na Tarefa 3.

GRUPOS	TRATAMENTOS FIGURAIS	VARIAÇÕES COGNITIVAS
G1 (MM → SG → EG)	MM/EG	SG
G2 (EG → MM → SG)	EG	EG
G3 (SG → EG → MM)	SG/EG	SG

Fonte: Autora.

A2: A mobilização de um segundo registro para resolver o problema

Para a resolução dessa tarefa, era necessária a mobilização de outro registro (língua formal ou natural), somente para o caso de explicação do tratamento geométrico efetuado.

Grupo 1 (MM → SG → EG)

Nesse grupo, com o MM, somente P2 mobilizou outro registro, o **registro numérico**, chegando à conclusão de que, se dividir o quadrado em três triângulos, a partir do ponto médio, um triângulo terá o dobro da área de cada um dos outros dois, conforme a Figura 43:

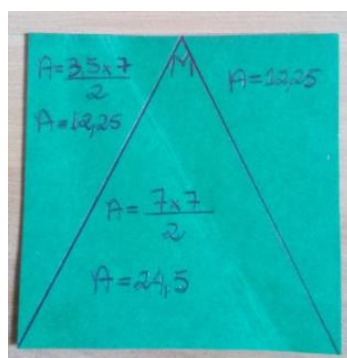


Figura 43: Registro numérico de P2 com o MM.

Fonte: Autora.

A seguir, com o SG, P3 utilizou o método de tentativa e erro, mobilizando o **registro numérico** para o cálculo das áreas das subfiguras formadas, ao particionar o quadrado até que essas fossem iguais, completando a tarefa proposta de duas maneiras diferentes - a primeira, de forma não satisfatória, e a segunda, totalmente correta. Somente P3 mobilizou outro registro no contato com o SG, conforme a figura a seguir:

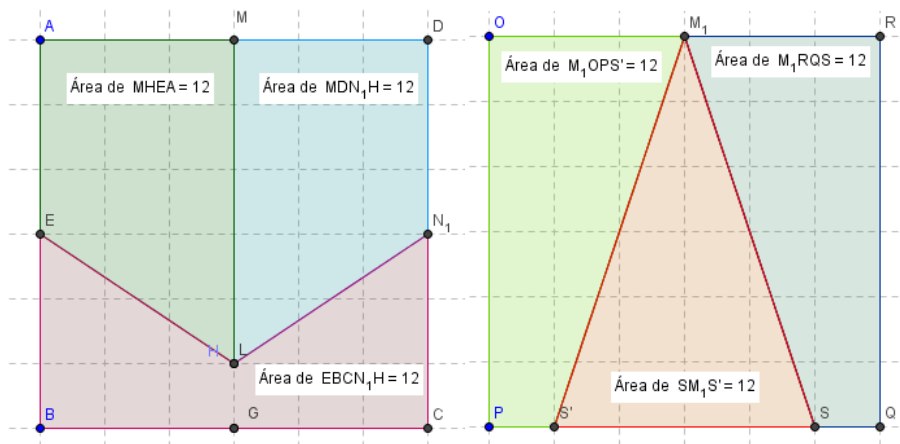


Figura 44: Registro numérico de P3 com o SG.

Fonte: Autora.

Por fim, com o uso da EG, P1 dividiu o quadrado em três triângulos e, de forma errada, calculou a área destes por meio do **registro numérico**, concluindo que as três áreas eram iguais, conforme a Figura 33.

P5 também dividiu o quadrado da mesma forma que P1, mas concluiu, com base em sua percepção visual, sem cálculos, que as áreas eram diferentes. Já P2 buscou em **cálculos algébricos** hipotéticos a solução para uma partição do quadrado em três subfiguras com mesma área, mas não conseguiu concluir, conforme mostra a Figura 45:

The image shows a vertical strip of handwritten mathematical work. The steps are as follows:

- Top line: $b \cdot b : 2$
- Second line: $(b + b/2) \cdot b/2$
- Third line: $(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{4}) \cdot 2$
- Fourth line: $(\frac{2b^2 + b^2}{4}) \cdot 2$
- Fifth line: $\frac{3b^2}{2}$
- Sixth line: $(b + \frac{b}{2}) \cdot \frac{b}{2}$
- Seventh line: $(\frac{2b + b}{2}) \cdot \frac{b}{2}$
- Bottom line: $3b \cdot b$

Figura 45: Registro algébrico de P2.

Fonte: Autora.

Por fim, é possível notar que P4 e P5 não mobilizaram nenhum outro registro em nenhuma das representações figurais apresentadas.

Com a EG, foi mobilizado tanto o **registro numérico** quanto o **algébrico**, mas sem sucesso no que diz respeito à solução correta do problema. Somente com o SG chegou-se à solução correta, quando se buscou o auxílio do **registro numérico**.

Embora para a solução de tal problema sejam necessárias somente operações de reconfiguração, foi possível notar a deficiência em mobilizar outros registros, já que os tratamentos figurais não foram realizados. Duval (2012c, p. 276) afirma que “a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão matemática”, ou seja, quando não há naturalidade na coordenação de registros, é porque a compreensão que leva à solução está limitada.

Grupo 2 (EG → MM → SG)

Nesse grupo, com a EG, P6, P9 e P10 não mobilizaram nenhum outro registro, enquanto P7 calculou a área dos três triângulos que construiu, utilizando o **registro numérico**. P10 também se baseou no **registro numérico**, enquanto dividiu a circunferência (360°) inscrita no quadrado em três partes iguais.

A seguir, com o MM, somente P8 recorreu a outro registro, o **registro numérico**. Mesmo assim, não conseguiu colocar em prática o seu raciocínio, registrando somente uma ideia do que pensou:

P8: “Com o material manipulável, pensei em dividi-lo em partes múltiplas de 3”.

Depois, com o SG, P6 recorreu ao cálculo de áreas (**registro numérico**) e concluiu a tarefa, conforme a Figura 37.

Dessa forma, foi possível observar que P7 mobilizou o registro numérico somente no contato com a EG e, nos demais registros, não tentou aprimorar sua ideia inicial, enquanto P6 persistiu em sua ideia inicial na EG, e concluiu o problema com a ajuda das ferramentas que o SG proporciona.

No entanto, P8, que utilizou inicialmente a ideia de inscrever uma circunferência no quadrado, mudou de plano no contato com o MM, ao pensar em medidas múltiplas de 3 para resolver o problema. P9 e P10 não mobilizaram nenhum outro tipo de registro.

Nesse caso, a maioria dos professores recorreu a um tratamento matemático possível (**registro numérico**), já que, para eles, não ficou explícito o emprego de definições ou teoremas, embora houvesse solução por meio de um tratamento figural, conforme visto no início da tarefa.

Grupo 3 (SG → EG → MM)

Nesse grupo, houve poucas mobilizações de outros registros para a resolução da tarefa proposta com o SG: nenhum dos professores mobilizou outro registro, atrelando-se mais aos tratamentos figurais possíveis.

Logo depois, com o uso da EG como registro de representação figural, P11 mobilizou o **registro numérico**. Ele utilizou uma régua e, ao medir os lados da representação do quadrado, percebeu que esses mediam 3 cm. Sendo assim, discriminou o ponto médio M e marcou 0,5 cm para a direita e 0,5 cm para a esquerda a partir do ponto médio, conforme a Figura 40. Tal raciocínio não é satisfatório para a resolução dessa

tarefa, já que não devem ser levadas em consideração as medidas dos lados, haja vista que a figura dada pelo problema é aleatória. Além disso, nesse caso, o ponto médio não é usado como elemento figural de nenhuma das três subfiguras reconfiguradas. Os demais professores não coordenaram nenhum outro registro com a EG.

Nesse mesmo registro, P14 utilizou o **registro simbólico** da língua formal paralelamente a tratamentos figurais, com o intuito de registrar dedutivamente seu raciocínio correto para a resolução do problema, conforme a Figura 41.

Tal raciocínio está correto, e as unidades significantes do registro de partida foram discriminadas também no registro de chegada. É interessante observar que a justificativa para essa solução se dá por meio da reconfiguração realizada, e o uso de outro registro - o simbólico (algébrico), nesse caso - complementa e reforça o raciocínio utilizado.

Por fim, durante o uso do MM, nenhum professor mobilizou outro registro de representação buscando resolver a tarefa.

Logo, é possível notar que P11 e P14 não mobilizaram nenhum outro tipo de registro até que tivessem contato com o registro figural na forma de EG. Nesse grupo, P11 e P14 foram os únicos professores que mobilizaram qualquer outro tipo de registro para solucionar – ou, ao menos, tentar solucionar - o problema. Duval (2003) explica que a conversão intervém somente como economia nos tratamentos a serem efetuados, ou seja, a mobilização de outros registros não tem um papel específico de justificação ou de prova, tendo maior relevância do ponto de vista da cognição (como processo de aprendizagem) do que do estrito ponto de vista matemático. Sendo assim, nesse caso, a recorrência a outro registro tem o papel único de proporcionar um raciocínio matemático que talvez não esteja evidente no registro de partida (figural).

Considerações:

Pensar em mobilizar outro registro diz respeito à escolha de algum registro no qual é possível efetuar tratamentos. Duval (2011, p. 150) afirma que “não importa qual seja a atividade matemática, ela mobiliza sempre dois registros, o registro principal de trabalho [...] e outro que mobilizamos mentalmente”. Desse modo, a variação de conversões é vista como uma ferramenta intrínseca, potente para a análise de representações semióticas que permitem o reconhecimento das unidades de sentido matematicamente pertinentes como um caminho para as justificativas matemáticas (DUVAL, 2011).

Para a resolução dessa tarefa, era necessária a mobilização de outro registro (língua formal ou natural), somente para o caso de explicação do tratamento geométrico efetuado. No entanto, alguns professores sentiram a necessidade de recorrer ao registro numérico, dependendo do tipo de registro figural de que dispunham.

Com base nos dados obtidos, foi possível concluir que o registro figural na forma de EG foi o que mais suscitou a ideia e a necessidade de recorrência a outros registros, destacando-se, especificamente, o registro numérico e o registro algébrico. Arsie (2012, p. 113) afirma que “a escrita foi elaborada ao longo dos tempos por meio de registros visuais em direção à formalização do conhecimento”, e “o desenho concebido como a extensão do pensamento”. Dessa forma, existe uma estreita relação entre o desenho e a escrita ao longo da evolução do homem, e tal fato pode justificar a recorrência à escrita a partir da figura na forma de EG, conforme os dados expostos no quadro a seguir:

Quadro 19: Mobilização de outros registros na Tarefa 3.

GRUPOS	REGISTRO NUMÉRICO	REGISTRO ALGÉBRICO
G1 (MM → SG → EG)	MM/SG/EG	EG
G2 (EG → MM → SG)	EG	-----
G3 (SG → EG → MM)	EG	EG

Fonte: Autora.

6.3.2 Análise das razões

A3: Apreensão perceptiva

Com essa tarefa, é possível analisar se o registro figural influenciará o professor em suas reações imediatas e automáticas diante do tipo de registro figural apresentado.

Grupo 1 (MM → SG → EG)

Nesse grupo, P4 e P5 não esboçaram qualquer reação que fosse significativa perceptivamente no MM, enquanto P1, P2 e P3 identificaram os principais aspectos da figura, como o ponto médio e o reconhecimento do quadrado. Esses mesmos professores tiveram reações imediatas diante da figura, sendo as de P1 e P3 o recorte em três triângulos a partir do ponto médio:

P3: O primeiro que vem é o triângulo, mas não dá certo. Tem que dar as três a mesma área.

P2 tentou dividir a figura em quatro partes iguais, até se dar conta de que o problema solicitava que se dividisse em três partes de mesma área.

Então, ao abrir o *software* GeoGebra com o mesmo quadrado e o ponto médio marcado, P1 e P4 não esboçaram reações, enquanto P2 e P3 começaram a mexer na figura, buscando, por tentativa e erro, dividir o quadrado em três partes de mesma área:

P1: *...o GeoGebra eu não utilizo.*

P2: *Eu vejo que a gente busca por meio dos conceitos, os nossos alunos vão buscar por tentativa, mas eu não estou conseguindo por tentativa aqui.*

P3: *Vou fazer por aqui. Já que é área que você falou, eu gosto de trabalhar por aqui.*

P5 dividiu o quadrado em três partes de mesma área, porém sem utilizar o ponto médio.

Dessa forma, conclui-se que, no contato com a mesma figura, no registro da EG, P1, que havia recortado em três triângulos com o MM e não havia tido reações no SG, dividiu o quadrado, utilizando uma régua, novamente em três triângulos, sendo dois de mesma área e um de medida diferente, assim como havia feito no MM. P2 não utilizou a figura na forma de EG, diferentemente de seu contato com o MM e o SG. Como P3 resolveu o problema por meio do SG, não teve ideias diferentes no contato com a EG. P4 e P5 apostaram na tentativa e erro, sem sucesso.

Com base nos dados coletados, observa-se que vários professores reconheceram imediatamente os principais aspectos da figura nos diferentes tipos de registro, satisfazendo, então, o que Duval (1999) chama de primeiro nível na apreensão de figuras geométricas: o reconhecimento das diferentes unidades figurais discerníveis na figura.

É parte da apreensão perceptiva de formas a atitude da reação imediata e automática (DUVAL, 2012b). Assim, foi possível notar que as reações mudaram de acordo com o registro figural que ia sendo apresentado:

- P2 dividiu o quadrado em quatro partes iguais no MM → usou tentativa e erro com várias subfiguras de formas diferentes no SG.
- P3 iniciou com a construção de três triângulos no MM → usou tentativa e erro no SG.
- P4 não teve reações com MM e com o SG → interagiu com o EG por meio da tentativa e erro.
- P5 dividiu em três partes de mesma medida sem usar o ponto médio no SG → recorreu à tentativa e erro na EG.

Por fim, notou-se também, que, nessa tarefa, com esses materiais e nesse grupo, não houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos, como, por exemplo, lei de fechamento da figura, já que ideias de subfiguras foram propostas durante as possíveis resoluções.

Grupo 2 (EG → MM → SG)

Nesse grupo, foi possível notar que todos reconheceram os principais aspectos da figura com a EG, como, por exemplo: que se tratava de um quadrado; que, em uma de suas arestas, havia a marcação do ponto médio; que o problema permeava a reconfiguração de polígonos com mesma área, entre outros aspectos.

No que diz respeito às reações imediatas e automáticas diante da figura nesse registro, destaca-se que P6 não as teve. P9 e P10 pensaram imediatamente em marcar os demais pontos médios das outras três arestas do quadrado. P7 dividiu em três triângulos a partir do ponto médio, sem sucesso. E P8 pensou imediatamente na circunferência inscrita, conforme o relato:

P8: Teria como fazer, dividir uma circunferência em três, aqui?

Pesquisadora: Você pensou na circunferência por quê?

P8: Porque, se ela é inscrita, eu devia ter pego três, aonde deu a divisão, teria que dar aqui. A gente não tem um transferidor, mas se tivesse, seria mais ou menos... Então, daria 120°, então pegasse no centro, fosse medindo 120° na circunferência, depois prolongasse e depois ia dar um quadrado. Mas, não sei se ficariam três partes iguais...

Pesquisadora: Será que teria uma forma de a gente garantir que esses três terão a mesma área?

P8: Bom, aí teria que calcular, medir, né, ou sobrepor.

É interessante como o tratamento figural fica mais associado a cálculos numéricos, conforme visto em A2, do que a raciocínios dedutivos.

Então, ao utilizar o MM, P7 não esboçou nenhuma reação, enquanto P6 sugeriu dividir em três triângulos; P8, dividir em medidas múltiplas de três; P9, dividir em quatro quadrados; e P10, sugeriu recortar aleatoriamente.

Então, ao abrir o *software* GeoGebra com o mesmo quadrado e o ponto médio marcado, P6 recorreu à tentativa e erro no cálculo das áreas das subfiguras construídas, e P7 manteve a ideia sugerida na EG, e tentou dividir o quadrado em três triângulos.

P8 testou a possibilidade de dividir a figura em 12 pedaços e tentar separar de quatro em quatro, de modo a ficar com três partes de mesma área. Embora essa tenha sido

uma ideia imediata, o SG foi o tipo de registro com que P8 mais interagiu. Com relação a P9, houve a seguinte fala:

P9: Mas dividir em três? Você pensa logo em dividir no meio, vai dar quatro, não é? Esse é o problema, porque a solução que eu vejo, dá quatro. Seria dividir em alguma forma geométrica, será?

Pesquisadora: Pode ser...

Como reação imediata, P10 pensou em uma divisão que resultou em quatro partes de mesma área.

Com base nos dados coletados, é possível notar que houve algumas mudanças de reações imediatas conforme o professor reconhecia as representações distintas. Nesse caso, tem-se:

- P6 não teve reação imediata na EG → pensou em dividir em três triângulos no contato com o MM → dividiu em três retângulos de mesma área no SG, porém sem usar o ponto médio em todos os retângulos.
- P8 construiu uma circunferência inscrita e dividiu o quadrado, a partir da divisão da circunferência, em três partes iguais, na EG → pensou em medidas múltiplas de três no MM e no SG.
- P10 encontrou os pontos médios das outras arestas do quadrado na EG → fez tentativas de divisões diferentes com o MM → voltou para os pontos médios com o SG.

Nesse sentido, Duval (2005) explica que os instrumentos que se emprega para reproduzir uma figura dada direcionam a maneira de olhar a figura, interferindo no ponto de vista geométrico e até mesmo cognitivo.

Grupo 3 (SG → EG → MM)

Nesse grupo, foi possível notar que todos os professores reconheceram os principais aspectos da representação do quadrado no SG, como, por exemplo, a identificação do quadrilátero, o ponto *M* como sendo o ponto médio e a construção de polígonos com mesma área, conforme a hipótese que constava no enunciado do problema.

Com relação às reações imediatas e automáticas no primeiro contato com a figura no registro de SG, destacam-se:

- P11 e P12: dividir em três triângulos (2 de mesma área e 1 diferente) a partir do ponto médio;
- P13: encontrar os pontos médios dos demais lados;

- P14 e P15: dividir em quatro partes de mesma área e mesma figura.

Então, ao utilizar a representação na EG, os aspectos importantes da figura continuaram sendo reconhecidos por todos do grupo. P13 foi o único professor que não manifestou reação imediata diante da figura, e P15 foi o único que não mudou de reação do SG para a EG, insistindo em uma divisão da figura em quatro partes. Desse modo, é possível destacar:

- P11: encontrar a medida do lado do quadrado e dividir a partir do ponto médio;

- P12: fazer várias tentativas de divisões da figura em subfiguras;

- P14: utilizar a régua não graduada para tentar dividir em seis partes de mesma área. A seguir, é apresentada a transcrição de algumas reações que P14 teve com o contato inicial com a EG:

Pesquisadora: Aqui é a expressão gráfica. Será que você teria alguma outra ideia?

P14: Tem uma régua?

Pesquisadora: Tem!

P14: Tem que tentar dividir esse quadrado em seis partes.

Pesquisadora: É uma boa ideia.

P14 começou a fazer desenhos e marcações sobre a figura e, em seguida, desenvolveu o seguinte raciocínio:

P14: Será que deu?

Pesquisadora: Como a gente poderia verificar?

P14: Tô pensando... Não desenhei muito certo...

Pesquisadora: Como a gente poderia fazer para verificar? Você dividiu em seis partes iguais...

P14: É porque eu ia pegar essa daqui, uma parte, mas acho que não seria igual... essa daqui e essa do meio. Vou riscar aqui, então, pera aí. Acho que saiu!

Pesquisadora: Que legal!

P14: Bom, não foi muito preciso. Esse inteiro aqui pode ser esse mais esse, esse pode ser esse, e esse, esse. Legal!

Pesquisadora: Deu certinho!

P14: Na primeira vez não veio nada na minha cabeça... tão automático fazer assim!

O tratamento de P14 na EG pode ser verificado na Figura 41.

Por fim, com o MM, não houve novidades de raciocínio pelos professores, destacando-se que os aspectos importantes da figura continuaram a ser reconhecidos. Os professores P11, P13 e P15 não tiveram reações imediatas e automáticas, e P12 continuou recorrendo a tentativas aleatórias, agora de recorte, enquanto P14 recortou toda a representação do quadrado, utilizando o raciocínio anterior da EG, conforme a Figura 46:



Figura 46: Resolução de P14 no MM.
Fonte: Autora.

Não houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos com nenhum dos registros figurais utilizados.

Com base nos dados coletados, é possível notar que houve algumas mudanças de reações imediatas conforme o professor reconhecia as representações distintas. Nesse caso, tem-se:

- P11 fez tratamento figural ao dividir o quadrado em três triângulos no SG → usou medidas para dividir cada lado do quadrado em três partes com a EG → não teve reações no MM.
- P12 construiu três triângulos como subfiguras no SG → utilizou tentativa e erro na EG e no MM.
- P14 designou os pontos médios e dividiu em quatro partes com o SG → dividiu em seis partes e resolveu o problema com a EG.

Logo, foi possível notar que, conforme o registro de representação figural variou, as reações imediatas e automáticas diante da figura, bem como a interpretação em seu aspecto perceptivo, também variaram, proporcionando, em alguns casos, novas ideias para se resolver e completar a tarefa proposta.

Considerações:

A apreensão perceptiva diz respeito a reações espontâneas e modificações evidentes. Duval (2014) explica que o objetivo primordial do ensino de geometria deve ser ensinar os alunos a ver figuras como os matemáticos as veem, mas observa que tal fato só é possível se os alunos passarem da “maneira natural de ver” as figuras – reconhecimento perceptivo – para a “maneira matemática” de olhá-las.

Nessa tarefa, observou-se que o registro figural na forma de MM induziu a ocorrência de leis de fechamento e de continuidade, atrapalhando a divisão do quadrado para que a solução da tarefa fosse encontrada. Algumas reações adjacentes foram identificadas nos professores participantes e classificadas dentro do tipo de registro figural em que houve maior ocorrência. Desse modo, com base nos dados obtidos, foi possível concluir que:

- 1) **Sem reação imediata:** o MM foi o tipo de registro figural em que mais foi identificada a falta de reações imediatas diante do registro apresentado.
- 2) **Tentativa e erro:** a incidência de tentativas de acerto e erros ocorreu de igual modo para os três registros figurais.
- 3) **Encontrar os pontos médios das outras arestas:** o SG foi o registro que mais suscitou a ideia imediata de encontrar os pontos médios dos outros lados da representação do quadrado.
- 4) **Três triângulos:** o SG e o MM auxiliaram na tentativa imediata de dividir a representação do quadrado em três triângulos, sendo dois com mesma área e um diferente.
- 5) **Medidas múltiplas de 3:** os três registros promoveram a ideia de dividir os lados do quadrado, utilizando, por exemplo, uma régua, em medidas múltiplas de 3.
- 6) **Dividir em seis partes de mesma área:** somente a EG gerou a necessidade imediata de dividir o quadrado em seis partes de mesma área para tentar separar três partes dessas seis e chegar à solução da tarefa. A ideia utilizada no MM foi idêntica e precedida pela EG.
- 7) **Circunferência:** a EG suscitou a ideia de inscrever uma circunferência na representação do quadrado.
- 8) **Sem usar o ponto médio:** o SG permitiu várias construções sem que se usasse o ponto médio, conforme solicitado no enunciado.

Segue o Quadro 20, com as reações imediatas e seus respectivos registros figurais mais utilizados:

Quadro 20: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 3.

GRUPOS	REAÇÕES IMEDIATAS E AUTOMÁTICAS							
	1	2	3	4	5	6	7	8
G1 (MM → SG → EG)	MM/ SG/ EG	SG/ EG	MM	MM				SG
G2 (EG → MM → SG)	EG/ MM	MM/ SG	EG/ SG	EG/ MM/ SG	MM/ SG		EG	
G3 (SG → EG → MM)	MM	EG/ MM	SG	SG	EG	EG		

Fonte: Autora.

A4: Apreensão operatória

Para resolver essa tarefa, é possível explorar a **produtividade heurística** da figura, fazendo-se uma **reconfiguração intermediária** de suas partes, ou seja, particionando o quadrado em seis partes iguais e estabelecendo a igualdade das subfiguras formadas por AMEC, MFE e MBDF, conforme a Figura 31.

Tal resolução foi descrita por Duval (2012b) com uma partição realizada por um aluno do *cinquième*, conforme explicado no início desta análise.

Grupo 1 (MM → SG → EG)

Poucos foram os tratamentos realizados no MM, nesse grupo, aliados a um raciocínio dedutivo dos professores P1, P2 e P3. No entanto, estes realizaram modificações mereológicas do tipo heterogênea na figura, e demonstraram total entendimento das hipóteses do enunciado com relação à figura dada no MM, sem obter sucesso quanto à solução. Os professores P4 e P5 não realizaram operações nesse material.

Ao se disponibilizar a mesma figura representada no SG, P1 e P4 não efetuaram nenhum tipo de operação. Já P3 realizou várias reconfigurações intermediárias por meio de modificações mereológicas (homogêneas e heterogêneas) e posicionais, demonstrando compreensão das hipóteses diante das operações realizadas, até que a solução da tarefa

fosse encontrada; e o fez de duas maneiras distintas, conforme a Figura 44, sendo a segunda resolução considerada como correta.

P2, basicamente, não efetuou qualquer exploração heurística da figura nesse registro, enquanto P5 construiu alguns segmentos de reta sem conseguir concluir o problema.

Por fim, ao se disponibilizar a figura na forma de EG, P3 não realizou modificações diferentes das já realizadas, enquanto P1, P2 e P4 efetuaram algumas modificações mereológicas, conforme a Figura 47, que mostra modificações realizadas por P2:

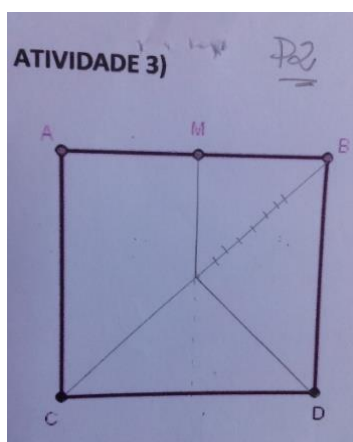


Figura 47: Modificação mereológica de P2 na EG.

Fonte: Autora.

P5 não realizou qualquer tipo de operação nesse registro.

Nesta análise, foram considerados como explorações heurísticas os tratamentos figurais realizados associados a um raciocínio dedutivo, sendo eles corretos ou não.

Conclui-se que, nesse grupo, houve poucas explorações heurísticas nos três registros figurais, sendo que a maior parte das reconfigurações ocorreu no MM e na EG. Duval (2012c) explica que, em certos casos, as apreensões perceptivas favorecem as operações e, em outros casos, ao contrário, as inibem, pois os fatores que mexem com a visibilidade de uma operação podem ou não contribuir para a mobilização da operação necessária.

Grupo 2 (EG → MM → SG)

Na forma de EG, os professores P7 e P8 realizaram uma exploração heurística da figura, efetuando modificações mereológicas heterogêneas. P7 dividiu a figura em três

triângulos, e P8 inscreveu uma circunferência para auxiliar a divisão do quadrado. Assim, por meio de um raciocínio matemático dedutivo, eles perceberam que suas resoluções estavam incorretas. P6, P9 e P10 também realizaram reconfigurações intermediárias na figura nesse registro, sendo que P9 e P10 dividiram a figura em quatro partes, usando os pontos médios dos lados, e P6 dividiu conforme a Figura 36, porém não recorreram a raciocínios dedutivos matemáticos.

