UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

VERIDIANA REZENDE

CONHECIMENTOS SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS MOBILIZADOS POR ALUNOS BRASILEIROS E FRANCESES: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino

Maringá
2013

VERIDIANA REZENDE

CONHECIMENTOS SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS MOBILIZADOS POR ALUNOS BRASILEIROS E FRANCESES: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de doutor do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, da Universidade Estadual de Maringá.

Área de Concentração:
Ensino de Ciências e Educação Matemática

Orientadora:
Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira

Coorientador:
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

Coorientadora:
Profa. Dra. Dominique Lahanier-Reuter

Maringá

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Rezende, Veridiana
R467c Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino / Veridiana Rezende. -- Maringá, 2013.
209 f. : il. col., figs., quadros

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Clélia Maria Ignatius Nogueira.
Co-orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.
Co-orientadora: Prof.ª Dr.ª Dominique Lahanier-Reuter.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Para a Ciência e a Matemática, 2013.

1. Educação matemática. 2. Números irracionais. 3. Teoria dos campos conceituais. 4. Teoremas em ação. 5. Invariantes operatórios. I. Nogueira, Clélia Maria Ignatius, orient. II. Freitas, José Luiz Magalhães de, co-orient. III. Lahanier-Reuter, Dominique, co-orient. IV. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em em Educação Para a Ciência e a Matemática. V. Título.

CDD 22.ed. 372.7

À meu esposo Paulo Augusto,
pelo apoio e presença em todos
os momentos dedicados
a esta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, várias pessoas estiveram presentes em minha vida, contribuindo direta ou indiretamente, de modo pessoal ou profissional, para que o resultado final desta tese se realizasse. Assim, ao concluir mais esta etapa de minha vida, eu expresso meus sinceros agradecimentos:

A Deus, por me proporcionar dedicação e perseverança para conquistar meus objetivos, e, sobretudo, por me conceder mais esta conquista.

A meus queridos pais, por me transformarem num ser humano honesto, batalhador, que zela pelos valores da vida.

A meu marido, Paulo Augusto Rezende, pela amizade, amor e companheirismo... Por se aventurar a atravessar o oceano e viver junto comigo cada segundo dedicado a esta pesquisa.

A meu irmão, Driano Rezende, por morar no cantinho mais especial do meu coração e, especialmente hoje, por tanto me orgulhar ao iniciar seus primeiros passos no mundo acadêmico.

A meus sogros e meu cunhado, por todo carinho, amizade e torcida para a realização desta tese.

Aos meus amigos, Fábio, Francielli, Katia, Luciano, Talita e Viviani, por me presentearem com a verdadeira amizade.

No ambiente acadêmico, um agradecimento especial vai para minha querida orientadora, Profª Drª Clélia Maria Ignatius Nogueira, por aceitar me orientar no momento em que eu ainda me preparava para ingressar no universo encantador da Educação Matemática, pela sabedoria compartilhada, pela amizade e enriquecimento profissional.

Aos professores doutores Célia Finck Brandt, José Luiz Magalhães Freitas, Marilena Bittar, Rui Marcos de Oliveira Barros, Saddo Ag Almouloud e Tânia Stella Bassoi, pelas valiosas contribuições no exame de

qualificação, que enriqueceram o texto final desta pesquisa.

Ainda ao professor José Luiz Magalhães de Freitas, eu agradeço pelas contribuições para o delineamento inicial das análises desta pesquisa, por acreditar em minha honestidade e me apresentar a Raymond Duval que me auxiliou em questões burocráticas para minha instalação na França.

Aos pesquisadores do Laboratório CIREL, de modo especial a Ana Dias, Bertrand Daunay, Dominique Lahanier-Reuter e Maira Pagoni que gentilmente me acolheram em Lille 3, permitindo a realização de parte da pesquisa na França.

Aos senhores Anne Duval e Raymond Duval, por toda atenção, gentilizas, conselhos, ensinamentos, e por me auxiliarem a resolver diversas questões burocráticas para minha habitação em Lille.

A todas as minhas ex-professoras de francês, do Brasil e da França, pela atenção e por acreditarem em minha capacidade.

As colegas do PCM Claudete, Lucilene, Márcia, Maria Emília, Nelma, Silvia pelas contribuições a esta pesquisa e conversas descontraídas.

A todos os alunos, professores e equipe pedagógica das instituições de ensino que colaboraram com a realização desta pesquisa.

A todos os professores do PCM, que contribuíram para minha formação profissional.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão – GPEMCAM, pelas sugestões que ofereceram, sobretudo, em relação ao título final desta tese.

A Fundação Araucária, pelo apoio financeiro durante os primeiros anos de pesquisa.

Ao CNPq, que apoiou financeiramente o desenvolvimento da pesquisa realizado na França.

Enfim, agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente fizeram parte desta história.

Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.
Fernando Pessoa

RESUMO

REZENDE, V. **Os conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses no processo escolar: um estudo com alunos concluintes dos três níveis de ensino.** 2013. 209p. Tese (doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

Esta pesquisa, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, foi desenvolvida com vistas a analisar os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros, concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses, concluintes de níveis de ensino correspondentes (*Collège*, *Lycée* e Licenciatura em Matemática), relacionados aos números irracionais. Como procedimentos metodológicos, realizaram-se entrevistas individuais apoiadas na resolução de atividades matemáticas. Participaram das entrevistas 42 alunos, sendo 21 alunos brasileiros e 21 alunos franceses. As atividades foram elaboradas com atenção à diversidade de situações, significantes e conceitos presentes no Campo Conceitual dos números irracionais. Para as análises, levou-se em consideração a conduta de cada um dos alunos no decorrer das entrevistas, seus sucessos, hesitações, fracassos e teoremas em ação, verdadeiros e falsos. Os resultados desta investigação apontam que, independente do sistema de ensino em que estão inseridos, os conhecimentos dos alunos sobre os números irracionais avançam conforme avançam os níveis de escolarização. Além disso, foi constatado que, no estágio de desenvolvimento cognitivo em que se encontram os alunos concluintes do Ensino Fundamental e *Collège*, o desempenho e os conhecimentos mobilizados por estes alunos, relacionados aos números irracionais, são correspondentes, não sendo possível apontar diferenças significativas entre alunos de países distintos. Esse fato também foi constatado no desempenho dos alunos que finalizam o Ensino Médio e *Terminale Économique et Sociale* - TES. No entanto, os alunos franceses de *Terminale Scientifique* - TS, que recebem maior ênfase Matemática em sua formação, apresentaram avanços em seus desempenhos, no decorrer das entrevistas, em relação aos demais sujeitos de nível de ensino correspondente. Por consequência, os alunos franceses do Curso de Matemática, que em geral cursaram TS, apresentaram, nesta pesquisa, avanço em seus desempenhos, nas atividades propostas, em relação aos alunos brasileiros desse mesmo nível de ensino. Desse modo, a presente pesquisa mostra que o fato de os números irracionais estarem explícitos ou não nos currículos e livros didáticos não interfere no desempenho dos alunos em relação a atividades relacionadas a esses números. Ao contrário, os resultados da presente investigação apontam que é a experiência escolar e a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos no decorrer do processo escolar que vão favorecer a aquisição do conceito de números irracionais.

Palavras - chave: Educação Matemática. Números irracionais. Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

REZENDE, V. **The knowledge on irrational numbers mobilized by Brazilian and French students in the education process: a study with students concluding the three education levels.** 2013. 209p. Thesis (PhD) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

This research, founded on the Theory of Conceptual Fields, by Gérard Vergnaud, was developed in order to analyze the knowledge mobilized by Brazilian students, concluding the Elementary School, the High School, and the Mathematics Licentiate Degree Course, and French students, concluding the corresponding education levels (*Collège*, *Lycée* and Mathematics Licentiate Degree Course), related to irrational numbers. As methodological procedures, individual clinical interviews based on the resolution of mathematics activities were made and filmed. 42 students took part in the interviews. 21 of them were Brazilian students, and 21 were French. The activities were elaborated with attention to the diversity of situations, signifiers and concepts that are present in the Conceptual Field of irrational numbers. For the analyzes, the behavior of each student along the interviews was considered, with their successes, hesitations, failures and theorems-in-action, true or false. The results of the investigation show that, independent of the education system they belong to, the students' knowledge on irrational numbers advance as the education levels advance. Furthermore, in the phase of cognitive development corresponding to the students concluding the Elementary School and *Collège*, the performance and knowledge related to irrational numbers mobilized by these students is correspondent, and it is not possible to point out significant differences between the students from the two different countries. This fact was also observed in the performance of students concluding the High School and *Terminale Économique et Social* - TES. However, French *Terminale Scientifique* - TS students, who have more mathematical emphasis in their formation, present advances in their performance, along the interviews, in relation to the same subjects from a corresponding education level. Consequently, French students of the Mathematics Licentiate Degree Course, TS students in general, presented, in this research, an advance in their performance, regarding the proposed activities, in relation to Brazilian students from the corresponding education level. Therefore, this research shows that the fact of irrational numbers are explicit or not in curriculums and didactic books does not interfere in the students' performance regarding activities related to such numbers. On the contrary, the results of this investigation show that it is the school experience and the diversity of mathematical situations experienced by the students along the education process that are going to support the acquisition of the irrational numbers concept.

Keywords: Mathematics Education. Irrational numbers. Conceptual Fields Theory.

RÉSUMÉ

REZENDE, V. **Connaissances sur les nombres irrationnels mobilisées par des élèves brésiliens et français : une étude avec des élèves finissant des trois niveaux d'enseignement.** 2013. 209p. Thése (doctorat) – Programme de post-graduation en Education pour la Science et la Mathématique, Université de l'État à Maringá, Maringá, 2013.

Cette recherche, basée sur la Théorie des Champs Conceptuels de Gérard Vergnaud, a été dévéloppée avec le but d'analyser les connaissances mobilisées par des élèves brésiliens, finissant l'Enseignement Fondamental, Moyen et la Licence en Mathématique et des élèves français, finissant les niveaux d'enseignements correspontants (Collège, Lycée et Licence en Mathématique), en rélation avec les nombres irrationnels. Comme procedures méthodologiques, des entrevues individuelles ont été realisées supportées sur la resolution d'activités mathématiques. 42 élèves ont participé des entrevues, étant 21 élèves brésiliens et 21 élèves français. Les activités ont été élaborées en considérant la diversité de situations, signifiantes et concepts présents dans le Champs Conceptuel des nombres irrationnels. Pour les analyses, il a été considéré la conduite de chacun des élèves pendant les entrevues, leurs succès, hésitations, chutes et théorèmes en action, vrais ou faux. Les résultats de cette investigation montrent que, indépendamment du systhème d'enseignement où ils sont insérés, les connaissances des élèves sur les nombres irrationnels avancent à la mésure où les niveaux de scolarisation augmentent. Outre cela, il a été vérifié que, dans le stage de développement cognitif où se trouvent les élèves finissant l'Enseignement Fondamental et Collège, le développement et les connaissances mobilisés par ces élèves en relation aux nombres irrationnels sont correspondants, n'étant pas possible de montrer des différences importantes entre les élèves de pays distincts. Ce fait a aussi été considéré dans le développement des élèves qui ont fini l'Enseignement Moyen et Terminale Économique et Sociale – TES. Néanmoins, les élèves français de Terminale Scientifique – TS, qui ont été d'avantage exposés à la Mathématique dans leur formation, ont présenté des évolutions dans leur performance pendant les entrevues, par rapport aux autres sujets de niveau d'enseignement correspondant. Par conséquent, les élèves français du Cours de Mathématiques, qu'en général, ont suivi le TS, ont présenté, dans cette recherche, un avancement dans leur performance, dans les activités proposées, par rapport aux élèves brésiliens de ce même niveau d'enseignement. Ainsi, la présente recherche montre que la présence explicite ou non des nombres irrationnels dans les curricula et les manuels didactiques n'interfère pas dans le développement des élèves par rapport aux activités liées à ces nombres. Le contraire, les resultats de cette investigation montrent que c'est l'expérience scolaire et la diversité des situations mathématiques vécues par les élèves durant les processus scolaire qui va favoriser l'acquisition du concept de nombres irrationnels.

Mots-clés : Education Mathématique. Nombres irrationnels. Théorie des Champs Conceptuels.

LISTAS DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa trata de um estudo relacionado ao Campo Conceitual dos números irracionais no processo de escolarização, considerando Campo Conceitual, no sentido de Vergnaud (1990), como um conjunto de situações, conceitos, representações simbólicas e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

O tema desta pesquisa – *os números irracionais no processo de escolarização* - surgiu da experiência da pesquisadora como professora da disciplina de Análise Real, no 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do interior do Paraná, entre os anos letivos de 2006 e 2009. Durante esse período, percebeu - se[1] que os alunos iniciavam o 4º ano do Curso com sérios equívocos referentes às caracterizações de números racionais, irracionais e reais, bem como do diagrama que representa a inclusão dos conjuntos numéricos, presentes nas obras de Matemática da Educação Básica brasileira. Para exemplificar, dentre os 22 alunos da turma de 2008, apenas dois definiram corretamente números racionais como números que podem ser representados na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in Z$ e $b \neq 0$. Onze alunos escreveram que os irracionais são números que não são racionais ou são números que não possuem dízimas periódicas. Essas caracterizações de números irracionais poderiam ser consideradas corretas, porém, como esses alunos não argumentaram de modo adequado sobre os racionais, não é possível dizer que eles compreenderam a definição de números irracionais, e, portanto, dos números reais.

Em relação à representação dos diagramas de inclusão dos conjuntos numéricos, apenas quatro alunos a fizeram de modo adequado, sendo que nove alunos representaram incorretamente o conjunto dos números racionais incluso no conjunto dos números irracionais, considerando a seguinte sequência de inclusão: $N \subset Z \subset Q \subset I \subset R$.

Nesse período, emergiram algumas dúvidas por parte da pesquisadora: se os alunos iniciavam o 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática sem conhecer as definições de números racionais, irracionais e reais, presentes no currículo da Educação Básica brasileira desde o 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental, o que saberiam sobre esses

---

[1] Estas observações ocorreram entre os anos de 2007 a 2009. Atualmente, o Projeto Político Pedagógico - PPP do Curso de Matemática da UNESPAR – Campo Mourão foi reestruturado e o quadro docente foi ampliado e qualificado, fato que pode influenciar o desempenho dos alunos.

conceitos os alunos da Educação Básica? Existiriam diferenças significativas entre os conhecimentos desses números mobilizados por alunos da Educação Básica e por alunos do Curso de Matemática?

Ao iniciar o Curso de Doutorado, pesquisadora e orientadora perceberam que uma investigação relacionada aos *números* seria um tema de interesse de ambas, de modo particular em relação aos números irracionais, pois, naquele momento, a orientadora acabara de dirigir a dissertação de mestrado intitulada *Uma revolução científica na matemática: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano* (LORIN, 2009), que apresenta um estudo sobre a constituição dos números irracionais, à luz da teoria elaborada por Thomas Khun.

Igualmente, o interesse pelos irracionais emergiu por se tratar de números essenciais para a compreensão de diversos outros conceitos matemáticos que contemplam os currículos da Educação Básica, no domínio geométrico, trigonométrico, algébrico e numérico.

O estudo de pesquisas relacionadas aos números reais no Ensino da Matemática, tais como Cobianchi (2001), Igliori e Silva (2001), Soares, Moreira e Ferreira (1999), Melo (1999), Bronner (1997), Miguel (1993), trouxe evidências de que os questionamentos da pesquisadora, relacionados às incompreensões dos números reais e, portanto, dos irracionais, por seus alunos não estavam localizados, mas tratava-se de um problema amplo, que envolve fatores históricos e ocorre em diversas regiões do Brasil, e no exterior. No entanto, dentre as pesquisas analisadas, não foi notificada nenhuma investigação sobre os números irracionais com vistas a analisar e compreender os conhecimentos mobilizados por alunos de diferentes níveis de escolarização - Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, num mesmo trabalho.

A pertinência de um estudo como este justifica-se, sobretudo, por oferecer aos professores da Educação Básica e de Cursos de Licenciatura em Matemática um panorama dos conhecimentos sobre os números irracionais mobilizados pelos alunos no decorrer do processo escolar, e como se dá o avanço desse conceito de acordo com os níveis escolares. Uma pesquisa como esta também permite conhecer o desempenho dos alunos em diferentes situações relacionadas aos números irracionais, os tipos de atividades mais bem compreendidas por eles, assim como aquelas em que eles têm mais dificuldades.

Desse modo, a presente pesquisa foi delineada com o objetivo geral de *analisar os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros que finalizam o Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e por alunos franceses de níveis de ensino* *correspondentes, Collège, Lycée e Licenciatura em Matemática, em atividades matemáticas envolvendo números irracionais*.

A justificativa para envolver alunos que finalizam o Ensino Fundamental decorre do fato de que, de acordo com o currículo brasileiro desse nível de ensino (BRASIL, 1998), a institucionalização dos números irracionais ocorre no 8º ou 9º ano. Os alunos finalistas do Ensino Médio foram escolhidos com vistas a analisar como ocorre o aprimoramento desse conceito ao término da Educação Básica. Os formandos do Curso de Licenciatura em Matemática foram envolvidos nesta pesquisa com o duplo objetivo de analisar os conhecimentos sobre os números irracionais mobilizados pelos futuros professores de Matemática e de apresentar as semelhanças e diferenças entre os conhecimentos mobilizados pelos alunos no decorrer do processo escolar, em se tratando dos três níveis do sistema de ensino brasileiro.

Contudo, no desenrolar desta investigação, foi possível a realização de um estágio de doutorado na França. Desse modo, os objetivos da pesquisa foram ampliados no sentido de se realizar um estudo comparativo, concernente ao ensino dos números irracionais, entre os sistemas de ensino brasileiro e francês, bem como dos conhecimentos sobre os números irracionais mobilizados pelos alunos desses dois países. Desse modo, foram incluídos como sujeitos desta pesquisa alunos franceses que finalizavam níveis de ensino correspondentes aos do sistema de ensino brasileiro - *Collège*, *Lycée* e *Licenciatura em Matemática*. Sendo assim, para o último momento de coleta de dados, conforme especificado na seção 5, participaram desta pesquisa 42 alunos, sendo 21 alunos brasileiros e 21 alunos franceses.

Nesse contexto, a Teoria dos Campos Conceituais ofereceu fundamentações para a construção desta pesquisa, sobretudo porque se trata de uma teoria cognitivista que permite compreender o desenvolvimento dos conceitos no decorrer da aprendizagem escolar (VERGNAUD, 1990). Além disso, para Vergnaud, um sujeito aprende e se desenvolve em qualquer idade, inclusive na fase adulta.

Ao analisar alunos de níveis escolares distintos, é esperado que, ao tratar de resolução de atividades relacionadas ao Campo Conceitual dos números irracionais, os alunos de níveis escolares mais elevados apresentem desempenho mais avançado do que os demais alunos. Afinal, o desenvolvimento cognitivo, a experiência escolar, as situações matemáticas vivenciadas, não podem ser contornados ao analisar o desempenho dos sujeitos, pois, conforme Vergnaud (2009a), a experiência tem um papel fundamental, e “[...] é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações às quais ele deve se adaptar, seja uma experiência cotidiana ou uma experiência profissional” (p. 13).

Entretanto, considerando esses fatores, desejou-se saber em que medida as diferenças conceituais existem em função do grau de escolaridade, e, por isso, com respaldo no objetivo geral da pesquisa, duas questões centrais foram elaboradas: Quais os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros que finalizam o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior de Matemática, e por alunos franceses que finalizam *Collège*, *Lycée* e *Licence en Mathématiques*, mediante situações relacionadas ao Campo Conceitual dos números irracionais? Quais as semelhanças e diferenças percebidas no desempenho de alunos brasileiros e franceses, em relação aos níveis de escolarização semelhantes?

Para buscar responder estas questões, optou-se pela realização de entrevistas individuais semiestruturadas sustentadas na resolução de atividades previamente elaboradas, procurando acompanhar o raciocínio de cada sujeito, possibilitando esclarecer ambiguidades percebidas sobre a compreensão dos alunos das situações apresentadas.

As atividades que contemplaram o instrumento de investigação foram elaboradas considerando-se a diversidade de situações relacionadas a esse Campo Conceitual, considerando-se os diferentes significantes empregados, e os possíveis teoremas em ação, que poderiam emergir nas respostas dos alunos. Para as análises, buscou-se identificar e comparar os conhecimentos mobilizados pelos alunos que finalizavam cada nível de ensino, com atenção especial aos teoremas em ação – termo designado por Vergnaud (1990) para representar categorias de conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos.

O grau de dificuldade das atividades é correspondente ao Ensino Fundamental. Uma atividade foi acrescentada aos alunos do Ensino Médio e Superior, e oito questões sobre teorias da construção dos números irracionais foram acrescentadas nas entrevistas dos alunos do Ensino Superior.

No que se refere à estrutura deste texto, ele está dividido em sete seções. A primeira seção ostenta a presente *introdução* do trabalho. A seção 2, intitulada *Construindo o cenário da pesquisa*, consiste em uma breve descrição histórica sobre a evolução dos números irracionais, na qual é relatada a trajetória desses números desde seus primeiros indicativos com os povos egípcios, em aproximadamente 2000 a.C., até a formalização do conceito com matemáticos do século XIX. Ainda nessa seção, são apresentadas pesquisas relacionadas aos números irracionais e reais no Ensino da Matemática, cujos resultados se fizeram pertinentes para os resultados finais desta pesquisa.

A terceira seção, intitulada *A Teoria dos Campos Conceituais e respectivas contribuições para o estudo dos números irracionais*, apresenta uma introdução sobre a Teoria dos Campos Conceituais, focalizada, principalmente, nos conceitos que fundamentam a presente investigação.

A seção 4, *Conhecendo o campo da pesquisa: os números irracionais e os sistemas de ensino brasileiro e francês*, é destinada à descrição dos sistemas de ensino brasileiro e francês, seus respectivos níveis de ensino e nomenclaturas, e à abordagem explícita ou implícita dos números irracionais nos currículos desses países.

Os *Procedimentos metodológicos* são explicitados na quinta seção, que descreve os critérios para a seleção dos sujeitos da pesquisa, os momentos de coleta de dados, estabelece as ideias base de números irracionais, os critérios para elaboração das atividades e os descritores das análises.

A sexta seção, intitulada *Apresentação das atividades e análise dos resultados*, consiste nas atividades contempladas no instrumento de pesquisa, seguidas de seus objetivos e respectivas análises das respostas dos alunos brasileiros e franceses.

O texto é finalizado com as *Conclusões*, apresentando as respostas para as questões centrais que conduziram o desenvolvimento desta tese, bem como sugestões para investigações futuras, seguidos das referências e anexos.

2 CONSTRUINDO O CENÁRIO DA PESQUISA

2.1 PARTE A: BREVE PERCURSO HISTÓRICO SOBRE A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Nesta parte do texto, apresenta-se um fragmento do percurso histórico da construção dos números irracionais, cujos primeiro indícios datam de 2000 a. C. com a população egípcia. Apresenta-se a evolução dos indicativos de números irracionais com a matemática dos babilônicos e, sobretudo, com a matemática dos gregos, até a formalização desses números que aconteceu somente no século XIX.

