UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

KARLA APARECIDA LOVIS

As concepções de Geometrias de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica

Maringá
2013

KARLA APARECIDA LOVIS

As concepções de Geometrias de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Maringá
2013

KARLA APARECIDA LOVIS

As concepções de Geometria de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Franco

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Miriam G. Penteado

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP

Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Universidade Federal do Paraná – UFPR

Luzia Marta Bellini

Profa. Dra. Luzia Marta Bellini
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Clélia M. I. Nogueira

Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Maringá, 09 de dezembro de 2013.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Valdeni Soliani Franco pelo privilégio de tê-lo como orientador, professor e amigo. Pela dedicação, incentivo e encaminhamentos. Professor Valdeni, muito obrigada!

Ao professor Carlos Roberto Vianna e a professora Miriam Godoy Penteado pelas contribuições ainda na qualificação, e por terem aceitado o convite para participar da defesa.

Às professores Luzia Marta Bellini e Clélia Maria Ignatius Nogueira por terem me dado o prazer de ser sua aluna nas disciplinas do Mestrado e do Doutorado. Pelo aprendizado, pelas experiências vivenciadas e pelas suas contribuições para o trabalho final.

Ao professor Rui Marcos de Oliveira Barros e a professora Arlete de Jesus Brito pelas contribuições no exame de qualificação.

Aos professores que participaram da pesquisa, sem vocês nada disso seria possível!

À todas as professoras e professores que passaram pela minha vida durante estes vinte e três anos de estudo.

Às amigas Evelyn e Mariana pela amizade e o companheirismo, pelas experiências acadêmicas e pessoais compartilhadas.

Aos amig@s, do mundo visível e do mundo invisível, que em diferentes lugares e situações estiveram próximos fisicamente e virtualmente.

Aos meus familiares, de maneira especial aos meus pais Ivan Lovis e Clarice Lovis, pelo amor, pela apoio e incentivo oferecidos nos diferentes momentos da minha vida.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar as concepções de vinte e sete professores de Matemática sobre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas. Em outras palavras, procurou-se analisar as concepções dos professores sobre o assunto e, por extensão, os conhecimentos, as opiniões, as preferências e as ideias que eles apresentam a respeito das Geometrias. Primeiramente, o estudo foi subsidiado por autores como Ponte (1992), Thompson (1992; 1997), Cury (1994), Guimarães (1988; 2003), Dewey (1953), entre outros. Num segundo momento, a escolha dos participantes realizou-se por meio de um questionário, e a coleta dos dados adveio de uma entrevista semiestruturada, além de trinta e seis cartões com conceitos, resultados e palavras relacionadas às Geometrias. Os entrevistados atuam em escolas públicas do Estado do Paraná – cada um segundo o Núcleo Regional de Educação no qual está lotado. Durante a pesquisa, investigou-se as concepções que os professores apresentam sobre a construção do conhecimento geométrico, da Geometria Euclidiana, das Geometrias não Euclidianas e da importância a elas atribuídas. Quanto ao primeiro fator, os professores destacaram quatro momentos que consideram importantes: antes da graduação, na graduação, na pós-graduação e no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula. O segundo quesito, por sua vez, demonstrou que a maioria dos professores concebe a Geometria Euclidiana como entes geométricos da Geometria Plana e/ou Espacial, tais como ponto, reta, plano, figuras e sólidos geométricos. Quanto ao terceiro fator, ou seja, às concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, a maioria dos professores apresentam algumas ideias e opiniões sobre o assunto. Observou-se também que o estudo das Geometrias não Euclidianas ainda não quebrou/instaurou novas concepções uma vez que somente oito professores apresentam concepções fundamentadas nos conceitos e resultados dessas Geometrias. Sobre a importância das Geometrias, os professores destacaram a sua aplicabilidade em situações cotidianas. As concepções tanto a respeito da Geometria Euclidiana quanto das não Euclidianas, são, em geral, ancoradas nas ideias, opiniões e preferências dos professores.

Palavras-chave: Concepções; Geometria Euclidiana; Geometrias não Euclidianas; Formação de Professores.

ABSTRACT

Concepts on Geometry in a group of primary school Math teachers

The ideas on Euclidian and non-Euclidian Geometry of twenty-seven teachers of Mathematics are analyzed. Further, the knowledge, opinions, preferences and notions they have on these types of Geometries are provided. Analysis was foregrounded by studies on Ponte (1992), Thompson (1992; 1997), Cury (1994), Guimarães (1988; 2003), Dewey (1953) and others. Selection of participants was undertaken by questionnaires and data were collected through semi-structured interviews plus 36 charts filled with the Geometry-related concepts, results and terms. Interviewed teachers work in government schools of the state of Paraná, Brazil, each of whom belonged to a different Regional Nucleus of Education. Research investigated the concepts that teachers have on the construction of geometric knowledge, Euclidian geometry, non-Euclidian geometries and their importance. With regard to the first item, the teachers underscored four relevant moments: before, at and after graduation and during the teaching years. The second item showed that most teachers think that Euclidian geometry is made up of the geometrical beings from Plane or Spatial geometry, such as point, straight line, plane, figure and solids. Notions and opinions on non-Euclidian geometries were presented by many teachers. However, the study of non-Euclidian geometries did not provide or restore new concepts since only eight teachers had deeper ideas on the subject. The teacher emphasized the applicability of geometry in people´s daily life. However, as a rule, knowledge, ideas and opinions of teachers with regard to Euclidian and non-Euclidian Geometry are highly limited and shallow.

Keywords: Concepts; Euclidian Geometry; non-Euclidian Geometry; Teachers´ formation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

COPEP – Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos

DCE – Diretrizes Curriculares da Educação Básica

EJA – Educação de Jovens e Adultos

GTR – Grupo de Trabalho em Rede

NRE – Núcleo Regional de Educação

PCM – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática

PDE – Programa de Desenvolvimento Educacional

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática

PSS – Processo Seletivo Simplificado

QPM – Quadro Próprio do Magistério

SEED – Secretaria de Estado da Educação do Paraná

UEM – Universidade Estadual de Maringá

SUMÁRIO

Introdução

Este estudo adveio da junção entre a história pessoal – acadêmica e profissional – e o ensino de Geometrias[1]. O interesse pelo estudo da Geometria Euclidiana iniciou, ainda na graduação, no curso de Matemática Licenciatura na Universidade Federal de Santa Catarina. Durante o curso, conheci alguns *softwares* de Matemática e me interessei mais especificamente pelo GeoGebra[2]. Ainda na graduação, desenvolvi alguns projetos sobre a Geometria Euclidiana e o GeoGebra.

Após ter ingressado no Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática – PCM – na Universidade Estadual de Maringá, em 2008, tomei conhecimento das Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE e da inclusão de cinco Geometrias não Euclidianas no currículo da Educação Básica do estado do Paraná. Depois de conhecer as DCE e estudar as Geometrias não Euclidianas que ela recomenda, propus, no trabalho da Dissertação, investigar o uso do GeoGebra no ensino da Geometria Euclidiana e da Geometria Hiperbólica, bem como as dificuldades e os obstáculos suscitados pelo estudo desta última.

Nos meses de setembro, outubro e novembro de 2008, ministramos – o professor Valdeni e eu – um minicurso para professores sobre o GeoGebra, a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica. Esse minicurso teve duração de 24 horas e fez parte da investigação do Mestrado (LOVIS, 2009).

Também no decorrer do ano de 2008, participei, na condição de ouvinte, de dois minicursos sobre Geometrias não Euclidianas, oferecidos para professores de Matemática atuantes nas escolas públicas do Núcleo Regional de Maringá, por meu orientador, professor Valdeni. Os dois cursos tiveram duração de 24 horas e neles foram exploradas as

---

[1] Geometrias neste trabalho será entendida como Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica, Geometria da Superfície da Esfera, Geometria Projetiva, Geometria Fractal e Topologia.
[2] Software GeoGebra pode ser obtido em www.geogebra.org.

Geometrias não Euclidianas que as DCE recomendam: Geometria Projetiva, Topologia, Geometria Fractal, Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica[3].

As DCE é o documento oficial do estado do Paraná, responsável por nortear e recomendar os conteúdos e metodologias que podem ser empregados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As DCE passaram por reformulações, que foram debatidas em processo de discussão coletiva, no período de 2004 a 2008.

O Documento está dividido em duas partes: na primeira, são exibidas algumas considerações sobre a Educação Básica e a opção pelo currículo disciplinar. Os sujeitos da Educação Básica, os fundamentos teóricos, as dimensões do conhecimento e a avaliação também são discutidos nesse primeiro momento. A segunda parte trata de questões referentes à disciplina de Matemática, tais como: dimensão histórica da disciplina, fundamentos teóricos-metodológicos, os conteúdos estruturantes, os encaminhamentos metodológicos e a avaliação. Por fim, o documento traz um quadro no qual são expostos os conteúdos estruturantes, o conteúdo básico e a avaliação para cada série/ano, tanto do Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio.

Os conteúdos estruturantes estão divididos em cinco: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. O conteúdo Geometrias se desdobra nos seguintes: Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e noções básicas de Geometrias não-euclidianas[4].

As DCE indicam que, no Ensino Fundamental, o conteúdo Geometrias tem o espaço como referência, "[...] de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo" (PARANÁ, 2008, p. 56). Nesse nível de ensino, o aluno deve compreender:

> Os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área,

[3] Nas DCE a Geometria da Superfície da Esfera é chamada de Geometria Elíptica. Porém, ao descrever essa Geometria, percebemos que as diretrizes se referem, na verdade, à Geometria da Superfície da Esfera, construída por Riemann. A Geometria Elíptica foi desenvolvida por Félix Klein, sendo que um de seus modelos é obtido por meio da identificação dos pontos antípodas da Superfície da Esfera, gerando o que se denomina de Plano Projetivo. Nesta Geometria, o primeiro postulado de Euclides é verificado, e como foi visto, isso não ocorre na Geometria da Superfície da Esfera.

[4] Na DCE a palavra não-Euclidianas é escrita com hífen.

> diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;
>
> Geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões;
>
> Geometria analítica: noções de Geometria analítica utilizando o sistema cartesiano;
>
> Noções de Geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (ponto de fuga e linhas do horizonte); Geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noções de geometria dos fractais (PARANÁ, 2008, p. 56).

Esses conteúdos devem ser distribuídos no decorrer dos quatro anos finais do Ensino Fundamental. De acordo com o documento, o aluno do Ensino Fundamental precisa conhecer conceitos de Geometria Plana, Espacial, Analítica e noções de Geometrias não Euclidianas.

No Ensino Médio, as Diretrizes apontam que o aluno deve aprofundar os conceitos de Geometria Plana e Espacial “[...] em um nível de abstração mais complexo [...] é imprescindível o estudo das distâncias entre pontos, retas e circunferências; equações da reta, do plano e da circunferência; cálculos de áreas de figuras geométricas no plano e estudo de posições” (PARANÁ, 2008, p. 56). Além disso,

> [...] é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da Geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera (PARANÁ, 2008. p. 56).

No Ensino Médio, também é preciso aprofundar os estudos das noções de Geometrias não Euclidianas, ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Projetiva, Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica. Com relação a essas Geometrias, as Diretrizes recomendam:

> Na geometria dos fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski. Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto a medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: pólos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008. p. 27-8).

A própria Diretriz salienta que o professor não deve se deter somente na abordagem dos conteúdos elencados anteriormente, “[...] o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens” (PARANÁ, 2008, p. 57) desde que envolvam conceitos básicos dessas Geometrias. Por fim, o documento expõe que “[...] os conceitos destes conteúdos são fundamentais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico” (PARANÁ, 2008, p. 57).

Diante da proposta da DCE e das experiências vividas – minicursos, disciplinas, conversas com professores da Educação Básica, da investigação realizada no Mestrado – passou-se a refletir sobre o que os professores entendem por Geometrias. Destaca-se que frequentemente observávamos contradições, incertezas, opiniões e preferências dos professores sobre as Geometrias. Com a inclusão das Geometrias não Euclidianas, questionávamos acerca do conhecimento dos professores sobre estas Geometrias e também da própria Geometria Euclidiana.

Portanto, o problema de investigação, para o desenvolvimento trabalho, surgiu como o produto de um período de interrogações, da procura de fundamentos teóricos e de reflexões sobre o tema concepções e as questões que envolvem as Geometrias. A escolha do termo “concepção” se deu por acreditarmos que as concepções desempenham um papel importante na vida e na tomada de decisões dos professores.

Desse modo, esta investigação é um estudo a respeito das concepções de vinte e sete professores de Matemática, referentes a também vinte e sete Núcleos Regionais de

Educação – NRE[5] – do Estado do Paraná, sobre as Geometrias. Destacamos que, durante a pesquisa, procuramos evidenciar os traços mais relevantes, bem como as semelhanças, contrastes e diferenças nas concepções.

Diante da definição do tema, delimitou-se a questão de pesquisa e objetivo. Tanto a questão de pesquisa quanto o objetivo auxiliaram na construção desta tese. Diante disso, a questão da pesquisa é:

- Quais as concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas?

E o seu objetivo:

- Identificar, descrever e analisar as concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas.

Após um longo período de leituras e investigações sobre o tema, percebeu-se que há muito que se fazer e pesquisar sobre as concepções dos professores a respeito das Geometrias, uma vez que não foram encontrados trabalhos semelhantes, principalmente no que se refere ao contexto das Geometrias não Euclidianas. Sendo assim, não existe a ambição de esgotar o tema proposto nesta investigação, mas estabelecer pontos básicos e assinalar sua relevância.

Salientamos ainda que identificar, descrever e analisar as concepções dos professores é fundamental quando se almeja transformar a prática docente, tendo em vista que a identificação do "pensamento do professor" pode contribuir para a deliberação de ações, nos cursos de formação de professores, bem como para a tomada de consciência da necessidade de mudanças, se desejável, pelo professor.

Este trabalho apresenta a seguinte organização:

---

[5] O estado do Paraná tem 399 municípios e estes são divididos por Núcleos Regionais de Educação – NRE; ao todo temos 32 Núcleos no Estado.

Na seção 1, apresentamos o referencial teórico da pesquisa: trabalhos, principalmente, em Educação Matemática, que abordaram o termo “concepções”. Também, nesta seção, mostramos o modo como será empregado o termo neste trabalho.

Na seção 2, descrevemos como foram selecionados os sujeitos da pesquisa bem como os instrumentos que foram utilizados, a saber: um questionário, uma entrevista semiestruturada e trinta e seis cartões que versam sobre Geometrias.

Na seção 3, apresentamos, sucintamente, cada uma das Geometrias de modo a destacar alguns aspectos históricos, resultados e conceitos. Também são descritos os objetivos de cada um dos cartões.

Na seção 4, expomos como foi feita análise dos dados e a construção das categorias. Nas seções seguintes, encontramos a análise das categorias.

A seção 5 trata da categoria 1 – os sujeitos da pesquisa e a sua relação com as Geometrias – apresentamos, portanto, os sujeitos da pesquisa, a formação acadêmica, bem como a formação em Geometrias, e as concepções dos professores sobre a construção do conhecimento geométrico.

Na seção 6, analisamos a categoria 2 – concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana.

Na seção 7, consta a análise da categoria 3 – concepções dos professores sobre as Geometria não Euclidianas.

A seção 8 apresenta as análises em relação à categoria 4 – concepções sobre a importância da Geometria.

Na última seção, estão as considerações finais do trabalho e temas para futuras pesquisas.

1 Estudos sobre o conceito de concepções na Educação Matemática

Esta seção trata do referencial teórico da pesquisa. Nele destacam-se alguns trabalhos em Educação Matemática que discutem o conceito de concepção, bem como algumas investigações que auxiliaram na compreensão e construção do termo “concepção” para este trabalho de tese.

1.1 Concepções: aspectos teóricos

O interesse pelo estudo das concepções e crenças dos professores de Matemática sobre essa disciplina e a influência que ela exerce na prática teve, segundo Cury (1994, p. 25), sua “[...] origem no início do século XX, a partir das preocupações dos psicólogos sociais que procuravam entender a influência das crenças sobre o comportamento das pessoas”. A partir da década de 1980, o interesse pelo estudo das concepções e crenças intensificou-se entre os estudiosos de diversas áreas: psicólogos, cientistas políticos, antropólogos e educadores. Com o desenvolvimento da Educação Matemática, a preocupação com o ensino e aprendizagem dessa disciplina, bem como o estudo das concepções, passou a ter destaque nos trabalhos dos Educadores Matemáticos, principalmente, nos Estados Unidos e em Portugal.

Embora utilizado por muitos pesquisadores, o termo concepção é polissêmico, e, nesse sentido, difícil de definir porque não apresenta um único significado. Ferreira[6] (1998, p. 20) destaca que “[...] atitudes, representações, valores, concepções e crenças apresentam características muito próximas, e, por vezes, mostram-se entrelaçados. Agrava a situação o fato de que muitas e diferentes entre si são as definições para cada um destes termos”.

[6] Ferreira (1998) em sua dissertação de Mestrado apresenta uma vasta revisão da literatura sobre o termo crença. A autora destaca trabalhos relacionados às crenças sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, que envolvem professores e alunos.

Vejamos alguns autores que discutem e apresentam uma definição para o termo "concepções".

Um dos primeiros trabalhos cujo foco foi o estudo das concepções foi o da pesquisadora norte-americana Alba Thompson[7] (1997). Thompson (1997) investigou as concepções de Matemática e de ensino de Matemática de três professoras da "*junior high school*" (equivalente a 4ª série ou 5º ano do Ensino Fundamental) e analisou a relação entre as concepções das professoras e suas práticas pedagógicas. A pesquisadora observou que as professoras desenvolvem padrões de comportamentos que caracterizam a sua prática pedagógica e, por isso, "[...] podem ser manifestações de noções, crenças e preferências, conscientemente sustentadas" ou "[...] podem ser crenças ou intuições, inconscientemente sustentadas, que podem ter evoluído fora da experiência do professor" (THOMPSON, 1997. p.12).

Anos mais tarde, Thompson (1992) refinou seus estudos realçando algumas discussões sobre os termos crenças, concepções e conhecimentos. Para a autora, as crenças são frequentemente mantidas e justificadas sem critérios que requerem provas e constituem apenas uma forma primitiva de saber. Para Thompson (1992),

> O termo crença é utilizado em oposição ao termo conhecimento, embora a distinção entre os dois conceitos não seja preciso. Crença de forma geral envolve diferentes graus de convicção, não são e nem requerem consenso, podem ser disputadas, independentes de veracidade ou validade (THOMPSON, 1992, p. 129).

Quanto ao termo concepções, Thompson (1992) apresenta a seguinte definição:

> As concepções dos professores sobre a natureza da Matemática pode ser visto como crenças conscientes e inconscientes, conceitos, significado, regras, imagens mentais e preferências relacionadas com a disciplina de Matemática. Essas crenças, conceitos, opiniões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia da Matemática, embora para muitos

[7] O artigo de Alba Thompson foi originalmente publicado, em 1984, na revista Educational Studies in Mathematics com o título "The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice". Sua tradução para o português e sua publicação na revista Zetetiké aconteceu em 1997. Na sequência do trabalho, utilizamos como referência o artigo traduzido e publicado em 1997.

> professores eles podem não serem desenvolvidas e relacionadas com uma filosofia coerente (THOMPSON, 1992, p. 132).

Assim, a definição de concepção apresentada por Thompson inclui as crenças, opiniões, conceitos, significados, regras, imagens mentais e as preferências dos professores. Tem-se, então, uma definição mais complexa de concepções, pois abarca um quadro de outras noções que constituem uma rede de representações dos docentes. Em outras palavras, compõem as crenças, as imagens mentais, as opiniões, as preferências, algumas de dimensões mais elaboradas, outras de dimensões mais superficiais.

Segundo Thompson (1992), para a elaboração consistente do conhecimento, o sujeito parte das suas crenças (suas verdades pessoais provenientes da experiência), depois forma sua concepção (crenças mais conscientes e elaboradas) até chegar ao conhecimento, que deve ser baseado em fatos objetivos, deve ser julgado e validado por meio de provas e teorias. A autora destaca que a crença de um indivíduo é formada por vários graus de convencimento, e estes, por sua vez, não carecem ser, necessariamente, consensuais.

Para o pesquisador português João Pedro Ponte (1992), não é possível falar sobre o termo "concepções" sem analisar o que são crenças e conhecimento. O autor expõe que em todo conhecimento intervêm necessariamente crenças. As diferenças entre os diversos tipos de conhecimento "[...] traduzem-se apenas pela diferente articulação entre as crenças de base e os outros tipos de pensamento (baseados no raciocínio e na experiência)" (PONTE, 1992, p. 8).

Ademais, Ponte (1992) destaca que não há necessidade de distinguir as crenças e o conhecimento. Para o autor, "[...] podemos ver as crenças como uma parte do conhecimento relativamente 'pouco elaborada' [...] nas crenças predominaria a elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica" (PONTE, 1992, p. 8). As crenças são indispensáveis, pois sem elas o ser humano ficaria "[...] virtualmente paralisado, sem ser capaz de determinar cursos de acção" (PONTE, 1992, p. 8). No entanto, no conhecimento predomina a argumentação racional e a busca pela verdade; já as concepções são vistas como "[...] o pano de fundo organizador dos conceitos" (PONTE, 1992, p. 8). Tanto as crenças quanto as concepções estão associadas às ações que os professores tomam em sua prática docente. Entretanto, as concepções são vistas como "[...] quadros conceptuais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas" (PONTE, 1992, p.8). O autor destaca ainda que as concepções estão estreitamente ligadas às atitudes, expectativas e ao entendimento que possuímos sobre determinada situação.

As definições de Ponte (1992) e Thompson (1992; 1997) partem do princípio de que crenças e concepções desempenham um papel importante na vida do sujeito. Para Thompson, não importa se as crenças são pouco elaboradas ou não, elas são, de fato, parte das concepções dos docentes, que auxiliam a tear os conhecimentos como uma mescla de visões de mundo entre o racional e o subjetivo. Para Ponte (1992), a crença desempenha um papel importante quando é impossível a verificação do conhecimento, ou seja, quando é impossível formular raciocínios lógicos, definir conceitos e organizá-los de forma coerente. Elas também são verdades pessoais que apresentam valor afetivo e componente avaliativo e, portanto, as concepções têm o papel de organizar o conhecimento e as crenças.

Ponte (1992) expõe que o interesse pelo estudo das concepções dos professores, bem como de outros profissionais, baseia-se na hipótese de que o indivíduo possui uma base conceitual que determina o seu pensamento e as suas ações. Esta base conceitual "[...] é de uma natureza diferente dos conceitos específicos – não diz respeito a objetos ou acções bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar" (PONTE, 1992, p.1). Para o autor, as concepções atuam como uma espécie de filtro, ou seja, ajudam a estruturar o sentido que damos às coisas, mas também podem agir como um elemento bloqueador em relação a novas realidades ou problemas, limitando nossas possibilidades de ação e compreensão.

O autor destaca ainda que a Matemática é um conteúdo sobre o qual é difícil não apresentar concepções. É uma ciência antiga, que está presente no rol de disciplinas escolares há séculos e tem tido um importante papel de seleção social. O autor expõe algumas concepções, aquelas mais frequentes, sobre a natureza do conhecimento matemático, a saber: o cálculo é a parte mais importante da Matemática, a Matemática é constituída essencialmente por demonstrações, a Matemática seria o domínio do rigor, da perfeição, pois está completamente desligada da realidade e nada de novo pode ser feito pelos matemáticos, a não ser por gênios (PONTE, 1992, p. 15-6). O autor explica também que todas essas concepções têm uma explicação histórica:

> Formaram-se no período em que predominava o ensino fortemente elitista. O domínio da Matemática importava apenas a um número reduzido de pessoas e esta ciência podia funcionar como um filtro selectivo. A visão da Matemática reduzida ao cálculo exprime um domínio da perspectiva do saber como procedimento e será particularmente importante nos níveis de ensino mais elementares. A visão da estrutura axiomática e do rigor das demonstrações traduz o domínio do saber argumentativo e terá particular expressão nos níveis de ensino mais avançados. A Matemática encarada desligada da realidade está estreitamente ligada a uma perspectiva sobre os seus objectivos educativos (Porquê ensinar Matemática?). Por último, a noção de que a Matemática é só para os gênios está também ligada a uma concepção pedagógica sobre o papel do aluno na aprendizagem. Estas duas últimas concepções estarão ligadas a uma visão mistificadora desta ciência, difundida muitas vezes pelos próprios matemáticos (PONTE, 1992, p. 16).

Além do contexto histórico, Ponte (1992) relata que a criação e a propagação das concepções também possuem origem profissional (formação inicial e continuada, tanto no que se refere a parte científica quanto pedagógica) e nos aspectos sociais (expectativas dos alunos, pais e professores, administração escolar, currículo, entre outros). O estudo das concepções deve considerar a natureza do conhecimento, uma vez que são estas que ajudam a entender e compreender o mundo a nossa volta.

Outro pesquisador português que também discorreu sobre o termo "concepções" foi Henrique Guimarães (1988; 2003). Para ele, o estudo das concepções dos professores insere-se em uma área reconhecida "[...] como o estudo do pensamento ou do conhecimento do professor" (GUIMARÃES, 2003, p. 4); e esclarece que conhecer as concepções do professor é ter acesso à sua "'[...] vida mental' [...] conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento, bem como as relações desses aspectos com a atuação ou comportamento".

Para o termo "concepção", em sua pesquisa de Mestrado, Guimarães (1988) apresenta a seguinte definição:

> [...] podemos definir compreensivamente concepção ou sistema conceptual do professor, como um esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito, mais ou menos consistente, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe, e influencia a sua acção, em relação a isso (GUIMARÃES, 1988, p. 20).

Anos mais tarde (2003), na sua pesquisa de doutorado, o autor descreve que as concepções são um instrumento do pensar e, expõe que à luz da noção de concepção, pode-se associar um sentido de construção ou criação de algo,

> [...] num acto onde concorrem elementos interiores (da pessoa) e elementos exteriores (da coisa). Este acto de conceber cujo culminar pode ser visto como uma espécie de 'dar a luz', é no entanto sempre interior, significando este 'dar a luz' que a concepção ficou disponível para os 'olhos' (do pensamento) da pessoa (GUIMARÃES, 2003, p. 47-8).

Entende-se que Guimarães (2003) define concepções como esquemas mentais que, uma vez formados, desempenham um papel fundamental na compreensão e na atribuição de significados que damos às coisas que nos cercam.

As definições apresentadas por Thompson (1992) e Ponte (1992) diferem do apresentado por Guimarães (1988; 2003), sobretudo porque, para este autor, não importa se as concepções são as crenças, as opiniões ou as preferências do professor. Para Guimarães (1988; 2003), as concepções são processos mentais que o docente elabora para atuar e compreender o mundo. Para Thompson (1992), a relação entre as concepções, as decisões e as ações do professor não é simples, mas complexa. No entanto, a autora destaca que o estudo das concepções (conscientes ou inconscientes) sobre a Matemática e seu ensino desempenham um papel significativo na determinação do estilo de ensino de cada professor.

Na nossa relação com a realidade, Guimarães (2003) destaca que nossas concepções podem desempenhar um papel que é, simultaneamente, condição e limite do conhecimento dessa realidade:

> [...] por um lado, permitem-nos interpretar, dar sentido às situações com que nos confrontamos [...] por outro lado, o acesso que temos à realidade não é um acesso directo; é através dos nossos sistemas conceptuais que a realidade nos chega e, exactamente por isso, chega-nos 'filtrada' pelas nossas concepções que assim limitam o nosso conhecimento, introduzindo uma distorção que impregna a percepção e a compreensão que temos do que se nos apresenta ao nosso espírito (GUIMARÃES, 2003, p. 6).

Segundo Guimarães (2003), as concepções são estabelecidas com diferentes graus de convicção, o que faz com que existam concepções mais facilmente modificáveis do que outras; e que quanto mais cedo se constituem, mais estáveis se tornam e mais difícil é a sua modificação, mas “[...] tem sido igualmente reconhecido que esses sistemas não são estáticos e que, com a experiência, podem sofrer modificações mais ou menos profundas” (GUIMARÃES, 2003, p. 65).

Dos trabalhos de pesquisadores brasileiros que buscaram compreender o termo concepção, destaca-se o da pesquisadora Helena Cury (1994) que, após fazer uma revisão da literatura sobre os termos crenças e concepções, optou pelo termo concepções por acreditar que ele “engloba toda a **filosofia particular** de um professor” (CURY, 1994, p. 37, grifo autor). Para expor as concepções dos professores, Cury (1994) utilizou, baseada em Ernest (1991), duas correntes filosóficas: a absolutista e a falibilista.

A pesquisadora destaca a importância das influências do professores formadores e dos colegas na formação do sistema de crenças dos professores a respeito da Matemática. Para a autora, “as idéias veiculadas pela cultura matemática, a partir das principais correntes filosóficas da Matemática, disseminam-se entre os matemáticos, entre os autores de livros-textos, entre os pesquisadores em Educação Matemática, entre os responsáveis pelos currículos dos cursos de Licenciatura” (CURY, 1994, p. 33). Diante do exposto, salienta-se que os professores têm suas crenças e concepções reforçadas pelo consenso da comunidade e pela autoridade dos docentes formadores.

Na citação a seguir, encontra-se a conceituação para o termo concepção, dada por Cury (1994),

> Acreditamos que os professores de Matemática formam idéias sobre a natureza da Matemática, ou seja, *concebem* a Matemática, a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim, das influências sócio-culturais que sofreram durante suas vidas, influências essas que se vêm formando ao longo dos séculos, passando de geração a geração, a partir das idéias de filósofos que refletiram sobre a Matemática (CURY, 1994, p. 37, grifo autor).

A autora acrescenta que a essas ideias “[...] somam-se as opiniões que os professores formam sobre a Matemática como disciplina, sobre seu ensino e aprendizagem, sobre seu papel como professores de Matemática, sobre o aluno como aprendiz, ideias essas nem sempre bem justificadas” (CURY, 1994, p. 37-8). Por fim, expõe que todos esses pressupostos formam uma filosofia da Matemática, particular e própria de cada professor. Nesse caminho, a pesquisadora parece ter optado pelo termo que denota ao conceito de concepções como algo mais amplo.

Para aprofundar a noção de concepção, recorremos ao livro *Como pensamos* de John Dewey (1953). Nessa obra, Dewey associa a ideia de concepção à de significação, e esclarece que é a procura de significado que norteia o pensamento. O autor expõe que “[...] uma concepção é uma significação definida [...] é toda a significação de uma palavra dada, suficientemente individualizada para ser imediatamente apreendida e facilmente utilizada e fixada” (DEWEY, 1953, p. 134).

Para Dewey (1953, p. 124), a principal característica do ato de pensar “[...] consiste na circunstância de uma coisa significar, indicar outra coisa, referir-se à mesma, fazer o espírito voltar-se para ela”. Ele expõe que saber exatamente o que significam as coisas é o objetivo de toda descoberta, e conhecer os fatos que demonstram, provam ou apóiam dada significação, é a finalidade de toda a experiência.

Para melhor compreensão do ato de pensar e da elaboração do processo de significação, Dewey (1953) aponta três características que são importantes entender como as concepções são construídas: identificar, completar e integrar. Como instrumento de identificação, as concepções permitem distinguir objetos e reconhecê-lo como parte de uma determinada classe. Depois da identificação, têm-se as concepções como instrumentos de complementação. Nesta fase todo patrimônio conceitual pode ser aplicado sobre o objeto e todas as qualidades conhecidas podem ser transferidas para ele. Como instrumento de integração, as concepções permitem inserir o objeto identificado em um sistema de relações e de interações com outros objetos (DEWEY, 1953, p. 134-5).

Segundo Dewey (1953), constituída uma concepção, ela pode ser corrigida, aperfeiçoada ou ampliada. Para o autor, o poder intelectual depende da posse de um acervo de significações e concepções apropriadas que se possa utilizar sempre que necessário.

Os quatro estudiosos de Educação Matemática apresentados aqui (Thompson, Ponte, Guimarães e Cury) não divergem quanto à posição de Dewey e às suas três características – identificar, completar e integrar – que compõem a sua ideia de concepções.

Com o intuito de auxiliar o entendimento e a construção do termo “concepções”, empregado neste trabalho, recorreram-se também ao Novo Dicionário de Língua Portuguesa. Ferreira (1986, p. 445) expõe que concepção é “o ato de conceber ou criar mentalmente, de formar ideias, especialmente abstrações; noção, ideia, conceito, compreensão; modo de ver, ponto de vista; opinião, conceito”. A definição apresentada pelo Novo Dicionário de Língua Portuguesa engloba a maioria dos termos usados pelos pesquisadores descritos anteriormente. No entanto, entende-se que é preciso especificar como o termo “concepções” foi utilizado.

Em linguagem popular, quando perguntamos a alguém qual é a sua concepção sobre isto ou aquilo, o que, de um modo geral, queremos saber é o que a pessoa pensa, o que ela entende sobre o “assunto”. No fundo, o que queremos com a pergunta é saber o que esse “assunto” é para a pessoa, ou seja, o modo como ela a concebeu, qual “elaboração mental” que realizou para formular sua resposta.

Diante do exposto, o termo “concepções” é aqui entendido como os conhecimentos, as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam. Portanto, investigar as concepções dos professores implicará averiguar os conhecimentos[8], as opiniões, as preferências e as ideias que eles apresentam a respeito das Geometrias.

Assim como Guimarães (1988) acredita-se que as concepções podem ser “mais ou menos conscientes” e “mais ou menos consistentes”. Concordamos com Ponte (1992) quando este descreve que as concepções constituem-se por processos individuais (como resultado das nossas elaborações mentais, experiências, estudos, etc.), de interação social (a escolarização, as opções ideológicas, o ambiente escolar, etc.) e de origem profissional (a formação escolar, inicial, científica, pedagógica e continuada).

Do mesmo modo que Cury (1994) salientamos que aos conhecimentos, às preferências e às ideias dos professores somam-se às opiniões dos professores sobre a

[8] Entende-se por conhecimentos os conhecimentos científicos relacionados com cada Geometria.

Matemática como disciplina, sobre seu ensino e aprendizagem, sobre seu papel como professores de Matemática e sobre o aluno como aprendiz.

1.2 Concepções: conhecimentos, opiniões e ideias sobre a Geometria Euclidiana

O objetivo desta seção é descrever, sucintamente, alguns estudos realizados na mesma área de investigação, mas que envolvam conteúdos de Geometrias. Os quatro trabalhos apresentados versam sobre a Geometria Euclidiana uma vez que não se encontraram trabalhos referentes às concepções dos professores sobre as Geometrias não Euclidianas. No entanto, fato é que cada uma deles seguiu uma linha de investigação.

Manrique (2003) investigou processos de mudanças; Crescenti (2005), as visões que os professores apresentam a respeito da Geometria; Barrantes e Blanco, (2006) as concepções sobre o ensino e a aprendizagem; e Oliveira e Guimarães (2008), as concepções que respaldam a prática, o domínio conceitual e a importância da Geometria.

A investigação realizada por Crescenti (2005) teve como objetivo identificar e analisar as visões que os professores apresentam a respeito da Geometria Euclidiana, o seu ensino e como eles descrevem e analisam sua própria atuação com os conteúdos geométricos. A autora buscou, junto à literatura, subsídios que contribuíssem com a pesquisa e optou pelos saberes docentes e as práticas pedagógicas dos professores de Matemática, como referencial teórico. Além disso, entrevistou nove professores que dizem ensinar Geometria Euclidiana, dois quais cinco estavam nos cinco primeiros anos de carreira, e os outros quatro estavam na fase final da carreira.

A autora destaca que ocorreram algumas diferenças com relação aos dois grupos no que se refere à Geometria Euclidiana, ao seu ensino e às práticas pedagógicas desenvolvidas. Os professores iniciantes "[...] tinham uma visão bastante vaga sobre o que é geometria, demonstrando insegurança ao responderem a questão" (CRESCENTI, 2005, p. 215). Sobre a importância da Geometria Euclidiana, os professores iniciantes deram destaque à sua aplicabilidade na vida cotidiana, porém de forma muito limitada. Alguns dos professores experientes “[...] concebiam a geometria como o estudo das figuras, outros como tudo o que se pode visualizar e que nos envolve no dia-a-dia” (CRESCENTI, 2005, p. 215). Nesse ponto, as respostas dos professores experientes pouco diferiram dos iniciantes. Todos eles consideravam a Geometria Euclidiana importante para os alunos do Ensino Fundamental, e sua importância está relacionada com aplicações no cotidiano.

Crescenti (2005), por sua vez, observou que todos os professores ensinavam Geometria Euclidiana, apesar de considerarem a sua formação insuficiente. Os dois grupos de professores pesquisados comentaram que tinham facilidades em ensinar Geometria porque estudaram o conteúdo a ser ensinado e conheceram alternativas de ensino. A autora notou que os participantes da pesquisa estabeleciam com a Geometria Euclidiana uma relação de prazer e de receio, ou seja:

> O prazer parecia fazê-los ensinar Geometria e procurar estabelecer associações entre os assuntos geométricos e a vida cotidiana, utilizando atividades manipulativas. O receio parecia advir do pouco conhecimento que demonstravam possuir sobre os conteúdos de Geometria (CRESCENTI, 2005, p. 221).

Por fim, a autora destaca que os conteúdos geométricos parecem ser mais variados entre os professores experientes do que entre os iniciantes. Ambos os grupos desenvolviam, de certa forma, um ensino tradicional. Não obstante, os professores experientes tinham uma preocupação maior com a maneira de ensinar os conteúdos geométricos.

Na mesma linha de investigação, encontra-se o artigo de Barrantes e Blanco (2006) que realizaram uma pesquisa com futuros professores das séries iniciais, da Espanha, cujo objetivo foi descrever e analisar as concepções desses professores sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria. Os autores partem da hipótese de que as recordações e as expectativas dos estudantes fornecem informações para caracterizar as suas concepções no que se refere à Geometria. Por recordações e expectativas, os autores entendem que:

> [...] as recordações [...] encontram-se na memória a longo prazo, que é o lugar onde se armazena a informação permanente. [...] às vezes, as recordações são incorretas, pois a forma como aprendemos e processamos a informação e o contexto físico e emocional afectam a sua melhor ou pior recuperação posterior. [...] o termo expectativa está mais identificado com as ideias e as atitudes para com o ensino-aprendizagem da Geometria (BARRANTES e BLANCO, 2006, p. 68).

Os autores usam a descrição de Thompson (1992) para descrever o que entendem por concepções: incluem as crenças, conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências conscientes ou inconscientes. Para identificar as concepções dos professores em formação, os autores partiram de um sistema de 10 categorias relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Geometria. As categorias foram elaboradas considerando as propostas curriculares e trabalhos sobre didática da Geometria.

São elas: GE – Geometria escolar e o seu ensino; CO – Conteúdos escolares de Geometria; ME – Metodologia em Geometria escolar; MA – Materiais em Geometria escolar; RE – Recursos em Geometria escolar; AC – Atividades em Geometria escolar; AP – Aprendizagem em Geometria escolar; PA – Papel do aluno; PM – Papel do professor primário; EV – Avaliação em Geometria escolar.

Os autores destacam que as recordações sobre a Geometria, o seu ensino e aprendizagem são os fatores mais importantes que influenciaram as concepções, tanto no que se referem à Geometria escolar, aos conteúdos, à metodologia, aos materiais e aos recursos utilizados, quanto ao papel do aluno e do professor e da avaliação.

Quanto à Geometria escolar, o seu ensino e aprendizagem, os pesquisadores observaram que os participantes da pesquisa entendiam que a finalidade da Geometria é a sua utilidade na vida cotidiana ou em aplicações em outras áreas. Os sujeitos da pesquisa também comentaram que o conteúdo que eles conhecem melhor é a Geometria Plana e o que eles consideram mais importante refere-se à medidas. Os participantes ainda relataram que serão esses os conteúdos que eles irão ensinar, caso não houver, nos centros de formação, um ensino adequado que seja capaz de modificar suas concepções.

Barrantes e Blanco (2006) observaram que para os sujeitos da pesquisa, a Geometria Euclidiana se reduz ao conhecimento das figuras geométricas e à resolução dos problemas, principalmente, dos livros didáticos, cuja maior dificuldade era saber qual fórmula utilizar. Por fim, os autores destacam que as concepções, atitudes, disposições e sentimentos dos professores sobre as disciplinas que ensinam influenciam as escolhas dos conteúdos a serem ensinados e a forma como são ensinados, de modo que, com o passar do tempo, essas concepções podem estabilizar-se e tornarem-se resistentes às mudanças (BARRANTES e BLANCO, 2006, p. 71).

Também considerou-se a investigação realizada por Oliveira e Guimarães (2008). As pesquisadoras realizaram uma pesquisa com oito professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental de quatro escolas municipais de Recife, com o objetivo de investigar quais as concepções de Geometria que respaldam a prática desses professores, bem como seu domínio conceitual e a sua importância para a formação do aluno.

O critério para escolha dos professores foi que eles trabalhassem com a coleção de livro didático mais utilizada nas escolas da rede municipal. As autoras realizaram uma entrevista composta de três etapas: a primeira buscou caracterizar o perfil dos professores; a segunda, saber quais os conceitos de Geometria que os professores consideravam importantes; e a terceira, o domínio conceitual dos professores com base na análise de atividades propostas nos livros / textos utilizados por eles. As autoras recorreram também à literatura para descrever a importância do ensino de Geometria, da formação inicial e continuada e o estudo das concepções.