Ao se disponibilizar a mesma figura representada no MM, P6 recortou o quadrado em três triângulos e efetuou uma modificação mereológica heterogênea. P8 tentou dividir e recortar o quadrado com medidas múltiplas de 3, mas não obteve sucesso. P7, P9 e P10 não apresentaram mudanças com relação à exploração heurística e modificações figurais.

Por fim, ao se disponibilizar a figura por meio do SG, P6 efetuou várias modificações mereológicas e posicionais e, por meio de um raciocínio dedutivo, dividiu o quadrado em três retângulos, usando um terço de cada lado, conforme a Figura 37, fazendo uma pesquisa heurística sobre a figura. Porém, esse raciocínio não resolveu corretamente a tarefa, pois somente dois dos três retângulos usaram o ponto médio como elemento figural.

Embora P7 tenha tentado resolver a tarefa efetuando vários tratamentos que consistiram em modificações mereológicas e posicionais, ele não os relacionou com raciocínios dedutivos. Se o tivesse feito, associado às reconfigurações que realizou, talvez conseguisse resolver o problema. P8 pensou em dividir a figura em 12 partes, pois 12 é múltiplo de 3, mas não concluiu o problema, dividindo o quadrado somente ao meio, conforme a figura a seguir:

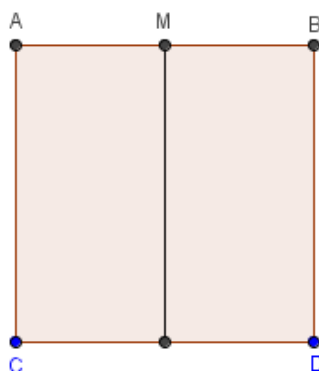


Figura 48: Operação de P8 no SG.

Fonte: Autora.

P9 fez uma reconfiguração que consistiu na divisão da figura inicial em três subfiguras, conforme a Figura 38. Como P9 não se sentiu seguro para utilizar o GeoGebra, a pesquisadora fazia as construções solicitadas pelo professor, conforme o diálogo a seguir:

Pesquisadora: *Vamos ver no próximo, que seria o GeoGebra. Essa é a situação no GeoGebra.*

P9: *Mas dividir em três? Você pensa logo em dividir no meio, vai dar 4, não é? Esse é o problema, porque a solução que eu vejo dá 4. Qual seria? Seria usar o outro o quê? A única solução que eu vejo aqui vai dividir em 4, seria dividir em alguma forma geométrica, será?*

Pesquisadora: *Pode ser...*

P9: *Poderia ser figura geométrica, um quadrado, um triângulo?*

Pesquisadora: *Pode ser...*

P9: *Seria essa solução? Fazer um triângulo, fazer um...*

Pesquisadora: *Vamos ver, olha, o GeoGebra está te dando umas ideias, né? O que você quer eu faça aqui?*

P9: *Pensei em fazer um triângulo.*

Pesquisadora: *Onde?*

P9: *Começa do ponto médio.*

Pesquisadora: *Daqui?*

P9: *É, fazer até no D.*

Pesquisadora: *Assim?*

P9: *É, usando e o outro aqui usando.*

Pesquisadora: *Aqui?*

P9: *É, pensei assim, porque tem que usar.*

Pesquisadora: *Sim.*

P9: *Eu usei o ponto médio, não podia ser?*

Pesquisadora: *Sim.*

Sendo assim, houve uma pesquisa heurística da figura, porém não foi possível concluir corretamente a tarefa com o SG. P10 continuou tentando dividir a figura, mas só conseguiu dividi-la em quatro partes iguais, não havendo diferença com as modificações realizadas nos outros registros.

Por fim, conclui-se que, nesse grupo, houve poucas explorações heurísticas nos três registros figurais, sendo que sua maior parte ocorreu durante o contato com a EG, assim como as reconfigurações.

Duval e Godin (2005) afirmam que as tarefas de reprodução podem ser radicalmente diferentes, tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista geométrico, dependendo do tipo de instrumento utilizado. Sendo assim, o contato com a EG e o SG permitiu, nessa tarefa, uma maior execução de tentativas e erros por parte dos professores, já que esses registros podiam ser apagados e refeitos quantas vezes fosse necessário. Já o MM, visando o uso de recortes com tesouras, não é um recurso muito

prático quando a ideia para a solução do problema ainda não está totalmente definida. Por isso, a maior parte de explorações e reconfigurações foi observada com a EG e o SG.

Grupo 3 (SG → EG → MM)

Todos os professores exploraram heurísticamente a figura no SG nesse grupo, porém, alguns menos e outros mais. P11 realizou uma modificação mereológica, particionando o quadrado em três triângulos, mas de medidas de áreas diferentes. P14 também efetuou modificações mereológicas (reconfigurações), que consistiram em: dividir o quadrado em quatro partes; traçar a diagonal do quadrado; traçar perpendiculares à diagonal; e outras ideias aleatórias, sem sucesso. P12 também realizou modificações mereológicas e, simultaneamente a essas modificações, questionava:

P12: *Tem que ser três, não pode ser quatro?*

Pesquisadora: *Pois é... em três partes.*

P12: *Iguais?*

Pesquisadora: *Isso, com mesma área.*

P12: *Mas esse ponto médio seria de todos?*

Pesquisadora: *A partir desse ponto médio, dividir o quadrado em três partes com mesma área.*

P12: *Se eu traçar triângulos, dá? Dois, só?*

Pesquisadora: *Pode ir falando o que você quer que eu faça no SG.*

P12: *Vamos ver. Traça a diagonal pra mim.*

Pesquisadora: *Qual?*

P12: *A diagonal BC, por exemplo.*

Pesquisadora: *Ok.*

P12: *Isso. Eu não posso traçar outro ponto médio?*

Pesquisadora: *Pode.*

P12: *Então, traça o ponto médio de CB.*

Pesquisadora: *Ok.*

P12: *Tudo o que eu vejo, dá quatro... com o GeoGebra, eu estou achando difícil.*

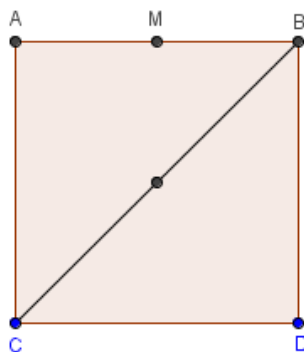


Figura 49: Modificações de P12 no SG.

Fonte: Autora.

P13 fez várias operações que consistiam em modificações mereológicas e posicionais, mas, como não conseguiu concluir o problema com o SG e em nenhum outro registro figural disponibilizado, escreveu na folha de respostas:

P13: “Achei essa atividade difícil, pois tudo que pensei no início e sabendo que tinha que utilizar o ponto M, ficaria com o quadrado dividido em partes de números pares. Pensei em seguida, achar o ponto médio das metades dos segmentos e ligar com o lado oposto, percebi que o retângulo formado no centro teria o dobro da área dos outros dois. Pensei depois em dividir a metade do segmento em três partes, mas não continuei a resolução, isso tudo no geogebra”.

P15 realizou várias operações de reconfiguração que envolveram modificações mereológicas e posicionais, haja vista que, com o SG, é possível, além de efetuar construções precisas, arrastar os pontos e vértices dos polígonos. Então, por tentativa e erro, P15 ficou próximo da solução, conforme a Figura 39.

Em seguida, ao se disponibilizar a mesma figura representada por meio da EG, P12 e P13 efetuaram várias operações como modificações mereológicas, que consistiam em tentativas de reconfiguração de modo a construir as três subfiguras com mesma área. Mas, após riscar e apagar várias vezes, não obtiveram sucesso, já que, por meio da pesquisa heurística da figura, percebiam que as medidas das áreas não eram iguais. P11 recorreu à utilização de uma régua graduada, fazendo uma modificação mereológica da figura baseada em medidas, mas a solução não satisfaz o problema e, heurísticamente, não houve exploração. P14 resolveu o problema realizando uma reconfiguração, conforme a Figura 41, e justificou seu raciocínio, utilizando a linguagem formal simbólica da matemática.

P15 também realizou uma reconfiguração e, embora tenha pensado ter chegado à solução da tarefa, não o fez, conforme a Figura 42. Nessa figura, é possível notar que as áreas 1 e 2 são iguais, porém as áreas das partes que formam a região 3 resultam na soma de 1 e 2, isto é, $A_3 = A_1 + A_2$.

Por fim, ao se disponibilizar a figura por meio do MM, P11, P13 e P15 não realizaram operações figurais, enquanto P12 tentou desenhar subfiguras no quadrado, conseguindo somente quatro subfiguras de mesma área, e P14 realizou uma modificação mereológica idêntica à realizada na EG (registro anterior), conforme a Figura 46.

Conclui-se que, nesse grupo, houve várias explorações heurísticas no SG e na EG, e o MM foi o registro que menos proporcionou explorações heurísticas e reconfigurações figurais para resolver esse problema.

Duval (2012b), ao se referir a essa atividade, afirma que a operação de reconfiguração intermediária constitui uma abordagem natural ao problema proposto. Os registros na forma de SG e EG possibilitaram a execução de reconfigurações intermediárias diversas e aleatórias, que muitas vezes se baseavam em tentativas de encontrar a solução para o problema. No entanto, a operação de reconfiguração correta não ocorreu nesse grupo com nenhum dos registros.

Considerações:

Para que haja desenvolvimento da apreensão operatória durante a resolução de alguma tarefa, Duval (1999) explica que é necessário propor situações em que a resolução possa ser obtida por meio de um tratamento figural. A reconfiguração é um exemplo de tratamento figural - mais especificamente, de operação fundamentada em critérios perceptivos de organização de unidades figurais elementares.

No que diz respeito à produtividade heurística de uma figura, Duval (2012b) explica que esta depende da congruência entre uma operação e um tratamento matemático possível.

Para resolver a tarefa aqui analisada, o professor realizaria operações que consistem em modificações mereológicas - mais especificamente, em reconfigurações intermediárias - e, se possível, um tratamento matemático como forma de explicar o raciocínio elaborado para chegar à solução do problema.

Com base nos dados obtidos, foi possível concluir que os registros figurais na forma de SG e EG foram os que mais possibilitaram reconfigurações figurais e também a exploração heurística das figuras apresentadas em suas formas. Duval (2014) declara que as operações realizadas em 3D/3D fortalecem o reconhecimento perceptivo dos contornos, enquanto operações feitas em 2D/2D exigem que se focalize nos pontos remarcáveis, como vértices, pontos de intersecção, etc.

Quadro 21: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 3.

GRUPOS	RECONFIGURAÇÃO	EXPLORAÇÃO HEURÍSTICA
G1 (MM → SG → EG)	MM/SG/EG	SG/EG
G2 (EG → MM → SG)	EG	EG
G3 (SG → EG → MM)	SG/EG	SG/EG

Fonte: Autora.

A5: Apreensão discursiva

A apreensão discursiva da figura num contexto de uma tarefa de geometria pode ser considerada a leitura da figura associada ao enunciado do problema do qual essa figura faz parte. No caso dessa tarefa, não há uma necessidade explícita da identificação do quadrado e do ponto médio dado por meio do enunciado, ou seja, a figura deixa evidentes a representação de um quadrado e a existência do ponto médio em todos os registros apresentados. Ressalta-se que o ponto médio é designado pela letra M e, visual e perceptivamente, divide o segmento \overline{AB} em duas partes iguais.

Grupo 1 (MM → SG → EG)

Com relação à apreensão discursiva, o enunciado do problema apresentou-se semanticamente congruente às figuras apresentadas nos três tipos de registro. Todos os professores interpretaram corretamente o enunciado da tarefa, aliando-o às figuras representadas no MM, no SG e na EG, sem distinção.

Nos três tipos de registros figurais, as unidades figurais a serem consideradas eram diretamente visíveis na figura e também designadas no enunciado do problema, sem ocasionar dificuldades ou conflitos entre a organização perceptiva da figura e a introdução discursiva do problema.

Grupo 2 (EG → MM → SG)

Com relação à apreensão discursiva, o enunciado do problema apresentou-se semanticamente congruente às figuras apresentadas nos três tipos de registro. Somente P9 teve dúvidas com relação à interpretação do enunciado do problema. A seguir, a transcrição de um trecho de sua fala:

Pesquisadora: Como nós poderíamos ter certeza que essas áreas são iguais? Porque tem que ser três partes de mesma área, né?

P9: Tem que ser mesma área? Não vi isso. “Fazer a partição deste quadrado em três partes de mesma área a partir do ponto médio”. Áreas iguais. O A e o B são iguais. Só há outra que não é, é maior, o triângulo, não é? O lado é maior desse grande do meio. Não dá impressão que é maior? As duas ali, acho que não; A e B são iguais, não parece igual? Aí, teria que calcular a área... A única coisa que eu pensei... é porque você não quer que pegue só três, eu só pensei nisso...

Pesquisadora: Tudo bem. Escreve sua resposta pra mim.

A identificação de que o enunciado não estava claro para P9 foi feita somente no contato com o último registro, o SG. Os demais professores interpretaram corretamente o enunciado da tarefa, aliando-o às figuras representadas no MM, no SG e na EG, sem distinção.

Nos três tipos de registros figurais, as unidades figurais a serem consideradas eram diretamente visíveis na figura e também designadas no enunciado do problema, sem ocasionar dificuldades ou conflitos entre a organização perceptiva da figura e a introdução discursiva do problema.

Grupo 3 (SG → EG → MM)

Com relação à apreensão discursiva, o enunciado do problema apresentou-se semanticamente congruente às figuras apresentadas nos três tipos de registro nesse grupo. No entanto, nesse grupo, houve vários questionamentos com relação ao ponto médio, como, por exemplo: “Tem que usar o ponto médio?”. Essa dúvida foi encontrada no discurso dos professores P12, P13 e P15, como se houvesse uma necessidade de confirmar o que o enunciado do problema dizia, mesmo considerando que as unidades figurais a serem identificadas eram designadas no enunciado, bem como diretamente visíveis na figura, facilitando a organização perceptiva e a introdução discursiva do problema.

Considerações:

Com relação à apreensão discursiva, o enunciado do problema apresentou-se semanticamente congruente às figuras nos três tipos de registros, e isso pode ser comprovado durante as aplicações realizadas nos três grupos. Além disso, a maioria dos professores interpretou corretamente o enunciado da tarefa, aliando-o às figuras representadas no MM, no SG e na EG, sem distinção.

Duval (1999, p. 159) explica que, em geometria, não existe desenho que “represente por si mesmo”, ou melhor, não existe desenho “sem legenda”. Assim, um mesmo desenho pode representar situações matemáticas muito diferentes e, portanto, servir de suporte intuitivo a raciocínios. No caso da aplicação dessa tarefa, nos três tipos de registros figurais, as unidades figurais a serem consideradas foram diretamente visíveis na figura e também designadas no enunciado do problema, sem ocasionar dificuldades ou conflitos entre a organização perceptiva da figura e a introdução discursiva do problema.

6.3.3 Análise Matemática

A6: Resolução do problema

Para esta análise, serão utilizados os registros discursivos (língua natural e língua formal) e os tratamentos realizados nos materiais, de modo a identificar se o problema foi ou não resolvido pelo professor colaborador, e quais os fatores que contribuíram ou não para isso.

Para a resolução dessa tarefa, o professor pode justificar, por meio de língua formal ou natural, o raciocínio utilizado que proporcionou a certeza de que as três partes divididas possuem a mesma medida.

Grupo 1 (MM → SG → EG)

Ao se disponibilizar a figura no MM, nenhum professor desse grupo conseguiu concluir a tarefa. P2 recorreu ao **registro numérico** somente para conferir seu raciocínio, que estava incorreto. Os demais professores não se manifestaram.

Depois, ao se apresentar a figura no SG, somente P3 tentou e conseguiu resolver o problema, dispondo duas soluções distintas, sendo que a segunda solução foi a correta, conforme a Figura 44. P3 recorreu ao **registro numérico** para chegar às soluções, pois movimentava os vértices dos polígonos construídos até que suas áreas ficassem iguais. Porém, apresentou o registro discursivo somente da primeira solução. P3 descreveu uma de

suas soluções com o uso da língua natural e com a língua formal, explicando passo a passo as suas construções no SG:

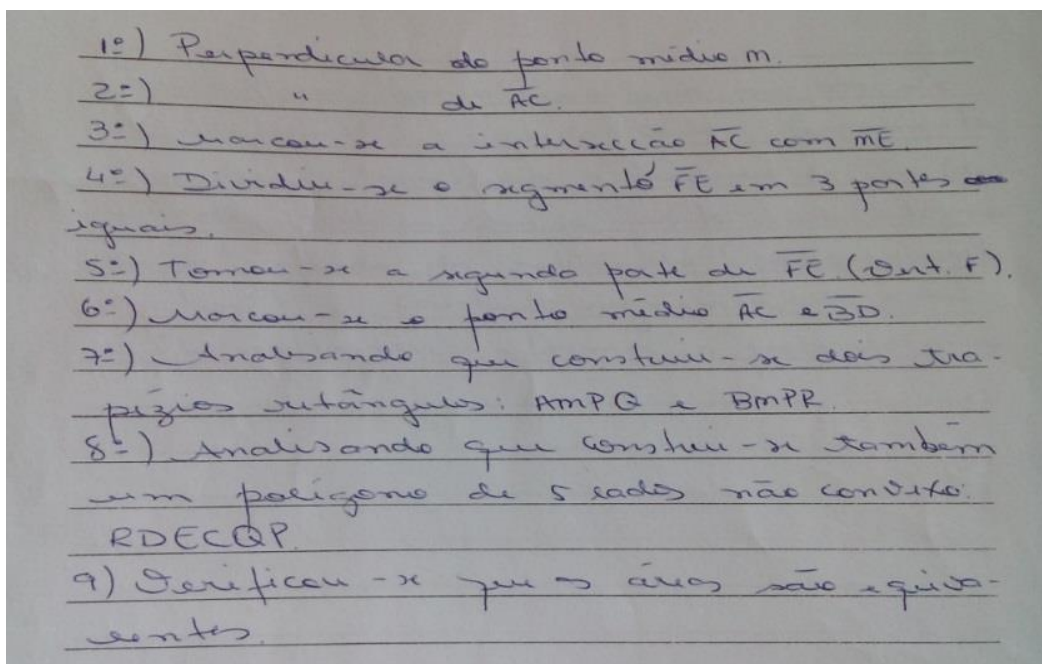


Figura 50: Registro discursivo de P3.

Fonte: Autora.

Os demais professores não conseguiram concluir a tarefa nesse registro.

Por fim, ao se disponibilizar a figura na forma de EG, P1 tentou resolver o problema particionando a figura em três subfiguras (triângulos), e utilizou o **registro numérico**, mas concluiu o problema de forma errada. P2 recorreu ao **registro algébrico**, mas também nada conseguiu tirar conclusões a respeito do problema. P4 utilizou a régua e tentou particionar a figura em três polígonos de mesma área. Mas, sem conseguir concluir o problema, escreveu:

A partição por expressões gráficas seria mais fácil para ser assimilada uma vez que poderia traçar os pontos médios e fazendo as tentativas que os polígonos pudessem ser iguais. Traçando os pontos e fazendo as áreas chegaria mais próximo a realidade do aluno.

Figura 51: Resposta de P4.

Fonte: Autora.

Assim, observa-se que P3 tentou por meio do MM e conseguiu resolver com o uso do SG. A maioria dos professores tentou por meio da EG, e dois dos quatro professores que tentaram apresentaram justificativas em língua formal, mas não conseguiram concluir corretamente o problema.

Ressalta-se que as provas (demonstrações) matemáticas só são aceitas quando feitas por meio do método dedutivo. Nesse grupo, nenhum professor recorreu a um tratamento figural heurístico aliado a um raciocínio dedutivo. Ou seja, dedutivamente, não se chegou à solução correta para o problema. Porém, o *software* GeoGebra proporcionou cálculos precisos, aliados à dinâmica que ele oferece, e isso permitiu que a solução – por meio dessa ferramenta – fosse aceita e correta.

Grupo 2 (EG → MM → SG)

Ao se disponibilizar a figura na EG, P7 e P8 tentaram resolver a tarefa, mas não o fizeram da maneira correta. P7 fez tratamentos figurais nesse registro, conforme a Figura 34, e, em um dos tratamentos, recorreu ao raciocínio dedutivo para comprovar se seu tratamento estava correto, conforme a transcrição a seguir:

P7: Tá, eu faria isso aqui, ó: segmento CM e o segmento DM por ser um quadrado. Aí, minha análise é a seguinte: pensando em área, poderia pensar como AC a base, e AM a altura. E AC é um dos lados do quadrado. Então, eu tenho CD como um dos lados do quadrado, mesmo ele não sendo retângulo, né? Eu tenho a mesma base e não tenho a mesma altura. Pera aí... fica um pouquinho diferente em três, né?

P8 fez uso da língua natural para explicar sua ideia, porém não articulou a língua formal para explicar dedutivamente seu raciocínio. Além disso, recorreu a um breve cálculo numérico somente para fazer a divisão de 360° em três partes iguais, conforme a Figura 35 e o registro discursivo a seguir:

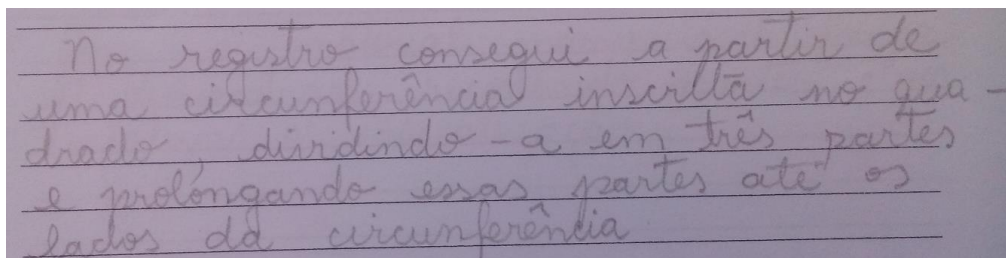


Figura 52: Resposta de P8.

Fonte: Autora.

Quanto aos demais professores, não houve destaque nesse registro.

Depois, ao se apresentar a figura na forma de MM, P6, intuitivamente, recortou o quadrado em três triângulos e, após fazer isso, observou que as áreas desses triângulos eram diferentes, não satisfazendo a tarefa:

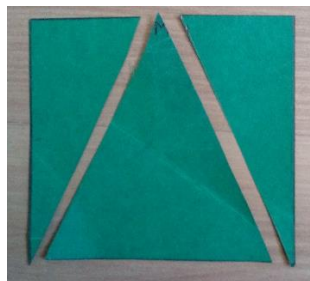


Figura 53: Operação figural de P6 no MM.

Fonte: Autora.

P8 e P10 tiveram algumas ideias, mas não as executaram. Já P7 e P9 não tentaram resolver a tarefa com o MM.

Por fim, ao se disponibilizar a figura no SG, P6 resolveu a tarefa, porém não usou o ponto médio em uma das subfiguras construídas, conforme a Figura 37. Mas foi possível justificar, por meio da língua formal e natural, a sua construção.

P7 e P9 fizeram várias tentativas com o SG, mas, infelizmente, não conseguiram concluir o problema, enquanto P8 e P10 não tiveram ideias e, portanto, não fizeram tentativas para resolver a tarefa.

Observa-se que a maioria dos professores tentou resolver o problema por meio do SG, porém somente P6 justificou seu raciocínio e tratamentos figurais por meio da língua formal e natural. Nota-se que P8 tentou resolver o problema somente por meio da EG; P9, com o SG; e P10, com o MM. O uso dos registros na tentativa de resolver a tarefa foi bem variado.

Nesse grupo, nenhum professor conseguiu chegar a uma solução que satisfizesse o problema.

Grupo 3 (SG → EG → MM)

Ao se disponibilizar a figura no SG, os professores P11, P12, P13 e P14 não conseguiram resolver o problema, embora P13 e P14 tenham feito várias tentativas, e P13 tenha utilizado a língua natural na seguinte resposta:

P13: “Achei essa atividade difícil, pois tudo que pensei no início e sabendo que tinha que utilizar o ponto M, ficaria com o quadrado dividido em partes de números pares. Pensei em seguida, achar o ponto médio das metades dos segmentos e ligar com o lado oposto, percebi que o retângulo formado no centro teria o dobro da área dos outros dois. Pensei depois em dividir a metade do segmento em três partes, mas não continuei a resolução, isso tudo no geogebra”.

P15 conseguiu chegar a uma solução próxima da correta, conforme a Figura 39. Tal solução foi alcançada por meio de tentativas e movimentos do ponto E, até que a medida da área de cada uma das três subfiguras ficasse bem próxima. Não houve justificativa por P15 para tal solução, ou seja, não houve uso de raciocínios dedutivos e nem recorrência a outros recursos que pudessem ajudar na comprovação matemática da solução para o problema.

Em seguida, ao se apresentar a figura na forma de EG, P12 e P13 tentaram resolver o problema, mas não conseguiram chegar a uma solução. P11 resolveu a tarefa, mas não da forma correta. Ele dividiu um dos lados da representação do quadrado em três partes de mesma medida, usando o ponto médio para marcar 0,5 cm para a direita e 0,5 cm para a esquerda, conforme a Figura 40. Tal raciocínio não solucionou o problema, pois não usou o ponto médio como elemento das subfiguras, e apelou para medidas (0,5 cm), por se tratar de um caso específico e não generalizado matematicamente.

Nesse mesmo registro, P14 resolveu o problema e, por meio da língua formal, explicou seu raciocínio dedutivo geométrico, comprovando sua solução, conforme a Figura

41. Porém, não utilizou o ponto médio do segmento \overline{AB} em todas as subfiguras, usando-o somente em duas das três construídas.

P15 resolveu a tarefa, mas sua solução não está correta, conforme a Figura 42, e escreveu em sua folha de respostas:

P15: “foi utilizado a semelhança de triângulos e chegou-se a um resultado”.

Observando a Figura 42, é possível notar que as áreas 1 e 2 são iguais, porém as áreas das partes que formam a região 3 resultam na soma de 1 e 2, isto é, $A_3 = A_1 + A_2$.

Por fim, ao se disponibilizar a figura no MM, P11 e P12 tentaram resolver a tarefa, utilizando medidas e divisões em partes pares, mas não obtiveram sucesso. P13 e P15 não tentaram resolver o problema com o MM, enquanto P14 resolveu-o, utilizando a mesma ideia da EG, conforme a Figura 46.

Observa-se que a maioria dos professores tentou resolver o problema por meio da EG, porém somente P14 conseguiu aproximar-se da solução. Nota-se que P15 tentou concluir o problema por meio do SG e da EG, e também se aproximou da solução correta quando utilizou o SG.

Considerações:

Tal problema foi resolvido corretamente somente por meio do SG, por P3, do seguinte modo:

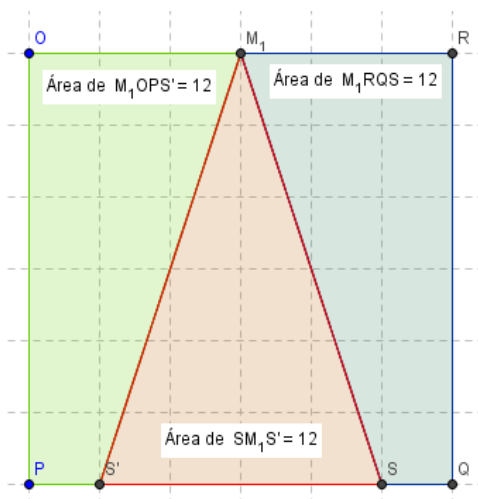


Figura 54: Solução 2 de P3 no SG.

Fonte: Autora.

Porém, P3 não apresentou justificativas em língua formal para tal solução.