2.1.1 A Matemática no Egito e os primeiros indícios de números irracionais

Os egípcios foram os primeiros povos a "inventar" as ciências matemáticas (CAJORI, 2007). Os registros que temos sobre suas matemáticas de aproximadamente 2000 a. C. apresentam indicativos de números irracionais. Os primeiros escritos e sistema de numeração dos egípcios foram de natureza hieroglífica[2], que datam, aproximadamente, de 5000 anos. Registros hieroglíficos foram encontrados em pedras, tumbas e monumentos no Egito, porém, as principais fontes de informações sobre a matemática egípcia que resistiram ao tempo são os papiros e, dentre esses documentos, os que se destacam pela quantidade de informações e problemas matemáticos são os papiros de Rhind (ou de Ahmes) e o de Moscou (ou de Golonishev) (BOYER, 1996).

De acordo com Boyer (1996), o papiro de Rhind apresenta diversos problemas envolvendo operações aritméticas, frações unitárias, álgebra, razões trigonométricas e geometria. Os problemas geométricos 48 e 50 deste papiro chamam atenção por apresentarem indícios de números irracionais.

[2] O sistema de numeração hieroglífico egípcio baseava-se numa escala de 10, utilizando-se de diversos símbolos. Um traço vertical representa uma unidade, um osso de calcanhar invertido indicativa 10, um laço como uma letra C maiúscula valia 100, uma flor de lótus 1.000, um dedo dobrado 10.000, um peixe era usado para indicar 100.000 e uma figura ajoelhada 1.000.000 (BOYER, 1996, p. 7).

O problema 48 consiste em obter um octógono a partir de um quadrado de lado nove de unidades. Este quadrado é dividido em nove quadrados iguais, eliminando-se os quatro triângulos dos cantos, conforme a Figura 1.

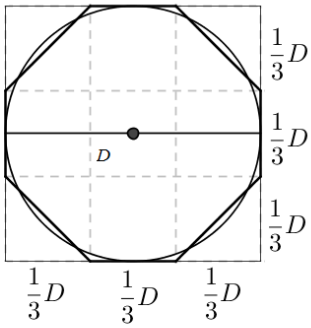


Figura 1 - Octógono a partir de um quadrado

Resolvendo o problema 48 com notações atuais, obtém-se que a área de cada triângulo retirado dos cantos do quadrado é $\frac{2}{9}$ u. Assim, a área do octógono é $9\times 9-\left(4\times\frac{9}{2}\right)=81-18=63\text{u}$. Possivelmente, os egípcios consideraram que este valor se aproxima da medida da área de um quadrado de lado 8u, e deram origem ao problema 50, que se refere a igualar a área de um campo circular de diâmetro 9 unidades com a área de um quadrado de lado de 8 unidades. Ao resolver este problema com as notações matemática atuais:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2=8\times 8\Leftrightarrow \pi\frac{81}{4}=64\Leftrightarrow \pi\cong 3{,}1604\ ,$$

obtém-se um valor aproximado para o número π.

Os egípcios manipulavam uma regra para encontrar a medida (perímetro) da circunferência. Para eles, a razão entre a área do círculo e o seu comprimento era igual à área do quadrado circunscrito para o seu perímetro. Com notações atuais, a razão entre a área de um círculo de raio r e seu perímetro é $\frac{\pi r^2}{2\pi r}=\frac{r}{2}$, e a razão entre o quadrado circunscrito num círculo de raio r e seu perímetro é $\frac{4r^2}{8r}=\frac{r}{2}$. Deste modo, constata-se que há aproximadamente 4000 anos, os egípcios descobriram uma relação geométrica, que envolve número irracional, que perdura até hoje.

Outro fato que desperta atenção em relação às descobertas desses povos é que a pirâmide de Quéops é uma pirâmide áurea, ou seja, ela satisfaz $\frac{2h}{a} = \sqrt{\varphi} = 1{,}27201964...$, sendo $\varphi = 1{,}618033989...$ o número de ouro, e h a altura da pirâmide de base quadrada de lado a (SARAIVA, 2002).

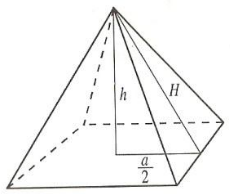


Figura 2 - Pirâmide de base quadrada

Considerando as medidas reais da pirâmide de Quéops: altura $h = 146{,}59\,m$, lado da base (quadrada) $a = 230{,}33\,m$, e utilizando a relação de pirâmide áurea, segue que $\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146{,}59}{230{,}33} = 1{,}272...$, ou seja, a pirâmide de Quéops é uma pirâmide áurea. Considera-se ao menos curioso que um monumento que data de 2500 a. C. apresente uma relação matemática que envolva um número irracional tão particular, que é o número de ouro.

2.1.2 A Matemática Babilônica e indicativos de números irracionais

Os registros existentes sobre a escrita cuneiforme[3] e o sistema sexagesimal dos babilônios estão disponibilizados em mais de meio milhão de tabletes de argila desenterrados na Mesopotâmia, dos quais quase quatrocentos foram identificados como estritamente matemáticos. Nestes tabletes, que, segundo Roque (2012), encontram-se em museus e universidades de todo o mundo, há textos matemáticos que datam de 2100 a. C. (EVES, 2004), e em alguns destes textos aparecem aproximações dos números irracionais $\sqrt{2}$ e π.

[3] A denominação *cuneiforme* para a escrita dos babilônios decorre das formas dos sinais. Marcas em formas de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletes de barro moles que depois eram cozidos em fornos ou ao calor do sol (BOYER, 1996).

Aaboe (2002) disponibiliza a foto de um pequeno tablete de argila da Babilônia antiga, conforme Figura 3, que contém um quadrado, cujo número $a = 30$ está escrito junto ao lado e os números $b = 1;24,51,10$ e $c = 42;25,35$ abaixo e acima, respectivamente, de uma das diagonais.

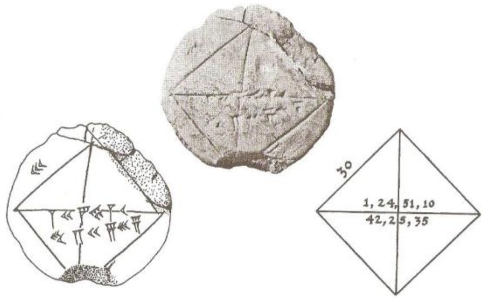


Figura 3 - Tablete da Babilônia antiga
Fonte: Aaboe (2002, p. 28)

No sistema sexagesimal dos babilônios, os dígitos à esquerda do ponto e vírgula significam a parte inteira do número, e os dígitos à direita do número representam a parte decimal do número, e estes, por sua vez, são separados por vírgulas. Por exemplo, no sistema sexagesimal a parte inteira do número $b = 1;24,51,10$ é 1, assim, com notações atuais, podemos representar $b = 1;24,51,10$:

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,4142129.$$

Desse modo, $1;24,51,10 \approx 1,4142129$, ou, $\sqrt{2} \approx 1,4142135.$

Nota-se, ainda, que o número $c = 42;25,35$ pode ser escrito como:

$$42;25,35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \approx 42,4263888\,.$$

Assim, como $30 \times (1,4142129) = 42,426387$, ou seja, $30 \times (1;24,51,10) = 42;25,35$, obtém-se $c = ab$. Por outro lado, como a é o lado do quadrado e c a diagonal, pela relação conhecida como teorema de Pitágoras, tem-se $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Desse modo, os babilônios deveriam considerar $b = 1;24,51,10$ uma aproximação de $\sqrt{2}$, pois o valor atribuído a b se aproxima do valor de $\sqrt{2}$ com um erro de um milionésimo.

Além desta aproximação para $\sqrt{2}$, encontra-se nos registros babilônios que a diagonal do quadrado poderia ser encontrada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$ (AABOE, 2002; BOYER, 1996). Decorrente desses fatos, para Cousquer (1998), pode-se concluir que a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, denominado por teorema de Pitágoras, já era conhecido há mais de mil anos antes dos pitagóricos. Esse fato é ainda mais evidenciado pelos registros que garantem um alto grau de sofisticação da matemática babilônia relacionada ao teorema de Pitágoras. O tablete *Plimpton* 322[4] apresenta quinze linhas com ternos pitagóricos, ou seja, valores de x, y e z que satisfazem $x^2 + y^2 = z^2$.

Num dos tabletes da coleção de Yale (nº 7289)[5] de aproximadamente 1600 a.C., encontra-se uma aproximação significativa para $\sqrt{2}$ até quatro casas sexagesimais, $1;24,51,10$, ou em notações atuais,

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3},$$

valor que está compreendido entre $1,4142129$ e $1,4142130$. Uma precisão como esta não pode ter surgido da medição física realizada numa figura; provavelmente, os babilônios procuravam um número cujo quadrado resultasse em 2 .

Os babilônios descobriram um método para o cálculo de raízes quadradas $\sqrt{A}$. Segundo Cousquer (1998), eles perceberam que tomando um valor aproximado *a* maior que $\sqrt{A}$, o valor $\frac{A}{a}$ é menor que $\sqrt{A}$, e considerando um valor aproximado *a* menor do que $\sqrt{A}$, o valor $\frac{A}{a}$ será maior que $\frac{A}{2}$. Assim, considerando:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right),$$

eles esperavam obter uma melhor aproximação do que o valor aproximado *a*.

Com este algoritmo, pode-se construir uma sequência de valores que converge para o valor da raiz quadrada procurada e consiste em calcular os termos da sequência que satisfaz a relação:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right).$$

---

[4] "O nome indica que se trata de um tablete da coleção G.A. Plimpton da Universidade da Colúmbia, catalogada sob o número 322. O tablete foi escrito no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945".

[5] Este tablete indicado por YBC 7289, diz respeito ao tablete catalogado sob o número 7289, pertencente à coleção da Universidade Yale (*Yale Babilonian Collection*) (ROQUE, 2012).

Sem demonstrações, os babilônios conheciam tais convergências e as utilizavam para o cálculo de raízes. Por exemplo, o cálculo de valores aproximados para $\sqrt{2}$ foi encontrada até a 4ª aproximação num dos tabletes dos babilônios (COUSQUER, 1998). Seja $a_0 = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$a_2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \quad 1{,}416667$$
$$a_3 = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} \quad 1{,}4142157$$
$$a_4 = \frac{577}{816} + \frac{408}{577} = \frac{665857}{470832} \quad 1{,}4142136.$$

Nota-se que este processo pode continuar indefinidamente, e os valores numéricos da sequência se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$.

Estes povos também utilizaram aproximações para $\sqrt{2}$ e para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ por meio dos números $\frac{17}{12}$ e $\frac{17}{24}$, respectivamente (EVES, 2004). Observa-se que apesar de serem menos precisas que as aproximações encontradas no tablete de Yale, elas também devem ser levadas em consideração, pois basta compararmos $\frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$ com $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ e $\frac{17}{24} = 0{,}798333\ldots$ com $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70710\ldots.$

Além das aproximações para $\sqrt{2}$, existem registros que comprovam que os babilônios também apresentavam boa aproximação para π. De acordo com Boyer (1996), eles tomavam a razão entre o perímetro do hexágono regular e o perímetro da circunferência circunscrita neste hexágono como $0;57,36$, que em notações atuais significa: $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = 0{,}96$. Assim, $\frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi} = 0{,}96 \Leftrightarrow \pi = 3{,}125$. Esta aproximação para π é tão boa quanto a encontrada pelos egípcios.

Outro fato que merece destaque na matemática babilônia é a generalidade para as resoluções das equações quadráticas com três termos. Por meio de descrição verbal, eles resolviam as equações do segundo grau, com notações atuais $ax^2 + bx + c = 0$, pelo método que conhecemos hoje no Brasil por fórmula de Bhaskara[6]. Porém, o número existente na

[6] Esse método para resolução de equações do segundo grau aparece oficialmente pela primeira vez no tratado do indiano Aryabhata, por volta do século V d. C. Porém, comentários sobre este tratado foram escritos por Bhaskara I, em 629, e por Brahmagupta, em 628. Os comentários sobre os procedimentos de resolução de

fórmula cuja raiz quadrada deveria ser calculada era sempre um quadrado perfeito (CAJORI, 2007; BOYER, 1996). Este fato leva a crer que os babilônios perceberam a existência de números que não são quadrados perfeitos, ou seja, perceberam a existência de números irracionais.

2.1.3 A Matemática Grega e os números irracionais

Embora sejam percebidos aspectos da história grega desde 2000 a. C., foi aproximadamente em 800 a. C. que essa civilização acelerou seu desenvolvimento. Segundo Freitas (1987), enquanto os babilônios e egípcios se preocupavam com uma matemática empírica e elementar, os gregos desenvolvem uma matemática dedutiva, tal como conhecemos hoje. Sem se preocupar com aplicações, os gregos davam atenção às discussões filosóficas que possibilitaram estruturar a Matemática como uma ciência dedutiva.

Estudiosos gregos, dentre eles Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, viajaram pelo Egito e pela Babilônia, de onde absorveram informações matemáticas, astronômicas e religiosas destes povos (BOYER, 1996), fato que, provavelmente, contribuiu para acelerar o desenvolvimento intelectual dos gregos.

Ao retornar à Grécia, Pitágoras fundou a escola pitagórica, uma sociedade secreta, mística e religiosa, que concentrava seus estudos principalmente em Matemática e Filosofia. Tinham como lema a verdade absoluta de que tudo era número[7]. Os pitagóricos conheciam o que denominamos por teorema de Pitágoras (provavelmente pelos contatos com os babilônios), e demonstraram a veracidade deste resultado. Possivelmente, decorre desse fato que esta relação matemática recebe o título de teorema de Pitágoras.

Os gregos acreditavam que na linha reta numerada estavam dispostos apenas números racionais, e ela era contínua, pois entre quaisquer dois números da reta sempre encontravam um terceiro número (MIGUEL, 1993). Porém, segundo Eves (2004), os próprios pitagóricos perceberam que isto não era verdadeiro ao detectar que não existe número racional que corresponda ao ponto P da reta no caso em que OP tem a mesma medida que a diagonal do quadrado de lado unitário (Figura 4).

---

equações do segundo grau realizados por Brahmagupta foram citados mais tarde por Bháskara II, autor de livros populares de aritmética e álgebra do século XII (ROQUE, 2012).

[7] Referiam-se apenas aos números inteiros.

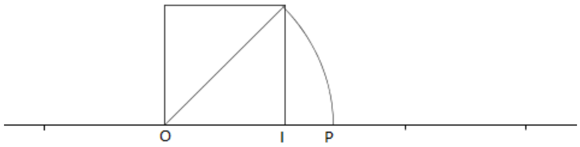


Figura 4 - Segmento OP

Este fato perturbou os pitagóricos, pois o segmento OP existia, e nenhum número poderia corresponder à sua medida. Os membros da escola pitagórica procuraram conviver com estas contradições simplesmente aceitando o fato que para certos segmentos não existia número que representasse sua medida, e por isto, concluíram que a geometria era muito mais ampla e rica do que a aritmética (MIGUEL, 1993).

Com a constatação dos números irracionais, a crença da escola de que tudo era representado por números inteiros não era mais verdadeira, e a veracidade do próprio teorema de Pitágoras poderia ser questionada. Este escândalo foi tão grande que os pitagóricos tentaram manter esta questão em sigilo. Conta a lenda que Hipasus, um dos membros da escola, foi lançado ao mar por revelar o segredo a estranhos.

De acordo com Freitas (1987), Zenão (~495 - ~435 a. C.) foi um dos críticos da escola pitagórica que, por meio de seus paradoxos sobre divisões infinitas[8], ajuda a destruir a fachada da escola pitagórica, que já estava abalada com a descoberta dos irracionais.

A escola de Platão, criada pouco depois da demonstração de existência dos números irracionais, também contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática grega, inclusive para estes números. Os membros desta escola não podiam denominar estes números, mas também sabiam que não podiam refutá-los, uma vez que não se pode negar a existência da diagonal do quadrado de lado unitário. Foi por meio do teorema de Pitágoras e com a utilização dos únicos instrumentos permitidos pela escola platônica, a régua não graduada e o compasso, que os platônicos determinaram o procedimento geométrico para encontrar segmentos de medida $\sqrt{n}, n \in Z_+$ (GODEFROY, 1997).

[8] Com exemplo, citam-se dois paradoxos de Zenão:

i. *A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido infinitamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.

ii. *A Flecha*: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move (EVES, 2004, p. 418).

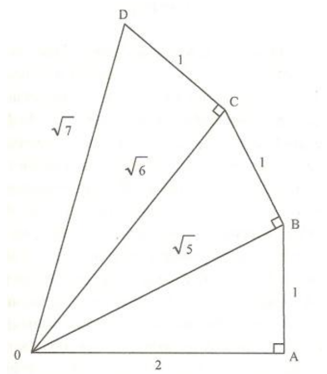


Figura 5 – Segmentos de medida $\sqrt{n}$

Atualmente, a Figura 5 é disponibilizada em livros didáticos como espiral pitagórica ou caracol pitagórico. Ela fez parte das atividades propostas aos sujeitos colaboradores da presente pesquisa, com a intenção de apresentar, àqueles que por ventura não conheciam, um método de construção de segmentos com medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in Z_+$.

O período que vai de 300 a 200 a.C. é considerado como a idade de ouro da Matemática grega. Nele viveram três pessoas que se destacaram nos estudos matemáticos: Euclides (~365 - ~275 a. C.), Arquimedes (~287 - ~212 a. C.) e Apolônio (~260 - ~200 a. C.). Faz-se atenção nesta pesquisa às contribuições de Arquimedes para a aproximação do número π. Ele revelou, em uma de suas obras – *O Método* –, ter muita paciência efetuando cálculos e medidas, trabalhando com perímetros de polígonos de 96 lados para mostrar que a razão da circunferência por seu diâmetro, hoje denominado por π, era um número compreendido entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$ (FREITAS, 1987).

No entanto, na escola platônica, a questão da incomensurabilidade[9] também causou escândalos e conflitos, pois parecia arruinar os teoremas envolvendo proporções. Os platônicos perceberam que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não era igual à razão de um número inteiro para outro número inteiro, constituindo um sério problema para comparar grandezas incomensuráveis (BOYER, 1996).

Inspirados numa passagem do *Menón* de Platão do século IV a. C., Daumas e Guillemot (1993) contam que Sócrates solicitou a um escravo traçar um quadrado de lado de 2 pés, e pediu para que ele encontrasse o lado de um quadrado de área que fosse o dobro da área do quadrado inicial. A primeira resposta do escravo foi: *é preciso dobrar o lado do*

[9] Duas grandezas são incomensuráveis quando não existe uma unidade de medida comum entre elas.

quadrado (Ibid, p. 33). Em seguida, ele percebeu que, dobrando a medida do lado do quadrado inicial, ou seja, construindo um quadrado de lado de 4 pés, ele iria encontrar um quadrado de área quatro vezes a área do quadrado, e não o dobro, conforme lhe havia solicitado Sócrates. Como o quadrado de lado de 4 pés era muito grande para a situação, e teria que ser um quadrado de lado maior que 2 pés, ele pensou, sem sucesso, num quadrado de lado 3 pés.

Ao perceber que o escravo ficava nervoso com suas tentativas frustradas, Sócrates lhe sugeriu abandonar a perspectiva numérica, e mostrar a partir de qual linha pode-se obter o referido quadrado. Para colaborar com o escravo, Sócrates representou ao lado do quadrado inicial três quadrados para formar um quadrado de área 4 vezes maior que a área do quadrado inicial. Desse modo, o problema, agora geométrico, seria encontrar um quadrado de área igual à metade da área desse novo quadrado.

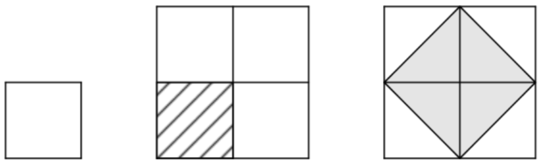


Figura 6 – Quadrado de medida de área $2\ \text{cm}^2$

Como a diagonal do quadrado divide o quadrado em duas partes iguais, era necessário, então, dividir cada um dos quatro quadrados por uma diagonal estrategicamente escolhida. Assim, o escravo viu uma solução para o problema proposto.

Segundo Daumas e Guillemot (1993), o conteúdo Matemático dessa passagem pode ser assim resumido: o quadrado construído sobre a diagonal *d* de um quadrado de lado *a* é o dobro do quadrado construído sobre *a* $\left(d^2 = 2a^2\right)$. Porém, como a relação entre a diagonal e o lado não resulta num número racional, surge as dificuldades do escravo ao tentar resolver aritmeticamente o problema proposto, relacionado à impossibilidade de se medir a diagonal de um quadrado por meio do lado desse quadrado. Nesse caso, existe uma relação entre as grandezas geométricas e números por intermédio da medida. Quando as grandezas são comensuráveis, o resultado de medida é um número inteiro. No entanto, isto nem sempre ocorre quando se trata de grandezas incomensuráveis.

De acordo com Daumas e Guillemot (1993, p. 36), Aristóteles cita a demonstração que a diagonal do quadrado e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis:

> Provamos, por exemplo, a incomensurabilidade da diagonal em razão que os números ímpares seria igual a números pares, se supormos que a diagonal é comensurável; concluímos, então, que os números ímpares devem ser iguais aos números pares, e provamos hipoteticamente a incomensurabilidade da diagonal porque uma conclusão falsa decorre de uma proposição contraditória (ARISTÓTELES, 1966).

Essa é a demonstração clássica da irracionalidade de $\sqrt{2}$, que, segundo Aaboe (2002), atualmente consiste em supor que existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a,b \in Z, b \neq 0$, de modo que a igualdade $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ seja verdadeira, ou seja, consiste em supor $\sqrt{2}$ um número racional. Da igualdade anterior:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2.$$

Assim, a^2 é um número par, pois é múltiplo de 2, e, portanto a também é par. Logo, existe $p \in Z$ tal que $a = 2p$. Sendo assim,

$$a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4p^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2p^2 = b^2.$$

Conclui-se que b^2 também é par, e, portanto, b é par. Mas isto é uma contradição, pois a e b não podem ter divisores em comum, uma vez que supomos inicialmente que a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível. Deste modo, a hipótese inicial que $\sqrt{2}$ é um número racional é falsa.

Em relação à referida demonstração dos gregos para a irracionalidade de $\sqrt{2}$, Aaboe (2002) ressalta que, enquanto os babilônios encontraram boas aproximações para $\sqrt{2}$ e aparentemente se contentaram com isto, os gregos levaram este assunto até o fim, demonstrando de modo consistente que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Tal demonstração pode ser encontrada atualmente em alguns livros didáticos de Ensino Médio, *Lycée* e Superior de Matemática, bem como em algumas obras de Ensino Fundamental. Por esse motivo, e por se tratar de um resultado importante sobre irracionais algébricos, uma questão relacionada a esta demonstração foi inserida no instrumento de pesquisa para os alunos do Ensino Médio, *Lycée*, e Ensino Superior brasileiro e francês.