Oliveira e Guimarães (2008) destacam que os professores acreditam que o trabalho com Geometria deve estar relacionado ao estudo das figuras geométricas regulares planas, nomenclaturas e sua comparação com objetos do espaço físico. As dificuldades dos professores em ensinar Geometria estão relacionadas à falta de recursos para planejar as aulas e à falta de formação específica. Com relação às dificuldades dos alunos, os professores relataram fatores como a condição econômica e a capacidade cognitiva. Atividades que exploram noções de localização e modos de representação do espaço são pouco reconhecidas pelos professores, como parte do conhecimento geométrico.

As autoras também observaram que uma das maiores dificuldades dos professores é o desconhecimento de que o ensino de Geometria não se restringe aos aspectos contemplativos e empíricos. Destacam que,

> [...] não basta apenas oportunizar aos alunos momentos nos quais eles observem, sintam, comparem, vejam, mas, tão significativo quanto essas ações é o desenvolvimento de capacidades como deduzir, abstrair, prever, projetar e argumentar. A Geometria é construída de todos esses aspectos, ou seja, o intuitivo, o concreto e a união destes transpostos à realidade cotidiana (OLIVEIRA e GUIMARÃES, 2008, p. 10).

Por fim, salientam a necessidade de uma formação continuada que possibilite aos docentes rever a forma como concebem o ensino de Geometria no espaço escolar.

Nos três trabalhos apresentados até agora, percebe-se que os professores apresentam dificuldades ao falar a respeito da Geometria Euclidiana, no que se refere aos conteúdos, às metodologias, à importância, entre outros aspectos. Observa-se que existe uma tendência dos professores em relacionar a Geometria Euclidiana ao estudo da Geometria Plana, com a sua aplicabilidade em situações cotidianas e com a comparação com objetos do espaço físico.

Por fim, encontramos uma investigação que abordou os processos de mudanças no que diz respeito à Geometria. O trabalho de Manrique (2003) teve como objetivo compreender como se desenvolvem mudanças nas concepções e práticas pedagógicas de professores de Matemática, participantes de um processo de formação em Geometria. O processo de formação ocorreu durante o desenvolvimento do projeto de pesquisa “Estudo de fenômenos de ensino a aprendizagem de noções geométricas” realizado pela PUC-SP.

Como referencial teórico a pesquisadora recorreu à literatura e pesquisas acadêmicas que tratam sobre processos de mudanças. A autora expõe que cursos de formação podem propiciar o desencadeamento de mudanças nas atitudes, concepções e práticas dos professores. Três são os componentes que estão relacionados a processos de mudanças: externo, interno e relacional. O componente externo está relacionado com a formação continuada, na qual o professor aprende ou revê os conteúdos e desenvolve habilidades para a sua prática. O componente interno explicita a identificação de concepções e crenças de um professor. O componente relacional estuda as possíveis relações que o professor possa desenvolver consigo, com o outro e com o mundo (MANRIQUE, 2003). Para a autora, o componente interno é fundamental por desempenhar um papel estruturante no pensamento e influenciar a prática pedagógica

Para obter em profundidade como se desenvolvem mudanças não só nas concepções, mas também nas práticas pedagógicas, a autora recorreu a instrumentos que pudessem fornecer essas informações, tais como um questionário, observações dos encontros de formação e de algumas aulas ministradas pelos docentes, entrevistas, análise de relatórios, diários e mapas conceituais.

A pesquisadora afirma ainda que, de modo geral, os professores apresentaram mudanças em suas concepções e ocorrem sinais de alterações em sua prática pedagógica. No entanto, a mudança mais percebida foi com relação aos sentimentos e às emoções vinculados à Geometria. Esse fato foi observado durante o manuseio de instrumentos, tais como o compasso, as réguas, a tesoura, e com o trabalho com material manipulável. Manrique (2003) destaca que "[...] os professores tomaram consciência de que haviam superado alguns medos presentes no início do processo e perceberam que emoções e sentimentos são inerentes a situações de formação, devendo ser considerados no processo de ensino e aprendizagem" (MANRIQUE, 2003, p. 155).

Manrique (2003) também enfatiza que parece ter ocorrido uma mudança significativa no modo como o professor observa o ensino de Geometria. Segunda a autora,

> Inicialmente, os professores diziam utilizá-la para manipular o real, para impressionar os alunos e dinamizar as aulas, ou seja, era algo de que faziam uso, como se faz, por exemplo, com uma fita de vídeo. No final, relacionavam a Geometria com movimentos de observar, pesquisar e construir, evidenciando que ela passou a ser vista como algo dinâmico (MANRIQUE, 2003, p. 155).

O estudo realizado por Manrique (2003) mostra que é possível ocorrer mudanças nas concepções dos professores. Contudo, a própria autora comenta que é necessária uma reflexão a respeito do contexto escolar e das práticas pedagógicas de cada professor, um processo de formação que valorize os saberes docentes e que envolva discussões, reflexões e as relações entre os conteúdos matemáticos com as experiências pedagógicas.

2 Procedimentos metodológicos

Como já descrevemos anteriormente, o objetivo desta investigação foi identificar, descrever e analisar as concepções de professores de Matemática sobre as Geometrias. As especificidades de cada professor, no que diz respeito às suas concepções e aos seus dizeres sobre as Geometrias, precisam ser identificadas para que, assim, se possa descrevê-las e analisá-las. Para isso, utilizou-se os seguintes instrumentos para coleta dos dados: um questionário, uma entrevista e trinta e seis cartões com informações sobre as Geometrias[9].

Antes de iniciar a pesquisa, foi preciso elaborar critérios para selecionar os sujeitos que fariam parte da investigação. Inicialmente, pensou-se em escolher professores de um ou mais NRE (os NRE da região norte do Estado, por exemplo) e entrevistar um ou mais professores desses Núcleos. No entanto, poderíamos escolher Núcleos nos quais os professores tiveram acesso a cursos sobre Geometrias, ou ao contrário, Núcleos nos quais os professores não tiveram acesso a cursos sobre Geometrias[10]. Naquele momento, analisou-se que esse fato poderia interferir, de forma negativa, no andamento e no resultado da pesquisa.

Diante disso, considerou-se pertinente entrevistar um professor de cada NRE do Estado. Com a decisão tomada, foi necessário encontrar uma maneira para selecionar os sujeitos da pesquisa. O caminho encontrado foi o envio de um questionário, impresso ou por e-mail; definiu-se, ao final, que seria mais prático e eficiente o envio por e-mail.

No final de novembro de 2011, entramos em contato com a equipe pedagógica de Matemática da Secretaria Estadual de Educação – SEED – para discutir a possibilidade do envio do questionário para o e-mail dos professores de Matemática do Estado. Após alguns procedimentos administrativos, a SEED autorizou o envio do questionário, e este foi enviado no dia 06 de fevereiro de 2012. Apesar de o objetivo ser entrevistar um professor de cada NRE, ponderou-se pertinente enviar o questionário para o maior número de

[9] Destacamos que o projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos – *COPEP*, da Universidade Estadual de Maringá.

[10] No ano de 2009 o NRE de Maringá e em 2011 o NRE de Cianorte promoveram cursos sobre Geometrias não Euclidianas para os seus professores em parceria com um professor da Universidade Estadual de Maringá.

professores de Matemática, uma vez que quanto mais questionários respondidos, maiores seriam as opções de professores selecionáveis para a entrevista. De acordo com as informações recebidas pela SEED, todos os professores deveriam ter um e-mail cadastrado na Secretaria de Educação, mas não há como ter certeza de que todos os professores de Matemática receberam ou acessaram o questionário.

Também no final de novembro de 2011 solicitou-se à SEED informações sobre a quantidade de professores de Matemática que atuavam em sala de aula. No quadro a seguir são apresentados os números de acordo com cada NRE.

	NRE	**QPM**	**PSS**	**TOTAL**
1.	Apucarana	226	69	295
2.	Área Metropolitana Norte	375	195	570
3.	Área Metropolitana Sul	385	207	592
4.	Assis Chateaubriand	74	47	121
5.	Campo Mourão	174	77	251
6.	Cascavel	284	158	442
7.	Cianorte	126	44	170
8.	Cornélio Procópio	212	79	291
9.	Curitiba	722	393	1 115
10.	Dois Vizinhos	63	37	100
11.	Foz do Iguaçu	224	107	331
12.	Francisco Beltrão	222	103	325
13.	Goioerê	91	45	136
14.	Guarapuava	163	67	230
15.	Ibaiti	77	36	113
16.	Irati	121	64	185
17.	Ivaiporã	150	84	234
18.	Jacarezinho	170	79	249
19.	Laranjeiras do Sul	103	114	217
20.	Loanda	85	37	122
21.	Londrina	435	211	646
22.	Maringá	417	160	577
23.	Paranaguá	165	83	248
24.	Paranavaí	158	87	245
25.	Pato Branco	187	100	287
26.	Pitanga	73	55	128

27.	Ponta Grossa	303	136	439
28.	Telêmaco Borba	83	79	162
29.	Toledo	234	109	343
30.	Umuarama	192	92	284
31.	União da Vitória	144	70	214
32.	Wenceslau Brás	81	57	138
TOTAL:		**6 519**	**3 281**	**9 800**

Quadro 1: Número de professores de Matemática atuantes em escolar públicas do estado do Paraná (novembro de 2011)

No dia 06 de fevereiro de 2012, recebemos o primeiro questionário respondido; o último questionário foi recebido no final de março. Na próxima tabela, exibe-se o número e a porcentagem de professores, de cada NRE, que respondeu ao questionário.

	NRE	**Quantidade**	**Porcentagem (%)**
1.	Apucarana	13	4,40
2.	Área Metropolitana Norte	12	2,10
3.	Área Metropolitana Sul	13	2,19
4.	Assis Chateaubriand	02	1,65
5.	Campo Mourão	03	1,19
6.	Cascavel	17	3,84
7.	Cianorte	05	2,94
8.	Cornélio Procópio	03	1,03
9.	Curitiba	26	2,33
10.	Dois Vizinhos	02	2,00
11.	Foz do Iguaçu	10	3,02
12.	Francisco Beltrão	09	2,76
13.	Goioerê	05	3,67
14.	Guarapuava	04	1,73
15.	Ibaiti	06	4,42
16.	Irati	02	1,08
17.	Ivaiporã	05	2,13
18.	Jacarezinho	06	2,40
19.	Laranjeiras do Sul	03	1,38
20.	Loanda	04	3,27

21.	Londrina	10	1,54
22.	Maringá	18	3,11
23.	Paranaguá	05	2,01
24.	Paranavaí	09	3,67
25.	Pato Branco	09	3,13
26.	Pitanga	01	0,78
27.	Ponta Grossa	06	1,36
28.	Telêmaco Borba	04	2,46
29.	Toledo	03	0,87
30.	Umuarama	10	3,52
31.	União da Vitória	04	1,86
32.	Wenceslau Brás	05	3,62
TOTAL:		**234**	**2,39**

Quadro 2: Número de professores que respondeu o questionário

Após a espera de dois meses, iniciou-se os contatos com os professores para convidá-los a participar da entrevista. Esse contato foi feito por e-mail. Como o objetivo era entrevistar um professor de cada NRE, elaborou-se critérios para selecionar os professores que responderiam o questionário. Os critérios para seleção dos professores foram:

- Para os Núcleos que obtivemos até três questionários respondidos enviamos um e-mail convite para o número de professores que responderam o questionário. Esse fato aconteceu nos Núcleos de Assis Chateaubriand (2 professores), Campo Mourão (3 professores), Cornélio Procópio (3 professores), Dois Vizinhos (2 professores), Irati (2 professores), Laranjeiras do Sul (3 professores), Pitanga (1 professor) e Toledo (3 professores). Nos Núcleos de Assis Chateaubriand, Campo Mourão e Laranjeiras do Sul, somente um dos professores respondeu o e-mail convite aceitando participar da entrevista, e, portanto, foram eles os entrevistados. Nos Núcleos de Cornélio Procópio e Dois Vizinhos, dois professores responderam o e-mail aceitando participar da entrevista. O critério para a escolha do professor foi a disponibilidade de datas da pesquisadora e do professor. O professor do

Núcleo de Pitanga aceitou participar da entrevista e os professores dos Núcleos de Irati e Toledo não aceitaram participar da entrevista.

- Para os Núcleos que obtivemos de quatro a dez questionários respondidos, escolhemos três professores para enviar o e-mail convite. O critério utilizado para escolher os professores foi selecionar os professores que deram resposta à questão sobre o que eles entendem por Geometria Euclidiana e por Geometrias não Euclidianas. Esse fato aconteceu nos Núcleos Cianorte (5 professores), Foz do Iguaçu (10 professores), Francisco Beltrão (9 professores), Goioerê (5 professores), Guarapuava (4 professores), Ibaiti (6 professores), Ivaiporã (5 professores), Jacarezinho (6 professores), Loanda (4 professores), Londrina (10 professores), Paranaguá (5 professores), Paranavaí (9 professores), Pato Branco (9 professores), Ponta Grossa (6 professores), Telêmaco Borba (4 professores), Umuarama (10 professores), União da Vitória (4 professores) e Wenceslau Brás (5 professores). Nos Núcleos de Goioerê, Ibaiti, Jacarezinho, Loanda, Londrina, Paranavaí, Pato Branco, Ponta Grossa, Paranaguá, Umuarama, União da Vitória e Wenceslau Brás somente um dos professores respondeu o e-mail convite aceitando participar da entrevista e eles foram os professores entrevistados. Nos Núcleos de Cianorte, Foz do Iguaçu e Francisco Beltrão, dois professores responderam o e-mail aceitando participar da entrevista; o critério para a escolha do professor foi a disponibilidade de datas da pesquisadora e do professor. Nenhum dos professores dos Núcleos de Guarapuava, Ivaiporã e Telêmaco Borba aceitaram participar da entrevista.

- Para os núcleos que obtivemos mais de dez questionários respondidos enviamos o e-mail convite para cinco professores. O critério utilizado para selecionar os professores que deram resposta à questão sobre o que eles entendem por Geometria Euclidiana e por Geometria não Euclidiana. Este fato aconteceu nos Núcleos de Apucarana (13 professores), Área Metropolitana Norte (12 professores), Área Metropolitana Sul (13 professores), Cascavel (17 professores), Curitiba (26 professores) e Maringá (18 professores). No Núcleo de Apucarana, somente um professor respondeu o e-mail convite e aceitou participar da entrevista. Nos Núcleos Área

> Metropolitana Norte e Sul, Maringá e Cascavel três professores responderam o e-mail convite e o critério para escolha do professor foi a disponibilidade de datas da pesquisadora e do professor. No Núcleo de Curitiba foi necessário enviar o convite para mais cinco professores, pois os cinco primeiros não responderam o e-mail. Por fim, um professor aceitou participar da entrevista.

Em meados de abril de 2012, realizou-se uma entrevista piloto com uma professora do Núcleo de Cianorte. Com esse piloto, foi possível delimitar as perguntas da entrevista semiestruturada e os cartões que fariam parte da pesquisa.

No final do mês de abril, iniciou-se as entrevistas, que prosseguiram nos meses de maio, junho e julho desse mesmo ano. Todas as entrevistas foram realizadas com o consentimento dos professores. Das vinte e sete entrevistas, vinte e quatro foram feitas nas cidades onde os professores residem e as demais em cidades próximas. Elas foram concedidas nas escolas nas quais eles trabalham ou em suas residências. Os horários e os dias foram combinados entre a pesquisadora e o professor.

Em todas as entrevistas, seguimos o mesmo protocolo: iniciamos com as questões da entrevista semiestruturada, depois os professores manipularam os cartões e apresentaram seus comentários e, por fim, a pesquisadora explicou, de forma sucinta, cada um dos cartões e os relacionou com as Geometrias.

Considerou-se as entrevistas um dos momentos mais interessantes da pesquisa, uma vez que viajamos aproximadamente seis mil e oitocentos quilômetros, por várias regiões do Estado e pode-se conhecer os professores, suas escolas, suas cidades, suas angústias e seus desejos.

2.1 Instrumentos adotados na pesquisa

A seguir serão apresentados os instrumentos que foram utilizados na pesquisa: um questionário, uma entrevista semiestruturada e os cartões.

2.1.1 O questionário

O primeiro instrumento utilizado foi um questionário[11]. Os tópicos e perguntas do questionário traduzem, ainda que parcialmente, os objetivos da pesquisa. O questionário elaborado contém dezoito tópicos e perguntas.

Treze tópicos foram criados para obter informações gerais sobre os professores: nome, e-mail, telefone, idade, núcleo no qual está lotado, vínculo empregatício com o Estado, tempo de docência e formação – graduação e pós-graduações. No questionário, o nome, o e-mail e o telefone do professor foram solicitados porque, posteriormente, ao entrar em contato com os professores, usou-se esses dados. Como pretendia-se entrevistar um professor de cada NRE, era indispensável que o professor informasse o Núcleo no qual está lotado. As demais informações auxiliaram na caracterização dos professores entrevistados.

As cinco perguntas do questionário versam sobre Geometrias. Seguem as perguntas e as suas justificativas:

1 – Você sabe que o conteúdo "noções de Geometrias não Euclidianas" foi incluído nas Diretrizes Curriculares Estaduais?

Por ser a DCE um documento oficial, que apresenta e recomenda os conteúdos e metodologias que os professores podem utilizar nas salas de aulas, e que segundo o documento, foi construída por meio "de um longo processo de discussão coletiva" (PARANÁ, 2008, p. 6), tinha-se como hipótese que todos os professores de Matemática sabiam da inclusão deste conteúdo nas DCE. O objetivo dessa questão foi, simplesmente, averiguar se os professores sabem que esse conteúdo foi incluído nas DCE.

2 – O que você entende por Geometria Euclidiana?

Ao fazer esta pergunta, tinha-se como objetivo saber como os professores descrevem esta Geometria, quais são suas opiniões e conhecimentos sobre este conteúdo da estrutura curricular de Matemática.

---

[11] O questionário está descrito no Apêndice 1. O questionário foi elaborado por meio do Google Docs. As respostas foram encaminhadas para um banco de dados no e-mail da pesquisadora.

3 – Você costuma ensinar Geometria Euclidiana para seus alunos? Em caso afirmativo, quais os principais conceitos você costuma trabalhar?

O objetivo da questão 3 foi verificar se os professores ensinam Geometria Euclidiana e quais são do conteúdos que eles trabalham, uma vez que muitas pesquisas apontam que tal conteúdo foi e está abandonado nas salas de aula (ALMOULOUD, MANRIQUE, SILVA e CAMPOS, 2004; NACARATO, 2000).

4 – O que você entende por Geometria não Euclidiana?

A resposta dada para esta questão, nos permitiria perceber se o professor sabia da existência de tais Geometrias, e em caso afirmativo, como eles as descrevem, quais são suas opiniões e conhecimentos sobre elas. Destaca-se que as respostas a essa questão foram utilizadas para selecionar os professores para a entrevista.

5 – Você ensina Geometria não Euclidiana para os seus alunos? Qual(is)?

O objetivo dessa questão era simplesmente verificar se os professores ensinam Geometrias não Euclidianas e quais são os conteúdos ensinados.

Como já dissemos anteriormente os dados do questionário foram utilizados somente para selecionar os sujeitos da pesquisa. As respostas das cinco perguntas não foram utilizadas na análise.

2.1.2 A entrevista semiestruturada

O segundo instrumento de coleta de dados foi uma entrevista semiestruturada. Entende-se que a entrevista é um instrumento adequado para obter informação sobre o que as pessoas sabem, esperam, sentem, pretendem fazer, fazem ou fizeram.

Antes de iniciar as entrevistas, construímos um roteiro com 11 tópicos e questões, que serviram como guia para a pesquisadora. Destaca-se que a pesquisadora ficou à vontade para fazer novas perguntas quando acreditava ser pertinente. As perguntas do roteiro foram apresentadas para todos os entrevistados.

Na sequência, expomos os tópicos e perguntas que conduziram a entrevista:

1 – Fale um pouco sobre você: idade, cidade onde reside e trabalha, quais disciplinas trabalha, em quais níveis de ensino.

2 – Fale sobre a sua trajetória acadêmica: graduação, capacitação e especialização.

O objetivo do tópico 1 era basicamente obter informações gerais sobre o entrevistado. No tópico 2, foi investigar a formação acadêmica – graduação e pós-graduações: especialização, mestrado ou doutorado – que os professores cursaram. Com as informações dos tópicos 1 e 2 foi possível caracterizar os professores de forma geral, evitando uma caracterização individual, uma vez que o anonimato foi garantido desde o início da pesquisa.

3 – Conte-nos brevemente a sua formação em Geometrias (graduação, pós-graduação, cursos).

4 – Você considera que o seu conhecimento geométrico foi construído/adquirido na educação básica, durante a sua graduação ou foi no decorrer dos anos que você está atuando em sala de aula?

Quando se fala em ensino de Geometria Euclidiana, alguns aspectos parecem prevalecer nos textos sobre o assunto. Um deles diz respeito à formação dos professores que atuam na Educação Básica. Em geral, os professores consideram sua formação, principalmente a universitária, insatisfatória e alguns afirmam não se sentirem preparados para ensinar esse conteúdo.

Com o tópico 3, obtem-se informações sobre as disciplinas de Geometrias que os professores lembram ter cursado durante a formação escolar, desde a Educação Básica até a pós-graduação, e quais conteúdos foram ministrados nessas disciplinas.

Com a questão 4, investigou-se quais os momentos que os professores consideram importantes na construção do conhecimento geométrico.

Sabe-se que as concepções sobre as Geometrias se desenvolvem ao longo do tempo e são determinadas, entre outros aspectos, pelas experiências e pelo contato dos professores com as Geometrias. Para identificar e analisar as concepções dos professores requer conhecer a sua formação em Geometrias e entender sob quais influências elas foram construídas.

5 – você estudou Geometria não Euclidiana? Se algum aluno perguntasse para você o que é Geometria não Euclidiana, o que você diria para ele?

O objetivo da questão 5 consiste em investigar se os professores estudaram Geometrias não Euclidianas, seja na educação básica, na graduação ou após, e o que os professores entendem por Geometrias não Euclidianas, ou seja, como eles a descrevem, quais são seus conhecimentos, opiniões, preferências e ideias sobre essa Geometria. Essa pergunta foi importante porque nos auxiliou na obtenção das concepções dos professores sobre as Geometrias não Euclidianas.

6 – Quando você estudou Geometria não Euclidiana o que chamou sua atenção?

Pesquisas realizadas por Lovis (2009), Santos (2009) e Carli (2012) mostram que alguns resultados e conceitos dessas Geometrias chamam a atenção dos professores, tais como: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de 180º, a representação dos entes geométricos: reta, segmento de reta, triângulo e quadriláteros mudam na Geometria Hiperbólica e da Superfície da Esfera, por exemplo. Com a questão 6, averiguou-se se houve algo que chamou a atenção dos professores nas Geometrias não Euclidianas e, com isso, tinha-se como objetivo aprofundar o conhecimento das concepções do professores.

7 – Você costuma ensinar Geometrias? Qual? Usa algum tipo de material (régua, compasso, transferidor, sólidos geométricos, entre outros)?

A questão 7 tinha por objetivo verificar se os professores ensinam Geometrias nas suas turmas. Solicitou-se que eles falassem quais conteúdos trabalham e de que forma costumam fazê-lo. Também perguntamos se eles usam, em suas aulas, materiais tais como: régua, compasso, transferidor, para fazer construções geométricas, ou ainda materiais manipuláveis como, por exemplo, representações de sólidos geométricos.

Salienta-se que as concepções que os professores dispõem servem de filtro para as suas experiências com os conteúdos geométricos. Cada professor tem uma maneira de organizar e sistematizar os conteúdos. Essa maneira particular de lidar com as informações possui relação direta com a forma como ele concebe o conhecimento, no caso, o geométrico. As concepções (conscientes ou inconscientes) sobre o ensino de Geometrias desempenham um papel significativo no modo de ensinar e o que ensinar de cada professor.

8 – Qual a importância das Geometrias?

Alguns pesquisadores (CRESCENTI, 2005; FONSECA, LOPES, BARBOSA, GOMES e DAYRELL, 2011) investigaram o que os professores pensam sobre a importância da Geometria Euclidiana. Eles observaram que é comum entre eles a justificativa de que a importância dessa Geometria se dá pelos seus aspectos utilitários, para resolver problemas do cotidiano e no desempenho de atividades profissionais. Com a questão 8, investigou-se qual a importância que os professores da pesquisa atribuem às Geometrias.

Acredita-se que cada professor atribui importâncias para as Geometrias com bases nas suas próprias experiências. Quando, como e onde eles usaram as Geometrias determinam as concepções que os professores apresentam sobre a importância deste conteúdo.

9 – Os alunos têm mais dificuldades em aprender Geometrias do que outro conteúdo? Você tem dificuldade/facilidade em ensinar Geometrias?

10 – Qual conteúdo matemático que você tem preferência em ensinar?

Com a questão 9, investigou-se quais as dificuldades que os professores percebem que os alunos apresentam ao estudar as Geometrias e quais as dificuldades que eles têm ao ensiná-las.

Salienta-se que os professores têm preferências quanto ao ensino dos conteúdos matemáticos e essas preferências são elaboradas por cada indivíduo para explicar e justificar muitas das suas decisões e atuações pessoais e profissionais vivenciadas.

11 – o que você entende por Geometria Euclidiana?

O objetivo da questão 11 foi investigar como os professores descrevem a Geometria Euclidiana, quais seus conhecimentos, as opiniões, preferências e ideias sobre esta Geometria. Esta questão foi importante, pois nos auxiliou na obtenção das concepções dos professores sobre esta Geometria.

A importância de conhecer as concepções dos professores se justifica não somente por influenciarem a forma como o professor ensina, organiza e se comporta diante do conhecimento matemático, mas também porque constitui um primeiro passo que nos permite ter acesso aos conhecimentos geométricos que o professor dispõe.

2.1.3 Os cartões

Durante a construção do guia com as questões da entrevista semiestruturada, procurou-se elaborar questões que respondessem as interrogações da pesquisa. No entanto, considerou-se pertinente complementar as questões com os cartões. Na entrevista, evitou-se perguntas fechadas, como por exemplo, o que é um Fractal? Pois gostaríamos que os professores não se sentissem pressionados e inseguros para responder as questões, principalmente àquelas que eles não tinham conhecimento sobre o assunto.

Para elaborar os cartões, investigou-se os principais conceitos e resultados de cada Geometria. Também considerou-se o que as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do Estado do Paraná (2008) recomendam para o conteúdo Geometrias. Elaborou-se trinta e seis cartões com palavras, representações de entes geométricos e objetos relacionados com as Geometrias. Ao usar palavras e representações dos entes geométricos, acreditava-se que cada professor apresentaria seus conhecimentos, noções e opiniões para relacionar e comentar os cartões. A seguir encontra-se uma figura com os cartões.

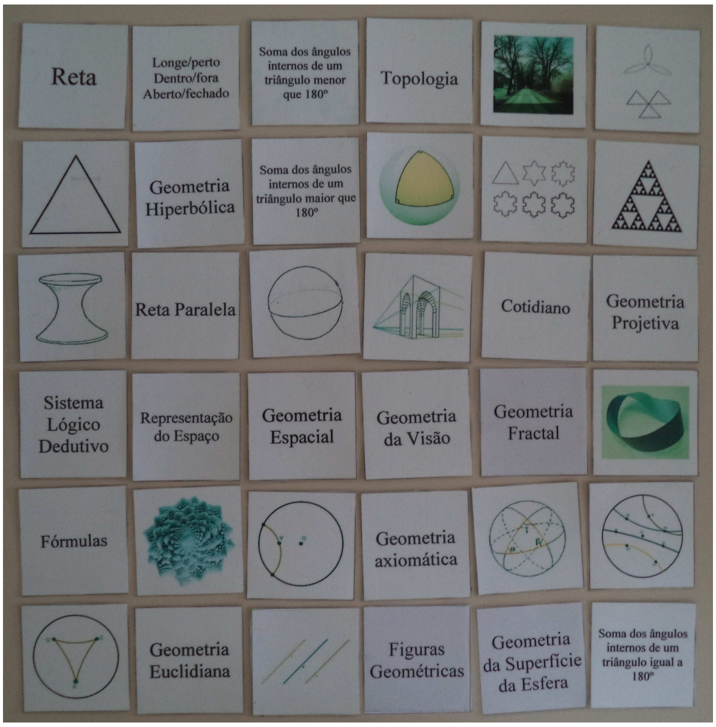


Figura 1: Cartões utilizados na pesquisa

Os cartões foram utilizados no decorrer da entrevista, e a apresentação se deu da seguinte forma: a pesquisadora apresentava as questões do guia e posteriormente espalhava os cartões, de forma aleatória, sobre uma mesa. A seguir solicitava que os professores relacionassem aqueles que eles considerassem pertinente, ou que escolhessem um ou mais cartões para comentar. Neste momento procurou-se deixar os professores bem a vontade para que eles pudessem expressar seus conhecimentos, opiniões, ideias e preferências sobre as Geometrias.

Os cartões, bem como as questões da entrevista semiestruturada, foram usadas para identificar as concepções dos professores sobre as Geometrias. No início da investigação, pensávamos que os cartões teriam um papel mais determinante na obtenção das concepções, porém, muitos professores comentaram ou relacionaram poucos cartões, principalmente, aqueles relacionados com as Geometrias não Euclidianas. Ainda assim, eles foram importantes, pois corroboravam, ou não, com as falas dos professores (como será observado nas seções 6, 7 e 8). A descrição detalhada dos cartões encontra-se na próxima seção.

3 Considerações sobre as Geometrias e os objetivos dos cartões

A construção dos cartões suscitou a recorrência a livros e artigos sobre as Geometrias, com o objetivo de conhecer suas histórias, compreender seus conceitos e resultados. Destaca-se que, na construção dos cartões, também considerou-se o que as DCE recomendam para cada uma das Geometrias.

Para facilitar o entendimento, em geral, separamos os cartões de acordo com os conteúdos de cada Geometria. Caso algum cartão esteja relacionado com mais de uma Geometria, será feito um comentário específico. Antes, porém, de apresentar os objetivos de cada um deles, tecemos alguns apontamentos a respeito de cada Geometria.

3.1 Considerações sobre a Geometria Euclidiana

As primeiras percepções geométricas que o homem realizou são muito antigas, provavelmente, antecedem ao surgimento da escrita. Essas percepções tiveram origem nas observações acerca do espaço físico, das formas, da comparação de formas e tamanhos (EVES, 1969, p. 1). Eves (1992) destaca que, no início das civilizações, o homem só considerava os problemas geométricos concretos, em outros termos,

> [...] que se apresentavam individualmente e entre os quais não era possível nenhuma ligação [...] mais tarde, a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de um certo número da observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores particulares (EVES, 1992, p. 2-3).

Por meio dessas observações, foi possível chegar à noção de lei ou regra geométrica, e a esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da Geometria Eves (1992) chamou de “geometria científica”.

Gerdes (1992) expõe que a Geometria surgiu das necessidades do homem e tem sua origem como uma ciência empírica ou experimental. Foi por meio da comparação com o seu meio que o homem da idade da pedra chegou aos primeiros conhecimentos geométricos. O autor destaca que “depois de ter sido reunido suficiente material factual respeitante às formas espaciais mais simples, tornou-se possível, sob condições sociais especiais, como, por exemplo, no Egito antigo, Mesopotâmia e China, sistematizar consideravelmente o material factual recolhido” (GERDES, 1992, p. 17). Com isso, começou a transformação da Geometria de uma ciência empírica para uma Geometria como uma ciência matemática, na qual foi possível demonstrar proposições e abstrair resultados.

A história da Geometria Euclidiana está de certa forma associada ao desenvolvimento das antigas civilizações da Babilônia e do Egito. Quando a civilização egípcia passou a abandonar a vida nômade e a concentrar-se nas margens do rio Nilo, ela precisou criar métodos para adaptar-se a essa nova realidade. Mlodinow (2004, p. 19) expõe que “[...] a cobrança de impostos foi, talvez o primeiro imperativo para o desenvolvimento da Geometria, pois embora teoricamente o faraó possuísse todas as terras e bens, na realidade os templos e até indivíduos em particular possuíam imóveis”. No entanto, o governo determinava os impostos da terra baseados na “[...] altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades” (MLODINOW, 2004, p. 19).

Os egípcios desenvolveram métodos para calcular a área do quadrado, do retângulo e do trapézio. Com essas experiências eles conheceram e elaboraram inúmeros princípios relativos às características de linhas, ângulos e figuras. Os egípcios também construíram, com instrumentos e conhecimentos limitados, uma das mais impressionantes construções da história da humanidade: as pirâmides. Barker (1969, p. 28) destaca que os gregos, ao contrário dos egípcios, apreciavam a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas principalmente pelo seu interesse teórico. Ao conhecimento prático dos egípcios, os gregos deram o nome de Geometria, que significa medida de terra.

Tales, comerciante e filósofo grego, há pouco mais de 2.500 anos, foi quem preparou o "[...] cenário para as grandes descobertas dos pitagóricos e, por fim, para os *Elementos* de Euclides" (MLODINOW, 2004, p. 23). Os egípcios foram capazes de construir as pirâmides, mas não tinham conhecimento de como calcular sua altura. Tales foi capaz de deduzir técnicas geométricas para calcular a altura da pirâmide, usando as propriedades de triângulos semelhantes.

Por volta de 300 a.C., Euclides escreveu a sua famosa obra "Elementos". Euclides estudou em Atenas com os sucessores de Platão e dedicou-se com brilhantismo ao ensino da Matemática. Souza (1948) expõe que a celebridade alcançada por Euclides não ocorreu devido às descobertas realizadas por ele no âmbito da Matemática. Coube a Euclides a "[...] delicada tarefa de compilar os trabalhos dos geômetras anteriores e apresentá-los num conjunto metódico e bem coordenado, adotando para as demonstrações a forma mais simples e rigorosa" (SOUZA, 1948. p. 8). Mlodinow (2004) e Barker (1969) destacam que a obra de Euclides exerceu forte influência sobre a filosofia e deu nova forma à natureza da Matemática. Sua obra é a segunda mais editada no mundo, perdendo somente para a Bíblia.

Para Eves (1969), o mérito de Euclides está na maneira como ele organizou seu trabalho: partiu de um pequeno grupo de suposições, definições e postulados com os quais apresentou o conhecimento geométrico por meio de uma sucessão lógica. Mlodinow (2004) expõe que Euclides foi o mais famoso geômetra já conhecido:

> [...] foi através da sua janela que, durante milênios, as pessoas olharam primeiramente quando contemplaram a Geometria. Atualmente, ele é o nosso garoto-propaganda da primeira grande revolução no conceito de espaço – o nascimento da abstração e a ideia de demonstração. [...] A história de Euclides é uma história de revolução. É a história do axioma, do teorema, da demonstração, a história do nascimento da própria razão (MLODINOW, 2004, p. 15).

Euclides formulou sua teoria, de modo a torná-la rigorosa. Isso foi feito por meio de demonstrações de forma dedutiva com o rigor da lógica e, por isso, Euclides a fez de forma universal, ou seja, ele "[...] não examina se propriedades de uma determinada linha ou figura realmente existem; examina, ao contrário, as propriedades de todas as linhas ou figuras de tal ou qual espécie devem ter" (BARKER, 1969, p. 28-9). Para Souza (1948, p. 61), o essencial na demonstração são as definições e os postulados, "que se arcabouçam na estrutura do raciocínio".

Euclides escreveu 13 livros e neles apresentou 23 definições, cinco postulados geométricos e cinco noções comuns, com as quais demonstrou 465 teoremas, que é considerado todo o conhecimento geométrico do seu tempo (SOUZA, 1948). No livro I, Euclides definiu alguns objetos geométricos, tais como: ponto, reta, plano, linha e superfície (por exemplo, Euclides definia ponto como "aquilo que não tem partes"). Atualmente, o ponto, a reta e o plano são considerados noções primitivas, ou seja, objetos da Geometria que não são possíveis de serem definidos. Os gregos faziam distinção entre axioma ou noções comuns e postulado. Para eles, axioma era uma suposição comum a todas as Ciências e, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável por todos. Os postulados eram suposições particulares de uma determinada área de estudo que não são, necessariamente, aceitáveis nem óbvias para todas as pessoas. Os postulados de Euclides[12] são:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta ilimitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, como todo centro e distância, descreve um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Barker (1969) aponta que as ideias adotadas por Euclides nesses postulados diferem muito das concepções indutivas e empíricas adotadas pelos egípcios. Nos três primeiros postulados, Euclides não está, de maneira direta, discutindo problemas de medição de terras e não está preocupado com os possíveis obstáculos (montanhas, rios, ou outros) que possam impedir seu traçado. As condições práticas não interessavam a Euclides, uma vez que ele admitia "[...] um espaço em que inexistiam obstáculos absolutos e em volta do qual inexistiam fronteiras exteriores absolutas" (BARKER, 1969, p. 31). O quarto postulado parece um tanto evidente, mas Euclides o descreve como uma verdade lógica, tendo em vista que ele será necessário para demonstrações futuras.

[12] A versão descrita está disponível em Euclides (2009), tradução de Irineu Bicudo.

Quanto ao quinto postulado, ele não parece tão evidente quanto os quatro primeiros. Na figura 1, temos um esboço do quinto postulado. Caso a soma das medidas dos ângulos internos α e β seja menor do que 180º, as retas *s* e *r* irão se encontrar, se a soma das medidas dos ângulos internos α e β for igual a 180º, as retas *s* e *r* serão paralelas.

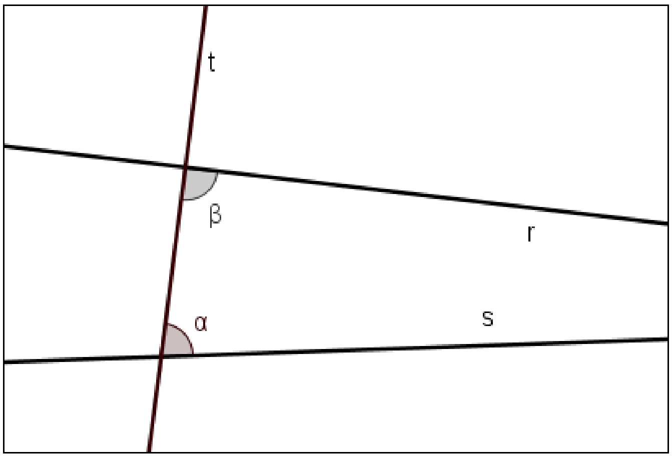


Figura 2: Esboço do quinto postulado

Quanto ao quinto postulado, ele não parece tão evidente quanto os quatro primeiros. Na figura 1, temos um esboço do quinto postulado; caso a soma das medidas dos ângulos internos α e β seja menor do que 180º as retas s e r irão se encontrar, se a soma das medidas dos ângulos internos α e β for igual a 180º as retas *s* e *r* serão paralelas.

Alguns matemáticos tentaram mostrar que o quinto postulado era um teorema dedutível dos quatros primeiros postulados, além das definições e dos axiomas. Outros, ao longo dos séculos, tentaram eliminar o quinto postulado do sistema. Houve aqueles que tentaram mostrar que o quinto postulado poderia ser substituído por algum princípio mais simples e mais evidente (BARKER, 1969 p. 47-8).

Em meio a essas tentativas de demonstrações, percebeu-se que existiam outras formas de enunciar o quinto postulado, das quais a mais conhecida é a do matemático escocês John Playfair (1748-1819). Este foi um geômetra que fez uma tradução dos Elementos para o Inglês e observou que o quinto postulado poderia ser substituído por um resultado equivalente, e afirma: “Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta que não a intercepta” (CARMO, 1987, p. 27).

Entre as várias maneiras de enunciar o quinto postulado, Souza (1948) expõe cinco proposições que podem substituí-lo:

> [...] de um ponto tomado fora de uma reta só se pode tirar uma reta paralela a essa reta; duas retas coplanares, que não admitem ponto em comum, são equidistantes; podemos construir dois triângulos semelhantes não congruentes. 4) a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º; a área de um triângulo retilíneo pode ser tão grande quanto se queira (SOUZA, 1948, p. 21-2).

O fato de existir por um ponto P fora de uma reta (uma reta paralela) era conhecido por Euclides e pelos matemáticos que o sucederam, ao se admitir os quatro primeiros postulados, mas o ponto essencial do resultado é o fato dessa paralela ser única. Bachelard (1985) destaca que o fato deste teorema corresponder a uma verdade, a um fato matemático, ninguém duvida:

> [...] para todos os geômetras até o final do século XVIII, as paralelas *existem*; a experiência usual legitima esta noção diretamente como por suas consequências indiretas. O que parece faltar, o que constitui escândalo, é que não se tenha podido ainda coordenar este teorema simples no conjunto dos teoremas demonstrados. Nunca se põe em dúvida a existência das paralelas (BACHELARD, 1985, p. 26).

Diante desse suposto teorema a demonstrar, Giovanni Saccheri (1667-1733), Johann Lambert (1728-1777) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833) se perguntaram o que aconteceria se abandonássemos ou modificássemos a noção de paralelismo euclidiano.

Saccheri foi o primeiro matemático a tentar demonstrar o postulado por meio da demonstração por absurdo, e na esperança de chegar a uma contradição, admitia uma hipótese diferente da de Euclides. Ele considerou um quadrilátero que possui dois ângulos retos, o lado do quadrilátero que forma esses dois ângulos retos é chamado de base, os dois lados adjacentes à base são congruentes. Saccheri demonstrou que os dois ângulos não retos são congruentes. Na figura a seguir, $\angle ADC \equiv \angle BCD$ [13].