Houve tentativas de solução que se aproximaram de respostas corretas:

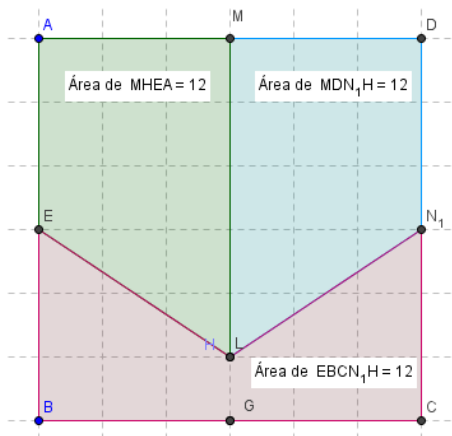


Figura 55: Solução 1 de P3 no SG.
 Fonte: Autora.

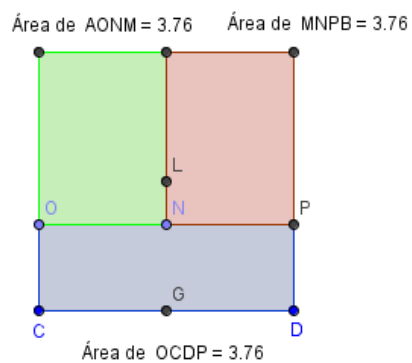
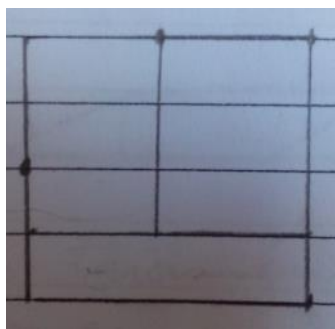


Figura 56: Soluções de P6 na EG e no SG.
 Fonte: Autora.

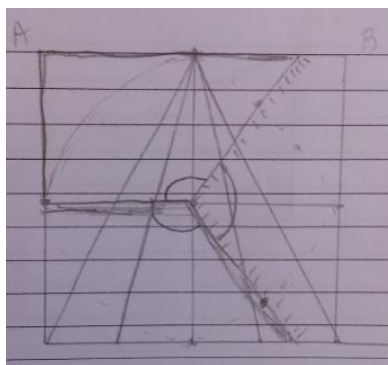


Figura 57: Solução de P8 na EG.
 Fonte: Autora.

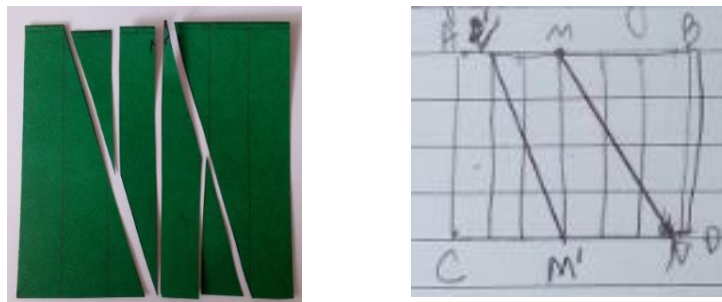


Figura 58: Soluções de P14 no MM e na EG.

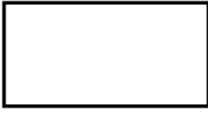
Fonte: Autora.

Em todos os caso apresentados anteriormente (Figura 55 a 58), o ponto M não foi utilizado em uma das subfiguras construídas. Por isso, tais soluções não podem ser consideradas corretas.

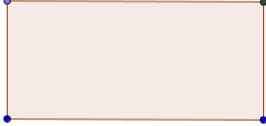
Destaca-se que, no grupo 1 (MM \rightarrow SG \rightarrow EG), embora P3 tenha realizado a tarefa de duas formas distintas, utilizando o SG, esse foi o segundo registro a ser apresentado. Ou seja, P3 não conseguiu resolver o problema por meio do MM, e também não teve ideia diferente ao utilizar a EG, resolvendo corretamente apenas no contato com o SG. E no grupo 3 (SG \rightarrow EG \rightarrow MM), P14 dividiu o quadrado em seis partes iguais, porém reconfigurou as partes de modo errado, não conseguindo resolver corretamente a tarefa. Desse modo, conclui-se que, efetivamente, a tarefa foi resolvida somente por meio do SG e por um único professor.

6.4 Análise da Tarefa 4


Tarefa 4: Transformar o retângulo em um paralelogramo equivalente que não seja retângulo (baseado em DUVAL, 2005, p. 14).



Usando EG



Usando SG



Usando MM

Figura 59: Tarefa 4.

Fonte: Autora.

Solução, conforme a Figura 60:

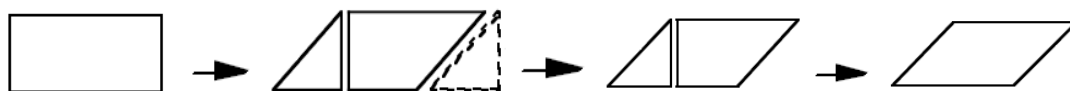


Figura 60: Solução da Tarefa 4.

Fonte: DUVAL, 2005.

Essa tarefa ficou caracterizada como:

- um problema de Nível 1, tanto no registro de representação figural na forma de MM quanto no SG e na EG. Tal fato se deve à não necessidade de uma apreensão discursiva explícita durante o tratamento figural necessário. Tal tratamento é diretamente proveniente da operação a ser realizada na figura. A apreensão operatória deixa evidentes os tratamentos figurais a serem realizados.

Quanto às análises, tem-se o seguinte:

6.4.1 Análise da compreensão

A1: O uso de tratamento figural para resolver o problema

Para a resolução dessa tarefa, foi necessário o uso de tratamentos figurais, de modo a transformar o retângulo dado em um paralelogramo não retângulo de área equivalente à figura de partida. Não é explicitamente necessária a justificativa da solução por meio de um registro discursivo; somente o tratamento figural basta para concluir a tarefa.

Grupo 1 (SG → MM → EG)

Todos os professores realizaram tratamentos figurais no SG, e esses tratamentos foram diferentes. O professor P1 pensou em “recortar” um triângulo retângulo e transpor esse triângulo recortado, conforme a figura a seguir:



Figura 61: Tratamento de P1 no SG.

Fonte: Autora.

Já os professores P2, P3, P4 e P5 movimentaram horizontalmente os vértices superiores ou inferiores do retângulo até que este se tornasse um paralelogramo não retângulo:

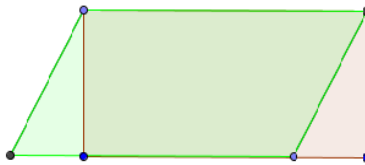


Figura 62: Movimento dos vértices do retângulo no SG.

Fonte: Autora.

Os professores P2 e P3 realizaram tratamento discursivo neste registro:

P2: “No GeoGebra, a partir de um dos vértices arrastar com o mouse uma medida determinada sobre o lado ‘maior’. Fazer o mesmo procedimento no vértice oposto. Depois traçar os segmentos dos pontos determinados até os vértices que não foram movimentados”.

P3: “Tomar um ponto qualquer na base do retângulo. Em seguida, com a ferramenta compasso, transferir a medida de um (desses) dos vértices com o ponto indicado no lado oposto do retângulo (prolongamento da base) e construir segmentos de reta de maneira a formar o paralelogramo”.

Nota-se que P2 e P3 realizaram tratamentos diferentes no mesmo registro figural (SG).

Em seguida, ao se disponibilizar a figura no MM, P1, P3 e P5 recortaram e transpuseram o triângulo retângulo recortado para o outro lado do retângulo. Conforme a fala de P5 e a Figura 63:

P5: *Eu posso recortar ele e transpor para o outro lado; aí, essa parte que eu vou recortar, coloco pra lá.*



Figura 63: Tratamento de P5 no MM.

Fonte: Autora.

P4 dobrou os triângulos, conforme a Figura 64:

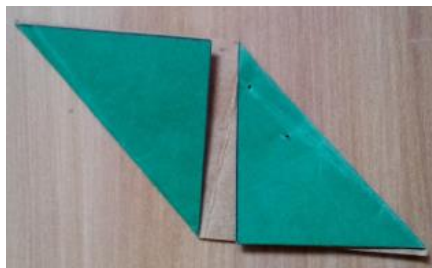


Figura 64: Tratamento de P4 no MM.

Fonte: Autora.

E explicou:

P4: “O paralelogramo seria através do material manipulável, fazendo medidas precisas, (traçando) dobrando de forma que ficasse dois triângulos semelhantes com ângulos de 90 graus tendo como referência segmento de reta”.

Somente a título de observação, nota-se que o professor fala em triângulos semelhantes (e não congruente, como deveria ser), e também se refere a triângulos com ângulos de 90° , quando quer dizer triângulos retângulos. Duval (2014) defende que a utilização da linguagem, seja ela falada ou escrita, cumpre, além da função social, funções cognitivas. Dentre elas, encontra-se a tomada de consciência. No caso de P4, então, houve um uso inadequado de nomenclaturas e referências aos objetos matemáticos em questão.

Com o uso da EG, P2 e P5 transpuseram o triângulo retângulo marcado no retângulo, conforme a Figura 65:

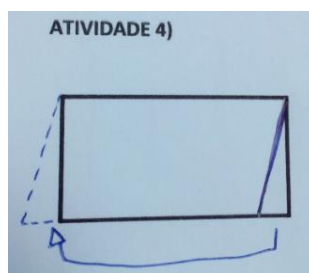


Figura 65: Tratamento de P2 na EG.

Fonte: Autora.

P4 desenhou dois triângulos retângulos e os retirou, de modo a formar o paralelogramo não retângulo, seguindo o mesmo raciocínio do MM, conforme a Figura 66:

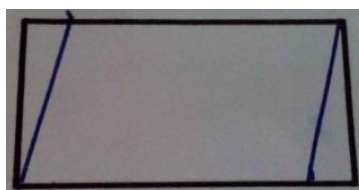


Figura 66: Tratamento de P4 na EG.

Fonte: Autora.

Porém nenhum professor efetuou um tratamento discursivo simultâneo ao tratamento figural.

Nesse grupo, a maior parte das variações cognitivas ocorreu no contato com o SG, e não houve tratamentos discursivos associados ao uso da figura na forma de EG.

Houve também uma quantidade de tratamento figural satisfatória, efetuada por todos os professores na tarefa proposta. No SG, destaca-se o deslocamento (mobilidade) dos vértices; no MM, o recorte dos triângulos retângulos; e na EG, a transposição do triângulo retângulo.

No contato de P2, P3 e P5 com o SG, a ideia foi a de movimentação de dois dos quatro vértices do retângulo, de modo a torná-lo um paralelogramo não retângulo. No entanto, no contato de P2 com a figura na forma de EG, seu tratamento consistiu no recorte do triângulo retângulo e na sua transposição. E P3 e P5 também mudaram de ideia, fazendo também o recorte do triângulo retângulo e a sua transposição na representação figural na forma de MM.

Grupo 2 (EG → SG → MM)

Somente P9 e P10 efetuaram tratamentos figurais na EG, e ambos apresentaram variações cognitivas nesse registro.

O professor P9 fez um tratamento figural da seguinte forma:

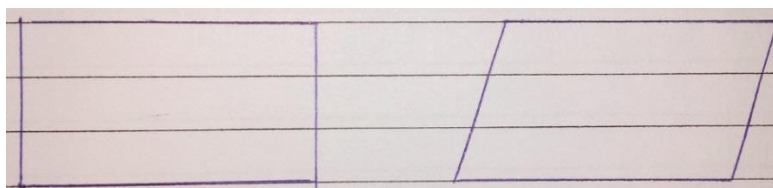


Figura 67: Tratamento de P9 na EG.

Fonte: Autora.

P9 desenhou o retângulo na folha de respostas e, em seguida, desenhou um paralelogramo:

Pesquisadora: *Então, o que você fez para transformar esse retângulo em um paralelogramo?*

P9: *Só mudei aqui, que estava reto, e coloquei em diagonal, essa reta eu coloquei em diagonal.*

Observa-se que P9 disse: “*estava reto e coloquei em diagonal*”, como se a diagonal não pudesse ser considerada um segmento de reta. O “reto” a que P9 se referiu diz respeito a um “segmento de reta” não inclinado, para esclarecer.

Nesse caso, P9 efetuou um tratamento que consistiu na movimentação dos vértices superiores do retângulo. Mesmo sem justificativas lógicas, um tratamento figural foi realizado.

O professor P10 também desenhou seu raciocínio na forma de EG na folha de respostas, conforme a figura a seguir:

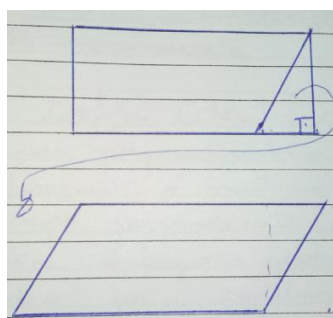


Figura 68: Tratamento de P10 na EG.

Fonte: Autora.

E explicou:

P10: “Para transformar um retângulo em um paralelogramo ambos são quadriláteros e retas paralelas congruentes através dos três registros figurais, observei que fazendo um recorte formando um triângulo retângulo juntando no retângulo forma um paralelogramo, pois as retas opostas são paralelas e congruentes”.

Observa-se que P10 tentou associar ao tratamento figural um tratamento discursivo.

Em seguida, com o uso do SG, somente os professores P9 e P10 efetuaram tratamentos figurais, e P10 os associou a tratamentos discursivos. A ideia de P9 permaneceu em movimentar os vértices superiores do retângulo até que este se tornasse um paralelogramo não retângulo. Já P10 manteve a ideia de recortar um triângulo retângulo em um dos lados do retângulo e encaixá-lo do outro lado, de modo a formar o paralelogramo não retângulo pedido na tarefa.

Ao se disponibilizar a figura no MM, todos os professores efetuaram tratamentos figurais. Os professores P6 e P9 resolveram da seguinte forma:



Figura 69: Tratamento de P9 no MM.

Fonte: Autora.

Houve tratamento discursivo associado a um tratamento figural por parte de P9, de modo a tentar justificar a igualdade das áreas do retângulo (figura de partida) e do paralelogramo não retângulo (figura de chegada):

P9: “No material manipulável eu cortei o retângulo e coloquei o triângulo retângulo dos dois lados sobrepondo o paralelogramo”.

Os professores P7 e P10 resolveram do seguinte modo:

P7: “Recortei em uma das extremidades do retângulo um triângulo e base e altura qualquer e colei sobre a altura do outro lado do retângulo, preservando a superfície e formando o paralelogramo”.

Conforme a Figura 70 que mostra a resolução de P10:



Figura 70: Tratamento de P10 no MM.

Fonte: Autora.

Já P8 resolveu a tarefa utilizando tentativa e erro, e chegou à seguinte solução:

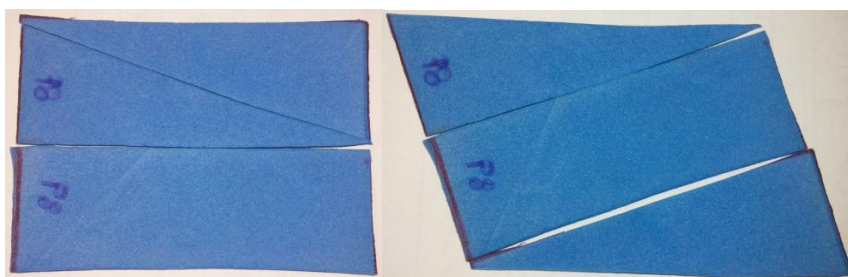


Figura 71: Tratamento de P8 no MM.

Fonte: Autora.

E, com base em seu raciocínio, P8 escreveu:

P8: “Com o material manipulável foi fácil demonstrar, recortando partes e por tentativas e visualização”.

Desse modo, vê-se que P8 resolveu a tarefa recortando várias subfiguras, e atribuiu tal fato à possibilidade de tentativas e visualizações que o material manipulável proporciona.

Nesse grupo, a maior parte dos tratamentos figurais e das variações cognitivas ocorreu no contato com o MM. Nessa tarefa, o MM foi o último registro apresentado e o que mais possibilitou a associação entre os tratamentos figurais e os discursivos. Os professores P6 e P8 não apresentaram variações cognitivas em nenhum dos registros.

Todos os professores resolveram, de alguma forma, a tarefa proposta, efetuando tratamentos figurais em ao menos um dos registros. As ideias suscitadas no contato com a EG e o MM foram basicamente as mesmas, sendo baseadas no recorte do triângulo retângulo e sua transposição. No SG, novamente, destacou-se a movimentação dos vértices superiores do retângulo dado.

Grupo 3 (MM → EG → SG)

Os professores P11, P12 e P14 fizeram um tratamento figural no MM com base no recorte de um triângulo retângulo e sua transposição para o outro lado do retângulo, da seguinte forma:

P14: Deixa eu te mostrar o que eu fiz. Fiz assim. Daí retirei um assim, coloquei pra cá e tive que virar.



Figura 72: Tratamento de P14 no MM.

Fonte: Autora.

O professor P13 recortou dois triângulos retângulos, um de cada lado, e os sobrepôs à figura recortada, chegando ao paralelogramo, conforme a Figura 73:

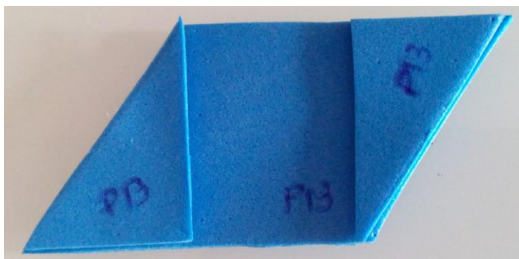


Figura 73: Tratamento de P13 no MM.

Fonte: Autora.

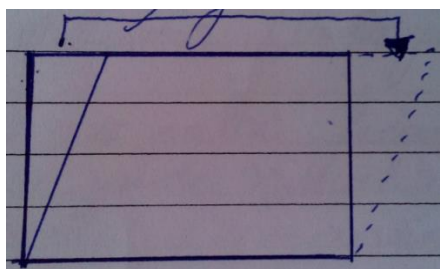
E justificou:

P13: “Peguei uma medida qualquer, de forma que nas extremidades eu conseguiria formar um triângulo retângulo, onde foram recortados e sobrepostos depois formando o paralelogramo mantendo a mesma área”.

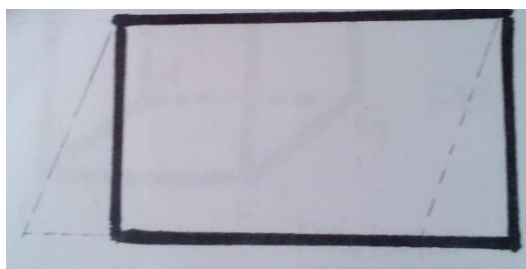
P15 recortou um triângulo retângulo, mas não soube onde encaixá-lo para resolver a tarefa.

Houve variações cognitivas durante a execução da tarefa por P11, P13 e P14 durante o uso do MM. Os demais professores não manifestaram interação entre o tratamento figural e o tratamento discursivo.

Em seguida, com o uso da EG, o professor P12 não realizou tratamento figural nesse registro, enquanto P11, P13, P14 e P15 usaram os mesmos tratamentos figurais, associados a variações cognitivas:



P11



P13

Figura 74: Tratamentos figurais de P11 e P13 na EG.

Fonte: Autora.

No contato com a EG, P13 mudou sua forma de tratamento figural daquela que havia realizado com o MM.

Segue o registro em língua natural de P14:

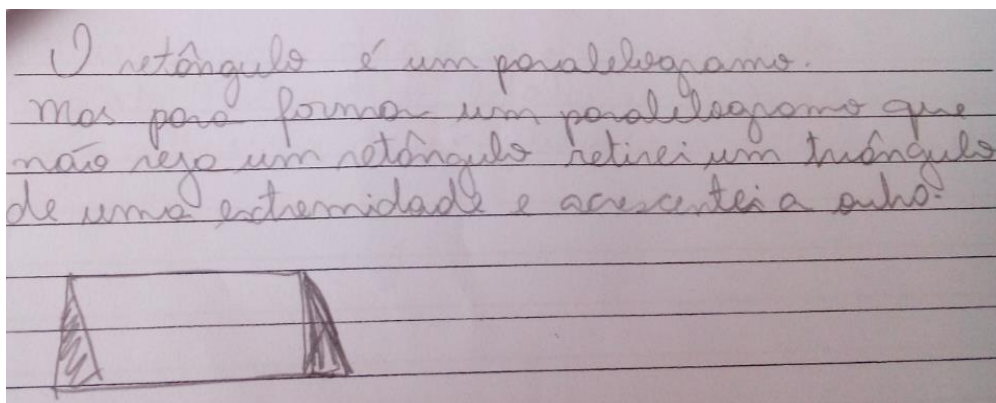


Figura 75: Registro em língua natural de P14.

Fonte: Autora.

P14 explicou o tratamento realizado na figura na forma de EG, e P15 conseguiu resolver o problema da forma correta, após ter tentado resolvê-lo por meio do MM sem sucesso, e associou também sua solução a tratamentos discursivos.

Ao se disponibilizar a figura no SG, os professores P12, P13 e P15 efetuaram tratamentos figurais, mas nenhum deles apresentou variações cognitivas. P12 resolveu da seguinte forma:

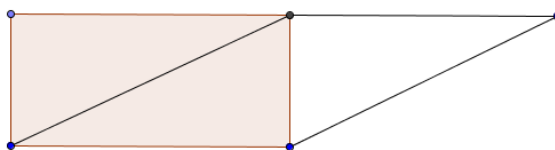


Figura 76: Tratamento de P12 no SG.

Fonte: Autora.

É possível notar que esse tratamento é preciso e correto, já que os triângulos (as subfiguras) são todos congruentes. Essa resolução, por P12, não foi imediata. Ou seja, P12 fez vários tratamentos até chegar à construção dessa figura, e esses tratamentos diferenciaram-se do tratamento realizado anteriormente no contato com o MM.

P13 repetiu a mesma ideia da EG (recorte do triângulo retângulo e encaixe do lado oposto), e P15 não conseguiu finalizar a tarefa, mesmo efetuando deslocamentos dos vértices do retângulo.

Nesse grupo, a maior parte das variações cognitivas ocorreu no contato com o MM. Nessa tarefa, o MM foi o primeiro registro apresentado e o que mais possibilitou os tratamentos figurais, enquanto o SG foi o último registro e não possibilitou variações cognitivas com nenhum dos professores.

Todos os professores resolveram, de alguma forma, a tarefa proposta, efetuando tratamentos figurais em ao menos um dos registros. As ideias suscitadas no contato com a EG e o MM foram basicamente as mesmas, sendo baseadas no recorte do triângulo retângulo e sua transposição. O SG se destacou, novamente, pela possibilidade de movimentação dos vértices da figura apresentada.

Considerações:

O tratamento é um tipo de transformação que ocorre dentro de um mesmo registro e, conforme Duval (2003) é o que quase sempre chama a atenção, do ponto de vista pedagógico, porque corresponde a procedimentos de justificação.

Com base nos dados obtidos, foi possível concluir que, no que tangencia os tratamentos figurais a serem realizados para solucionar a tarefa, a figura na forma de MM possibilitou que fossem realizados mais tratamentos, mesmo quando esse registro foi apresentado por último. Duval (2005) escreve que os objetos físicos podem ser usados para simular fisicamente decomposições figurais mereológicas em que esses objetos são separados e unidos de forma diferente da anterior.

O registro na forma de MM também possibilitou o maior número de variações cognitivas, ou seja, de interação entre o tratamento figural e o discursivo. Duval relata uma sequência de atividades proposta a alunos de 10-11 anos para a aprendizagem da simetria axial. Nessa atividade, Duval utilizou a manipulação de objetos físicos (fase I), construção de representações figurais 2D/2D (fase II) e, finalmente, um recurso à linguagem para fixar o que seria desenvolvido anteriormente (fase III) (DUVAL, 2011, p. 142). Como resultado das observações realizadas, o autor observou, dentre outras coisas, que não houve nenhum efeito de transferência das manipulações materiais para a designação verbal, ou seja, a escrita: “a incompreensão concerne à designação das unidades figurais, principalmente os pontos e a maneira de utilizar as palavras para designar os segmentos” (DUVAL, 2011 p. 144). Nesse sentido, pensando na atividade aqui proposta com professores (e não alunos), vê-se que essa transferência foi facilitada com o uso da manipulação dos materiais, já que houve reconhecimento e discriminação, pelos professores, das unidades figurais no objeto físico, mesmo se tratando de um caso 2D/3D, ou seja, representação de um paralelogramo (2D) em um objeto físico (3D).

A seguir, um quadro explicativo com os grupos e os registros mais utilizados em cada grupo, tanto nos tratamentos figurais quanto em variações cognitivas:

Quadro 22: Tratamentos figurais na Tarefa 4.

GRUPOS	TRATAMENTOS FIGURAIS	VARIAÇÕES COGNITIVAS
G1 (SG → MM → EG)	SG	SG
G2 (EG → SG → MM)	MM	MM
G3 (MM → EG → SG)	MM	MM

Fonte: Autora.

A2: A mobilização de um segundo registro para resolver o problema

Para a resolução dessa tarefa, não era necessária a mobilização de outro registro, já que esta poderia ser realizada somente por meio de tratamentos figurais. O uso da língua natural foi decorrente de um tratamento discursivo associado ao figural, conforme explicitado na A1.

Grupo 1 (SG → MM → EG)

Nesse grupo, houve poucas mobilizações de outros registros. As resoluções foram, basicamente, baseadas nos tratamentos figurais. Desse modo, dá-se destaque a algumas ideias que se apoiaram no **registro numérico**. Ao utilizar o SG, P4 efetuou o deslocamento dos vértices superiores do retângulo. No entanto, no contato com o MM, o mesmo professor falou:

P4: *Vai precisar de umas medidas mais exatas, não?*

E escreveu:

P4: “O paralelogramo seria através do material manipulável, fazendo medidas precisas (traçando) dobrando de forma que ficasse dois triângulos semelhantes com ângulos de 90 graus tendo como referência segmento de reta”.

No contato com o SG, o professor P5 afirmou:

P5: *Mediria 1 cm, por exemplo, cortaria aqui, esse lado aqui também, cortaria aqui, esse aqui e esse aqui. Cortaria aqui para transformar em um paralelogramo. E para transformar em um retângulo novamente, teria que... ou se quisesse movimentar com o GeoGebra, dá para movimentar.*

Logo depois, durante o uso do MM, P5 falou:

P5: *Ou, também, eu posso recortar ele e transpor para o outro lado; aí essa parte que eu vou recortar, coloco pra lá.*

Pesquisadora: *Certo.*

P5: *Só que, aí, usando recorte.*

E, finalmente, no contato com a EG, afirmou:

P5: *É igual eu falei: pegar aqui, por exemplo, se eu quiser 0,5 cm, a figura pequena. Mas se eu usar muito a figura, fica meio deformada.*

É possível observar que, nesse último comentário, P5 retornou à ideia de recortes com medidas para que a área fosse preservada.

Assim, é possível notar que somente P4 e P5 mobilizaram - ou, pelo menos, pensaram em mobilizar - outro registro - no caso, o **registro numérico**. A maioria dos professores resolveu a tarefa sem recorrer a outros registros, já que a resolução pode ser alcançada somente por meio da decomposição da figura (tratamento figural).

Grupo 2 (EG → SG → MM) e Grupo 3 (MM → EG → SG)

Nesses grupos, não houve mobilizações de outros registros. Como a resolução da tarefa pode ser alcançada por meio de decomposição da figura em subfiguras, todas as resoluções foram baseadas em tratamentos figurais.