A prova sobre a incomensurabilidade da diagonal e o lado de um quadrado está disponibilizada em Ávila (2006):

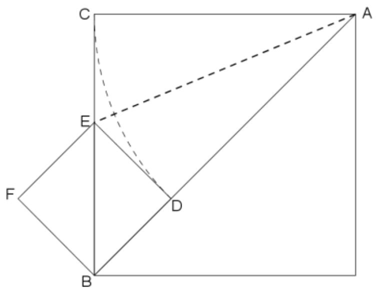


Figura 7 - Incomensurabilidade entre a diagonal e lado do quadrado

> Considere um quadrado com diagonal $\delta = \mathrm{AB}$ e lado $\lambda = \mathrm{AC}$. Suponha, por absurdo, que δ e λ sejam comensuráveis. Desse modo, existe um terceiro segmento σ, submúltiplo comum de δ e λ. Com centro em A e raio AC trace o arco de circunferência CD, o qual corta a diagonal AB em D. Seja ED a tangente a esse arco em D. Como $AD = \mathrm{AC}$, os triângulos retângulos ACE e ADE são congruentes, e, por conseguinte, os catetos CE e ED são congruentes. Como o triângulo retângulo BDE é retângulo isósceles, conclui-se que também são congruentes os segmentos BD e DE. Portanto,
>
> $$\delta = \mathrm{AB} = AD + BD = \lambda + BD,$$
> $$\lambda = BC = BE + EC = BE + BD,$$
>
> ou seja,
>
> $$\delta = \lambda + BD, \tag{1}$$
> $$\lambda = BE + BD. \tag{2}$$
>
> Como o segmento σ é submúltiplo comum de δ e λ, conclui-se de (1) que σ também é múltiplo de BD. Disso e de (2), segue que σ também é submúltiplo comum de BD. Assim, fica provado que se houver um segmento σ que é submúltiplo comum de $\delta = \mathrm{AB}$ e lado $\lambda = \mathrm{AC}$, então o mesmo segmento vai ser submúltiplo comum de BE e BD, segmentos esses que são, respectivamente, a diagonal e o lado do quadrado BDEF. Ora, a mesma construção geométrica que permite passar do quadrado original ao quadrado BDEF pode ser repetida com este último para chegar a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, a dimensão deles diminui em mais da metade quando passa de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, prova-se que o segmento σ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto se deseja, que é um absurdo. Assim, deve-se rejeitar a suposição inicial de comensurabilidade de AC e AB. E, desse modo, conclui-se que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis (Ávila, 2006, p. 48-49).

Em conformidade com Daumas e Guillemot (1993), existe uma demonstração sobre segmentos incomensuráveis ainda mais espetacular, referente à diagonal e o lado de um pentagrama. Assim como na Figura 7, considere um pentágono ABCDE e trace suas diagonais, em seguida trace as diagonais de A’,B’, C’, D’, E’... criando uma representação de um percurso infinitamente pequeno, no qual a figura do pentágono aparece periodicamente.

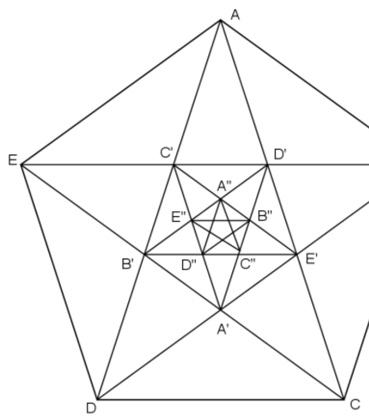


Figura 8 - Incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do pentagrama

O símbolo da escola pitagórica era o pentágono regular, que significava o símbolo da vida humana, da boa saúde, da aliança entre os homens, de protetor físico e espiritual (BOYER 1996; MIGUEL 1993). Devido à importância que os pitagóricos atribuíam ao pentágono regular, é possível que eles tenham dado atenção especial ao estudo desta figura. Godefroy (1997) comenta sobre a possibilidade dos pitagóricos terem constatado que a razão entre o lado e a diagonal do pentágono é igual ao número de ouro φ, e que a razão entre o lado do pentágono e o lado do pentágono obtido pela interseção das diagonais é φ^2. Desse modo, o número de ouro φ pode ter sido o primeiro número irracional percebido pelos gregos.

Assim, nesse momento da História da Matemática grega, numa ruptura com os números, as grandezas estavam bem adaptadas e permitiam estabelecer a comensurabilidade ou incomensurabilidade entre duas grandezas. Entretanto, ainda restava o problema da proporcionalidade entre grandezas (DAUMAS; GUILLOMET, 1993) que precisava ser solucionado.

Foi Eudoxo, um dos mais notáveis membros da escola de Platão, que por volta de 370 a. C. resolveu o problema da incomensurabilidade e proporcionalidade entre grandezas com sua teoria das proporções e o método da exaustão. Ele apresentou uma nova definição de proporção: considerando quatro grandezas A, B, C e D de mesma espécie[10], diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os inteiros positivos m e n, se tenha:

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD;\ nA = mB \Leftrightarrow nC = mD;$$

$$nA < mB \Leftrightarrow nC < mD.$$

[10] As grandezas devem ser da mesma espécie no sentido que se devem relacionar: segmentos com segmentos, superfícies com superfícies, sólidos com sólidos.

Esse momento da História da Matemática marca um avanço para os números irracionais, pois, além dos gregos provarem sobre a existência de segmentos incomensuráveis, eles podiam representá-los e, sobretudo, compará-los por meio da teoria das proporções de Eudoxo, passando a aceitá-los como um objeto geométrico.

No entanto, a matemática grega não estava fundamentada na teoria dos números. Era uma matemática voltada para a geometria, limitada a construções com réguas e compasso. Assim, foi somente no século XIX, com o avanço da Análise Real, que teorias matemáticas consistentes sobre o conjunto dos números irracionais, garantindo a continuidade dos números reais, surgiram independentes entre si. Dentre as teorias existentes, destacam-se na presente pesquisa as teorias de Dedekind e Cantor, por serem as mais citadas nos livros de História da Matemática e Análise Real.

2.1.4 A construção dos números irracionais por Richard Dedekind (1831 - 1916)

Fundamentado na descoberta da incomensurabilidade pelos gregos, Dedekind (2008) menciona sobre a continuidade da reta numérica, afirmando, desse modo, sobre a existência de infinitos pontos da reta real que não correspondem a nenhum ponto racional. O referido pesquisador esclarece sua afirmação, tomando como exemplo os segmentos incomensuráveis descobertos pelos gregos, a diagonal e o lado do quadrado:

> Ao transportar tal medida sobre a reta, a partir do ponto *O*, obtemos uma extremidade que não corresponde a nenhum número racional. Igualmente, podemos demonstrar que existe uma infinidade de segmentos incomensuráveis com a unidade, permitindo afirmar: a reta *L* é infinitamente mais rica em elementos pontuais que o domínio *R* dos números racionais em elementos numéricos (DEDEKIND, 2008, p. 69, tradução da pesquisadora).

Desse modo, ao comparar o domínio dos números racionais *R* com uma reta, alertando sobre as lacunas e descontinuidade dos números racionais, Dedekind (2008) ressalta a necessidade da criação de novos números, de modo a completar os números racionais e atingir a completude da reta numérica.

Os Cortes de Dedekind

Como solução para completar o domínio dos números racionais *R* para os reais, Dedekind (2008) introduz o conceito de Cortes. Cada Corte está relacionado a duas classes

A_1 e A_2 de números racionais, denominado por (A_1, A_2). O pesquisador alerta que todo número racional *a* divide o sistema *R* em duas classes A_1 e A_2, de modo que todo número a_1 da primeira classe A_1 é menor do que todo número a_2 da segunda classe A_2. Existem, necessariamente, dois tipos de Cortes:

i. Dado número *a*, ou *a* é o maior número da classe A_1 ou *a* é o menor número da classe A_2, e, neste caso, *a* é um número racional. E, inversamente, se um corte (A_1, A_2) possui esta propriedade, na qual a classe A_1 possui maior elemento ou a classe A_2 possui menor elemento, então o corte (A_1, A_2) define um número racional.
ii. Cortes em que nem a classe A_1 possui maior elemento nem a classe A_2 possui menor elemento.

Pode-se citar como exemplo para o segundo caso o Corte definido pelo número $\sqrt{D}$, sendo D um número inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Assim,

> Os Cortes que não são operados por números racionais possuem a propriedade referente à incompletude ou descontinuidade do domínio *R* dos números racionais. Cada vez que estamos na presença de um Corte (A_1, A_2) não operado por um número racional, nós criamos um novo número α correspondente a este Corte; dizemos que o número α corresponde a este Corte ou que ele opera este Corte. De agora em diante, todo Corte determinado corresponde a um e somente um número, racional ou irracional, e consideramos dois números como diferentes ou desiguais se e somente se eles correspondem a dois Cortes essencialmente distintos (DEDEKIND, 2008, p. 77, tradução da pesquisadora).

Para integrar e dar consistência à sua teoria sobre os Cortes e a construção dos números irracionais, Dedekind (1998) define, por meio de Cortes, uma relação de ordem no conjunto dos números reais, continuidade do conjunto dos números reais, cálculos sobre os números reais e análise infinitesimal. Atribuindo, portanto, o estatuto de número aos irracionais, permitindo operar com estes números.

2.1.5 A construção dos números irracionais por Georg Cantor (1845 – 1918)

Assim como Dedekind e na mesma época, porém com uma abordagem completamente diferente, Geog Cantor ofereceu valiosas contribuições para a construção dos números irracionais, por meio de sequências de Cauchy[11], garantindo a existência do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo[12], permitindo, tal como na teoria de Dedekind, operar com os números reais.

Ávila (2006) chama atenção para o fato que existem tantas sequências de Cauchy quanto são os números racionais, pois, para qualquer número racional *r* basta tomar a sequência constante $r_n = (r, r, r, \ldots)$ que é de Cauchy. Este mesmo autor ressalta que dentre as sequências de Cauchy, algumas são convergentes no conjunto dos números racionais, e outras sequências, tais como a sequência das aproximações por falta de $\sqrt{2}$, $r_n = (1;1{,}4;1{,}41;1{,}4142;\ldots)$, não convergem para um número racional.

Notando a necessidade de construir novos números – os irracionais –, sendo os limites das sequências de Cauchy que não convergem para números racionais, Cantor elabora sua teoria para mostrar como esses novos números unidos com os racionais formam um corpo ordenado completo – o conjunto dos números reais.

Segundo Cousquer (1998), Cantor publica em 1872 o artigo intitulado *Extensão de um teorema da teoria das séries trigonométricas*, no qual explica a necessidade de diferenciar a classe *A* dos números racionais com a classe *B* das sequências de números racionais e, em seguida, a classe *C* obtida pelos limites das sequências de elementos das classes *B* e *C*, e, ainda, todas as classes *C* obtidas a partir das classes precedentes. Este fato está explicitado numa passagem do mencionado artigo:

> A classe *A* proporciona o nascimento da classe *B*; pelo mesmo processo, essas duas classes reunidas proporcionam o nascimento de uma nova classe *C*. Seja, com efeito, uma série infinita: $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ de números escolhidos nas classes *A* e *B*, de modo que não pertencem todos os números à classe *A*, e esta série sendo constituída tal que $b_{n+m} - b_n$ se torne infinitamente pequeno à medida que *n* cresce, para qualquer que seja *m*... Eu diria que esta série tem um limite determinado *c*. As grandezas numéricas *c* constituem a classe *C*. As definições de equivalência, de desigualdade e aquelas das operações elementares, sejam as grandezas *c*, sejam entre estas grandezas elas mesmas e aquelas das classes *A* e *B*, são análogas às definições dadas acima. Enquanto que as

---

[11] Uma sequência (x_n) de números reais é denominada sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: Dado $\varepsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in N$ tal que se $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon.$

[12] Um corpo é um conjunto *K*, munido das operações de adição e multiplicação, que satisfazem os seguintes axiomas: a) Adição: associatividade, comutatividade, elemento neutro, elemento simétrico; b) Multiplicação: associatividade, comutatividade, elemento neutro, inverso multiplicativo; c) axioma da distributividade. Um corpo ordenado é um corpo *K*, no qual um subconjunto $P \subset K$, satisfaz: $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$. E ainda, dado $x \in P$, uma das três alternativas ocorrem: $x = 0,$ ou $x \in P$ ou $-x \in P$. Um corpo ordenado é completo quando todo subconjunto não vazio limitado superiormente possui um supremo.

> classes B e A são tais que se pode igualar cada a a um b, mas não cada b a um a, pode-se igualar não somente cada b a um c, mas também cada c a um b. Ainda que as classes B e C possam em certa medida ser identificadas, é essencial, na teoria que eu apresento, manter a distinção abstrata entre as classes B e C; também a equivalência de duas grandezas numéricas b, b' da classe B não significa a identidade, mas exprime somente uma relação determinada entre as séries às quais eles se relacionam. A classe C e aquelas que a precedem produzem de maneira análoga uma classe D; estas produzem uma classe E, e assim por diante; por λ operações (considerando aquela que passa de A para B como a primeira), chegamos a uma classe L de grandezas numéricas... (CANTOR, 1872 *apud* COUSQUER, 1998, p. 205 – 206, tradução da pesquisadora).

Essa construção dos números reais por meio de sequências de Cauchy identifica cada número racional r com a classe que contém a sequência constante $r_n = r$. As classes que não correspondem a esta identificação estão relacionadas aos novos números - *os irracionais*. É o caso da classe que contém a sequência $r_n = (1;1{,}4;1{,}41;1{,}4142;\ldots)$ que define $\sqrt{2}$ (ÁVILA, 2006).

Em 1873, Cantor mostra que o conjunto dos números racionais é enumerável, isto é, existe uma bijeção $f : N \to Q$ entre o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números racionais e, neste caso, diz-se que estes dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Igualmente, Cantor prova que o conjunto dos números algébricos, que é o conjunto das raízes dos polinômios com coeficientes inteiros, também é enumerável, concluindo, portanto, que o conjunto dos irracionais algébricos, ou seja, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\ldots$, é enumerável e possuem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. No entanto, em relação ao conjunto dos números reais, Cantor prova que não é possível exibir uma bijeção com o conjunto dos números naturais. Para isto, o pesquisador realiza uma demonstração por absurdo provando que o conjunto dos números reais é não enumerável. Desse modo, considerando que a união de conjuntos enumeráveis é enumerável, e que o conjunto os números reais é a união dos números algébricos com os números transcendentes (tal como os números π e e), deduz-se que os números transcendentes não são enumeráveis, ou seja, sua cardinalidade é maior que a do conjunto dos números naturais.

2.1.6 Considerações sobre o percurso histórico dos números irracionais

A breve descrição do percurso histórico da construção dos números irracionais apresentado neste texto mostra que os primeiros indicativos de números irracionais surgiram entre os egípcios, há mais de quatro mil anos, revelados por meio da resolução de alguns problemas que envolvem figuras e sólidos geométricos, incluindo a construção da pirâmide de Quéops, em que manipulam aproximações dos números $\sqrt{2}$, π e número de ouro.

Também por volta de 2000 anos a. C., os egípcios apresentaram manipulações um pouco mais precisas relacionadas a estes números. Eles exibiram uma relação de ternos pitagóricos e métodos de aproximação com até seis casas decimais para os valores de $\sqrt{A}$, além de aproximações para o número π.

Por volta de 600 a. C, os matemáticos gregos perceberam a existência de segmentos de medidas irracionais, detectando a existência de segmentos incomensuráveis. Esse fato causou muitos conflitos entre os gregos, sobretudo aos pitagóricos, pois eles não conheciam números que pudessem expressar a medida desses segmentos. Em aproximadamente 370 a. C, uma teoria elaborada pelo matemático grego Eudoxo permitiu a comparação entre medidas de segmentos incomensuráveis, marcando, portanto, um avanço para o conceito de números irracionais.

No entanto, o estatuto de número irracional foi revelado somente no século XIX, principalmente com as teorias de Cantor e Dedekind, que asseguram que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo, garantindo a continuidade da reta numérica e a possibilidade de se operar com os números irracionais, finalizando mais um capítulo de história da Matemática.

Considerando a importância dos aspectos históricos, bem como da construção dos números irracionais na formação de professores de Matemática, algumas questões foram inseridas no instrumento de pesquisa para os alunos do Ensino Superior, colaboradores desta pesquisa, com o objetivo de conhecer sobre a formação desses alunos em relação ao desenvolvimento dos números irracionais.

Assim, questões sobre a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ descoberta pelos gregos, construção de segmentos de medidas irracionais por meio da espiral pitagórica descoberta pelos platônicos, teoria das proporções de Eudoxo, construção de Dedekind e Cantor para os números irracionais, enumerabilidade e não enumerabilidade do conjunto dos números racionais e irracionais, foram inseridas no instrumento de pesquisa dos alunos do Ensino Superior, conforme apresentadas na seção 6.

2.2 PARTE B: OS NÚMEROS IRRACIONAIS E AS PESQUISAS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Assim como de praxe, ao iniciar esta investigação, foi realizado um levantamento sobre as pesquisas relacionadas ao tema *números irracionais e reais* condizentes com o ensino de Matemática na literatura brasileira e, em seguida, na literatura estrangeira[13]. As pesquisas adquiridas contribuíram para delinear o caminho a ser seguido para a presente tese de doutorado, sendo que alguns desses resultados contribuíram diretamente com as análises das entrevistas realizadas com os alunos colaboradores da presente pesquisa, descritas na seção 4. Sendo assim, apresenta-se a seguir uma síntese especificamente das pesquisas que colaboram para fortalecer as análises desta pesquisa, sendo que uma delas refere-se à análise de livros didáticos de Ensino Fundamental, Médio e Superior, e as demais estão relacionadas a concepções de alunos sobre o conceito de número irracional.

2.2.1 Pesquisas sobre números irracionais: ensino, aprendizagem e formação de professores

Na tese de doutorado intitulada *Estudos de continuidade e Números Reais: Matemática, descobertas e justificativas de professores*, Cobianchi (2001) apresenta, dentre outros estudos, os resultados de análises de diversas obras didáticas de Matemática no que concerne aos números reais e continuidade. Foram analisados 19 livros didáticos do Ensino Fundamental publicados no período de 1969 a 1997; dezesseis livros didáticos do Ensino Médio publicados entre 1946 e 1994; e 20 livros de Cálculo Diferencial e Integral I e Análise Real, cujo período de publicação é entre 1961 e 2001. Com as análises das obras dos três níveis de ensino, o autor constatou que geralmente inicia-se o estudo do conjunto dos números reais com a revisão do conjunto dos números naturais, seguida do conjunto dos números inteiros, conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, introduzido como sendo um conjunto diferente dos números racionais. Conforme a estrutura apresentada, a união do conjunto dos racionais com os irracionais forma o conjunto dos números reais.

Segundo Cobianchi (2001), com poucas exceções, a abordagem dos números reais nestas obras leva o leitor a crer que não houve nenhum percalço em toda a trajetória dos números reais: os autores afirmam que cada ponto da reta representa um número real; não

[13] No que se refere a pesquisas estrangeiras, encontrou-se pesquisas realizadas com alunos israelenses, espanhóis e franceses.

abordam grandezas comensuráveis e incomensuráveis, e apenas alguns livros apresentam discussões sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Uma única abordagem diferenciada dos números irracionais foi percebida na obra de Lacaz Netto (1952), que aborda a construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind, mas o próprio autor do livro didático considera ser um conteúdo difícil de ser ensinado no Ensino Médio, tendo sido ensinado em poucos colégios de São Paulo, na década de 1940 e início dos anos 1950.

Segundo Cobianchi (2001), no final da década de 1960 e início dos anos 1970, os números irracionais, sobretudo o número $\sqrt{2}$, começaram a ser introduzidos por meio do teorema de Pitágoras, e os segmentos com estas medidas eram representados na reta numérica. Neste mesmo período, iniciou-se a abordagem das aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{2}$, a utilização da calculadora para se encontrar aproximações deste número, a prova de que $\sqrt{2}$ não é um número racional, pois não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p,q \in Z$ e $q \neq 0$, e o número π é introduzido como a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. Esses fatos continuam presentes nas obras de Matemática da Educação Básica dos dias atuais.

No que se refere às obras dos cursos de Licenciatura em Matemática, segundo Cobianchi (2001), o conteúdo *números reais* é abordado na disciplina Análise Real. Entretanto, os autores das quatro obras analisadas pelo pesquisador, Elon Lages Lima, Walter Rudin, Robert Bartle e A. J. White, não abordam construções dos números reais viáveis para a preparação dos futuros professores de Ensinos Fundamental e Médio. Esses resultados relacionados à inviabilidade das obras de análise real utilizadas atualmente no Brasil para a formação de professores de Matemática também são percebidos na presente pesquisa. Esse fato decorre dos resultados das análises das entrevistas com os alunos do Ensino Superior, que mobilizam conhecimentos insuficientes e equivocados sobre o conjunto dos números reais, de modo particular do conjunto dos números irracionais. Além de não reconhecerem ou demonstrarem dúvidas sobre a existência de segmentos cuja medida é irracional, bem como a existência de um quadrado cuja medida de área é $13cm^2$, esses alunos não conhecem as teorias de construção e formalização do conjunto dos números reais, tais como as teorias de Cantor e Dedekind.

As demais pesquisas relatadas neste texto referem-se às concepções de alunos sobre o conceito de números irracionais, e oferecem suporte principalmente para as análises da questão 1 da presente pesquisa, que diz respeito a algumas das ideias base[14] de número irracional.

Igliori e Silva (2001) realizaram uma investigação sobre o conceito de número real com 36 alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e 14 alunos do último período do curso de Licenciatura em Matemática. Baseados nas pesquisas de Robinet (1986), realizada com alunos franceses, e nas pesquisas de Fishbein, Jehiam e Cohen (1995), e de Tiroh (1995), realizadas com alunos israelenses, Igliori e Silva (2001) elaboraram um questionário que foi aplicado aos alunos mencionados, com a intenção de compreender as concepções dos estudantes brasileiros e, em seguida, comparar os resultados obtidos entre suas análises e as análises de Robinet (1986), Fishbein, Jehiam e Cohen (1995), e Tiroh (1995). A seguir, estão disponibilizadas as questões aplicadas aos alunos brasileiros:

Quadro 1 - Instrumento de pesquisa de Igliori e Silva (2001)

1) Indique se o número abaixo é racional (Q) ou irracional (I):

   a) 0 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $0{,}333\ldots3$ (30 vezes)

   f) $0{,}21222324\ldots$ g) $4{,}212121\ldots$ h) π i) $3{,}1416$ j) $-\frac{3}{7}$

   k) $\frac{\pi}{10}$ l) e m) $2{,}7182$ n) $1{,}999\ldots$ o) 2

2) Explicite o critério que você utilizou para tomar a decisão no exercício anterior.

3) Efetue utilizando a calculadora:

   $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ $\qquad$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

   $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$ $\qquad$ $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=$

   Os resultados obtidos eram os esperados? Comente a sua resposta.

4) Um estudante estava em dúvida se π era um número racional ou irracional. Procurou seu valor na calculadora, obteve $3{,}141592654$ e concluiu então que era racional. Você concorda com a conclusão? Por quê?

5) Existe um número real compreendido entre:

   a) $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$ b) $2{,}13$ e $2{,}14$ c) $\frac{1}{3}$ e $0{,}333\ldots$?

[14] Entende-se por ideia base dos números irracionais, explanada na seção 3, os elementos matemáticos essenciais para a compreensão de números irracionais: número racional, representação decimal infinita, periodicidade e não periodicidade, diferenciar um número racional de um irracional, teorema de Pitágoras, existência de segmentos de medida $\sqrt{n}, \forall n \in N$, aceitar que a equação $x^2 = p$ tem solução real para $p \in R_+$.

6) Ordene os números, do menor para o maior: $\frac{\sqrt{3}}{10}$; 0; $0{,}02$; $\frac{\pi}{1000}$; $0{,}2$; $0{,}1999$; $0{,}1$.