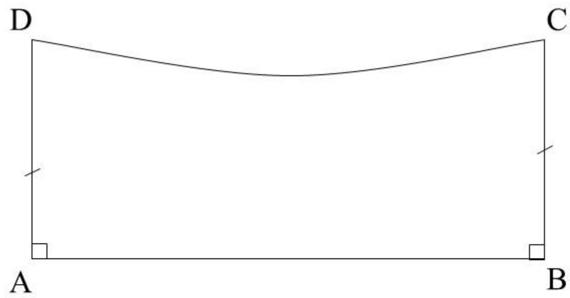


Figura 3: Quadrilátero de Saccheri com base AB

Saccheri fez três hipóteses para esses outros dois ângulos: reto, obtuso ou agudo. Caso o ângulo fosse reto, Saccheri concluiria que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo era igual a dois retos; no segundo caso, ângulo obtuso, a soma dos ângulos seria maior que dois retos (o que seria um absurdo considerando os quatro primeiros postulados da teoria de Euclides); caso a última hipótese ângulo agudo fosse aceita, a soma das medidas dos ângulos internos seria menor que 360º, o que o levaria à conclusão que a soma das medidas dos ângulos internos em algum desses triângulos era menor que 180º. Apesar de não haver uma contradição nesse último caso, Saccheri conclui que somente a primeira hipótese é possível e verdadeira (SOUZA, 1948).

Lambert admitiu como ponto de partida um quadrilátero com três ângulos retos, e suas hipóteses recaíam sobre o quarto ângulo. As hipóteses de Lambert para o quarto ângulo era a de que ele poderia ser: reto, obtuso ou agudo. A primeira hipótese conduzia ao sistema euclidiano. Caso fosse obtuso, Lambert deduziu que a soma das medidas dos ângulos internos seria maior do que 180º e que ela seria realizada para um triângulo esférico. Ao considerar o ângulo agudo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo seria menor do que dois ângulos retos e que ela seria realizada sobre uma esfera de raio imaginário (SOUZA, 1948).

---

[13] A notação $\angle ADC$, significa que o ângulo é formado pelas semirretas S_{DA} e S_{DC}, ou seja, semirretas com origem em D passando por A e por C, respectivamente. Analogamente para a notação $\angle BCD$.

Legendre tentou resolver o problema do quinto postulado considerando a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. A única conclusão a que Legendre chegou foi que há, pelo menos, um triângulo em que a soma dos ângulos é igual a dois retos (SOUZA, 1948).

Foi a negação do quinto postulado que desencadeou a construção de novas Geometrias - as Geometrias não Euclidianas - assim chamadas, porque não estão de acordo com pelo um dos cinco postulados de Euclides. Mlodinow (2004, p. 47) expõe que “[...] por 2 mil anos, dificilmente houve alguma outra ideia em qualquer campo do conhecimento humano que fosse aceita mais universalmente do que o ‘fato’ expresso pelo postulado de Euclides, de que existe uma e somente uma paralela”.

3.1.1 Os cartões sobre a Geometria Euclidiana

Euclides apresentou na sua obra, *Elementos*, 13 livros, 121 definições, 5 postulados geométricos e 5 noções comuns, com os quais demonstrou 465 teoremas. Os 13 livros estão divididos da seguinte forma: os livros I, II, III e IV tratam de geometria plana elementar, das demonstrações das figuras planas; o livro V apresenta a teoria das proporções das grandezas em geral; o livro VI esta relacionado com a aplicação dessa teoria às figuras planas, ou seja, nos seis primeiros livros temos basicamente os conteúdos de Geometria Plana. Os livros VII, VIII, e IX tratam da teoria dos números, o livro X estuda as grandezas incomensuráveis e os livros XI, XII, XIII tratam da Geometria Espacial (SOUZA, 1948). Esta obra de Euclides é construída do ponto de vista material ou concreto, pelo estudo do espaço “real” ou “natural”, pré-determinado ou *a priori*.

Neste trabalho será considerada como Geometria Euclidiana, aquela que resulta de uma reformulação da própria Geometria de Euclides, descrita nos seus *Elementos*, decorrente da mudança de mentalidade matemática no século XIX rumo ao formal, baseada principalmente nos “Fundamentos de Geometria” de Hilbert (2003). Esta é a Geometria que, em geral, aparecem nas estruturas curriculares da Educação Básica como Geometria Euclidiana, muitas vezes, apenas como Geometria.

A seguir são apresentados os cartões sobre a Geometria Euclidiana. Antes de apresentar os cartões, destaca-se o que as DCE recomendam para o conteúdo Geometria Euclidiana. Segundo o documento, no Ensino Fundamental o aluno deve compreender:

> Os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos; [...] geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões (PARANÁ, 2008, p. 56).

Esses conteúdos podem ser distribuídos no decorrer dos quatro anos finais do Ensino Fundamental. Para o Ensino Médio, as Diretrizes apontam que o aluno deve aprofundar os conceitos de Geometria Plana e Espacial:

> [...] é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções Matemáticas, tanto no estudo da Geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera (PARANÁ, 2008, p. 56).

Tanto o livro os Elementos, quanto as DCE contribuíram para a construção dos cartões sobre esta Geometria. O primeiro cartão contém as palavras “Geometria Euclidiana”, conforme a figura 4. Um dos objetivos desse cartão consiste em averiguar o que os professores conhecem a respeito dessa Geometria: seus aspectos históricos, conceitos e resultados, a forma como ela está sistematizada – numa sequência lógica que envolve axiomas, definições, postulados, teoremas etc. – entre outros. Outro objetivo é observar as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam sobre a Geometria Euclidiana.

Figura 4: Cartão Geometria Euclidiana

Para a Geometria Euclidiana também foram construídos os seguintes cartões: triângulo euclidiano, soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º, representação de retas paralelas, reta paralela, reta e Geometria Espacial, conforme figuras a seguir. Esses cartões complementam e estão relacionadas com o cartão Geometria Euclidiana. Destaca-se que um dos objetivos desses cartões era que os professores os relacionassem com o cartão Geometria Euclidiana.

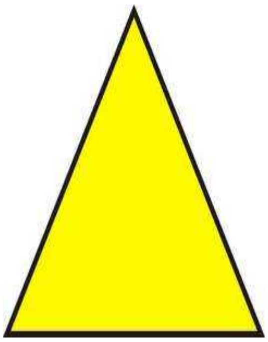
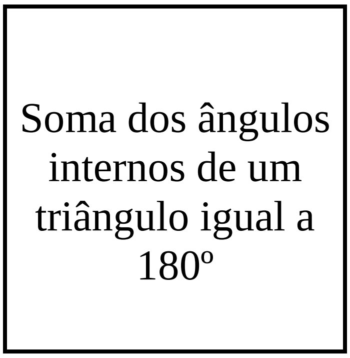
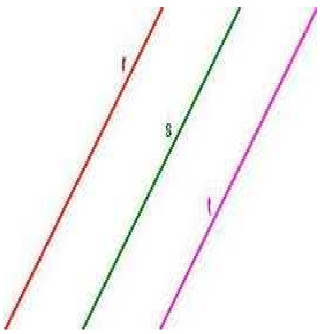
		

Figura 5: Cartão triângulo euclidiano	**Figura 6:** Cartão soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º	**Figura 7:** Cartão representação de retas paralelas

Reta Paralela	Geometria Espacial	Reta
Figura 8: Cartão reta paralela	**Figura 9:** Cartão Geometria Espacial	**Figura 10:** Cartão reta

Demais objetivos desses cartões:

- **Cartão triângulo euclidiano**: averiguar o que os professores conhecem a respeito de conceitos e resultados de um triângulo euclidiano;
- **Cartão soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º**: observar se os entrevistados relacionam este cartão com o cartão triângulo euclidiano;
- **Cartão representação de retas paralelas e cartão reta paralela**: averiguar se haveria indagações a respeito da existência de um cartão com a representação de retas paralelas e outro com as palavras “reta paralela”. Nossa expectativa era que algum professor comentasse a respeito de diferentes representações desse conceito. Além disso, saber se os professores conhecem postulados, teoremas, enfim, resultados que envolvem retas paralelas e se relacionam esses dois cartões;
- **Cartão reta**: observar quais os conceitos e conhecimentos que os professores apresentam sobre uma reta euclidiana;
- **Cartão Geometria Espacial**: investigar se os professores classificam essa Geometria como Euclidiana ou se a consideram uma Geometria não Euclidiana. Observar se eles a relacionam com os cartões que contêm representações de objetos tridimensionais.

Diante do exposto, destaca-se que estes seriam os comentários e associações esperados, no entanto, não deixou-se de considerar a existência de professores que aprofundariam os comentários e associações, ou, ao contrário, professores que não conseguiriam fazê-los.

3.2 Considerações sobre a Geometria Hiperbólica

Foi por meio das indagações e tentativas de demonstrações do quinto postulado de Euclides, também conhecido como postulado das paralelas, que os matemáticos perceberam que era possível construir Geometrias nas quais esse postulado não é válido. Pela sua história, quando se fala de Geometrias não Euclidianas, em geral, os matemáticos se referem à Geometria Hiperbólica ou à Geometria Elíptica, que surgiram da negação do quinto postulado, que, em geral, são denotadas por Não-Euclidianas. Mas, após a observação de que existem outras Geometrias que não satisfazem um ou mais dos postulados dos Elementos, adota-se o critério que qualquer uma dessas Geometrias é não Euclidiana. Elas desenvolveram-se e se mostram tão logicamente consistentes como a Geometria Euclidiana.

Boyer (1999) destaca que, no primeiro terço do século XIX, encontramos um exemplo de simultaneidade de descobertas relacionadas às Geometrias não Euclidianas. O alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856), sem qualquer contato mútuo e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Saccheri, desenvolveram, independentemente, um novo tipo de Geometria.

Eves (1969) expõe que Gauss fez descobertas sobre o espaço não euclidiano, mas não as publicou. Essas descobertas foram feitas no período de 1815-1824, quando Gauss tinha chegado à conclusão de que as tentativas de demonstrar o quinto postulado, feitas por alguns matemáticos, tinham sido em vão e que eram possíveis Geometrias diferentes da de Euclides.

Lobachevsky, durante sua vida acadêmica, elaborou vários trabalhos relacionados à Geometria. Em um desses trabalhos “On the Principles of Geometry”, publicado em 1829, Lobachevsky marcou oficialmente o nascimento da Geometria não Euclidiana. De acordo com Boyer (1999), essa Geometria ficou conhecida como “Geometria imaginária”, porque ela parecia contrária ao senso comum. No período de 1835 a 1855, Lobachevsky escreveu três trabalhos referentes à nova Geometria. Um desses trabalhos: “Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas”, de 1840, chegou às mãos de Gauss, que louvou a obra de Lobachevsky, mas nunca lhe deu apoio impresso por medo dos comentários dos amigos matemáticos (BOYER, 1999, p. 360).

Bolyai, em 1829, chegou à conclusão a que Lobachevsky chegara. No entanto, Gauss, ao saber das descobertas de Bolyai, teve a mesma reação que tivera no caso de Lobachevsky: aprovação, mas sem apoio impresso. A publicação da obra de Lobachevsky no ano de 1840, deixou Bolyai tão abalado que ele nada mais publicou. O desenvolvimento da Geometria Não-Euclidiana se deve a Lobachevsky, sendo Bolyai pouco lembrado (BOYER, 1999).

De acordo com Bachelard (1985), “[...] durante vinte e cinco anos, Lobachevsky ocupou-se mais em estender a sua geometria do que em fundá-la. Igualmente, não se podia fundá-la a não ser estendendo-a” (BACHELARD, 1985, p. 29). Os princípios dessa nova geometria eram diferentes dos princípios euclidianos. Nessa nova geometria, é possível obter mais de uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto fora dessa reta e a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos (BARKER, 1969, p. 51).

O fato de ter sido construída uma Geometria que contradiz o quinto postulado de Euclides não quer dizer que a Geometria Euclidiana não é válida. Tanto a Geometria Euclidiana quanto a Geometria Hiperbólica são válidas e possuem um sistema lógico consistente. Smogorzhevski (1969, p. 22) destaca que ambas são verdadeiras, mas cada uma tem um campo de aplicação: não podemos usar as fórmulas da Geometria Hiperbólica para as figuras da Geometria Euclidiana Plana, assim como não podemos usar as fórmulas da Geometria Euclidiana Plana para as figuras da Geometria Hiperbólica.

O desenvolvimento dessa nova Geometria surgiu como algo revolucionário. Vários filósofos, matemáticos e pensadores de épocas passadas haviam afirmado que só existia uma Geometria verdadeira, a Geometria de Euclides. Poincaré destaca que:

> [...] depois dos gritos escandalizados, habituamo-nos ao que elas tem de paradoxal; várias pessoas chegaram até a duvidar do postulado, a se perguntar se o espaço real é plano, como supunha Euclides, ou se apresenta uma ligeira curvatura. Chegaram mesmo a achar que a experiência poderia dar-lhes uma resposta a essa pergunta. É desnecessário acrescentar que isso equivaleria a desconhecer completamente a natureza da Geometria, que não é uma ciência experimental (POINCARÉ, 2008, p. 110).

Essas descobertas que perturbaram o pensamento matemático a partir do século XIX, desencadearam uma discussão referente aos limites do pensamento geométrico. Matemáticos do fim do século XIX chegaram a resultados importantes sobre a consistência da Geometria de Lobachevsky. Eles demonstraram que as Geometrias não Euclidianas devem ser consistentes caso o seja a Geometria Euclidiana.

Lobachevsky rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais postulados e os axiomas da Geometria Euclidiana. Essa Geometria ficou conhecida como Geometria Hiperbólica, e o postulado das paralelas pode ser enunciado como: existe uma reta r e existe um ponto P fora desta reta por onde passam duas retas que não interceptam r. O que faltava era construir um modelo matemático para essa nova Geometria.

O matemático Felix Klein (1849-1925) criou um modelo plano para a Geometria Hiperbólica, que está de acordo com os postulados dessa Geometria. O matemático Henri Poincaré (1864-1912), por sua vez, criou outros dois modelos planos para a Geometria Hiperbólica, que foram desenvolvidos entre 1882 e 1887 e que diferem do modelo de Klein.

Os principais resultados e conceitos da Geometria Hiperbólica presentes nos cartões estão baseados no modelo do disco de Poincaré. Poincaré baseou-se na Geometria Euclidiana para construir o seu modelo. Os pontos desse modelo são pontos no sentido habitual, que estão em um plano cuja definição é o interior de um círculo euclidiano. A circunferência (que não faz parte do plano) é chamada de horizonte. Os pontos que estão no horizonte são chamados pontos ideais. As retas (h-retas) são cordas abertas que passam pelo centro O (ou seja, os diâmetros abertos), e arcos de circunferências abertos ortogonais[14] ao horizonte (figuras 12 e 13).

Retas paralelas, nesse modelo, são retas que, por definição, assim como na Geometria Euclidiana, não possuem qualquer ponto em comum. Nesse modelo, dado um ponto P, não pertencente a uma h-reta AB, é possível traçar, por P, infinitas h-retas paralelas a h-reta AB (figura 13). Outro resultado importante é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º (figura 14).

3.2.1 Os cartões sobre a Geometria Hiperbólica

Para construir os cartões sobre Geometria Hiperbólica, considerou-se o modelo do disco de Poincaré e as recomendações das DCE para esse conteúdo. Segue a descrição dos cartões.

No que se refere a esta Geometria, a DCE recomenda que, "[...] para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos)" (PARANÁ, 2008, p. 57).

Assim como na Geometria Euclidiana, construímos um cartão com as palavras: "Geometria Hiperbólica", conforme a figura 11. Um dos objetivos desse cartão consiste em averiguar se os professores conhecem essa Geometria, além de investigar o que eles sabem a seu respeito, seja sobre os aspectos históricos, conceitos e resultados, entre outros. Outro objetivo é observar as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam sobre a Geometria Hiperbólica.

[14] Duas circunferências secantes são ortogonais se em cada ponto P de intersecção, os raios que possuem P como extremidade, são perpendiculares em P.

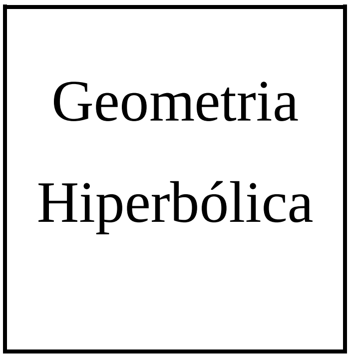


Figura 11: Cartão Geometria Hiperbólica

Para a Geometria Hiperbólica também foram construídos os seguintes cartões: reta hiperbólica, retas hiperbólicas, triângulo hiperbólico, soma dos ângulos internos de um triângulo menor do que 180º, reta paralela e hiperboloide de uma folha, conforme figuras a seguir. Esses cartões complementam e estão relacionados com o cartão Geometria Hiperbólica. Destaca-se que um dos objetivos desses cartões era que os professores os relacionassem com o cartão Geometria Hiperbólica.

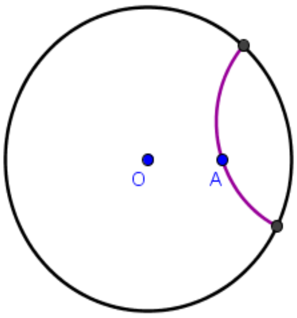
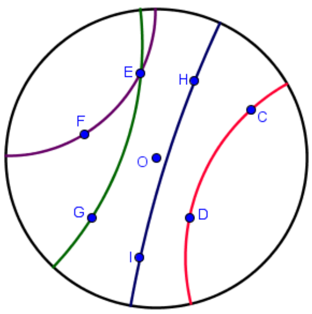
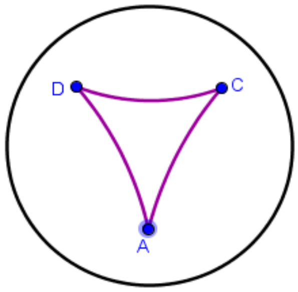
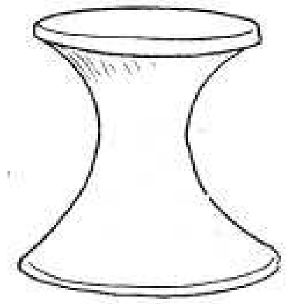
		

Figura 12: Cartão reta hiperbólica	**Figura 13:** Cartão retas hiperbólicas	**Figura 14:** Cartão triângulo hiperbólico

Soma dos ângulos internos de um triângulo menor do que 180º		Reta paralela
Figura 15: Cartão soma dos ângulos internos de um triângulo menor do que 180º	**Figura 16:** Cartão hiperboloide de uma folha	**Figura 17:** Cartão reta paralela

Demais objetivos desses cartões:

- **Cartão reta hiperbólica**: averiguar se os professores conhecem o modelo do disco de Poincaré, identificam que o arco presente no cartão é uma reta nesse modelo, e se sabem como constrói essa reta;
- **Cartão retas hiperbólicas**: observar se os professores percebem a existência de retas paralelas e concorrentes nesse cartão e se comentam a respeito do postulado de Lobachevsky, a saber, que dada uma reta e um ponto fora dessa reta, tem-se por este ponto, pelo menos, duas retas paralelas;
- **Cartão reta e reta paralela**: observar se os professores relacionam o cartão reta e reta paralela com o cartão retas hiperbólicas;
- **Cartão triângulo hiperbólico**: verificar se os professores identificam a figura como um triângulo hiperbólico;
- **Cartão soma dos ângulos internos de um triângulo menor do que 180º**: observar se os professores sabem que, na Geometria Hiperbólica, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre é menor que 180º, e a relacionam com o cartão triângulo hiperbólico;
- **Cartão hiperboloide de uma folha**: averiguar se os professores conhecem resultados sobre curvaturas: positiva, negativa ou nula, e que a superfície do hiperboloide pode ser um modelo de um plano na Geometria Hiperbólica.

Diante do exposto, destaca-se que esses seriam os comentários e associações esperados, mas, por outro lado, não deixou-se de considerar a existência de professores que aprofundariam os comentários e associações, ou, ao contrário, professores que não conseguiriam fazê-los.

3.3 Considerações sobre a Geometria da Superfície da Esfera

Após a construção da Geometria Hiperbólica, Riemann (1826-1866) construiu a Geometria da Superfície da Esfera. Em 1854, o matemático defendeu sua tese "Sobre as hipóteses em que a Geometria se baseia". Mlodinow (2004, p. 143) relata que Riemann "expôs sua palestra no contexto da Geometria diferencial, focalizando-se sobre as propriedades das regiões infinitamente pequenas de uma superfície [...] Riemann explicou como a esfera podia ser interpretada como um espaço elíptico bidimensional". A Geometria construída por Riemann é a Geometria da Superfície da Esfera.

Nessa Geometria, os pontos são pontos no sentido habitual que estão em um plano, e, neste caso, é a superfície de uma esfera. As retas são as circunferências máximas e, para construí-las, nesta Geometria, precisamos de dois pontos, sobre a superfície esférica não antípodas[15], que juntamente com o centro determina o plano euclidiano por estes três pontos. A intersecção do plano com a superfície esférica determina a única circunferência que passa pelos dois pontos. Essa circunferência é chamada de circunferência máxima. As retas, por conseguinte, também são chamadas de geodésicas (figuras 19 e 20).

Dados dois pontos antípodas A e B, que são os extremos do diâmetro, temos uma infinidade de planos que passam não apenas por eles, mas pelo centro da Esfera, e, portanto, teremos uma infinidade de retas que passam por esses dois pontos. Assim, nesta Geometria, o primeiro postulado de Euclides não é válido. O segundo postulado de Euclides – todo segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em qualquer direção – da mesma forma, também não é válido. Os segmentos de reta são partes de

[15] Os pontos antípodas são diametralmente opostos.

circunferências máximas que quando prolongados, em qualquer direção, teremos que, em algum momento, os extremos irão coincidir e formar a circunferência máxima. Dessa forma, possui um comprimento finito, e não pode ser prolongado indefinidamente.

Na Geometria da Superfície da Esfera, não temos retas paralelas, pois dado uma reta qualquer e ponto fora dessa reta, sempre vai existir uma reta que passa por esse ponto e intercepta a reta dada, pois, como foi visto, as retas são construídas por meio de planos pelo centro da esfera. Assim, por terem, pelo menos, o centro em comum, esses planos sempre se interceptam em uma reta euclidiana, e essa reta, por sua vez, intercepta e superfície em dois pontos que são comuns às retas esféricas.

Um resultado importante da Geometria da Superfície da Esfera está relacionado à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, que sempre será maior do que 180º (figura 21).

3.3.1 Os cartões sobre a Geometria da Superfície da Esfera

Para construir cartões sobre a Geometria da Superfície da Esfera, considerou-se os resultados e conceitos dessa Geometria e as recomendações das DCE para esse conteúdo. Segue a descrição dos cartões.

No que se refere a Geometria da Superfície da Esfera[16], a DCE recomenda que,

> Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto a medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: pólos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008. p. 57).

[16] Apesar do nome "Geometria Elíptica" constar nas DCE do Estado do Paraná, o que a DCE recomenda é o estudo da Geometria da Superfície da Esfera.

O primeiro cartão apresentado é o cartão com as palavras “Geometria da Superfície da Esfera”, conforme a figura 18. Um dos objetivos desse cartão consiste em averiguar se os professores conhecem a Geometria e investigar o que eles sabem a seu respeito, seus aspectos históricos, seus conceitos e resultados, entre outros. Outro objetivo consiste em observar as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam sobre a Geometria da Superfície da Esfera.

Geometria da
Superfície da
Esfera

Figura 18: Cartão Geometria da Superfície da Esfera

Para a Geometria da Superfície da Esfera, também foram construídos os seguintes cartões: reta esférica, retas esféricas, triângulo esférico e soma dos ângulos internos de um triângulo maior do que 180º, conforme figuras a seguir. Todos esses cartões complementam e estão relacionados com o cartão Geometria da Superfície da Esfera. Destaca-se que um dos objetivos desses cartões era que os professores os relacionassem com o cartão Geometria da Superfície da Esfera.

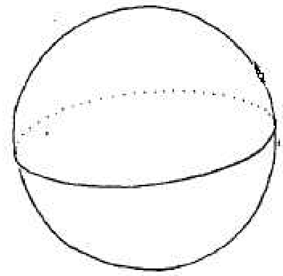
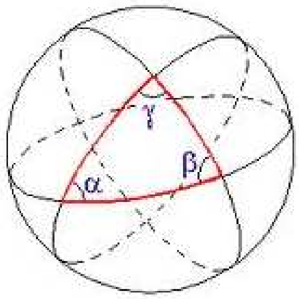
	

Figura 19: Cartão reta esférica	**Figura 20:** Cartão retas esféricas	**Figura 21:** Cartão triângulo esférico

Soma dos ângulos internos de um triângulo maior do que 180º	Reta paralela
Figura 22: Cartão soma dos ângulos internos de um triângulo maior do que 180º	**Figura 23:** Cartão reta paralela

Demais objetivos desses cartões:

- **Cartão reta esférica**: averiguar se os professores identificam que a circunferência presente no cartão representa uma reta na Geometria da Superfície da Esfera, e se sabem como construir uma reta nessa superfície;
- **Cartão retas esféricas**: averiguar se os professores conhecem o postulado de Riemann sobre retas paralelas nesta Geometria, segundo a qual dada uma reta e ponto fora, por este ponto, não existem retas paralelas;

- **Cartão reta e reta paralela**: observar se os professores relacionam o cartão reta e reta paralela com o cartão retas esféricas;
- **Cartão triângulo esférico**: verificar se os professores identificam a figura como um triângulo esférico;
- **Cartão soma ângulos internos de um triângulo maior do que 180º**: observar se os professores sabem que, na Geometria da Superfície da Esfera, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre é maior que 180º, relacionando-a com o cartão triângulo esférico.

Diante do exposto, destaca-se que esses são os comentários e associações esperados, no entanto, não deixou-se de considerar a existência de professores que aprofundariam os comentários e associações, ou, ao contrário, professores que não conseguiriam fazê-los.

3.4 Considerações sobre a Geometria Projetiva

Eves (1969) inicia a história da Geometria Projetiva com o questionamento: considere o problema que um artista enfrenta quanto tem que pintar um quadro de algum objeto real. Em um esforço para reproduzir o que observamos, muitos dos artistas e arquitetos do Renascimento, “[...] se interessaram profundamente em descobrir as leis formais que regem a construção das projeções de um objeto sobre uma tela, e no século XV, vários deles criaram elementos de uma teoria fundamental da perspectiva geométrica” (EVES, 1969, p. 272). A história da Geometria Projetiva está fortemente atrelada às técnicas de pinturas desenvolvidas pelos pintores da Renascença.

Desargues (1593-1662) arquiteto e engenheiro militar, por exemplo, influenciado pelas necessidades dos artistas e arquitetos da sua época, escreveu um tratado sobre secções cônicas no qual introduziu a teoria da perspectiva. Os escritos de Desargues não foram apreciados pelos seus contemporâneos, e as cópias da sua publicação desapareceram. Rosa (2008) destaca que, quando Desargues apresenta sua obra, os geômetras estavam descobrindo e desenvolvendo a Geometria Analítica, uma nova ferramenta com a qual era possível aplicar os infinitesimais à Geometria. A autora descreve que o trabalho de Desargues teve “[...] pouco impacto na época devido ao seu estilo de exposição difícil e pouco convencional e ao facto de os seus métodos constituírem uma ruptura demasiado grande tanto com a tradição clássica como com a geometria analítica que começava a despontar” (ROSA, 2008, p. 14).

Mais de dois séculos depois, em 1845, a obra de Desargues foi redescoberta pelo geômetra e historiador de Geometria Michel Chasles (EVES, 1992). No entanto, a retomada das considerações projetivas de Desargues ocorreu no final do século XVIII com Monge (1764-1818), quando ele construiu a Geometria Descritiva. Eves (1969) expõe que a Geometria Projetiva ressurgiu definitivamente com Poncelet (1788-1867), que a desenvolveu quando foi prisioneiro de guerra em Moscou. Ao ser libertado, voltou para França e publicou em Paris em 1822 a sua obra.

Monge (1746-1818), Carnot (1753-1823), Brianchon (1785-1864), também foram importantes matemáticos que passaram a estudar e contribuíram para o desenvolvimento e divulgação da Geometria Projetiva.

O desenvolvimento da Geometria Projetiva está atrelado ao desenvolvimento da perspectiva, que consiste em um sistema de representação gráfica capaz de permitir colocar em tela uma cena do mundo real, ou seja, a representação de um objeto tridimensional em uma superfície bidimensional. Na perspectiva, não há a representação fiel das características métricas do objeto ou espaço, mas de visualização de forma semelhante à captada pela nossa visão. Flores (2004, p. 28) expõe que “[...] sabe-se que no Renascimento uma nova maneira de sentir, pensar e ver o mundo e as coisas instaurou-se e fez emergir a técnica da perspectiva moderna [...] a perspectiva foi criada como um método capaz de reproduzir de ‘modo real’ o que vemos”.

A Geometria Projetiva é o estudo das propriedades descritivas das figuras geométricas. Pelo fato de ter sido construída para explicar o mundo que vemos, também ficou conhecida como a Geometria da Visão (BARROS e ANDRADE, 2004).

Em termos axiomáticos, uma das diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva está na existência ou não de retas paralelas. Na Geometria Euclidiana, dada uma reta e um ponto fora dessa reta, é possível traçar um única reta paralela; na Geometria Projetiva, duas retas quaisquer sempre se interceptam, ou seja, nesta Geometria, não existem retas paralelas, e as retas se encontram na linha do horizonte ou linha no infinito, a qual contém os pontos no infinito ou pontos de fuga.

Esses pontos, por conseguinte, foram usados, principalmente, pelos pintores renascentistas para causar a impressão de profundidade e realismo em suas pinturas. Outra diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva é que esta não se preocupa com as propriedades métricas de seus objetos, e assim, nela não são válidos, além do quinto postulado, o terceiro e quarto postulado de Euclides.

3.4.1 Os cartões sobre a Geometria Projetiva

Para construir os cartões sobre a Geometria Projetiva, considerou-se os resultados e conceitos dessa Geometria, bem como as recomendações das DCE para esse conteúdo. Segue a descrição dos cartões

No que se refere à Geometria Projetiva, a DCE recomenda o estudo de “[...] pontos de fuga e linha do horizonte” (PARANÁ, 2008, p. 56).

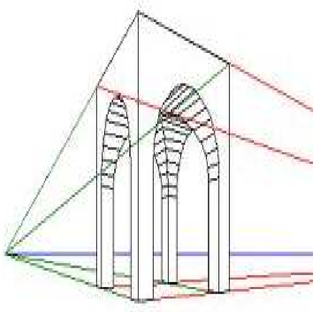
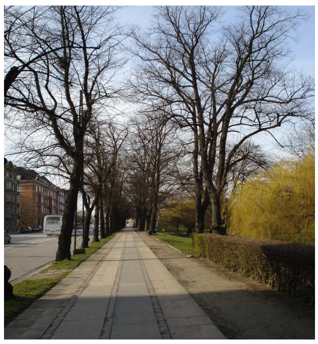
Partiu-se dessas informações para construir os cartões sobre esta Geometria. O primeiro cartão apresentado é o cartão com as palavras “Geometria Projetiva”, conforme a figura 24. Um dos objetivos desse cartão é averiguar se os professores conhecem essa Geometria, além de investigar o que eles sabem a seu respeito: aspectos históricos, seus conceitos e resultados. Outro objetivo diz respeito à observação das opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam sobre a Geometria Projetiva.

Geometria

Projetiva

Figura 24: Cartão Geometria Projetiva

Para a Geometria Projetiva também foram construídos os seguintes cartões: projeções, ponto de fuga e geometria da visão, conforme figuras a seguir. Todos essas cartões complementam e estão relacionadas com o cartão Geometria Projetiva. Destaca-se que um dos objetivos desses cartões é que os professores os relacionassem com o cartão Geometria Projetiva.

		Geometria da Visão
Figura 25: Cartão projeções	**Figura 26:** Cartão ponto de fuga	**Figura 27:** Cartão Geometria da Visão

Demais objetivos desses cartões:

- **Cartão projeções**: averiguar se os professores conhecem o conceito de ponto de fuga e linha do horizonte e se sabem que nesta Geometria não existem retas paralelas;

- **Cartão ponto de fuga**: investigar qual a relação que os professores estabelecem entre o ponto de fuga de uma construção (cartão projeções) e o ponto de fuga de um exemplo real;
- **Cartão Geometria da visão**: averiguar se os professores sabem que a Geometria Projetiva é também denominada “Geometria da Visão”.

Diante do exposto, destaca-se que esses são os comentários e associações esperados, mas, ao mesmo tempo, supomos a existência de professores que aprofundariam os comentários e associações, ou, ao contrário, professores que não conseguiriam fazê-los.

3.5 Considerações sobre a Topologia

A história da Topologia está relacionada a um problema prático: o problema das sete pontes de Königsberg, cidade da antiga Prússia, hoje Kaliningrado e Rússia, respectivamente. Na parte central de Königsberg, o rio Pregel se divide em dois rios: rio Pregel Velho e rio Pregel Novo, dividindo a cidade em quatro pedaços de terra. Estes foram ligados por sete pontes. Os habitantes de Königsberg indagavam se era possível fazer um passeio passando pelas sete pontes atravessando somente uma vez sobre cada ponte (SAMPAIO, 2008).

Euler (1707-1783) tomou conhecimento do problema quando visitou a cidade em 1736. Sampaio (2008) destaca que Euler não só esclareceu a natureza do problema “[...] mas também lançou sementes de uma teoria que se aplica a vários problemas desse tipo” (SAMPAIO, 2008, p. 15). O pesquisador percebeu que no problema das sete pontes as distâncias são irrelevantes e o que importa é o modo como as porções de terra são interligadas entre si.

Esquincalha (sem data) relata que foram por meio dessas indagações que Euler constituiu a Topologia e a teoria dos grafos, e estabeleceu o primeiro grafo da história, “representando as porções de terra e as pontes como vértices e arestas, respectivamente, preocupando-se com a forma com que os vértices eram ligados” (ESQUINCALHA, p. 125).

O estudo da Topologia também está associado ao conceito de superfície. Para Sampaio (2008), as superfícies “são objetos geométricos bidimensionais que não existem no mundo real, mas apenas em nossa imaginação geométrica platônica” (SAMPAIO, 2008, p. 30). As superfícies são objetos sem espessura. As bolas de plásticos são modelos físicos de superfícies esféricas e as câmaras de ar são modelos de uma superfície denominada toro bidimensional. Sampaio expõe que, ao esticar ou encolher um pouco, uma parte ou toda a superfície, certas propriedades se mantêm inalteradas. Essas propriedades são chamadas de Topologia da superfície. São deformações que não afetam a Topologia de uma superfície:

> 1. esticar ou inflar a superfície ou partes dela.
> 2. encolher a superfície ou partes dela.
> 3. entortar a superfície ou partes dela.
> 4. cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, um na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando a superfície original com a linha demarcada. A este procedimento é dado o nome de recorte e colagem (SAMPAIO, 2004, p. 30).

Na Topologia, as noções de vizinhança, fora, dentro, interior, exterior, aberto, fechado, longe, perto, separado, unido, contínuo, descontínuo, alto, baixo, são conceitos topológicos. As duas figuras a seguir são diferentes, no entanto, a segunda figura é a “deformação” da primeira.

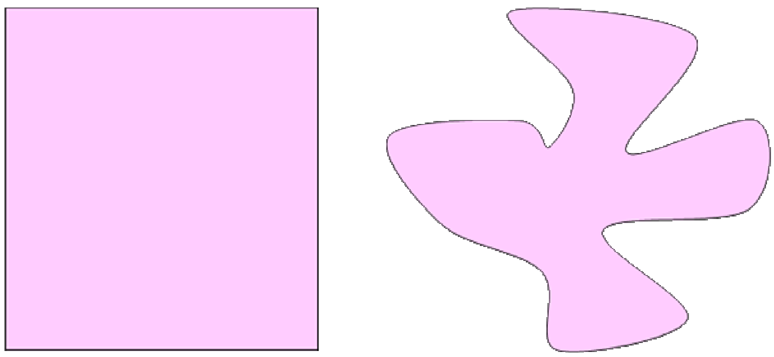


Figura 28: Exemplo de figuras homeomorfas

Apesar da “deformação” apresentada pela segunda figura em relação à primeira, algumas propriedades permaneceram invariantes pela distorção: as duas figuras dividem o plano duas partes: interior e exterior; ainda tem-se o contorno da figura que é chamado de fronteira; as duas figuras são constituídas de uma única parte, ou seja, é possível percorrer o interior das duas sem precisar passar pelo exterior o que a torna conexa por caminhos; e por fim, pontos que são vizinhos no quadrado permanecem vizinhos após a deformação. Pode-se dizer que as ambas são topologicamente iguais, embora não tenham conservado a retidão dos lados e os ângulos tenham sofrido alterações (BORGES, 2004).

3.5.1 Os cartões sobre a Topologia

Para construir os cartões sobre a Topologia, considerou-se os resultados e conceitos dessa Geometria e as recomendações das DCE para esse conteúdo. Segue a descrição dos cartões.

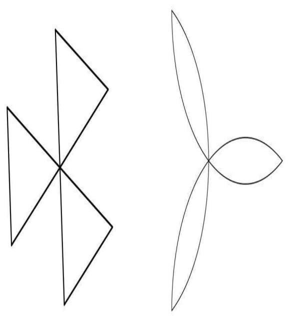
No que se refere à Topologia, as DCE recomendam o estudo dos “conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados” (PARANÁ, 2008, p. 56).

Partiu-se dessas informações para construir os cartões sobre esta Geometria. O primeiro cartão apresentado é o cartão com a palavra “Topologia”, conforme a figura 29. Um dos objetivos deste cartão consiste em averiguar se os professores conhecem esta Geometria e investigar o que eles sabem a seu respeito, tanto sobre os aspectos históricos quanto seus conceitos e resultados, entre outros. Outro objetivo consiste em observar as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam sobre a Topologia.

Topologia

Figura 29: Cartão Topologia

Para a Topologia, também construímos os seguintes cartões: conceitos topológicos, figuras homeomorfas e faixa de Möbius, conforme figuras a seguir. Todos esses cartões complementam e estão relacionados com o cartão Topologia. Destaca-se que um dos objetivos desses cartões é que os professores os relacionassem com o cartão Topologia.

Longe/perto Dentro/fora Aberto/fechado		
Figura 30: Cartão conceitos topológicos	**Figura 31:** Cartão figuras homeomorfas	**Figura 32:** Cartão faixa de Möbius

Demais objetivos desses cartões:

- **Cartão conceitos topológicos**: averiguar se os professores sabem que estes conceitos são noções da Topologia;

- **Cartão figuras homeomorfas**: verificar se os professores identificam as duas figuras como topologicamente equivalentes, ou seja, que são homeomorfas, e se a relacionam com o cartão conceitos topológicos;
- **Cartão faixa de Möbius**: averiguar se os professores identificam a faixa como uma superfície aberta e se sabem por que ela é considerada um exemplo de superfície não orientável.

Diante do exposto, destaca-se, mais uma vez, que esses são os comentários e associações esperados. Considera-se, porém, que os professores podem aprofundar os comentários e associações, ou ao contrário, não conseguir fazê-los.

3.6 Considerações sobre a Geometria Fractal

Alguns fenômenos e figuras encontrados na natureza não são explicados de forma satisfatórios pela Geometria Euclidiana. Salvador (2009) destaca que:

> Na Geometria do mundo que vivemos, observamos atentamente as formas tortuosas dos caminhos, das costas oceânicas, dos vales, dos montes, das nuvens, do sistema vascular humano, das folhas, dos galhos de arbustos ou árvores, na forma dos brócolis ou de uma couve-flor e também na forma esburacada de um pão ou de um pedaço de queijo, e no nível namométrico dos objetos encontramos formações rugosas que apresentam estruturas auto-similares, em que partes pequenas do objeto parecem ou são réplicas reduzidas do todo (SALVADOR, 2009, p. 1).

Os geômetras da antiguidade – Euclides, inclusive – consideravam perfeitas as formas da natureza. Benoit Mandelbrot (1924-2010) analisou tais formas com um novo olhar: pesquisou “a geometria de objetos com uma forma que se auto-repete dentro de si e que parece sempre semelhante, independente da ampliação ou redução da sua imagem, introduzindo assim o conceito de fractal” (SALVADOR, 2009, p. 2).

Mandelbrot nasceu em Varsóvia, sempre gostou de Geometria e procurava resolver problemas de Matemática com seu auxílio. Ele observou a relação entre padrões, simetrias, caos e ordem. Aliás, cabe explicar que o nome Geometria Fractal vem do latim, cujo verbo *frangere* significa criar fragmentos irregulares, fragmentar.

O estudo da Geometria Fractal está associado à autosimilaridade, à dimensão e à complexidade infinita dos objetos. Barbosa (2002, p. 9) destaca que a Geometria Fractal possui figuras geométricas que “constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes; propriedade conhecida como *auto-similaridade*”. O conjunto total, por outro lado, é constituído de pequenas réplicas do mesmo conjunto, ou seja, qualquer que seja a ampliação considerada obtem-se sucessivas cópias do objeto inicial.

A dimensão de um objeto Fractal, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um número inteiro, ela pode ser um número fracionário. A complexidade infinita está relacionada ao processo de criação dos Fractais. Este é recursivo, pois que tem um número infinito de iterações, e pode ser ampliado quantas vezes se desejar sem nunca obter a imagem final, ou seja, o Fractal será a figura limite do seu processo gerador e não qualquer um dos passos finitos presentes nesse mesmo processo.