Considerações:

Segundo Duval, “Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros” (DUVAL, 2011, p. 99). O autor explica que, mesmo se, de um ponto de vista matemático, pareça que, para resolver uma tarefa proposta, o sujeito esteja usando um único registro, a compreensão necessária para chegar a uma conclusão mobiliza, necessária e implicitamente, um segundo registro. No caso da geometria, mobiliza-se a linguagem e a visualização.

Para resolver a Tarefa 4, não havia necessidade de mobilização explícita de outro registro. Ou seja, somente a realização de tratamentos figurais, aliados a um raciocínio dedutivo, já seria suficiente para concluir a tarefa com êxito. Desse modo, verificou-se que dois professores – P4 e P5 – mobilizaram o registro numérico de modo a apenas fazer recortes mais precisos nos materiais, e não para resolver a tarefa. Portanto, o registro numérico foi utilizado somente para uma precisão maior nos recortes, e a solução da tarefa foi feita mediante o tratamento figural tanto no SG quanto no MM e na EG.

Duval (2011, p. 94) reflete que o ensino de geometria passou por uma mudança importante nos últimos 15 anos. Essa mudança diz respeito a uma abordagem empírica dos objetos no contexto de problemas quanto aos objetivos do ensino e à maneira de introduzir os objetos geométricos a serem estudados. Assim, é possível apresentar duas justificativas para a não mobilização de outros registros na Tarefa 4:

* para resolvê-la, não havia necessidade de mobilização explícita de outro registro: apenas um tratamento figural aliado a um raciocínio lógico;

** o contexto atual de ensino, conforme visto anteriormente em Duval (2011), tem privilegiado o uso de abordagens empíricas na aprendizagem de geometria;

A seguir, um quadro que apresenta os dados comentados anteriormente:

Quadro 23: Mobilização de outros registros na Tarefa 4.

GRUPOS	REGISTRO NUMÉRICO
G1 (SG → MM → EG)	SG/ MM/ EG
G2 (EG → SG → MM)	-----
G3 (MM → EG → SG)	-----

Fonte: Autora.

6.4.2 Análise das razões

A3: Apreensão perceptiva

Com essa tarefa, é possível analisar se o registro figural influenciou o professor em suas reações imediatas e automáticas diante da figura representada.

Grupo 1 (SG → MM → EG)

Ao se apresentar o retângulo na forma de SG para os professores desse grupo, todos expressaram ao menos uma reação imediata e automática diante da representação figural no GeoGebra. Os professores P1 e P3 sugeriram o recorte e a transposição do triângulo retângulo, conforme o comentário de P3:

P3: Não sei, mas seria colocar um ponto aqui, né? Aí, recortar esse aqui e virar lá.

Já P2, P4 e P5 tiveram como reação imediata a ideia de deslocar os vértices superiores do retângulo:

P4: *Vamos supor um ponto, deslocar de forma que ele fique inclinado, se é que o GeoGebra desloca isso.*

Também é possível afirmar que, com base nas falas e escritas dos professores, ficou manifesto que aspectos importantes da figura - como, por exemplo, suas unidades figurais - estavam evidentes para eles nesse registro, conforme a resposta redigida por P2:

P2: “No Geogebra, a partir de um dos vértices arrastar com o mouse uma medida determinada sobre o lado “maior”. Fazer o mesmo procedimento no vértice oposto.

Ao se apresentar a mesma figura no MM, as reações imediatas de alguns professores foram diferentes. P1 e P3 mantiveram suas reações, enquanto P2 não teve reação imediata alguma. Já P4 se desvincilhou da ideia de deslocamento dos vértices para o uso de medidas e recortes, e P5, para o recorte e a transposição do triângulo retângulo:

P4: *Você vai precisar de umas medidas mais exatas, não?*

Aspectos importantes da figura continuaram evidentes, dando-se destaque para o fato de que P4 se atentou ao possível uso de medidas para transformar o retângulo em um paralelogramo não retângulo.

No contato com a mesma figura, porém no registro da EG, P1, P3 e P4 não esboçaram reações imediatas e automáticas. P2 teve como reação imediata o uso de recorte e transposição do triângulo retângulo recortado, e P5 teve como reação imediata o uso de medidas.

Com base nos dados coletados, nota-se que muitos professores reconheceram imediatamente os principais aspectos da figura nos diferentes tipos de registro, satisfazendo, então, o que Duval (1999) chama de primeiro nível na apreensão de figuras geométricas: o reconhecimento das diferentes unidades figurais discerníveis na figura.

É parte da apreensão perceptiva de formas a atitude da reação imediata e automática (DUVAL, 2012b). Foi possível notar que as reações mudaram de acordo com o registro figural apresentado, pois:

- P2 usou deslocamento dos vértices superiores do retângulo no SG → não teve nenhuma reação imediata diante do MM → recortou e transpôs o triângulo retângulo recortado durante o uso da figura na forma de EG.

- P4 usou deslocamento dos vértices superiores do retângulo no SG → pensou no uso de medidas para cortar os triângulos retângulos no MM → não teve nenhuma reação imediata diante da EG.

- P5 usou deslocamento dos vértices superiores do retângulo no SG → recortou e transpôs o triângulo retângulo recortado durante o uso da figura na forma de MM → pensou no uso de medidas para cortar os triângulos retângulos na EG.

As reações diante dos registros apresentados foram variadas, mas é possível destacar que, no SG, a maior parte das reações imediatas consistiu no deslocamento dos vértices superiores do retângulo, enquanto no MM foi o recorte dos triângulos retângulos e sua transposição para o lado oposto; já na EG, a maioria dos professores não apresentou reação imediata alguma.

Dessa forma, observou-se também que, nessa tarefa e com esses materiais, não houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos, como, por exemplo, lei de fechamento da figura, já que ideias de subfiguras (o recorte de triângulos retângulos, por exemplo) foram propostas durante as possíveis resoluções.

Grupo 2 (EG → SG → MM)

Ao se apresentar o retângulo na forma de EG para os professores desse grupo, somente os professores P6, P7 e P10 expressaram alguma reação imediata e automática diante dessa representação figurar. Esses professores sugeriram o recorte de um ou dois triângulos retângulos e sua transposição, de modo a formar o paralelogramo não retângulo:

P6: Você tem que cortar dois triângulos e colocar lá na ponta.

P10: Eu posso recortar aqui e desenhar como ficaria.

Pesquisadora: Certo. Ok.

P10: Eu recortei aqui, pensei assim. Daí eu peguei essa parte aqui...

Pesquisadora: Certo.

P10: E coloquei aqui!

Pesquisadora: Perfeito!

P10: Mas assim, olha, eu recortei aqui. Daí eu virei, era um triângulo, né? Daí eu virei e coloquei aqui.

Conforme a Figura 68.

Ao se apresentar a mesma figura no MM para os professores desse grupo, todos eles expressaram ao menos uma reação imediata e automática diante da representação figurar. Os professores P6, P7, P8 e P10 pensaram imediatamente em retirar um triângulo retângulo e o transpor para o outro lado do retângulo. Já P9 pensou em tirar os triângulos:

Pesquisadora: *Aí, no Material Manipulável, com a gente faria?*

P9: *Será que se eu cortasse assim? Daria certo cortar aqui?*

Ao se apresentar a mesma figura no SG, P6, P7 e P8 não esboçaram reações, e P9 e P10 tiveram reações diferentes:

Pesquisadora: *Então, o que você fez para transformar esse retângulo em um paralelogramo?*

P9: *Só mudei aqui, que estava reto, e coloquei em diagonal, essa reta eu coloquei em diagonal.*

P9 pensou em movimentar os vértices superiores do retângulo, e P10 manteve a ideia anterior de retirar um triângulo retângulo e transpô-lo para o outro lado do retângulo.

Com base nos dados coletados, nota-se que vários professores reconheceram imediatamente os principais aspectos da figura nos diferentes tipos de registro. E, além disso, foi possível notar que as reações mudaram de acordo com o registro figural apresentado, pois:

- P8 não teve reação imediata diante da figura em suas formas de EG e SG → recortou e transpôs o triângulo retângulo recortado para o outro lado do retângulo em MM.

- P9 não teve reação imediata diante da EG → fez o deslocamento dos vértices superiores do retângulo no SG → recortou dois triângulos retângulos do retângulo no MM.

As reações diante dos registros apresentados foram variadas, mas é possível destacar que, no SG, a maioria dos professores não apresentou reação imediata e automática, enquanto que, com a figura na forma de EG e MM, as principais ideias imediatas versaram sobre o recorte do triângulo retângulo e sua transposição.

Assim, observou-se também que, nessa tarefa e com esses materiais, não houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos, como, por exemplo, lei de fechamento da figura, já que ideias de subfiguras (triângulos retângulos, por exemplo) foram propostas durante as possíveis resoluções.

Grupo 3 (MM → EG → SG)

Ao se apresentar o retângulo na forma de MM para os professores desse grupo, todos eles apresentaram como reação imediata e automática a ação de recortar a figura. Essa ação ocorreu imediatamente após a leitura do enunciado e o contato com a figura no MM:

Pesquisadora: *Então, o próximo. Começamos com o Material Manipulável.*

P11: *Recortando?*

Pesquisadora: *Pode ser.*

P11: *Eu recortaria aqui e aqui.*

Desse modo, notou-se que aspectos importantes da figura, tanto do retângulo inicial, quanto do paralelogramo pedido no enunciado, ficaram evidentes nesse registro, sem leis de agrupamento.

Ao se apresentar a mesma figura na forma de EG, o único professor que não teve reação imediata foi P12. Os demais apresentaram a mesma reação do registro anterior, reconhecendo os elementos figurais sem leis de agrupamento:

P13: *Essa parte que eu tiraria daqui, eu colocaria lá. Aqui, para virar um paralelogramo.*

Ao se apresentar a mesma figura no SG, diferentes reações imediatas foram observadas por parte dos professores participantes. Em primeiro lugar, destaca-se que somente P11 não teve qualquer reação imediata, e somente P13 teve a mesma reação do contato com os registros anteriores – recortar um triângulo retângulo e justapor na figura obtida. A reação imediata de P12 foi a de traçar uma das diagonais principais do retângulo e depois refletir sobre a figura até concluir o seu raciocínio e a tarefa. P14 pensou imediatamente que a base do retângulo poderia ter como medida exatamente o dobro de sua altura, e tentou, a partir dessa suspeita de informação, chegar a alguma solução:

Pesquisadora: *E agora, com o GeoGebra, qual a sua ideia?*

P14: *Esse daí não é o dobro desse daqui, né?*

P15 pensou em deslocar os vértices superiores do retângulo de modo a torná-lo um paralelogramo não retângulo, conforme o seu comentário logo após apresentar a figura no SG:

P15: *Pensei em alguma coisa mais ou menos assim... deslocar o ponto, né?*

Com base nos dados coletados, nota-se que vários professores reconheceram imediatamente os principais aspectos da figura nos diferentes tipos de registro. E, além disso, foi possível notar que as reações mudaram de acordo com o registro figural a ser apresentado, pois:

- P12 recortou e transpôs o triângulo retângulo recortado para o outro lado do retângulo no MM → não teve reação imediata diante da figura em suas formas de EG → traçou uma das diagonais principais do retângulo no SG.

- P14 recortou e transpôs o triângulo retângulo recortado para o outro lado do retângulo no MM e na EG → pensou em usar medidas com o SG.

- P15 recortou e transpôs o triângulo retângulo recortado para o outro lado do retângulo no MM e na EG → fez o deslocamento dos vértices superiores do retângulo no SG.

As reações diante dos registros apresentados foram variadas, mas é possível destacar que, no SG, cada professor apresentou uma reação imediata e automática diferente, mesmo sendo esse o último registro apresentado nessa tarefa.

Dessa forma, observou-se também que, nessa tarefa e com esses materiais, não houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos, como, por exemplo, lei de fechamento da figura, já que ideias de subfiguras (os triângulos retângulos, por exemplo) foram propostas durante as possíveis resoluções.

Considerações:

A figura apresentada para a resolução dessa tarefa é uma figura simples, pois se trata de um retângulo. Sendo assim, perceptivamente, estímulos como fechamento, identificação da forma, distâncias e número de dimensões são fáceis de se identificar. O reconhecimento de tais estímulos na figura compactua com a apreensão perceptiva figural (DUVAL, 2012c, p. 288).

Com o intuito de se analisar a Tarefa 4, algumas reações imediatas foram identificadas nos professores colaboradores e classificadas dentro do tipo de registro figural em que houve maior ocorrência. Desse modo, com base nos dados obtidos, foi possível concluir:

1) Sem reação imediata: a EG e o SG foram os registros figurais em que mais se identificou a falta de reações imediatas e automáticas. O uso da EG é bastante comum no ensino de geometria; já o uso dos SG, nem tanto. Cyrino e Baldini (2012) explicam que o uso das tecnologias exige do professor bases epistemológicas e conhecimentos que são diferentes dos presentes atualmente no ensino tradicional. Sendo assim, talvez esse seja um dos motivos pelo qual a maioria dos professores não apresentou reação alguma diante da visualização da figura nesse registro. É preciso destacar também que a maior concentração de falta de reações diante desse registro foi constatada quando o SG foi apresentado como segundo e terceiro registro, e não primeiro.

2) Recortar e transpor o triângulo retângulo: o MM foi o registro que mais possibilitou o recorte de um triângulo retângulo e sua transposição, de modo a tornar o retângulo –

figura de partida – um paralelogramo não retângulo – figura de chegada. Esse tratamento, que foi realizado imediatamente pela maioria dos professores, é o suficiente para se resolver a tarefa. Lorenzato (2010), com base em algumas experiências realizadas com MM, afirma que, antes de lidarem com objetos matemáticos, as pessoas precisam lidar com objetos físicos, pois estes proporcionam o conhecimento inicial – conhecimento físico – que direciona para a abstração matemática.

3) Somente recortar o triângulo retângulo: o MM também proporcionou somente o recorte do triângulo retângulo e tentativas de encaixá-lo, porém, nesse caso, sem sucesso. Para Lorenzato (2010), experimentar é investigar, e a experimentação facilita o levantamento de hipóteses, a busca de novos caminhos e sua constatação - e o MM proporciona tal ação diante da tentativa de uma solução.

4) Recortar dois triângulos retângulos: com o MM, um professor recortou dois triângulos retângulos, um de cada lado do retângulo, transformando a figura em um paralelogramo não retângulo e, em seguida, sobrepôs os dois triângulos retângulos sobre o paralelogramo não retângulo obtido, afirmando que as áreas das figuras de partida e chegada eram equivalentes. Nesse caso, o professor confundiu a constatação de natureza perceptual com demonstração. Lorenzato (2010) afirma que as conclusões baseadas apenas na intuição podem se contrapor ao raciocínio lógico-dedutivo, e o MM pode ser o responsável por isso.

5) Deslocamento dos vértices superiores do retângulo: o SG foi o registro figural que mais possibilitou o deslocamento dos vértices superiores do retângulo. Tal fato se deve à possibilidade de modificações figurais sem perda dos vínculos geométricos, conforme explicam Gerônimo, Barros e Franco (2010), ao enfatizar a dinamicidade que o GeoGebra proporciona aos seus usuários.

6) Traçar a diagonal do retângulo dado: o SG também foi o registro figural que mais suscitou a ideia de traçar uma das diagonais principais do retângulo dado em busca de encontrar a solução para a tarefa. O usuário do GeoGebra pode realizar uma grande quantidade de experiências que o leva à construção do conhecimento geométrico juntamente a investigações (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010).

7) Usar medidas e cortar: os três registros apresentados proporcionaram a recorrência imediata a medidas para solucionar a tarefa. Esse recurso a medidas não foi muito utilizado, porém apareceu em situações compartilhadas dos três registros (MM, SG, EG).

Segue o Quadro 24 com os dados:

Quadro 24: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 4.

GRUPOS	REAÇÕES IMEDIATAS E AUTOMÁTICAS						
	1	2	3	4	5	6	7
G1 (SG → MM → EG)	EG	MM			SG		MM/EG
G2 (EG → SG → MM)	SG	MM		MM	SG/EG		
G3 (MM → EG → SG)	EG/SG	MM	MM		SG	SG	SG

Fonte: Autora.

A4: Apreensão operatória

Para resolver essa tarefa, é possível explorar a **produtividade heurística** da figura, fazendo-se uma **reconfiguração intermediária** de suas partes. Ou seja, uma **modificação mereológica** que consiste no recorte da subfigura (no caso, o triângulo retângulo) com uma **modificação posicional** dessa subfigura para solucionar o problema, conforme a Figura 60.

Duval (2005) caracteriza tal decomposição como **heterogênea**, pelo fato de que tal modificação envolve unidades figurais de formas diferentes entre elas. Ou seja, para se resolver tal problema, é necessário dividir o retângulo em duas partes diferentes e assim formar um paralelogramo, como em um quebra-cabeça. Tal decomposição pode ser mais difícil, pois Duval (2005) explica que a decomposição heterogênea não é visualmente reversível, como a homogênea.

Grupo 1 (SG → MM → EG)

Todos os professores desse grupo realizaram tratamentos no SG associados a raciocínios dedutivos, ou seja, todos exploraram heurísticamente a figura nesse registro. As operações figurais realizadas foram variadas: P1 efetuou modificações mereológicas e posicionais: a modificação mereológica consistiu no recorte do triângulo retângulo do retângulo inicial, e a modificação posicional consistiu na mudança de posição desse triângulo de modo a construir o paralelogramo não retângulo, como mostrado na Figura 61.

Já os professores P2, P3, P4 e P5, nesse registro do SG, efetuaram uma modificação mereológica posicional, que consistiu no deslocamento dos vértices superiores ou inferiores do retângulo inicial até que este ficasse na forma de um paralelogramo não retângulo, conforme a Figura 62.

A seguir, os discursos de P2 e P4, respectivamente, durante sua construção do paralelogramo:

P2: Bom, se eu quero formar um paralelogramo, primeira coisa é destituir os ângulos retos, né? Porque o paralelogramo, uma das características, ele é um dos polígonos que não têm ângulo reto. Então, uma das questões seria determinar um segmento no lado superior a partir desse vértice, então eu venho aqui e determino esse segmento, fixo esse segmento e venho aqui no vértice oposto da direita, faço o mesmo sobre o segmento do lado maior, e daí eu trago esse vértice pra cá e da mesma maneira esse, e aí eu constituo um paralelogramo.

P4: Vamos supor um ponto, deslocar de forma que ele fique inclinado, se é que o GeoGebra desloca isso, teria que deslocar os dois pontos, né? Os dois pontos lá eu posso trazer um pouquinho pra cá.

É possível identificar que a figura de chegada de P2 e P4 era a mesma, porém os tratamentos realizados foram diferentes em cada caso.

Ao se disponibilizar a mesma figura representada no MM, os professores P1, P3 e P5 exploraram heurísticamente a figura e efetuaram uma modificação mereológica e posicional do triângulo retângulo recortado, conforme a Figura 63.

O professor P4 efetuou uma modificação mereológica ao dobrar o retângulo por meio de triângulos retângulos, de modo que este se tornasse um paralelogramo, conforme a Figura 64.

Ao se disponibilizar a mesma figura representada na EG, os professores P2 e P5 realizaram uma pesquisa heurística da figura, com uma modificação mereológica e posicional na troca do lado do triângulo retângulo “recortado” do paralelogramo. E P4 retirou dois triângulos da figura, efetuando então uma reconfiguração na forma de modificação mereológica, conforme a Figura 66.

Conclui-se que, nesse grupo, todos os registros possibilitaram explorações heurísticas e reconfigurações figurais. Dá-se destaque ao SG como o registro que mais possibilitou tais operações, e à EG, que menos suscitou essas ideias. Duval (2012c) explica que, em certos casos, as apreensões perceptivas favorecem as operações e, em outros

casos, ao contrário, podem inibi-las, pois os fatores que mexem com a visibilidade de uma operação podem ou não contribuir para a mobilização da operação necessária.

No uso dos três registros, ocorreram modificações dos tipos mereológicas e posicionais que auxiliaram para que os professores chegassem até a solução esperada para a tarefa. O uso do “deslocamento de vértice”, como uma modificação posicional, ocorreu somente no contato dos professores com o SG; nos demais registros, a ideia principal foi o “recorte” do triângulo retângulo e sua transposição para o lado oposto do retângulo dado.

Grupo 2 (EG → SG → MM)

Nesse grupo, somente P9 e P10 efetuaram operações figurais na EG. P9 desenhou o retângulo na folha de respostas e, em seguida, desenhou um paralelogramo, conforme a Figura 67:

Pesquisadora: *Então, o que você fez para transformar esse retângulo em um paralelogramo?*

P9: *Só mudei aqui, que estava reto e coloquei em diagonal; essa reta eu coloquei em diagonal.*

Nesse caso, P9 efetuou uma modificação posicional da figura, mas não se considera que houve uma exploração heurística, já que não houve uso de raciocínio dedutivo aliado à operação figural realizada.

P10 também desenhou seu raciocínio na folha de respostas, apresentando uma modificação mereológica (reconfiguração) e posicional realizada, conforme a Figura 68. Houve uma evidente exploração heurística da figura:

P10: *“Para transformar um retângulo em um paralelogramo ambos são quadriláteros e retas paralelas congruentes. Através dos três registros figurais, observei que fazendo um recorte formando um triângulo retângulo juntando no retângulo forma um paralelogramo, pois as retas opostas são paralelas e congruentes”.*

Em seguida, com o uso do SG, também, somente os professores P9 e P10 efetuaram operações figurais. A ideia de P9 consistiu em uma modificação posicional, baseada no movimento dos vértices superiores do retângulo até que este se tornou um paralelogramo não retângulo. Já P10 manteve a ideia de recortar um triângulo retângulo em um dos lados do retângulo e encaixá-lo do outro lado, de modo a formar o paralelogramo não retângulo pedido na tarefa, consistindo em uma modificação mereológica – no ato de recortar a subfigura triângulo retângulo – e uma modificação posicional – no ato de transpor o triângulo retângulo.

Ao se disponibilizar a figura no MM, todos os professores efetuaram operações na figura nessa representação. P6 não efetuou nenhum tipo de modificação, pois simplesmente recortou e retirou dois triângulos retângulos, de modo que a figura se tornasse um paralelogramo. Nesse caso, as subfiguras não foram combinadas em outra figura e, sim, excluídas; logo, as áreas deixaram de ser iguais, e o retângulo e o paralelogramo deixaram de ser equivalentes.

P9 também recortou dois triângulos retângulos, mas sobrepôs ao paralelogramo não retângulo formado. Nesse caso, não pode ser considerado um tipo de modificação figural, já que, com a superposição dos triângulos retângulos, o paralelogramo obtido não é equivalente ao retângulo dado.

P7 e P10 resolveram do seguinte modo:

P7: “Recortei em uma das extremidades do retângulo um triângulo de base e altura qualquer e colei sobre a altura do outro lado do retângulo, preservando a superfície e formando o paralelogramo”.

Assim, foi realizada uma modificação do tipo mereológica e posicional, conforme a Figura 70.

P8 resolveu a tarefa utilizando tentativa e erro, e chegou à solução exposta na Figura 71. E, com base em seu raciocínio, escreveu:

P8: “Com o material manipulável foi fácil demonstrar, recortando partes e por tentativas e visualização”.

Logo, vê-se que P8 resolveu por meio de uma modificação mereológica e outra posicional, e atribuiu tal fato à possibilidade de tentativas e visualizações que o material manipulável proporciona.

Com base nos dados descritos, conclui-se que somente os professores P7, P8 e P10 apresentaram explorações heurísticas e realizaram reconfigurações com os registros disponibilizados. P10 explorou heurísticamente e fez reconfigurações que solucionaram a tarefa, utilizando todos os registros apresentados; no entanto, as operações realizadas por ele foram as mesmas desde o primeiro registro. Nesse caso, não é possível afirmar, com certeza, que os registros SG e MM suscitaram a ideia para a solução ou para a operação, já que foram apresentados após a EG. Nesse grupo, o MM possibilitou a resolução da tarefa pelos professores P7 e P8 após estes terem tentado realizá-la com o uso da EG e do SG.

Concluindo, P7 e P8 realizaram modificações mereológicas heterogêneas e posicionais somente no contato com o MM, e as modificações de P7 foram diferentes das

modificações de P8. P10 realizou uma modificação mereológica heterogênea e uma modificação posicional desde o contato com a EG, persistindo na mesma ideia no SG até o MM.

Grupo 3 (MM → EG → SG)

Nesse grupo, somente P15 não explorou heurísticamente a figura com o MM, pois recortou um triângulo retângulo e não conseguiu encaixá-lo de modo a tornar a figura um paralelogramo não retângulo. P11, P12 e P14 conseguiram reconfigurar por meio de modificações mereológicas heterogêneas e modificações posicionais nesse registro, de forma a resolver a tarefa proposta.

P13 recortou dois triângulos retângulos e sobrepôs ao paralelogramo não retângulo formado, o que não pode ser considerado um tipo de modificação figural, pois não houve uma combinação entre as subfiguras.

Os professores P11, P13, P14 e P15 resolveram o problema da forma convencional, com modificações mereológicas heterogêneas e posicionais.

Ao se disponibilizar a figura no SG, P11 e P14 não realizaram nenhum tipo de reconfiguração, e muito menos exploração heurística da figura. P12 efetuou uma modificação posicional dos vértices superiores do retângulo, e P13 realizou a mesma operação do registro anterior. P15 escreveu na folha de respostas:

P15: “No geogebra, foi feito tentativas de acerto e erro, mas não chegou-se a uma conclusão”.

As modificações realizadas por P15 foram somente posicionais, mas ele não conseguiu concluir o seu raciocínio.

Com base nos dados descritos, conclui-se que todos os professores efetuaram uma pesquisa heurística das figuras apresentadas em ao menos um dos registros. P13 explorou heurísticamente e fez reconfigurações que solucionaram a tarefa, utilizando todos os registros apresentados; no entanto, as operações realizadas por ele foram as mesmas desde o primeiro registro. Nesse caso, não é possível afirmar, com certeza, que os registros EG e SG suscitaram a ideia para a solução ou para a operação, já que foram apresentados após o MM.

Quanto a P15, somente a EG possibilitou a realização de operações que permitiram a conclusão da tarefa, bem como a exploração heurística da figura e reconfigurações.

O registro figural que menos foi explorado nesse grupo foi na forma de SG, mas, em linhas gerais, várias operações foram realizadas por esse grupo.

Considerações:

Para resolver esta tarefa proposta na pesquisa, o professor poderia realizar operações que consistem em modificações mereológicas heterogêneas. Tal decomposição é realizada com subfiguras de formas diferentes entre elas: um triângulo e um trapézio para formar um paralelogramo não retângulo (DUVAL, 2005, p. 14).

Com base nos dados obtidos, foi possível concluir que o registro figural na forma de MM foi o que mais possibilitou reconfigurações figurais e também a exploração heurística da figura apresentada em sua forma. Scheffer (2006) afirma, com base em suas experiências, que, ao se trabalhar com materiais concretos, tornam-se possíveis a discussão e a exploração de propriedades de polígonos, bem como a visualização dos objetos representados. Além disso, a eficiência de um MM não está na apresentação do material, mas na obtenção da descoberta, na procura de soluções, no fazer constatações e, conseqüentemente, na compreensão da matemática (LORENZATO, 2006). Tais explorações puderam ser realizadas com êxito durante a resolução da Tarefa 4 proposta com o MM.

De maneira geral, os três registros possibilitaram que operações figurais fossem realizadas com o objetivo de solucionar a tarefa proposta, sendo estes apresentados como primeiro, segundo ou terceiro registros.