7) Considere o intervalo $I = [0;0{,}2]$ e responda às perguntas:
  a) Quantos números existem em *I*?
  b) Quantos desses números são racionais? Indique alguns exemplos.
  c) Quantos desses números são irracionais? Indique alguns exemplos.

8) Considere o conjunto $J = \{x \in Q \mid 0 < x \leq \sqrt{2}\}$ e responda às perguntas:
  a) J tem um último elemento? (isto é, o elemento que vem exatamente antes de $\sqrt{2}$?)
  b) Se sim, qual é esse elemento? Se não, por quê?

9) Compare os conjuntos A e B, em cada caso, quanto à "quantidade de elementos". Coloque um X na coluna escolhida.

|A| indica a quantidade de elementos de A.
|B| indica a quantidade de elementos de B.

a) A = {ímpares}	B = {pares}
b) A = {pontos da reta}	B = {números reais}
c) A = {naturais}	B = {números pares}
d) A = {racionais}	B = {irracionais}
e) A = {naturais}	B = {racionais}
f) A = {pontos de um segmento}	B = {pontos da reta}
g) A = {racionais}	B = {números reais}
h) A = {racionais}	B = {pontos de um segmento}
i) A = {inteiros}	B = {naturais}

Fonte: Igliori e Silva (2001)

Quanto às análises realizadas pelos autores, são destacadas neste texto essencialmente aquelas que servem para fortalecer as análises da presente pesquisa. No que se refere à questão 1, segundo Igliori e Silva (2001), as respostas dos alunos indicam que as representações decimais ilimitadas, sem alusão ao período, são associadas aos números irracionais. Esta afirmação é baseada, por exemplo, no fato que o número $4{,}212121\ldots$ foi considerado como irracional por 22 dentre os 36 alunos iniciantes, e por 4 dentre os 14 finalistas. Quanto ao número π, considerado, segundo os autores, como um protótipo de número irracional, 13 alunos iniciantes classificaram tanto π quanto $3{,}1416$ como irracional. Para Igliori e Silva (2001), a aproximação do número π por $3{,}1416$ nas aulas de física ou mesmo de matemática pode ter levado 7 alunos finalistas a identificar esses números. Do mesmo modo, os autores acreditam que este fato possa ter levado esses alunos a classificarem o número $3{,}1416$ como irracional.

Na questão 2, referente aos critérios de classificação dos números da questão anterior, os autores perceberam que:

- 25% dos estudantes e 36% dos finalistas definem número irracional como sendo um número infinito ou como sendo um número com infinitos dígitos após a vírgula, sem mencionar o período.
- 19% dos iniciantes definem número racional como sendo um número exato, consequentemente consideram um irracional como sendo um número não exato.
- Para 14% dos iniciantes, os números irracionais são raízes.
- 14% dos iniciantes e 50% dos finalistas classificam número racional como um número que pode ser posto na forma $\frac{a}{b}$ sem classificar a e b, sendo os demais números irracionais.
- 5% dos iniciantes consideram número racional como sendo um número inteiro.
- 5% dos iniciantes consideram número irracional como número negativo.

Na quarta questão, 14 alunos iniciantes concluíram que, como na calculadora apareceu $3{,}141592654$ para o valor de π, então π é um número racional, contradizendo a resposta à questão 1, na qual esses mesmos estudantes classificaram o número π como irracional.

Quanto à última questão, especificamente sobre o item d, relacionado à cardinalidade dos conjuntos dos números racionais e irracionais, os alunos apresentavam respostas dizendo que, como os dois conjuntos possuem infinitos elementos, então eles devem ter a mesma quantidade de elementos. No que diz respeito a comparar as respostas dos alunos iniciantes e as dos finalistas na última questão, os autores concluem que os alunos possuem concepções similares, porém os alunos finalistas eram mais coerentes em suas respostas, mantendo o mesmo critério para todos os itens, embora nem sempre corretos.

Os autores concluíram que os alunos brasileiros apresentam algumas concepções sobre os números reais que podem ser comparadas com os alunos franceses e israelenses, indicadas nas pesquisas de Robinet, Tirosh e Fischbein et al, tais como:

- associação número – representação;
- associação irracionalidade – representação decimal ilimitada; associação irracionalidade – “não-exatidão” (para os alunos, não exatidão poderia ser:

número não inteiro, número negativo, número cuja representação decimal possui pontos de suspensão em número infinito ou não);

- associação número – aproximação (associação efetuada por mais alunos finalistas do que iniciantes).

Outra conclusão de Igliori e Silva (2001) pertinente para as análises da presente pesquisa diz respeito ao fato de que, apesar de na maioria das vezes os alunos finalistas apresentarem evoluções em relação aos índices de acertos dos alunos iniciantes, muitas concepções errôneas resistem a um curso introdutório de análise real, tratado, segundo os autores, de forma tradicional. Estes resultados da investigação de Igliori e Silva (2001) serão retomados na seção 4, para auxiliar a compreensão das respostas dos alunos, fortalecendo as análises da presente pesquisa.

Uma outra pesquisa foi realizada com o objetivo de conhecer os pré-conceitos e imagens conceituais sobre os números reais de alunos de Curso de Licenciatura em Matemática, na qual Soares, Ferreira e Moreira (1999) investigaram respostas de 84 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais e da Universidade Federal de Santa Catarina, sendo 34 alunos do 2º período, 38 do 4º período e 12 do 7º período. A coleta de dados foi realizada por meio de questionários que consistiram em 11 questões subdivididas em vários itens, as quais os autores caracterizaram como:

- Existência de elemento máximo (ou mínimo) em subconjuntos de *R*.
- Caracterizações de número irracional e outras questões sobre irracionalidade.
- A distribuição de números irracionais e racionais na reta real.
- Formas decimais infinitas.
- Possibilidade de divisão infinita de um segmento.
- Incomensurabilidade e irracionalidade.
- Potência com expoente irracional.
- Infinito e representação decimal.
- O conceito de números reais e algumas propriedades estruturais.

Dentre as questões propostas pelos autores, destaca-se neste texto aquelas específicas sobre os números irracionais e que contribuem diretamente com as análises da presente pesquisa.

Soares, Moreira e Ferreira (1999) ressaltam que as caracterizações de números irracionais mais frequentes nos livros didáticos são: a) um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros; b) um número irracional possui representação decimal infinita e não periódica. Levando em conta tais caracterizações, na questão 2, por exemplo: *Pra você, o que é um número irracional?* Os autores relatam que apenas 29 alunos responderam de modo coerente, sendo que 22 responderam de acordo com a caracterização a, e somente 7 alunos responderam de acordo com a caracterização b, indicando que a definição de números irracionais mais presente para esses alunos é: *aquele número que não pode ser escrito como uma fração.* Contudo, segundo os autores, grande parte dos alunos que associam corretamente os números irracionais com uma das duas caracterizações, a ou b, mostra dificuldades em questões que exigem compreensão dessas definições, tais como as questões 3 e 5, discutidas a seguir. Ressalta-se, ainda, que quase 50% dos alunos associaram, incorretamente, os irracionais com tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido. Dentre estes alunos, alguns associam números irracionais com representação decimal infinita.

Na questão 3: *O que te leva a crer sobre a existência de números irracionais?* Apenas 18% dos alunos responderam de modo adequado, justificando o fato de existirem segmentos de medidas $\sqrt{2}$, ou, *se não existissem esses números a reta teria furos* (Ibid, p. 102). Desse modo, os autores concluem que 54% dos alunos que responderam corretamente a questão 2, relacionada a uma entre as duas caracterizações de números irracionais já citadas, não sabem ao menos uma justificativa para a existência desses números.

A questão 5, relacionada ao número π e o comprimento da circunferência, dizia o seguinte: *Sabe-se que* π *é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Chamando de C o comprimento da circunferência (em cm) e D a medida do diâmetro (em cm) obtemos* $\pi = \frac{C}{D}$*. O que você diria a um aluno que lhe apresentasse tal conclusão?* Apenas 11 alunos responderam que a conclusão do hipotético aluno está errada, apresentando justificativas coerentes. No entanto, 40 alunos responderam que a conclusão está errada sem saber apontar onde está o erro, como pode ser percebido na fala de um dos alunos: $\frac{C}{D}$ *não é uma divisão exata, portanto não é um número racional* (Ibid, p. 104).

A questão 6 diz respeito à distribuição dos racionais e irracionais dentro do conjunto dos números reais: *Encontre um número racional e um irracional entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$*;*

Encontre três números racionais e três irracionais entre $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$*; Quantos números racionais existem entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$*? E irracionais?* Apenas 42% dos alunos afirmaram que existem infinitos racionais e irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, mesmo considerando as respostas sem justificativas ou justificativas incorretas. Somente 10% dos alunos apresentaram justificativas corretas para o item b, e apenas 25% exibiram 3 irracionais entre $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$, enquanto que 44% apresentaram 3 racionais.

Uma das questões refere-se a segmentos de medidas incomensuráveis: eram dados quatro pares de medidas de segmentos representando medidas dos lados de retângulos. Os autores questionavam quais dos retângulos poderiam ser subdivididos em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas horizontais e verticais aos lados dos retângulos dados. Para esta questão, apenas 7 dos 84 entrevistados responderam corretamente. Segundo os autores, os alunos parecem não considerar a possibilidade de incomensurabilidade entre segmentos.

Na questão 11: *Os números naturais são utilizados, por exemplo, para contar e os racionais para medir. E os números irracionais para que servem? E os reais?* Não foram encontradas análises dos autores especificamente para a questão sobre os números irracionais, no entanto, sobre os números irracionais, apenas 6 alunos dentre os 44 que a responderam apresentaram argumentos coerentes relacionados a grandezas contínuas ou possibilidade de expressar qualquer quantidade.

Com a análise dos questionários, os autores constataram respostas sofisticadas, envolvendo noções de limites, continuidade, infinito e, igualmente, respostas simplistas, ou ingênuas, que acreditam ser resultantes da vivência escolar destes sujeitos. Porém, em ambos os casos, os pesquisadores afirmam tratar de conceituações insuficientes para um futuro professor de Matemática.

Desse modo, juntamente com os resultados das demais investigações relatadas nesta parte do texto, a pesquisa de Soares, Ferreira e Moreira (1999) colabora com as análises da questão 1 da presente pesquisa no sentido de inferir sobre possibilidade de mobilização de teoremas em ação relacionados ao conceito de números irracionais, conforme apontado nas análises da seção 4.

Melo (1999) também traz contribuições para as pesquisas e o ensino dos números irracionais em sua dissertação de mestrado, intitulada *A compreensão do conceito de número irracional: uma radiografia do problema e uso da História como uma alternativa de superação*. Um dos objetivos da pesquisa foi identificar as dificuldades dos alunos na compreensão dos números irracionais do ponto de vista conceitual e histórico. Para isto, o pesquisador escolheu como sujeitos da pesquisa 178 alunos que cursavam 1º, 2º e 3º período dos cursos de Engenharia, Ciências da Computação, Informática e Matemática (bacharelado e licenciatura). As informações foram obtidas por meio de um questionário que consistiu de 9 questões, sendo 3 questões abertas relativas a aspectos históricos dos números (a origem dos números, do zero, dos irracionais, onde e que problemas podem ter provocado a criação desses números); e 6 questões (3 abertas e 3 fechadas) relacionadas ao conceito de número irracional (diferença entre racionais e irracionais, possibilidade de correspondência entre os números reais e os pontos da reta, densidade, comparação entre o conjunto dos racionais e dos irracionais no sentido de identificar qual infinito é maior).

Quanto aos resultados obtidos pelo autor, apresentam-se somente aqueles diretamente relacionados ao conceito de número irracional. Por exemplo, no item (b) da terceira questão: *que problema pode ter provocado o aparecimento dos números irracionais?,* os alunos entrevistados mostraram não conhecer as origens históricas dos números irracionais, pois 61% não responderam a questão; 3,9% apresentaram argumentos relacionado à circunferência e o número π; 5% responderam em relação ao teorema de Pitágoras, diagonal do quadrado ou hipotenusa de triângulo retângulo; e 30,1% apresentaram outras justificativas que, segundo o autor, são respostas corretas, porém muito vagas, como por exemplo: *Para resolver problemas que não eram possíveis com os racionais*; *por motivo de organização*; *como ajuda em cálculos astronômicos*, etc (Ibid, 71).

Na questão aberta 4, que referia-se à diferença entre número racional e irracional, Mello (1999) chama atenção para o fato que apenas 1 dentre os 178 alunos apresentou a definição correta de número racional como sendo um número que pode ser representado como a razão entre dois números inteiros $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, e, consequentemente, irracional como sendo aquele número que não é racional. Ressalta-se o fato que o erro mais frequente percebido nesta questão foi caracterizar um número irracional como aquele que possui infinitas casas decimais, sem mencionar a não periodicidade do número. A questão de caracterizar um irracional como número que não existe, fato identificado nas análises da presente pesquisa, também foi detectado nas argumentações de um dos alunos: *Racional existe, irracional não existe* (Ibid, p. 72).

A quinta questão solicitava aos alunos classificar alguns números em racionais e irracionais. O autor chama atenção para o fato que 23,6% dos alunos entrevistados classificaram o número $-\sqrt{2}$ como racional. Dentre os alunos de Licenciatura em Matemática, 14% não reconheceram a irracionalidade de $-\sqrt{2}$ e 4,7% deixaram a resposta em branco. Destaca-se, ainda, que mais de 30% dos alunos desconhece a irracionalidade do número $0{,}171771777\ldots$.

Estes resultados relatados por Mello (1999) auxiliam nas análises da questão 1 proposta aos sujeitos entrevistados na presente pesquisa, no sentido de melhor compreender os conhecimentos errôneos apontados pelos alunos sobre os números irracionais e indicar possíveis teoremas em ação falsos implícitos nas respostas dos alunos.

A tese de doutorado de Bronner (1997), *Étude didactique des nombres réels: idécimalité et racine carrée*[15], consiste em um estudo sobre as problemáticas e obstáculos na construção dos números reais no decorrer da história da matemática; a evolução destes números nos livros didáticos e nos *Programmes*[16] desde 1854 até 1996; investigações com alunos e professores de *Troisième* e *Seconde*[17] por meio de problemas para os alunos e questionários e entrevistas para os professores; e, ainda, uma engenharia didática desenvolvida com alunos de *Troisième*. O pesquisador mostrou que alguns conceitos relacionados ao estudo dos números – denominado pelo autor como campo numérico –, como números reais, raiz quadrada, irracionalidade e idecimalidade[18] mudam, às vezes, radicalmente, podendo até desaparecer, no decorrer do tempo, dos currículos e livros didáticos.

Segundo Bronner (1997), a partir de 1986 ocorreram mudanças nos *Programmes* com alterações no campo numérico, e a natureza dos números não foi mais um objeto de ensino. Da *Sixième* à *Quatrième*[19], o sistema numérico é formado pelos racionais, porém constituídos apenas dos números decimais e fracionários. O contexto é fortemente algébrico e relacionado com a utilização da calculadora, restringindo os alunos ao espaço

---

[15] Estudo didático dos números reais: idecimalidade e raiz quadrada.

[16] São os documentos oficiais do sistema de ensino francês que contêm a Base Comum de Conhecimentos e Competências propostos pelo ministério de Educação francês.

[17] *Troisième* e *Seconde* são níveis do sistema de ensino francês que correspondem, respectivamente, ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio do sistema de ensino brasileiro.

[18] Idecimalidade é um conceito definido por Bronner (1997) para indicar que um número não é decimal. Este conceito refere-se aos números irracionais e aos números racionais com infinitas dízimas decimais.

[19] *Sixième, Cinquième* e *Quatrième* são séries do sistema de ensino francês que correspondem aos 6º, 7º e 8º anos do Ensino Fundamental brasileiro.

numérico decimal. As expressões *número racional* e *número real* foram banidas dos *Programmes* deste nível de ensino. O conceito de números reais é explicitado na *Troisième*, mas não se diz o que é um número real. Contudo, segundo o pesquisador, paradoxalmente, os conjuntos numéricos[20] Z, D, Q, R aparecem na *Seconde*, mas não passa de um simples vocabulário. Para o autor, o período de 1986 a 1996 consiste em uma ausência oficial deste conteúdo nos *Programmes* do *Collège* e *Lycée*.

Nota-se que esta ausência dos conjuntos numéricos apontado por Bronner (1997) está ainda mais fortalecida atualmente, pois no novo *Programme* da *Seconde* (FRANCE, 2009), os conjuntos numéricos foram excluídos. Consequentemente, os livros didáticos editados depois de 2009 não apresentam nem ao menos a introdução sobre as nomenclaturas e propriedades dos conjuntos numéricos, e o primeiro capítulo dos manuais atuais, tais como o manual da *Seconde* da coleção Berlin[21], inicia-se diretamente com o conteúdo *funções*.

Bronner (1997) relata uma investigação com alunos do Mali, de nível de ensino semelhante ao 1º ano do Ensino Médio brasileiro, sobre o ensino e aprendizagem da noção de raiz quadrada, no conjunto dos números reais. Tal investigação permitiu ao autor caracterizar o significado do conceito de raiz quadrada formulado pelos alunos, bem como as dificuldades e obstáculos inerentes a este conceito. A essa caracterização Bronner (1992) denominou de modelos, descritos a seguir, e serviu de parâmetro para analisar as respostas dos alunos e professores franceses colaboradores de sua tese de doutoramento.

O modelo Quadrado Perfeito (CP): Nesse modelo, são aceitos somente os números inteiros, os decimais e eventualmente os racionais. O sistema de números SN associado a esse modelo é uma parte de Q e, frequentemente, para os alunos, SN é uma parte estrita de D. Um aspecto operatório é associado ao objeto raiz quadrada, conforme a definição matemática: *A raiz quadrada de a é o número que multiplicado por ele mesmo resulta em a.* O conjunto de validade é o conjunto C dos quadrados perfeitos decimais ou racionais: $C = D^2$ ou $C = Q^2$. E a raiz quadrada aparece como uma aplicação $\sqrt{} : C \to SN$ do conjunto dos quadrados perfeitos aos valores no sistema de números. Corroborando as ideias dessa tese, Bronner (1997) apresenta um teorema em ação mobilizado pelos alunos investigados por ele, no mesmo sentido indicado por Vergnaud

[20] Nos livros didáticos franceses *Z* representa o conjunto dos números inteiros relativos, *D* representa o conjunto dos números decimais, *Q* representa o conjunto dos números racionais e *R* representa o conjunto dos números reais. Notamos que no Brasil não é comum os livros didáticos apresentarem o conjunto *D* dos números decimais.

[21] Disponível em http://eduscol.education.fr/maths/actualites/manuels-numeriques-seconde-maths-2010.

(1990), também indicado implicitamente nas respostas dos alunos da presente pesquisa: *Para* $a \in SN$, $\sqrt{a}$ *existe se e somente se* a *é quadrado perfeito.*

Os alunos cujas respostas se relacionam com este modelo têm dificuldades em dar sentido ao número $\sqrt{a}$ quando a não é um quadrado perfeito e, o consideram como um novo número. Desse modo, Bronner (1997) interpreta este fato como um obstáculo dos números decimais ou dos racionais para a passagem aos irracionais. A existência dos irracionais e idecimais não é considerada. Segundo o pesquisador, nesta situação é percebida uma versão atual de uma relação pitagórica com o número, na qual os números são essencialmente inteiros, decimais ou racionais.

O modelo Formal (CF): Neste modelo, o sistema de números SN é sempre N, D ou Q, e somente os números desses conjuntos têm estatuto de número. As raízes quadradas $\sqrt{a}$, quando a não é um quadrado perfeito, são consideradas como expressões formais ou artifícios de cálculos utilizados nas transformações algébricas. A raiz quadrada tem aqui um estatuto de operador algébrico, e permite transformar expressões numéricas ou algébricas, por exemplo, para resolver uma equação. Porém, as raízes de a são rejeitadas como números quando a não é um quadrado perfeito, e guardam somente o estatuto formal. Esse saber permite ao aluno de ter sucesso em cálculos algébricos (desenvolvimento, fatoração, etc) e na resolução de equações.

O modelo Quadrado Perfeito e Negativos (CP-N): Este modelo está ligado ao modelo Formal, e funciona de modo análogo ao modelo Quadrado Perfeito para os números positivos, com a diferença que os alunos aceitam as $\sqrt{-a}$ quando a é um quadrado perfeito. E a aplicação raiz quadrada é definida no conjunto $C \cup -C$:

$$\sqrt{\ } : C \cup -C \rightarrow Q.$$

Os modelos Aproximação CA e CA$\approx$: Na *Quatrième,* o teorema de Pitágoras e a raiz quadrada são apresentados sob um aspecto de operador-algoritmo: $\sqrt{\ }$: -----> c, onde c é o valor aproximado oferecido pela calculadora, e nenhuma explicação sobre a natureza desses números é apresentada aos alunos.

O modelo CA$\approx$: O espaço numérico manifestado nesse modelo é D ou Q. A diferença entre valores exatos e aproximados é percebida pelos alunos e este fato é manifestado pela utilização do símbolo $\approx$ para indicar valores aproximados.

O modelo CA: Geralmente, as relações com este modelo aparecem na aprendizagem antes do modelo CA$\approx$, e os sistemas de números são ainda D ou Q. A raiz quadrada é vista como um algoritmo-operador:

$$\begin{aligned}\sqrt{\ } : SN_+ &\to D_+ \\ a &\to c\end{aligned}$$, onde c é um valor aproximado relacionado à calculadora.

Quando os alunos associam $\sqrt{a}$ com os valores aproximados decimais obtidos por diversos processos (máquinas, algoritmos de extração, tabelas), no período atual, essencialmente pelas calculadoras, Bronner (1997) classifica as repostas dos alunos no modelo CA.

Modelo Concepção de Número (CN): As $\sqrt{a}$ com $a \in Q_+$ começam a ter um estatuto de número. Eles servem para medir determinadas grandezas, são soluções de equações do segundo grau e as propriedades das operações se estendem para estes números.

Modelo Concepção de Número Real (CNR): Esta concepção diz respeito à reestruturação dos números reais por meio de construções axiomáticas ou formais, tais como Cortes de Dedekind, sequências de Cauchy. No entanto, esta concepção poderá ocorrer apenas no decorrer ou após os estudos universitários.

Tais modelos identificados nas respostas dos alunos Malienses e franceses investigados por Bronner (1997; 1992) também foram percebidos nas respostas dos alunos brasileiros e franceses colaboradores da presente pesquisa. Sendo assim, no decorrer das análises da seção 4, sobretudo nas atividades relacionadas ao uso da calculadora e medidas de segmentos irracionais, alguns destes modelos serão mencionados no sentido de melhor compreender as respostas dos alunos.

No artigo intitulado *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*[22], os autores Fischbein, Jehian e Cohen (1995) realizaram uma investigação sobre o conceito de números irracionais com alunos israelenses, sendo 62 alunos de nível equivalente ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio brasileiro e 29 estudantes do curso correspondente ao curso de Licenciatura em Matemática. Os autores partiram do fato de que o conceito de números irracionais possui dois obstáculos intuitivos: a dificuldade em aceitar que duas grandezas podem ser incomensuráveis; e a dificuldade de aceitar que o conjunto dos números racionais, embora

[22] O conceito de número irracional em estudantes e professores em formação, tradução da pesquisadora.

denso em R, não cobre toda a reta. Desse modo, os pesquisadores elaboraram um questionário que consiste de 9 questões relacionadas à hierarquia do sistema de números e a posição dos números nessa hierarquia, densidade, continuidade da reta numérica, as naturezas do infinito e a operação de medir. Dentre as questões investigadas pelos autores, serão mencionadas neste texto apenas aquelas consideradas pertinentes para as análises da presente pesquisa.