Exemplos de Geometria Fractal podem ser encontrados no reino vegetal, fenômenos naturais e no reino animal. São exemplos de Geometria Fractal, respectivamente, a couve flor, um relâmpago e o sistema arterial do coração e do pulmão. Utilizando construções geométricas, pode-se gerar várias iterações de exemplos na Matemática, como a curva de Koch, o floco de neve, o tapete e triângulo de Sierpinski, entre outros.

3.6.1 Os cartões sobre a Geometria Fractal

Para construir os cartões sobre a Geometria Fractal, considerou-se os resultados e conceitos dessa Geometria e as recomendações das DCE para esse conteúdo. Segue a descrição dos cartões.

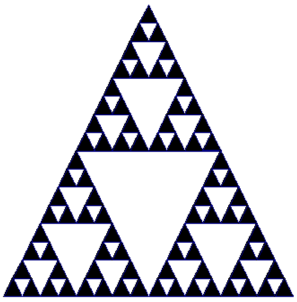
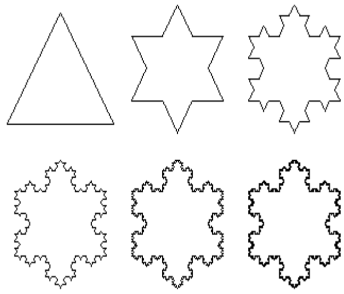
No que tange à Geometria Fractal, as DCE recomendam o estudo do “floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski” (PARANÁ, 2008, p. 57).

Partiu-se dessas informações para construir os cartões sobre esta Geometria. O primeiro cartão apresentado é o cartão com as palavras “Geometria Fractal”, conforme a figura 33. Um dos objetivos desse cartão consiste em averiguar se os professores conhecem essa Geometria e investigar o que eles sabem a seu respeito, seja os aspectos históricos, seus conceitos e resultados, entre outros. Outro objetivo é as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam sobre a Geometria Fractal.

Geometria
Fractal

Figura 33: Cartão Geometria Fractal

Para a Geometria Fractal, também foram construídas os seguintes cartões: couve flor, floco de neve de Koch e triângulo de Sierpinski, conforme figuras a seguir. Todos esses cartões complementam e estão relacionados com o cartão Geometria Fractal. Destaca-se que um dos objetivos desses cartões era que os professores os relacionassem com o cartão Geometria Fractal.

		
Figura 34: Cartão couve flor	**Figura 35:** Cartão triângulo de Sierpinski	**Figura 36:** Cartão floco de neve de Koch

Demais objetivos desses cartões:

- **Cartão couve flor**: averiguar se os professores identificam a couve flor como um modelo de Fractal e se sabem por que ela é considerada um modelo de Fractal;
- **Cartão triângulo de Sierpinski e floco de neve de Koch**: averiguar se os professores conhecem esses modelos de Fractais da Matemática e se sabem propriedades e conceitos a respeito.

Diante do exposto, destaca-se que estes são os comentários e associações esperados, no entanto, não descartou-se a possibilidade de encontrar professores que aprofundassem os comentários e associações, ou ao contrário, professores que não consigam fazê-los.

3.7 Cartões que podem ser relacionados com mais de uma Geometria

A seguir apresentam-se os cartões que estão relacionados a mais de uma Geometria: cotidiano, fórmulas, figuras geométricas, representação do espaço, sistema lógico dedutivo e geometria axiomática, conforme figuras a seguir.

Cotidiano	Fórmulas	Figuras geométricas
Figura 37: Cartão cotidiano	**Figura 38:** Cartão figuras geométricas	**Figura 39:** Cartão figuras geométricas

Representação do espaço	Sistema lógico dedutivo	Geometria axiomática
Figura 40: Cartão representação do espaço	**Figura 41:** Cartão sistema lógico dedutivo	**Figura 42:** Cartão Geometria Axiomática

Os seis cartões descritos anteriormente foram criados para obter mais informações a respeito das Geometrias.

- **Cartão cotidiano**: averiguar se os professores estabelecem relações entre o cotidiano, os cartões, bem como os conteúdos das Geometrias;
- **Cartão fórmulas**: investigar se os professores relacionam as Geometrias com a Álgebra;
- **Cartão figuras geométricas**: averiguar se os professores identificam figuras geométricas nos cartões;

- **Cartão representação do espaço**: averiguar o que os professores conhecem sobre diferentes tipos de espaços;
- **Cartão Geometria Axiomática**: investigar o que os professores sabem sobre uma geometria axiomática e se eles conhecem alguma dessas Geometrias;
- **Cartão sistema lógico dedutivo**: averiguar se os professores sabem que algumas Geometrias são construídas por meio de um sistema lógico dedutivo.

Diante do exposto, destaca-se que estes seriam os comentários e associações esperados, mas, não descartou-se o fato de encontrar professores cujos conhecimentos permitiriam aprofundar seus comentários, bem como o contrário.

4 Análise dos dados

Para analisar e interpretar os dados obtidos na pesquisa, utilizou-se como referencial teórico a análise de conteúdo.

Bardin (2007) destaca que a análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações que tem o objetivo de descrever o conteúdo de mensagens quantitativas ou não. Essa metodologia permite investigar qualquer material, verbal ou não verbal, tais como cartas, jornais, revistas, gravações, entrevistas e vídeos. A abordagem da análise de conteúdo, assim entendida, tem por finalidade explicar e sistematizar o conteúdo da mensagem e o significado desse conteúdo.

Moraes (1999, p. 9) expõe que a análise de conteúdo constitui:

> [...] uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos [...] conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum (MORAES, 1999, p. 9).

Segundo Moraes (1999), "essa metodologia de pesquisa faz parte de uma busca teórica e prática [...] constitui-se em bem mais do que uma simples técnica de análise de dados, representando uma abordagem metodológica com características e possibilidades próprias" (MOARES, 1999, p. 9). No que se refere às pesquisas qualitativas, a análise de conteúdo parte de uma série de pressupostos que servem para captar seu sentido simbólico que, muitas vezes, não é manifestado e seu significado, que não é único; ela é uma interpretação por parte do pesquisador com relação aos dados obtidos, podendo ser carregada de múltiplos significados e múltiplas possibilidades de análise (MORAES, 1999).

Para Bardin (2007, p. 89), quando lidamos com um discurso de quem fala, temos acesso ao "seu próprio sistema de pensamentos, os seus processos cognitivos, os seus sistemas de valores e de representações, as suas emoções, a sua afetividade e a afloração do seu inconsciente”.

Diante do exposto, optou-se pela análise de conteúdo, porque acredita-se que essa técnica nos auxiliaria na identificação, descrição a análise das concepções dos professores e, por isso, adota-se a proposta descrita por Bardin. A análise de conteúdo, segundo essa perspectiva, organiza-se em torno três fases: a pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A pré-análise é a fase de organização do material, que deve ser feita de modo que conduza ao desenvolvimento das operações seguintes. Nessa fase, é feita a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos, e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final (BARDIN, 2007, p. 121).

A segunda fase caracteriza-se por administrar as decisões tomadas na primeira fase e em manipular as codificações. Nessa fase, é preciso fazer “as operações de codificações, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 2007, p. 127).

Na terceira e última fase, os dados são tratado de maneira a serem significativos e válidos. Nesse momento, também é feita a interpretação dos resultados.

Segue a descrição de como foi empregada à análise de conteúdo nesta pesquisa.

1 – A pré-análise:

Como exposto anteriormente, todas as entrevistas foram gravadas em vídeo. Após cada entrevista, iniciou-se a transcrição dos dados. Esse procedimento foi adotado para ganhar tempo e para apreciar melhor os dados da pesquisa.

Após a transcrição de todas as entrevistas, realizou-se a leitura flutuante dos documentos. Durante essa leitura definiu-se qual seria o *corpus* da análise, ou seja, “o conjunto dos documentos considerados e que seriam submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 2007, p 122). Após várias leituras de todo material disponível, considerou-se pertinente construir um texto, que chamamos de síntese das entrevistas, no qual apresenta-se os dados da entrevista de forma sucinta e a transcrição na íntegra das questões 5, 6, 8 e 11 da entrevista semiestruturada.

A transcrição na íntegra das questões 5, 6, 8 e 11 se deu porque foram estas as principais questões que auxiliaram na identificação e descrição das concepções dos professores. Na síntese, também descreve-se as relações e comentários que os entrevistados fizeram sobre os cartões. As transcrições, bem como esta síntese, constituíram o *corpus* da análise.

Durante a leitura flutuante, surgiram as primeiras hipóteses do trabalho. Destaca-se que, quando do início da pré-análise e da exploração do material, não tínhamos hipóteses pré-concebidas a respeito das concepções dos professores; nossa análise de conteúdo foi feita, como descreve Bardin (2007, p. 124), "às cegas", ou seja, as hipóteses surgiram com a exploração do material.

Após a leitura flutuante, percebeu-se alguns indicadores nas questões norteadoras, que foram imprescindíveis na exploração do material.

Para facilitar o entendimento dos dados obtidos, criou-se alguns códigos: os professores foram identificados pela letra "P" e por um número (cada professor recebeu um número). A pesquisadora foi identificada pela palavra "Pesquisadora". Com o material organizado passamos para a exploração.

2 – A exploração do material:

Nesta fase, realizou-se, novamente, várias leituras das transcrições e da síntese, com o objetivo de codificar e construir as categorias. De acordo com Bardin (2007, p. 129), a codificação diz respeito ao tratamento do material, e "corresponde a uma transformação – efetuada segundo regras precisas – dos dados em bruto do texto". Bardin (2007, p. 130-1) expõe ainda que, para realizar uma análise de conteúdo, é preciso obter uma unidade de registro e de contexto. No caso da pesquisa, a unidade de registro refere-se a um tema que são as concepções dos professores, e o contexto com as questões da pesquisa. As categorias foram construídas por meio de conjuntos de palavras ou de fragmentos das falas dos professores.

A identificação das concepções dos professores foi feita, principalmente, com base nas respostas às perguntas 5, 6, 8 e 11 da entrevista semiestruturada, bem como com os comentários e relações estabelecidos com os cartões. As categorias que descrevem os sujeitos da pesquisa e a sua relação com as Geometrias foram estabelecidas por meio das demais questões da entrevista semiestruturada. Para estabelecer as categorias, observou-se os traços mais relevantes, as semelhanças, os contrastes e diferenças obtidos nas respostas dos professores. Destaca-se que cada professor foi incluído em somente uma das categorias.

Após perceber esses aspectos estabeleceu-se as seguintes categorias e subcategorias:

Categoria 1: Os sujeitos da pesquisa e a sua relação com as Geometrias:

A formação acadêmica dos professores.

A formação em Geometrias.

Concepções sobre a construção do conhecimento geométrico.

Categoria 2: Concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana:

Professores que concebem a Geometria Euclidiana como entes geométricos da Geometria Plana e/ou Espacial.

Professores que concebem a Geometria Euclidiana como os postulados, axiomas, noções primitivas e entes geométricos da Geometria Euclidiana.

Professores que concebem a Geometria Euclidiana como os aspectos descritos nas categorias anteriores e complementam sua concepção.

Categoria 3: Concepções dos professores sobre as Geometria não Euclidianas:

Concepções sobre as Geometrias não Euclidianas:

Professores que não apresentam uma concepção sobre as Geometrias não Euclidianas.

Professores que apresentam algumas ideias e opiniões sobre as Geometrias não Euclidianas.

Professores que expõem suas concepções por meio de alguns resultados e/ou conceitos das Geometrias não Euclidianas.

O que chamou a atenção nas Geometrias não Euclidianas:

É mais bonita e interessante.

Os resultados e/ou conceitos das Geometrias não Euclidianas.

Saber que existiam.

Sem categoria.

Não chamou a atenção.

Categoria 4: Concepções sobre a importância da Geometria:

Para ser utilizada em aplicações e situações do cotidiano.

Para conhecer o espaço/mundo; a Geometria está em todo lugar.

Para ser utilizada como ferramenta na própria Matemática e auxiliar o aprendizado de outros conteúdos.

Fala que é importante, mas não justifica sua resposta.

Sem categorização.

3 – O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação:

Após a fase da exploração do material, da construção das categorias, iniciou-se o tratamento dos resultados obtidos e a interpretação. Esta fase será descrita nas seções a seguir.

5 Análise da Categoria 1: os sujeitos da pesquisa e a sua relação com as Geometrias

Os sujeitos da pesquisa são vinte e sete professores de Matemática que atuam no Ensino Fundamental e Médio em escolas públicas do Estado do Paraná. Desse total, dezenove são do sexo feminino e oito, do masculino. A maioria dos professores tem entre trinta e seis e cinquenta anos de idade, como mostra a figura 43.

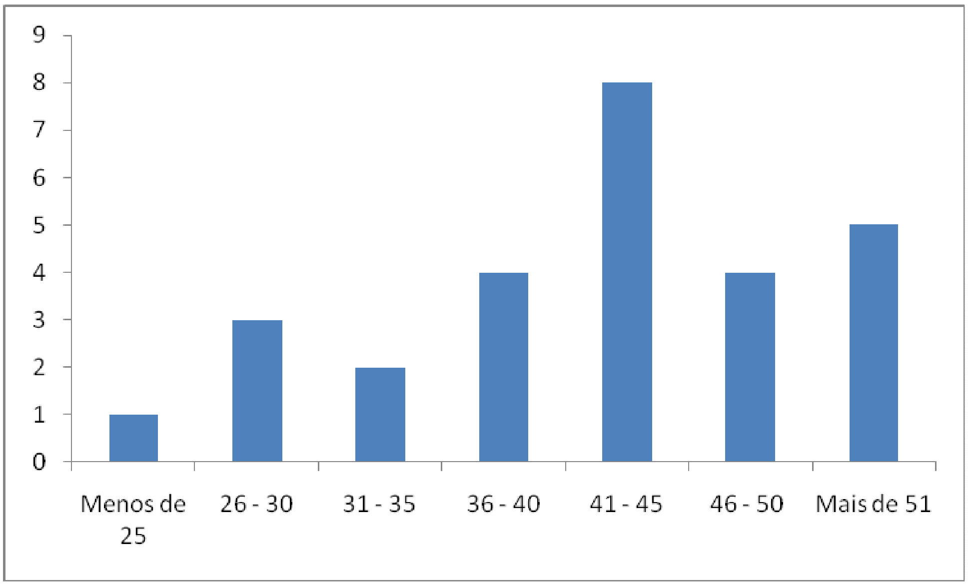


Figura 43: Gráfico com a idade dos professores participantes da pesquisa

Quanto ao quadro funcional dos entrevistados, três são professores temporários – PSS – e os demais são professores concursados. A figura 44 apresenta um gráfico com os dados referentes ao tempo de serviço dos professores.

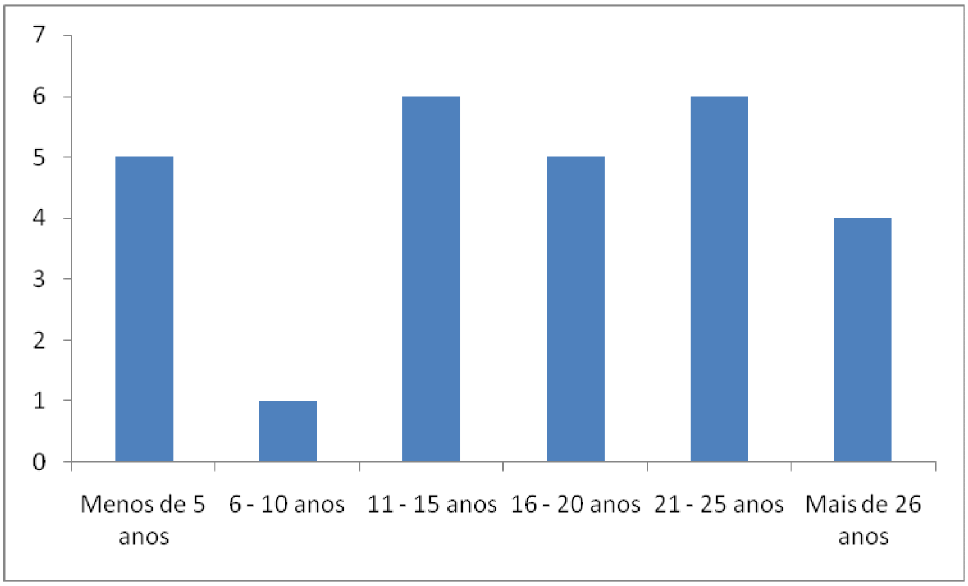


Figura 44: Gráfico com o tempo de serviço dos professores participantes da pesquisa

Com base nos dados obtidos, constatou-se que a maior parte dos professores possui mais de 16 anos de docência e 10 professores encontravam-se nos últimos anos da carreira.

5.1 A formação acadêmica dos professores

Sobre a formação acadêmica dos entrevistados, constatou-se que treze professores têm graduação em Matemática, treze em Ciências com habilitação em Matemática, e um professor tem graduação em Ciências Biológicas com habilitação em Matemática. Todos os professores têm, pelo menos, uma especialização, sendo que cinco professores já participaram do PDE[17], quatro participavam do PDE, dois são Mestres e cinco estavam cursando o Mestrado.

A figura 44 apresenta um gráfico da quantidade de professores participantes da pesquisa de acordo com o ano de formação.

[17] O PDE é o Programa de Desenvolvimento Educacional idealizado pela Secretaria do Estado do Paraná (SEED) que visa à formação continuada dos professores da Educação Básica do Estado.

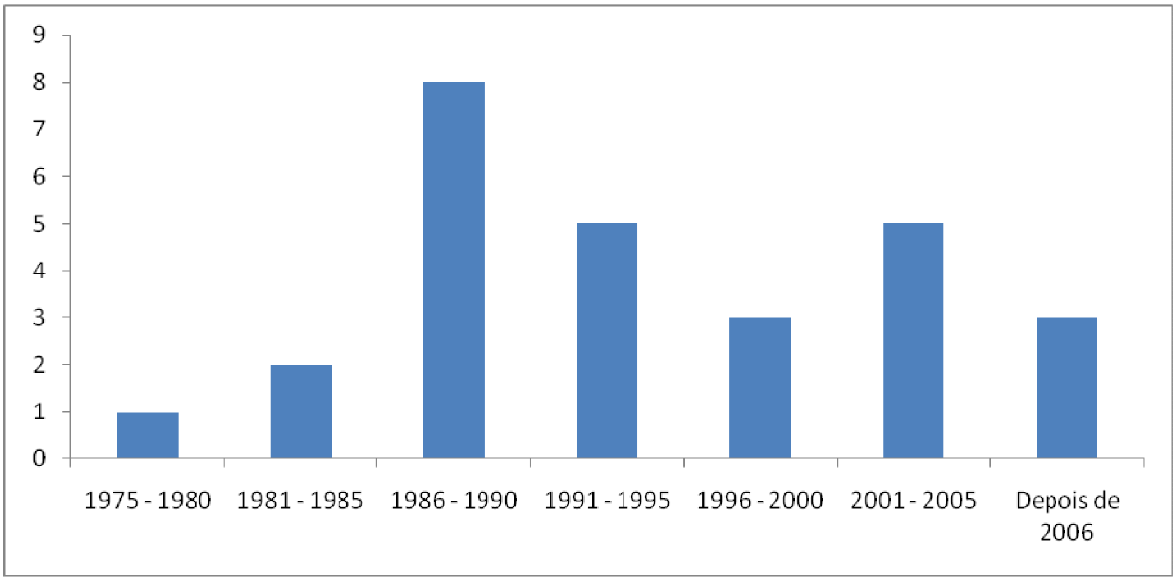


Figura 45: Gráfico referente ao ano de formação

Conforme o gráfico, o ano de formação variou de 1979 a depois de 2006. Os três professores PSS se formaram nos últimos anos – um se formou em 2004, outro em 2007 e, o mais recente, em 2010.

No quadro a seguir, temos um resumo dos dados obtidos.

Sujeitos da pesquisa					
Professor	**Quadro funcional**	**Idade**	**Tempo de serviço**	**Formação acadêmica**	**Ano de formação**
P01	QPM	45	17	Matemática	1989
P02	QPM	35	10	Matemática	2002
P03	QPM	55	17	Matemática	1998
P04	PSS	26	02	Matemática	2007
P05	QPM	37	07	Matemática	2002
P06	QPM	45	22	Ciências Biológicas com habilitação em Matemática	1989

P07	QPM	48	26	Ciências com habilitação em Matemática	1986
P08	PSS	25	3	Matemática	2010
P09	QPM	37	18	Matemática com habilitação em Física	1994
P10	QPM	39	18	Ciências com habilitação em Matemática	1993
P11	QPM	26	4	Matemática	2007
P12	QPM	44	22	Ciências com habilitação em Matemática	1991
P13	QPM	44	13	Matemática	1999
P14	QPM	48	15	Ciências com habilitação em Matemática	1989
P15	QPM	47	20	Ciências com habilitação em Matemática	1992
P16	QPM	37	14	Ciências com habilitação em Matemática	1999
P17	QPM	54	+ de 25	Ciências com habilitação em Matemática	1987
P18	QPM	55	23	Matemática	1988
P19	QPM	53	23	Ciências com habilitação em Matemática	1979
P20	QPM	49	+ de 26	Matemática	1984
P21	QPM	45	10	Ciências com habilitação em Matemática	1990

P22	QPM	44	24	Ciências com habilitação em Matemática	1991
P23	QPM	42	14	Ciências com habilitação em Matemática	1996
P24	QPM	44	22	Ciências com habilitação em Matemática	1988
P25	PSS	27	05	Matemática	2004
P26	QPM	32	11	Matemática	2003
P27	QPM	48	25	Ciências com habilitação em Matemática	1981

Quadro 3: Resumos dos dados apresentados

5.2 A formação em Geometrias

Durante a investigação, pesquisou-se quais disciplinas de Geometrias os professores lembram ter cursado durante e depois da graduação. Destaca-se que, para compreender as concepções dos professores em Geometria, é necessário conhecer a sua formação nessa área da Matemática. No momento da entrevista questionou-se os professores a respeito das disciplinas, cursos, entre outros eventos que eles participaram envolvendo as Geometrias.

No quadro a seguir é possível observar como foi a formação em Geometrias, durante a graduação.

Relação das disciplinas cursadas na graduação														
	P01	**P02**	**P03**	**P04**	**P05**	**P06**	**P07**	**P08**	**P09**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**
Geometria Euclidiana[18]		X		X	X	X	X	X			X		X	
Geometria Euclidiana Axiomática				X							X			
Desenho Geométrico	X		X						X		X			X
Geometria Descritiva									X	X	X	X		
Geometria Analítica			X	X	X						X			X
Geometria Projetiva		X												

Relação das disciplinas cursadas na graduação													
	P15	**P16**	**P17**	**P18**	**P19**	**P20**	**P21**	**P22**	**P23**	**P24**	**P25**	**P26**	**P27**
Geometria Euclidiana	X	X	X	X	X		X		X		X	X	X
Geometria Euclidiana Axiomática											X		
Desenho Geométrico						X		X		X			X
Geometria Descritiva						X		X		X			
Geometria Analítica					X	X		X	X				
Geometria Projetiva													

Quadro 4: Relação das disciplinas cursadas na graduação

Por meio das entrevistas, verificou-se que todos os professores lembram que estudaram conceitos e resultados de Geometria Euclidiana durante a graduação. No entanto, nem todos tiveram uma disciplina específica de Geometria Euclidiana.

Os professores P03, P10, P14, P20, P22 e P24 não tiveram uma disciplina de Geometria Euclidiana e comentaram que estudaram conceitos e resultados dessa Geometria

[18] A Geometria Euclidiana engloba os conteúdos de Geometria Plana e a Espacial.

nas disciplinas descritas no quadro acima. A professora P01 só se lembrou da disciplina de Desenho Geométrico, e os professores P10 e P12 da disciplina de Geometria Descritiva.

Para os professores que só recordaram das disciplinas Geometria Descritiva e Desenho Geométrico, supomos que eles praticamente não estudaram conceitos e resultados da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, uma vez que a disciplina de Desenho Geométrico aborda as construções geométricas no plano, e a Geometria Descritiva, no espaço.

Diante do observado, ficam alguns questionamentos: é possível estudar as construções geométricas, realizadas com régua e compasso, sem uma fundamentação teórica de Geometria Euclidiana Plana? Como é possível estudar a Geometria Descritiva sem uma fundamentação teórica de Geometria Euclidiana Espacial?

Uma das possíveis respostas é a que as disciplinas Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, citadas por alguns professores, podem ter sido ministradas por meio de métodos de construções, sem a preocupação, portanto, de se justificar porque os métodos fornecem as construções desejadas. Esse fato pode ser observado em vários livros didáticos dessas disciplinas, tais como Braga (1965) e Rivera, Neves e Gonçalves (1986) que somente apresentam roteiros para as construções geométricos, sem justificar as construções e os resultados. Nos livros de Marmo (1974) e Loriggio (s/d) os autores apresentam alguns conceitos e resultados da Geometria Euclidiana para justificar as construções, porém, em geral, eles supõem um conhecimento prévio desta Geometria.

Dos vinte e sete professores, somente P04, P11 e P25 afirmaram terem estudado, durante a graduação, a Geometria Euclidiana de forma Axiomática. Se os demais professores nunca fizeram ou viram demonstrações dos resultados geométricos em suas graduações, tem-se como hipótese que a Geometria Euclidiana, para esses professores, pode não passar de fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes, ou como o reconhecimento e nomeação das figuras e sólidos geométricos.

Após a graduação, os professores P04, P05, P06, P10, P12, P20, P25 e P27 relataram que não estudaram Geometria Euclidiana nas pós-graduações ou em cursos oferecidos pela SEED, bem como pelos Núcleos. Os demais professores estudaram conceitos da Geometria Euclidiana após a graduação. Os professores P01, P17 e P19 destacaram os cursos vistos no PDE. Os professores P02, P09, P11, P14, P15 e P24 destacaram os cursos de especialização e o mestrado. Os professores P03, P07, P08, P13, P16, P18, P21, P22, P23 e P26 destacaram os cursos oferecidos pela SEED, pelos NRE's e os GTR's[19].

Entre os docentes que viram Geometria Euclidiana depois da graduação, P02, P09, P14, P15, P17, P19, P22 e P24 tiveram contato ou estudaram a Geometria Euclidiana Axiomática. Destaca-se a fala dos professores P02, P09 e P14 que consideram essencial o professor conhecer a Geometria Euclidiana Axiomática, embora considerem que não é possível trabalhar com este conteúdo na Educação Básica.

Quanto à formação em Geometrias não Euclidianas, somente o professor P03 estudou Geometria Projetiva durante a graduação. P04 relatou que o professor de Geometria Euclidiana comentou a respeito de alguns conceitos e resultados das Geometrias não Euclidianas. Os professores P08 e P25 ouviram falar das Geometrias não Euclidianas durante a graduação. Nenhum professor estudou ou ouviu falar das Geometrias não Euclidianas na Educação Básica.

Após a graduação, quinze professores estudaram alguns conceitos e resultados das Geometrias não Euclidianas por meio de cursos oferecidos pela SEED, pelos NRE's e nos GTR's. Oito professores conhecem alguns conceitos e resultados das Geometrias não Euclidianas, porque leram e estudaram a respeito do assunto, e quatro professores nunca estudaram as Geometrias não Euclidianas.

Diante do contexto encontrado, será possível compreender o significado das Geometrias não Euclidianas, sem saber a lógica da construção da Geometria Euclidiana?

Conforme observado nas respostas dadas no questionário e por meio das relações estabelecidas com os cartões, a maioria dos professores que afirmou ter estudado conceitos e resultados de Geometrias não Euclidianas, ainda não construíram, de fato, uma concepção a respeito. Acredita-se que, um dos motivos para a falta de compreensão dessas Geometrias está relacionado à fraca formação desses professores. Outro fator importante é que, em geral, os cursos e as leituras a que os professores tiveram acesso ainda não

[19] GTR's são Grupos de Trabalho em Rede nos quais os professores participam, à distância, de cursos e discussões a respeito de assuntos relacionados com o contexto escolar. Estes cursos são gratuitos e todos os professores atuantes em escolas públicas do estado do Paraná podem participar.

contribuíram para quebrar/instaurar novas concepções e reflexões acerca do conhecimento geométrico.

Dentre as cinco Geometrias não Euclidianas recomendadas pelas DCE, vinte e três professores já estudaram ou leram algo sobre a Geometria Fractal, seis professores sobre a Geometria Projetiva, quatro professores sobre a Geometria da Superfície da Esfera e dois professores sobre a Geometria Hiperbólica e a Topologia[20].

Ainda sobre a formação dos professores em Geometrias, tudo indica que não estamos em condições de encontrar soluções para os problemas do ensino das Geometrias sem professores bem preparados. Um dos caminhos para isso é repensar a formação universitária e a formação continuada. Aliás, concordamos com Ponte (1998), quando destaca que:

> [...] o professor tem de estar sempre a aprender. O desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente. O desenvolvimento profissional permanente é uma necessidade incontornável, mas não deve ser visto como uma mera fatalidade. Pelo contrário, deve ser encarado de modo positivo: a finalidade do desenvolvimento profissional é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente (PONTE, 1998, p. 3-4).

Nesse contexto, o conhecimento dos conteúdos a serem ministrados é um fator importante para que o professor possa desempenhar bem sua atividade profissional. No entanto, isso não é suficiente, uma vez que também é necessário o aprofundamento dos saberes pedagógicos e curriculares. Os professores precisam estar convencidos da necessidade de estudar sempre, de que a formação continuada faz parte da profissão docente e que o professor deve refletir sobre suas práticas, discuti-las e aperfeiçoá-las. Porém, isso tudo só será possível quando existirem políticas de formação nos âmbitos

[20] Uma das hipóteses para o fato de que a maioria dos professores conhece a Geometria Fractal é que no ano de 2006 o governo do Estado do Paraná lançou um livro público e neste livro contém um capítulo sobre esta Geometria. Este livro foi disponibilizado para os professores e alunos das escolas públicas do Estado. O livro pode ser encontrado em www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf.

municipais, estaduais e federais, que possam favorecer uma formação, em serviço, e de forma adequada.

5.3 Concepções sobre a construção do conhecimento geométrico

Quanto à construção do conhecimento geométrico, os professores destacaram quatro momentos que consideram importantes neste processo: antes da graduação, na graduação, na pós-graduação e no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula.

Segue o resumo das respostas dos professores a respeito da construção do conhecimento geométrico.

A construção do conhecimento geométrico

	P01	P02	P03	P04	P05	P06	P07	P08	P09	P10	P11	P12	P13	P14
Antes da graduação			X						X	X	X			X
Durante a graduação			X	X				X	X	X				X
Na pós-graduação			X						X					
No decorrer dos anos que está atuando em sala de aula	X	X		X	X	X	X			X	X	X	X	X

A construção do conhecimento geométrico

	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27
Antes da graduação			X									X	
Durante a graduação			X	X				X			X		
Na pós-graduação	X									X			

No decorrer dos anos que está atuando em sala de aula	X	X	X	X	X	X	X		X	X			X

Quadro 5: A construção do conhecimento geométrico

A maioria dos professores considera que as leituras e estudos realizados no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula foram fundamentais para a construção do conhecimento geométrico. É interessante destacar os comentários de sete professores que consideraram a Geometria estudada antes da graduação importante na construção do conhecimento geométrico e que dez professores destacaram a graduação como significante nesse processo. A professora P26, por sua vez, afirmou que seu conhecimento a respeito da Geometria Euclidiana advém do Ensino Médio.

Quanto à construção do conhecimento, Tardif (2012, p. 16) expõe que os saberes de um professor são uma realidade social materializada por meio de uma formação, de programas, de práticas coletivas, de disciplinas escolares, de uma pedagogia institucionalizada, e são "ao mesmo tempo, os *saberes deles*".

Concordamos também com Tardif (2012) quando expõe que o "saber dos professores é plural e também temporal, [...] é adquirido no contexto de uma história de vida e de uma carreira profissional" (TARDIF, 2012, p. 19) e o "saber docente (é) um saber plural formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, dos saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais" (TARDIF, 2012, p. 36).

Ainda segundo Tardif (2012), o conhecimento dos professores não é um conjunto de conteúdos definidos de uma vez por todas, ou seja,

> [...] é um processo em construção ao longo de uma carreira profissional na qual o professor aprende progressivamente a dominar seu ambiente de trabalho, ao mesmo tempo em que se insere nele e o interioriza por meio de regras de ação que se tornam parte integrante de sua consciência prática (TARDIF, 2012, p. 14).

O autor também destaca que os saberes dos docentes são temporais, "pois são utilizados e se desenvolvem no âmbito de uma carreira, isto é, ao longo de um processo temporal de vida profissional de longa duração no qual estão presentes dimensões identitárias e dimensões de socialização profissional, além de fases e mudanças" (TARDIF, 2012, p. 70).

Independentemente da formação e da construção do conhecimento geométrico dos professores considerados satisfatórios ou não, todos os professores entrevistados relataram que ensinam Geometria Euclidiana. No entanto, percebe-se, por meio das suas falas, diferenças nos conteúdos ensinados e nos materiais utilizados[21]. Os conteúdos e conceitos mais elencados foram: ponto, reta, plano, segmento de reta, estudo e construção das figuras planas e dos sólidos geométricos, área, perímetro e volume[22].

Quanto aos materiais – régua, compasso, transferidor e sólidos geométricos – dezoito professores relataram que costumam usar esses materiais em suas aulas, seja para fazer construções geométricas, planificações e construções de sólidos geométricos; nove professores relataram que usam raramente esses materiais. A respeito do uso de *softwares*, quatro professores comentaram que já usaram o GeoGebra para ensinar Geometria Plana, e um professor já usou o Cabri.

Com relação às Geometrias não Euclidianas, somente cinco professores relataram que ensinam ou comentam algo sobre as Geometrias não Euclidianas. A Geometria Fractal é a Geometria mais citada, seguida da Geometria da Superfície da Esfera. Os resultados a respeito do postulado das paralelas e da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, na Geometria Euclidiana, Hiperbólica e da Superfície da Esfera são apresentados por quatro professores.

Os conteúdos apresentados nas DCE são os saberes curriculares que os professores deveriam conhecer e ensinar. Contudo, tal fato não se confirma em relação ao conteúdo estruturante Geometrias. Mesmo existindo um currículo padrão, as DCE, os professores não ensinam os mesmos conteúdos geométricos. Embora todos os professores

[21] O objetivo não é investigar a prática dos professores, no entanto, consideramos pertinente averiguar se eles ensinam Geometrias – quais conteúdos – e como costumam ensiná-la – se usam materiais, entre outros aspectos.

[22] Os conceitos de área, perímetro e volume são apresentados pelas DCE como conteúdos do conteúdo estruturante Grandezas e Medidas, no entanto, durante a pesquisa observamos que os professores enquadram estes conceitos no conteúdo de Geometrias. Crescenti (2005, p. 83) também observou que os professores da sua pesquisa apresentam essa mesma característica.

relatem que ensinam a Geometria Euclidiana e alguns as Geometrias não Euclidianas, não há um consenso ou concordância em relação aos conteúdos que devem ser ensinados e como devem ser ensinados. De maneira geral, os professores participantes da pesquisa sabem e ensinam menos conteúdos de Geometrias do que aqueles indicados pelas DCE e apresentados na Seção 3.

Deve-se salientar que a existência de uma proposta curricular não é garantia de que os professores ensinem o que ela propõe. Fonseca et al (2011) expõem que, muitas vezes, os docentes ignoram as propostas curriculares oficiais, porque, em geral, eles não se identificam com os conteúdos e orientações metodológicas de tais propostas e porque não tiveram oportunidade de analisá-las ou sequer conhecê-las[23].

Ressaltamos que a decisão dos professores sobre qual Geometria deve ser ensinada é influenciada pelas concepções que o professor dispõe, pelos conteúdos geométricos que eles tiveram, bem como pelos conteúdos que estão presentes nos livros didáticos que eles utilizam. Além disso, cada professor tem uma maneira de organizar e sistematizar os conteúdos e as concepções sobre as Geometrias desempenham um papel significativo no modo de ensinar e do que ensinar.

Franca e Kaleff (2007) expõem que a maior parte dos professores utiliza o livro didático para auxiliá-los nas suas aulas. Entretanto, a grande maioria dos livros didáticos de Matemática não apresenta conteúdos relacionados aos conteúdos de Geometrias não Euclidianas, por exemplo. Na maioria das vezes, os livros didáticos não apresentam a existência de outras Geometrias, ou, quando o fazem, é como ilustração ou um momento da história (FRANCA e KALEFF, 2007, p. 5). Vale lembrar que quatro professores participantes da pesquisa, – P01, P05, P12, P13 – comentaram que ensinam Geometria seguindo somente o livro didático. Quanto aos demais professores, será que eles também utilizam somente o livro didático como referência?

[23] Segundo Paraná (2008) as DCE passaram por reformulações que foram discutidas, em processo de discussão coletiva, envolvendo todos os professores do Estado. No entanto, como foi exposto anteriormente, a maioria dos professores não estudou e não ensinam todas as Geometrias propostas pela DCE. Mais adiante, veremos que uma professora não sabia da inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE.

6 Análise da Categoria 2: Concepções sobre a Geometria Euclidiana

A história da Geometria Euclidiana está, de certa forma, associada com o desenvolvimento das civilizações babilônica, egípcia e grega. Essas três civilizações contribuíram, de modo significativo, na elaboração do conhecimento geométrico. Em geral, os babilônicos e egípcios desenvolveram uma Geometria mais prática que pudesse responder aos problemas com os quais eles se deparavam. A civilização grega, ao contrário dos babilônicos e egípcios, apreciava a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seu interesse teórico (BARKER, 1969). A este conhecimento prático os gregos deram o nome de Geometria.

Euclides foi quem apresentou a Geometria, hoje chamada de Euclidiana, como um conjunto de definições, noções comuns, postulados e teoremas. Coube a ele organizar e sistematizar o conhecimento geométrico produzido até a sua época. Euclides formulou sua teoria, de modo a torná-la rigorosa. Isso foi feito por meio de demonstrações de forma dedutiva com o rigor da lógica.

A obra de Euclides é composta de 13 livros, nos quais ele apresentou cento e vinte e uma definições, cinco postulados geométricos e cinco noções comuns, com os quais demonstrou 465 teoremas. Como já foi dito na seção 3, os 13 livros versam sobre Geometria Euclidiana Plana e Espacial, teorias dos números e grandezas incomensuráveis. Nos seis primeiros livros encontram-se os conteúdos de Geometria Plana e nos livros XI, XII, XIII de Geometria Espacial. Foram os conteúdos destes nove livros de Geometria que são ensinados na Educação Básica (SOUZA, 1948).

No entanto, como disciplina escolar, a Geometria Euclidiana se apóia em um processo de formalização realizado durante séculos, “[...] em níveis cada vez maior de rigor, abstração e generalização, e sem fazer conexão entre a Geometria intuitiva e da formalização” (FAINGUELERNT, 1999, p. 20). A Geometria escolar estabelece conexões com a Geometria Euclidiana (nos moldes de Euclides) e com a Geometria prática/intuitiva.

Para Fainguelernt (1999) a Geometria é considerada uma ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos,

> [...] por um lado, é, talvez a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade. Por outro lado, como disciplina escolar, se apóia no extensivo processo de formalização realizado durante esses últimos 2.000 anos, em níveis cada vez maior de rigor, abstração e generalização, e sem fazer conexão entre a Geometria intuitiva e a formalização (FAINGUELERNT, 1999, p. 20).

Porém, Fainguelernt (1999) destaca que o ensino de Geometria não pode ser reduzido a aplicações de fórmulas e de resultados estabelecidos por alguns teoremas; ele deve ser justificado pela preocupação com a descoberta de caminhos para a sua demonstração e também para a dedução de suas fórmulas, sem a preocupação do compromisso de se apoiar no processo exaustivo de formalização.

Entre os matemáticos e educadores matemáticos, existe um consenso de que o ensino da Geometria deveria ser realizado desde a Educação Básica e continuar, de forma apropriada, nos demais níveis de ensino. Entretanto, existe uma divergência de opiniões entre os conteúdos e as metodologias de ensino da Geometria que devem ser apresentados nos diferentes níveis. Uma das razões dessas divergências é que “a geometria possui muitos aspectos [...] talvez não exista um caminho simples, linear, claro, hierárquico desde os princípios elementares até as abstrações e axiomas, embora seus conceitos devam ser considerados em diferentes estágios e diferentes pontos de vista” (FAINGUELERNT, 1999, p. 21). Outra dificuldade é a função das demonstrações, das relações entre intuição, indução e dedução e de rigor.

As DCE do estado do Paraná é o documento que apresenta e recomenda os conteúdos de Matemática que o aluno da Educação Básica necessita aprender. Para a Geometria Plana e Espacial, a DCE não recomenda o estudo da Geometria de forma axiomática/sistemática, mas indica que o professor deve trabalhar, ainda no Ensino Fundamental, com conceitos de ponto, reta, plano, paralelismo, perpendicularismo, estrutura e dimensões das figuras geométricas. Também recomenda o estudo de perímetro e área. Para a Geometria Espacial a DCE indica o estudo da nomenclatura, estrutura e dimensão dos sólidos, o cálculo de medida de arestas, área das faces e área total e volume de prismas. Por fim, o documento também recomenda que o professor trabalhe com as demonstrações das fórmulas e dos teoremas.

Diante das leituras sobre a Geometria Euclidiana e das recomendações expostas pelas DCE nos propomos a investigar as concepções dos professores a respeito deste conteúdo.

Como foi descrito na seção 1, ao investigar as concepções dos professores sobre as Geometrias busca-se averiguar os conhecimentos, as opiniões, as preferências e as ideias que eles apresentam a respeito dos conteúdos geométricos.