Quadro 25: Reconfiguração e exploração heurística na Tarefa 4.

GRUPOS	RECONFIGURAÇÃO	EXPLORAÇÃO HEURÍSTICA
G1 (SG → MM → EG)	SG	SG
G2 (EG → SG → MM)	MM	MM
G3 (MM → EG → SG)	MM/EG	MM/EG

Fonte: Autora.

Mas ainda há de se admitir que poucas foram as reconfigurações realizadas. Talvez tal fato se deva à caracterização da decomposição da figura como uma modificação mereológica heterogênea, ou seja, as subfiguras necessárias para a resolução da tarefa são diferentes entre si e também da figura de partida. Duval (2005) explica que tal decomposição não é visualmente reversível como uma decomposição estritamente homogênea – as subfiguras possuem a mesma forma entre si e da figura de partida – ou uma decomposição homogênea – as subfiguras possuem a mesma forma entre si, mas não da figura inicial.

A5: Apreensão discursiva

A apreensão discursiva da figura num contexto de uma tarefa de geometria pode ser considerada a leitura da figura associada ao enunciado do problema do qual essa figura faz parte. No caso dessa tarefa, não há uma necessidade explícita da identificação do retângulo dado por meio do enunciado, ou seja, a figura é explicitamente a representação de um retângulo em todos os registros apresentados.

Grupo 1 (SG → MM → EG)

No que diz respeito aos aspectos que devem ser considerados para a análise da apreensão discursiva no registro figural do SG, é possível concluir que esse registro possibilitou que modificações figurais ficassem visíveis, auxiliando no tratamento e na interpretação figural baseada em conceitos e propriedades do paralelogramo. A operação “deslocamento” ficou visível para os professores P2, P3, P4 e P5 somente no SG. Desse modo, houve uma interpretação correta do enunciado associado à figura na forma de SG.

Com relação ao MM, a interpretação do enunciado e os elementos figurais também ficaram visíveis, e, quanto às modificações, P1, P3, P4 e P5 efetuaram modificações com raciocínios dedutivos que expressaram a identificação de uma apreensão discursiva da figura e de suas hipóteses.

Durante o uso da EG, também houve correta leitura do enunciado aliado à figura, adequada interpretação dos elementos figurais, e foram realizadas modificações figurais pelos professores P2, P4 e P5, o que indicou o reconhecimento das propriedades do paralelogramo na figura.

Grupo 2 (EG → SG → MM)

Somente P9 e P10 apresentaram interações no registro da EG. A seguir, tem-se a Figura 77 com a resposta de P9 para essa tarefa:

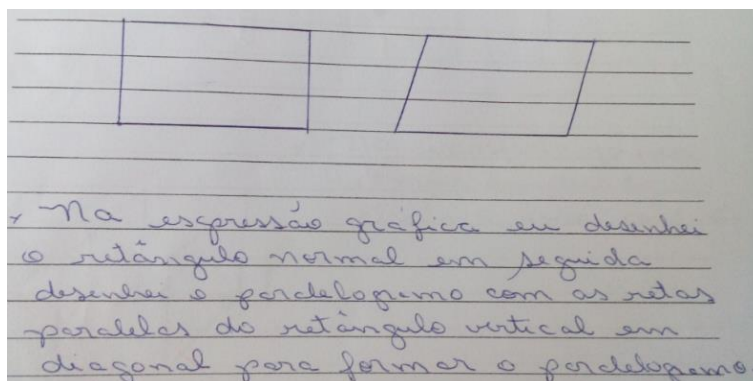


Figura 77: Solução de P9 descrita na folha de respostas.

Fonte: Autora.

Houve interpretação correta do enunciado e a identificação dos elementos figurais, no entanto, a apreensão discursiva da figura nesse contexto de tarefa foi superficial, pois não houve um raciocínio dedutivo que justificasse tal solução. No contato com o SG, P9 apresentou a mesma solução dada na EG. Desse modo, pode-se retirar, a respeito da apreensão discursiva, as mesmas conclusões. E, com o uso do MM, P9 pensou em recortar dois triângulos retângulos das pontas do retângulo para formar o paralelogramo não retângulo, demonstrando compreensão da figura e do enunciado do problema, como mostra a Figura 69.

P10 resolveu corretamente a tarefa proposta, conforme a Figura 68. Este utilizou os três registros disponíveis e, nesse caso, considera-se que houve apreensão discursiva satisfatória durante o uso dos três registros no contexto do enunciado da tarefa proposta.

O primeiro registro apresentado foi a EG; o segundo, o SG; e o terceiro, o MM. Os professores P6, P7 e P8 apresentaram soluções e interações somente com o registro figural na forma de MM.

O professor P6 escreveu na folha de respostas:

P6: “Desenha dois triângulos, em um dos lados, recorta-os sendo um de cada lado”.

Nesse caso, considera-se que houve uma apreensão discursiva da figura, já que foi possível resolver a tarefa por meio da interpretação do enunciado e da visualização da figura. P7 e P8 resolveram da mesma forma que P6, destacando-se a escrita de P7 na folha de respostas:

P7: “Recortei em uma das extremidades do retângulo um triângulo e base e altura qualquer e colei sobre a altura do outro lado do retângulo, preservando a superfície e formando o paralelogramo”.

Com base nos dados, observa-se que, nesse grupo e nessa atividade, o registro figural na forma de MM possibilitou mais visualizações de modificações e decomposições figurais que auxiliaram na leitura figural, baseada em conceitos e propriedades do paralelogramo, com a interpretação correta do enunciado acarretando na resolução da tarefa proposta.

Grupo 3 (MM → EG → SG)

No que diz respeito ao primeiro registro apresentado, o MM, todos os professores apresentaram interações interpretando corretamente o enunciado da tarefa e identificando os elementos figurais associados às hipóteses dadas.

É possível destacar que P13 recortou dois triângulos retângulos, um de cada lado, e os sobrepôs à figura recortada, chegando ao paralelogramo, conforme a Figura 73, e explicou seu raciocínio por meio da língua natural:

P13: “O meu pensamento foi o mesmo na expressão gráfica e no material manipulável. Peguei uma medida qualquer de forma que nas extremidades eu conseguiria formar um triângulo retângulo, onde foram recortados e sobrepostos depois formando o paralelogramo mantendo a mesma área”.

Desse modo, ao visualizar a operação feita por ele, P13 afirmou que a área foi mantida mesmo após o recorte dos triângulos, e atribuiu tal fato à superposição dessas subfiguras. Nesse caso, não houve uma interpretação correta da figura, já que o conceito de área não estava correto. Depois, ao se apresentar a P13 a mesma figura na forma de EG, seu raciocínio perdurou, e, no SG, ele falou:

P13: *E conhecendo o GeoGebra, a ideia é, eu acho que seria a mesma, eu teria que imaginar um recorte.*

Pesquisadora: *Certo.*

P13: *E sobrepor. Não é sobrepor de ladinho...*

Pesquisadora: *Igual você fez no outro?*

P13: *Exatamente.*

Ou seja, a interpretação discursiva figural de P13 permaneceu a mesma nos três registros de representação figural.

P15 recortou um triângulo retângulo, mas não soube onde encaixá-lo para resolver a tarefa. A falta de identificação e até mesmo de visualização dos elementos figurais limitou o encaixe das subfiguras e, conseqüentemente, a resolução da tarefa. Houve pouca apreensão discursiva da figura. No entanto, no contato com a EG, P15 conseguiu visualizar os elementos e a reconfiguração que deveria fazer para resolver a tarefa proposta com êxito. E, assim, no SG, P15 somente movimentou alguns vértices do retângulo sem conclusões, mas isso prova suficientemente que o elemento figural “vértice” ficou mais nítido na representação do SG.

Com relação aos demais professores, houve interpretação correta do enunciado e dos elementos figurais em todos os registros.

Com base nos dados expostos, observa-se que, nesse grupo e nessa atividade, o registro figural na forma de MM possibilitou o maior número de visualizações de modificações e decomposições figurais que auxiliaram na leitura figural, baseada em conceitos e propriedades do paralelogramo, com a interpretação correta do enunciado acarretando na resolução da tarefa proposta.

Considerações:

A organização perceptiva de uma figura tende a privilegiar o reconhecimento de determinadas unidades figurais, inibir outras, e nem sempre essas unidades reconhecidas estão de acordo com as unidades designadas pelo enunciado que são necessárias para a resolução da tarefa (DUVAL, 1999, p. 160).

Com relação à apreensão discursiva, o enunciado do problema apresentou-se semanticamente congruente às figuras nos três tipos de registros, e isso pôde ser comprovado durante as aplicações realizadas nos três grupos. Em todos os registros, foi possível identificar o retângulo apresentado mesmo se o enunciado não tivesse mencionado tal objeto geométrico. Além disso, todos os professores interpretaram corretamente o enunciado da tarefa, aliando-o às figuras representadas no MM, no SG e na EG, sem distinção.

Nos três tipos de registros figurais, as unidades figurais a serem consideradas eram diretamente visíveis na figura e também designadas no enunciado do problema, sem ocasionar dificuldades ou conflitos entre a organização perceptiva da figura e a introdução discursiva do problema.

No entanto, o MM possibilitou o maior número de visualizações de modificações e decomposições figurais que auxiliaram na leitura figural, baseada em conceitos e propriedades do paralelogramo, com a interpretação correta do enunciado acarretando na resolução da tarefa proposta aos professores. Oshima e Pavanello (2015) afirmam que os MM possibilitam o estruturar do pensamento, desenvolvem a capacidade de resolver problemas, de abstrair e analisar, contribuindo com o raciocínio dedutivo, ao passo que proporcionam a criação de conjecturas e investigações. Tais fatos foram observados durante a resolução dessa tarefa.

6.4.3 Análise matemática

A6: Resolução do problema

Para esta análise, serão utilizados os registros discursivos (língua natural e língua formal) e os tratamentos realizados nos materiais, de modo a identificar se o problema foi ou não resolvido pelo professor colaborador, e quais os fatores que contribuíram ou não para isso.

Para a resolução dessa tarefa, não é necessário o uso de língua formal, mas é extremamente importante a realização de tratamentos figurais que consistem na combinação das subfiguras obtidas a partir figuras disponibilizadas.

Grupo 1 (SG → MM → EG)

Ao se disponibilizar a figura no SG, todos os professores desse grupo conseguiram concluir a tarefa. P1 fez o recorte do triângulo retângulo do retângulo inicial e o transpôs ao outro lado do retângulo, conforme a Figura 61.

Já os professores P2, P3, P4 e P5, nesse registro do SG, resolveram a tarefa usando o deslocamento dos vértices superiores do retângulo inicial até que este ficasse na forma de um paralelogramo não retângulo, conforme a Figura 62. Tal solução não pode ser considerada satisfatória, já que exige basicamente uma movimentação mecânica dos vértices sem que haja algum raciocínio dedutivo matemático envolvido.

P2 e P3 registraram seus raciocínios por meio da língua natural na folha de respostas, como segue:

P2: “No Geogebra, a partir de um dos vértices arrastar com o mouse uma medida determinada sobre o lado ‘maior’. Fazer o mesmo procedimento no vértice oposto”.

E

P3: “Tomar um ponto qualquer na base do retângulo. Em seguida, com a ferramenta compasso, transferir a medida de um (desses) dos vértices com o ponto indicado no lado oposto do retângulo (prolongamento da base) e construir segmentos de reta de (forma) maneira a formar o paralelogramo”.

Na sequência, ao se apresentar a figura na forma de MM, P1, P3 e P5 recortaram um triângulo retângulo e o transpuseram, conforme a Figura 63.

Na folha de respostas, somente P1 utilizou a língua natural, e escreveu, referindo-se ao MM:

P1: “Fiz um recorte de um triângulo retângulo em um dos lados do retângulo e adicionei no lado oposto do retângulo”.

E P4 resolveu a tarefa dobrando dois triângulos retângulos, conforme a Figura 64. E escreveu:

P4: “O paralelogramo seria através do material manipulável, fazendo medidas precisas (traçando) dobrando de forma que ficasse dois triângulos semelhantes com ângulos de 90 graus tendo como referência segmento de reta”.

Nota-se que P4 se atentou à necessidade de formar um paralelogramo não retângulo, porém não se preocupou com o fato das figuras inicial e final terem que ser equivalentes.

Logo, ao se disponibilizar a figura na forma de EG, P2 e P5 resolveram a tarefa fazendo o “recorte” do triângulo e sua transposição de lado, conforme a Figura 65.

P2 não usou língua natural para registro, e P5 foi muito conciso em sua resposta, conforme segue:

P5: “Posso fazer usando recorte com a figura gráfica”.

P4 pensou em retirar os dois triângulos retângulos das laterais do retângulo, conforme a Figura 66, e não houve registro em língua natural de sua solução na representação da EG.

Observa-se que todos os professores desse grupo conseguiram - ou pelo menos tentaram - resolver essa tarefa com o uso do SG, e somente P2 e P3 registraram em forma de língua natural os seus raciocínios que concluíam a tarefa e a consideravam resolvida. É importante ressaltar que o SG suscitou a ideia da resolução por meio de um “atalho”, que foi, no caso, a possibilidade de deslocamento dos vértices superiores do retângulo dado. O simples deslocamento dos vértices é uma operação figural posicional, mas não pode ser

considerada uma solução satisfatória, já que não envolve raciocínios dedutivos e um pensamento mais elaborado.

Com o MM, somente P2 não tentou utilizá-lo, e todos os outros professores resolveram a tarefa nesse registro conforme o registro da língua natural de P1 e P4.

Durante o uso da EG, três dos cinco professores resolveram sem escrever seus raciocínios, sendo que P1 e P3 não tentaram resolver.

Para resolver essa tarefa, bastava que o professor realizasse algumas operações figurais sem necessidade de língua formal. Dessa forma, cognitivamente, essa tarefa se mostrou mais simples do que as demais realizadas até o momento. Explorou o uso dos registros e observar geometricamente as soluções que poderiam ser realizadas nessa tarefa.

Grupo 2 (EG → SG → MM)

Ao se disponibilizar a figura na forma de EG, somente os professores P9 e P10 resolveram a tarefa.

P9 desenhou o retângulo na folha de respostas e, em seguida, desenhou um paralelogramo, como na Figura 67.

Pesquisadora: Então, o que você fez para transformar esse retângulo em um paralelogramo?

P9: Só mudei aqui, que estava reto e coloquei em diagonal; essa reta, eu coloquei em diagonal.

Nesse caso, P9 resolveu a tarefa sem um raciocínio dedutivo, e somente em busca de apresentar o paralelogramo solicitado no enunciado do problema.

P10 também desenhou seu raciocínio na folha de respostas, de modo a evidenciar o seu tratamento figural e solucionar adequadamente a tarefa proposta, conforme a Figura 68.

Logo depois, ao se apresentar a mesma figura no SG, também, somente os professores P9 e P10 resolveram a tarefa. A ideia de P9 permaneceu baseada no movimento dos vértices do retângulo até que este se tornasse um paralelogramo não retângulo, como a Figura 62. P10 também manteve a ideia de recortar um triângulo retângulo em um dos lados do retângulo e encaixá-lo do outro lado, de modo a formar o paralelogramo não retângulo pedido na tarefa.

Assim, ao se disponibilizar a figura no MM, todos os professores resolveram a tarefa nessa representação. P6 recortou e tirou dois triângulos retângulos, de modo que a figura se tornasse um paralelogramo.

P9, tanto no registro da EG quanto do SG, havia utilizado o “deslocamento” dos vértices superiores do retângulo e, no entanto, com o MM, teve uma ideia diferente da anterior, baseada no recorte dos dois triângulos retângulos e na superposição destes ao paralelogramo não retângulo obtido.

P7 e P10 resolveram do seguinte modo:

P7: “Recortei em uma das extremidades do retângulo um triângulo de base e altura qualquer e colei sobre a altura do outro lado do retângulo, preservando a superfície e formando o paralelogramo”.

Essa resolução pode ser verificada na Figura 70. Na folha de respostas, P10 escreveu a seguinte justificativa, que se estendeu para todos os tipos de registros apresentados:

P10: “Para transformar um retângulo em um paralelogramo ambos são quadriláteros e retas paralelas congruentes através dos três registros figurais, observei que fazendo um recorte formando um triângulo retângulo juntando no retângulo forma um paralelogramo, pois as retas opostas são paralelas e congruentes”.

P8 resolveu a tarefa utilizando tentativa e erro, e chegou à solução exposta na Figura 71. E, com base em seu raciocínio, P8 escreveu:

P8: “Com o material manipulável foi fácil demonstrar, recortando partes e por tentativas e visualização”.

Desse modo, vê-se que P8 recortou dois triângulos equivalentes e transpôs somente um, chegando à solução da tarefa.

Observa-se que todos os professores conseguiram resolver a tarefa com o uso do MM, e somente P7, P9 e P10 registraram em forma de língua natural os seus raciocínios que concluíam a tarefa e a consideravam resolvida.

P9 resolveu a tarefa utilizando o deslocamento dos vértices superiores do retângulo dado tanto com a EG quanto com o SG. Tal raciocínio não pode ser considerado satisfatório, já que não envolve raciocínios dedutivos e um pensamento mais elaborado.

P10 conseguiu resolver a tarefa com os três registros apresentados, e também o fez em forma de língua natural. Já P6 e P7 nem tentaram resolver a tarefa com a EG e com

o SG. P8 tentou raciocinar diante da figura nas formas de EG e SG, mas não conseguiu resolver a tarefa.

Grupo 3 (MM → EG → SG)

Os professores P11, P12 e P14 resolveram a tarefa com o MM, realizando um recorte de um triângulo retângulo e a sua transposição para o outro lado do retângulo, como mostrado na Figura 72.

P11 escreveu na folha de respostas:

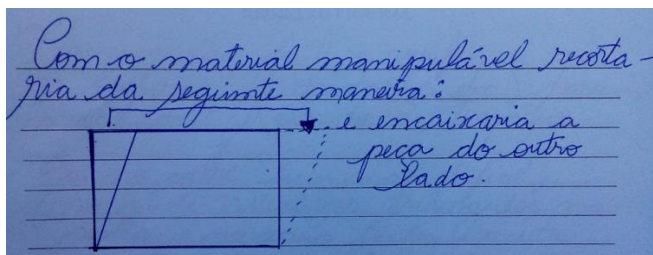


Figura 78: Solução de P11 na folha de respostas.

Fonte: Autora.

P13 recortou dois triângulos retângulos, um de cada lado, e os sobrepôs à figura recortada, chegando ao paralelogramo, conforme a Figura 73, e justificou:

P13: “O meu pensamento foi o mesmo na expressão gráfica e no material manipulável. Peguei uma medida qualquer de forma que nas extremidades eu conseguiria formar um triângulo retângulo, onde foram recortados e sobrepostos depois formando o paralelogramo mantendo a mesma área”.

P15 recortou um triângulo retângulo, mas não soube onde encaixá-lo para resolver a tarefa.

Em seguida, com o uso da EG, P12 não esboçou nenhuma tentativa de resolver nesse registro, enquanto P11, P13, P14 e P15 usaram as mesmas operações mostradas na Figura 74.

Na Figura 75, é mostrado o registro em língua natural e o desenho feito por P14. P14 explicou o modo como resolveu a tarefa na forma de EG, e P15 conseguiu resolver o problema da forma correta, porém sua justificativa não foi muito coerente e compreensiva:

P15: “Foi utilizado a semelhança de triângulos e chegou-se a um resultado”.

Ao se disponibilizar a figura no SG, P11 somente escreveu:

P11: “No GeoGebra faria do mesmo jeito”.

Mas não realizou operações nesse registro.

P12 conseguiu resolver da forma exposta na Figura 76, porém não fez uso de língua natural ou formal. P15 também tentou resolver a tarefa, movimentando os vértices superiores do retângulo, mas não concluiu o problema nesse registro, e obteve sucesso somente na EG.

Observa-se que a maioria dos registros em língua natural se deu durante o contato com a figura na forma de MM. Todos os professores tentaram resolver a tarefa com ao menos um registro apresentado.

Destaca-se que P12, P13 e P15 mudaram a forma de resolver a tarefa conforme tinham contato com as representações figurais apresentadas.

Considerações:

Com base nas exposições feitas das soluções encontradas pelos professores colaboradores, ressalta-se que são consideradas satisfatórias somente as soluções que apresentam as operações necessárias e suficientes para a solução da tarefa.

Com base no conhecimento matemático e geométrico, foram desconsideradas como soluções satisfatórias as seguintes operações em qualquer um dos três registros:

- movimentação dos vértices superiores ou inferiores do retângulo dado;
- retirada de dois triângulos retângulos e superposição, ou não, destes ao paralelogramo obtido após o recorte;
- dobra de dois triângulos retângulos de modo a formar um paralelogramo não retângulo.

Para essa tarefa, não era necessário o uso de língua formal.

Nesse caso, tem-se:

Quadro 26: Resolução da Tarefa 4.

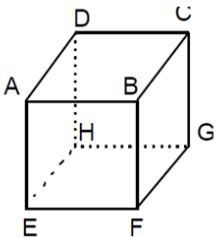
REGISTRO FIGURAL	RESOLVEU A TAREFA			USOU LÍNGUA NATURAL
	Sim	Tentou	Não tentou	
Grupo 1 (SG → MM → EG)	MM	SG		MM/SG
Grupo 2 (EG → SG → MM)	MM	MM	EG	MM
Grupo 3 (MM → EG → SG)	EG	MM/SG	EG	MM

Fonte: Autora.

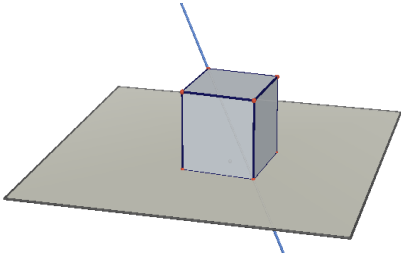
Dessa forma, é possível concluir que o registro na forma de MM foi o que mais possibilitou tanto a resolução correta da atividade quanto as tentativas de resolução, e proporcionou o maior uso da língua natural, se comparado aos outros registros figurais.

6.5 Análise da Tarefa 5


Tarefa 5: Ao traçar um plano perpendicular à diagonal \overline{DF} , qual figura geométrica é formada pela intersecção do plano com o cubo?



Usando EG



Usando SG



Usando MM

Figura 79: Tarefa5.

Fonte: MORETTI (2002, p. 360) e Autora.

Conforme o plano percorre perpendicularmente a diagonal \overline{DF} do cubo, são formados triângulos e hexágonos na intersecção do plano com o cubo.

É possível visualizar a resposta por meio do *software* Cabri, mas com a ajuda de uma representação mental:

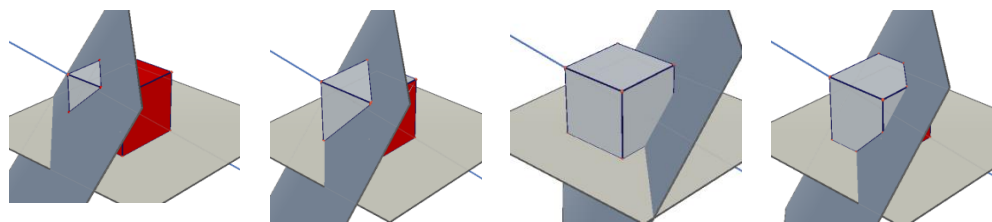


Figura 80: Solução da Tarefa 5 no software Cabri.

Fonte: Autora.

Esta tarefa ficou caracterizada como:

- um problema de Nível 1 no registro de representação figural na forma de MM, no SG ou na EG. Isso se deve à não necessidade de uma apreensão discursiva explícita durante o tratamento figural. Há congruência entre a apreensão operatória da figura necessária para resolver o problema e o tratamento matemático possível. A apreensão operatória deixa evidentes os tratamentos figurais necessários para resolver a tarefa, juntamente ao raciocínio dedutivo que justifica sua solução, sem necessidade de uma apreensão discursiva explícita.

Quanto às análises, tem-se o seguinte:

6.5.1 Análise da compreensão

A1: O uso de tratamento figural para resolver o problema

Para a resolução desta tarefa, é necessário o uso de tratamentos figurais de modo a auxiliar uma visualização a respeito das posições que o plano perpendicular à diagonal \overline{DF} poderia assumir ao percorrê-la. Não é necessário o registro discursivo na forma de língua formal para concluir a tarefa.

Grupo 1 (MM → EG → SG)

Dos cinco professores deste grupo, três efetuaram tratamentos figurais ao manusear a representação do cubo no MM, girando-o e fazendo marcações com o lápis de modo a tentar visualizar a figura geométrica a ser formada:

P2: Porque você vai traçar uma diagonal aqui e eu vou pela praticidade. É a mesma coisa que se você estivesse traçando um segmento que vai daqui até aquele canto. Então, nós demarcamos aqui. Se eu tenho um segmento que vai daqui até aquele canto oposto, eu vou manter as faces laterais, daí eu vou descrever aqui o segmento, e esse espaço aqui passa a ser outra face.

P3: *Tipo, eu coloquei o primeiro plano, vai formar um triângulo. Se eu colocar o segundo, o primeiro não vale. Então vai analisando pelo vértice?*

Pesquisadora: *Você pode imaginar que é o mesmo plano que vai percorrendo...*

P3: *É. Entendi. Triângulo, forma. É difícil imaginar, se pegar aqui, como aqui talvez tem uma altura e ele está inclinado, forma um quadrilátero.*

P4: *“O material manipulável considerei mais fácil visualização devido estar em contato direto, traçando a diagonal imaginei o primeiro corte como prisma de base triangular e os demais como contornos de prismas, troncos de bases retangulares”.*

Essas foram as explicações dadas por P2, P3 e P4 paralelamente aos tratamentos figurais que iam sendo efetuados.

Logo depois, ao se disponibilizar a mesma figura na EG, P2 desenhou seu próprio cubo e suspeitou que a figura a ser formada seria um prisma. Porém, o enunciado é claro quando solicita “qual figura geométrica é formada pela intersecção do plano com o cubo?”. Ou seja, uma figura geométrica bidimensional. P2 explica sua interpretação da seguinte forma:

P2: *O plano está aqui, olha; eu estou pegando algo e passando sobre a diagonal; vamos supor que eu estou com uma lâmina e estou vindo perpendicular, então ela vai cortar assim! Não é isso?*

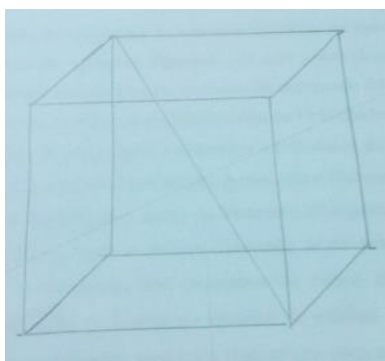


Figura 81: Tratamento de P2 na EG.

Fonte: Autora.

Dessa forma, ao fazer marcações com o lápis no cubo desenhado por P2, este foi explicando seu raciocínio. Já P1 e P3 não efetuaram nenhum tipo de tratamento, nem apresentaram reflexões sobre o registro figural na forma de EG. P4 tentou efetuar um tratamento em um desenho feito por ele mesmo, do seguinte modo:

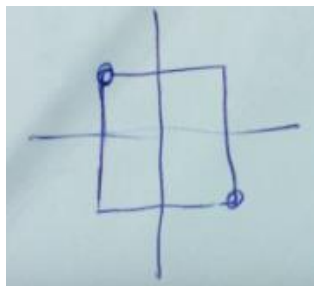


Figura 82: Tratamento de P4 na EG.

Fonte: Autora.