Fischbein, Jehian e Cohen (1995) solicitaram que os alunos indicassem se π, $-\frac{22}{7}$, $0{,}121221\ldots$, $3\sqrt{8}$, $0{,}0555\ldots$, $\sqrt{16}$, $34{,}2727\ldots$, e outros oito números que não aparecem no artigo, são classificados como:

- um número;
- racional;
- irracional;
- real.

Embora o número π seja um protótipo de número irracional, apenas 17% dos alunos de Grade 9[23], 19% de Grade 10[24] e 79% de futuros professores de Matemática classificaram - no como irracional. Outro fato que se destaca é em relação ao número $\sqrt{16}$, que apenas 30% dos alunos de Grade 9, 44% dos alunos de Grade 10 e 69 % dos futuros professores classificaram como racional. Estes equívocos de classificação de números em racional e irracional também foram detectados nas respostas dos alunos da presente pesquisa, e serão retomados na seção 4.

Na questão 2, os pesquisadores solicitavam que os alunos definissem números racionais, irracionais e reais. Em relação à definição de número irracional, o erro mais frequente percebido foi: *um número irracional é um número com representação decimal infinita*, ou seja, a questão da não periodicidade muitas vezes não é mencionada pelos alunos. Outro fato percebido é que, em alguns casos, os números negativos são associados à irracionalidade. Decorre destes fatos a afirmação dos autores:

> Esses estudantes certamente não possuem o verdadeiro significado do termo número irracional, o algoritmo no qual um número na representação decimal periódica infinita pode ser transformado em um quociente entre dois números inteiros e, sobretudo, eles não têm um claro entendimento do porquê, em várias circunstâncias, eles obtêm um símbolo, um número que contradiz a ideia básica intuitiva de coleções comparáveis e de

[23] Nível do sistema de ensino americano correspondente ao 9º ano do Ensino Fundamental brasileiro.
[24] Nível do sistema de ensino americano correspondente ao 1º ano do Ensino Médio brasileiro

> medida na qual o conceito de número inicialmente nasceu (Ibid, p. 35, tradução da pesquisadora)[25].

Na questão: *Todo número irracional corresponde a um ponto do eixo enumerado?* Responderam corretamente 63% dos alunos de Grade 9; 56% do Grade 10 e 80% dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Ou seja, para alguns dos alunos entrevistados, existem números irracionais que não correspondem a pontos da reta real.

Na questão relacionada a comparar os conjuntos dos números racionais e irracionais quanto aos números de elementos, dizendo quais das afirmações são verdadeiras:

a) Existem mais elementos em Q.
b) Existem mais elementos em I.
c) Existe o mesmo número de elementos em ambos os conjuntos.

Segundo os autores, poucos estudantes escolheram a opção a, porém muitos optaram pela alternativa c, sendo 60% de Grade 9; 44% de Grade 10 e 41% dos alunos universitários.

Duas questões dizem respeito à incomensurabilidade de segmentos de reta: *É sempre possível encontrar para dois segmentos AB e CD de medidas diferentes, uma unidade em comum? É possível encontrar uma unidade comum para o lado de um quadrado e sua diagonal?* 17% dos estudantes de graduação responderam positivamente as duas questões, justificando que para encontrar tal unidade basta diminuí-la suficientemente. Isso mostra que esses futuros professores desconhecem a possibilidade de segmentos incomensuráveis, sobretudo quando se trata da diagonal e lado de um quadrado, já mencionado pelos gregos.

Assim, a pesquisa de Fishbein, Jehian e Cohen (1995) colabora com a presente investigação no sentido de auxiliar a fundamentar as análises da seção 4, uma vez que concepções errôneas semelhantes sobre os números irracionais identificadas nos alunos de Israel foram percebidas nos alunos brasileiros entrevistados nesta pesquisa.

Os resultados das pesquisas relatados acima são essenciais para as análises da seção 4. Ressalta-se que os conhecimentos errôneos mobilizados pelos alunos entrevistados nas pesquisas de Igliori e Silva (2001), Soares, Ferreira e Moreira (1999),

---

[25] These students certainly do not possess the true meaning of the term "irrational number", the algorithm by which a periodical infinite decimal may be transformed into a quotient of two integers and, still more important, they do not have a clear understanding of why, in various circumstances, one gets a symbol, a number which contradicts the basic intuitive idea of comparable collections and that of measure from which the concept of number, initially, was born.

Melo (1999), e Fishbein, Jehian e Cohen (1995), contribuem, particularmente, com as análises da atividade 1 da presente pesquisa, no sentido de auxiliar a compreender os conhecimentos dos alunos e fortalecer as indicações de teoremas em ação possivelmente mobilizados implicitamente nas respostas dos alunos. Conforme já mencionado, os modelos de concepção elaborados por Bronner (1997) auxiliam a compreensão das respostas dos alunos quando se trata de irracionais algébricos mediante situações de uso da calculadora e medidas de segmentos. Ademais, a pesquisa de Bronner (1997), colaborou para a elaboração das atividades em quadros numérico, algébrico, gráfico e geométrico. Por fim, os resultados da pesquisa de Cobianchi (2001) contribuem para tirar conclusões sobre os conhecimentos presentes nos livros didáticos brasileiros e, sobretudo, nas obras do ensino superior.

2.2.2 Considerações sobre as pesquisas relacionadas aos números irracionais

Os resultados das pesquisas relatadas acima mostram as dificuldades que os alunos da Educação Básica e de Cursos de Ciências Exatas apresentam em relação ao conceito de números irracionais, mostrando, portanto, que as dificuldades notadas nos alunos do 4º ano de Matemática da pesquisadora, são problemas que ocorrem em outras regiões do Brasil e no exterior.

Conforme já mencionado, estas pesquisas colaboraram para o delineamento desta tese, no sentido de auxiliar a perceber algumas dificuldades e conhecimentos falsos apresentados pelos alunos em relação aos números irracionais, e que serviram de alicerce para elaborar o instrumento de pesquisa, com vistas a desestabilizar possíveis conhecimentos falsos mobilizados pelos alunos no decorrer das entrevistas.

Ainda, para as análises, os resultados dessas pesquisas foram essenciais para auxiliar na compreensão de algumas respostas dos alunos e modelá-las na forma de teoremas em ação, possíveis de serem mobilizados pelos alunos durante as entrevistas. Foi neste sentido que as pesquisas de Igliori e Silva (2001), Soares, Ferreira e Moreira (1999), Melo (1999) e Fischbein, Jehian e Cohen (1995), contribuíram para a atividade 1. Para as demais atividades, que tratam de irracionais algébricos, a pesquisa de Bronner (1997) contribuiu para a compreensão de certas respostas mobilizadas pelos alunos, que puderam ser identificadas com os modelos propostos por Bronner (1997), explicitados anteriormente. Igualmente, a pesquisa de Bronner (1997) foi essencial para a estruturação das atividades em quadros numérico, algébrico, de funções (especificamente no seu aspecto gráfico) e geométrico.

Cabe salientar que, embora estas e outras pesquisas analisadas sobre os números irracionais ofereçam contribuições importantes para a área de Educação Matemática, nota-se que, sobretudo aquelas que se referem às concepções de alunos, de modo geral, tratam de questionários com questões abertas ou fechadas para os alunos responderem. Desse modo, surgem algumas questões: *A realização de entrevistas individuais com os sujeitos da pesquisa poderia oferecer informações mais precisas sobre os conhecimentos desses alunos em relação aos números irracionais? Seria possível indicar categorias de conhecimentos implícitos, na forma de teoremas em ação, nas respostas desses alunos? Quais seriam as situações vivenciadas pelos alunos no decorrer do processo escolar que favorecem a aprendizagem dos números irracionais? Quais conhecimentos sobre os números irracionais os alunos mobilizam ao finalizarem o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior de Matemática e alunos de níveis equivalentes a um sistema de ensino diferenciado, como, por exemplo, o sistema de ensino francês? Conhecimentos errôneos dos alunos sobre os números irracionais, já apontados em outras pesquisas, são passíveis de serem desestabilizados mediante situações que favorecem este fato? Em caso positivo, em qual nível de ensino é possível esta desestabilização?*

Assim, diante dessas questões, a presente pesquisa foi desenvolvida mediante entrevistas individuais com atividades previamente elaboradas para os alunos resolverem, buscando analisar quais os conhecimentos implícitos e explícitos mobilizados por alunos brasileiros e franceses, finalistas de cada nível de ensino investigado. Os tipos de situações relacionadas aos números irracionais que fazem ou que deveriam fazer parte da vida escolar desses alunos também foram levadas em consideração para esta pesquisa.

Ademais, em relação às contribuições da presente pesquisa para a literatura, destacamos o fato de investigar e modelizar na forma de teoremas em ação conhecimentos sobre números irracionais de alunos de diferentes níveis de ensino, e de dois países distintos, nos quais o conceito de número irracional é abordado de modo distinto nos documentos curriculares desses dois países, conforme descrito na seção 4.

Para fundamentar a pesquisa, notou-se que a Teoria dos Campos Conceituais ofereceria os aportes necessários. Uma síntese dessa teoria, acompanhada de exemplos relacionados aos números irracionais, é disponibilizada na próxima seção.

3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E RESPECTIVAS CONTRIBUIÇÕES PARA O ESTUDO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Nesta seção apresenta-se uma introdução sobre a Teoria dos Campos Conceituais focalizada, principalmente, nos conceitos que ofereceram suporte para a elaboração das atividades e análises das entrevistas, realizadas com os sujeitos colaboradores desta pesquisa. No decorrer deste texto, concomitante com a introdução da teoria, buscou-se exemplificar e relacionar os pressupostos teóricos apresentados com situações relacionadas aos números irracionais, tema deste trabalho.

3.1 A Teoria dos Campos Conceituais e suas contribuições para a presente pesquisa

Gérard Vergnaud, psicólogo francês, tem dedicado muitas de suas pesquisas à Didática da Matemática. Vergnaud (2003) defende que a Psicologia, sozinha, não é suficiente para dar conta da teorização em Educação, e que a Didática não pode dispensar as contribuições da Psicologia. Assim, nesta perspectiva de contribuição que a Psicologia pode oferecer à Didática, de modo especial à Didática da Matemática, é que o referido pesquisador desenvolve a Teoria dos Campos Conceituais, teoria cognitivista que busca compreender o desenvolvimento dos conceitos, suas filiações e rupturas[26], no decorrer da aprendizagem escolar. Vergnaud (1990) esclarece que sua teoria não se trata de uma teoria didática, mas que ela interessa à Didática por oferecer subsídios para a compreensão do desenvolvimento cognitivo dos alunos, mediante situações de aprendizagem.

A Teoria dos Campos Conceituais nasceu na década de 1980, com a finalidade de explicar o processo da conceitualização das estruturas aditivas, multiplicativas, das relações espaço – número, da álgebra, e, portanto, no campo da Educação Matemática. Contudo, devido à eficácia desta teoria, no que se refere a compreender os processos cognitivos no decorrer do desenvolvimento de um sujeito, ela tem contribuído com pesquisas dos mais variados campos científicos, tais como Física, Biologia, Psicologia,

[26] Entende-se por "[...] filiação o apoio dos novos conhecimentos em conhecimentos anteriores e por rupturas quando é necessário romper com o conhecimento anterior para a aquisição do novo conceito" (GRINGS *et all*, 2008, p. 8).

entre outros. De modo particular, para a presente pesquisa, esta teoria ofereceu valiosas contribuições para compreender o desempenho dos sujeitos mediante entrevistas clínicas com resolução de atividades, relacionadas aos números irracionais.

Ainda sobre as origens da Teoria dos Campos Conceituais, é preciso ressaltar que Gérard Vergnaud foi orientando de doutorado de Jean Piaget, justificando um dos motivos que a origem da Teoria dos Campos Conceituais é piagetiana, e, sobretudo, o fato que dois conceitos piagetianos – os conceitos de esquema e de invariante operatório – foram enriquecidos por Vergnaud, com foco na conceitualização, tornando-se conceitos chave de sua teoria.

Segundo Vergnaud (2009a), Piaget abordava o conhecimento como um processo muito geral, biológico e social, e seu ponto de vista científico sobre a formação de certos conceitos, como, por exemplo, espaço, tempo, ordem, número, classe lógica etc, surgiu com o estudo do processo de desenvolvimento com bebês, crianças e adolescentes, não se dedicando ao desenvolvimento cognitivo dos adultos. Assim como na teoria piagetiana, Vergnaud considera a ação do sujeito um dos pontos cruciais para o desenvolvimento de um conceito, entretanto, para Vergnaud (2009a), um sujeito aprende e se desenvolve em qualquer idade, inclusive na fase adulta.

Além de a teoria de Vergnaud complementar certos pressupostos teóricos piagetianos, existem diferenças notáveis entre essas teorias, como, por exemplo, a importância atribuída ao papel da linguagem, dos símbolos e da representação para a formação de um conceito, fortemente presente na Teoria dos Campos Conceituais. Vergnaud (1990) defende que para o estudo de um conceito são necessários diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades, teoremas, interligados, formando o que o pesquisador denomina por Campo Conceitual. Como, por exemplo, no estudo das estruturas aditivas, estão relacionados o conjunto das situações que implicam uma ou várias adições ou subtrações, os conceitos de cardinal, de medida, número natural, número relativo, transformação temporal (perder ou ganhar), composição binária de medidas (quantos são ao todo?), entre outros.

Neste aspecto de se estudar um conceito por meio de campos conceituais, e considerando que, segundo Vergnaud (1990), para a compreensão de um conceito é necessário compreender vários outros conceitos e vivenciar diferentes situações ao longo do tempo, é que foram realizados estudos: histórico, epistemológico, documentos curriculares brasileiros, livros didáticos brasileiros e pesquisas, com o objetivo de conhecer diferentes situações relacionadas aos números irracionais que possivelmente fazem parte da vida escolar dos alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior de Matemática. Sendo assim, constatou-se, com este estudo, que a construção do conceito dos números irracionais está relacionada ao conjunto das situações que envolvem equações algébricas de grau maior ou igual a 2, calculadora e a decimalização dos números, números racionais, conceitos de infinito, potências, raízes (quadradas, cúbicas, etc.), teorema de Pitágoras, medidas de segmentos, figuras geométricas (quadrado, círculo, etc.), entre outras.

Para o referido pesquisador, apesar de um conceito estar em constante aprimoramento, acompanhado de filiações e rupturas, os efeitos das aprendizagens não ocorrem do mesmo modo nas crianças e nos adultos. É preciso considerar certas distinções que ocorrem nas aprendizagens dos adultos, pois nestes sujeitos, as filiações e rupturas "[...] ocorrem sob condições mais ligadas aos hábitos e formas de pensamento adquiridas, do que ao desenvolvimento da estrutura física" (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Vergnaud (1990) defende que um conceito não pode ser reduzido à sua definição. Esta afirmação não significa que o pesquisador minimize a importância de se definir os conceitos no decorrer de sua aprendizagem, mas, sim, que apenas a definição de um conceito não é suficiente para compreendê-lo na essência. Por exemplo, apenas definir número irracional não é suficiente para que o aluno construa o conceito em questão. É preciso ir além da forma verbal, é preciso considerar a forma simbólica e, sobretudo, as diversas situações relacionadas aos números irracionais. Este fato pode ser confirmado nas respostas de alguns alunos do ensino superior de Matemática, sujeitos desta pesquisa, que sabiam repetir a definição formal de números irracionais[27] apresentada nos livros didáticos, porém apresentaram dúvidas em certas atividades, como, por exemplo, ao serem questionados, na atividade 5(a), sobre a existência ou não de um quadrado cuja medida da área é $13\,cm^2$, isto é, um quadrado cuja medida dos lados é o número irracional $\sqrt{13}\,cm$. Provavelmente, estes alunos não haviam vivenciado situações como esta, relacionada aos números irracionais, e é devido a fatos como este que Vergnaud (1990) atribui importância à diversidade de situações que devem fazer parte da formação dos sujeitos para que haja compreensão de um conceito.

No início da década de 1970, o termo *situações* era utilizado no sentido do contexto que cercava o aluno. Utilizavam-se *situações didáticas* para referir-se "àquelas que servem para ensinar sem que seja levado em conta o papel do professor"

[27] Considera-se como definição formal de números irracionais as duas mais presentes nos livros didáticos de matemática: i) Um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros; ii) Um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas.

(BROUSSEAU, 2008, p. 21). Posteriormente, Brousseau definiu como *situações matemáticas* “todas aquelas que levam o aluno a uma atividade matemática sem a intervenção do professor” (2008, p. 21), e o termo *situações didáticas* foi designado pelo autor para referir-se “[...] aos modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno; [...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional” (Ibid, p. 21).

Entretanto, na Teoria dos Campos Conceituais, as situações não têm o mesmo sentido amplo empregado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008). Vergnaud (1990) considera *situações* no sentido de tarefa e com o mesmo sentido atribuído pelos psicólogos, no qual os “[...] processos cognitivos e as respostas dos sujeitos são função das situações que eles enfrentam” (p. 150).

Duas ideias principais concernentes às situações são assinaladas por Vergnaud (1990): a ideia de variedade, na qual considera a grande variedade de situações presentes num dado campo conceitual, e a ideia de história, pregando que:

> [...] Os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes (p. 150).

Nesta perspectiva de considerar que os conhecimentos dos sujeitos se desenvolvem por meio das situações vivenciadas por eles, e da variedade de situações que devem ser levadas em conta no estudo de um dado campo conceitual, é que as situações sobre números irracionais, propostas aos sujeitos colaboradores da presente pesquisa, foram elaboradas. Deste modo, buscou-se diversificar as situações apresentadas aos alunos com o objetivo de perceber se eles já haviam vivenciado situações semelhantes e se eles sabiam resolver as situações propostas, e, sobretudo, se desejou analisar quais conhecimentos os alunos entrevistados, de cada nível de ensino, mobilizavam sobre os números irracionais.

Apesar de a principal finalidade da sequência de atividades propostas aos alunos ter sido um instrumento de análise dos conhecimentos mobilizados por eles, não se pode negar que ela teve sentido didático, pois, ao serem confrontados com as situações, os alunos puderam refletir e reestruturar seus conhecimentos, vivenciando momentos de aprendizagens. E, sobretudo, no decorrer das entrevistas, foi possível perceber, em alguns alunos, evoluções nos conceitos mobilizados, como, por exemplo, a aluna G6 do Ensino

Superior, que nas primeiras atividades negava a existência de segmentos com medidas irracionais, e, no decorrer da entrevista, apresentou indicativos de desestabilização destes conhecimentos errôneos.

Com base em Vergnaud (1990), para a elaboração das situações, também se considerou a importância de os alunos se apropriarem das situações propostas. Como exemplo, pode-se citar a primeira atividade da entrevista, que, apesar de ter por objetivo perceber se os alunos reconheciam a existência e a utilidade dos números irracionais, iniciava com questões sobre a existência ou não dos números naturais 1 e 2, números familiares aos alunos, solicitando que eles argumentassem para quê estes números serviam. Esta iniciativa foi tomada em outros momentos da entrevista, que iniciavam com questões que, possivelmente, os alunos não teriam dificuldades para resolver, e pudessem se apropriar da situação proposta.

No entanto, devido à complexidade do campo conceitual dos números irracionais, delimitar todas as situações relacionadas a estes números e aplicá-las aos sujeitos desta pesquisa seria uma tarefa impossível. Sendo assim, algumas situações foram escolhidas, levando em consideração o estudo preliminar, já comentado anteriormente, juntamente com os objetivos desta pesquisa.

Ao considerar que algumas situações possuem certo grau de complexidade, Vergnaud (1985) afirma que tais situações podem ser consideradas como uma combinação de subtarefas, cuja natureza e dificuldades devem ser conhecidas pelos alunos. Sendo assim, é claro que o fracasso de uma subtarefa acarreta no fracasso global da situação proposta. Este fato pode ser exemplificado com a atividade 5(a) proposta aos alunos, que, conforme comentado anteriormente, questionava sobre a existência ou não de um quadrado com medida de área igual a $13\ cm^2$, que pode ser considerada como uma combinação de subtarefas, tais como conhecer a fórmula da área de um quadrado dada por $A = l^2$, no qual l é o lado do quadrado, resolver equações do segundo grau e, ainda, conceber números irracionais da forma $\sqrt{n},\ n \in N$ como solução da equação mobilizada. O fracasso numa dessas subtarefas implica na resposta incorreta ao argumentar sobre a existência ou não de um quadrado com medida de área $13\ cm^2$.

Vergnaud (2009a) defende que um sujeito se adapta às situações, e afirma que "[...] é por meio de uma evolução da organização de sua atividade que ele se adapta" (p. 13). Para este pesquisador, a experiência tem um papel fundamental, pois "[...] é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações às quais ele deve se adaptar seja uma experiência cotidiana ou uma experiência profissional" (p. 13).

> Sendo a primeira função do conhecimento de fazer e ter êxito, a análise da atividade em situação é um meio essencial para compreender os processos de aprendizagem, por mais delicada e difícil que ela seja. Ela passa notadamente pela análise dos erros, das hesitações e dos desfuncionamentos, assim como pela identificação das diferentes etapas pelas quais se constrói uma forma nova de organização da atividade (Ibid, p. 14).

Outro princípio da Teoria dos Campos Conceituais consiste em propor situações possíveis de desestabilizar os conhecimentos falsos dos alunos, e propor situações que possibilitem o desenvolvimento de esquemas (VERGNAUD, 2003).

A Teoria dos Campos Conceituais considera o processo cognitivo não apenas a conduta, a percepção, a representação e competências, "[...] mas também o desenvolvimento das formas inteligentes da organização da atividade de certa pessoa durante sua experiência" (VERGNAUD, 2009b, p. 22).

Pode-se observar organização e habilidade de um aluno ao resolver determinada tarefa matemática, como, por exemplo, ao resolver a seguinte equação do segundo grau $x^2 = 16$, se o aluno já conhece a situação de resolver equações da forma $x^2 = a$, $a \in R_+$, um dos modos dele solucioná-la é isolar x de um lado da igualdade, e extrair raiz quadrada em ambos os membros da igualdade. Provavelmente ele irá apresentar como solução $x = 4$ e $x = -4$. Esta forma organizada de resolver determinadas situações é denominada, na Teoria dos Campos Conceituais, por *esquema*.

O conceito de esquema restrito à percepção e à linguagem foi desenvolvido pelo pesquisador francês Revault d'Allonnes. Entretanto, Piaget foi quem enriqueceu este conceito, analisando os gestos de bebês em relação a seu desenvolvimento cognitivo. Mais precisamente, Piaget observava os gestos de seus próprios filhos, de levar a mão à boca, a coordenação da mão esquerda com a direita, usar um instrumento para bater em outro objeto, procurar um objeto desaparecido debaixo de um móvel, e, desse modo, propôs o esquema como uma forma de organização da atividade (VERGNAUD, 2003).