Assim como Ponte (1992), entendemos que as concepções dos professores foram elaboradas por processos individuais (resultado das elaborações mentais, experiências, estudos etc.), de interação social (escolarização, opções ideológicas, ambiente escolar etc.) e de origem profissional (formação escolar, científica, pedagógica e continuada).

A seguir serão apresentadas as concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana. Para construir as categorias foram utilizados os dados obtidos com a entrevista semiestruturada e as relações e comentários que os professores realizaram com os cartões. Para justificar as inclusões dos professores nessas categorias, apresentam-se recortes de falas obtidas com a entrevista, bem como as observações realizadas durante a apresentação e discussão dos cartões.

6.1 – Professores que concebem a Geometria Euclidiana como entes geométricos da Geometria Plana e/ou Espacial.

Dezoito professores citaram alguns entes geométricos para descrever a sua concepção a respeito da Geometria Euclidiana. Seguem o recorte das falas dos professores, as relações e os comentários dos cartões relacionados à Geometria Euclidiana:

> P01 – “são triângulos, quadrados, ponto, reta, plano [...] a Euclidiana trabalha na reta, no plano”; “agora no primeiro ano nós vamos trabalhar com a Geometria,

com a Trigonometria". Na dinâmica com os cartões, os únicos cartões que foram relacionados por P01 foi o cartão *reta paralela* com o cartão *representação de reta paralela*.

P02 – "as formas, reta paralela, Geometria Espacial e fórmulas, não poderia deixar de dizer [...] formas geométricas, reta". Na dinâmica com os cartões, P02 fez o seguinte comentário a respeito do cartão Geometria Axiomática: "deixa eu ver se tem alguma coisa de Geometria Axiomática aqui [...] quando você fala em paralela, você entre em axioma". P02 relacionou os cartões *reta*/*Geometria Espacial*/*triângulo euclidiano*/*figuras geométricas*/*fórmulas*; depois relacionou os cartões *Geometria Axiomática*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*.

P03 – "são as figuras geométricas, por exemplo, triângulos, quadrados, quadriláteros". Ao ser apresentada aos cartões, P03 fez o seguinte comentário sobre o cartão *cotidiano*: "cotidiano, eu relaciono com tudo o que a Geometria me dá". Além disso, relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*figuras geométricas*/*triângulo euclidiano*.

P06 – "é a planificação do cubo, do paralelepípedo, do prisma, do cone". Na dinâmica com os cartões, P06 relacionou os cartões *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*; também relacionou os cartões *triângulo euclidiano* e o cartão *soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*.

P08 – "segmentos de reta, ponto, duas retas sempre [...] é quinto, acho que é o quinto axioma, que duas retas tendendo ao infinito sempre se encontram no mesmo ponto. Que no plano a soma dos ângulos do triângulo sempre dá 180". Na dinâmica com os cartões, P08 relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*; também relacionou o cartão *triângulo de Sierpinski* com o cartão *cotidiano*.

P10 – “quadrado, retângulo, as figuras, reta, ponto interno, externo, representação do espaço; espaço externo, interno”. Na dinâmica com os cartões, P10 relacionou os cartões *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*; também relacionou os cartões *triângulo euclidiano*/*soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*/*figuras homeomorfas*.

P13 – “eu acho que, na Euclidiana, é aquela que envolve as duas, não é? Que envolve tanto a plana quanto a espacial”. Na dinâmica com os cartões, P13 não relacionou os cartões da Geometria Euclidiana.

P14 – “eu vejo assim que a Euclidiana está mais assim com as construções que geralmente a gente usa, tipo reta, pontos, paralelas, mais esses conceitos, mais da Geometria Plana. Ou, então, a construção dos sólidos; então é isso que eu tenho noção de Geometria Euclidiana”. Na dinâmica com os cartões, P14 não relacionou os cartões da Geometria Euclidiana.

P16 – “figuras geométricas, reta, ponto, os sólidos”. Na dinâmica com os cartões, P16 relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*/*figuras geométricas*/*figuras homeomorfas*/*floco de neve de Koch*/*hiperboloide de uma folha*/*retas hiperbólicas*/*geometria axiomática*.

P17 – “retas, ponto, quadrado, o que a gente ensina na escola, sólidos geométricos, tudo isso”. Na dinâmica com os cartões, P17 relacionou os cartões *reta*/*representação de reta paralela*/*fórmulas*/*figuras geométricas*/*figuras homeomorfas*.

P18 – “a parte esférica, o triângulo, eu acho que a Geometria Euclidiana ela faz parte da Geometria em geral, eu colocaria a maior parte dentro dela, tudo faz parte dela. Eu colocaria a Geometria Euclidiana como a base”. Na dinâmica com os cartões, P18 não relacionou os cartões da Geometria Euclidiana.

P20 – “formas, tipo esfera, um triângulo, as retas”. Na dinâmica com os cartões, P20 relacionou os cartões *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*/*figuras geométricas*/*figuras homeomorfas*/*triângulo de Sierpinski*.

P21 – “figuras, retas, ponto, plano, a Geometria Plana e Espacial”. Na dinâmica com os cartões, P21 relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*.

P22 – “é a Plana e a Espacial, tudo que envolve as duas. Aí tem as retas, planos e figuras geométricas”. Na dinâmica com os cartões, P22 relacionou os cartões *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*; também relacionou os cartões *triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*/*figuras geométricas*.

P23 – “eu penso em figuras geométricas, reta, ponto, plano”. Na dinâmica com os cartões, P23 não relacionou os cartões sobre a Geometria Euclidiana.

P25 – “eu diria que é a Geometria Plana e Espacial e tudo que envolve as duas”. Na dinâmica com os cartões, P25 relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*; também relacionou os cartões *Geometria Espacial* e *projeções* e os cartões *figuras geométricas* e *reta esférica*.

P26 – “são as figuras, os sólidos geométricos, ponto, reta, plano, acho que é isso”. Na dinâmica com os cartões, P26 relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*.

P27 – “são as formas mais definidas. Isso aqui é um paralelogramo é um paralelogramo, isso daqui é um trapézio é um trapézio, as variações menor, maior, mas é um trapézio; agora as formações mais indefinidas, os Fractais, por exemplo, não tem isso”. Na dinâmica com os cartões, P27 relacionou os cartões *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*; também relacionou os cartões *figuras geométricas*/*figuras homeomorfas*/*triângulo euclidiano*.

Observa-se que, em geral, as relações e comentários realizados com os cartões, estão de acordo com a maneira como eles concebem a Geometria Euclidiana. Com relação aos objetivos dos cartões, no que se refere às possíveis relações e comentários apresentados na seção 3, eles foram atingidos, parcialmente, pelos professores P02, P10, P16, P20, P22, P25 e P27. Destaca-se, ainda, que a maioria dos professores somente relacionou os cartões e não fez comentários a respeito. Os cartões mais relacionadas foram *reta paralela* e *representação de reta paralela, triângulo euclidiano* e *soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*. Notou-se que a classificação com os cartões vem do fato de que quase todos os professores usam entes geométricos para descrever sua concepção de Geometria Euclidiana.

Os professores P13, P14 e P23 não relacionaram os cartões que continham informações sobre a Geometria Euclidiana, no entanto, preferiu-se deixá-los nesta categoria por entender que eles conseguiram expressar uma resposta para nossa pergunta. P13 e P25 não citam elementos específicos da Geometria Euclidiana, mas ambos falam as palavras “Geometria Plana” e “Geometria Espacial”, sem acrescentar mais nenhum fato sobre a Geometria em questão.

Os entes mais utilizados foram: ponto, reta, segmento de reta, triângulo, quadrado e sólidos geométricos. Os professores P02, P21 e P22 além de entes geométricos, usaram as palavras Geometria Plana e/ou Espacial para descrever sua concepção de Geometria Euclidiana.

Percebeu-se que alguns professores tiveram dificuldades em expressar sua concepção e não souberam explicá-la. Segue a análise das suas respostas:

A professora P06 concebe a Geometria Euclidiana como “a planificação do cubo, do paralelepípedo, do prisma e do cone”. Uma hipótese para essa formulação sobre a Geometria Euclidiana é a de que, para ela, a Geometria Euclidiana é a Geometria Plana. Mas, por outro lado, como ela, talvez, tenha noção dos sólidos geométricos, que também fazem parte da Geometria Euclidiana, deve trabalhar e planificar esses sólidos mais conhecidos. Se para P06 a Geometria Euclidiana é a planificação dos sólidos, neste caso, como fica, por exemplo, a esfera? Será que, para P06, a esfera não faz parte da Geometria Euclidiana?

A professora P18 começa a explicar o que entende por Geometria Euclidiana, citando alguns de seus elementos: “a parte esférica e o triângulo”, mas parece perceber a existência de muitos objetos geométricos a serem citados e, dessa forma, conclui as exemplificações, além de dizer que “a Geometria Euclidiana, ela faz parte da Geometria em geral, eu colocaria a maior parte dentro dela, tudo faz parte dela. Eu colocaria a Geometria Euclidiana como a base”. Uma hipótese é que, para P18, a Geometria Euclidiana é a única Geometria que existe (como será observado na próxima seção, P18 nunca estudou Geometrias não Euclidianas e comentou que gostava dos Fractais por causa da Garrafa de Klein, no entanto, este objeto é mais estudado na Topologia), e já que afinal “tudo faz parte dela, ela é a base”. Provavelmente, não conscientemente, mas, em parte, ela acertou, já que algumas das Geometrias não Euclidianas tiveram como base inicial a negação do quinto postulado de Euclides.

A professora P27, concebe a Geometria Euclidiana, como as figuras mais bem definidas: paralelogramo e trapézio. Essa professora acredita que as formas de um Fractal não estão bem definidas, contrariando exatamente o fato da observação dos padrões geométricos feitos por Mandelbrot, que o levou a definir a Geometria dos Fractais.

Vale destacar um dos comentários da professora P08 no qual afirma que “duas retas tendendo ao infinito sempre se encontram no mesmo ponto”. Aqui é importante chamar a atenção para dois problemas conceituais: o primeira é que, se as retas forem paralelas, elas não se encontram em nenhum ponto e, o segundo, é que na Geometria Projetiva, à qual, provavelmente a professora (talvez sem conhecimento) esteja se referindo, existem vários pontos (e não apenas um) que são acrescentados aos elementos dessa Geometria, chamados pontos impróprios, ou pontos no infinito, concebidos como a interseção de retas que têm a mesma direção.

O professor P17 concebe a Geometria Euclidiana como a Geometria que se ensina na escola. Aparentemente, ele não está errado, visto que, apesar de constar na DCE do Estado do Paraná, desde 2008, as Geometrias não Euclidianas, por exemplo, a grande maioria dos professores se restringe a ensinar alguns elementos dessa área do conhecimento.

6.2 – Professores que concebem a Geometria Euclidiana como os postulados, axiomas, noções primitivas e entes geométricos da Geometria Euclidiana.

Quatro professores concebem a Geometria Euclidiana como entes geométricos dessa Geometria e citam as palavras postulados e axiomas. Seguem o recorte das falas dos professores, as relações e os comentários com os cartões relacionados com a Geometria Euclidiana:

> P05 – "são os postulados, os conceitos primitivos de reta, ponto, as figuras geométricas [...] a Geometria Euclidiana é aquele que a gente usa o plano, o nosso plano x, y e no espaço o z". Ao ser apresentada aos cartões, P05 fez o seguinte comentário sobre os cartões *triângulo euclidiano* e *figuras geométricas*: "vamos pegar o básico aqui, as formas geométricas, no caso aqui o triângulo, a gente tem que trabalhar as formas geométricas sempre relacionando, eu penso, com a prática do aluno, pra (sic) identificar aquilo que ele está vendo, pra (sic) não ficar uma coisa solta. Eu penso que você trabalhar geometria sem focar na prática, é uma coisa que você não vai ter muita, vai ficar um conteúdo por conteúdo. Não vai

ficar um conteúdo aplicativo. O que fala a Diretriz, tudo que você puder trazer pro (sic) exemplo do aluno, pra (sic) vivência fica uma coisa que ele fala, isso aí é importante porque vai fazer diferença na minha vida. Então quando você contextualiza eu penso que o aluno vivencia". Na dinâmica com os cartões, P05 relacionou o cartão *triângulo euclidiano* com o cartão *figuras geométricas*.

P07 – "é tudo, quadrado, triângulo, reta, ponto, plano, axiomas, postulados". Na dinâmica com os cartões, P07 relacionou os cartões *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*; também relacionou os cartões *Geometria Espacial* e *reta esférica*; e os cartões *figuras geométricas* e *floco de neve de Koch*.

P12 – "os postulados lá, ponto, reta, segmento de reta, plano e a partir dali a construção dos outros; formas". Na dinâmica com os cartões, P12 relacionou os cartões: *reta*/*reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*/*Geometria Espacial*/*reta esférica*/*retas esféricas*.

P19 – "os postulados, reta, ponto, plano, as figuras geométricas, os sólidos". Ao ser apresentada aos cartões, P19 comentou os seguintes cartões: cartão *representação do espaço*: "representação do espaço seriam todas as Geometrias. No plano seria só a Euclidiana, mas nas outras estão todas no espaço". Cartão G*eometria Axiomática*: "axiomática nem pensar, eu acho que eu não tenho conteúdo para trabalhar os axiomas, ia ficar muito difícil, eu não trabalho". Na dinâmica com os cartões, P19 relacionou os cartões *reta paralela*/*representação de reta paralela*/*triângulo euclidiano*/*soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º*/*figuras geométricas*; também relacionou os cartões *Geometria Espacial*/*hiperboloide de uma folha*/*reta esférica.*

Observou-se que, em geral, as relações e comentários realizados com os cartões, estão de acordo com a maneira como os professores concebem a Geometria Euclidiana. No que tange aos objetivos dos cartões, apresentados na seção 3, mais especificamente, sobre as possíveis relações, eles foram atingidos pelos professores P12 e P19.

Em relação à entrevista, P05 fez o seguinte comentário ao relacionar os cartões *triângulo euclidiano* e *figuras geométricas*: “a gente tem que trabalhar as formas geométricas sempre relacionando, eu penso, com a prática do aluno, pra (sic) identificar aquilo que ele está vendo, pra (sic) não ficar uma coisa solta. Eu penso que você trabalhar geometria sem focar na prática, é uma coisa que você não vai ter muita, vai ficar um conteúdo por conteúdo. Não vai ficar um conteúdo aplicativo”. Percebe-se na fala de P05 a necessidade que os professores têm em apresentar a Geometria como algo somente prático, para que o aluno possa utilizá-lo em situações cotidianas. P05 também relaciona a Geometria Euclidiana com o plano cartesiano: “[...] a Geometria Euclidiana é aquele que a gente usa o plano, o nosso plano x, y e no espaço o z”. Observa-se que para a professora P05 plano euclidiano são os planos cartesianos.

P19 comentou os cartões *representação do espaço* e G*eometria Axiomática.* Para a professora P19, “representação do espaço seriam todas as Geometrias”. Quanto ao cartão G*eometria Axiomática*, P19 relatou que “eu não tenho conteúdo para trabalhar os axiomas [...] eu não trabalho”. A professora foi sincera ao relatar que não conhece suficientemente a Geometria Euclidiana Axiomática e que, por isto, não trabalha esse conteúdo em sala de aula. Porém, ela não discute a necessidade ou não de se trabalhar a Geometria axiomaticamente com alunos do Ensino Médio.

Em função de os professores dessa categoria terem citado as palavras postulados, axiomas e noções primitivas, acabou-se por concluir que, em algum momento eles estudaram ou leram algo sobre a axiomática da Geometria Euclidiana[24]. Ademais, sua concepção não se restringe somente aos entes geométricos da Geometria Euclidiana, como foi descrito na categoria anterior. A maioria deles, no entanto, se restringiu a relacionar os cartões que continham entes geométricos.

[24] P05, P07 e P19 relataram que já haviam estudado e sabiam da existência dos postulados e axiomas da Geometria Euclidiana; P12 não comentou sobre o assunto.

As duas categorias apresentadas sobre as concepções dos professores a respeito da Geometria Euclidiana mostram a falta de clareza que eles têm sobre o que é essa Geometria, o que ela estuda, quais seus conceitos, propriedades, sua história etc. O objetivo deste trabalho não é classificar as concepções dos professores como certas ou erradas, porém o que percebeu-se é que os professores acreditam que a Geometria Euclidiana consiste no reconhecimento e na nomeação de figuras e sólidos geométricos.

Algo semelhante foi observado por outros pesquisadores. Carli (2012, p. 100), na sua pesquisa de Mestrado, observou que os professores apresentam dificuldade em expressar o que é a Geometria Euclidiana e notou que eles descrevem a Geometria Euclidiana como aquela que é estudada na escola e como o estudo dos entes geométricos tais como ponto, reta e plano.

Na pesquisa realizada por Crescenti (2005), a autora constatou que os professores apresentam uma tendência em conceber a Geometria Euclidiana como o estudo das figuras, principalmente, aquelas que aparecem com mais frequência no cotidiano. Dana (1994, p. 141) observou que a Geometria Euclidiana é “considerada pelos professores da escola elementar simplesmente como o estudo de retângulos, segmentos de reta, ângulo, congruência e coisas do gênero”, ou seja, entes da Geometria Euclidiana.

Assim como Crescenti (2005), Oliveira e Guimarães (2008) observaram que os professores acreditam que a Geometria Euclidiana está relacionada com o estudo das figuras geométricas regulares, principalmente triângulo e quadrado, bem como com os sólidos geométricos. Oliveira e Guimarães (2008) também observaram que os professores entendem a Geometria Euclidiana como ponto, reta e plano.

Diante do exposto, destaca-se que o ato de ensinar é um ato intencional, que implica ao professor razões e motivos, propósitos e objetivos, nem sempre definidos e explícitos, que o orientam nas opções e decisões que toma na sua prática em sala de aula. Nesse sentido, salienta-se que um professor cuja concepção da Geometria Euclidiana se restringe, principalmente, às figuras planas, aos sólidos geométricos, a ponto, a reta e ao plano, nos faz pensar que o ensino dessa Geometria poderá ficar restrito ao reconhecimento e ao estudo de figuras e sólidos geométricos.

6.3 – Professores que concebem a Geometria Euclidiana como os aspectos descritos nas categorias anteriores e complementam sua concepção

Cinco professores apresentam suas concepções por meio de entes geométricos, postulados, axiomas da Geometria Euclidiana, porém eles complementam sua concepção com outros aspectos. Durante a entrevista, eles fizeram comentários a respeito dos cartões da Geometria Euclidiana que considerou-se pertinente. Seguem alguns excertos das suas falas e das relações com os cartões que auxiliou a incluir esses professores nessa categoria.

> P04 – “na graduação [...] o que eu mais me interessei foi a parte das demonstrações, foi provar porque é isso, provar que é verdadeiro por meio das demonstrações”. Ao ser apresentado aos cartões, P04 fez o seguinte comentário sobre o cartão *Geometria Axiomática*: “axiomática, eu acredito que sejam os axiomas, Euclidiana”. Na dinâmica com os cartões, P04 relacionou todos os cartões sobre a Geometria Euclidiana.

> P09 – “é a do Euclides né? De 300 anos antes de Cristo, como Euclides começou a organizar o pensamento geométrico e foi posto há 2300 anos, ele se complementando nos 13 livros, e a gente trabalhando aqueles conceitos de Geometria Euclidiana plana, mais a plana; que eu acredito que não foi, a gente vai ver, os poliedros de Platão, a Geometria Espacial, mais o que mais a gente vê é a Geometria Plana mesmo. A maneira como ele pegou lá em Alexandria todo o pensamento de várias gerações de matemáticos, ele fazia eu acho que uma história oral, ele escutava todo mundo e escrevia. Eu acho que Euclides fazia historia oral, porque quem pode dizer que ele construiu tudo aquilo, que escreveu tudo”. Na dinâmica com os cartões, P09 relacionou todos os cartões sobre a Geometria Euclidiana.

> P11 – “são os postulados, axiomas, Geometria Plana, Geometria Espacial, construções de ângulos, todas as construções, todos os teoremas. Um livrinho

amarelinho que copiamos no caderno do começo ao fim". Na dinâmica com os cartões, P11 relacionou todos os cartões sobre a Geometria Euclidiana.

P15 – "Geometria Plana, Espacial, postulados, axiomas, figuras geométricas". Ao ser apresentado aos cartões, P15 comentou os seguintes cartões: cartão *Geometria Axiomática*: "axiomática é baseada nos axiomas de Geometria Euclidiana, baseado nos axiomas de Euclides [...] que foi aonde deu problema no quinto postulado. A partir dos problemas do quinto postulado que deu oportunidade de surgir as outras Geometrias, aí no caso da esférica e da hiperbólica". Cartão *sistema lógico dedutivo*: "sistema lógico dedutivo entra aqui também na Geometria Axiomática". Cartão *figuras geométricas*: "figuras geométricas [...] tem a ver com todas as Geometrias". Cartão *reta paralela*: "reta paralela, esse assunto é importante, porque foi esse assunto que eu origem as outras Geometrias". Cartão *Geometria Espacial*: "a Geometria Espacial faz parte da Geometria Euclidiana também". Cartão *reta*: "reta, o que eu posso dizer: reta tem a ver com a Geometria Euclidiana". Cartão *cotidiano*: "cotidiano? A Geometria está no cotidiano da gente. Todo dia, você se depara com formas geométricas; eu acho que o cotidiano entra aí". Cartão *representação do espaço*: "representação do espaço tem tudo a ver com Geometria, tanto na Euclidiana quanto na não Euclidiana. Você tem diferentes formas de representar o espaço". Cartão *triângulo euclidiano*: "esse daqui é um triângulo equilátero da Geometria Euclidiana; soma dos ângulos internos igual a 180, isso tem a ver com a Geometria Euclidiana". Na dinâmica com os cartões, P15 relacionou todos os cartões sobre a Geometria Euclidiana.

P24 – "antes vinha tudo, era tudo, a Geometria Euclidiana pra (sic) mim era tudo. Agora eu penso mais na questão do espaço plano. A Geometria Euclidiana respondia a tudo, antes de eu conhecer um pouquinho mais das demais [...] hoje eu já faço assim mais um, o que mais representa as figuras, o espaço propriamente dito, mesmo quando eu estou trabalhando com Geometria Espacial, eu falo pra (sic) eles dos diferentes espaços, do espaço plano, do espaço curvo, aí eu falo pra (sic) eles que nem todos os espaços são planos". Na dinâmica com os cartões, P24 relacionou todos os cartões sobre a Geometria Euclidiana.

Os cinco professores incluídos nessa categoria, ao responderem o que entendiam por Geometria Euclidiana, não se restringiram à citação das palavras "postulados" ou "axiomas", ou a alguns entes geométricos da Geometria Euclidiana como fizeram os professores das duas categorias anteriores. Observa-se que esses professores conheciam a Geometria Euclidiana Axiomática e tinham noções a respeito dessa Geometria como um sistema lógico dedutivo, fato observado durante a discussão realizada na dinâmica com os cartões. Destaca-se que os cinco professores relacionaram todos os cartões referentes à Geometria Euclidiana.

O professor P04 destacou que, durante a graduação, se interessou pelo fato de que os resultados da Geometria Euclidiana precisam ser demonstrados. Porém, ao comentar o cartão *Geometria Axiomática*, ficou duvidoso ao declarar que "axiomática, eu acredito que sejam os axiomas, Euclidiana". A fala de P04 nos induz a pensar que para ele existe uma "axiomática" somente na Geometria Euclidiana.

A professora P09 destacou a sistematização da Geometria Euclidiana, seu conjunto de 13 livros que foi escrito e organizado por Euclides. P09, mesmo conhecendo a construção da Geometria Euclidiana, seus livros e conteúdos, fez um comentário interessante: "o que mais a gente vê é a Geometria Plana mesmo". P09 também faz referência aos poliedros de Platão, mas tudo indica que ela está expondo uma realidade que é vivenciada por ela e por outros colegas: o que se ensina nas escolas são, principalmente, os conteúdos de Geometria Euclidiana Plana.

Para a professora P11, a Geometria Euclidiana envolve axiomas, postulados, teoremas, construções geométricas, a Geometria Plana e a Espacial. Ao comentar "um livrinho amarelinho que copiamos no caderno do começo ao fim", ela se refere a um livro de Geometria que foi usado como livro texto durante a disciplina de Geometria Euclidiana cursada na graduação.

Para o professor P15, a Geometria Euclidiana foi construída por meio dos axiomas, postulados, e envolvem as figuras geométricas, a Geometria Plana e a Espacial.

Dos comentários feitos por P15, destaca-se o entendimento que o professor tem a respeito da história da Geometria Euclidiana e das Geometrias não Euclidianas: “a partir dos problemas do quinto postulado que deu oportunidade de surgir as outras Geometrias, aí no caso da esférica e da hiperbólica”. Quando cita o “problema do quinto postulado”, entende-se que P15 está se referindo às tentativas de demonstrações e à negação do postulado das paralelas. O professor P15 foi o único professor que comentou que a Geometria Espacial “faz parte” da Geometria Euclidiana. Também foi o único que comentou o cartão *representação do espaço*. Para P15 “representação do espaço tem tudo a ver com Geometria, tanto na Euclidiana quanto na não Euclidiana. Você tem diferentes formas de representar o espaço”. Por fim, P15 faz um comentário pertinente: “é o que eu costumo dizer, dependendo do porque, de onde você vai usar, a Geometria Euclidiana é excelente, para um universo pequeno; se você for estudar um universo maior você vai ver que ela é insuficiente”.

Tudo indica que, ao estudar as Geometrias não Euclidianas, a professora P24 mudou suas concepções a respeito dessa Geometria, já que ela comenta que “a Geometria Euclidiana pra (sic) mim era tudo [...] respondia a tudo, antes de eu conhecer um pouquinho mais das demais”. Ela comentou que, após estudar as Geometrias não Euclidianas, toma cuidado ao ensinar conceitos da Geometria Euclidiana. Um exemplo por ela destacado foi o de que, ao ensinar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, P24 sempre destaca que este resultado é válido para a Geometria Euclidiana.

Em geral, observamos que os vinte e sete professores entrevistados expressaram suas concepções por meio dos conhecimentos, opiniões, preferências e ideias a respeito da Geometria Euclidiana. Percebe-se, assim, que, de um modo geral, os professores ainda desconhem a Geometria Euclidiana, em aspectos teóricos e metodológicos.

Quando nos propusemos a investigar as concepções dos professores, pretendíamos ter acesso ao pensamento do professor, ou como diz Guimarães (2003, p. 4) à sua “vida mental [...] em conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento”.

Embora os professores tenham comentado que estudaram e, até mesmo, ensinam a Geometria Euclidiana, muitos deles não se sentiram seguros quando foram convidados a refletir sobre o assunto. Destaca-se que nem sempre os professores consideram natural às perguntas a respeito da natureza do conhecimento geométrico. No entanto, salienta-se que a ausência de reflexões deste tipo faz com que o professor assuma as noções mais comuns e simplistas, e, até mesmo, equivocadas acerca do conhecimento.

Durante a investigação, percebeu-se que alguns professores apresentam concepções que se distanciam do conhecimento geométrico – sobretudo os professores P05, P06, P08, P17, P18 e P27. Observou-se que estes professores não expressaram com clareza suas concepções e, em geral, suas falas foram confusas. Ficou a impressão que alguns professores não estavam convictos das suas respostas – principalmente, P01, P03, P06, P08, P10, P13, P18, P23 e P27.

Segundo Guimarães (2003), as concepções são estabelecidas com diferentes graus de convicção. Observou-se que o fato dos professores terem refletido ou não sobre questões relacionadas com a Geometria Euclidiana, fez com que eles ficassem inseguros para responder os questionamentos. Entretanto, como destacam Thompson (1992) e Guimarães (1988) as concepções, sendo consistentes ou não, inconscientes ou não, elas desempenham um papel significativo nas escolhas do professor.

Diante do que observou-se até o momento, fica um questionamento: será que os professores estão em condições de ensinar os conteúdos de Geometria Euclidiana que as Diretrizes Curriculares de Matemática propõem?

No quadro a seguir, tem-se as Geometrias estudadas durante e após a graduação e a apresentação da categoria na qual o professor se encontra.

Professor	Geometrias estudadas na graduação	Geometrias estudadas após a graduação	Categoria
P01	Desenho Geométrico	Estudou Geometria Euclidiana no PDE	6.1
P02	Geometria Euclidiana e Projetiva	Estudou Geometria Euclidiana nas pós-graduações	6.1
P03	Desenho Geométrico e Geometria Analítica	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P04	Geometria Euclidiana,	Não fez cursos sobre	6.3

	Geometria Axiomática e Analítica	Geometria Euclidiana	
P05	Geometria Euclidiana e Analítica	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.2
P06	Geometria Euclidiana	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.1
P07	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.2
P08	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P09	Geometria Euclidiana, Geometria Axiomática, Desenho Geométrico, Geometria Descritiva e Analítica	Estudou Geometria Euclidiana nas pós-graduações	6.3
P10	Geometria Descritiva	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.1
P11	Geometria Euclidiana, Geometria Axiomática, Desenho Geométrico, Geometria Descritiva e Analítica	Estudou Geometria Euclidiana nas pós-graduações	6.3
P12	Geometria Descritiva	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.2
P13	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P14	Desenho Geométrico e Geometria Analítica	Estudou Geometria Euclidiana nas pós-graduações	6.1
P15	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana nas pós-graduações	6.3
P16	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P17	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana no PDE	6.1

P18	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P19	Geometria Euclidiana e Analítica	Estudou Geometria Euclidiana no PDE	6.2
P20	Desenho Geométrico, Geometria Descritiva e Analítica	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.1
P21	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P22	Desenho Geométrico, Geometria Descritiva e Analítica	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P23	Geometria Euclidiana e Analítica	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P24	Desenho Geométrico, Geometria Descritiva	Estudou Geometria Euclidiana nas pós-graduações	6.3
P25	Geometria Euclidiana, Geometria Axiomática	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.1
P26	Geometria Euclidiana	Estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	6.1
P27	Geometria Euclidiana, Desenho Geométrico	Não fez cursos sobre Geometria Euclidiana	6.1

Quadro 6: Quadro comparativo entre a Geometria estudada e a respectiva categoria

Como já foi descrito anteriormente, todos os professores relataram que estudaram Geometria Euclidiana durante da graduação, porém, nem todos tiveram uma disciplina de Geometria Euclidiana e foram poucos os que estudaram ou viram algo sobre Geometria Axiomática. No entanto, esses professores ensinam essa Geometria e, possivelmente, usam as suas concepções para ensiná-la.

Os cinco professores que se encontram na categoria 6.3 possuem uma concepção que se aproxima do conhecimento geometrico. Desses professores, somente a professora

P24 não estudou Geometria Euclidiana na graduação, mas na especialização; após a graduação somente o professor P04[25] não estudou Geometria Euclidiana.

Dos professores que se encontram na categoria 6.2, somente o professor P12 não teve uma disciplina de Geometria Euclidiana durante a graduação e os professores P05 e P12 não estudaram essa Geometria depois da graduação.

Entre os professores da categoria 6.1, P01, P03, P10, P14, P20 e P22 não tiveram uma disciplina de Geometria Euclidiana durante a graduação. Destes, P10 e P20 também não estudaram Geometria Euclidiana após a graduação. Vale destacar que os professores P02, P08, P13, P16, P17, P18, P21, P23 e P26 estudaram Geometria Euclidiana durante e depois da graduação, entretanto esses professores têm uma concepção que se afasta do conhecimento geométrico.

Diante deste contexto, surgem algumas perguntas: estudar Geometria Euclidiana, seja na graduação ou após, é condição suficente para construir uma concepção a respeito do assunto? Somente as leituras e estudos realizados durante os anos que eles estão atuando em sala de aula são suficientes para a construção de uma concepção que se aproxima do conhecimento geométrico?

Evidentemente, o objetivo do trabalho não é trazer respostas definitivas para essas questões, mas tudo indica que o fator determinante para a construção de uma concepção é a forma como os conteúdos são trabalhados, as discussões a respeito da natureza do conhecimento geométrico, e o interesse que os professores têm sobre a Geometria. Mas, a análise do quadro comparativo deixa claro a importância de trabalhar na formação de um professor de Matemática, o conteúdo Geometrias.

[25]O professor P04 se formou em 2007.

7 Análise da Categoria 3: Concepções sobre as Geometrias não Euclidianas

A história das Geometrias não Euclidianas está atrelada ao quinto postulado de Euclides, o postulado das paralelas. Alguns matemáticos tentaram demonstrar que o quinto postulado era um teorema dedutível dos quatros primeiros postulados, além das definições e dos axiomas. Outros, ao longo dos séculos, tentaram eliminar o quinto postulado do sistema euclidiano. Houve também aqueles que tentaram mostrar que o quinto postulado poderia ser substituído por algum princípio mais simples e mais evidente (BARKER, 1969 p. 47-8).

Foi, no entanto, a negação do quinto postulado de Euclides que desencadeou a construção de novas Geometrias. As Geometrias não Euclidianas, por exemplo, são assim chamadas porque não estão de acordo com, pelos menos, um dos cinco postulados de Euclides.

Pela sua história, quando se faz referencias às Geometrias não Euclidianas, em geral, refere-se à Geometria Hiperbólica e à Geometria da Superfície da Esfera – cujos postulados negam ou abandonam alguns dos postulados de Euclides – mas, após a observação de que existem outras Geometrias que não satisfazem um ou mais postulados dos Elementos de Euclides, adotamos, neste trabalho, o critério de serem chamadas de não Euclidianas.

Apesar do nome “Geometria Elíptica” constar nas DCE do Estado do Paraná, espera-se que seja trabalhada, na Educação Básica, a Geometria da Superfície da Esfera. A Geometria Elíptica, particularmente, provém da Geometria da Superfície Esférica, mas é um pouco mais elaborada, conforme foi observado na nota de rodapé da página 14. Foi nesse sentido que essa pesquisa foi elaborada, ou seja, das concepções dos professores em relação a Geometria da Superfície da Esfera, e não da Geometria Elíptica.

Lobachevsky iniciou a construção da Geometria Hiperbólica. Este matemático rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais, bem como os axiomas da Geometria Euclidiana. Os matemáticos Felix Klein (1849-1925) e Henri Poincaré (1864-1912) criaram modelos para a Geometria Hiperbólica.

Assim, os princípios da Geometria Hiperbólica são diferentes dos princípios euclidianos. Na Geometria Hiperbólica, é possível obter, por um ponto fora da reta, mais de uma reta paralela à reta dada. Uma das consequências desse resultado – que, aliás alcançou maior repercussão – é que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos.

Após a construção da Geometria Hiperbólica, Riemann (1826-1866) construiu a Geometria da Superfície da Esfera. Nessa Geometria, o primeiro postulado (dois pontos determina uma reta), o segundo (um segmento de reta pode ser prolongado) e o quinto postulados (dada uma reta e um ponto fora dela é possível traçar por este ponto uma única reta paralela a reta dada) de Euclides não são válidos. Na Geometria da Superfície da Esfera, não temos retas paralelas, pois dada uma reta qualquer e ponto fora dessa reta, sempre existirá uma reta que passa por esse ponto e intercepta a reta dada. Um resultado importante da Geometria da Superfície da Esfera refere-se à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, que sempre será maior do que 180º.

Conforme descrito na seção 3, a Geometria Projetiva surgiu antes da Geometria Hiperbólica, embora tenha sido considerada uma Geometria não Euclidiana anos mais tarde. O desenvolvimento da Geometria Projetiva, por outro lado, está atrelado ao desenvolvimento da perspectiva. Essa Geometria é o estudo das propriedades descritivas das figuras geométricas e, em termos axiomáticos, uma das diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva está na inexistência de retas paralelas. Nesta Geometria, as retas se encontram na linha do horizonte, ou linha no infinito, que contém os pontos no infinito ou pontos de fuga. Essa Geometria também não se preocupa com as propriedades métricas de seus objetos e sua axiomática é bem diferente daquela adotada pela Geometria Euclidiana.

A história da Topologia, por sua vez, está relacionada ao problema das sete pontes de Königsberg. O estudo da Topologia também está associado ao conceito de superfície. Assim, são conceitos topológicos as noções de vizinhança, fora, dentro, interior, exterior, aberto, fechado, longe, perto, separado, unido, contínuo, descontínuo, alto, baixo.

A Geometria Fractal, por outro lado, está associada à autosimilaridade, à dimensão e à complexidade infinita dos objetos. Fenômenos e figuras encontradas na natureza são explicadas de forma mais satisfatórios pela Geometria Fractal do que pela Geometria Euclidiana. Na Topologia e na Geometria Fractal, também são abandonados os postulados de Euclides.

Os principais conceitos de Geometrias não Euclidianas, apresentados pelas DCE são os elementos básicos que diferenciam essas Geometrias. Para a Projetiva, as DCE propõem o estudo de ponto de fuga e linha do horizonte; para a Topologia, o estudo de conceitos como interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados; para a Geometria Fractal, o floco de neve e a curva de Koch, triângulo e tapete de Sierpinski.

Quanto aos conceitos elementares da Geometria Hiperbólica, as DCE recomendam o estudo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos; para a Geometria da Superfície da Esfera, propõem-se o estudo de curva na superfície esférica e a discussão do conceito de geodésica, círculos máximos, ângulo esférico, triângulo esférico, bem como o da soma das medidas de seus ângulos internos.

Diante das leituras sobre as Geometrias não Euclidianas e das recomendações expostas pelas DCE, nos propomos a investigar as concepções dos professores a respeito desses conteúdos.

Para a construção dessas categorias, utilizou-se os dados obtidos com a entrevista semiestruturada, as relações e os comentários que os professores fizeram durante a atividade envolvendo os cartões. Na sequência, seguem excertos das falas, de cada um dos participantes da pesquisa, que nos levaram a incluir cada um deles nas respectivas categorias. Também são apresentados alguns comentários e as relações que eles estabeleceram por meio dos cartões, cuja função foi a de corroborar com a categorização.

7.1 Concepções sobre as Geometrias não Euclidianas

7.1.1 – Professores que não apresentam uma concepção sobre as Geometrias não Euclidianas.

Os seis professores a seguir não apresentam uma concepção sobre as Geometrias não Euclidianas. Essa conclusão foi obtida por meio dos recortes de suas falas, apresentados na sequência.

> P10 – “essas que são [...] o que exatamente? Eu não to (sic) lembrada [...] os fractais eu até vi um vídeo [...] mas ele não entra no nosso currículo, a gente não trabalha [...] se você pegar a nossa Diretriz ele nem cita [...] eu não sei se você chegou ir em algum lugar que eles estão trabalhando no Paraná?”

> P12 – nunca estudou Geometrias não Euclidianas. P12 não relacionou os cartões sobre Geometrias não Euclidianas. Após a pesquisadora comentar os cartões, P12 fez o seguinte comentário: “essa questão da esfera, depois que você falou lógico tem sentido, mas eu pra (sic) mim [...] a gente fica muito na Geometria Euclidiana. Até a gente passa alguma coisa da esfera, arco, alguma coisa a gente trabalha com eles, mas nunca me passou pela cabeça de fazer um triângulo na superfície de uma esfera pra (sic) eles vêem o que acontece. Mas, agora eu vou fazer e vou procurar estudar”.

> P13 – “parece que é uma coisa redonda [...] essa Geometria parece que só vai ter coisas redondas nela. [...] essa Geometria aqui da não Euclidiana [...] quando eu penso nela parece que tudo é redondo [...] não sei por que, mas na minha cabeça passa isso”. P13 não relacionou os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

P14 – “a questão das retas transversais [...] a Geometria não Euclidiana é mais assim por causa, pro (sic) desenvolvimento da tecnologia, aí desenvolveu um outro lado que pra (sic) Geometria Euclidiana é aquilo que está separado e tudo que está aparecendo depois é chamado não Euclidiana. Então, tudo que é de Euclides foi numa época passada e tudo que é mais recente é não Euclidiana que daí não dá pra (sic) aplicar aqueles conceitos de Euclides [...] está ligado mais a algo sobre, como que eu poderia dizer, a questão dos Fractais, das funções polinomiais, é uma tipo de Geometria não Euclidiana”. P14 não relacionou os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

P18 – nunca estudou Geometrias não Euclidianas e, por isso, não relacionou os cartões sobre elas. Ao ser apresentada aos cartões, P18 fez o seguinte comentário: “eu admiro muito os fractais [...] eu passo para os meus alunos a forma de uma garrafa. Que logo que veio pra (sic) nós a TV pendrive, o pouco conhecimento que eu tive, mas eu achei interessante de um curso que nós fizemos sobre fractais e depois eu fui buscando e montei uma aula e levei pra (sic) eles uma garrafa, a forma de uma garrafa e até ela começa a abrir e os meninos riam por causa do funil. [...] É lindo né. E aí você vai descobrindo a geometria dentro; muito bacana, eu trabalhei com os meus alunos. Eu gosto muito, os fractais eu gosto bastante”.

P23 – estudou Geometrias não Euclidianas e, mesmo com a insistência da pesquisadora para que citasse, pelo menos, um exemplo das Geometrias não Euclidianas, ela não o fez. Na dinâmica com os cartões, P23 relacionou o cartão *Geometria Fractal* com o cartão *triângulo de Sierpinski*.

Dos vinte e sete professores entrevistados, somente a professora P10 não sabia que as Geometrias não Euclidianas foram incluídas nas DCE do Estado do Paraná. Os professores P12 e P18 nunca estudaram tais Geometrias. A professora P23 relacionou os cartões *Geometria Fractal* e *triângulo de Sierpinski*, mas não soube explicar ou comentar algo sobre a Geometria Fractal.