Nota-se que a figura é um quadrado, e não um cubo. Com essa representação equivocada, o professor teve mais dificuldades para resolver o problema. De fato, na EG, P4 não apresentou variações cognitivas que o auxiliassem a encontrar a solução correta da tarefa. P5 também fez o desenho, conforme figura a seguir, e concluiu que obteria pirâmides irregulares:

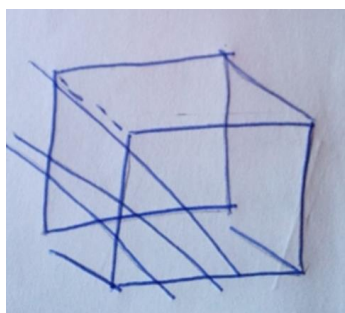


Figura 83: Tratamento de P5 na EG.

Fonte: Autora.

Ao se disponibilizar a figura no SG, somente P5 não efetuou nenhum tipo de tratamento figural, e afirmou:

P5: Se tivesse como você cortar ele ali para a gente ver, aí seria, mas, só desse jeito, também fica meio abstrato... para mim, fica.

Os demais professores realizaram tratamentos figurais consistindo na rotação do cubo sobre o plano representado.

P1 efetuou tratamentos figurais e escreveu:

P1: “A resolução através do Cabri, possibilita a visão do ‘fatiamento’ do sólido, onde poderíamos demonstrar que um plano com 2 dimensões ao cortar um sólido com 3 dimensões, formará figuras planas a partir de 3 até 6 lados”.

P3 e P4 também efetuaram tratamentos figurais, e apresentaram variações cognitivas em suas falas:

P3: *Porque, aqui, vai dar triângulo até chegar ao vértice, né?*

Pesquisadora: *Isso.*

P3: *Aí, passou do vértice, dá quadrilátero. Aqui também dá, e o outro lado dá um triângulo.*

Assim, as reflexões foram desenvolvidas à medida que os tratamentos figurais foram realizados.

Grupo 2 (SG → MM → EG)

No SG, somente P8 não efetuou tratamento figural e, conseqüentemente, não apresentou variações cognitivas. P6 e P9 não efetuaram tratamentos figurais nesse registro, mas afirmaram que a figura a ser formada seria um triângulo, sem, no entanto, apresentar interações entre o tratamento figural e o tratamento discursivo.

P7 efetuou tratamentos figurais, e afirmou que a figura formada seria uma pirâmide:

P7: *Se eu traçar aqui, eu estaria formando essa figura aqui, olha...*

Pesquisadora: *Sim.*

P7: *Eu imaginei isso. Agora, fazer uma inclinaçãozinha pra ela fica melhor.*

P10 também efetuou tratamentos figurais associados a tratamentos discursivos, tentando visualizar o plano cortando o cubo e formando tetraedros.

Em seguida, disponibilizou-se a mesma figura na forma de MM. Os professores P7 e P10 não realizaram nenhum tipo de tratamento nesse registro. P6 efetuou tratamentos realizando marcações a lápis e explicando discursivamente seu raciocínio compreendendo o tratamento que deveria ser realizado para resolver o problema:

P6: *Quando você traça a diagonal, você vai dividir em dois; na verdade, vai ter formato de triângulo, né?*

P8 escreveu na folha de respostas:

P8: *“No Cabri percebo o mesmo objeto que, no material manipulável, embora, no manipulável, consigo, com a ajuda da régua e do cubo, perceber melhor”.*

Então, ao realizar o tratamento figural, P8 utilizou a régua e fez marcações no cubo para visualizar a figura que seria formada, porém sua resposta foi prisma. P9 fez

várias reflexões com o MM e concluiu que as figuras formadas seriam um triângulo retângulo e um quadrado:

P9: Um que vejo ali, é um triângulo retângulo, apesar de que eu estou vendo um cubo, eu estou vendo o lado ali. Apesar de que o principal ali, eu penso, é um triângulo retângulo. Tem ali em cima também esse aqui de cima... um quadrado, tem triângulo retângulo do lado de cima, tem triângulo retângulo do lado de baixo. Não sei se é isso que você queria.

Nesse momento, P9 manipulava a representação do cubo e extraía suas conclusões.

Ao mostrar a mesma figura na EG, P8 e P9 não fizeram qualquer tipo de tratamento. P6 desenhou o cubo, fez algumas marcações, e continuou convicto de que a figura formada seria um triângulo:

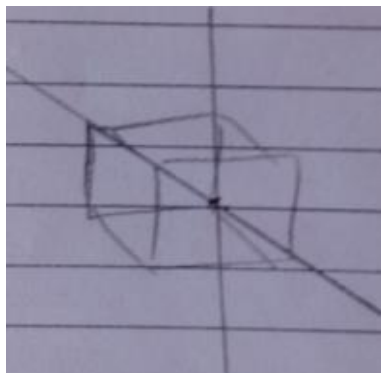


Figura 84: Tratamento de P6 na EG.

Fonte: Autora.

P7 realizou alguns tratamentos na figura na forma de EG, mas ainda apresentava dúvidas quanto à figura ser bidimensional ou tridimensional:

P7: Então, mas olha bem, eu tô pensando... aqui tá a diagonal e eu vou traçar a perpendicular, né? Esse plano.

Pesquisadora: E, aí, qual figura irá formar nesse plano, nesse corte?

P7: Vai ser triângulo aqui, não é? Mas tem a questão da profundidade que vai acontecer ali, não tem?

É possível notar que P7 não visualizou que a intersecção do plano com o cubo originaria uma figura bidimensional.

P10 também fez o seu desenho e, enquanto realizava seus tratamentos figurais, discursava a respeito destes:

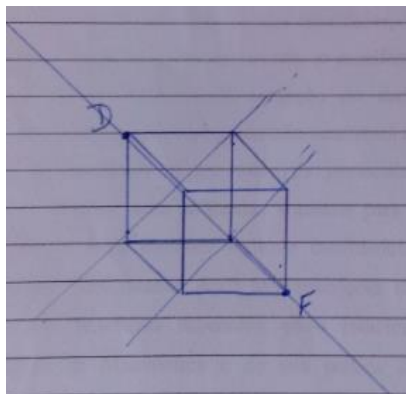


Figura 85: Tratamento de P10 na EG.

Fonte: Autora.

P10 declarou que o ato de desenhar duas retas paralelas ajudava a visualizar quais figuras poderiam ser formadas, e afirmou que seriam tetraedros e blocos retangulares.

Grupo 3 (EG → SG → MM)

Somente P12 não efetuou tratamento figural em nenhum dos registros apresentados. Os demais professores efetuaram tratamentos figurais simples na EG, como mostrado na Figura 86, na tentativa de visualizar a figura gerada pela intersecção do cubo com o plano:

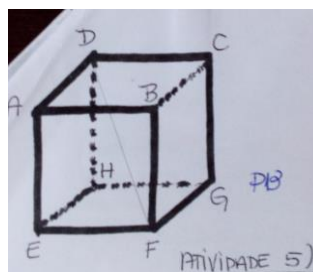


Figura 86: Tratamento de P13 na EG.

Fonte: Autora.

Houve, por esses professores, interação entre o tratamento figural e o tratamento discursivo, como mostra, por exemplo, a fala de P11:

P11: *Essa diagonal, se fosse aqui, faria um retângulo. É um triângulo, se fosse daqui até aqui.*

E, desse modo, os professores extraíam conclusões por meio de suas reflexões sobre a figura na forma de EG.

Em seguida, ao se disponibilizar a figura na forma de SG, P15 foi o único professor que efetuou tratamentos figurais juntamente com variações cognitivas,

explicitando seu raciocínio e tentando construir planos e retas no *software* de modo a tentar concluir a tarefa. P11, um dos professores que não realizou tratamento figural, declarou:

P11: *Deixa eu tentar imaginar, então.*

Portanto, P11 tentou utilizar somente uma representação mental, sem efetuar tratamentos na figura disponibilizada.

Ao se disponibilizar a figura na forma de MM, somente P14 e P15 efetuaram tratamentos figurais associados a tratamentos discursivos:

P14: *Deixa eu ver aonde tá o meu D e meu F. Aí a gente vai ter um plano perpendicular... então vai ser um plano assim.*

Pesquisadora: *Isso. Exatamente.*

P14: *É... quadrado não vai ser, não. Um trapézio.*

Ao manipular a representação do cubo, P14 fez marcações com o lápis, e tentou visualizar a diagonal e o plano referido no enunciado. P15 também extraiu suas conclusões ao manipular a representação do cubo no MM:

P15: *Essa daqui... ela também é tipo um trapézio, porque, na verdade, até se eu tivesse feito um pouco mais para baixo, ficaria um triângulo.*

É possível observar que P15 efetuava tratamentos com a representação e refletia a respeito desses tratamentos, chegando a algumas conclusões.

Considerações:

Com base nas observações dos três grupos, é possível notar que:

- no registro na forma de EG, destacou-se o tratamento que consiste no desenho da diagonal \overline{DF} na representação do cubo, e, em alguns momentos, houve também a representação de segmentos de reta perpendiculares à diagonal que simbolizassem o plano perpendicular à diagonal \overline{DF} , como na Figura 85. Esse foi o registro em que mais ocorreram tratamentos figurais associados a tratamentos discursivos, sendo estes tratamentos escritos ou orais;
- no registro na forma de MM, o tratamento figural mais efetuado foi a rotação do cubo e as marcações feitas com lápis na superfície da representação, com o intuito de visualizar qual figura geométrica seria formada quando o plano percorresse a diagonal \overline{DF} perpendicularmente. Esse foi o registro em que menos constaram tratamentos figurais e variações cognitivas;

- no registro na forma de SG, ocorreu o maior número de tratamentos figurais. Esses tratamentos consistiram na rotação do cubo e na mudança de seu tamanho. A possibilidade de rotacionar o cubo, e também de aumentar o tamanho, permitiu que tratamentos fossem efetuados com o intuito de concluir qual figura geométrica seria formada na intersecção do plano com o cubo.

Nessa unidade e para essa tarefa, conclui-se que os tratamentos efetuados estavam de acordo com os registros apresentados. Por exemplo, no MM, o manuseio e a rotação da representação do cubo era o tratamento mais viável com marcações a lápis. Já na EG, as possibilidades de desenhos da diagonal e de segmentos de reta se destacaram. E, da mesma forma, no SG, a rotação do cubo e a mudança em sua perspectiva e tamanho.

Mas, dentre esses registros, observou-se mais tratamentos no SG, e maior variação cognitiva na EG, conforme apresentado no Quadro 27:

Quadro 27: Tratamentos figurais na Tarefa 5.

GRUPOS	TRATAMENTOS FIGURAIS	VARIAÇÕES COGNITIVAS
G1 (MM → EG → SG)	SG	SG
G2 (SG → MM → EG)	SG	EG
G3 (EG → SG → MM)	EG	EG

Fonte: Autora.

Duval (2011) atribui ao uso de *softwares* confiabilidade, objetividade e maior possibilidade de verificações e observações, o que possibilita efetuar tratamentos de figuras sem alterar as propriedades destas, como perpendicularismos, paralelismos, proporções das arestas, entre outros. O uso do tratamento discursivo aliado ao tratamento figural que se destacou no contato com a EG revela a convencionalidade desse tipo de registro figural nas aulas de geometria. Os professores demonstraram maior intimidade com o raciocínio dedutivo quando este estava associado à figura na forma de EG.

A2: A mobilização de um segundo registro para resolver o problema

Para resolver esta tarefa, não há a necessidade de mobilização de outro registro, visto que o problema visa a investigar a visualização espacial que cada registro pode proporcionar nos professores, trabalhando com uma representação mental, além da

semiótica. Não é necessário o registro discursivo na forma de língua formal para concluir a tarefa. O único registro mobilizado nesse caso, além do figural, é o registro da língua natural (tratamento discursivo), porém apenas com o intuito de organizar as ideias no tratamento figural.

Para a resolução desta tarefa, nenhum professor dos três grupos mobilizou outro registro, e destaca-se que tal mobilização realmente não era necessária, já que a tarefa pode ser realizada somente por meio de tratamentos figurais. O uso da língua natural foi decorrente de um tratamento discursivo associado ao figural, conforme explicitado na A1 e, posteriormente, na A5.

6.5.2 Análise das razões

A3: Apreensão perceptiva

Com esta tarefa, é possível analisar se o registro figural influenciará o professor a resolvê-la espontaneamente, isto é, por uma “maneira normal de ver”, ou se este fará reflexões a respeito da intersecção do plano com o cubo, bem como se irá considerar a quantidade de faces do cubo e a posição do plano ao deslizá-lo perpendicularmente ao segmento \overline{DF} .

Para esta tarefa, destaca-se que o enunciado solicita a intersecção do plano com o cubo, ou seja, a intersecção de uma figura bidimensional com uma figura tridimensional. Logo, a figura gerada a partir dessa intersecção deverá ser, necessariamente, bidimensional.

Grupo 1 (MM → EG → SG)

As reações imediatas e automáticas nesse grupo foram variadas. Somente P1 não apresentou qualquer reação imediata no contato com o MM. P2 afirmou, imediatamente depois de ver a figura, que a intersecção daria um prisma, e P4 também suspeitou ser um prisma de base triangular:

P4: *Se traçar uma reta, vai dar um prisma de base triangular?*

Como já observado, a resposta deve ser uma figura bidimensional, e não com três dimensões, conforme as respostas dadas por P2 e P4.

P3 declarou espontaneamente que a figura formada seria um triângulo, e P5, paralelogramos.

Então, ao mudar para o registro da EG, P3 e P4 não apresentaram reações automáticas, enquanto P1, que não havia tido reações no MM, disse que as figuras formadas seriam pirâmides.

P1: *Se eu vier perpendicular, eu vou formar o quê? Pirâmides?*

P5 também suspeitou que seriam pirâmides irregulares, mesmo tendo dito anteriormente (no contato com o MM) que as figuras formadas eram paralelogramos. E P2 permaneceu na ideia de que a figura deveria ser um prisma.

Por fim, no contato com o SG, P1 afirmou que formariam prismas, ainda convicto de que as figuras seriam tridimensionais:

P1: *Então, a cada lâmina que você vai cortar, você vai estar formando um prisma, vai ter duas bases iguais com uma espessura.*

Por meio dessa fala, é possível notar que P1 não compreendeu o enunciado do problema.

P2, no SG, se desvencilhou da ideia de uma figura tridimensional, e afirmou:

P2: *Ele vai ser um quadrilátero, mas eu não consigo pensar se ele vai ser um paralelogramo em particular.*

A ideia de P2 mudou de uma figura tridimensional para uma figura bidimensional após o contato com o SG. Os professores P3, P4 e P5 não mudaram de percepção: P3 permaneceu na ideia de que formaria um triângulo somente; P4, de que seria um prisma de base retangular; e P5 voltou para a ideia de um paralelogramo.

Os aspectos importantes da figura foram percebidos, principalmente nos registros na forma de SG e EG. Nos registros na forma de MM e EG, houve ocorrência de leis de agrupamento de estímulos, pois a visibilidade da figura formada no plano foi comprometida.

Grupo 2 (SG → MM → EG)

No momento inicial, com os registros na forma SG, os professores P6, P8 e P9 afirmaram que a figura formada seria um triângulo:

P8: *Qual a figura forma no plano?*

Pesquisadora: *Isso. Exatamente. A gente faz essa pergunta, e pegar esse plano perpendicular a essa reta.*

P8: *Um triângulo, né?*

P7 afirmou, imediatamente após ter visto a figura na forma de SG, que a figura formada seria uma pirâmide, e P10 afirmou visualizar tetraedros:

P10: Eu identifiquei tetraedro. Vi três tetraedros, aparentemente.

Os aspectos importantes da figura foram identificados, e não houve ocorrência de leis de agrupamento.

Em seguida, ao se apresentar o MM, P7 e P10 não tiveram reações imediatas e automáticas diante da figura. P6 e P9 continuaram afirmando ver triângulos no plano. E P8, ao visualizar a representação do cubo no MM, mudou imediatamente de ideia do triângulo para um prisma. Tal registro permitiu a visualização de aspectos importantes da figura, porém permitiu que leis de fechamento tivessem espaço.

Ao se disponibilizar a figura na EG, P8 e P9 não apresentaram reação alguma. P6 continuou afirmando que seriam triângulos, e P7 também continuou com a ideia de que seriam pirâmides e prismas. P10 afirmou:

P10: Cada hora eu vejo uma coisa.

Após essa afirmação, P10 ficou pensando e observando a figura por um bom tempo, até concluir que seriam tetraedros e blocos retangulares. A EG é utilizada com frequência em sala de aula, porém sua representação bidimensional pode comprometer a visualização de profundidades.

Grupo 3 (EG → SG → MM)

Neste grupo, ao se apresentar a EG, somente P15 não apresentou reação imediata e automática diante da figura. P14, imediatamente após visualizar a figura, respondeu que a figura obtida pela intersecção do plano com o cubo seria uma pirâmide, demonstrando não ter compreendido, inicialmente, o enunciado do problema, bem como a falta de identificação de aspectos importantes da figura e de sua operação. No entanto, os professores P11, P12 e P13 visualizaram figuras bidimensionais. P11 afirmou:

P11: É um... retângulo, porque aqui a diagonal é maior que essa medida, né?

Ao se apresentar a figura na forma de SG, somente P13, que havia dito “trapézio” no registro anterior, não apresentou reação imediata e automática diante da figura. P15, ao

visualizar a figura, afirmou que a figura obtida seria um trapézio, após não ter tido reação imediata com a EG:

P15: *Um plano só? Perpendicular?*

Pesquisadora: *Você vai percorrer a diagonal com esse plano!*

P15: *Mas, daí, então, não vai ser a mesma figura?*

Pesquisadora: *Sim. Consegue obter mais de uma, com certeza.*

P15: *Aqui, tá mais ou menos 90°. Sei lá, tá meio trapézio...*

Nota-se que não houve leis de agrupamento e houve identificação de aspectos importantes da figura, já que P15 identificou rapidamente, neste registro, que a figura obtida não seria única e seria bidimensional.

Os professores P11, P12 e P14 afirmaram que a figura obtida seria única e seria um triângulo, lembrando que P11 disse “retângulo”, P12 disse “quadrado” e P14 disse pirâmide no contato com a EG, anteriormente.

Por fim, ao utilizar o MM, P13 continuou sem reação imediata, e P14 começou a arriscar respostas, dizendo: quadrado, trapézio, quadrilátero, paralelogramo. Arriscou essas figuras sem refletir ou pensar. P11, que havia dito retângulo na EG e triângulo no SG, disse trapézio quando visualizou a representação material do cubo. P12 manteve sua resposta como sendo triângulo, e P15, que não teve reação imediata na EG e disse trapézio no SG, chegou ao triângulo no MM.

Leis de fechamento e de continuidade não foram observadas nos três registros utilizados.

Considerações

A apreensão perceptiva de figuras nem sempre é positiva, no sentido de que ela se destaca pela maneira natural de ver as figuras, necessitando de uma mudança de olhar para visualizá-las e resolver a tarefa matematicamente.

Com base nas observações relatadas anteriormente, foi possível notar que cada registro apresentou particularidades no que diz respeito a aspectos de reações imediatas e automáticas.

Segundo Duval (2011, p. 85), “ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas”, e tal fato foi observado nos três registros apresentados. Todos os professores reconheceram, em todos os registros, as unidades figurais, as formas e os contornos dos objetos. No entanto, como o objeto geométrico a ser representado era um objeto

tridimensional, os registros que permitiram tal visualização, ou seja, que permitiram 3D/3D, auxiliaram no funcionamento cognitivo da maneira de olhar.

A solução desta tarefa consistia na identificação de triângulos e hexágonos. Nenhum professor, em nenhum registro, identificou hexágono, mesmo havendo a possibilidade de se associar a quantidade de faces do cubo com o número de arestas da figura geométrica a ser formada, porém o SG se destacou, possibilitando que mais professores visualizassem os triângulos a serem formados no plano na intersecção com o cubo.

A EG se destacou pela falta de reação imediata diante da figura e pela identificação de prismas e pirâmides. Duval (2011, p. 87) explica que, geralmente, é a unidade figural da dimensão superior que se impõe imediatamente à percepção. Notou-se que, na EG e no MM, respostas como prismas e pirâmides tiveram destaque, se impondo sobre o plano, no qual, de fato, se encontravam as figuras geométricas que solucionariam a tarefa. Duval (2011) também afirma que, na maneira normal de ver, a dimensão das unidades figurais não é levada em consideração, ocultando as unidades figurais que deveriam ser vistas.

Dessa forma, com base nos dados obtidos, é possível elencar a frequência das seguintes reações imediatas diante das figuras:

Quadro 28: Reações imediatas e automáticas na Tarefa 5.

GRUPOS	REAÇÕES IMEDIATAS E AUTOMÁTICAS			
	Sem reação imediata	Prismas e Pirâmides	Quadriláteros	Triângulos
G1 (MM → EG → SG)	EG	EG	SG	SG
G2 (SG → MM → EG)	MM/EG	SG	—	SG
G3 (EG → SG → MM)	SG/MM/EG	EG	EG	SG

Fonte: Autora.

A4: Apreensão operatória

Para resolver tal tarefa, não há a necessidade de utilizar modificações mereológicas que consistem em processos de reconfiguração. No entanto, no MM, o

professor pode tentar girar (modificação posicional), recortar ou riscar o cubo e extrair suas conclusões. Com a EG, é possível fazer desenhos aleatórios sobre a representação do cubo, ou até mesmo desenhar um cubo grande ou pequeno (modificações posicional e ótica). Com o SG, o professor pode rotacionar o cubo e visualizá-lo por diferentes ângulos, e também aumentar ou diminuir a representação dada (modificações posicional e ótica).

Grupo 1(MM → EG → SG)

Neste grupo, ao se apresentar a figura na forma de MM, dos cinco professores, três realizaram operações figurais (P2, P3, P4). Tais operações consistiram unicamente em **modificações de posição** realizadas ao manusear a representação do cubo, rotacioná-la, e escrever marcações com lápis ou caneta no material, de modo a tentar visualizar as figuras geométricas que poderiam ser formadas:

P4: “O material manipulável considerei mais fácil visualização devido estar em contato direto, traçando a diagonal imaginei o primeiro corte como prisma de base triangular e os demais como contornos de prismas, troncos de bases retangulares”.

Dessa forma, é possível notar que houve uma pesquisa heurística da figura, já que as operações foram realizadas juntamente com um raciocínio dedutivo.

Ao se apresentar a figura na forma de EG, P1 e P3 não efetuaram nenhum tipo de operação figural, enquanto P2 desenhou seu próprio cubo, chegando à conclusão de que a figura formada seria um prisma, conforme a Figura 81. Não houve, nesse caso, modificação figural pelo professor. Este somente tentou desenhar, fazendo marcações como auxílio ao seu raciocínio cognitivo.

P4 tentou realizar algum tipo de operação, porém sua representação resultou na Figura 82. Nesse caso, não é possível compreender qual o raciocínio disposto nessa representação, e é importante destacar que P4 teve dificuldades para compreender e interpretar o enunciado do problema.

Já P5 desenhou corretamente um cubo e, com base em suas reflexões sobre essa representação, extraiu algumas conclusões ao afirmar que as figuras obtidas seriam pirâmides irregulares. Neste grupo e neste registro, não houve destaque para modificações do tipo mereológicas, posicionais ou óticas. Talvez tal fato possa ser atribuído à representação 3D/2D, que compromete a visualização correta da figura.

Então, ao se apresentar a figura no SG, as modificações posicionais e óticas da representação do cubo tiveram destaque como uma investigação heurística da figura, conforme representado na Figura 87, a seguir:

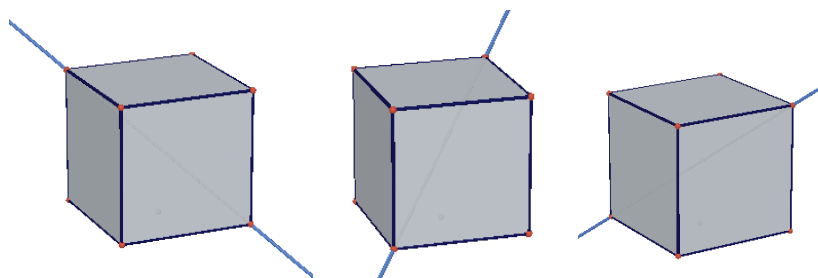


Figura 87: Modificações posicionais no SG.

Fonte: Autora.

Somente P5 não realizou nenhuma modificação neste registro. Os demais professores realizaram operações figurais que consistiram na rotação, aumento e diminuição do cubo sobre o plano representado, ou seja, **modificações posicionais e óticas**. A seguir, a observação escrita por P3:

P3: “A maneira mais tranquila para visualizar foi utilizando o software Cabri 3D, sendo possível analisar que esse plano perpendicular representa triângulo e hexágono quando possui intersecção com o plano do cubo”.

Embora não haja necessidade explícita de operações a serem realizadas nestes registros para esta tarefa, algumas se destacaram, especialmente no MM e no SG.

Grupo 2 (SG → MM → EG)

Com o registro do SG, P8 não realizou nenhum tipo de operação figural. P6 e P10 não efetuaram modificações nesse registro, porém P10 desenhou retas que simbolizaram os cortes do plano:

P10: *Eu vou passar umas retas aqui?*

Pesquisadora: *Isso. Que vão ser os planos, né?*

P10: *E eu posso traçar quantas?*

Pesquisadora: *Você vai percorrer a diagonal.*

P7 efetuou uma modificação ótica ao aumentar o tamanho do cubo, na tentativa de visualizar melhor a intersecção com o plano. P9 estava receoso de operar o *software*, e pediu para que a pesquisadora realizasse as modificações posicionais, de modo a tentar visualizar qual figura geométrica seria formada.

Neste registro, houve congruência entre as hipóteses e os tratamentos que foram realizados e exploração heurística pela maioria dos professores desse grupo.

No registro seguinte, o MM, P7 e P10 não realizaram nenhuma operação figural. P6 visualizou a operação como se fossem cortes que iriam fatiar o cubo e, assim, formar triângulos. Para isso, efetuou uma modificação posicional do cubo em busca do melhor ângulo para visualizar esses cortes. P8 e P9 não realizaram modificações, embora tenham tentado refletir sobre o cubo e tenham apresentado boa investigação heurística da figura.

Por último, com a EG, P8 e P9 não fizeram a tarefa. P6 não realizou modificações, mas fez o desenho conforme a Figura 84, e afirmou:

P6: Acho que, pra mim, esse seria melhor. Eu fiz o desenho aqui, mas... a diagonal seria aqui?

Porém, P6 não efetuou modificações do tipo posicionais, óticas ou mereológicas. P7 e P10 não apresentaram modificações, mas tentavam raciocinar dedutivamente ao refletir sobre a figura.

Grupo 3 (EG → SG → MM)

Neste grupo, destacam-se os professores P11, P14 e P15, que não efetuaram operações em nenhum dos registros apresentados. A seguir, são reproduzidas as falas de P11 em cada um dos registros apresentados:

Expressão Gráfica:

P11: Eu não estou conseguindo imaginar esse desenho como ficaria. Porque esse plano, eu não sei como seria visualmente.

Software de Geometria:

P11: Deixa eu tentar imaginar, então.

Material Manipulável:

P11: É... está mais difícil...

Observa-se que P11 teve dificuldade para visualizar e, conseqüentemente, efetuar operações nos três registros apresentados, demonstrando tal dificuldade em suas falas.