Para Vergnaud (2009a), a atividade gestual contém muitas operações de pensamento, em termos de representação dos objetos materiais, de suas propriedades, relações e transformações. É evidente que existem muitas diferenças entre os gestos do bebê que aprende a pegar pequenos objetos e os gestos de um atleta adulto, ou de um pedreiro, por exemplo. Entretanto, a organização dos gestos, seja de um bebê, de uma criança ou de um adulto, contém os mesmos componentes: um objetivo, o sequenciamento e coordenação dos movimentos das diferentes partes do corpo, a identificação dos objetos materiais e de suas propriedades (volume, peso, características geométricas, distância, temperatura etc), cálculo das ações a serem efetuadas, das informações a serem obtidas, dos controles a serem realizados (VERGNAUD, 2009a). Segundo Vergnaud (2009a), são estes fatores que conduzem à definição de esquema.

Para Vergnaud (1993), "[...] cada esquema se relaciona com uma classe de situações com características bem definidas" (p. 5). O pesquisador chama atenção para a existência de duas classes de situações, nas quais o conceito de esquema não funciona do mesmo modo:

> 1) Classe de situações que o sujeito dispõe em seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação.
> 2) Classe de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso (VERGNAUD, 1990, p. 136).

No primeiro caso, observa-se que o sujeito apresenta condutas automatizadas e organizadas por um único esquema. Já no segundo caso, é possível que o aluno apresente tentativas de vários esquemas que entram em competição, que necessitam serem organizados, descombinados e recombinados. Este último caso é um processo acompanhado necessariamente por descobertas (VERGNAUD, 1990).

O exemplo citado anteriormente, relacionado à organização da conduta de um aluno para resolver equações do segundo grau, pertence à primeira classe de situação, na qual o aluno dispõe das competências[28] necessárias para resolver a tarefa proposta. É claro que este caso envolve operações que se automatizam progressivamente, tais como extrair raiz quadrada de ambos os lados da igualdade, isolar x de um lado da igualdade etc. No entanto, a automatização não impede que o sujeito tenha o controle de sua ação no sentido de perceber quais operações são ou não apropriadas. Para Vergnaud (1993), "[...] todos os nossos comportamentos abrangem uma parte de automatismo e outra de decisão consciente" (p. 3).

Podem ocorrer insucessos nos esquemas dos alunos, mas algumas vezes não são esses insucessos que são a causa do erro principal. Talvez estes se devam a algum

[28] Como competência Vergnaud (2009a) entende como o saber fazer e ter êxito. A competência está relacionada a todos os tipos de atividades, seja do aluno, do recepcionista ou do operário e concerne aos gestos, tomadas de decisões informativas e perceptivas, a linguagem e o diálogo, o raciocínio científico e técnico.

conhecimento implícito, que acarreta no insucesso da resolução da atividade, ou do esquema mobilizado pelo aluno. Retornando ao exemplo citado sobre equações do segundo grau da forma $x^2 = a$, $a \in R_+$, considerando que, se ao invés do número inteiro positivo 16 da situação anterior, fosse considerado o número π, ou seja, se o aluno tivesse que resolver a equação do segundo grau $x^2 = \pi$, poderia ocorrer, por exemplo, de o aluno afirmar que não existe solução para a equação $x^2 = \pi$, por considerar que não existe raiz quadrada de π. Este insucesso na resposta não significa que o aluno não apresente uma organização de suas competências para resolver equações do segundo grau, mas, talvez, que ele tenha implícito o conhecimento errôneo de que toda solução apresentada deva corresponder a um número inteiro ou decimal, ou seja, um conhecimento válido no domínio restrito, nos casos em que o número a corresponde a números quadrados perfeitos.

De acordo com Vergnaud (2003), o conhecimento se adapta e se desenvolve com o tempo e em função das situações que o sujeito enfrenta, sendo reelaborado a cada nova situação enfrentada. Ao se deparar com situações novas, os sujeitos mobilizam seus conhecimentos prévios, os reformulam e tentam adaptá-los à nova situação. Conhecer novas situações conduz a ampliar os conhecimentos presentes no dado campo conceitual.

> Um esquema também pode, todavia, ser aplicado por um sujeito individual a uma classe mais ampla. Ele se torna, então, imperfeito, e o sujeito deve restringir-lhe o alcance, decompondo-o em elementos distintos suscetíveis de ser recompostos de forma diversa para as diferentes subclasses de situações, eventualmente acrescentando elementos cognitivos suplementares. Notam-se aí procedimentos de restrição e de acomodação (VERGNAUD, 1993, p. 5).

No que diz respeito ao sentido que os alunos atribuem aos conceitos matemáticos, Vergnaud (1993) afirma que ele se deve às situações, porém, segundo o pesquisador, o sentido não está nas situações em si mesmas: pode-se dizer que um símbolo ou uma representação simbólica tem um sentido, vários sentidos ou não tem sentido para determinado sujeito. Também se pode dizer que uma situação não tem sentido para certo indivíduo. Assim, não são apenas as situações nem apenas os símbolos e linguagem que dão sentido a determinado objeto, conceito ou situação, mas sim a relação do sujeito com as situações e com os significantes.

Segundo Vergnaud (1993), são os esquemas evocados por um sujeito individual que constituem sentido para determinada situação para este ou aquele sujeito. Por exemplo, o sentido da adição para um sujeito é o conjunto dos esquemas mobilizados por ele diante da diversidade de situações que envolvem o conceito de adição. Evidentemente, junto com os esquemas estão os símbolos, manipulações algébricas, gráficas, numéricas e linguísticas, necessários para a resolução de cada situação específica. No entanto, é claro que uma situação particular não favorece ao sujeito a mobilização de todos os esquemas disponíveis. Por isso, mais uma vez, destaca-se a necessidade de várias situações com o intuito de os alunos mobilizarem diversos esquemas e significantes para que haja a compreensão de determinado conceito.

Esta explanação sobre o conceito de esquema definido conforme a Teoria dos Campos Conceituais permite apresentar três definições distintas de esquema:

1. Esquema é uma totalidade dinâmica funcional.
2. Esquema é a organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas.
3. Um esquema é composto de quatro categorias de elementos:
    i) Objetivos, intenções e antecipações.
    ii) Regras de ação.
    iii) Invariantes operatórios.
    iv) Possibilidades de inferência em situação, cuja efetuação é função das características particulares da situação encontrada; a partir das informações e do objetivo, um cálculo é operado em situação que determina as regras de ação utilizadas. Este cálculo é frequentemente pouco consciente ou inconsciente (LABORDE e VERGNAUD, 1994, p. 66).

A importância do conceito de esquema está no fato de perceber a conduta e a organização do sujeito em situação.

Vergnaud (2003) atribui muita importância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas competências dos sujeitos, as que estão relacionadas aos conceitos implícitos. Segundo o pesquisador, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo como eles resolvem e, principalmente, os conhecimentos implícitos, teoremas em ação e conceitos em ação, que os alunos mobilizam ao resolver um problema.

De acordo com Vergnaud (2009a), é difícil para uma criança explicitar suas competências em palavras, e, apesar de certa experiência em determinadas situações, muitos adultos também não conseguem explicitar verbalmente boa parte dos conhecimentos que utilizam na ação. Partindo destas diferenças entre a forma operatória do conhecimento e sua forma predicativa é que o pesquisador introduz, no sentido psicológico, o conceito de invariante operatório.

Os invariantes operatórios são conhecimentos que um sujeito dispõe, na ação, para resolver determinada situação. Eles podem ser universais ou apenas localmente verdadeiros. Estes conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não.

Notamos que os conhecimentos na forma explícita dos alunos podem ser dados na linguagem oral, escrita, diagramas etc, e por isso, geralmente, não é difícil percebê-los. No entanto, os conhecimentos implícitos nem sempre são possíveis de serem identificados, e demandam atenção e investigação por parte dos professores e pesquisadores, pois muitas vezes o aluno é questionado sobre o que o levou a escolher a operação correta e ele não sabe explicitar o motivo. Por exemplo, muitos alunos resolvem uma conta de divisão e manipulam o algoritmo e as regras corretamente, porém não sabem explicitar os conceitos e regras mobilizados.

De acordo com Vergnaud (2009a), os invariantes operatórios são modelos preciosos para se descrever a conduta do sujeito, e são diferenciados em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação: "Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação" (VERGNAUD, 2009a, p. 23). Os conceitos em ação e os teoremas em ação são de naturezas distintas. Os primeiros não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, eles apenas são pertinentes ou não para a situação. Já os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos. Estes conhecimentos em ação podem ser notados no campo conceitual dos números irracionais, e, no decorrer das entrevistas realizadas com os sujeitos colaboradores da presente pesquisa, buscou-se perceber, na ação dos sujeitos, os teoremas em ação mobilizados pelos alunos.

Os invariantes operatórios podem ser divididos em três tipos lógicos: invariantes do tipo proposição, funções proposicionais e invariantes do tipo argumento.

- Os invariantes do tipo proposição podem ser verdadeiros ou falsos. Os teoremas em ação são invariantes deste tipo. Por exemplo, na situação mencionada anteriormente sobre a existência de um quadrado com medida de área $13cm^2$, os alunos que conhecem as propriedades dos números reais e de figuras geométricas planas poderão afirmar, corretamente, que existe o quadrado de medida de área $13cm^2$, e que a medida do lado é $\sqrt{13}$ *cm*. Este conhecimento pode ser expresso pelo teorema em ação verdadeiro: *Se* $b \in R_+$, *então existe um quadrado com medida da área* $A = b$ *cm*^{2}, *cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}$ *cm.*

- Invariantes do tipo função proposicional não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas são indispensáveis para as proposições. Os conceitos em ação são invariantes desta categoria. Por exemplo, os conceitos de medida, figura geométrica, potência, raiz quadrada, números racionais, entre outros, são indispensáveis para a conceitualização dos números irracionais. Segundo Vergnaud (1993), existe uma relação dialética entre função proposicional e proposição: “[...] não existe função proposicional sem proposição e não existe proposição sem função proposicional. Do mesmo modo, conceitos em ação e teoremas em ação se constroem em estreita interação” (p. 7).
- Invariantes do tipo argumento: segundo Vergnaud (1993), quem fala em função proposicional fala em argumento. O pesquisador considera a existência dos seguintes tipos de funções proposicionais:
  - ✓ Funções com um argumento, as propriedades.
  - ✓ Funções com dois argumentos, as relações binárias, que relacionam dois elementos entre si. Por exemplo: “**A diagonal** de um quadrado cuja medida dos lados é unitária é igual a $\sqrt{\mathbf{2}}$ **unidades de medida**”.
  - ✓ Funções com três argumentos, as relações ternárias que relacionam três elementos entre si. Por exemplo: “$\sqrt{\mathbf{2}}$ elevado ao **quadrado** é igual a **2**”.
  - ✓ Funções com quatro argumentos, tal como na proporcionalidade que relacionam quatro elementos entre si. Por exemplo, ao considerar certas grandezas *a*, *b*, *c* e *d* tais que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, diz-se que: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**.
  - ✓ Funções com mais de quatro argumentos, que relacionam mais de quatro elementos entre si. Por exemplo: “Em um **número irracional**, na **representação decimal,** à **esquerda da vírgula** representa um **número inteiro** e, à **direita da vírgula** possui **infinitas casas decimais** que **não são periódicas**”.

Vergnaud (1990) ressalta que os teoremas em ação não são verdadeiros teoremas matemáticos, e nem conceitos em ação são conceitos reconhecidos cientificamente. Eles são categorias de pensamento construídas pelos sujeitos na ação e nem sempre são explicitáveis por eles.

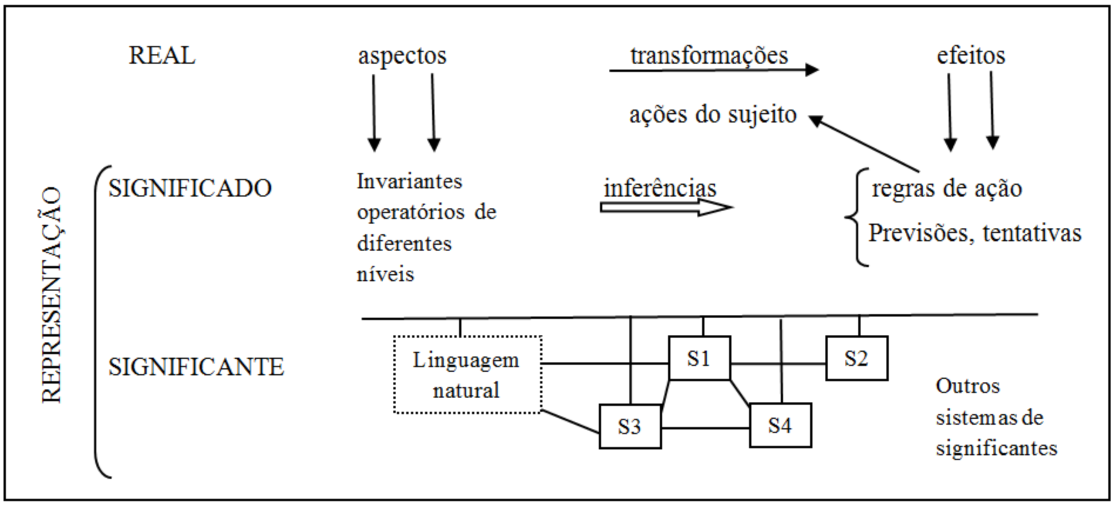
Segundo Vergnaud (2009a), “[...] os conceitos em ação permitem identificar os objetos, as propriedades e as relações” (p. 22). Por objeto o pesquisador entende “[...] ao mesmo tempo objetos materialmente perceptíveis e objetos construídos pela cultura, pela ciência, pela técnica, ou pelo próprio sujeito individual” (Ibid, p. 22). Quanto às propriedades e relações, o pesquisador afirma que “[...] é preciso compreender ao mesmo tempo predicados observáveis e predicados que podem ser inferidos a partir dos observáveis, mas que são eles próprios, construções culturais ou individuais” (Ibid, p. 22).

Desse modo, os invariantes operatórios têm papel essencial para a compreensão do real, entendendo-se como real:

> [...] o conjunto de objetos de diferentes níveis que são formados na situação: as propriedades destes objetos, as relações entre eles e as proposições verdadeiras que se pode anunciar a seu respeito. [...] é preciso distinguir de uma parte, a consciência explícita do real que um sujeito pode ter, de um domínio de conhecimento ou de um ambiente profissional (técnico ou social), que pode exprimir verbalmente ou simbolicamente; e de outra parte, o conhecimento do real que subentende sua ação eficaz (ou não eficaz) nas diferentes situações revelando este domínio de conhecimento ou deste ambiente, e que é implícito (VERGNAUD, 1985, p. 55).

Vergnaud (1985) afirma, ainda, que “[...] O homomorfismo entre o real e a representação não deve ser estudado, a princípio, no nível dos simbolismos, mas no nível dos invariantes operatórios contidos nos esquemas” (p. 25). A figura a seguir, elaborada pelo pesquisador, representa um homomorfismo entre aspectos do real e representação mental.

Figura 10 - Relações entre a representação e o real



Fonte: Vergnaud (1985, p. 249)

Nota-se pela Figura 10 que para Vergnaud, a relação entre o real e a representação está relacionada tanto aos significados quanto aos significantes. No que se refere aos significados, está explícita na Figura 10 a necessidade de invariantes operatórios de diferentes níveis, as inferências, previsões, regras de ações, tentativas por parte dos alunos. Quanto aos significantes, o pesquisador destaca a língua natural e deixa clara a necessidade de outros sistemas de significantes, tais como os símbolos e notações matemáticas, por exemplo.

Para Vergnaud (2003), as situações escolhidas tem papel fundamental para a compreensão de um conceito. Nesse sentido, o pesquisador lança algumas questões que podem auxiliar ações e práticas pedagógicas de professores:

> O que é importante escolher nas situações para favorecer o equilíbrio? Como desequilibrar o aluno e, ao mesmo tempo, conduzi-lo nessa nova situação de maneira que ele focalize a atenção sobre os aspectos necessários? Qual o interesse das situações escolhidas, com vista a favorecer a surpresa do aluno nessas situações de aprendizagem? (VERGNAUD, 2003, p. 54).

Estas questões também cooperaram com as reflexões para a elaboração das atividades propostas aos sujeitos colaboradores desta pesquisa, no sentido de buscar atividades que favorecessem a desestabilização de conhecimentos errôneos percebidos nos alunos no decorrer das entrevistas. Uma das atividades com este objetivo foi a atividade 5(b), destinada aos alunos que negavam a existência de um quadrado de área $13\ cm^2$, proposto na atividade 5(a). Na atividade 5(b) era apresentada a Figura 9, que consiste de um quadrado e um triângulo retângulo, de modo que a medida do lado do quadrado é a mesma medida da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos com medidas *2cm* e *3cm*. Mediante a apresentação da figura, os alunos eram questionados se a afirmação "A área do quadrado ABCD é $13\ cm^2$" é verdadeira ou não. Esta atividade favorecia os alunos, a utilizarem o teorema de Pitágoras para encontrar a medida $\sqrt{13}\ cm$ da hipotenusa AB, conduzindo-os a afirmar a sentença dada no enunciado. Para aqueles alunos que teclavam $\sqrt{13}$ na calculadora, apresentando um número decimal como medida do lado AB, a pesquisadora, dialogando com os alunos, questionava sobre a possibilidade de não extrair a raiz quadrada de $\sqrt{13}$, e de se considerar $\sqrt{13}\ cm$ como medida do lado do quadrado. Estas foram algumas das tentativas de desestabilizar conhecimentos errôneos dos alunos no decorrer da entrevista, com a intenção de contribuir para evoluírem seus conhecimentos sobre os números irracionais.

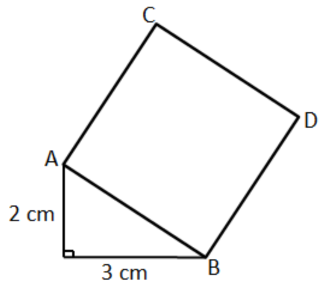


Figura 9 - Quadrado de medida de área 13 cm^2

A ênfase que Vergnaud (1993) atribui às situações para a compreensão de um dado conceito é tão significativa em sua teoria, que ele afirma que a primeira entrada de um campo conceitual é um conjunto de situações. Entretanto, juntamente com as situações estão os conceitos, pois “[...] a teoria dos campos conceituais surge, sobretudo, como uma psicologia dos conceitos” (Ibid, p. 9). Desse modo, o pesquisador esclarece, do ponto de vista psicológico, que um conceito é necessariamente definido por três conjuntos, representado por C = (S, I, s):

O conjunto **S é o conjunto das situações** que dão sentido ao conceito. Conforme mencionado anteriormente, para dar sentido aos conceitos é preciso considerar uma variedade de situações e de classe de problemas, bem como analisar suas características de maneira precisa e exaustiva. Contudo, a recíproca também é verdadeira, pois uma situação está relacionada a diversos conceitos. Por exemplo, a situação de representar o número irracional $\sqrt{2}$ na reta numérica está relacionada com os conceitos de número real, reta numérica, teorema de Pitágoras, números inteiros, raiz quadrada, potência, entre outros.

I é o conjunto dos invariantes operatórios em que se baseia a operacionalidade dos esquemas. Cada conjunto de situação evoca operações de pensamentos precisas que se referem aos invariantes operatórios, não necessariamente explícitos, que tentam modelizar uma situação e tratam de extrair propriedades, relações ou aplicar um teorema. O conjunto dos invariantes operatórios é denominado de significado. Tratam-se dos significados que um sujeito atribui na ação a determinado conceito (VERGNAUD, 1985). Exemplos de invariantes operatórios, bem como seus tipos lógicos, serão retomados no decorrer deste texto.

s é o conjunto das formas de linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações, os processos de tratamento. Segundo Vergnaud (1985), não é possível falar de conceito sem considerar os termos emprestados da linguagem natural ou de sistemas simbólicos, pois, caso contrário, não seria possível sua definição. Este conjunto é denominado de *significantes*.

Vergnaud (1990) considera que, para o estudo do desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, é necessário considerar os três conjuntos mencionados acima. No entanto, o pesquisador alerta que, em geral, não existem bijeções entre os significados e os significantes, nem entre invariantes e situações.

No que diz respeito aos significantes, Laborde e Vergnaud (1994) afirmam que "[...] o simbolismo é um meio de dar uma forma geral ao conhecimento" (p. 74). De modo geral, o tratamento de uma situação nova é acompanhado da forma simbólica e linguística, e o ato de escrever murmurando pode significar uma situação nova para o aluno, momento em que o tratamento da situação ainda não é automatizado (VERGNAUD, 1993). Este ato de murmurar fez-se presente em diversos momentos das entrevistas realizadas, indicando, segundo Vergnaud (1993), que se tratava de situações novas para os sujeitos da pesquisa.

Para Vergnaud (1993) as funções cognitivas que devem ser atribuídas à linguagem matemática e às representações simbólicas na atividade matemática são três:

- Ajuda na designação e, portanto, à identificação dos invariantes: objetos, propriedades, relações e teoremas.
- Ajuda ao raciocínio e à inferência.
- Ajuda à antecipação dos efeitos e metas, à planificação e ao controle da ação (p. 18).

Porém, Vergnaud (2009b, p. 19) alerta que "O símbolo é apenas a parte diretamente visível do *iceberg* conceitual", uma vez que o conhecimento não é formado somente de símbolos, mas também de conceitos e noções que refletem, ao mesmo tempo, o mundo material e a atividade nesse mundo material, ou seja, o conhecimento é formado ao mesmo tempo de significados e de significantes. Na verdade, segundo o pesquisador, os significantes (símbolos ou signos) representam os significados, que são, eles próprios, de ordem cognitiva e psicológica.

Assim, para a elaboração das atividades que contemplaram o instrumento de pesquisa, que além de identificar conhecimentos sobre números irracionais mobilizados pelos alunos entrevistados, também tinha como propósito favorecer aos sujeitos a compreensão deste conceito, foram consideradas diferentes situações, representações e símbolos, assim como explicitadas na seção 5. As análises das entrevistas permitiram modelar onze teoremas em ação falsos, possíveis de serem mobilizados pelos alunos durante o ensino dos números irracionais.

3.2 Síntese sobre as considerações apresentadas relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais

Nesta seção foram apresentados os principais pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, com foco nos conceitos e princípios que servem de alicerce para a presente pesquisa. Almejou-se, sempre que possível, relacionar os conceitos teóricos com o campo conceitual dos números irracionais, objeto de estudo da presente pesquisa, e, sobretudo, indicar como os princípios desta teoria fundamentam a presente pesquisa.

Certamente, a Teoria dos Campos Conceituais contribuiu para o desenvolvimento desta pesquisa. Pois, auxiliou tanto na elaboração das atividades propostas, ao indicar que para a compreensão de um conceito são necessárias diversas situações, símbolos e outros conceitos, quanto às análises das respostas dos sujeitos entrevistados, favorecendo compreender o desempenho e os conhecimentos mobilizados pelos alunos dos diferentes níveis de escolarização, com atenção especial aos conhecimentos implícitos, na forma de teoremas em ação mobilizados pelos alunos no decorrer das entrevistas.

4 CONHECENDO O CAMPO DA PESQUISA: OS NÚMEROS IRRACIONAIS E OS SISTEMAS DE ENSINO BRASILEIRO E FRANCÊS

Esta seção tem como objetivo exibir o vocabulário das nomenclaturas utilizadas no decorrer do texto desta tese relacionadas aos sistemas de ensino do Brasil e da França, bem como situar o leitor sobre as semelhanças entre as idades esperadas dos alunos e a subdivisão dos respectivos níveis de ensino de cada país. No que se refere aos documentos oficiais que norteiam o Ensino de Matemática do Brasil e da França, descreve-se especificamente o que estes documentos apresentam sobre os números irracionais, tema desta pesquisa.