Quando iniciamos a pesquisa, acreditava-se que seria praticamente impossível encontrar um professor de Matemática, atuante nas escolas públicas do Estado do Paraná, que não tivesse conhecimento da inclusão desse conteúdo nas Diretrizes. Por ser a DCE o documento oficial que norteia e recomenda os conteúdos e metodologias que deveriam ser aplicadas nas salas de aula das escolas públicas, entendia-se que todos os professores saberiam dessa alteração. O caso dessa professora nos faz refletir sobre a dificuldade da divulgação, da implementação e da utilização de uma estrutura curricular.

Como P10 foi uma das professoras que atendeu inicialmente ao convite de responder ao questionário, se dispôs também, num segundo momento, a participar da entrevista, vislumbra-se que haja uma grande possibilidade de uma porcentagem maior (aqui foi uma em vinte e sete), entre todos os professores da rede, que desconhecem o fato das Geometrias não Euclidianas terem sido incluídas nas DCE do Estado do Paraná. E como os professores P12 e P18 acredita-se que mais professores não estudaram as Geometrias não Euclidianas.

Após a explicação da pesquisadora, a professora P12 comentou que ela nunca havia pensado em desenhar um triângulo na superfície de uma esfera e analisar o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. Quando comenta que “a gente passa alguma coisa da esfera, arco, alguma coisa a gente trabalha com eles”, é grande a possibilidade desse estudo se referir a esfera como um objeto da Geometria Euclidiana, que está imersa no espaço euclidiano tridimensional, e não pensada como uma Geometria intrínseca, ou seja, a superfície da esfera como o espaço bidimensional a ser estudado.

A professora P13 não soube explicar a sua concepção sobre as Geometrias não Euclidianas. Para ela, essas Geometrias estão relacionadas com “coisas redondas”. Acredita-se que P13 esteja se referindo a Geometria da Superfície da Esfera, porém como não comentou a respeito, nada se pode afirmar.

Para o professor P14, as Geometrias não Euclidianas estão relacionadas às funções polinomiais, e tudo que foi construído depois de Euclides é Geometria não Euclidiana. O professor P14 faz uma confusão quando relaciona funções polinomiais com Geometrias não Euclidianas. Quanto à questão cronológica, as Geometrias não

Euclidianas, é claro, não são consideradas não Euclidianas porque foram construídas depois de Euclides.

Os cartões nos auxiliaram perceber que a professora P18 não tinha qualquer conhecimento a respeito das Geometrias não Euclidianas, pois só depois da apresentação ela se manifestou e comentou que admira muito os Fractais. Na frase “eu admiro muito os fractais [...] eu passo para os meus alunos a forma de uma garrafa”, entende-se que a professora P18 estava se referindo à garrafa Klein – objeto de estudo feito, em geral, na Topologia, e que não está relacionado com os Fractais. Esse fato gera uma preocupação, pois, talvez, seja preferível a omissão, a trabalhar conceitos de forma equivocada.

A professora P23, por sua vez, não se sentiu à vontade para falar a respeito das Geometrias não Euclidianas e expressar suas ideias e opiniões sobre o assunto. A professora P23 estudou as Geometrias não Euclidianas[26] e, ainda assim, afirmou que não tinha condições de responder a pergunta. Este fato nos leva a pensar que a professora P23 ainda não integrou os conhecimentos não euclidianos às suas concepções.

7.1.2 – Professores que apresentam algumas ideias e opiniões sobre as Geometrias não Euclidianas

Treze professores apresentaram suas concepções por meio de algumas ideias e opiniões a respeito das Geometrias não Euclidianas.

> P01 – “a não Euclidiana a gente tem as esferas, Fractal e por aí [...] eu sei que tem algumas curvas”. Ao ser apresentada aos cartões, P01 fez o seguinte comentário em relação ao cartão *ponto de fuga*: “a gente comentou sobre isso daqui né? As retas que nunca se encontram, mas se encontram [...] parece que elas se encontram [...] igual a linha do trem”. Ainda comenta: “a gente trabalha hoje com a

[26] A professora P23 estudou as Geometrias não Euclidianas quando atuou como tutora de um curso de Matemática à distância.

Euclidiana. Essa aqui a gente tem noção assim, passo mais ou menos. Mas a gente trabalha com a Euclidiana mesmo, a gente não trabalha com as não Euclidianas. A gente sempre coloca na cabeça da gente que reta paralela tem a ver com Euclides; pra (sic) molecada eu não vou falar um negócio disso aí não. Eu falo o que é reta, olha pro (sic) teto, olha pro (sic) chão". Na dinâmica com os cartões P01 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*/*triângulo de Sierpinski*.

P03 – "eu leio sobre Fractais alguma coisa agora, porque digamos que isso daí é novo [...] eu acho interessante, mas eu também tenho uma certa resistência com relação a Geometria Fractal, confesso, não vou dizer aqui que eu adoro, porque eu desconheço, sabe". Na dinâmica com os cartões, P02 relacionou os cartões *Geometria Fractal/couve-flor/triângulo de Sierpinski/floco de neve de Koch.*

P05 – "na Geometria não Euclidiana, a gente viu alguma coisa [...] na área de integrais [...] na não Euclidiana seria um espaço diferente do plano, que seria o que? Formato esférico, hiperbólico". A professora P05 comentou os seguintes cartões: *Geometria da visão*: "essa Geometria da visão também né, quando a gente percebe assim, nós temos um aluno lá na escola que dá impressão que é inato nele, ele desenha muito bem; essa questão de ponto de fuga que a gente vê nas construções dele, na parte quando ele está desenhando é uma coisa impressionante e ele é um aluno de inclusão, da à impressão de que é uma coisa que é dom, porque ele não tem todos esses conceitos de matemática e ele consegue ver isso no desenho quando ele vai projetar. Ele faz rostos, ele faz toda a construção com perspectiva e é impressionante como ele consegue ter essa visão". Cartão *Geometria Fractal*: "os fractais que também é uma coisa muito bonita. Eu trabalhei com eles os quebra cabeças, só que é uma coisa assim difícil, você tem que pesquisar muito. Hoje, o professor que fica só no livro didático, achando que o que ele sai da graduação é suficiente, não é. E isso eu penso que é muito difícil pro (sic) professor, o professor hoje ele está correndo muito, e de todos os problemas sociais que a escola enfrenta ele vem sem muita motivação. Porque aí ele pesquisa, ele prepara, ele chega lá e a realidade que ele encontra pra (sic) colocar tudo que ele fez, não dá efeito, aí ele volta frustrado". Na dinâmica com os cartões P05 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*/*triângulo de Sierpinski*.

P06 – a professora cita um exemplo de desenhar um triângulo numa bexiga e "ali você tentar discutir as propriedades, de fazer o comparativo entre aquele triângulo desenhado num balão e aquele no plano". Na dinâmica com os cartões, P06 fez o seguinte comentário, a respeito do cartão G*eometria Hiperbólica*: "hiperbólica é a da hipérbole né?". P06 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*/*triângulo de Sierpinski*; também relacionou *representação do espaço* e *faixa de Möbius*.

P08 – "eu poderia até citar que a hipérbole, a hiperbólica". Na dinâmica com os cartões, P08 comentou o cartão *Topologia*: "eu acho que isso daqui tem a ver com topografia, que eu não tive, mas eu lembro que tem a ver com alguma coisa, não lembro direito". P08 relacionou os cartões *Geometria Fractal* e o *floco de neve de Koch*.

P16 – "eu tentaria dar exemplos do que Euclides fez, o que ele usou nos seus Elementos e o que veio depois com essa Geometria não Euclidiana era fugir, a gente conseguir observar algo, enxergar algo que não está visível naquele momento". Após a apresentação e discussão dos cartões, P16 fez o seguinte comentário: "é difícil para um professor caracterizar que um triângulo pode ser maior ou menor do que 180º. Por que daí ele fala: nossa, mas eu sempre vi assim [...] existe, claro que existe, mas existe outro tipo também. Dificilmente você encontra um professor que trabalha isso daqui. Isso que falta agora pra (sic) gente, estar mais atualizado, lembrar a parte histórica, fazer essa linha de tempo, que daí o aluno se esperta um pouco mais, senão a matemática fica chata demais". Na dinâmica com os cartões, P16 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-*

flor/*triângulo de Sierpinski*; também relacionou os cartões *Geometria Projetiva*/*projeções*/*cotidiano*.

P17 – "a gente mostra naquela prática dos Fractais, das dobras lá, mas que eu não vejo sentido pra eles; a gente não vê o interesse deles naquilo lá. Você mostra figuras, esse tipo de coisa, pra (sic) dizer que você nunca falou nada de Geometria Fractal". Na dinâmica com os cartões, P17 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*floco de neve de Koch*/*triângulo de Sierpinski*.

P20 – "eu poderia falar assim das paralelas, dos meridianos. [...] e também que ela ta (sic) muito envolvida com o computador, e iria praticar com o computador; assim a mão seria praticamente, seria difícil aqueles gráficos bem complicados". Durante a dinâmica com os cartões, P20 fez os seguintes comentários a respeito do cartão Topologia: "o que eu entendo de Topologia, mais ou menos, é uma Geometria que foi, tipo assim, fotografada lá de cima, uma visão assim maior". E, após a explicação da pesquisadora, P20 relatou: "eu tinha conhecimento que a Geometria não Euclidiana era só a Hiperbólica. Não imagina que Fractais, Projetiva e Topologia fosse Geometria não Euclidiana. Isso aqui (Fractais) eu só via ligação com artes. Inclusive assim, só pra (sic) boniteza; só coisa que já vem pronta da natureza ou alguém que construía pra (sic) fazer um quadro. Geometria Projetiva pra (sic) mim tinha a ver com desenho geométrico, com a parte de desenho". Na dinâmica com os cartões, P20 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*floco de neve de Koch*/*couve-flor*/*cotidiano*/*Geometria da visão*/*ponto de fuga*.

P21 – "foi uma Geometria que ela veio primeiro de uma necessidade de novos estudos, houveram momentos na história em que a Geometria Euclidiana já não satisfazia mais [...] em, por exemplo, cálculo de curvas, até na teoria da relatividade, coisas assim. Então houve a necessidade de uma nova Geometria que estudasse essas coisas, curvas, hipérboles". Após a explicação da pesquisadora, P21 fez o seguinte comentário: “é preciso ficar tudo bem definido da Geometria Euclidiana pra (sic) eu saber o que não é dela. Isso que você fala faz sentido: por que a gente não trabalha; tem a questão do professor não estar dominando? Tem; e tem a questão assim, é tanto conteúdo; é vasto conteúdo do ensino médio, e a gente conta assim com quatro horas aulas no primeiro ano numa briga danada, porque queriam tirar, queriam deixar só três e tem escola que tem duas”. Na dinâmica com os cartões, P21 relacionou os cartões *Geometria Fractal* e *couve-flor*.

P22 – “eu daria o exemplo desse do balão, que me marcou bastante [...] poderia dar esse exemplo do balão”. Na dinâmica com os cartões P22, relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*/*triângulo de Sierpinski*/*floco de neve de Koch*; também relacionou os cartões *triângulo esférico*/*soma dos ângulos internos de um triângulo maior do que 180*º; e os cartões *Geometria Espacial*/*Geometria Projetiva*/*projeções*/*representação do espaço*.

P25 – afirma que poderia explicar brevemente o que é uma Geometria não Euclidiana, mas não o faz. Na dinâmica com os cartões, P25 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*floco de neve de Koch*/*triângulo de Sierpinski*/*couve-flor*; também relacionou os cartões *Geometria da Superfície da Esfera*/*triângulo esférico*; e os cartões *Geometria da visão*/*cotidiano*/*ponto de fuga*.

P26 – “a única coisa que eu sei é a parte que não é na Geometria Plana, a Geometria Espacial Euclidiana; só isso que eu sei, um pouco de Fractais e só”. Na dinâmica com os cartões, P26 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*triângulo de Sierpinski*/*couve-flor*/*floco de neve de Koch*; também relacionou os cartões *Geometria Projetiva*/*ponto de fuga*/*projeções*/*representação do espaço*/*cotidiano*.

> P27 – “o pouco que eu tenho conhecimento da não Euclidiana é que aqueles conceitos da Geometria Euclidiana caem diante da não Euclidiana. Então, aqueles conceitos do paralelo, o conceito do reto, que aquilo fica muito fácil também de você explicar dentro do nosso universo, que não é tão fácil você ter uma linha reta; que se você se alongar pro (sic) infinito vai ser muito difícil de você conseguir linhas paralelas”. Na dinâmica com os cartões P27 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*floco de neve de Koch*/*couve-flor*; também relacionou os cartões *Geometria Projetiva*/*ponto de fuga*/*projeções*.

O objetivo dos cartões, que foram descritos na seção 3, não foi alcançado, em sua totalidade, por quaisquer professores dessa categoria, nem nas relações, tampouco nos comentários. Os cartões mais relacionados e comentados foram os que tratam da Geometria Fractal; ao mesmo tempo em que a associação mais realizada foi do cartão *Geometria Fractal* com o cartão *couve flor*[27].

Dois professores – P01 e P05 – entendem que as Geometrias não Euclidianas estão relacionadas a diferentes planos, esferas e curvas. A concepção desses professores nos faz pensar que eles estejam se referindo à Geometria da Superfície da Esfera. No entanto, como não descreveram algum conceito ou resultado dessa Geometria, nada pode-se afirmar. As professoras P01 e P05 tinham algumas ideias de Geometria Fractal, mas não souberam explicar, mesmo que informalmente, algum conceito ou resultado dessa Geometria.

Após a explicação da pesquisadora, a professora P01 comentou que, para ela, reta paralela está relacionada somente com a Geometria Euclidiana e que ela não comentaria com seus alunos o resultado sobre retas paralelas da Geometria Hiperbólica e da Geometria da Superfície da Esfera. Muito interessante seu comentário: “eu falo o que é reta, olha pro (sic) teto, olha pro (sic) chão”, a pergunta que se faz é a seguinte: o que a professora mostra no teto e no chão como sendo uma reta? Será que a professora sabe que, no máximo, utiliza-se representações de retas e que as retas geométricas só existem no mundo das ideias?

[27] Novamente destaca-se a possível influência do livro público do Estado do Paraná.

Os professores P03, P17, P25 e P26 citaram a Geometria Fractal para descrever o que é uma Geometria não Euclidiana. Eles estão corretos ao afirmar que a Geometria Fractal é uma Geometria não Euclidiana, porém, não souberam explicar por que ela é considerada uma Geometria não Euclidiana e nem mesmo descrever algum conceito ou resultado desta Geometria.

As professoras P06 e P22 citaram o exemplo de uma atividade para descrever o que entendem por Geometrias não Euclidianas: utilizaram o exemplo de desenhar um triângulo em uma bexiga (plano esférico) e compará-lo com um triângulo desenhado em um papel (plano euclidiano). Essa atividade envolve resultados da Geometria Euclidiana e da Geometria da Superfície da Esfera, mas, apesar disso, elas não apresentaram detalhes sobre os conceitos envolvidos na atividade e nem nas Geometrias.

A professora P06, ao se referir ao cartão Geometria Hiperbólica, comenta que esta Geometria está relacionada à Hipérbole, conteúdo geralmente visto em Geometria Analítica. Sempre é bom lembrar que as cônicas são construídas a partir de interseções de um cone com diferentes planos, e que, por exemplo, na Geometria Projetiva, já que ela depende do ponto de visão, as cônicas são equivalentes.

Dois professores – P16 e P21 – comentaram que as Geometrias não Euclidianas são Geometrias que surgiram depois da Geometria Euclidiana.

Para o professor P16, elas servem para “conseguir observar algo, enxergar algo que não está visível naquele momento”. Após a explicação da pesquisadora, o professor P16 comentou que é difícil para um professor “caracterizar que um triângulo pode ser maior ou menor do que 180º [...] dificilmente, você encontra um professor que trabalha isso daqui.”. Na primeira frase, têm-se duas hipóteses: a primeira é que P16 não sabe que, “o que dá” 180º é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, e não que um triângulo é maior que 180º, fato este que não faz sentido algum. A 2ª hipótese, e talvez a mais provável, seja a pouca importância que se dá para se expressar conceitos geométricos utilizando a língua materna, que é uma das mais importantes representações semióticas da Matemática. Já na segunda frase selecionada, a hipótese muito provável é que isso esteja, de fato, acontecendo no ensino das Geometrias – aspecto abordado nesta tese. Além disso, é difícil encontrar professores que trabalham a diferença existente entre a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana, na Hiperbólica e na da Superfície da Esfera.

Para o professor P21, a Geometria Euclidiana não "satisfazia mais" e por isso surgiram as Geometrias não Euclidianas para auxiliar no "cálculo de curvas, até na teoria da relatividade". O professor P21 destacou a importância do conhecimento da Geometria Euclidiana para conseguir aprender e trabalhar com as Geometrias não Euclidianas. Neste sentido, Poincaré (1995) destaca que,

> No espaço, conhecemos triângulos retilíneos dos quais a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos; mas conhecemos igualmente triângulos curvilíneos dos quais a soma dos ângulos é menor que dois ângulos retos. A existência de uns não é mais duvidosa que a dos outros. Dar aos lados dos primeiros o nome de retas é adotar a geometria euclidiana; dar aos lados dos últimos o nome de retas é adotar a geometria não euclidiana. Assim, perguntar que geometria convém adotar é perguntar a que linha convém dar o nome de reta (POINCARÉ, 1995, p. 41).

Em outras palavras, é possível estudar outras Geometrias sem conhecer a Geometria Euclidiana, mas a história nos apresentou primeiramente a esta Geometria e, assim, aparentemente, todas as outras estão baseadas nela, o que não é verdade, pois não existem modelos da Topologia, ou os principais exemplos da Geometria dos Fractais, fundamentados na Geometria Euclidiana.

A professora P08 entende que as Geometrias não Euclidianas estão relacionadas com a hipérbole. Essa professora foi incluída nessa categoria apenas por ter relacionado os cartões *Geometria Fractal* e *floco de neve de Koch*. Tudo indica que a professora P08 faz uma confusão entre a Geometria Hiperbólica e a cônica Hipérbole. Na dinâmica com os cartões, P08 comentou, no cartão Topologia, que esta Geometria está relacionada com a Topografia. O fato dos professores confundiram a Topologia com a Topografia também foi observado nas pesquisas de Santos (2009) e Carli (2012).

Para a professora P20, as Geometrias não Euclidianas estão relacionadas aos paralelos e meridianos e envolvem o computador. No cartão Topologia, a ela comentou que se trata de uma Geometria que foi fotografada "lá de cima". Com essa fala, entende-se que a professora P20, assim como a P8, está confundindo a Topologia com a Topografia. Após a explicação da pesquisadora, a professora comentou que, para ela, Fractais, Geometria Projetiva e Topologia não eram Geometrias não Euclidianas, e que Fractais só tinha aplicação na Arte e era utilizado pela questão da beleza. Essa professora faz um comentário que é digno de nota, pois afirma que “eu tinha conhecimento que a Geometria não Euclidiana era só a Hiperbólica”. Essa observação, por sua vez, nos coloca diante de algumas hipóteses: a professora não leu as DCE, ou então a leu de forma desatenta, já que na DCE são citadas como Geometrias não Euclidianas todas as outras Geometrias tratadas na pesquisa.

Por meio dos dados obtidos, percebe-se que a concepção dos professores é fundamentada, principalmente, em suas opiniões, ideias e preferências a respeito das Geometrias. Nota-se também que os professores conhecem pouco os fundamentos teóricos das Geometrias não Euclidianas.

Quanto às concepções sobre essas Geometrias, percebeu-se que elas foram construídas principalmente em cursos oferecidos pela SEED e pelos Núcleos. No entanto, fato é que os professores ainda não integraram os conteúdos não euclidianos às suas concepções. Esses novos conteúdos podem ter criado uma instabilidade intelectual, que não foram suficientes para produzir uma concepção fundamentada nos conceitos e resultados dessas Geometrias. Tudo indica que são concepções em formação.

7.1.3 – Professores que expõem sua concepção por meio de alguns resultados e/ou conceitos das Geometrias não Euclidianas

Oito professores apresentam suas concepções por meio de resultados e/ou conceitos das Geometrias não Euclidianas.

> P02 – “tem aquela, aquela famosa lá do, do postulado das paralelas né? Então, a Geometria não Euclidiana quebra esse postulado. Então, por causa das retas se

encontrarem no infinito, sob perspectiva, é uma coisa que você pode quebrar. A questão das curvas né, quebra muito do que você estuda na plana”. Na dinâmica com os cartões, P02 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*/*triângulo de Sierpinski*/*floco de neve de Koch*; também relacionou o cartão *Geometria Projetiva* com o cartão *projeções*.

P04 – “se for apenas para diferenciar, eu diria que a Geometria Euclidiana é a Geometria que trabalha com os planos e existem outras Geometrias que estudam outras figuras. Por exemplo, nosso planeta, ele não é um plano, então existe uma outra Geometria que trabalha com ela; na Geometria Euclidiana duas retas não se encontram, na Geometria que nós vemos, se você vê uma estrada as duas retas, que no caso são o meio fio, lá na frente elas vão se encontrar. Essa é uma outra Geometria que difere um pouco. A Geometria Fractal que trabalha mais com a realidade, com os formatos das montanhas que não são feitas de figuras perfeitas”. Durante a dinâmica com os cartões, P04 comentou os as seguintes cartões: Cartão *soma dos ângulos internos de um triângulo maior que 180*º: “eu confundo as duas Geometrias, a Hiperbólica e a Esférica, qual será qual?” Cartão *Geometria da visão*: “a Geometria da visão é o que eu vejo, é a Geometria Projetiva”. P04 relacionou os cartões *Geometria Hiperbólica*/*triângulo hiperbólico*/*soma dos ângulos internos de um triângulo menor do que 180*º/*hiperboloide de uma folha*; também relacionou os cartões *Geometria da Superfície da Esfera*/*triângulo esférico*/*soma dos ângulos internos de um triângulo maior do que 180*º/*retas esféricas*/*reta hiperbólica*/*retas hiperbólicas*; os cartões *Geometria Projetiva*/*projeções*/*ponto de fuga*/*Geometria da visão*; e os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*/*floco de neve de Koch*/*triângulo de Sierpinski*/*representação do espaço*.

P07 – “eu não tava (sic) aceitando aquela história da soma dos ângulos internos do triângulo não é mais 180º na não Euclidiana. Aquilo lá pra mim me aborreceu muito, por isso que no PDE eu fui pra esse lado [...] eu saí muito intrigada daquele curso”. Durante a dinâmica com os cartões P07 fez os seguintes comentários:

Cartão *reta paralela*: “reta paralela tem a ver com qual Geometria? Pois é né, com a euclidiana, só daí essas daqui não se encontram no infinito [...] daí eu vou fazer isso daqui (relaciona o cartão *reta paralela* com o cartão *representação de retas paralelas*). Porque essas daqui não se encontram no infinito (cartão *ponto de fuga*), então são retas paralelas também”. P07 relacionou os cartões *Geometria Fractal*/*couve-flor*; também relacionou os cartões *soma dos ângulos internos de um triângulo maior do que 180º* e *triângulo esférico*; os cartões *soma dos ângulos internos de um triângulo menor do que 180º* e *triângulo hiperbólico*; e os cartões *Geometria Projetiva* e *projeções*.

P09 – “se você for pensar no mundo, não é plano, eu começaria falando sobre isso. Falaria das paralelas, da negação do quinto postulado, dos diferentes planos, a Geometria de Superfície da Esfera; a questão do triângulo, a soma dos ângulos internos ser maior”. Na dinâmica com os cartões P09, relacionou todos os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

P11 – “eu sempre parto do postulado das paralelas, que historicamente tinham os postulados e que o povo começou a desconfiar daquele tal do postulado e que aí, a partir disso, se desenvolveu outros tipos de Geometria, no qual as paralelas podem ter um ponto em comum lá no infinito. E também a questão do Fractal, a questão das dimensões: dimensão finita, dimensão inteira, dimensão decimal, por exemplo.”. Na dinâmica com os cartões, P11 relacionou todos os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

P15 – “é um pouco difícil dar uma resposta assim rápida, mas eu posso dizer pra (sic) eles que é uma Geometria que não segue a de Euclides, porque ela pertence a espaços curvos. O Euclides imaginava que a Terra fosse achatada, era a visão daquela época. Eles não tinham a ideia da curvatura da Terra. Então, tudo que se via na superfície da Terra era imaginado como plano. E aí, com o desenvolvimento das Ciências, provou-se que a Terra era curva, lei da gravidade, as leis de Newton, algumas delas caíram com relação às de Einstein, e criou-se ideias de novas Geometrias. E tem o quinto postulado, que foi aonde deu a ruptura, onde surgiu a oportunidade de se criar novas Geometrias. Eles não conseguiram provar o quinto postulado com base nos outros postulados. Aquela coisa que por um ponto fora de uma reta só tem uma reta paralela isso cai por terra na Geometria, por exemplo, da superfície da Esfera. Que aí vai ter uma infinidade. Aí muda muita coisa". Durante a dinâmica com os cartões, P15 comentou os seguintes cartões: Cartão *Geometria Projetiva*: "eu não sei muito sobre geometria projetiva [...] ah, eu acho que sei sim; ponto de fuga, profundidade". Cartão *Geometria Fractal*: "o que eu posso dizer da Geometria Fractal: é uma Geometria que foge da Euclidiana. Porque algumas métricas nela não são as mesmas. Como que eu posso dizer: você pode ter um polígono com infinitos lados e comprimento finito. E isso não acontece na outra. A questão da dimensão é diferente". Cartão *retas hiperbólicas*: "isso daqui seria um exemplo de porque que caiu por terra a história das retas paralelas [...] aqui mostra que você pode ter [...] a ideia de geodésica envolvida, na verdade a reta não é reta, é uma geodésica, equivalente à ideia de reta no plano". Cartão *hiperboloide de uma folha*: "talvez isso daqui seja um exemplo de superfície hiperbólica". Cartão *triângulo hiperbólico*: "isso daqui é um triângulo hiperbólico [...] e a soma dos ângulos internos neste caso é menor do que 180". Cartão *conceitos topológicos*: "longe/perto, aberto/fechado são conceitos que dependendo da Geometria muda. Por exemplo, quando você trabalha as ideias da Topologia [...] na faixa não tem dentro e fora [...] a ideia de dentro e fora não faz sentido". Cartão *triângulo esférico*: "isso daqui é um triângulo esférico [...] dá a impressão que esse daqui é o triângulo máximo, cuja soma dos ângulos [...] esse é o 90º, cuja soma dá 270". Cartão *ponto de fuga*: "isso daqui tem é de Projetiva, é uma ideia de fuga, de ponto de fuga. É isso aqui ó, aqui representado por um desenho e aqui uma foto real [...] é o que eu costumo dizer, dependendo do porque, de onde você vai usar, a Geometria Euclidiana é excelente, para um universo pequeno; se você for estudar um universo maior você vai ver que ela é insuficiente. P15 relacionou todos os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

> P19 – "eu começo mostrando que ela existe [...] falando da soma dos ângulos internos do triângulo [...] eu aproveito e faço os três planos para eles verem (ela se refere ao plano euclidiano, a superfície esférica e ao hiperbólico)". Na dinâmica com os cartões P19 relacionou todos os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

> P24 – "eu penso como, às vezes, eu sou ferrenha numa ideia e não abro a cabeça deles, e a mesma coisa com a Geometria: a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, hoje quando eu vou falar isso, eu já falo assim: na Geometria Euclidiana [...] Poderia falar da soma dos ângulos internos do triângulo". Na dinâmica com os cartões, P24 relacionou todos os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas.

Quanto aos objetivos dos cartões, descritos na seção 3, destaca-se que eles foram atingidos parcialmente, somente pelos professores P02 e P04; os demais professores relacionaram e comentaram todos os cartões sobre as Geometrias não Euclidianas. constatou-se que os oito professores desta categoria estudaram e conhecem conceitos e resultados de, pelo menos, uma das Geometrias não Euclidianas.

Para o professor P02, as Geometrias não Euclidianas estão relacionadas com curvas, com "a quebra do quinto postulado" e, por isso, as "retas se encontrariam no infinito", sob perspectiva. Ao mencionar a "quebra do quinto postulado", P02 está se referindo à negação do postulado das paralelas, que acontece na Geometria Hiperbólica e na Geometria da Superfície da Esfera.

O professor P04 entende que as Geometrias não Euclidianas estão pautadas em planos diferentes do euclidiano – cita como exemplo o planeta – também comenta que o postulado das retas paralelas muda nas Geometrias não Euclidianas e que, sob perspectiva, duas retas se encontram no infinito (este resultado diz respeito a Geometria Projetiva). Quanto a frase "na Geometria Euclidiana, duas retas não se encontram" cabe ressaltar que, provavelmente, o que o professor quis dizer aqui é que, nessa Geometria, existem retas paralelas, mas o cuidado com a linguagem nem sempre é observado. Lembra-se que alguns professores que não se sentem à vontade diante de um gravador de voz. Em relação ao comentário: “a Geometria Fractal que trabalha mais com a realidade, com os formatos das montanhas que não são feitas de figuras perfeitas”, percebe-se que o professor P04 entende que com a Geometria Fractal, é possível analisar e dar respostas mais aceitáveis para as questões da natureza do que com a Geometria Euclidiana.

As professoras P07, P19 e P24 usaram o resultado sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo para expor suas concepções a respeito das Geometrias não Euclidianas.

P07 comentou que estudou Geometrias não Euclidianas no PDE e que ficou intrigada com o fato de existirem Geometrias nas quais a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo seja diferente de 180º.

A professora P19 expôs que faz a comparação entre o plano euclidiano, o hiperbólico e o esférico para mostrar aos alunos que existem triângulos cuja soma dos ângulos internos é diferente de 180º.

A professora P24, por sua vez, relatou que, depois de estudar as Geometrias não Euclidianas, passou a destacar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º na Geometria Euclidiana, e que existem Geometrias nas quais esta soma pode ser maior ou menor do que 180º.

A professora P09 comentou que, nas Geometrias não Euclidianas, temos planos diferentes do euclidiano, que o postulado das paralelas é apresentado de uma maneira diferente nas Geometrias não Euclidianas e que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor ou maior que 180º.

Segundo a professora P11, as Geometrias não Euclidianas surgiram de uma mudança no postulado das paralelas. Aliás a frase responsável por nos levar a essa conclusão merece ser comentada, pois afirma que “historicamente tinham os postulados e que *o povo* começou a desconfiar daquele tal do postulado”. Essa professora também utiliza uma frase que já apareceu nesta pesquisa e também nas pesquisas de Santos (2009) e Carli (2012): “as paralelas podem ter um ponto em comum lá no infinito”. Nesse caso, P11 está se referindo, na verdade, ao ponto impróprio da Geometria Projetiva. P11 também lembrou que nos Fractais nos deparamos com figuras de diferentes dimensões.

O professor P15 conhecia conceitos e resultados de todas as Geometrias não Euclidianas apresentadas, mas com alguns problemas conceituais. Por exemplo, P15 expôs que as Geometrias não Euclidianas estão relacionadas aos espaços curvos, porém ele não descreve o que são espaços curvos. Outro problema é com a frase: “aquela coisa que por um ponto fora de uma reta só tem uma reta paralela isso cai por terra na Geometria, por exemplo, esférica. Que aí vai ter uma infinidade.” Na Geometria da Superfície da Esfera, não existem retas paralelas. Em relação à Geometria Fractal, P15 afirma “o que eu posso dizer da Geometria Fractal: é uma Geometria que foge da Euclidiana”. O que será que significa para esse professor “fugir” da Geometria Euclidiana? Ainda em relação à Geometria Fractal, comenta “como que eu posso dizer: você pode ter um polígono com infinitos lados e comprimento finito”. A hipótese nesse caso é de que, para o professor P15, os polígonos continuam existindo nessa Geometria, só que agora eles podem ter infinitos lados.

Outro problema conceitual de P15 pode ser observado na frase: “as ideias da Topologia [...] na faixa não tem dentro e fora [...] a ideia de dentro e fora não faz sentido”. Provavelmente, ele está se referindo à faixa de Möbius, mas, na Topologia, os conceitos de interior e exterior são fundamentais. Ressalta-se, neste momento, a importância de um participante fazer bastantes comentários, pois é possível observar bem e com mais clareza as suas concepções. Vejam a frase: “a Geometria Euclidiana é excelente, para um universo pequeno; se você for estudar um universo maior, você vai ver que ela é insuficiente”. A hipótese é que para esse professor, as Geometrias não Euclidianas tem sua importância no estudo de objetos de dimensão (tamanho) muito grandes. Talvez, isso venha da relação que existe entre a Geometria da Superfície da Esfera e a superfície da Terra. De fato, neste caso, localmente, não se percebe a curvatura da Esfera e a Geometria Euclidiana pode ser explorada localmente, como se ela fosse plana no sentido euclidiano. Mas, outras Geometrias não Euclidianas não se preocupam com as questões métricas, como é o caso, por exemplo, da Geometria Projetiva ou da Topologia.

Quando nos propusemos investigar as concepções dos professores, buscava-se saber, de um modo geral, quais são conhecimentos, opiniões, preferências e ideias que os professores apresentam sobre as Geometrias não Euclidianas.

Ao observar as falas, os comentários e as relações estabelecidas com os cartões, notou-se que os professores P09, P11, P15, P19 e P24 apresentam conhecimentos bem próximos do que seja as Geometrias não Euclidianas. Todos os professores desta categoria usaram conceitos e/ou resultados dessas Geometrias para expressar suas concepções.

Assim como nas concepções sobre a Geometria Euclidiana, ao investigar as concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, pretendia-se ter acesso ao pensamento do professor, ou como diz Guimarães (2003, p. 4) à sua “vida mental [...] em conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento”.

Durante a investigação, percebeu-se que alguns professores não apresentam concepções a respeito das Geometrias não Euclidianas – professores da categoria 7.1.1; e outros professores que apresentam concepções fundamentadas, principalmente, nas suas opiniões, ideias e preferências sobre estes conteúdos – professores da categoria 7.1.2.

Destaca-se ainda que as concepções têm origem histórica – tanto na história de vida do professor quanto da história das Geometrias. Ponte (1992) expôs que a Matemática é uma ciência muito antiga sobre a qual é difícil não apresentar concepções. As Geometrias, principalmente a Geometria Euclidiana, são áreas da Matemática que têm suas histórias construídas há séculos e, consequentemente, durante todo este tempo, muitas concepções foram construídas. As concepções também têm origem na formação do professor, ou seja, nas disciplinas, cursos e leituras que eles tiveram acesso ou não.

Diante das concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, fica um questionamento: será que os professores estão em condições de ensinar os conteúdos de Geometrias não Euclidianas que as Diretrizes Curriculares de Matemática propõem?

No quadro a seguir fizemos um comparativo entre as Geometrias não Euclidianas estudadas durante e após a graduação e apresenta-se a categoria (concepção) na qual o professor se encontra.

Professor	**Geometrias não Euclidianas estudadas na graduação**	**Geometrias não Euclidianas estudadas após a graduação**	**Categoria**
P01	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria Fractal no PDE	7.1.2
P02	Geometria projetiva	Leu sobre as Geometrias não Euclidianas	7.1.3

P03	Não estudou Geometria não Euclidiana	Leu sobre Geometria Fractal	7.1.2
P04	Ouviu falar das Geometrias não Euclidianas	Estudou as Geometrias não Euclidianas por interesse	7.1.3
P05	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estou Geometria Fractal em um curso oferecido pela SEED	7.1.2
P06	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana no PDE	7.1.2
P07	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana em cursos oferecidos pelo Núcleo	7.1.3
P08	Ouviu falar das Geometrias não Euclidianas	Não estudou Geometria não Euclidiana	7.1.2
P09	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana nas pós-graduações	7.1.3
P10	Não estudou Geometria não Euclidiana	Não fez cursos sobre Geometria não Euclidiana	7.1.1
P11	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana em cursos oferecidos pelo NRE e por interesse	7.1.3
P12	Não estudou Geometria não Euclidiana	Não fez cursos sobre as Geometrias não Euclidianas	7.1.1
P13	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	7.1.2
P14	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana nas pós-graduações	7.1.2
P15	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana por interesse	7.1.3
P16	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	7.1.2

P17	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana no PDE	7.1.2
P18	Não estudou Geometria não Euclidiana	Não estudou Geometria não Euclidiana	7.1.1
P19	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	7.1.3
P20	Não estudou Geometria não Euclidiana	Não estudou Geometria não Euclidiana	7.1.2
P21	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana por interesse	7.1.2
P22	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED	7.1.2
P23	Não estudou Geometria não Euclidiana	Não estudou Geometria não Euclidiana	7.1.1
P24	Não estudou Geometria não Euclidiana	Estudou Geometria não Euclidiana nas pós-graduações	7.1.3
P25	Ouviu falar das Geometrias não Euclidianas	Leu sobre Geometrias não Euclidianas	7.1.2
P26	Não estudou Geometria não Euclidiana	Leu sobre Geometria Fractal	7.1.2
P27	Não estudou Geometria não Euclidiana	Leu sobre Geometrias não Euclidianas	7.1.2

Quadro 7: Quadro comparativo entre as Geometrias estudadas e a respectiva categoria

Como já foi afirmado anteriormente, somente o professor P02 estudou Geometria Projetiva durante a graduação, enquanto os professores P04, P08 e P25 ouviram falar das Geometrias não Euclidianas durante a graduação.

Os oito professores, elencados na categoria 7.1.3, possuem, em geral, uma concepção calcadas em conhecimentos sobre as Geometrias não Euclidianas. Todos estudaram as Geometrias não Euclidianas depois da graduação: em cursos oferecidos pela SEED, pelos NRE's, nas especializações, ou por interesse próprio.

Os doze professores da categoria 7.1.2 possuem algumas ideias e visões sobre as Geometrias não Euclidianas. Dos professores dessa categoria, somente os professores P08 e P20 comentaram que não estudaram as Geometrias não Euclidianas em cursos, palestras, ou nas pós-graduações, porém leram algo a respeito.

Estudar Geometria não Euclidiana, seja na graduação ou após, é condição suficente para ter uma concepção a respeito do assunto? Somente as leituras e estudos realizados durante os anos que eles estão atuando em sala de aula são suficientes para a construção de uma concepção de Geometria não Euclidiana?

Diante dos dados obtidos, pode-se afirmar que, para se ter uma concepção mais clara sobre o conhecimento geométrico, é preciso estudar o assunto. No entanto, só o estudo não é suficiente, visto que existem professores que estudaram as Geometrias não Euclidianas, mas, ainda assim, apresentam uma concepção baseada em ideias, opiniões e preferências sobre as Geometrias. Também considera-se que, para entender as Geometrias não Euclidianas, é necessário conhecer o sistema lógico com o qual a Geometria Euclidiana foi construída, ou seja, por meio dos axiomas, noções comuns, postulados, conceitos e resultados daí advindos.

O objetivo, assim como no estudo das concepções sobre a Geometria Euclidiana, não é trazer respostas definitivas para essas questões, mas, ao que tudo indica, o fator, corroborante para a construção de uma concepção é forma como os conteúdos são trabalhados, as discussões e reflexões a respeito da natureza do conhecimento geométrico, o interesse que os professores têm sobre a Geometria, entre outros aspectos. Carvalho (1989, p. 142) destaca que concepções mudam e são construídas num processo dialético de ação-reflexão-ação, quando é possível propiciar transformações tanto teóricas como práticas, as quais são indissociáveis.

Apesar de perceber que professores ainda não estão em condições de ensinar os conteúdos de Geometrias não Euclidianas, defende-se a inclusão nas DCE, uma vez que acredita-se que esta inclusão pode estimular o estudo das Geometrias e promover, inclusive, uma reflexão sobre a própria Geometria Euclidiana. Com o estudo das Geometrias não Euclidianas, os professores da Educação Básica podem ampliar o conhecimento geométrico, resgatar a história das Geometrias, compreender problemas do cotidiano, aprofundar temas da Geometria Euclidiana, além de mostrar que a Geometria Euclidiana não é a única Geometria que existe.

Para reverter esse quadro e fazer com que os professores repensem suas concepções, temos como hipótese que sejam necessárias ações no sentido de levá-los a ter consciência das suas concepções e compreender que elas apresentam anomalias. De fato, não será possível construir novas concepções se não houver quebras das concepções existentes.

7.2 O que chamou a atenção nas Geometrias não Euclidianas

Nesta seção, apresentamos os aspectos responsáveis por despertar a atenção dos professores sobre as Geometrias não Euclidianas. Para a construção dessas categorias, utilizamos dos dados obtidos com a entrevista semiestruturada.

Seguem alguns recortes das falas que nos levaram a incluir os professores nas categorias apresentadas.

7.2.1 – É mais bonita e interessante.

Quatro professores consideraram as Geometrias não Euclidianas mais atraentes e interessantes do que a Geometria Euclidiana.

> P01 – "pra (sic) mim, eu achei ela mais bonita. Eu gosto dos Fractais, eu acho muito bonito. Eu achei que ficou mais interessante".

P03 – “as figuras, as figuras chamam bastante a atenção (ele se refere as figuras de alguns Fractais). Aquelas subdivisões todas, vai dividindo, dividindo, e quando você vê pronto, você vê figuras fantásticas”.

P17 – “eu achei interessante aquelas montagens (novamente aqui ele se refere as figuras de alguns Fractais). Mas, o que me estranhou muito foi, mas aonde que eu vou passar pros (sic) meus alunos? É bonito, mas eu não vi uma aplicação Matemática em si, eu não consegui enxergar. É uma coisa que chama atenção, mas eu não vi aplicação. Eu até procurei alguma coisa na internet, mas não achei, não sei se eu não estou procurando direito”.