Com relação a P12, este também não efetuou operações na EG e no SG. No MM, P12 realizou modificações posicionais da representação do cubo, no intuito de visualizar o melhor ângulo para encontrar a solução do problema e explorar heurísticamente a figura. E, com relação a P13, este não efetuou operações figurais na EG, mas fez modificações posicionais e óticas na representação do cubo no SG, rotacionando e ampliando a imagem para refletir sobre as hipóteses do problema. No MM, P13 manuseou a representação do

cubo buscando interceptar corretamente a representação de um plano perpendicularmente à diagonal \overline{DF} , efetuando uma investigação heurística da figura.

Considerações

No que diz respeito às apreensões operatórias de figuras em determinados registros figurais, é possível notar que:

- a ordem de apresentação dos registros não influenciou nas operações que foram realizadas pelos professores;
- com a figura na forma de MM, a operação que teve destaque foi a **modificação posicional de rotação**. Os professores giravam a representação do cubo para tentar visualizar qual figura geométrica seria formada pela intersecção do plano perpendicular à diagonal \overline{DF} com o cubo;
- no caso do registro figural na forma de SG, as **modificações óticas e posicionais** tiveram destaque, já que o *software* Cabri possibilitava facilmente tais operações apenas com o manuseio do mouse sobre a figura;
- na EG, não houve destaque de operações, bem como modificações, que deveriam ser consideradas;
- o MM e o SG foram os registros que possibilitaram aos professores uma investigação heurística da figura. Tal fato foi constatado no momento em que os tratamentos figurais e os raciocínios dedutivos foram realizados simultaneamente.

A seguir, um quadro em que é exposto o registro de SG como aquele que mais promoveu modificações e explorações heurísticas nos três grupos aplicados:

Quadro 29: Modificações e exploração heurística na Tarefa 5

GRUPOS	MODIFICAÇÕES	EXPLORAÇÃO HEURÍSTICA
G1 (MM → EG → SG)	SG	SG
G2 (SG → MM → EG)	SG	SG/MM/EG
G3 (EG → SG → MM)	MM	MM

Fonte: Autora.

Logo, com base nas observações feitas, pode-se concluir que fatores como o tipo do registro figural foram determinantes para que modificações figurais fossem realizadas. Desse modo, como afirmam Gerônimo, Barros e Franco (2010), o uso de *softwares* de geometria possibilita ao sujeito uma grande quantidade de experimentações, o que justifica o maior número de modificações e explorações heurísticas realizadas no SG nesta tarefa.

A5: Apreensão discursiva

Nesta tarefa, não há congruência entre as modificações figurais visíveis e a dedução, principalmente no MM e na EG. A visualização da figura geométrica a ser formada no plano de intersecção com o cubo é comprometida, pois tal fatiamento fica a critério da visualização espacial e mental do sujeito. A apreensão discursiva, como tem que ser, fica subordinada à identificação das unidades figurais elementares do objeto geométrico e sua dinamicidade diante do movimento do plano exigido pelo enunciado da tarefa. Além disso, é necessário interpretar corretamente o enunciado aliado às figuras que compõem o problema: o plano, o segmento de reta \overline{DF} (diagonal), o cubo e a figura geométrica formada.

Grupo 1 (MM → EG → SG)

Com a apresentação da figura na forma de MM, destaca-se que três dos cinco professores não compreenderam o enunciado da tarefa e, ao fazer o tratamento figural, demonstraram não aliar o enunciado ao tratamento:

Pesquisadora: *Deu pra entender o problema?*

P4: *Sim, eu não consegui entender daqui pra lá, “qual figura geométrica é formada pela intersecção ao traçar um plano perpendicular?”.*

Pode-se ver que, após ler, no enunciado, “qual figura geométrica é formada pela intersecção do plano com o cubo?”, quando retorna à representação, o sujeito não compreende que a figura formada deve ser bidimensional, ou seja, não há congruência entre as modificações figurais e a dedução, neste registro.

Em seguida, no registro figural da EG, P2, P4 e P5 responderam que as figuras formadas seriam prismas e pirâmides. P1 e P3 não apresentaram respostas. Nesse caso, a interpretação do enunciado aliada ao tratamento figural ainda permanece comprometida.

Então, no SG, P1 respondeu:

P1: “A resolução através do Cabri, possibilita a visão do ‘fatiamento’ do sólido, onde poderíamos demonstrar que um plano com 2 dimensões ao cortar um sólido com 3 dimensões, formará figuras planas a partir de 3 até 6 lados”.

Dessa forma, P1 conseguiu interpretar corretamente o enunciado e concluir o problema, apresentando sua resposta – não totalmente correta, pois as figuras formadas são somente triângulos e hexágonos – como figuras geométricas planas, diferente do contato com os registros anteriores (MM e EG). P2, ao visualizar o cubo no Cabri e mobilizá-lo, afirmou:

P2: Continuo achando que, se nós víssemos aqui, temos a diagonal, e depois aquela figura que ficou ali em cima, não é? Você quer esta figura que vai ficar formada aqui com um plano cortando aqui...

Pesquisadora: Exatamente.

P2: Ele vai ser um quadrilátero, mas eu não consigo pensar se ele vai ser um paralelogramo, em particular. Vou dar minha opinião, é um quadrado, porque você quer com esse plano aqui, então pensa que lá atrás nós temos um lado, né? E pode ter triângulo.

Assim, P2 conseguiu interpretar o enunciado ao visualizar a figura e mudou sua afirmação de prisma para quadrilátero, sem muita convicção sobre qual seria a figura a ser formada.

P3 afirmou, desde o contato com o MM, a EG e, então, com o SG, que a figura formada seria um triângulo e, dependendo da posição do plano, um quadrilátero. Houve interpretação correta do enunciado e da figura nos três registros apresentados, por esse professor. P4 achou o SG mais difícil para solucionar o problema do que os demais registros, e não conseguiu concluir a tarefa com precisão, enquanto P5 afirmou que a intersecção proposta formaria paralelogramos, diferente da resposta dada anteriormente, na EG (pirâmide irregular).

Assim, somente um professor não conseguiu interpretar corretamente o enunciado quando este foi associado à figura na forma de SG.

Grupo 2 (SG → MM → EG)

Ao ser apresentada a figura no SG, P7 e P10 demonstraram não compreensão e interpretação do enunciado da tarefa quando este foi associado à figura, pois P7 afirmou que a figura obtida seria uma pirâmide, e P10, tetraedros. Sendo assim, mesmo o enunciado se referindo à intersecção do plano (2D) como o cubo (3D), esses professores demonstraram uma apreensão discursiva da figura errada, pois não consideraram que a

figura a ser formada deveria ser bidimensional, e não tridimensional. Os professores P6, P8 e P9 interpretaram corretamente o enunciado da tarefa e também os elementos figurais neste registro.

Em seguida, no MM, P7 e P10 não realizaram a tarefa, e P8, que havia identificado triângulos com o SG, afirmou que a figura formada seria um prisma, demonstrando não ter interpretado corretamente o enunciado da tarefa nem o papel de seus elementos figurais. P6 e P9 apresentaram interpretação correta do enunciado e da figura no MM.

Com a EG, P8 e P9 não realizaram a tarefa, e P10 não interpretou corretamente o enunciado do problema, pois não identificou que a figura a ser formada deveria ser uma figura bidimensional, afirmando que esta seria um bloco retangular. P6 e P7 interpretaram corretamente os elementos da figura juntamente às hipóteses constantes no enunciado do problema.

Grupo 3 (EG → SG → MM)

Com a figura representada na EG, destacam-se P12 e P13, que não interpretaram corretamente o enunciado associado à figura. P12 respondeu que a figura formada seria um quadrado e, após a explicação de seu raciocínio, foi possível observar que, inicialmente, ele interpretou o plano interceptando o cubo verticalmente, ou seja, como um plano fronto paralelo. P13 também teve problemas para interpretar o enunciado do problema associado à figura, como pode ser observado na transcrição a seguir:

P13: *Ok. Um plano cartesiano?*

Pesquisadora: *Um plano mesmo.*

P13: *Uma folha, um plano.*

Pesquisadora: *Isso.*

Nota-se que P13 confunde o eixo cartesiano (plano cartesiano) com um elemento figural geométrico (o plano). E, após refletir sobre a figura e tentar resolver a tarefa, P13 também afirma:

P13: *Porque ali é o centro, né? É difícil você enxergar no papel. É difícil você imaginar assim.*

Ou seja, P13 estava com dificuldades para compreender a figura e as operações necessárias para encontrar a solução da tarefa. Por outro lado, P11, P14 e P15

demonstraram interpretar corretamente o enunciado e também os elementos figurais neste registro.

Ao apresentar a mesma figura na forma de SG, embora tenha demonstrado interpretar corretamente o enunciado do problema, P11 pergunta:

Pesquisadora: *O plano é perpendicular à diagonal.*

P11: *Mas tem que formar ângulo de 90°?*

Pesquisadora: *Isso. O plano vai formar ângulos de 90° com a diagonal.*

Nota-se uma insegurança na afirmação de que um plano perpendicular a um segmento de reta forma 90° com este segmento de reta.

P13 continua demonstrando não compreensão do enunciado do problema em contato com o SG, quando afirma:

P13: *De repente dá, mas eu que não tô conseguindo. De repente eu não compreendi.*

Portanto, P13 assume ter dificuldades para compreender o problema, sem conseguir resolvê-lo com este registro. P12, P14 e P15 interpretaram corretamente o enunciado, bem como a figura submetida na forma de SG, conforme declarou P15:

P15: *Um plano só? Perpendicular?*

Pesquisadora: *Você vai percorrer a diagonal com esse plano.*

P15: *Mas, daí, então, não vai ser a mesma figura?*

Pesquisadora: *Sim. Consegue obter mais de uma, com certeza.*

P15: *Aqui, tá mais ou menos 90°. Sei lá, tá meio trapézio...*

Por fim, ao chegar ao último registro, o MM, todos os professores conseguiram compreender o enunciado. Talvez tal fato se deva à experiência obtida em outros registros até que o último registro fosse apresentado, exigindo que as hipóteses do problema fossem lidas novamente, e as perguntas feitas pelos professores, respondidas pela pesquisadora. Isso pode ser notado pela fala de P12:

P12: *Agora que eu entendi. Vai formar aqui no cubo, né?*

E também pela fala de P13, que, mesmo compreendendo o problema, não conseguiu concluir a tarefa:

P13: *Eu tenho uma diagonal que é daqui até lá.*

Pesquisadora: *Certo.*

P13: *Seria daqui lá dentro?*

Pesquisadora: *Isso. Exatamente.*

P13: *Mas aí, eu tenho uma folha que vai pra lá... Ah, não sei. Vou te falar que não consegui assim.*

Pesquisadora: *Com nenhum dos três registros?*

P13: *Não consegui obter a figura que formaria, não.*

P13 demonstrou entender a tarefa, mas não conseguiu visualizar sua solução.

Considerações

No que diz respeito aos aspectos que devem ser considerados para a análise da apreensão discursiva em cada registro figural, é possível concluir que:

- as modificações figurais foram mais visíveis com o uso do SG, e direcionaram os sujeitos à visualização da representação do cubo por várias perspectivas e vários tamanhos, possibilitando uma associação entre as hipóteses da tarefa e a figura. Duval (2005) afirma que, tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista geométrico, as atividades diferenciam-se conforme o tipo de instrumento que é utilizado para a reprodução de sua figura;
- em função das hipóteses dadas no enunciado, o registro na forma de SG proporcionou maior congruência entre o tratamento figural heurístico e a dedução necessária para resolver a tarefa. A visualização mental e espacial da figura geométrica a ser formada no plano de intersecção com o cubo é favorecida no momento em que o professor visualiza a representação do cubo no *software* apresentado.
- com relação à identificação dos elementos figurais, todos os registros possibilitaram que os principais elementos fossem identificados.

Nesta unidade de análise e nesta tarefa, destaca-se os erros de interpretação do enunciado que foram encontrados. No enunciado da tarefa, pedia-se: “qual figura geométrica é formada pela intersecção do plano com o cubo?”. Como o plano é bidimensional e o cubo é tridimensional, a figura geométrica solicitada é bidimensional. No entanto, muitos professores afirmavam que a figura poderia ser um prisma ou uma pirâmide. Esse equívoco foi observado em todos os registros apresentados. Notou-se que o maior número de interpretações corretas do enunciado do problema ocorria quando o último registro era apresentado, ou seja, não houve interferência do registro, e sim da quantidade de vezes em que o professor refletia sobre as hipóteses do problema.

6.5.3 Análise matemática

A6: Resolução do problema

O problema pode ser resolvido corretamente desde que o professor visualize as figuras geométricas formadas pela intersecção do plano com o cubo ao percorrer a diagonal \overline{DF} – triângulos e hexágonos. Não é necessário o uso de língua formal, nem recorrer a recursos como cálculos numéricos, algébricos, proporções etc.

Para esta resolução, as modificações a serem realizadas não geram “visualmente” as figuras formadas: é necessário recorrer a uma representação geométrica mental dessas subfiguras – triângulos e hexágonos.

Grupo 1 (MM → EG → SG)

No uso do MM, P1 nem tentou resolver a tarefa, enquanto P2 tentou visualizar, manipular a representação do cubo, mas não conseguiu chegar a uma resposta. P3 respondeu:

P3: Tipo, eu coloquei o primeiro plano, vai formar um triângulo. Se eu colocar o segundo, o primeiro não vale. Então vai analisando pelo vértice?

Pesquisadora: Você pode imaginar que é o mesmo plano que vai percorrendo...

P3: É. Entendi. Triângulo, forma. É difícil imaginar se pegar aqui, como aqui talvez tem uma altura e ele está inclinado, forma um quadrilátero.

É possível notar que P3 conseguiu visualizar a formação de triângulos, e também visualizou que formará outras figuras além dos triângulos, suspeitando que poderiam ser quadriláteros. P4 também extraiu algumas conclusões:

P4: Nessa ponta aqui, ela vai sair um pequeno prisma de base triangular; nessa outra aqui, ela já vai sair um prisma de base retangular, esse tronco, na verdade, de base retangular. Eu enxerguei como um prisma. A primeira ponta sai de base retangular também, que, dependendo, se eu precisar colocar ela assim, é base retangular.

Nesse caso, P4 não compreendeu que a figura formada deveria ser gerada da intersecção do plano com o cubo, e que seria de duas dimensões, e não três. P5, ao manipular o cubo, girá-lo e observá-lo, suspeitou que a figura a ser formada seria um paralelogramo. Com o MM, somente P3 visualizou a formação de triângulos e de mais alguma figura, suspeitando erroneamente que poderiam ser quadriláteros.

Logo depois, ao se disponibilizar a mesma figura na forma de EG, nenhum professor conseguiu resolver corretamente a tarefa. P3 não efetuou nenhum tipo de operação figural, e P4 e P5 fizeram alguns desenhos aleatórios, conforme as Figura 82 e

83. P4 apresentou dificuldades para compreender o enunciado da tarefa e, portanto, realizou uma representação na forma de EG, a qual não o ajudou a concluir o problema. Enquanto isso, P5 afirmou:

P5: Se eu cortar aqui, vai ficar... se eu cortasse em três partes, fica uma pirâmide certinha! Seriam três pirâmides?

A solução de P5, neste registro, foi pirâmides. P1 também respondeu:

P1: Se eu vier perpendicular, eu vou formar o quê? Pirâmides?

E P2 também afirmou que a intersecção formaria prismas. Observa-se como houve erro de interpretação do enunciado da tarefa, pois a intersecção de um plano com um cubo deve originar uma figura bidimensional, e não tridimensional.

Com o SG, P5 continuou sem conseguir resolver a tarefa, e P4 declarou:

P4: A única forma que enxerguei foi esse prisma mesmo, conforme vou cortando ele aqui, se eu for cortar por aqui, vai formando esse prisma de base retangular. Não consegui enxergar de outra forma.

P4 permaneceu na resposta de que a figura formada seria um prisma e, desse modo, demonstrou não ter compreendido ou não ter conhecimento da dimensão da figura gerada pela intersecção do plano com o cubo.

Já P1 conseguiu resolver a tarefa com o uso do SG, mas em sua resposta escrita consta que as figuras formadas poderiam variar de 3 a 6 lados:

P1: “A resolução através do Cabri, possibilita a visão do ‘fatiamento’ do sólido, onde poderíamos demonstrar que um plano com 2 dimensões ao cortar um sólido com 3 dimensões, formará figuras planas a partir de 3 até 6 lados”.

P2, ao visualizar o cubo no SG, abandonou a ideia de que seriam prismas, pois, ao reler o enunciado, afirmou:

P2: Ele vai ser um quadrilátero, mas eu não consigo pensar se ele vai ser um paralelogramo em particular.

Por fim, P3 ao visualizar a figura no SG, concluiu a tarefa e escreveu na folha de respostas:

P3: “A maneira mais tranquila para visualizar foi utilizando o software Cabri 3D, sendo possível analisar que esse plano perpendicular representa triângulo e hexágono quando possui intersecção com o plano do cubo”.

\Grupo 2 (SG → MM → EG)

No contato com o SG, P7 e P10 resolveram o problema dizendo que a figura formada seria uma pirâmide e tetraedros, respectivamente:

P10: “No Cabri identifiquei três tetraedros traçando perpendiculares com a diagonal \overline{DF} ”.

Nesses casos, as figuras obtidas foram tridimensionais, o que não corresponde à solução correta da tarefa. Os professores P6, P8 e P9 afirmaram que as figuras a serem formadas seriam triângulos:

P9: “O Cabri é a melhor opção, pois ficou muito claro o triângulo retângulo”.

Então, ao se disponibilizar a figura representada no MM, P7 e P10 não tentaram resolver a tarefa com esse registro, e P6 e P9 mantiveram suas conclusões extraídas no contato com o registro anterior (SG):

P9: *A figura que eu vejo é um triângulo retângulo, e ali é isso que quer dizer.*

P8 mudou de ideia do triângulo para um prisma:

P8: “no manipulável consigo, com a ajuda da régua e do cubo, perceber melhor”.

P8: *Acho que é um prisma!*

Por fim, ao trabalhar com a figura na forma de EG, P8 não tentou resolver a tarefa, lembrando que este afirmou ser um triângulo no SG, e um prisma no MM. P9 tentou resolver a tarefa, mas falou:

P9: *Eu acho mais difícil assim, o desenho. Eu prefiro assim. Que aqui, eu enxergo com mais dificuldade, mas ainda enxergo. Já aqui e ali...*

P9 estava dizendo que acha mais difícil com a EG e com o MM, e visualiza com mais facilidade no SG.

P7, que afirmou que seriam pirâmides no contato com o SG, e não fez conclusões no MM, chegou à conclusão, na EG, de que as figuras formadas seriam triângulos:

P7: *Então, mas, olha bem, eu tô pensando... aqui tá a diagonal e eu vou traçar a perpendicular, né? Esse plano.*

Pesquisadora: *E, aí, qual figura irá formar nesse plano, nesse corte?*

P7: *Vai ser triângulo aqui, não é? Mas tem a questão da profundidade que vai acontecer ali, não tem?*

E, então, após observar, efetuar tratamentos e pensar, concluiu:

P7: “Triângulos quaisquer e alguns triângulos retângulos”.

Com relação a P6 e P10, estes continuaram com as ideias de que seriam triângulos (P6) e dois tetraedros e um bloco retangular (P10):

P10: “Através da expressão gráfica observei outras figuras geométricas diferentes das anteriores traçando retas perpendiculares ao plano, observei dois tetraedros e um bloco retangular”.

É possível notar que P10 afirmou que traçava retas perpendiculares ao plano. O enunciado da tarefa solicitava que traçasse um plano perpendicular a uma reta, e que este percorresse a reta de modo a formar figuras no plano. Sendo assim, o enunciado não foi totalmente compreendido por P10, mesmo no contato com o último registro apresentado.

Grupo 3 (EG → SG → MM)

Ao se apresentar a figura com a EG, nenhum professor solucionou corretamente o problema (apenas P11 e P15 ficaram mais próximos da resposta correta). A seguir, a transcrição da escrita feita pelos professores na folha de respostas:

P11: “Na expressão gráfica verifiquei que as figuras formadas pareciam mais com triângulos e trapézios”.

P12: “Pensei no quadrado, pois não relacionei a diagonal com o cubo, mas com o plano”.

P13: “Nessa atividade, tive um pouco de problema na interpretação do enunciado. Na expressão gráfica não consegui visualizar”.

P14: “Não consegui chegar a um resultado exato. Tenho dificuldades em formar figuras pela intersecção de um plano em determinados poliedros”.

P15: “No material gráfico, ao traçar as perpendiculares, ficou simples visualizar triângulos e trapézios”.

É possível notar que as respostas, neste registro, foram bastante variadas.

Em seguida, com o SG, também nenhum professor respondeu triângulos e hexágonos. Os professores P11 e P12 responderam somente triângulos. Enquanto P14 respondeu um triângulo ou um quadrado, P15 falou trapézio, e P13, pirâmides:

P11: “Já no Cabri ficou mais difícil, só pude visualizar triângulos nas pontas e no meio tinha muita dúvida sobre a forma geométrica”.

P12: “Cabri: consegui visualizar o triângulo, pois a diagonal ficou melhor para visualizar.”.

P13: “Acho que com o software a visualização ficou melhor, deu para ver nos cortes, pirâmides”.

P14: “Não consegui chegar a um resultado exato. Tenho dificuldades em formar figuras pela intersecção de um plano em determinados poliedros”.

P15: “No cabri foi possível observar a perpendicular”.

Com o MM, nenhum professor respondeu triângulos e hexágonos. P11 falou trapézio, e P13 afirmou:

P13: *Não consegui obter a figura que formaria, não.*

P14, logo que teve contato com a figura na forma de MM, fez várias suposições aleatórias sem uma reflexão prévia, dizendo: quadrado, trapézio, quadrilátero, paralelogramo. Mas, na folha de resposta, escreveu que não conseguiu chegar a um resultado. P15 falou:

P15: *Essa daqui, ela também é tipo um trapézio. Porque, na verdade, até se eu tivesse feito um pouco mais para baixo, ficaria um triângulo.*

Observa-se que P15 compreendeu o problema, mas não conseguiu definir exatamente quais figuras seriam formadas pela intersecção do plano com o cubo. E, por fim, P12 escreveu:

P12: “Material Manipulável, também o triângulo, pois o cubo fica em evidência”.

Portanto, P12 afirmou que, com a representação do cubo na forma de MM, a solução da tarefa ficou mais evidente.

Considerações

Com base nas informações apresentadas anteriormente, pode-se concluir que somente 1 (um) professor resolveu corretamente o problema, e este professor é do grupo 1. Tal professor tentou resolver a tarefa por meio do MM, em seguida com a EG, mas só conseguiu realmente resolvê-lo quando visualizou a figura no SG, e registrou discursivamente o “passo a passo” de seu raciocínio.

A seguir, um quadro com um resumo dos tipos de registros mais utilizados nas tentativas ou soluções dessa tarefa:

Quadro 30: Resolução da Tarefa 5.

REGISTRO FIGURAL	RESOLVEU A TAREFA		
	Sim	Tentou	Não tentou
Grupo 1 (MM → EG → SG)	SG	MM/EG	MM/EG
Grupo 2 (SG → MM → EG)	-----	SG	MM
Grupo 3 (EG → SG → MM)	-----	EG/SG	MM

Fonte: Autora.

O MM se destacou como o registro que menos apresentou tentativas de resolver a tarefa, mesmo quando este registro era apresentado como segunda ou terceira alternativa. Os professores visualizavam a representação do cubo nesse registro e não conseguiam efetuar tratamentos que levassem a concluir a tarefa com êxito.

7 Conclusões

Com o objetivo de finalizar este texto, serão apresentadas algumas respostas relacionadas à questão que norteou o desenvolvimento desta investigação: *como o tipo de registro figural (Materiais Manipuláveis, Softwares de Geometria, Expressões Gráficas) influencia nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas de figuras geométricas de professores de matemática da Educação Básica?* Para obter tal resposta, verificou-se as interferências dos aportes teóricos da pesquisa em conjunto com a metodologia adotada.

Inicialmente, destaca-se que o curso de extensão ministrado para professores possibilitou o conhecimento de representações figurais diferentes que podem ser utilizadas nas aulas de geometria, de forma menos empírica e mais fundamentada nas teorias de Duval, com seus registros de representação semiótica. Os professores participantes do curso se empenharam em conhecer esses registros e mostraram dispostos para trabalhar com mais de um registro nos conteúdos específicos.

A sequência de tarefas aplicada também ofereceu subsídios para que a autora da tese pudesse identificar e interpretar as ações de cada um dos professores colaboradores, expressas por meio das falas e escritas, e dos registros discursivos (língua natural e formal) e não discursivos que os instrumentos de pesquisa utilizados proporcionaram.

A escolha das tarefas e sua organização em uma sequência proposta não tiveram uma ordem cronológica que relacionasse a tarefa anterior com a subsequente, ou seja, os conteúdos e os raciocínios envolvidos nas tarefas não eram mutuamente dependentes. Além disso, a ordem da apresentação dos registros figurais foi alternada para cada grupo de professores colaboradores, de modo a permitir que os dados para a análise fossem mais consistentes. Por isso, foi possível analisar o uso dos registros aleatoriamente, independente do conteúdo e das tarefas anteriores, isolando os dados e restringindo-os somente ao contato com os registros figurais a serem apresentados: *“Trata-se do funcionamento cognitivo do pensamento que a atividade matemática implica e mobiliza”* (DUVAL, 2014, p. 36). Para Duval (2014), a pesquisa sobre o ensino da matemática deve levar em conta exigências não matemáticas, mas que dizem respeito à aquisição de conhecimentos.

As tarefas que contemplaram o instrumento de pesquisa foram elaboradas pensando em diversas situações de demonstrações matemáticas, definição de conceitos, ocorrência de leis de fechamento nas figuras, possibilidades de modificações figurais, e

visualização geométrica. A Tarefa 2, por exemplo, foi elaborada com o objetivo de identificar qual a influência do tipo de registro figural no conhecimento de um conceito relativamente simples: o de ponto médio. Estas situações permitiram que fosse investigado o uso dos registros figurais em problemas de geometria.

O uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Geometria foi, sem dúvida, primordial para a investigação, direcionando o modo como foram elaborados os instrumentos de pesquisa e as consequentes análises. Também fundamentou a investigação dos registros figurais nos aspectos perceptivos, operatórios e discursivos, evidenciando a influência desses registros, conforme os resultados desta tese.

No que se refere às análises realizadas, os registros discursivos e não discursivos, e as falas e escritas dos professores, durante a aplicação da sequência de tarefas, foram subsidiados satisfatoriamente pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A tripla análise das produções dos alunos estabelecida por Duval (2011) foi estendida às produções dos professores colaboradores deste trabalho. Desse modo, foi possível apontar o encaminhamento, a autonomia e a progressão, e o sucesso (fracasso) ou aquisição (bloqueios) durante a resolução da sequência de tarefas proposta.