4.1 O SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO: NÍVEIS ESCOLARES E NOMENCLATURAS[29]

No Brasil a escolaridade é obrigatória dos cinco anos de idade até o ensino secundário – Ensino Médio, ou até o aluno completar 18 anos de idade (lei n° 85/2009). O sistema de ensino brasileiro é dividido em: Educação Infantil, Ensino Fundamental (anos iniciais e anos finais), Ensino Médio, Ensino Superior. São apresentados a seguir os níveis de escolaridade com as respectivas idades esperadas para os alunos cursarem cada um dos níveis:

- ✓ A **Educação infantil,** oferecida por creches e escolas de Educação Infantil, públicas ou privadas, acolhe crianças de 0 a 5 anos de idade, antes da escola obrigatória.
- ✓ O **Ensino Fundamental** consiste de nove anos de escolaridade – do 1º ao 9º ano, e é dividido em dois ciclos: anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental:
  - ➢ Anos iniciais acolhe alunos de 6 a 10 anos de idade.
  - ➢ Anos finais acolhe alunos de 11 a 14 anos de idade.

[29] As informações relacionadas ao sistema de ensino brasileiro (Educação infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), abordadas nesta pesquisa, foram retiradas do Portal do Ministério da Educação, www.mec.gov.br, em 27 de janeiro de 2012.

- ✓ O **Ensino Médio** consiste de três anos de escolaridade, do 1° ao 3° ano do Ensino Médio, e acolhe os adolescentes que finalizaram o Ensino Fundamental. De modo geral, este nível de ensino vai dos 15 aos 17 anos de idade.
- ✓ O **Ensino Superior** brasileiro tem duração mínima três anos, ocorrendo variações entre os diferentes cursos de universidades. Os alunos do Ensino Superior, entrevistados nesta pesquisa, cursavam, no momento das entrevistas, Licenciatura em Matemática com duração de 4 anos.

4.2 O SISTEMA DE ENSINO FRANCÊS: NÍVEIS ESCOLARES E NOMENCLATURA[30]

No sistema de ensino francês, a escolaridade é obrigatória a partir dos 6 anos de idade e é dividido em: Ensino Primário, Ensino Secundário e Ensino Superior. A apresentação de cada um destes níveis de ensino e as respectivas idades dos alunos é exibida a seguir.

- ✓ O **Ensino Primário** consiste da Escola Maternal e da Escola Elementar:
  - ➢ A **Escola Maternal** acolhe crianças até os 6 anos, ou seja, este nível de ensino não é obrigatório.
  - ➢ A **Escola Elementa**r é obrigatória e acolhe crianças entre 6 e 10 anos. Este nível de escolaridade compreende cinco níveis de aprendizagem:
    - i. Curso Preparatório ou CP (6 anos).
    - ii. Curso Elementar 1° ano ou CE1 (7 anos).
    - iii. Curso Elementar 2° ano ou CE2 (8 anos).
    - iv. Curso Médio 1° ano ou CM1 (9 anos).
    - v. Curso Médio 2° ano ou CM2 (10 anos).
- ✓ O **Ensino Secundário** é dividido em *Collège* e *Lycée*.
  - ➢ O ***Collège*** acolhe os alunos que terminam a escola elementar, em geral com 10 ou 11 anos de idade. Este nível de ensino corresponde a quatro anos de estudos e são denominados de *Sixième, Cinquième, Quatrième e*

[30] As informações relacionadas ao sistema de ensino francês (Ensino Primário e Secundário), apresentadas nesta pesquisa, foram retiradas do Portal Nacional de Profissionais da Educação, Éduscol, http://eduscol.education.fr/, em 27 de janeiro de 2012.

Troisième. No final da *Troisième*, é obrigatório que todos os alunos realizem um exame para obter o diploma nacional do *brevet*[31] para atestar seus conhecimentos adquiridos ao fim do *Collège.*

- O ***Lycée*** acolhe alunos que terminam o *Collège*, geralmente com 14 ou 15 anos de idade. Este nível de ensino corresponde a 3 anos de estudos: *Seconde*, *Première* e *Terminale*. Existem 3 tipos de *Lycée*: o geral e o tecnológico, que preparam os alunos principalmente para entrar na universidade, e o terceiro tipo é o *Lycée* Profissional, que prepara os alunos para a vida profissional. A *Seconde* é comum para todos os alunos; é neste momento que os alunos testam seus gostos e suas aptidões, e escolhem o tipo de *Lycée* em que vão continuar seus estudos, seja pela via geral ou tecnológica. Contudo, mesmo se o aluno optou pelo *Lycée* geral, que o prepara para a entrada na universidade após cursar a *Seconde*, ele deve escolher uma das três opções para este tipo de modalidade de ensino:

    i. ***Économique et Social*** **(E.S.)**, especialidades de escolhas: Ciências Econômicas e Sociais, Matemática, Línguas.

    ii. ***Littéraire*** **(L)**, especialidades de escolhas: Letras Clássicas, Letras e Línguas, Letras e Artes, Letras e Matemática.

    iii. ***Scientifique*** **(S)**, especialidade de escolhas: Matemática, Física-química, Ciências da vida e da terra, Ciências do engenheiro.

4.3 OS SISTEMAS DE ENSINO BRASILEIRO E FRANCÊS: NOMENCLATURAS E RELAÇÕES COM OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Com a exposição precedente relacionada aos sistemas de ensino brasileiro e francês, notam-se semelhanças na distribuição dos níveis de ensino e respectivas idades dos alunos nestes dois países. Para sintetizar estas semelhanças, foram elaborados os

[31] Um diploma nacional do *brevet* consiste de: Um exame escrito que compreende provas de francês, matemática, história-geografia, educação cívica; Uma prova oral de história de artes; As notas obtidas em controle ao longo do ano na classe da *Troisième*: todas as disciplinas são consideradas, salvo história-geografia-educação cívica; A validação de competências do *socle* comum; A nota da vida escolar; Para o ensino opcional facultativo, os pontos superiores à média de 10 a 20 obtidos em latim, grego, língua estrangeira ou regional, descoberta profissional de três horas. Eles se acrescentam ao total de pontos das outras disciplinas. É calculada a média entre o conjunto de notas e a validação da base comum.

Quadros 2 e 3. O Quadro 2 diz respeito aos níveis de escolaridade, idade e duração de cada nível de ensino nos dois países.

Quadro 2- Semelhanças entre os sistemas de ensino brasileiro e francês

SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO			SISTEMA DE ENSINO FRANCÊS		
NÍVEL DE ESCOLARIDADE	**DURAÇÃO**	**IDADE**	**NÍVEL DE ESCOLARIDADE**	**DURAÇÃO**	**IDADE**
Educação infantil	5 anos (ensino não obrigatório)	De 0 a 5 anos	Escola maternal	5 anos (ensino não obrigatório)	De 0 a 5 anos
Ensino Fundamental: Anos iniciais	5 anos	De 6 a 10 anos	Escola elementar	5 anos	De 6 a 10 anos
Ensino Fundamental: Anos finais	4 anos	De 11 a 14 anos	*Collège*	4 anos	De 11 a 14 anos
Ensino Médio	3 anos	De 15 a 17 anos	*Lycée*	3 anos	De 15 a 17 anos
Ensino Superior (ensino não obrigatório)	Mínimo 3 anos	A partir dos 18 anos	*Licence* (ensino não obrigatório)	Mínimo 3 anos	A partir dos 18 anos

Fonte: a autora desta pesquisa

O Quadro 3 refere-se aos respectivos níveis de ensino e nomenclaturas adotadas no Brasil e na França.

Quadro 3 - Nomenclaturas dos sistemas de ensino brasileiro e francês

SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO	SISTEMA DE ENSINO FRANCÊS
Ensino Fundamental: Anos iniciais	**Escola elementar**
1° ano	Curso Preparatório ou CP
2° ano	Curso Elementar 1° ano ou CE1
3° ano	Curso Elementar 2° ano ou CE2
4° ano	Curso Médio 1° ano ou CM1
5° ano	Curso Médio 2° ano ou CM2
Ensino Fundamental: Anos finais	***Collège***
6° ano	*Sixième*
7° ano	*Cinquième*
8° ano	*Quatrième*
9° ano	*Troisième*
Ensino Médio	***Lycée***
1° ano do Ensino Médio	*Seconde*
2° ano do Ensino Médio	*Première*
3° ano do Ensino Médio	*Terminale*
Ensino Superior (Graduação)	***Enseignement Supérieur (Licence)***

Fonte: a autora desta pesquisa

Os Quadros 2 e 3 permitem melhor visualizar as semelhanças existentes entre as organizações, no que diz respeito aos anos de escolarização, níveis de ensino e idade dos alunos. Desse modo, embora os alunos entrevistados nesta pesquisa estejam inseridos em sistemas de ensinos distintos, com carga horária escolar diferenciada e, sobretudo, culturas diferentes, percebem-se semelhanças concernentes aos níveis de ensino e idades esperadas dos alunos para cada nível, que colaboraram para o desenvolvimento da presente pesquisa.

4.3.1 Os números irracionais nos documentos do sistema de ensino brasileiro

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN de Matemática são documentos oficiais do sistema de ensino brasileiro que têm por objetivo orientar professores, instituições de Ensino Fundamental e Médio e autores de livros didáticos. Tais orientações referem-se aos conteúdos a serem ensinados, planejamento das aulas e metodologias a serem desenvolvidas pelos professores, currículos escolares, especificidades a serem consideradas aos alunos no decorrer de sua aprendizagem e os momentos (nível de ensino) em que os conteúdos devem ser abordados em sala de aula.

No entanto, o estado do Paraná, onde foi realizada esta pesquisa, possui suas próprias diretrizes para a Educação Básica, que também oferecem orientações para as metodologias dos professores, conteúdos a serem ensinados e organizações dos currículos escolares, respeitando, evidentemente, os níveis e rol de conteúdos dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Neste sentido, considerou-se pertinente para esta pesquisa apresentar a abordagem dos números irracionais tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais, uma vez que os livros didáticos são elaborados com respaldo nestes documentos, quanto nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná - DCE, que norteiam as ações dos professores e instituições de Ensino Fundamental e Médio do estado do Paraná.

Além dos PCN e das DCE, cada instituição de Ensino Fundamental e Médio possui suas próprias Propostas Pedagógicas Disciplinares - PPD, documentos elaborados em conjunto entre os professores das disciplinas de cada instituição, que devem ser seguidos pelos professores em suas respectivas disciplinas.

No que concerne aos Cursos de Licenciatura em Matemática, os documentos que os norteiam são seus Projetos Políticos Pedagógicos, que contêm as ementas de cada disciplina ofertada no curso. Estes documentos são elaborados segundo os pressupostos das Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática, documento oficial brasileiro que orienta a elaboração dos currículos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.

Buscou-se, nestes documentos que respaldam o Ensino Fundamental, Médio e Superior brasileiro, saber em que momento e quais abordagens dos números irracionais devem oficialmente fazer parte da aprendizagem dos alunos, conforme mostra o estudo a seguir.

4.3.1.1 Os números irracionais nos documentos do Ensino Fundamental brasileiro

Os números irracionais nos PCN do Ensino Fundamental

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), o conteúdo *números irracionais* deve ser ensinado no quarto ciclo do Ensino Fundamental, que corresponde aos 8º e 9º anos deste nível de ensino. Neste ciclo, os conteúdos são apresentados em quatro blocos:

- Números e operações.
- Espaço e formas.
- Grandezas e medidas.
- Tratamento da informação.

No que concerne ao numérico, os objetivos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, segundo os PCN (1998), são:

> - Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e **reconhecer que existem números que não são racionais**.
> - Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e **irracionais**, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
> - Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e **irracionais** (p. 81, grifos da autora desta pesquisa).

No que diz respeito aos conteúdos propostos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, os PCN (BRASIL, 1998) solicitam a ampliação dos significados dos números por meio do reconhecimento da existência dos números irracionais. Segundo estes documentos, é importante que o aluno vivencie situações em que os números racionais não são suficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os números irracionais. Recomenda-se que no ensino dos números irracionais não seja enfatizado os cálculos com radicais, e que o aluno:

> [...] identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções

> geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números (BRASIL, 1998, p. 83).

No que diz respeito aos cálculos com infinitas casas decimais, os PCN (1998) alertam para a abordagem da aproximação de casas decimais bem como suas consequências nos resultados dos cálculos. No caso das representações simbólicas de alguns números irracionais tais como $\sqrt{2}$, o aluno pode ser conduzido às regras operatórias análogas às dos números racionais.

Algumas orientações didáticas são propostas pelos PCN (BRASIL, 1998) com o intuito de auxiliar as ações pedagógicas dos professores. No que diz respeito aos números irracionais, estes documentos alertam que seu ensino por meio exclusivamente dos radicais não tem contribuído para o desenvolvimento deste conceito, e que um ensino formal deste conteúdo nesta fase de escolaridade também não é adequado. Neste sentido, apresentam as indicações que julgam adequadas para a abordagem desse conceito (p. 106-107):

> - O estudo dos números irracionais pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. O problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc, poderia seguir-se ao caso particular de $\sqrt{2}$.
> - Outro irracional que pode ser explorado no quarto ciclo é o numero π. O número π nessa fase do aprendizado aparece como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.
> - Deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com as medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais.
> - É possível, no entanto, propor situações que permitam aos alunos várias aproximações sucessivas de π. Ao trabalhar com essas aproximações, é interessante usar diferentes calculadoras e informar os alunos a respeito dos cálculos que são feitos em computadores de grande porte, que produzem o valor de π com milhões de dígitos sem que haja o aparecimento de um período na expansão decimal.
> - Com relação aos cálculos aritmético e algébrico com números irracionais, configuram- se duas possibilidades: Numa delas o aluno deve ser orientado a efetuar os cálculos seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais. Esse fato pode conduzir, inclusive, à obtenção de infinitos irracionais por meio das operações fundamentais. Por exemplo, explorar números na forma $(a+b)\sqrt{2}$, com a e b racionais, pode contribuir para a superação da ideia equivocada de que há poucos irracionais. Uma segunda possibilidade é a de efetuar cálculos com os irracionais por meio de aproximações racionais. Nesses casos apresenta-se uma situação apropriada para tratar o conceito de arredondamento e utilizar as calculadoras.

Em relação ao número π, assim como sugere os PCN, é importante o professor ficar atento ao fato que atividades relacionadas a medições entre o comprimento de circunferência e diâmetro, com o intuito de se explorar o número π, pode se tornar um obstáculo para o aluno compreender a irracionalidade desse número. Ademais, não é raro encontrar atividade como esta em livros didáticos brasileiros. Como exemplo, cita-se a obra do 8º ano da coleção *A Conquista da Matemática*[32], na qual, na seção intitulada *Um irracional importante: o número* π, propõe uma atividade que os alunos devem medir o diâmetro e a circunferência de alguns objetos circulares tais como moeda, lata de refrigerante e pneu e determinar a razão entre estas duas medidas que resultam aproximadamente $3{,}14\ldots$.

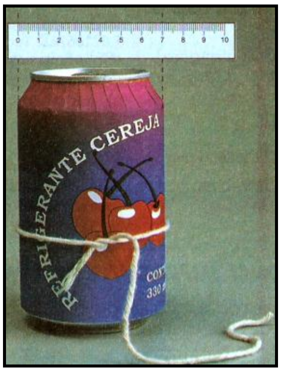


Figura 11 – Atividade número π
Fonte: Giovani Júnior e Castrucci (2009)

Segundo os autores dessa obra, este fato se repete para qualquer circunferência, e este valor é representado pela letra grega π. Para finalizar a seção, os autores disponibilizam uma figura induzindo a memorização do número π até a quinta casa decimal. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), este fato pode induzir os alunos a compreenderem o número π como um número racional, pois os resultados das medidas obtidos com os objetos circulares são todas racionais. Observa-se que atividades como esta não foram encontradas nas obras analisadas francesas do *Collége* (nível correspondente ao Ensino Fundamental).

Os números irracionais nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná

---

[32] GIOVANI JÚNIOR, J. R. , CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática.** Ensino Fundamental, 8º ano, 1ª edição, editora FTD, São Paulo, 2009

Para a disciplina de Matemática, as DCE propõem como conteúdos estruturantes cinco campos: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. Para o Ensino Fundamental, solicita-se que o conteúdo estruturante Números e Álgebra seja desdobrado em:

- Conjuntos numéricos e operações.
- Equações e inequações.
- Polinômios.
- Proporcionalidade.

Em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo Números e Álgebra, espera-se que os alunos compreendam:

> - Sistema de numeração decimal e o conceito de notação científica.
> - Os conceitos de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes ao conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, **irracionais** e reais e suas propriedades.
> - O conceito de razão e proporção, regra de três, porcentagem, frações e dos números decimais e suas propriedades (PARANÁ, 2008, p. 51, grifos nossos).

Ainda para o Ensino Fundamental, é necessário que haja articulação entre Números e Álgebra, de modo que o aluno:

> - Compreenda o conceito de incógnita.
> - Realize a escrita de uma situação-problema na linguagem matemática.
> - Reconheça e resolva equações numéricas e algébricas, inequações, sistemas de equações.
> - Diferencie e realize operações com monômios, binômios, trinômios e polinômios; equações quadradas, biquadradas e **irracionais** (PARANÁ, 2008, p. 51, grifos nossos).

Os Números irracionais nas Propostas Pedagógicas Disciplinares dos colégios envolvidos nesta pesquisa

O Quadro 4, disponibilizado a seguir, contém as propostas pedagógicas no que diz respeito aos números irracionais, dos respectivos colégios do Núcleo Regional de Educação de Campo Mourão, cujos alunos participaram da presente pesquisa.

Quadro 4 - Propostas pedagógicas para o ensino dos números irracionais dos colégios de Ensino Fundamental envolvidos

<table>
<tr><th>Instituição</th><th>Ano</th><th>Conteúdo Estrutu-rante</th><th>Conteúdo Básico</th><th>Expectativa de aprendizagem</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Colégio Est. 29 de Novembro EFM

Cidade: Araruna - PR</td><td rowspan="2">8°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números irracionais.
• Potências e radiciação.</td><td>• Identifique os elementos dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais.
• Compreenda, identifique e reconheça o número π (pi) como um número irracional especial.
• Reconheça a notação de potência e suas propriedades, como um registro prático e facilitador de cálculos.</td></tr>
<tr><td>Grandezas e Medidas</td><td>• Medida de comprimento.
• Medida de área.</td><td>• Calcule o comprimento da circunferência.
• Calcule o comprimento e área de polígonos e círculo.</td></tr>
<tr><td>9°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números Reais.
• Propriedades dos Radicais.
• Equação do segundo grau.
• Teorema de Pitágoras.
• Equações Irracionais.</td><td>• Calcule potências com expoentes inteiros e fracionários.
• Identifique a potência de expoente fracionário como um radical e aplique as propriedades para a sua simplificação.
• Utilize o teorema de Pitágoras na resolução de situações problemas.
• Identifique e resolva equações Irracionais.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Colégio Est. Unidade Pólo EFMP

Cidade: Campo Mourão - PR</td><td rowspan="2">8°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números irracionais.</td><td>• Reconheça os números irracionais em diferentes contextos.
• Realize operações com os números irracionais.
• Compreenda, identifique e reconheça o Número π como um irracional especial.</td></tr>
<tr><td>Grandezas e Medidas</td><td>• Medida de comprimento.
• Medida de área.</td><td>• Calcule o comprimento da circunferência.
• Calcule o comprimento e área de polígonos e círculos.</td></tr>
<tr><td>9°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números reais.
• Propriedades dos Radicais.
• Equação do segundo grau.
• Teorema de Pitágoras.
• Equações irracionais.</td><td>• Identifique a potência de expoente fracionário como um radical e aplique as propriedades para a sua simplificação.
• Identifique e resolva equações irracionais.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Colégio Est. Olavo Bilac EFM

Cidade: Peabiru - PR</td><td>8°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números Reais</td><td>• Números racionais e sua representação decimal; Os números irracionais; Raiz quadrada de um número racional.</td></tr>
<tr><td>9°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números Reais</td><td>• Potenciação; Radiciação.</td></tr>
<tr><td></td><td>8°</td><td>Números e Álgebra</td><td>• Números Irracionais.
• Potências.</td><td>• Extraia a raiz quadrada exata e aproximada de números racionais;
• Reconheça números irracionais em diferentes contextos.
• Realize operações com números irracionais;</td></tr>
</table>

Colégio Est. 14 de Dezembro EFM Cidade: Peabiru - PR				• Compreenda, identifique e reconheça o número π (pi) como um número irracional especial.
		Grandezas e Medidas	• Medidas de comprimento. • Medidas de área.	• Calcule o comprimento da circunferência; • Calcule o comprimento e área de polígonos e círculo.
	9°	Números e Álgebra	• Números Reais. • Propriedades dos radicais. • Equação do 2º grau. • Teorema de Pitágoras. • Equações irracionais.	• Opere com expoentes fracionários. • Identifique a potência de expoente fracionário como um radical e aplique as propriedades para a sua simplificação. • Determine as raízes de uma equação do 2º grau utilizando diferentes processos. • Interprete problemas em linguagem gráfica e algébrica. • Identifique e resolva equações irracionais.
		Grandezas e Medidas	• Relações métricas num triângulo retângulo.	• Utilize o teorema de Pitágoras na determinação das medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Fonte: a autora desta pesquisa

4.3.1.2 Os números irracionais nos documentos do Ensino Médio brasileiro

Os números irracionais nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM, os conteúdos a serem ensinados neste nível de ensino são apresentados em três eixos: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; Análise de dados. No que concerne aos números, o objeto de estudo é o campo dos números reais, e eventualmente o conjunto dos números complexos. “Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico” (BRASIL, 2000, p. 120-121). No que concerne especificamente aos números irracionais, os PCNEM apontam que estes números devem estar relacionados com geometria e medidas, e que nesta etapa é necessário que o aluno seja capaz de diferenciar valores exatos e aproximados de acordo com os instrumentos disponíveis.

Os números irracionais nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – Ensino Médio

No que concerne aos conteúdos estudados no decorrer do Ensino Médio, o conteúdo estruturante Números e Álgebra, segundo as DCE, deve ser desdobrado em seis campos:

- Números reais.
- Números complexos.
- Sistemas lineares.
- Matrizes e determinantes.
- Equações e inequações exponenciais, logarítmicas e modulares.
- Polinômios.

Neste documento, o estudo do conjunto dos números irracionais está implícito no estudo do conjunto dos números reais. Entende-se que fica a cargo dos autores de livros didáticos, Propostas Pedagógicas Disciplinares de cada instituição e professores atribuir menor ou maior ênfase aos números irracionais, no decorrer do ensino dos números reais. Este foi um dos fatores que influenciaram o estudo das Propostas Pedagógicas Curriculares dos colégios envolvidos nesta pesquisa, com o intuito de se obter outras informações sobre a abordagem dos números irracionais nas instituições investigadas.

O Quadro 5 a seguir consiste na síntese das propostas de ensino relacionadas aos números irracionais dos colégios cujos alunos participaram desta pesquisa.