P21 – “ela é diferente, eu conheci os Fractais, eu achei mais bonita as figuras”.

Os quatro professores que julgaram as Geometrias não Euclidianas mais atraentes e interessantes se referem à Geometria Fractal. Eles fazem referência à algumas figuras e a alguns modelos de cartões Fractais.

Nesse sentido, Barbosa (2002) expõe que a Matemática, em geral, fornece ao professor e ao educando prazeres oriundos de várias formas de pensar e de ver. A Geometria possibilita o surgimento do prazer pelas descobertas e de aspectos harmoniosos. Por isso, o autor destaca que,

> [...] ver e sentir o belo e apresentar um senso estético é talvez propriedade inerente a alguns poucos temas da Matemática; entre os outros, muitos são áridos e desinteressantes. O despertar e desenvolver do senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema *Geometria Fractal*, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades (BARBOSA, 2002, p. 14).

Na Geometria Fractal, é possível observar estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas, com padrões dentro de um sistema por vezes, aparentemente, aleatório.

Santaló (2006) destaca que, nas últimas três décadas, a Geometria Fractal tem despertado o interesse das artes plásticas, da física, da biologia e da astronomia (SANTALÓ, 2006, p. 22).

7.2.2 – Os resultados e os conceitos das Geometrias não Euclidianas

Seis professores citaram os aspectos que, de fato, mais lhes despertaram a atenção nas Geometrias não Euclidianas: os resultados e conceitos dessas Geometrias.

> P02 – "o postulado das paralelas sendo quebrado [...] eu vi a questão da soma dos ângulos internos do triângulo não ser sempre 180. Eu lembro que uma professora quebrou isso falando do triângulo esférico".

> P07 – "eu fiquei doida com aquela história de soma dos ângulos internos ser maior do que 180".

> P09 – "a situação tanto do Lobachevsky, do Riemann, você usa a sela do cavalo, ou pega uma corneta e mostra que a soma pode ser menor; os Fractais a questão do infinito né, como é que você tem uma progressão infinita e o triângulo de Sierpinsky, como é que pode dizer que cada triângulo vai ficando pequenininho, pequenininho, como é que é infinito se chega uma hora que ele tem uma área infinita. Ele é infinito na quantidade de lados, mas ele tem uma área finita, pode ser calculada, eu acho muito interessante isso. A questão da Topologia, do mapa, eu gosto muito do exemplo, que a gente acaba sempre fazendo os exemplos que a gente conhece, pintar o mapa inteiro, todo mundo fica, nossa; e da natureza, explorar as questões da natureza".

P11 – “eu achei interessante foi a questão das paralelas, a superfície que você trabalha a Geometria. De ver a questão dos postulados que alguém teve uma ideia tão brilhante que poderia ser diferente e que ainda tem aplicações”.

P24 – “tirando os Fractais, que os Fractais têm a questão da natureza, foi essa contradição. As geodésicas, os triângulos cuja soma não é 180, isso me chamou muito a atenção”.

P25 – “me chamou a atenção por que você não trabalha num plano, a parte que eu vi trabalhava em cima de uma esfera. Muda todos os conceitos”.

Os professores P02, P07, P09, P24 elencaram também alguns fatores que lhes despertou a atenção nas Geometrias não Euclidianas: o fato de existirem, mais especificamente na Geometria Hiperbólica e da Superfície da Esfera, triângulos cuja soma das medidas dos ângulos internos é diferente de 180º.

Os professores P02 e P09 também destacaram o postulado das paralelas. Provavelmente, estes dois professores se interessam, no postulado das paralelas, pelo fato de, por um ponto fora de uma reta, passarem infinitas retas paralelas (na Geometria Hiperbólica) ou nenhuma (no caso da Geometria da Superfície da Esfera).

A professora P09 comentou sobre a Topologia. A hipótese em relação a frase “[...] do mapa, eu gosto muito do exemplo, que a gente acaba sempre fazendo os exemplos que a gente conhece, pintar o mapa inteiro, todo mundo fica, nossa; e da natureza, explorar as questões da natureza”, é a de que ela tenha trabalhado em sala com o teorema das quatro cores, caracterizado por envolver conceitos topológicos.

Os professores P09 e P24 também comentam sobre os Fractais, mas nesses casos, não se referiram às figuras Fractais, mas à questão de que a Geometria Fractal descreve de maneira mais aceitável questões relacionadas à natureza.

Após os professores responderem as perguntas da entrevista e manipulado os cartões, a pesquisadora explicou brevemente cada um deles. No decorrer da explicação, alguns professores questionaram a pesquisadora se era possível um triângulo ter a soma dos ângulos internos diferente de 180º. Alguns chegaram duvidar desse resultado. Tal fato aconteceu com os professores P01, P03, P06, P08, P10, P12, P17 e P20.

> P03 – "menor do que 180º? Não, igual. Aqui tem o quê? [...] maior ou menor, de repente aqui é maior (mostra o triângulo esférico). Mas, menor não, que eu lembre, não".

> P06 – "não, porque a soma dos ângulos internos é igual a 180".

> P08 – "soma dos ângulos internos de um triângulo maior que 180? Não, a soma dos ângulos internos é 180 [...] é isso que eu estou me questionando, pode ser maior? [...] menor também pode?".

> P10 – "isso aqui não existe, né? Você colocou só pra (sic) [...] existe triângulo menor do que 180º? Triângulo menor que 180º?"

> P12 – "pra (sic) mim sempre a soma dos ângulos internos de um triângulo dá 180º. E nem maior que 180 [...] isso daqui pra (sic) mim não existe [...] porque oh, deixa eu, por mais que eu puxe, aumente um ângulo, automaticamente eu diminuo um outro ângulo. Então, na minha cabeça, na minha concepção, eu não consigo formar um triângulo com medidas maiores ou menores que 180º internos".

> P17 – "soma dos ângulos internos de um triângulo menor que 180º? Não sei, acho que não. Tem umas coisas estranhas aqui. Isso é pegadinha, né?"

A reação dos professores parece natural, uma vez que eles estão acostumados com o fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, na Geometria Euclidiana, é igual a 180º. Ao se depararem com o resultado da Geometria Hiperbólica e da Geometria da Superfície da Esfera, esbarram no estranhamento e apresentam dúvida se, de fato, é possível. Aliás, Lovis (2009) e Santos (2009) já haviam observados essa desconfiança e surpresa dos professores em suas pesquisas de Mestrado.

Outro resultado que costuma chamar a atenção dos professores diz respeito às retas paralelas na Geometria Hiperbólica e a não existência de retas paralelas na Geometria da Superfície da Esfera, nem tampouco da Geometria Projetiva.

7.2.3 – Saber que existiam

Oito professores relataram, como aspecto mais interessante nas Geometrias não Euclidianas, o fato de saber que elas existiam e que, em alguns casos, rompiam inclusive com padrões.

> P04 – “foi saber mesmo que elas existem [...] e querer conhecer um pouco mais sobre cada uma”.

> P05 – “eu, realmente, me surpreendi como tem pessoas que vão além do que a gente pensa. Porque realmente é uma coisa muito abstrata pensar que tem outro plano diferente desse que foi visualizado”.

> P06 – “primeiro que eu nunca tinha ouvido falar. E daí sabe quando tem um rompimento de um padrão, eu estava acostumada com aquela coisa quadradinha, bonitinha e de repente vem aquela coisa que parece que causou uma certa confusão na minha cabeça, porque eu tinha aquilo muito certinho, que era aquilo e

pronto. Então, aquilo na verdade acabou rompendo algumas barreiras, embora eu não tenha um aprofundamento muito grande [...] no começo eu não gostei muito, mas hoje eu já vejo diferente”.

P08 – “na realidade, pra (sic) mim, a Geometria não Euclidiana foi tudo novo; nem o nome nunca tinha ouvido falar, eu acho que, como tudo foi novo, tudo foi interessante”.

P13 – “eu vou ser sincera, eu não imaginava que existiam essas outras Geometrias”.

P15 – “o primeiro contato foi pela minha curiosidade: o que é essa Geometria não Euclidiana? Daí eu estudei um pouquinho a respeito e descobri que tinha não só uma, mas outras mais, mas até hoje eu não sei dizer pra (sic) você qual será o impacto, porque eu não sei muito dessa matéria. Mas já da pra (sic) ver que quando você sai de uma Geometria pra (sic) outra, a visão é outra, totalmente diferente, e existe relação entre as duas. Pra (sic) você poder entender a Geometria não Euclidiana, é interessante você conhecer bem a Euclidiana”.

P22 – “eu nunca tinha ouvido falar sobre isso, pra (sic) mim foi novidade, a primeira vez que falaram. Achei interessante, porque, normalmente, tudo que você faz, você faz no plano, você não faz de outra maneira, fomos acostumados a isso”.

P27 – “eu achei que muitos conceitos acabados eles eram utópicos. Tanto é que na hora de discutir, buscar ideias, eu passei a direcionar o assunto diferente; porque antes de você buscar a comparação ali, você tem um conceito muito pronto e acabado”.

Para os professores P04, P08, P13 e P22 foi marcante o fato de existirem outras Geometrias, já que eles acreditavam que existisse só a Euclidiana. O professor P04 comentou que, após saber da existência, teve curiosidade de estudar um pouco sobre cada Geometria. A professora P08 comentou que até o nome “Geometrias não Euclidianas” a surpreendeu. A professora P22, quando fala: “achei interessante porque normalmente tudo que você faz, você faz no plano”, provavelmente, esteja se referindo às construções realizadas no plano euclidiano, uma vez que nas Geometria Hiperbólica e da Superfície da Esfera, por exemplo, também existe um plano.

A professora P05, por outro lado, afirmou que ficou surpresa com o fato de existirem pessoas que “vão além do que a gente pensa”, e que é muito abstrato “pensar que tem outro plano diferente desse que foi visualizado”. Como pensar em plano visualizado? Que sentido faz essa frase? Tudo indica que a professora P05 esteja se referindo ao plano euclidiano, como o fez a professora P22.

Quando a professora P06 relata que estava acostumada com “aquela coisa quadradinha, bonitinha [...] porque eu tinha aquilo muito certinho, que era aquilo e pronto”, tudo indica que ela está se referindo aos conceitos da Geometria Euclidiana. Em seguida, ela explica que ocorreu “uma certa confusão [...] acabou rompendo algumas barreiras”. É interessante a consideração de P06, porque mostra a necessidade de conhecer para romper com padrões. Como dissemos anteriormente, P06 possui uma concepção que se afasta do conhecimento sobre as Geometrias não Euclidianas, porém, sua fala dá indícios de que ela já começou a instaurar novas concepções.

O professor P15, assim como o professor P04, comentou que, após saber da existência de outras Geometrias, teve curiosidade de estudá-las. É interessante notar que P15 percebeu que existem diferenças entre as Geometrias, mas que também podem existir relações entre elas e termina sua fala destacando que: “pra (sic) você poder entender a Geometria não Euclidiana é interessante você conhecer bem a Euclidiana”.

Acredita-se que a professora P27, ao relatar que acreditava que os conhecimentos geométricos eram utópicos e acabados, está se referindo aos conceitos da Geometria Euclidiana.

7.2.4 – Sem categoria.

Os sete professores a seguir não conheciam as Geometrias não Euclidianas, ou não foi possível enquadrá-los nas categorias anteriores.

P10, P12 e P18 – não conheciam as Geometrias não Euclidianas. P23 não respondeu a pergunta.

P14 – “é complicado relacionar, porque é que nem eu disse pra você, quando a gente estudou, geralmente, na época que eu estava mais assim, tempos atrás que eu fiz o ensino fundamental e médio, não existia essa separação; hoje a questão da Geometria Euclidiana e não Euclidiana é mais assim por causa, pro (sic) desenvolvimento da tecnologia, aí desenvolveu um outro lado que pra (sic) Geometria Euclidiana é aquilo que está separado e tudo que está aparecendo depois é chamado não Euclidiana”.

P16 – “essa parte de visualizar, tentar enxergar algo que não se pode desenhar. Você não tem como ver isso dali, a gente fica trabalhando muito na Euclidiana e isso pra (sic) nós é essencial, só existe isso. Quando vê não Euclidiana, vai buscar na história, ver quem foi, quem fez”.

P23 – “com certeza, houve vários pontos de interrogação. Mas, por eu estar afastada agora eu não me lembro de um ponto pra (sic) te falar. Eu ficava me questionando por que aparecer isso agora, que eu vou ter que mostrar uma outra realidade. Mas, assim, são muitos pontos de interrogação, então se fosse pra (sic) citar era n motivos”.

P26 – “eu só conheço os Fractais e eu não estudei muito”.

Os professores P10, P12, P18 e P23 não estudaram Geometrias não Euclidianas. Para o professor P14, o que chamou a atenção foi o fato de que as Geometrias não Euclidianas surgiram para o desenvolvimento da tecnologia e “tudo que está aparecendo depois é chamado não Euclidiana”. P14 não tem clareza do que são as Geometrias não Euclidianas e faz uma confusão quando relaciona essas Geometrias com o desenvolvimento da tecnologia e com a questão cronológica.

No que diz respeito ao professor P16, o que chamou sua atenção foi a possibilidade de se “tentar enxergar algo que não se pode desenhar”. O que será que P16 quis dizer com esta afirmação? Que nas Geometrias não Euclidianas encontramos “coisas” que não podem ser desenhadas? Termina sua resposta dizendo: “quando vê não Euclidiana, vai buscar na história, ver quem foi, quem fez”. Que sentido tem isto?

A professora P23 insistiu que foram muitos pontos de interrogação, e mesmo com a insistência da pesquisadora, nenhum deles foi explicitado. A professora P26 disse que só conhecia os Fractais e que não tinha condições de responder a pergunta.

7.2.5 – Não chamou a atenção

Somente uma professora relatou nada lhe despertou a atenção nas Geometrias não Euclidianas.

> P20 – “não teve muita coisa que me chamou a atenção na Geometria não Euclidiana. Uma vez, eu fiz um trabalhinho, mas não foi assim muito a fundo, sobre aquele matemático Lobachevsky”.

P20 relatou que nada chamou sua atenção e comenta que fez um “trabalhinho” a respeito de Lobachevsky, porém, ela não detalhou que trabalho foi este.

Partimos, inicialmente, do pressuposto segundo o qual todos os professores que estudaram as Geometrias não Euclidianas estudaram antes a Euclidiana. Esse fato nos leva a acreditar que o estudo de conceitos e dos resultados das Geometrias não Euclidianas implicariam surpresas e dúvidas, já que eles diferem da Geometria Euclidiana e tal Geometria passou a ser vista como a única Geometria possível e verdadeira. Este fato já havia sido observado no decorrer da pesquisa de Mestrado (LOVIS, 2009) e em cursos para professores da Educação Básica.

Os dados obtidos nesta investigação mostram que, para a maioria dos professores que estudaram as Geometrias não Euclidianas, houve algo nessas Geometrias que lhes chamou a atenção.

Conforme descrição acima, quatro professores percebem as Geometrias não Euclidianas como mais bonitas e interessantes do que a Geometria Euclidiana (todos os professores se referiram à Geometria Fractal); seis professores relatam resultados e/ou conceitos dessas Geometrias (soma dos ângulos internos de um triângulo diferente de 180º, o fato de que por um ponto fora de uma reta passam infinitas retas paralelas – na Geometria Hiperbólica – ou nenhuma – na Geometria da Superfície da Esfera, conceitos da Topologia); e oito professores relataram que o que chamou a atenção nas Geometrias não Euclidianas foi saber que elas existiam.

Cabe destacar que um caminho na construção das concepções sobre as Geometrias não Euclidianas trata-se, obviamente, de conhecê-las e, com isto, construir e/ou mudar as concepções existentes.

Ademais, recorrendo a Dewey (1953), no processo de construção das concepções, são necessários três passos: identificar, completar e integrar. Nesse sentido, tudo indica que a maioria dos professores participantes desta pesquisa, está na fase de identificação dos conceitos não euclidianos. A maioria dos professores pesquisados não completou e nem integrou os conhecimentos não euclidianos às suas concepções.

8 Análise da Categoria 4: Concepções sobre a importância das Geometrias

8.1 – para ser utilizada em aplicações e situações do cotidiano;

Onze professores justificaram que a Geometria é importante porque é muito utilizada em situações e aplicações do cotidiano. Segue o recorte de algumas de suas falas:

> P03 – “as pessoas têm que ter a noção de formas, a noção de medida, é importante ter uma cultura nesse sentido [...] é você levar o ensino ao cotidiano das pessoas, dos alunos; a Geometria tem esse poder”.

> P07 – “pra (sic) mim, tudo é Geometria [...] por causa das aplicações, em tudo quanto é canto, nas construções, no automobilismo, em tudo, tudo é Geometria, o mundo é Geometria”.

> P08 – “eu vejo que tem muita utilização no dia a dia deles. Principalmente, a nossa região [...] é agrícola, e na agricultura mesmo eu falo pra (sic) eles: pessoal, vocês querem calcular lá a quantidade de veneno que vocês vão precisar comprar, vocês precisam saber a extensão territorial, e essa extensão territorial de vocês se assemelha a um quadrado, a um retângulo, a que forma geométrica? [...] ter de cor e salteado noções do que é um triângulo, retângulo e quadrado, isso daí vocês vão usar pra (sic) sempre”.

> P10 – “o importante de ensinar Geometria, inclusive partindo da sala de aula, partindo da carteira dele; porque nós temos uma dificuldade muito grande de localização, e até mesmo dentro da própria casa da gente. Se você analisar as

construções, na área de civil, se você não tiver um pouquinho de noção, você comete muitos erros, e é onde você vai morar. Então, o nosso aluno, ele tem que ter um mínimo de conhecimento de ângulo pra (sic) ele pensar no telhado, no caimento do telhado, pra ele não ficar à mercê de um projeto mal feito de um engenheiro".

P11 – "eu acho que é importante principalmente pela noção espacial, mesmo num emprego simples que ele vai ter, ele precisa ter noções das direções, das figuras, se ele vai trabalhar como pedreiro, ele tem que conhecer as figuras pra (sic) estar construindo, se ele vai trabalhar em outras profissões; e está no dia a dia construir as figuras, algumas figuras aparecem mais nas construções e também na parte artística".

P12 – "eu acho importante, porque, em tudo o que você vê, tem Geometria. Por exemplo, olha dentro de uma casa, tem Geometria em todos os cantos. Pro (sic) aluno ter noção de espaço, de volume. Como a nossa região é agrícola, então você ouve muito os agricultores falarem cubar a terra. Aí, os alunos chegam pra (sic) gente pedem pra (sic) gente ensinar a cubar terra, aí você vai lá e ensina área. Não, professora, eu não quero aprender área, eu quero aprender a cubar a terra. Então, até pra (sic) gente tirar esse, esse vício de linguagem que eles têm, pra (sic) fazer eles entenderem que o cubar que os pais falam é o mesmo cálculo de área que a gente faz. Pra ter noção de quanto calcário eles vão ter que colocar na roça, quanto adubo, quanta semente. Eu acho importante pra (sic) vida, pro (sic) dia a dia, não só dos agricultores, mas pra todos. Até pra (sic) saber no mercado qual a embalagem mais vantajosa. Eu gosto muito de trabalhar a Geometria Espacial [...] eu acho importante, eu acho necessário".

P14 – "eu vejo que é importante no sentido do aluno ter a noção espacial, porque, hoje, ele não consegue relacionar a questão da Geometria com o que está na frente dele; a questão de ver um mapa e olhar a questão da escala, não consegue associar aquilo com uma questão geométrica; ou mesmo ele vai fazer um desenho, a proporção não está boa, tudo isso está envolvendo Geometria, conhecimento geométrico [...] ele vai jogar futebol, e ele não tem uma noção que tem que ter conhecimento da quadra, que não é a mesma coisa jogar numa quadra ou jogar em outra, os tamanhos são diferentes, então existe tudo isso".

P17 – "tudo na Matemática a gente sempre tem um lado importante. Têm alunos que têm as suas especificidades, cada um quer seguir um ramo, e eu acredito que a Geometria Espacial seja uma das aplicações muito importante nos dias de hoje, em função dessa explosão de construções; então, você até leva o aluno na construção, você mostra, pra (sic) que desperte o seu interesse pela Geometria. E também no dia a dia ele tem na sua casa, em tudo que ele olha ele tá (sic) vendo medida, ângulo, plano, segmento, então é importante pra (sic) que ele tenha noção do espaço".

P18 – "a Geometria faz parte da Matemática do dia a dia. Assim como você precisa dos números pra saber a hora, quilometro, rodagem, tudo na tua vida é em função da Matemática e dos números. A Geometria pra (sic) tudo é necessário, pra (sic) ter essa mesa pra (sic) gente estudar, você precisa saber a Geometria, pra (sic) fazer esse piso, pra (sic) colocar um fogão na tua casa você precisa saber da Geometria. Pra (sic) você entender um pouco da construção de shopping, você precisa de Geometria: é triângulo, quadrado, localização; Geometria é muito importante.".

P23 – "a Geometria está em todos os lugares, no teu cotidiano, você tem Geometria, então, por exemplo, você está construindo uma casa, pra (sic) que uma prova maior de Geometria do que a construção de uma casa, uma planta de uma casa [...] a Geometria está no cotidiano dele".

> P25 – “é um dos conteúdos que mais dá para ser aplicado, que dá mais pra (sic) pegar exemplos de como é utilizado [...] e, na Geometria, é onde eu mais consigo falar onde ele vai usar isso”.

O professor P03, ao falar em “cultura geométrica”, se referia ao fato da importância dos alunos terem noções a respeito do conhecimento geométrico; na sequência, ele comentou sobre a possibilidade de “levar” o ensino ao cotidiano das pessoas, no entanto, entende-se que é possível utilizar o cotidiano para o ensino de Geometrias.

Para a professora P07, tudo é Geometria e ela está “em tudo quanto é canto”. Na mesma perspectiva, P12 diz: “olha dentro de uma casa, tem Geometria em todos os cantos”, porém P12 não é tão generalista, uma vez que toma um pouco mais de cuidado que P07, já que não cita que “tudo é Geometria”. No entanto, P12 comenta que “em tudo o que você VÊ tem Geometria”. Retornando à seção 7, observamos que P12 “nunca estudou Geometrias não Euclidianas”, sendo assim, provavelmente, essa afirmação se refere somente à Geometria Euclidiana. Logo, pode-se identificar aí uma incoerência, pois nem tudo que você VÊ tem apenas Geometria Euclidiana.

As professoras P08 e P12 usaram um exemplo que elas comentaram vivenciar em sala de aula, para falar da importância da Geometria: a utilização da Geometria na agricultura. A professora P8, fala que “eu vejo que tem muita utilização no dia a dia deles. Principalmente a nossa região [...] é agrícola”, dá alguns exemplos de utilização nessa área, mas principalmente as questões métricas, como na frase: “vocês querem calcular lá a quantidade de veneno que vocês vão precisar comprar, vocês precisam saber a extensão territorial, e essa extensão territorial de vocês, ela se assemelha a um quadrado, a um retângulo, a que forma geométrica?”. Já P12, oferece vários exemplos de aplicações na agricultura, vejam a frase: “Como a nossa região é agrícola então você ouve muito os agricultores falarem cubar a terra. Aí os alunos chegam pra (sic) gente pedem pra (sic) gente ensinar a cubar terra, aí você vai lá e ensina área. Não, professora, eu não quero aprender área, eu quero aprender a cubar a terra. Mas, no final de uma das conversas, P12 afirma que: “Eu acho importante pra (sic) vida, pro (sic) dia a dia, não só dos agricultores, mas pra (sic) todos.”. Novamente, no caso dessas duas professoras, observamos a importância dada à Geometria na aplicação no cotidiano.

Por outro lado, no início da fala de P10, ela afirma que considera importante ensinar geometria “porque nós temos uma dificuldade muito grande de localização, e até mesmo dentro da própria casa da gente”, por isso, para ela, a Geometria irá auxiliar as pessoas a compreender o espaço em que vivem. Ademais, ela se lembra da necessidade de conhecer a Geometria para a construção de uma casa e ter condições de perceber quando um projeto está mal elaborado e, até mesmo, mal executado – P10 usa como exemplo o conhecimento de ângulo na construção do caimento de um telhado.

Para os professores P11 e P14, a Geometria é importante, porque auxilia a construção da noção espacial. A professora P11 também destacou a importância da Geometria na construção das noções de direção e no entendimento das figuras geométricas, que são competências necessárias para diversas profissões – P11 destaca a profissão de pedreiro – também comenta sobre a utilidade da Geometria na “parte artística” que pode ser pensada nas Artes Plásticas, na Arquitetura, para um artesão, entre outras profissões.

Para o professor P14, a Geometria também se justifica, porque auxilia o entendimento de mapas, escalas e proporção. No entanto, P14 destaca que nem sempre o aluno consegue associar isso tudo a “uma questão geométrica” e que “tudo isso está envolvendo Geometria”. P14 usa como exemplo uma partida de futebol e destaca a necessidade do aluno ter “conhecimento da quadra, que não é a mesma coisa jogar numa quadra ou jogar em outra, os tamanhos são diferentes”.

O professor P17 inicia sua fala expondo que “tudo na Matemática a gente sempre tem um lado importante”. P17 tem razão, uma vez que a Matemática tem diversas aplicações, em diversas áreas. Ao se referir à Geometria, o professor P17 comenta sobre as especificidades de cada aluno e que “cada um quer seguir um ramo”, ou seja, uma profissão. E nesse contexto, destaca e importância da Geometria Espacial, pelas suas aplicações, principalmente, nas construções. P17 também comentou a respeito da utilidade da Geometria no dia a dia “em tudo que ele olha ele ta (sic) vendo medida, ângulo, plano, segmento, então é importante pra (sic) que ele tenha noção de espaço”.

A professora P18 entende que “assim como você precisa dos números pra (sic) saber a hora, quilômetro, rodagem [...] a Geometria pra (sic) tudo é necessário, pra (sic) ter essa mesa pra (sic) gente estudar, [...] pra (sic) fazer esse piso, pra (sic) colocar um fogão na tua casa você precisa da Geometria". Para P18, é tão importante e necessário conhecer os números quanto conhecer a Geometria. A professora expõe que os conhecimentos geométricos são necessários em diversas situações, inclusive "pra (sic) você entender um pouco da construção de shopping, você precisa de Geometria: é triângulo, quadrado, localização; Geometria é muito importante".

Assim como os professores P07, P10 e P17, a professora P23 destacou a importância da Geometria na construção civil, ou seja, na construção de uma casa, na planta de uma casa, por exemplo. P23, bem como a professora P07, entende que "a Geometria está em todos os lugares" e que "a Geometria está no cotidiano dele".

O professor P25, por sua vez, comentou sobre a aplicabilidade da Geometria. Para P25, "na Geometria é onde eu mais consigo falar onde ele vai usar isso". Ele, no entanto, não detalha sua justificativa.

As concepções apresentadas por esses professores a respeito da importância da Geometria estão associadas à aplicabilidade e à utilidade dos conteúdos geométricos em situações do cotidiano, em algumas profissões, entre outros aspectos.

Fonseca et al (2011, p. 92) expõe que é comum encontrar professores que, para atribuir a importância da Geometria, enumeram razões que "se apoiam em aspectos utilitários, evidenciando-se os aportes que os recursos geométricos oferecem à resolução de problemas da vida cotidiana, ao desempenho de determinadas atividades profissionais". Apesar disso, os autores recomendam que "é possível e desejável, todavia, que o argumento da utilização da geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar permita e desencadeie o reconhecimento de que sua importância ultrapassa esse seu uso imediato para ligar-se a aspectos mais formativos" (FONSECA et al, 2011, p. 92).

Barrantes e Blanco (2006), observaram, em uma pesquisa com futuros professores das séries iniciais, que a finalidade da Geometria, para eles, é sua utilidade na vida cotidiana. Os autores também averiguaram que "para alguns estudantes, a finalidade é simplesmente adquirir conhecimentos, bem como cultura geral, porque a Geometria é uma das partes da Matemática e todas elas são importantes" (BARRANTES e BLANCO, 2006, p. 81).

A principal justificativa utilizada pelos onze professores dessa categoria é uma das sete justificativas que Bressan, Bogisic e Grego (2006) apresentam para a Geometria. Os autores destacam que a Geometria é importante no dia a dia, uma vez que ela está relacionada aos problemas de medidas, cálculo de áreas e volumes, leituras de mapas, construção de objetos, entre outros aspectos.

Crescenti (2005, p. 122) observou que os professores que participaram da sua pesquisa, tanto os iniciantes quanto os experientes, demonstraram possuir uma visão empírica e prática da Geometria, dando ênfase à questão métrica e à sua aplicabilidade. Crescenti considerou que os professores tinham uma visão limitada sobre a importância da Geometria Euclidiana. Destacou também que nenhum deles apresentou o conhecimento de Geometria como ciência.

8.2 – Conhecer o espaço/mundo; a Geometria está em todo lugar

Nove professores justificaram a importância da Geometria, porque ela auxilia a conhecer o espaço no qual vivemos e porque está em todos dos lugares.

> P02 – “o nosso corpo é geométrico, o mundo é geométrico. A gente está aqui dentro de uma caixa (laboratório de informática). Olha quanta coisa de Geometria que tem aqui. Então, só por isso já é fundamental. É super importante pro (sic) aluno perceber que mundo que ele vive”.

> P04 – “sim, é importante, porque, na Matemática, eu vejo que tem três divisões, a questão de ordem, a algébrica e a topológica. Na topológica, entra toda a Geometria. Esses são os três conceitos que eu vejo que são básicos pro (sic) aluno se dar bem em qualquer área que ele seguir. Então, dentro da topológica, entram as Geometrias que são importantes para a formação deles, conhecer as dimensões, bidimensional, tridimensional, enfim, conhecer o mundo que ele vive. E ,depois,

na faculdade, vários cursos que ele optar, ele vai trabalhar com isso. Ele precisa conhecer a Geometria.”.

P05 – “é uma forma de você conhecer o espaço e se localizar nele. A Geometria é, praticamente, forma, tudo que tem forma, a gente pode dizer que é geométrico; então, é importante a gente mostrar isso pra (sic) criança, a questão do volume, a questão depois das medidas de capacidade, tudo isso vai depender do que ele conhece da forma. Eu acredito que a Geometria vai fazer a diferença sim”.

P13 – “nossa, super importante. Até eu tenho, eu fiz um curso que a gente discutiu essa questão que, por muito tempo, a Geometria ficou esquecida, elas apareciam nas últimas páginas dos livros didáticos, e não dava tempo do professor chegar até lá pra (sic) ensinar. Agora, de alguns tempos pra (sic) cá, foi resgatada ela. Então, eu acho, assim, muito importante. Eu acredito que tem muitos alunos que ainda não sentiram o sabor de gostar, se a gente não trabalhar a prática, eu mesma fui sentir o gosto, depois que eu saí da escola. Eu não imaginava a importância dela, eu acho que eu não conseguia fazer essa ligação, no mundo físico é tudo Geometria. Enquanto eu estive estudando, eu não tive essa ligação, eu só consegui fazer essa ligação depois”.

P19 – “o espaço todo, o ambiente que eles estão, qualquer lugar que eles andarem eles têm que perceber que a Geometria está ali. É uma coisa visível, você pode comparar com o dia a dia, mostrar no concreto”.

P20 – “a Geometria faz parte do dia a dia. Tudo que a gente vê é geométrico, tudo que o aluno olha é geométrico, é triângulo, é retângulo, é círculo; como faz parte do dia a dia, ele tem que também estar sempre inserido no conteúdo”.

> P24 – “eu vejo assim a questão da localização, de se posicionar no mundo, de saber o espaço, é importante pra (sic) tudo, pra (sic) construção do pensamento geométrico, que eu, às vezes, não tenho, e até pra dirigir a insegurança que dá”.

> P26 – “eu acho que é mais fácil pra (sic) eles compreenderem o mundo. E deve ter alguma pesquisa que demonstre que os meninos têm mais facilidade por causa da noção espacial”.

> P27 – “a Geometria está inserida em todo o nosso contexto de vida. Se você não tem uma ideia de figuras, o cálculo, eu acho, que ele nem faz muito sentido, se você analisar o corpo humano, ele tem peso, figuras e medidas. À Geometria não é dado o valor que ela merece, porque é muito triste a gente chegar no terceiro ano do ensino médio, e um aluno não saber o que é um ângulo agudo, o que são retas paralelas, que existem ângulos suplementares, e que essas palavras não passaram pela vida deles”.

O professor P02 entende que a Geometria é importante, porque o “nosso corpo é geométrico, o mundo é geométrico”. No entanto, ele não explicou a “Geometria” do nosso corpo nem a do mundo, pois, pelas análises feitas na seção 7, com as falas desse professor e sua discussão com os cartões, identificamos que ele desconhece Geometrias capazes de compreender essas relações existentes no corpo humano, tais como a Geometria dos Fractais ou a Topologia. Ele justifica sua concepção usando a sala na qual estava sendo realizada a entrevista, como um exemplo de ambiente no qual pode-se encontrar a Geometria. Percebe-se aqui o retorno à sua concepção de Geometria, citando a sala, imediatamente após a citação do corpo, ele retorna à Geometria a respeito da qual ele tem certa segurança, pois vê, nessa sala, objetos que representam conceitos da Geometria Euclidiana.

O professor P04 destacou três divisões da Matemática: questão de ordem, algébrica e topológica. Para P04, as Geometrias estão relacionadas à questão topológica, e elas “são importantes para a formação deles (alunos), conhecer as dimensões, bidimensional, tridimensional, enfim, conhecer o mundo que ele vive”.

Os professores P02, P04, P05, P27 comentaram que a Geometria é importante para o aluno perceber o mundo em que ele vive, para conhecer o espaço e se localizar. Essa justificativa, porém, é pertinente quando consideramos que a Geometria é um meio para desenvolver a percepção espacial e a visualização.

Schmitz, Ledur e Milani (1994, p. 14) destacam que as crianças menores de 5 anos localizam objetos no espaço utilizando, frequentemente, termos como: é vizinho de, está ao lado de, ou entre, ou dentro. Ao copiarem figuras, complementam os autores, desconhecem retas, ângulos, modificam as formas, mas percebem e representam determinadas relações - denominadas topológicas. Aos 7-8 anos, aproximadamente, inicia-se a construção do sistema projetivo e euclidiano para localização dos objetos. As relações projetivas são relações que permitem a coordenação dos objetos entre si em um sistema de referência. Uma das noções fundamentais do espaço projetivo é a noção de direita/esquerda. As relações Euclidianas ou métricas têm como referência a noção de distância e permitem situar os objetos uns em relação aos outros, considerando um sistema de referência fixo.

Além de comentar sobre a importância da Geometria para conhecer e poder se localizar no espaço, P05 expôs que “a Geometria é praticamente forma, tudo que tem forma, a gente pode dizer que é geométrico”. Mas, ao mesmo tempo, P05 está reduzindo a Geometria às formas geométricas, fato que pode ser comprovado pela sua concepção de Geometrias não Euclidianas descritas na seção 7, a qual não demonstra conhecimento de Topologia, em que as formas dos objetos não são importantes, mas sim as qualidades que eles possuem. P05 também comentou que a Geometria é importante na “questão do volume, a questão depois das medidas de capacidade, tudo isso vai depender do que ele conhece da forma”. Sua fala reporta, aliás, ao fato dela acreditar que a Geometria se reduz ao estudo de formas geométricas da Geometria Euclidiana e à aplicação de fórmulas para o cálculo de volume.

A professora P13 alterou o foco da questão comentando sobre a época na qual a Geometria aparecia somente nas últimas páginas dos livros didáticos e que, nos últimos anos, ela tem sido “resgatada”. Expôs também que os alunos ainda “não sentiram o sabor de gostar” da Geometria e isso acontece, segundo P13, porque o professor não trabalha com questões práticas. Por fim, comenta, assim como P02, que “no mundo físico é tudo Geometria”, ou seja, apesar de não ser explícita, essa professora acredita que a Geometria é importante, porque está presente no cotidiano dos indivíduos. Não se pode deixar de comentar a última frase citada pela professora, “enquanto eu estive estudando eu não tive essa ligação, eu só consegui fazer essa ligação depois”. A hipótese aqui é a de que, ao se referir ao “enquanto eu estive estudando”, ela recordou o período em que estava formalmente matriculada em algum curso, e quando comenta “só consegui fazer essa ligação depois”, ela se refere ao período no qual passou a refletir sobre a possibilidade de usar a Geometria “no mundo físico”.

Para as professoras P19, P20 e P27 a Geometria é importante, porque está em todos os lugares. Para P19, “qualquer lugar por onde eles andarem, eles têm que perceber que a Geometria está ali. É uma coisa visível”. Para P20, “tudo que a gente vê é geométrico, tudo que o aluno olha é geométrico, é triângulo, é retângulo, é círculo”. P27 expôs que a “Geometria está inserida em todo o nosso contexto de vida”.

A fala das três professoras demonstra a concepção de que a Geometria está nas coisas, nos objetos. Porém, cabe ressaltar que aquilo que “encontramos” são representações dos entes geométricos. Ver, perceber e entender as representações geométricas é um processo construído, estabelecido aos poucos e “num processo dialético que envolve, necessariamente, a influência do mundo físico e uma reflexão intelectual sobre este mundo” (PAIS, 1996, p. 70). Não basta observar o mundo físico para entender e perceber a Geometria, como expôs P19: “você pode comparar com o dia a dia, mostrar no concreto” e P20: “como faz parte do dia a dia, ele tem que também estar sempre inserido no conteúdo”. Segundo Pais (1996) a visualização e a abstração são estabelecidas numa relação de permanente comparação entre o mundo das ideias e o mundo físico. Espera-se que, de fato, P20 não acredite que tudo que o aluno olha é triângulo, retângulo, círculo..., aliás, a menos das construções realizadas pelo homem, é praticamente impossível observar na natureza, representantes desses objetos geométricos.

Para a professora P27, “à Geometria não é dado o valor que ela merece”, e isso ela concluiu ao perceber que, quando leciona no terceiro ano do Ensino Médio, os alunos não sabem conceitos básicos de Geometria, tais como: ângulo agudo e suplementar, retas paralelas, ente outros. Na verdade, será que os professores sabem o que é ângulo?

A professora P24 destacou a importância da Geometria para a construção do pensamento geométrico e de localização: “é importante pra (sic) tudo, pra (sic) construção do pensamento geométrico”. Expôs um fato que, às vezes, ela não tem “a questão da localização, de se posicionar no mundo” e comenta que tal isto dificulta, inclusive, o momento que se está dirigindo e, por extensão, gera momentos insegurança.

Para a professora P26, a Geometria é importante porque auxilia a compreensão do mundo. Também questiona que “deve ter alguma pesquisa que demonstre que os meninos têm mais facilidade por causa da noção espacial”.

Em geral, percebe-se que todos os professores discorreram sobre a importância da Geometria, em função de sua capacidade de promover o entendimento do espaço/mundo e que ela está em todos os lugares.

Lorenzato (1993), porém, destaca que não basta dizer que a Geometria está em toda a parte, é preciso conseguir percebê-la:

> [...] mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade [...] seja no visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria (LORENZATO, 1993, p. 5).

A concepção dos professores está relacionada à importância da Geometria como uma importante ferramenta no conhecimento, na localização e na percepção do espaço físico. Nesse contexto, pode-se entender a Geometria como um instrumento significativo para a compreensão do mundo real. Fainguelernt (1999) acrescenta que o estudo da Geometria,

> [...] é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida (FAINGUELERNT, 1999, p.53).

Segundo a autora, a visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais.

8.3 – Para ser utilizada como ferramenta na própria Matemática e auxiliar no aprendizado de outros conteúdos

Cinco professores justificaram, entre outras coisas, que a Geometria é importante, porque ela pode ser utilizada como ferramenta em outros conteúdos da Matemática.

> P01 – “é importante não ter só um tipo de raciocínio, ter o geométrico junto com o algébrico, também do aritmético, mas, pelo menos, o geométrico com algébrico é bom que pra (sic) eles começarem a visualizar as coisas. E, hoje, se pede muito, se pede muito quando você vai calcular alguma coisa, você precisa saber de área e volume”.

> P09 – “eu acho importante falar dos postulados, dos teoremas, das Geometrias não Euclidianas, das aplicações tanto da Geometria Euclidiana quanto das não Euclidianas. Nós temos muitas opções de materiais para trabalhar as Geometrias, pra (sic) ajudar os alunos a compreenderem”.

> P15 – “eu sou suspeito pra (sic) falar, porque é a matéria de que eu mais gosto. Desde estudante, eu tinha uma facilidade pra (sic) estudar coisas que eu consigo ver, que sejam palpáveis, que seja mais real. E a Geometria, dentro da Matemática, acho que é a coisa mais palpável que tem. E a facilidade que a gente tem de encontrar exemplos na Geometria que explique as outras. Por exemplo, a Álgebra, até a própria Aritmética, você tem como usar a Geometria pra (sic)

explicar outros conteúdos; Geometria é ótima como aplicação de outros conteúdos".

P21 – "eu acho que é importante sim. Eu acho. É importante e ela é assim colocada sempre, não é assim: agora, nós vamos estudar Geometria. Ela está sempre intercalada com outros conteúdos".

P22 – "eu acho que é importante, tanto que, quando eu trabalho a espacial e depois pra você trazer pra (sic) plana, eu trabalho bastante com eles mostrando o porquê. Por exemplo, por que vamos trabalhar uma equação de reta? Da onde saiu isso? Nós enxergamos, nós estamos vendo a reta ali, então vamos escrevê-la ao invés de desenhar. Eu procuro mostrar pra (sic) eles o material que a gente tem lá e observar fora, e tentar trazer pra (sic) dentro da sala de aula a Geometria".