Uma síntese desses aspectos cognitivos observados durante a aplicação da sequência de tarefas, categorizados na tripla análise, é apresentada no Quadro 31, a seguir:

Quadro 31: Considerações sobre os registros figurais

TRIPLA ANÁLISE	CONSIDERAÇÕES SOBRE OS REGISTROS FIGURAIS	
ANÁLISE DA COMPREENSÃO	TRATAMENTO FIGURAL	Com base na análise dos tratamentos figurais realizados nas cinco tarefas aplicadas, conclui-se que todos os registros se destacaram por possibilitar transformações desse tipo, suscitando a criatividade e o uso do raciocínio lógico em busca da solução para o problema. No entanto, os tratamentos realizados em cada registro figural foram diferentes e em conformidade com a tarefa proposta, independente da ordem em que foram apresentados.
	MOBILIZAÇÃO DE UM SEGUNDO REGISTRO	Com base nos dados obtidos a partir das cinco tarefas aplicadas, verificou-se que o registro figural na forma de EG foi o que proporcionou maior intenção de mobilização de outro registro, sendo este o registro numérico. É possível concluir também que, na maioria das vezes em que o registro numérico foi utilizado simultaneamente aos outros registros (MM, SG), a figura na forma de EG já havia sido apresentada. O uso de um registro numérico como segunda opção nem sempre é positivo no que diz respeito à busca de demonstrações. Duval (2011) afirma que, para aprender, os sujeitos devem trabalhar sem recorrer primeiro a aspectos métricos, pois os objetos trabalhados são somente representações das quais se extrai conclusões que devem ser generalizadas e não particulares, como é o caso de quando se recorre a medidas em representações figurais.
ANÁLISE DAS RAZÕES	APREENSÃO PERCEPTIVA	Nessa unidade de análise, notou-se que o registro figural na forma de MM direcionou o sujeito para uma “maneira natural de ver” as figuras, e também para uma maneira natural de encontrar a solução da tarefa. A figura na forma de EG permitiu que os professores reconhecessem as unidades figurais envolvidas; porém, no SG, os aspectos importantes da figura ficaram mais evidentes. Por exemplo: na EG, observou-se a necessidade do sujeito de utilizar medidas para fins de comprovação, enquanto no SG essa possibilidade não entrou em questão. Tais fatos

		foram observados independentemente da ordem de apresentação dos registros.
	APREENSÃO OPERATÓRIA	Embora, inicialmente, o registro figural na forma de MM direcione o olhar do sujeito para uma “maneira normal” de ver as figuras, foi nesse registro que se concentrou a maior parte de modificações figurais e explorações heurísticas, ou seja, a maioria dos tratamentos figurais no MM estava associada a raciocínios dedutivos para encontrar a solução da tarefa. O SG proporcionou congruência entre as hipóteses (enunciado) e os tratamentos figurais, e também se destacou por possibilitar modificações em geral.
	APREENSÃO DISCURSIVA	Com relação à apreensão discursiva das figuras, notou-se que esta é aprimorada à medida que o sujeito modifica o seu contato com o registro figural. Ou seja, as diferentes representações são cumulativas, no sentido de clarificar a interpretação dos elementos figurais com o enunciado da tarefa. Com relação à congruência semântica entre enunciado (hipóteses) e figura, esta variou de acordo com o problema. No entanto, as modificações figurais foram mais visíveis e melhor interpretadas com a representação figural na forma de SG.
ANÁLISE MATEMÁTICA	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	Para resolver as tarefas propostas, o SG e a EG foram os registros figurais que mais direcionaram o raciocínio dos professores para a solução correta. Com o uso do MM, observou-se certa distância entre a possibilidade de tratamento a ser realizado na figura e o raciocínio dedutivo que poderia ser expresso por meio da língua formal. Portanto, a falta de congruência semântica entre o tratamento figural no MM e a língua formal interferiu na conclusão da tarefa. O uso da EG também suscitou, em alguns sujeitos, a intenção de uso de medidas para fins de comprovação, dependendo da tarefa.

Fonte: Autora.

Com relação ao uso de tratamento figural para resolver o problema, em cada tipo de registro figural, os professores realizaram tratamentos diferentes, independente do momento (ordem) em que o registro figural foi apresentado. No MM, houve destaque no uso de tratamentos que recorreram a materiais como tesoura, régua, lápis, e também dobraduras, para auxiliar no raciocínio, conforme o esperado. No SG, destacou-se a facilidade em movimentar as figuras, mudando-as de lugar, posição e tamanho. Na EG, os desenhos à mão livre e o uso da régua graduada e não graduada foram recorridos continuamente. Essas constatações reforçam a ideia de que é importante que o sujeito conheça diferentes representações para um mesmo objeto matemático, pois cada uma delas desenvolve aspectos cognitivos e matemáticos particulares. Em conformidade com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é a coordenação das diferentes representações para um mesmo objeto que possibilita a aprendizagem.

Quanto à mobilização de um segundo registro para resolver o problema, os registros figurais na forma de EG se destacaram por induzir os professores colaboradores à transformação do **registro figural** para o **registro numérico** - principalmente nas Tarefas 1 e 2, que solicitam, respectivamente, comprovação da igualdade de áreas e reconhecimento de um ponto como ponto médio. É importante ressaltar que tais problemas foram propostos com a intenção de que os sujeitos, ao ter contato com os registros, utilizassem deduções matemáticas, pois, nesses casos, o uso de cálculos pode ser útil para verificar, mas não para demonstrar os resultados desejados. Com relação ao SG, este foi o registro que possibilitou o maior número de conversões do tipo **figural** para **língua formal**. Talvez isso se deva à dinâmica que a figura possui e à facilidade de visualização dos elementos figurais quando representada nesse tipo de registro figural. Tal fato foi constatado principalmente nas Tarefas 1 e 3.

Quanto às apreensões perceptivas, todos os registros possibilitaram o reconhecimento das unidades figurais envolvidas. A EG se destacou por despertar um maior número de raciocínios relacionados ao cálculo, principalmente nas Tarefas 1 e 2. Porém, com a EG, notou-se dificuldades para visualizar elementos figurais importantes na Tarefa 5, pois esta consistia na interseção de um objeto geométrico tridimensional (um cubo) com um plano, o que dificulta a visualização e o raciocínio em tarefas como esta. No MM, perceptivamente, os sujeitos foram induzidos à sua manipulação (recorte, sobreposição etc.), fazendo com que estímulos relacionados à ideia de a representação ser

o próprio objeto matemático fossem manifestados, principalmente nas Tarefas 1, 2, 4 e 5, ao recortar o material, ao medir o tamanho dos segmentos, ao construir e desconstruir as representações de figuras, entre outras manipulações. Talvez isso tenha ocorrido devido à tendência relacionada à “maneira normal de ver” que esse registro provocou nos sujeitos colaboradores. O SG não desconstruiu totalmente as leis de fechamento e continuidade das figuras, mas deixou aspectos importantes destas mais evidentes, e direcionou o olhar dos sujeitos, proporcionando menos intuição em seus raciocínios.

Quanto às apreensões operatórias, pode-se afirmar que ocorreram, no desenvolvimento das tarefas, modificações do tipo mereológicas, posicionais e óticas. Com o MM, foi possível executar maior número de operações mereológicas e posicionais principalmente nas Tarefas 1, 3 e 4. Nessas tarefas, os professores recorreram a recortes que transformaram as figuras de partida em subfiguras que puderam ser recompostas de modo a formar outra figura. No SG, destacou-se a modificação posicional no GeoGebra, principalmente nas Tarefas 1, 2 e 4, as quais possibilitavam o transladar de pontos e vértices que modificaram as figuras de partida. No *software* Cabri, foi possível realizar modificações posicionais e óticas na Tarefa 5, pois esse *software*, além de permitir a mobilidade da figura, também permite que o sujeito aumente ou diminua seu tamanho. Com relação à EG, não houve destaque significativo de modificações, ficando mais restritas às modificações posicionais na Tarefa 2 e modificações mereológicas nas Tarefas 3 e 4, porém sem muita frequência entre os professores.

Quanto às apreensões discursivas, foi possível observar que a variação do tipo de registro figural proporciona o aprimoramento da interpretação discursiva dos elementos figurais. Chegou-se também à conclusão de que quanto mais precisas forem as características dos elementos da figura, maior a oportunidade de congruência entre o tratamento figural heurístico e a dedução matemática. Com relação aos elementos figurais, de acordo com as falas e os registros discursivos dos professores, foi possível concluir que os sujeitos interpretaram satisfatoriamente todos os seus registros. No entanto, a interpretação do enunciado associado à figura de algumas tarefas ficou comprometida:

- **Tarefa 1:** Mostrar a igualdade das áreas 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} .

Nesta tarefa, notou-se que, dependendo do tipo de registro figural, a informação “qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} ” ficou despercebida. Ou seja, quando os

registros na forma de EG e MM foram apresentados primeiro, os professores não se atentaram à hipótese de que o segmento \overline{AB} poderia ser transladado em qualquer posição da figura. No entanto, com o SG, a dinâmica oferecida por esta ferramenta permitiu que houvesse congruência entre enunciado e tratamento figural, conforme a figura a seguir:

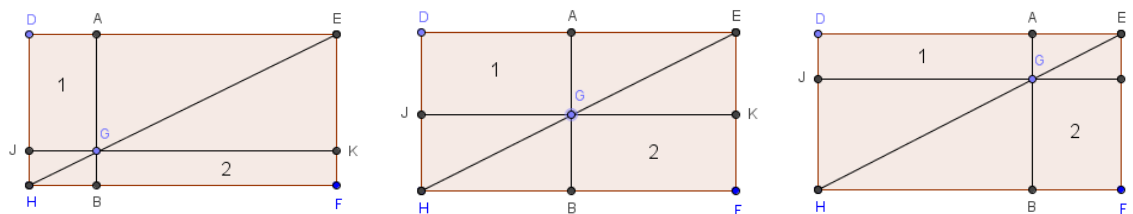


Figura 88: Tratamento figural no MM.

Fonte: Autora.

- **Tarefa 2:** Sendo $\overline{AM} = \overline{MB}$ segmentos de mesma medida, de acordo com o esquema, podemos concluir que:
 - () M é o ponto médio do segmento \overline{AB} .
 - () M não é ponto médio do segmento \overline{AB} .
 - () Não foram dados os valores das medidas dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , portanto, nada podemos afirmar.

Nesta tarefa, observou-se que o registro na forma de EG induziu os professores a duvidar se os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} tinham a mesma medida, mesmo após ler o enunciado do problema e mesmo após o contato com os outros tipos de registro.

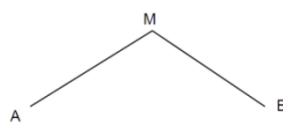


Figura 89: Representação na EG.

Fonte: Autora.

No entanto, com relação ao SG e ao MM, essa dúvida não surgiu, o que permitiu que os sujeitos se concentrassem na questão do problema – o fato de M ser ou não ponto médio do segmento \overline{AB} . Logo, a interpretação do enunciado da tarefa teve estreita relação com o tipo de registro figural apresentado.

- **Tarefa 5:** Ao traçar um plano perpendicular à diagonal \overline{DF} , qual figura geométrica é formada pela intersecção do plano com o cubo?

Nesta tarefa, também houve problemas relacionados à interpretação do enunciado juntamente às figuras apresentadas, porém o tipo de registro figural não influenciou na interpretação das hipóteses. Ou seja, nos três registros figurais apresentados, alguns professores responderam que a figura geométrica a ser formada poderia ser pirâmide, prisma, tetraedro, isto é, uma figura tridimensional. No entanto, a intersecção do plano com o cubo gera uma figura bidimensional. Nenhum registro proporcionou explicitamente a ruptura do tridimensional para o bidimensional na ordem das apresentações dos registros, e, nos três registros, houve indicações de que a figura pudesse ser uma figura tridimensional.

Sobre a interpretação de hipóteses e figuras nas demais tarefas, não há destaques relevantes que devam ser citados neste momento.

Quanto à resolução do problema, considera-se uma solução satisfatória para as Tarefas 1, 2 e 3, aquelas realizadas dedutivamente, ou seja, as resoluções em que o tratamento figural esteve associado ao raciocínio dedutivo juntamente ao uso de língua formal como justificativas matemáticas. Nesse sentido, a maioria das soluções corretas com raciocínios dedutivos se concentrou no momento em que os professores colaboradores tiveram contato com os registros figurais na forma de SG e EG. Estes registros proporcionaram aos sujeitos maior possibilidade de tratamentos figurais, melhorando, assim, a visualização das operações e das unidades figurais envolvidas. Tal fato provocou o raciocínio dedutivo para que as justificativas lógicas e formais fossem desenvolvidas para fins de demonstração da resolução das tarefas. Com relação aos MM, as soluções que mais se destacaram foram aquelas que contaram com tarefas de ação direta na representação que gerassem algum tipo de solução empírica, como foi o caso da Tarefa 4. Nesta tarefa, não era necessário o uso da língua formal para sua conclusão. Dessa forma, o registro figural no MM proporcionou encontrar a solução correta por mais vezes pelos professores, já que foi possível realizar várias manipulações no material, até que a solução correta fosse encontrada. No que diz respeito à Tarefa 5, houve limitação de visibilidade da figura geométrica – solução – nos três registros. Com a figura na forma de EG, o fato de sua representação nesse registro ser bidimensional, e a figura a ser representada, tridimensional, dificultou os tratamentos e a visualização da figura geométrica a ser formada. No MM, houve poucas tentativas de resolver a tarefa, pois os sujeitos não sabiam

de que modo efetuar tratamentos figurais efetivos para chegar a uma solução. O SG foi o registro que proporcionou maior tratamento figural nessa tarefa e, conseqüentemente, maiores tentativas de solução. A visibilidade por vários ângulos e tamanhos auxiliaram nos tratamentos figurais:

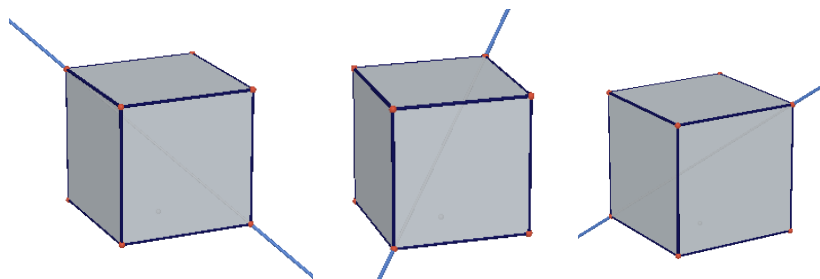


Figura 90: Representação no SG.

Fonte: Autora.

Todavia, os sujeitos ainda demonstraram dificuldades para identificar as figuras geométricas a serem formadas pela intersecção do plano perpendicular a uma das diagonais do cubo com o cubo.

De acordo com Duval (2014, p. 37), “a atividade matemática *exige que utilizemos, desenvolvamos e coordenemos muitos sistemas de representação semióticos* e, também, a língua natural, mesmo que não sirva para calcular”. Esse é o modo de acesso aos objetos geométricos. Dessa forma, a presente pesquisa mostra que, ao utilizar diferentes registros figurais na resolução de problemas de geometria, fatores referentes aos tratamentos, às mobilizações de registros, às apreensões - sejam elas perceptivas, operatórias ou discursivas -, e à resolução de problemas são influenciados pelo tipo de registro figural disponível, gerando conseqüências diretas na busca da solução do problema.

Constatou-se também que essa influência do tipo de registro figural está associada às exigências da tarefa em que o registro figural está disponível. Nas tarefas que exigiam deduções matemáticas (língua formal), a EG e o SG foram os registros mais favoráveis, possibilitando o raciocínio dedutivo aliado ao tratamento figural. Os sujeitos identificaram as unidades figurais envolvidas e, dessa forma, trabalharam com os símbolos matemáticos para solucionar a tarefa. O SG ainda proporcionou a movimentação das figuras e dos elementos figurais, o que auxiliou no entendimento das hipóteses da tarefa e no raciocínio para sua solução. Nas tarefas em que se exigiu um tratamento figural como parte do problema, os MM se destacaram por possibilitar tentativas empíricas - como recortes, uso

de régua, dobraduras - que pudessem resultar na solução para o problema, como foi o caso da Tarefa 4, que solicitava a transformação de um retângulo em um paralelogramo não retângulo equivalente. Do ponto de vista matemático, Duval (2011) explica que a solução do problema é o que demonstra os diferentes conhecimentos que permitem resolvê-lo; no entanto, do ponto de vista cognitivo, são analisados os processos que permitem reconhecer os conhecimentos matemáticos a serem empregados.

Portanto, infere-se que o sucesso na resolução de problemas de geometria está relacionado aos registros figurais disponíveis para sua solução juntamente às exigências do problema proposto, necessitando, portanto, de uma variedade de representações figurais para que ocorra a compreensão dos elementos da figura que levam aos tratamentos figurais e às operações de solução para o problema.

A pesquisa reforçou a importância do trabalho com as diferentes representações semióticas figurais ao resolver uma tarefa de geometria, não somente para que o problema seja resolvido, mas para que os tratamentos figurais, a mobilização do registro discursivo da língua formal, as modificações figurais, e também as apreensões discursivas, sejam desenvolvidas, contribuindo com o processo de aquisição dos conhecimentos e com o funcionamento cognitivo do pensamento. Assim, surge a importância de os cursos de Licenciatura em Matemática proporcionarem o conhecimento de diferentes representações semióticas, principalmente para os objetos geométricos, sem, contudo, esquecer-se do principal: “fazer com que os alunos passem da *maneira natural de ver as figuras*, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, à maneira matemática de olhá-las que, ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D” (DUVAL, 2014, p. 15). Tais preocupações são necessárias não somente para que os futuros professores se aprofundem em conhecimentos matemáticos, mas também para que obtenham subsídios metodológicos didáticos para suas futuras aulas de geometria e matemática, em geral.

Por fim, espera-se que os resultados do presente estudo contribuam com os professores da Educação Básica e do Ensino Superior, para que identifiquem a importância de variar os registros figurais durante o trabalho com conteúdos de geometria em sala de aula e também durante a resolução de problemas. Conforme sugere esta pesquisa, cada representação figural traz contribuições diferentes e específicas durante a reflexão, e, sobretudo, durante as manifestações e consolidações das apreensões, sejam elas perceptivas, operatórias ou discursivas. O tipo de registro figural influencia sobretudo na

visualização de conceitos e propriedades importantes de objetos geométricos, auxiliando na conclusão do raciocínio desejado.

Ao pensar na possibilidade de pesquisas futuras, sugere-se que as tarefas contempladas nesta pesquisa sejam aplicadas a alunos da Educação Básica e alunos dos cursos de Matemática, no sentido de refinar os dados coletados e chegar a conclusões que possam ser estendidas não somente à influência dos registros figurais para a apreensão de conceitos geométricos, mas também à reflexão sobre as possibilidades de ampliação de conhecimento de objetos geométricos na realização de outras tarefas. Assim, seria possível, além de explorar diferentes representações semióticas figurais, investigar a influência dos registros figurais e a confrontação entre um conhecimento prévio e um novo conhecimento em geometria, quando for o caso.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, Alda J.; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

ARSIE, K. C. **A Expressão Gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas**. 2012. 150 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, p. 285-295, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CYRINO, M. C. C. T.; BALDINI, L. A. F. O software GeoGebra na formação de professores de Matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**: Campo Mourão – PR, Jul-dez, 2012.

DUVAL, R.. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales**. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999.

_____. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2003.

_____. Les conditions conitives de l'apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

_____. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas**. Org.: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.1, p.97-117, 2012a.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012b.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012c.

_____. Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma Sequência de Atividades em Geometria. Tradução: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

_____. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.10, n.1, p. 1-23, 2015.

DUVAL, R.; GODIN, M. **Les changements de regard nécessaire sur les figures**. Grand N, n. 76, p. 7-27, 2005.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. **O papel heurístico de uma figura geométrica**: o caso da operação de reconfiguração. VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

FLORES, C. **Olhar, saber, representar**: sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FONSECA, Maria da Conceição F. R., *et al.* **O ensino de geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**: Campo Mourão – PR, Jul-dez, 2013.

GÁLVEZ, Delia. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria plana e espacial**: um estudo axiomático. 2ª ed. Maringá: Eduem, 2010.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana**: um estudo com o software Geogebra. Maringá: Eduem, 2010.

GRAVINA, M. A. **A Geometria Dinâmica**: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p. 1-13. Belo Horizonte, 1996.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. Reflexões sobre o Ensino de Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. São Paulo, n. 4, p. 3-12, jan./jun. 1995.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: _____ (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1999.

MELLO, E. G. S. **Demonstração**: uma sequencia didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da Geometria. 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MOREIRA, M. A. **Modelos mentais**. In: Investigações em Ensino de Ciências. Porto Alegre, v. 1, n. 3, pp. 193-232, 1996.

MORETTI, M. T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. Contrapontos, ano 2, n. 6, p. 423-437. Itajaí, set./dez. 2002.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no Ensino Universitário. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

OSHIMA, Isabel Satico; PAVANELLO, Maria Regina. **O Laboratório de Ensino de Matemática e a aprendizagem da Geometria**. Universidade Estadual de Maringá, PR. Disponível em : <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/232-4.pdf>>. Acesso em: 23 de abril de 2015.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica**: a geometria na sala de aula. Tese de Doutorado (Educação Matemática). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2000. 349 f.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

PAVANELLO, R. M. **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula**. São Paulo: Coleção SBEM, vol. 2, 2004, p.129-143.

PONTE, João Pedro. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, 25, 2006, p. 105-132.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SCHEFFER, Nilce Fátima. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir das mídias: dobradura e software dinâmico. In: LORENZATO, Sergio (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SWAN, Malcolm. Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. *Centre for Research in Mathematics Education, University of Nottingham*. **Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática – EIEM**. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2014.

TAHAN, M. **Didática da Matemática**. São Paulo: Edição Saraiva, 1962.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução: Ana Thorell. 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Apêndice A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Vimos convidá-lo a participar da pesquisa intitulada **As apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais**, que está sendo desenvolvida sob orientação do Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, do curso de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

O objetivo da pesquisa é investigar a influência do tipo de registro figural no que diz respeito às apreensões perceptiva, operatória e discursiva de figuras geométricas. Os registros figurais utilizados serão: os Materiais Manipuláveis, o Software GeoGebra e a Expressão Gráfica. Para o desenvolvimento desta pesquisa é muito importante sua colaboração, participando dos encontros de nosso curso (40 h/a) e realizando as tarefas que serão propostas ao término da oficina. Esses encontros serão gravados em áudio e posteriormente será feita transcrição para análise. Informamos que os dados serão lidos apenas pela pesquisadora e o sigilo do pesquisado será garantido. Também não haverá nenhum tipo de pagamento pelos dados. Informamos que poderão ocorrer mínimos desconfortos no decorrer das tarefas, mas os participantes terão total liberdade para deixar de responder ou não se manifestar. Poderá ocorrer um passageiro constrangimento no início pela gravação do áudio, que tenderá a desaparecer rapidamente. No geral, a investigação não acarretará danos inaceitáveis ou duradouros, visto que se desenvolverá por meio de protocolos seguros. Ressaltamos que as informações obtidas serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos participantes. Após as transcrições das entrevistas as gravações serão deletadas. Os benefícios esperados estão relacionados à melhoria no ensino e aprendizagem de Matemática e de sua prática docentes. Caso haja dúvidas ou necessidade de maiores esclarecimentos, estaremos à disposição nos endereços abaixo ou poderá ser consultado o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta deste documento. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida e assinada por cada participante.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e pesquisado, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo

pesquisador e por você, como sujeito ou responsável pelo sujeito de pesquisa) de tal forma a garantir o acesso ao documento completo.

Eu,.....(nome por extenso do sujeito de pesquisa) declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pelo Profº Dr. Valdeni Soliani Franco.

_____ Data:.....

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, Mariana Moran, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra nominado.

_____ Data:.....

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador, conforme o endereço abaixo:

Nome: Valdeni Soliani Franco

Endereço: Praça Rocha Pombo, 327/302 – CEP: 87013-030 – Maringá/PR.

(telefone/e-mail): (44)-3011-4933 – vsfranco@uem.br

Nome: Mariana Moran

Endereço: Av. Bento Munhoz da Rocha, 1014. Bloco B apto53

Telefone/ email : (44) 3029- 3788 – marianamoranmar@gmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

Apêndice B

Conteúdos abordados no Curso de Extensão oferecido aos professores participantes da pesquisa

Encontro 1

Neste dia foram trabalhados conceitos referentes aos polígonos utilizando registros na forma de Expressão Gráfica e Materiais Manipuláveis.

Inicialmente, os conceitos foram trabalhados por meio de tarefas propostas na forma de Expressões Gráficas, bem como a sua formalização antes ou depois da realização das tarefas, dependendo do conceito. Os assuntos explorados foram: segmentos de reta; segmentos consecutivos; segmentos colineares; linha poligonal aberta e fechada; vértices; polígonos convexos e não convexos; polígonos simples e não simples.

Logo após, realizaram-se as mesmas atividades, estudando e discutindo os mesmos conteúdos, porém com os Materiais Manipuláveis.

Encontro 2

Neste dia continuou-se o trabalho em forma de tarefas com os polígonos por meio da Expressão Gráfica e dos Materiais Manipuláveis. Foram explorados os seguintes polígonos e suas propriedades: triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, octógonos, decágonos dodecágonos.

Neste dia, o trabalho também foi iniciado com o uso das Expressões Gráficas e após utilizou-se os Materiais Manipuláveis como forma de representar e explorar os mesmos conceitos vistos anteriormente.

Encontro 3

Neste encontro, os assuntos abordados nas Aulas 1 e 2 foram explorados num contexto de tarefas também, porém utilizando o *Software* GeoGebra. Foram propostas tarefas de modo a explorar outra representação, no caso no *Software* GeoGebra, para os conceitos que foram trabalhados com a Expressão Gráfica e os Materiais Manipuláveis.

Encontro 4

Neste dia foram trabalhados conceitos referente a circunferência em forma de tarefas. A exploração iniciou com o uso dos Materiais Manipuláveis abordando os

seguintes assuntos: raio, centro, circunferências concêntricas, corda, secante, diâmetro, tangente e ponto de tangência.

Logo após, realizaram-se as mesmas atividades, abordando e discutindo os mesmos conteúdos, porém com construções na forma de Expressões Gráficas.

Encontro 5

Neste dia continuou-se o trabalho em forma de tarefas com a circunferência por meio da Expressão Gráfica e dos Materiais Manipuláveis. Foram explorados os seguintes assuntos: circunferências tangentes interna e externamente, ângulo inscrito e o teorema da potência de ponto.

Neste dia, o trabalho também foi iniciado com o uso dos Materiais Manipuláveis e por seguinte, utilizou-se as Expressões Gráficas como forma de investigar e construir um conhecimento por meio de uma outra representação do mesmo assunto visto anteriormente.

Encontro 6

Neste encontro, os conteúdos explorados nas Aulas 4 e 5 foram abordados num contexto de tarefas também, com o *Software* GeoGebra. As tarefas propostas exploraram uma outra representação que foi realizada no *Software* GeoGebra, dos conceitos trabalhados na Expressão Gráfica e nos Materiais Manipuláveis.

Encontro 7

Neste dia foram abordados conceitos da Geometria Fractal e foram construídos por meio do *Software* GeoGebra, o Floco de Neve de Koch explorando sua área, perímetro e dimensão. Foram trabalhadas as principais características do fractal – auto semelhança, dimensão e complexidade infinita.

Encontro 8

Neste encontro foi dada continuidade ao trabalho com fractais, porém explorando alguns fractais com os Materiais Manipuláveis e posteriormente, na forma de Expressão Gráfica. Foram construídos e investigados o Triângulo de Sierpinski e o Cartão Fractal, este último realizado somente na forma de Material Manipulável.

Encontro 9

O último encontro se destinou a apresentação dos professores participantes. Essa apresentação consistiu na aplicação de um dos assuntos e materiais utilizados durante o curso em suas salas de aula. Tal solicitação foi feita no primeiro encontro, de modo que os professores pudessem escolher qual assunto e qual material gostaria de abordar com seus alunos. Os materiais apresentados foram interessantes e variados: utilizaram, em sua maior parte, dos Materiais Manipuláveis e do *Software* GeoGebra.

A apresentação foi composta por fotos e slides que demonstraram como foi a aplicação e a reação dos alunos diante das representações geométricas que foram utilizadas.