A professora P01 expôs que o aluno deve "ter" três tipos de raciocínio: o geométrico, o aritmético e o algébrico. Enfatizou que o geométrico e o algébrico "é bom que pra (sic) eles começarem a visualizar as coisas". Entende-se que P01 está se referindo à aplicação de fórmulas no estudo da Geometria, uma vez que ela termina sua fala com a seguinte frase: "se pede muito quando você vai calcular alguma coisa, você precisa saber de área e volume".

Para a professora P09, é importante o aluno saber dos postulados, dos teoremas e das aplicações da Geometria Euclidiana e das Geometrias não Euclidianas. Ela comenta sobre a quantidade de materiais que podem contribuir sobremaneira para o entendimento das Geometrias. Os comentários de P09 são pertinentes, porém é preciso que o professor entenda que a manipulação de materiais não é suficiente para a aprendizagem. Pais (2004) destaca que:

> Há geralmente uma grande expectativa de que, com o recurso dessa manipulação, o aluno possa, por si mesmo, e sob uma orientação pedagógica, descobrir propriedades que, uma vez abstraídas,

> contribuiriam na elaboração conceitual. [...] não se trata de condenar o uso de objetos e sim reconhecer que a aprendizagem somente vai desencadear-se a partir do momento que o aluno conseguir fazer uma leitura geométrica da representação envolvida (PAIS, 2004, p. 67).

O professor P15 discutiu as possibilidades de se trabalhar a Geometria juntamente à Álgebra, e a aplicabilidade da Geometria em outros conteúdos. P15, assim como P09, comenta sobre a utilização de materiais no ensino da Geometria: “a Geometria, dentro da Matemática, acho que é a coisa mais palpável que tem”. A hipótese aqui é a de, novamente, a crença de que os materiais manipuláveis são de fato os objetos geométricos e, por isso, para esses professores, a Geometria é mais palpável.

A concepção da professora P21 é confusa, e ela tem dificuldade em explicá-la. O que se pode supor por meio de sua fala: “a Geometria é intercala com outros conteúdos” é que essa professora acredita que a Geometria e outros conteúdos apresentam elementos que os interligam, provavelmente, como P01, que associa à Geometria os cálculos de área e volume que, por sua vez, estão atrelados à Aritmética.

A professora P22 discorreu sobre o ensino de Geometria vinculado ao estudo da equação da reta. Ao se referir à equação da reta, tudo indica que P22 está pensando na Geometria Analítica, uma vez que não temos equação de reta na Geometria Euclidiana, por exemplo. Além disso, na fala dessa professora: “nós enxergamos, nós estamos vendo a reta ali, então vamos escrevê-la ao invés de desenhar”, percebeu-se alguns problemas de construção de conhecimento, uma vez que a reta não é visível e que não é possível desenhá-la e, muito menos, escrevê-la. Essa fala corrobora com a ideia de que a professora está pensando na Geometria Analítica, e o que ela escreve é a equação que representa a reta.

Bressan, Bogisic e Grego (2006, p. 87) explicam que o ensino de Geometria, na Educação Básica, “serve tanto para o aluno interpretar e analisar o mundo físico e atuar em torno dele como para expressar e interpretar conceitos e imagens próprias da matemática ou de outras ciências” (BRESSAN, BOGISIC e GREGO, 2006, p. 87). Os mesmos autores complementam que essa justificativa é pertinente, mas, se um aluno possui um conhecimento geométrico limitado, é possível que ele tenha dificuldades em compreender os demais conteúdos.

Para Fainguelernt (1999, p. 15), a Geometria Euclidiana é considerada uma ferramenta para "compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos; é, talvez, a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e real" Ela exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. Assim, nessa perspectiva, não é suficiente conhecer bem a Aritmética, a Álgebra ou a Análise para conseguir resolver situações-problemas em Geometria.

8.4 – Fala que é importante, mas não justifica sua resposta.

Um professor citou que a Geometria é importante, mas não justificou o motivo.

> P06 – "importantíssimo, pra (sic) mim é uma das partes da Matemática, entre você ficar lá na sétima série colocando um monte de coisa, porque o conteúdo da sétima série é um monte de Álgebra, eu gosto muito de planificações, eu gosto, mas eu tenho muita dificuldade em trabalhar".

Para a professora P06, a Geometria é importante, no entanto, ao justificar sua resposta, ela comenta sobre o gosto que tem pelas planificações e das dificuldades em trabalhar com esse conteúdo.

8.5 – Sem categorização.

Não foi possível enquadrar a fala do professor P16 nas categorias anteriores.

> P16 – “pro (sic) aluno se situar e pra (sic) ele desenvolver uma coordenação motora fina ele precisa manusear. Com o manuseio, ele consegue aprender muito mais do que só eu falando, eu mostrando pela TV, ou datashow; ele construindo, sabendo pegar destruir, armar de novo, ele consegue aprender melhor essas informações. Porque, com a prática, você aprende muito mais do que só com a teoria”.

Esse professor, ao se referir à importância da Geometria, comentou sobre a relevância do uso de materiais e de metodologias que auxiliam o aprendizado do conteúdo, que não era o foco de questão neste momento.

Quanto à importância da Geometria, obtemos três concepções: para ser utilizada em aplicações e situações do cotidiano, para conhecer o espaço/mundo e porque ela está em todos os lugares, para ser utilizada como ferramenta na própria Matemática e mediar o aprendizado de outros conteúdos. As três concepções obtidas estão relacionadas às aplicações da Geometria.

A seguir, destaca-se alguns autores que relatam sobre a importância da Geometria. Os autores Bressan, Bogisic e Grego (2006) expõem sete justificativas relacionadas à importância da Geometria. A primeira é que a Geometria forma parte de nossa linguagem cotidiana, ou seja, nossa linguagem verbal possui muitos termos geométricos: ponto, reta, plano, curva, ângulo, paralela, círculos, quadrados, perpendicular.

A segunda é que a Geometria tem importantes aplicações em problemas reais: está relacionada às medidas de superfícies, ou para calcular o volume de um objeto, ler mapas e planos.

A terceira justificativa é que a Geometria é utilizada em todas as áreas da Matemática: ela comporta um tema unificador e é um recurso importante de visualização de conceitos aritméticos, algébricos e estatísticos. São exemplos de modelos geométricos, usados na Educação Básica: a reta numérica para números e operações; as figuras geométricas para desenvolver o significado de conceitos relativos a números fracionários; as ideias de curva, figura e objeto relacionadas aos conceitos de longitude, superfície e volume; gráficos de barra e de círculo. Se um aluno possui um conhecimento geométrico limitado, é possível que ele tenha dificuldade em compreender os conteúdos elencados acima.

A quarta justificativa é a de que a Geometria serve de base para compreender conceitos de Matemática avançada e de outras Ciências. Para os autores a Geometria é essencial em Análise Matemática, é um pré-requisito para a Física, a Astronomia, a Química, a Biologia, a Geologia, as Tecnologias e todas as Artes Plásticas.

A quinta justificativa diz respeito à Geometria como um meio de desenvolver a percepção espacial e a visualização. Todos os indivíduos necessitam de habilidades para visualizar objetos no espaço e apreender suas relações, tais como a capacidade de entender representações bidimensionais de objetos tridimensionais.

A sexta justificativa é a da Geometria como modelo de disciplina organizada logicamente: a Geometria foi a primeira área da Matemática organizada logicamente. No começo da fala de P09, tivemos a impressão de que ela iria por esse caminho – "eu acho importante falar dos postulados, dos teoremas, das Geometrias não Euclidianas" – mas acaba não construindo o raciocínio, caminhando para as aplicações e possibilidades da utilização de materiais manipuláveis.

A sétima e última justificativa é a de que a Geometria possui valor estético e cultural: a Geometria está presente na pintura, na dança, na moda, na escultura, no paisagismo, etc.

Outro autor que elenca algumas justificativas sobre a importância da Geometria é Usiskin (1994). Ele expõe que as justificativas dependem dos critérios e das visões que os professores – tanto da Educação Básica, os universitários, quanto os pesquisadores – apresentam em relação a esse conteúdo. O autor chama as justificativas para a Geometria de dimensões. A primeira dimensão está relacionada com a Geometria como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras. A segunda dimensão diz respeito à Geometria como estudo do mundo real e físico. Na terceira dimensão a Geometria é uma forma de representar conceitos matemáticos, cuja origem não é visual, nem mesmo física. A quarta e última dimensão é a Geometria como exemplo de um sistema matemático. O autor expõe outras duas dimensões, não menos importantes que as já apresentadas: uma dimensão sociocultural e uma dimensão cognitiva de compreensão, envolvendo imagens mentais e cognição. Para Usiskin (1994), uma formação em Geometria que ignore qualquer uma dessas dimensões pode ser considerada insatisfatória.

Os dados obtidos na pesquisa mostram que os professores entrevistados conhecem pouco das possíveis justificativas sobre a importância da Geometria. De todas as justificativas apresentadas, os professores conhecem àquelas referentes à aplicação da Geometria em problemas reais (construção de casas, cálculo de áreas e volumes, entre outros); à Geometria como uma ferramenta para as demais áreas da Matemática; e a que diz respeito à Geometria como um meio de desenvolver a percepção espacial e a visualização.

Se entendermos que as concepções dos professores não são as mais adequadas e se desejarmos que eles apresentem/incorporem as justificativas descritas acima, será necessário pensar em processos de mudanças para a construção de novas concepções.

9 Considerações Finais

Estudar as concepções dos professores é, segundo Ponte (1992), fazer antropologia na nossa própria cultura, trata-se de um esforço particularmente difícil, tanto pelo objeto de estudo quanto pelo fato de o investigador estar inserido na mesma cultura que o investigado. Ponte (1992, p. 34) expõe que as pessoas raramente sentem-se à vontade para expor "as partes mais íntimas do seu ser", bem como em expressar as suas concepções, particularmente, àquelas que não estamos habituados a pensar reflexivamente.

Apesar das dificuldades em pesquisar as concepções, propomos a realização desta investigação. Para isso, realizou-se um estudo a respeito das concepções dos professores sobre as Geometrias, com vistas a responder a seguinte questão de pesquisa: quais as concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana, e as Geometrias não Euclidianas? E atingir o seguinte objetivo: identificar, descrever e analisar as concepções dos professores sobre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas.

Para responder a questão de pesquisa e alcançar o objetivo proposto, realizou-se uma pesquisa qualitativa cujo instrumento selecionador foi um questionário. Para coleta de dados, especificamente, organizou-se uma entrevista semiestruturada e trinta e seis cartões que continham informações a respeito das Geometrias.

A entrevista semiestruturada e os cartões foram essenciais na identificação das concepções dos professores. A entrevista foi um instrumento adequado para a obtenção das informações sobre o que as pessoas sabem, esperam, sentem, pretendem fazer, fazem ou fizeram. No entanto, ao elaborar as questões da entrevista, percebeu-se que era preciso algo a mais para a identificação das concepções. A construção dos cartões veio, assim, complementar as questões da entrevista. Porém, no início da investigação, a hipótese era a de que os cartões teriam um papel mais determinante na obtenção das concepções dos professores. No entanto, vários deles comentaram ou relacionaram poucos cartões, principalmente, aqueles referentes às Geometrias não Euclidianas. Mas, de qualquer forma, eles foram importantes, porque as relações e comentários realizados corroboraram com as concepções dos professores identificadas por meio da entrevista.

Observou-se também que os cartões tornaram-se um material didático, uma vez que, ao final das entrevistas, a pesquisadora explicava de forma sucinta cada um deles e os relacionava com as respectivas Geometrias. Nesse momento, os professores faziam perguntas, discutiam suas dúvidas e expunham suas opiniões sobre o assunto.

Quantos aos participantes da pesquisa, foram 27 professores de Matemática que atuam em escolas públicas do estado do Paraná. Estes professores têm graduação em Matemática (treze professores), em Ciências com habilitação em Matemática (treze professores) e Ciências Biológicas com habilitação em Matemática (um professor). Todos eles tinham, pelo menos, uma especialização, sendo que cinco já participaram do PDE, quatro estavam participando do programa, dois eram Mestres e cinco estavam cursando o Mestrado no momento da investigação.

A respeito da formação em Geometria Euclidiana, verificou-se que todos os professores lembraram que estudaram conceitos e resultados dessa Geometria durante a graduação. Entretanto, nem todos tiveram uma disciplina específica de Geometria Euclidiana. Encontramos professores que estudaram somente Desenho Geométrico, enquanto outros, somente Geometria Descritiva. Apenas um professor estudou Geometria Projetiva durante a graduação.

Após a formação acadêmica, a maioria dos professores estudou Geometria Euclidiana em cursos oferecidos pela SEED e pelos NRE's. Notou-se que, em geral, os professores não estudaram Geometria Euclidiana Axiomática. Diante desse contexto, fica um questionamento: será que é possível compreender o significado das Geometrias não Euclidianas, sem saber a lógica da construção da Geometria Euclidiana? A importância desse conhecimento é inegável, uma vez que as Geometrias não Euclidianas surgem principalmente da negação e do abandono de resultados da Geometria Euclidiana. O principal meio pelo qual os professores tiveram acesso às Geometrias não Euclidianas foi em cursos oferecidos pela SEED, pelos NRE's e por meio de leituras.

Observa-se também que o fato de existir uma estrutura curricular padrão, contida nas DCE, não é garantia de que todos os professores conheçam e estudem os conteúdos geométricos nela descritos. Por meio dos relatos dos docentes, percebeu-se que eles sabem menos conteúdos de Geometrias do que aqueles indicados pelas DCE e apresentados na Seção 3.

A pergunta norteadora também permitiu investigar as concepções que os professores apresentaram, no momento da investigação, sobre a construção do conhecimento geométrico, a Geometria Euclidiana, as Geometrias não Euclidianas e a importância que eles atribuem às Geometrias.

Assim como Guimarães (2003), consideramos que o estudo das concepções permite ter acesso à vida mental do professor, ou seja, “conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento” (GUIMARÃES, 2003, p. 4). Nesta investigação, o termo concepção foi entendido como o conjunto de conhecimentos, opiniões, preferências e ideias que os professores possuem a respeito de Geometrias.

Quanto às concepções sobre a construção do conhecimento geométrico, os professores destacaram quatro momentos: antes da graduação, na graduação, na pós-graduação e no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula. Constatou-se que a maioria dos professores considerou que as leituras e estudos realizados no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula foram fundamentais para a construção do conhecimento geométrico.

Diante do observado, estudar as Geometrias seja na graduação ou após, é condição suficente para ter uma concepção a respeito do assunto? Tudo indica que o fator determinante para a construção de uma concepção é a forma como os conteúdos são trabalhados, as discussões e reflexões a respeito da natureza do conhecimento geométrico são abordados, e o interesse que os professores têm sobre a Geometria.

Quanto às concepções sobre a Geometria Euclidiana, obtivemos três categorias:

- 6.1 – entes geométricos da Geometria Plana e/ou Espacial;
- 6.2 – postulados, axiomas, noções primitivas e entes geométricos da Geometria Euclidiana;
- 6.3 – os aspectos descritos nas categorias anteriores, porém os professores dessa categoria complementam sua concepção.

Os entes geométricos mais elencados foram: ponto, reta, segmento de reta, figuras e sólidos geométricos. Identificamos, assim, que a maioria dos professores relacionou os cartões: *reta paralela* e *representação de reta paralela, triângulo euclidiano* e *soma dos* *ângulos internos de um triângulo igual a 180º.* Tais relações, por seu turno, advêm do fato de que quase todos os professores usam entes geométricos para descrever sua concepção de Geometria Euclidiana. Alguns deles também usaram as palavras Geometria Plana e/ou Espacial.

As duas primeiras categorias – 6.1 e 6.2 – apontam a falta de clareza que os professores têm acerca da Geometria Euclidiana. Suas falas demonstram que eles concebem a Geometria Euclidiana como o reconhecimento e nomeação de figuras e sólidos geométricos. Os professores da categoria 6.3 demonstraram uma concepção que se aproxima do conhecimento geométrico.

Quanto às concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, elas foram divididas em "concepções sobre as Geometrias não Euclidianas" e "o que chamou a atenção nas Geometrias não Euclidianas".

No que se refere as concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, obtivemos três categorias:

- 7.1.1 – professores que não apresentam concepções a respeito dessas Geometrias;
- 7.1.2 – professores que apresentam algumas ideias e opiniões;
- 7.1.3 – professores que expõem suas concepções por meio de resultados e/ou conceitos das Geometrias não Euclidianas.

Na categoria 7.1.1, encontram-se professores que desconhecem as Geometrias não Euclidianas e professores que já ouviram falar sobre o assunto, porém ainda não construíram uma concepção a respeito.

Os professores da categoria 7.1.2 apresentam algumas ideias e opiniões a respeito das Geometrias não Euclidianas. Nota-se, assim, que os professores conhecem pouco os fundamentos teóricos das Geometrias não Euclidianas constantes na DCE. Cabe destacar que a maioria dos professores ainda não integrou os conteúdos não euclidianos às suas concepções. Grande parte dos professores que compõem a categoria 7.1.2 estudou Geometrias não Euclidianas em cursos oferecido pela SEED ou pelos NRE's, no entanto, esses cursos, não foram suficientes para quebrar/instaurar novas concepções e reflexões acerca do conhecimento geométrico. Tudo indica que o estudo dos conteúdos não euclidianos não foram suficientes para produzir uma nova concepção. Acredita-se que se tratam, portanto, de concepções em formação. Os professores da categoria 7.1.3 já apresentam noções que se aproximam da teoria das Geometrias não Euclidianas. Eles usaram conceitos e/ou resultados dessas Geometrias para expressar suas concepções.

Assim, salienta-se que as análises realizadas durante esta investigação dão indicativos de que a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE do Paraná possibilitou reflexões acerca do ensino de Geometrias. Além disso, acredita-se que, com a inclusão destes conteúdos, os professores passaram a se preocupar e a buscar conhecer essas Geometrias. Por outro lado, o estudo das Geometrias não Euclidianas pode ter causado abalos e instabilidades no entendimento da própria Geometria Euclidiana. Nossa hipótese – mas que necessita de outras pesquisas – é a de que as concepções sobre as Geometrias foram e estão sendo alteradas/formadas com a inclusão das novas Geometrias na Educação Básica.

O estudo das Geometrias não Euclidianas, em geral, chama a atenção, principalmente em se tratando dos conceitos e resultados que diferem da Geometria Euclidiana. Para os professores participantes da pesquisa, chamou a atenção nas Geometrias não Euclidianas:

- 7.2.1 – mais bonita e interessante;
- 7.2.2 – os resultados e conceitos das Geometrias não Euclidianas;
- 7.2.3 – saber que existiam;
- 7.2.4 – sem categoria;
- 7.2.5 – não chamou a atenção.

Os professores incluídos em 7.2.1 consideram a Geometria Fractal mais atrativa e interessante do que a Geometria Euclidiana. Quanto aos resultados e conceitos – categoria 7.2.2 – os professores comentaram a respeito da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser menor do que 180º na Geometria Hiperbólica, e maior do que 180º na Geometria da Superfície da Esfera; também destacaram a questão das retas paralelas na Geometria Hiperbólica e a não existência de retas paralelas na Geometria da Superfície da

Esfera e na Geometria Projetiva; alguns conceitos da Topologia e da Geometria Fractal. Os professores da categoria 7.2.3 relataram que ficaram surpresos com o fato de existirem Geometrias diferentes da Euclidiana.

Por fim, apresenta-se as concepções sobre a importância da Geometria. Foram elencadas as seguintes justificativas:

- 8.1 – para ser utilizada em aplicações e situações do cotidiano;
- 8.2 – conhecer o espaço/mundo; a Geometria está em todo lugar;
- 8.3 – para ser utilizada como ferramenta na própria Matemática e auxiliar no aprendizado de outros conteúdos;
- 8.4 – fala que é importante, mas não justifica sua resposta;
- 8.5 – sem categorização.

As justificativas apresentadas pelos professores estão relacionadas, principalmente, à aplicabilidade da Geometria. As concepções dos professores sobre a importância da Geometria são apropriadas, porém não são suficientes. Bressan, Bogisic e Grego (2006) expõem sete justificativas relacionadas à importância da Geometria. Destaca-se que os participantes da pesquisa conhecem somente aquelas relacionadas com a aplicabilidade, com a utilidade em todas as áreas da Matemática e como um meio de desenvolver a percepção espacial e a visualização.

Diante das concepções detectadas nesta pesquisa, o objetivo não é classificá-las como certas ou erradas, porém, considera-se que as concepções dos professores das categorias 6.1 e 6.2 (Geometria Euclidiana) e da categoria 7.1.2 (Geometrias não Euclidianas) são concepções fundamentadas em opiniões, preferências e ideias sobre as Geometrias. Os dados da pesquisa indicam que os conhecimentos, tanto da Geometria Euclidiana quanto das não Euclidianas, dos professores dessas categorias, não são fundamentadas nos conceitos e resultados dessas Geometrias.

Porém, sejam as concepções sobre as Geometrias, formadas e mantidas por meio das experiências vividas e/ou assimiladas na Educação Básica, nos cursos de graduações, de pós-graduações, em formações, ou na troca com os pares, acredita-se que elas são expostas de forma implícita ou explícita no cotidiano da sala de aula.

Embora a maioria dos professores tenha relatado que estudaram Geometrias, muitos não se sentiram seguros quando foram convidados a refletir sobre o assunto. Após a realização das análises, ficou um questionamento: será que os professores já haviam refletido sobre as questões que envolvem a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas? Tudo indica que os professores conhecem pouco acerca da história, da epistemologia, da filosofia, dos conceitos e resultados sobre as Geometrias, o que de um modo ou de outro, justifica as concepções que apresentam.

Se admitirmos, entretanto, que as concepções dos professores não são as mais apropriadas para o ensino de Geometrias, como é possível pensar mudanças nas concepções?

Ponte (1992) afirma que é difícil mudar as concepções dos professores, uma vez que é complexo mudar a rotina, as atitudes e as suas práticas. O autor é bastante enfático ao expor que mudanças profundas no sistema de concepções só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilíbrios. Destaca ainda que “isto apenas acontece no quadro de vivências pessoais intensas como a participação num programa de formação altamente motivador ou numa experiência com uma forte dinâmica de grupo, uma mudança de escola, de região, de país, de profissão” (PONTE, 1992, p. 27).

Apesar disso, o autor expõe que tanto a formação inicial quanto a formação continuada são caminhos nos processos de mudanças. A formação continuada é considerada imprescindível e relevante tanto para atualização de seus conhecimentos e técnicas específicas da sua área, quanto para desenvolver competências relacionadas ao ensino.

Manrique (2003) afirma ainda que os processos de mudanças estão relacionados a três componentes: externo, interno e relacional. Quanto à componente externa, ela explica que ela focaliza processos de formação desenvolvidos para desencadear mudanças em atitudes, práticas e concepções dos professores. Esses processos de formação devem, por sua vez, considerar as experiências e os saberes docentes, estabelecer uma reflexão sobre a experiência e pensamento do professor. Quanto à componente interna, a autora destaca que só é possível promover mudanças quando as concepções e crenças forem identificadas, e para que isto ocorra é necessário alterações na prática escolar, a tomada de consciência de ações e a superação de resistências por parte do professor. A componente relacional busca explicitar as relações que a pessoa desenvolve consigo, com o outro e com o mundo. O professor sempre está envolvido com dilemas que evidenciam momentos de reflexão e de tomada de decisão e, portanto, colocam em jogo sua lógica e seus desejos.

Se desejarmos mudanças nas concepções dos professores, será necessário que eles possam perceber e analisar as concepções que norteiam suas atividades, sejam elas conscientes ou não, consistentes ou não. As concepções podem limitar ou não a construção do conhecimento. Enquanto a identificação das concepções, por extensão, pode contribuir tanto para a determinação das ações adotadas pelos educadores, quanto para uma tomada de consciência da necessidade de mudanças pelo próprio professor.

Diante do exposto e dos dados obtidos nesta investigação, acredita-se que identificar, descrever e analisar as concepções dos professores é uma condição indispensável para transformar o cenário do ensino de Geometrias. Espera-se que os professores entrevistados, e os demais possam ler e refletir sobre esta investigação. Não almeja-se, de forma alguma, que a leitura deste texto possa mudar suas concepções, mas espera-se que possa desencadear um sentimento de reflexão.

Referências

ALMOULOUD, Sido Age, MANRIQUE, Ana Lucia, SILVA, Maria José Ferreira da, CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. **A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. In: Revista Brasileira de Educação, n.27, 2004.

BACHELARD, Gastón. **O Novo Espírito Científico**. Tradução: Juvenal J. Marchevsky. 2ª ed. Rio de Janeiro: Edições Tempo Brasileiro, 1985.

BARRANTES, Manuel; BLANCO, Lorenzo. **Caracterização das concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da Geometria.** Tradução: Carlos Alberto B.A. de Figueiredo. Zetetiké, n.25, v.14, p.65-91, 2006.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria fractal**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática**. Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BARROS, Abdênago Alves; ANDRADE, Plácido Francisco de Assis. **Introdução à Geometria Projetiva com tratamento vetorial**. Universidade Federal do Ceará, 2004.

BORGES, Carloman Carlos. **A Topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da Matemática.** Caderno de Física, 03, 2005.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1999.

BRAGA, Theodoro. **Problemas de Desenho Linear Geométrico**. 10ª ed. São Paulo: Editota LEP, 1965.

BRESSAN, Ana. Maria; BOGISIC, Beatriz; CREGO Karina. **Razones para enseñar geometría en la educación básica.** Mirar, construir, decir y pensar... Novedades Educativas. Buenos Aires. 2010.

CARLI, Francielli Aparecida Rocha de. **A aprendizagem de Geometrias não Euclidianas: um estudo realizado com alguns professores da pública de ensino**. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.

CARMO, Manfredo P. do. **Geometrias Não-Euclidianas**. In: Matemática Universitária; nº 6. SBM.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **A concepção de matemática do professor também se transforma**. Dissertação: mestrado em Educação. UNICAMP. Campinas, 1989.

CRESCENTI, Eliane P. **Os Professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino**. Dissertação: mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2005. 252 p.

CURY, Helena N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. Tese de Doutorado em Educação. UFRGS, 275p, Porto Alegre.1994.

DANA, Marcia E. Geometria – um enriquecimento para a escola elementar. In: LINDQUIST, Mary M., SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

DEWEY, John. **Como pensamos**. Tradução: Godofredo Rangel. 2ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 1953.

ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. **Tópicos em Topologia intuitiva**. Disponível em: <http://www.uff.br/var/www/htdocs/dalicenca/images/artigo7.pdf>. Acesso: 03 nov. 2012.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Estudio de las Geometrias**. Tradução: Susana Siperstein. México: Unión Gráfica, 1969.

________História da Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

________**Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2008.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática: representação e construção em Geometria**. 1ª ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERREIRA, Ana Cristina. **O desafio de ensinar – aprender matemática no noturno: um estudo das crenças dos estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte**. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação) – Unicamp, Campinas, 1988.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário da língua portuguesa.** 2ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva**. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FONSECA, Maria da Conceição; LOPES, Maria da Penha; BARBOSA, Maria das Graças Gomes; GOMES, Maria Laura Magalhães; DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** 3ª ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2011.

FRANCA, Jasias C.; KALEFF, Ana Maria M. R. **A História, as Geometrias Não-Euclidianas e os Livros Didáticos do Ensino Médio: uma análise da apresentação de retas paralelas.** Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências – LIMC. Disponível em: <http://www.limc.ufrj.br/ htem4/papers/5.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2013.

GERDES, Paulus. **Sobre o despertar do pensamento geométrico**. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

GUIMARÃES, Henrique Manuel. **Ensinar Matemática: concepções e práticas**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1988. 290f.

___________. **Concepções sobre a Matemática e a actividade Matemática: um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2003. 431f.

HILBET, David. **Fundamentos da Geometria**. Tradução: A. J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 4, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORIGGIO, Plácido. **Desenho Geométrico**. S/d, Volume 1.

LOVIS, Karla Aparecida. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:** o que pensam e o que sabem os professores. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009. 148 f.

MANRIQUE, Ana Lúcia. **Processo de Formação de Professores em Geometrias: Mudanças em Concepções e Práticas**. Tese (Doutorado em Educação) – PUC/SP, São Paulo, 2003. 169f.

MARMO, Carlos. **Construções fundamentais.** São Paulo: Editora Moderna, 1974.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides**. Tradução: Enézio de Almeida. 1ª ed. São Paulo: Geração Editora, 2004.

MORAES, Roque. **Análise de Conteúdo**. In: Educação epistemologia e Ciências da educação, v. 21. Porto Alegre: PUC, 1998.

NACARATO, Adair M. **Educação Continuada sob a Perspectiva da Pesquisa-Ação: Currículo em ação de um grupo de professores ao aprender ensinando Geometria**. Tese (Doutorado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 223f.

OLIVEIRA, Ádna Elba; GUIMARÃES, Gilda Lisbôa. **Concepções de professores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre o ensino de Geometria**. 2008, Recife, 2º SIPEMAT. Disponível em: http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/CD-ROM%202%20SIPEMAT/artigos/CO-82.pdf. Acesso: 03 dez. 2012.

PAIS, Luiz Carlos. **Intuição, Experiência e Teoria Geométrica**. Zetetiké, Campinas, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul/dez, 1996.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008.

POINCARÉ, Henri. **Ensaios fundamentais**. Tradução: Vera Ribeiro. 1ª ed. Rio de Janeiro: Contraponto e PUC Rio, 2008.

__________. **O valor da Ciência**. Tradução: Maria Helena F. Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PONTE, João Pedro. **Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação.** Educação Matemática: Temas de investigação. Universidade de Lisboa. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

______. **Da formação ao desenvolvimento profissional.** Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat, Lisboa, 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte>. Acesso em: 5 nov. 2012.

RIVERA, Felix O.; NEVES, Juarenze C.; GONÇAVES, Dinei N. **Traçados em desenho geométrico**. Rio Grande: Editora de FURG, 1986.

ROSA, Antonio Pereira. **Geometrias não Euclidianas**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008, 242f.

SALVADOR, José Antonio. **Dobras, cortes, padrões e Geometria Fractal no ensino de Matemática**. Disponível em: <http://www.catalao.ufg.br/mat/simmi/simmi2009/arquivos/MC6.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2012.

SAMPAIO, João. C. V. **Uma introdução à Topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores**. São Paulo: EduFscar, 2008.

SANTALÓ, Luis A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Tradução: Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

SANTOS, Talita S. **A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica.** Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá, 2009. 138f.

SCHIMITZ, Carmen Cecília; LEDUR, Elsa Alice; MILANI, Miriam de Nadal. **Geometria de 1ª a 4ª série: uma brincadeira séria**. São Leopoldo: Ed. UNISINOS, 1994.

SMOGORZHEVSKI, A. S. **Acerca de la Geometria de Lobachevsky**. Tradução: Virgilio L. Más. Editora Mir, 1978.

SOUZA, Julio Cesar de Mello. **O escândalo da Geometria**. Rio de Janeiro: Editora Aurora, 1948.

TARDIFF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 13ª ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

THOMPSON, Alba. Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: A. Grouws (Org.). **Handbook of research in mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992.

___________. **A relação entre concepções de Matemática e de ensino de Matemática de professores na prática pedagógica**. Zetetiké, v.5, n.8, p11-43, 1997.

___________. **The relationship of teachers´ conceptions of Mathematics teaching to instructional practice**. Educational Studies in Mathematics, 15, 105-127, 1984.

USISKIN, Zalman. Resolvendo os dilemas permanentes da Geometria escolar. In: LINDQUIST, Mary M., SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

Bibliografia consultada

ALVES-MAZOTTI, Alda J.; GEWANDSZNAJER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2ª ed. São Paulo: Thomson, 2004.

BARROS, Rui Marcos de O.; FRANCO, Valdeni S. **Espaço e Forma**. Maringá: EDUEM, 2005.

BERTONHA, Regina A. **O ensino de Geometria e o dia-a-dia na sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 1989. 239 f.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segunda a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de C., ARAÚJO, Jussara de Loiola A. (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BONETE, Izabel P. **As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 240 f.

BONOLA, Roberto. **Geometrías no Euclidianas**. Buenos Aires: Espasa – Calpe Argentina S. A., 1951.

BRITO, Arlete de Jesus. **Geometrias Não – Euclidianas:** Um Estudo Histórico - Pedagógico. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas, 1995.

CABARITI, Eliane. **Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. 181 f.

ERNEST, Paul. **The impact of beliefs on the teaching of mathematics**. 1988. Disponível em: <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm>. Acesso em: 03 dez. 2012.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática Percursos Teóricos e Metodológicos**. 1ª ed. São Paulo: Autores Associados, 2006.

FRANCO, Valdeni Soliani, GERÔNIMO, João Roberto**. Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático**. Maringá: EDUEM, 2010.

GÁLVEZ, Delia. A Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da Geometria na escola primária. In: SAIZ, Cecilia Parra Irma (Org.). **Didática da Matemática**. São Paulo: Artmed Editora, 2006.

GREENBERG, Marvin J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

HAGUETTE, Teresa M. F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 7ª ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2000.

LINDQUIST, Mary M., SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MORON, Cláudia Fonseca. **Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de educação infantil em relação à Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 1998. 148f.

PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando. **Psicogénese e História das Ciências**. Tradução: Maria Fernanda de M. R. Jesuíno. 1ª ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

RUIZ, Adriano R,; BELLINI, Luzia M. **Matemática epistemologia genética e escola.** Londrina: Ed. UEL, 2001.

SANTALÓ, Luis A. **La Geometría en la formación de professores**. Buenos Aires: Red Olimpica, 1993.

SILVA, Kátia Gonçalves. **(Re) Constituição de fontes e uma análise inicial visando ao estudo de concepções sobre “Geometria” num momento de reformulação curricular**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – UFPR, Curitiba, 2007.

SILVA, Maria Regina Gomes. **Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática**. Bolema, Ano 11, nº 12, 1996.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

THIOLLENT, Michel J. M. **Crítica metodológica, investigação social & enquete operária**. 3ª ed. São Paulo: Polis, 1982.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática – PCM – Universidade Estadual de Maringá – UEM

O questionário a seguir destina-se aos professores de Matemática. Os professores das demais áreas podem ignorá-lo. Obrigada. O presente questionário faz parte da pesquisa de doutorado da aluna Karla Aparecida Lovis, sob orientação do Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá. O objetivo da pesquisa é identificar, caracterizar e descrever as concepções e conhecimentos sobre os conteúdos de Geometrias apresentados por um grupo de professores de Matemática da Educação Básica. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Lembramos que sua participação é essencial e muito importante para a realização da pesquisa. Obrigada pela sua participação. Karla Lovis e Valdeni Soliani Franco. Qualquer dúvida você pode entrar em contato por meio dos e-mails: karlalovis@hotmail.com ou karlalovis@gmail.com.
Obs: ao responder a última questão você deve clicar em "Enviar" e as respostas serão enviadas para nosso banco de dados. Caso apareça novamente a opção para você responder o questionário não é necessário respondê-lo novamente.

*Obrigatório

Nome * [ ]

E-mail * [ ]

Telefone [ ]

Idade - Especifique sua idade

- [ ] até 20 anos

- 21 a 25 anos
- 26 a 30 anos
- 31 a 35 anos
- 36 a 40 anos
- 41 a 45 anos
- 46 a 50 anos
- mais de 51 anos

Graduando - Especifique se você é graduando e de qual Instituição.

Graduação - Especifique sua(s) graduação(ões) e a Instituição.

Vínculo empregatício com o Estado do Paraná

- Professor concursado
- Professor temporário - PSS

Núcleo no qual trabalha *

Cidade na qual trabalha *

Tempo de docência

- até 5 anos
- de 6 a 10 anos
- de 11 a 15 anos
- de 16 a 20 anos
- de 21 a 25 anos
- mais de 26 anos

Especifique, caso tenha especialização(ões)

Especifique, caso tenha mestrado

Especifique, caso tenha doutorado

Especifique, caso tenha PDE

Você sabe que o conteúdo “noções de Geometrias não Euclidianas” foi incluído nas Diretrizes Curriculares Estaduais?

O que você entende por Geometria Euclidiana?

Você costuma ensinar Geometria Euclidiana para seus alunos? Em caso afirmativo, quais os principais conceitos você costuma trabalhar?

O que você entende por Geometria não Euclidiana?

Você ensina Geometria não Euclidiana para os seus alunos? Qual(is)?

APÊNDICE 2

Roteiro da entrevista

1 – fale um pouco sobre você: seu nome, idade, cidade onde reside e trabalha.

2 – fale sobre a sua trajetória acadêmica: graduação, capacitação e especialização.

3 – conte-nos brevemente a sua formação em Geometrias (graduação, pós-graduação, cursos).

4 – você considera que o seu conhecimento geométrico foi construído/adquirido durante a sua graduação ou foi no decorrer dos anos que você está atuando em sala de aula?

5 – você estudou Geometria não Euclidiana? Se algum aluno perguntasse para você o que é Geometria não Euclidiana, o que você diria para ele?

6 – quando você estudou Geometria não Euclidiana o que chamou sua atenção?

7 – você costuma ensinar Geometrias? Qual? Usa algum tipo de material (régua, compasso, transferido, sólidos geométricos, entre outros)?

8 – qual a importância de ensinar Geometrias?

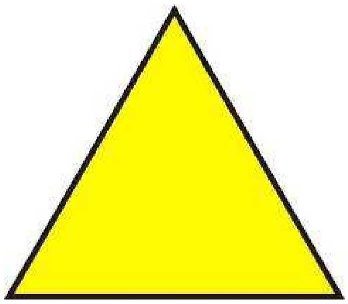
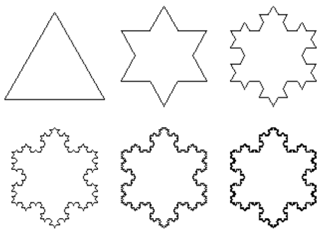
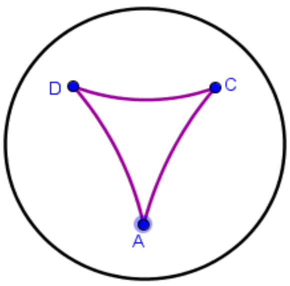
9 – os alunos têm mais dificuldades em aprender Geometrias do que outro conteúdo? Você tem dificuldade/facilidade em ensinar Geometrias?

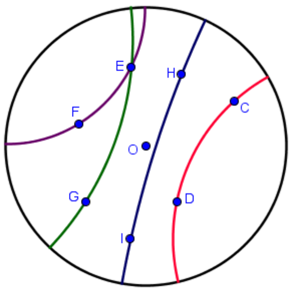
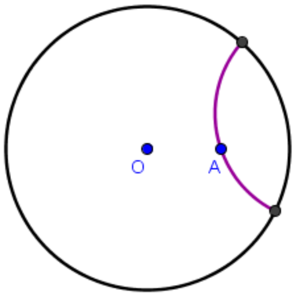
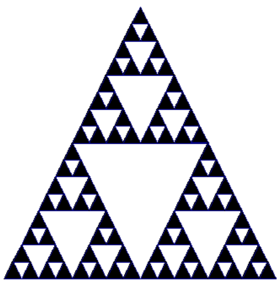
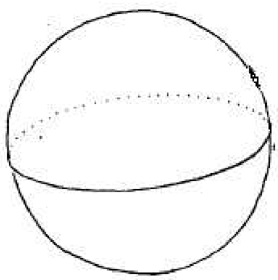
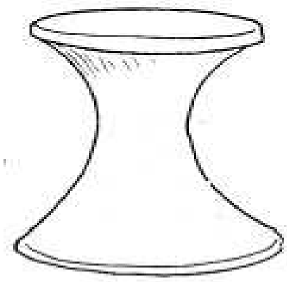
10 – qual conteúdo matemático que você tem preferência em ensinar?

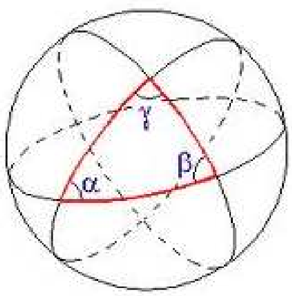
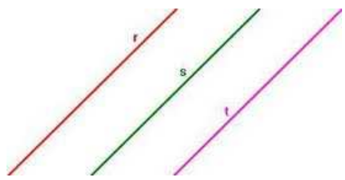
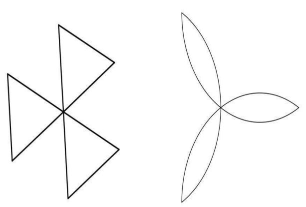
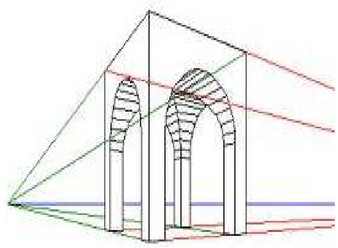
11 – o que você entende por Geometria Euclidiana?

APÊNDICE 3

OS CARTÕES

Reta Paralela	Geometria Hiperbólica	Geometria da Superfície da Esfera
Geometria Projetiva	Topologia	
	Geometria da Visão	Geometria axiomática
		Soma dos ângulos internos de um triângulo maior que 180º

Soma dos ângulos internos de um triângulo menor que 180º	Soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º	Geometria Euclidiana
		Geometria Espacial
		Geometria Fractal
		

Representação do Espaço	Fórmulas	Figuras Geométricas
Reta		Sistema Lógico Dedutivo
Longe/perto Dentro/fora Aberto/fechado		
		Cotidiano