Quadro 5 - Propostas pedagógicas para o ensino dos números irracionais dos colégios de Ensino Médio envolvidos

Instituição	**Ano**	**Conteúdo Estruturante**	**Conteúdo Básico**	**Expectativa de aprendizagem**
UTFPR – Curso de Educação de Nível Técnica Médio Integrado – Técnico em informática Cidade: Campo Mourão - PR	1° Ano		Conjuntos Numéricos	• Conjunto dos números naturais. • Conjuntos dos números inteiros. • Conjunto dos números racionais. • Conjunto dos números irracionais. • Conjunto dos números reais.
Colégio Est. Unidade Pólo EFMP Cidade: Campo Mourão - PR	1° Ano	Números e Álgebra	Números Reais	• Amplie os conhecimentos sobre conjuntos numéricos e aplique em diferentes contextos.
Colégio Est. Princesa Isabel EM Cidade: Araruna - PR	1° Ano	Números e Álgebra	Números Reais	• Amplie os conhecimentos sobre conjuntos numéricos e aplique em diferentes contextos.
Colégio Est. Olavo Bilac – EFM Cidade: Peabiru - PR	1° Ano	Números e Álgebra	Conjuntos Numéricos	
Colégio Est. 14 de Dezembro EFM Cidade: Peabiru - PR	1° Ano	Números e Álgebra	Números Reais	• Amplie os conhecimentos sobre conjuntos numéricos e aplique em diferentes contextos.

Fonte: a autora desta pesquisa

4.3.1.3 Projeto Político Pedagógico dos cursos de Licenciatura em Matemática envolvidos na pesquisa

Considerando que os sujeitos desta pesquisa do ensino superior brasileiro eram alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná/UNESPAR – Campo Mourão e do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Maringá/UEM, foram analisadas as ementas das matrizes curriculares presentes nos Projetos Políticos Pedagógicos destes cursos com o intuito de perceber quais disciplinas tratam direta ou indiretamente o conceito de números irracionais. Um quadro com tais disciplinas é disponibilizado na sequência deste texto.

Quadro 6 - Disciplinas relacionadas aos números irracionais nos Cursos de Licenciatura em Matemática da UEM e UNESPAR - Campo Mourão

Universidade	Disciplinas	Período	Ementa
Universidade Estadual do Paraná/UNESPAR – Campo Mourão	Cálculo Diferencial e Integral I	1º ano	Os números reais e suas propriedades (propriedades, interpretação geométrica, intervalos, módulo e inequações)
	Fundamentos da Matemática	1º ano	Conjuntos numéricos e suas propriedades (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais).
	Análise Real	4º ano	Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis. Números Reais: Corpos, corpos ordenados, Números Reais. Sequências de Números Reais. Séries Numéricas.
Universidade Estadual de Maringá - UEM	Cálculo Diferencial e Integral I	1º ano	Conjuntos Numéricos (inteiros, racionais, reais e complexos, desigualdades, módulo de um número real, intervalos, supremo infinito, máximo e mínimo de um conjunto).
	Elementos de Análise Real	4º ano	Números Reais: conjuntos enumeráveis e não Enumeráveis; Corpos; Sequências e Séries de Números Reais.

Fonte: a autora desta pesquisa

Em conversa informal com professores das disciplinas de Estágio Supervisionado I e II ministradas nos terceiro e quarto ano do curso de Matemática da UNESPAR/Campo Mourão, eles informaram que os números reais podem ser tratados por meio de micro aulas que os alunos apresentam sobre conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio, no decorrer destas disciplinas. Entretanto, os temas das micro aulas não são especificados no PPP do curso, e são escolhidos pelos professores que as ministram. Ressalta-se que a professora de Estágio Supervisionado I dos anos letivos de 2010 e 2011 elegeu como tema de uma das micro aulas os Conjuntos Numéricos, na qual os números irracionais foram abordados.

Já na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, os conjuntos numéricos e propriedades, quando são abordados, o são superficialmente. Na disciplina de Análise

Real, entre os anos de 2008 e 2011, os professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão utilizaram como livro texto a obra *Análise Matemática para Licenciatura*, de Geraldo Ávila, que, além de fazer uma revisão sobre o modo como os números irracionais são apresentados na Educação Básica, aborda a construção dos números irracionais e reais por meio de Cortes de Dedekind, bem como fatos históricos destes números. No entanto, nem os Cortes de Dedekind, nem a construção do conjunto dos Números Reais fazem parte da ementa da disciplina de Análise, ficando a critério do professor que a ministra escolher o livro texto e a abordagem para conduzir este conteúdo.

4.3.2 Os números irracionais nos documentos do sistema de ensino francês

O sistema de ensino francês é norteado pelos *Programmes*, documento oficial que contém a Base Comum de Conhecimentos e Competências[33] propostos pelo ministério de Educação da França. Esses documentos contêm os conhecimentos essenciais e os métodos aos quais os alunos devem ser submetidos no decorrer de sua aprendizagem, e devem ser seguidos por todas as instituições de ensino, sejam elas públicas ou privadas, da escola maternal ao *Lycée*, assim como pelos autores de livros didáticos. No início de cada livro didático está disponível o Programa da disciplina contemplada referente ao ano escolar a que corresponde o livro.

Os documentos que norteiam os cursos universitários também são chamados de *Programmes*. No entanto, assim como no Brasil, cada curso universitário tem autonomia para elaborar sua própria estrutura curricular.

Desse modo, no que se refere aos documentos curriculares franceses, foram analisados os *Programmes* do *Collège*, do *Lycée* e da *Licence* em Matemática dos cursos investigados, com o objetivo de perceber quais os momentos do ensino francês que favorecem a aprendizagem dos números irracionais. Cabe salientar que esses números não são explicitados no currículo do *Collège* nem do *Lycée*, entretanto, implicitamente, os números irracionais estão relacionados ao estudo de outros conceitos no decorrer da escolarização, conforme apresentado a seguir.

---

[33] A lei que determina a existência e exclusividade da Base Comum de Conhecimentos e Competências entrou em vigor em 2006 com o objetivo de contemplar valores, saberes, línguas e práticas a todos os alunos que participam da escolaridade obrigatória, proporcionando-lhes construir seu futuro profissional e pessoal, e obter com sucesso sua vida na sociedade.

4.4.1 Os Programmes do Collège e possibilidades de estudo dos números irracionais

Segundo os *Programmes* do *Collège* (FRANCE, 2011), o ensino de Matemática é ofertado em quatro campos:

- Organização de dados, funções.
- Números e cálculo.
- Geometria.
- Grandezas e medidas.

De acordo com esses documentos, é possível perceber que, embora sem formalizar e sem mencionar os números irracionais, os alunos franceses têm os primeiros contatos com esses números na *Quatrième*, ao estudarem o teorema de Pitágoras. Pois, dependendo dos valores considerados para as medidas dos lados dos triângulos retângulos, acarreta em cálculos com números irracionais algébricos - números da forma $\sqrt{n}$, sendo n um número inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Esse fato pode ser percebido nos livros didáticos franceses da *Quatrième.* Por exemplo, no livro deste nível escolar da Coleção *Repère*[34], no bloco de geometria, uma das seções refere-se ao teorema de Pitágoras e sua recíproca, na qual são realizados cálculos de raízes quadradas que resultam em valores irracionais, porém os cálculos são efetuados aproximadamente com o auxílio da calculadora e nenhuma explicação sobre tal aproximação é abordada nesta seção.

Nos *Programmes* da *Troisième* (FRANCE, 2011) também são percebidos indicativos do conceito de números irracionais no campo Números e Cálculos e no campo Geometria. No campo Números e Cálculos é solicitado que os alunos conheçam:

- Números Inteiros e racionais (Divisor comum entre dois inteiros; frações irredutíveis; operações sobre os números relativos em escrita fracionária).
- Cálculos elementares sobre os radicais (Raiz quadrada de um número positivo; Produto e Quociente de dois radicais).

As competências neste campo devem ser:

[34] BRAULT, Roger; DARO, Isabelle; FERRERO, Christine; PERBONS-RAIMBOURG; PLOY, Laurent; TELMON, Christophe**. Repère. Mathématiques 4e**. Editora Hachette Éducation, Paris, 2007.

- Saber que, se a designa um número positivo, $\sqrt{a}$ é o número positivo cujo quadrado é a e utilizar as igualdades: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \sqrt{a^2} = a$.
- Determinar, por meio de exemplos numéricos, os números x tal que $x^2 = a$, sendo a um número positivo.

E de acordo com o campo Geometria, os alunos devem estudar sobre:

- Propriedades geométricas elementares de figuras planas e de sólidos: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, triângulo, círculo, cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro, esfera.

Desse modo, nota-se que, embora os números irracionais não estejam explicitamente inseridos nos *Programmes* do *Collège*, fazem parte da formação dos alunos do *Collège* conhecimentos, apesar de implícitos, sobre os números irracionais algébricos e do número transcendente π.

Quanto aos irracionais algébricos, a afirmação acima decorre do estudo do teorema de Pitágoras, de raízes quadradas e suas operações, soluções de equações do segundo grau $x^2 = a$, sendo a um número positivo, cálculos de áreas de figuras planas como o quadrado, relações trigonométricas no triângulo retângulo. Esses são momentos do ensino em que não se pode negar a presença dos números irracionais algébricos.

Em relação ao número transcendente π, nota-se que ele está diretamente relacionado aos cálculos de área e perímetro do círculo, área e volume de sólidos redondos como o cilindro e a esfera.

Provavelmente decorre destas situações relacionadas aos números irracionais que autores de livros didáticos de *Troisième*[35] definam números irracionais no capítulo específico sobre Raízes Quadradas de suas respectivas obras e, algumas vezes, insiram fatos históricos e atividades sobre o número de ouro.

Sendo assim, não se pode negar que são várias as situações presentes no processo escolar dos alunos franceses que favorecem conhecimentos sobre os números irracionais, em particular sobre os irracionais algébricos e o transcendente π.

---

[35] BRAULT, R. *et al*. **Collection Phare. Mathématiques 3e**. Editora Hachette Éducation, Paris, 2008.
CUAZ, L. *et al*. **Collections Prisme.Math 3e.** Ed. Berlin, Paris, 2008.
MALAVAL, J. *et al*. **Coleção Transmath.Troisième**. Editions Nathan, Paris, 2008.

4.4.2 O Programa do Lycée e a ausência de números irracionais

Até o ano letivo de 2009, em que ingressaram os alunos entrevistados nesta pesquisa, nos *Programmes* do *Lycée*, o conteúdo números era abordado na *Seconde*, ou seja, na série comum a todos os alunos que cursam o *Lycée*. Consequentemente, os livros didáticos da *Seconde* editados até 2008 apresentavam, antes do estudo de funções, os conjuntos numéricos: os inteiros naturais (N), os inteiros relativos (Z), os decimais (D), os racionais (Q) e os reais (R) como sendo a união do conjunto dos racionais com outros números como $\sqrt{2}, \pi, \ldots$. Propriedades, exemplos e exercícios sobre os conjuntos numéricos eram propostos, incluindo os números irracionais, tais como a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, métodos para calcular aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{2}$, construção da espiral pitagórica, atividades relacionadas à calculadora e números irracionais como $\sqrt{2}$ e π[36].

Contudo, a partir de setembro de 2010, começou a vigorar um novo *Programme* da *Seconde* (FRANCE, 2009), no qual os conjuntos numéricos foram excluídos. Por consequência, os livros didáticos editados depois deste período não apresentam mais a introdução sobre as nomenclaturas e propriedades dos conjuntos numéricos e o primeiro capítulo dos livros didáticos lançados após a reforma de 2009 iniciam-se diretamente com o conteúdo *funções*, sem mencionar os conjuntos numéricos[37].

4.4.3 Os Programas da Licenciatura em Matemática e os números irracionais

Assim como no sistema universitário brasileiro, os cursos de graduação da França têm autonomia para elaborar seus próprios currículos. Pelo fato de seis estudantes do Curso de Matemática - Percurso ensino[38] da Universidade Lille 1 – Ciências e Tecnologias serem

[36] Esses comentários são baseados no livro didático da coleção Hypèrbole: MALAVAL, J. *et al*. **Coleção Hyperbole Mathématiques Seconde**. Editora Natham, 2004.

[37] Tais informações podem ser conferidas no livro didático de Matemática da *Seconde* da Coleção Berlin disponível em http://eduscol.education.fr/maths/actualites/manuels-numeriques-seconde-maths-2010.

[38] Três modalidades de curso de Matemática são oferecidos pela Universidade Lille 1: *Licence Mathématiques parcours mathématiques; Licence Mathématiques parcours enseignement* e *Licence Mathématiques Appliquées et Science Sociales.* A modalidade *Licence Mathématiques parcours enseignement* corresponde à Licenciatura em Matemática do sistema de ensino brasileiro, por isto os sujeitos convidados para colaborarem com esta pesquisa são alunos desta modalidade. A *Licence en Mathématiques* na França tem duração de três anos. Porém, antes dos professores prestarem concurso para ministrar aulas em

sujeitos desta pesquisa, estudou-se as ementas[39] deste curso buscando identificar por meio destes documentos quais disciplinas tratam direta ou indiretamente do conceito de números irracionais. Este estudo está resumido no Quadro 7.

Quadro 7 - Disciplinas relacionadas aos números irracionais do Curso de Matemática de Lille 1

Disciplinas	Perío-do	Ementa
Fundamentos de Análise	1º Semes-tre	Introdução aos objetos fundamentais de Análise: Números Reais (Propriedades de R (a construção de R não pertence ao programa desta unidade): Operações sobre R. Relação de ordem. R é Arquimediano. Q é denso em R. Valor absoluto. Intervalos, vizinhança. Supremo, ínfimo. Sequências Reais. Funções Reais.
Ateliê de Matemática	1º Semes-tre	Os números pitagóricos e o problema de Fermat; Criptografia, os decimais de π; como calculávamos os logaritmos antes do computador.
Aritmética e Introdução à Teoria dos Números	2º Semes-tre	Corpos dos números racionais e reais. Desenvolvimento decimal de um número real, caso periódico. Algoritmo de frações contínuas, caso periódico. Aproximação dos números reais por números racionais, a irracionalidade de e, critério de irracionalidade. Números Algébricos, Teorema de Liouville, construção de números transcendentes.
Matemática Discreta	2º Semes-tre	Conjuntos e sua cardinalidade. Operações e aplicações entre os conjuntos. Conjuntos infinitos, enumerabilidade, [0,1] não é enumerável, Teorema de Cantor Bernstein.
História de uma disciplina	2º Semestre	A Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat.
História da Matemática	1º Semes-tre	Uma história do infinito: A concepção de infinito dos Gregos. Os paradoxos do infinito: Aquiles e a Tartaruga (Zenão); uma parte não pode ser igual ao todo (Galileu). O conceito de limite e a ideia de infinito: o método de Eudoxo; o cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton; os paradoxos de Bolzano; a análise de Cauchy. A emergência axiomática dos Números Reais como consequência do conceito de limite: Cantor e Dedekind. O infinito atual, o transfinito de Cantor.

Fonte: A autora da pesquisa

4.3.3 Considerações sobre os números irracionais nos documentos dos sistemas de ensinos brasileiro e francês

Levando em conta este estudo relacionado aos números irracionais nos sistemas de ensino brasileiro e francês, as análises dos documentos curriculares e livros didáticos desses dois sistemas de ensino, foi elaborado o Quadro 8, que representa uma síntese desse estudo:

---

instituições da Educação Básica, é preciso que eles cursem dois anos de mestrado. E se desejam prestar concurso no Ensino Superior, é preciso que eles tenham concluído seus doutorados.

[39] Informações retiradas do site http://mathematiques.univ-lille1.fr/Formation/Licences-de-l-UFR-de-Mathematiques/.

Quando 8 - Síntese da presença ou não dos números irracionais nos currículos brasileiro e francês

País / Nível	Brasil	França
Ensino Fundamental	**Presença** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Números irracionais são explicitados nos livros didáticos de 8º e 9º ano.	**Ausência** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Na 4^e, durante do estudo do teorema de Pitágoras e aplicações, nota-se a presença dos números irracionais algébricos sem explicitá-los e sem nomeá-los. • Na 3^e existe a presença dos números irracionais algébricos no estudo das raízes quadradas e do número π no estudo de figuras planas e sólidos geométricos. Porém, a explicitação ou não desse conceito fica a cargo dos autores de livros didáticos e professores de Matemática.
Ensino Médio	**Presença** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Números irracionais são explicitados nos livros didáticos do 1º ano no decorrer do estudo dos conjuntos numéricos.	**Ausência** do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: • Até o ano letivo de 2009, os números irracionais eram mencionados nos livros didáticos na seção destinada ao estudo dos conjuntos numéricos. A partir de 2010, a explicitação desses números está ausente dos livros didáticos.
Curso de Matemática	**Presença facultativa** do conceito de números irracionais nos PPP. Por consequência: • O estudo de teorias que dão sustentação aos números irracionais é implícita nas disciplinas de Análise Real e História da Matemática.	**Presença** do conceito de números irracionais no *Programme*. Por consequência: • Presença implícita ou explícita nas disciplinas de História da Matemática, Fundamentos de Análise, Matemática Discreta, Aritmética e Teoria dos Números.

Fonte: a autora desta pesquisa

Assim, em relação ao sistema de ensino brasileiro, pode-se afirmar que o estudo dos números irracionais é oficialmente explicitado nos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), inclusive com propostas e sugestões para o professor explorar este conteúdo em sala de aula, no quarto ciclo deste nível escolar. As DCE (PARANÁ, 2008) e as Propostas Pedagógicas Curriculares das escolas analisadas também evidenciam o estudo deste conteúdo nos 8º e 9º anos.

No que se refere ao Ensino Médio brasileiro, apesar de os números irracionais não serem enfatizados pelos PCN, os livros didáticos e as Propostas Pedagógicas Curriculares dos colégios mencionam este conceito ao revisar os conjuntos numéricos e suas operações.

Percebe-se, nas ementas dos cursos de Licenciatura em Matemática cujos alunos são colaboradores desta pesquisa, que uma exploração consistente do conceito de números irracionais, considerando teorias como Cortes de Dedekind, Teoria de Eudoxo, Construção de Cantor para os Números Reais, Conjuntos enumeráveis, não enumeráveis, etc., fica a critério do professor da disciplina de Análise Real. Deste modo, é possível que os professores de Matemática formados por esses cursos mencionados não conheçam sobre as teorias que sustentam formalmente a existência de números irracionais.

No que diz respeito ao sistema de ensino francês, o conceito *números irracionais* não é explicitado nos *Programmes* do *Collège* e do *Lycée*, ficando a cargo do professor de Matemática e dos autores de livros didáticos explicitarem ou não este conteúdo. No entanto, na *Quatrième*, por meio do teorema de Pitágoras, e na *Troisième*, por meio do capítulo sobre Raízes Quadradas ou no bloco de Geometria relacionados às figuras geométricas planas e sólidos geométricos, não há como negar a presença de números irracionais algébricos e do número π. No decorrer do estudo das raízes quadradas, alguns autores de livros didáticos, assim como Malaval *et all* (2003)[40], chegam a mencionar e a definir os números irracionais como sendo aqueles que não são racionais.

No que se refere às ementas do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Lille I, percebe-se que o conceito de número irracional, bem como teorias que sustentam este conceito (Cantor, Dedekind, o método de Eudoxo) e exemplos (a irracionalidade do número e, os decimais de π, construção de números transfinitos), são tratados em diversos momentos do curso, seja nas disciplinas de Análise, Teoria dos Números ou História da Matemática. Sendo assim, considerando as ementas analisadas, é possível inferir que a questão da irracionalidade de um número está mais presente no curso de *Licence* em Matemática (percurso ensino) de Lille I do que nos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades brasileiras envolvidas nesta pesquisa.

Desse modo, embora seja constatada a presença ou ausência dos números irracionais nos currículos desses dois países, dependendo do nível de escolarização, nota-se que os alunos vivenciam situações relacionadas ao conceito de números irracionais no decorrer do processo escolar. Sendo assim, a presente pesquisa se propôs investigar os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros que cursavam o último semestre do 9º ano do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática e, igualmente, alunos franceses do último semestre do *Collège*, *Lycée* e Curso de Licenciatura em Matemática mediante situações relacionadas aos números irracionais, com a intenção de perceber semelhanças e diferenças nas respostas desses alunos, apesar de estarem inseridos em sistemas de ensino e, sobretudo, culturas diferentes.

---

[40] MALAVAL, J. *et al*. **Coleção Transmath.Troisième**. Editions Nathan, Paris, 2008.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Na presente seção, descrevem-se os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da parte experimental desta pesquisa: apresentam-se os sujeitos colaboradores, os critérios de seleção desses sujeitos, especificam-se os países, cidades e respectivas instituições de ensino envolvidas. Igualmente, compõem esta seção os três momentos de coleta de dados necessários para definir o instrumento de investigação, os critérios utilizados para a elaboração das atividades propostas e os descritores de análise das respostas dos sujeitos.

5.1. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

5.1.1 Problema de pesquisa

Mediante as justificativas para a realização desta pesquisa, bem como a fundamentação teórica apresentada nos capítulos anteriores, a presente investigação busca respostas para as seguintes perguntas:

Quais os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros que finalizam o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior de Matemática, e por alunos franceses que finalizam *Collège*, *Lycée* e *Licence en Mathématiques*, mediante situações relacionadas ao Campo Conceitual dos números irracionais?

Quais as semelhanças e diferenças percebidas no desempenho de alunos brasileiros e franceses, em relação aos níveis de escolarização semelhantes?

5.1.2 Objetivos

Objetivo geral

Com o intuito de responder o problema de pesquisa, estabeleceu-se como objetivo geral analisar os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros e franceses, finalistas de cada nível de ensino investigado, relacionados ao conceito de número irracional.

Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, três objetivos específicos foram estabelecidos:

- ✓ Identificar teoremas em ação possivelmente mobilizados pelos alunos entrevistados.
- ✓ Investigar o desempenho conceitual, de alunos brasileiros e franceses, ao finalizarem diferentes níveis de escolarização.
- ✓ Comparar semelhanças e diferenças conceituais mobilizadas por alunos brasileiros e franceses de níveis de ensino semelhantes.

5.1.3 Os sujeitos colaboradores da pesquisa

Devido ao objetivo geral desta pesquisa, os sujeitos colaboradores, incluindo aqueles que participaram do estudo piloto, foram 51 alunos de escolas públicas brasileiras e francesas, que finalizavam seu respectivo nível de ensino: Ensino Fundamental, Médio ou Superior de Matemática para os alunos brasileiros, e *Collège*, *Lycée* e *Licence em Mathématiques* para os alunos franceses.

5.1.3.1 Seleção dos sujeitos

Ensino Fundamental, Ensino Médio, Collège e Lycée

Os sujeitos brasileiros de Ensino Fundamental e Médio, e os sujeitos franceses de *Collège* e *Lycée*, foram selecionados por membros das equipes pedagógicas ou professores de Matemática das instituições. Todavia, foi solicitado que os alunos fossem voluntários e de nível mediano em Matemática, não sendo os alunos que mais se destacavam nem aqueles com desempenho menos favorecido perante os colegas da turma.

Ensino Superior

No que concerne aos alunos brasileiros e franceses do Ensino Superior, a pesquisadora entrou na sala de aula do último semestre do curso de Matemática das três instituições envolvidas na pesquisa, sendo duas instituições brasileiras e uma francesa, apresentou os objetivos da pesquisa e solicitou a participação voluntária dos alunos. Foram entrevistados todos os alunos que se disponibilizaram a participar e que compareceram no momento da entrevista.

Os sujeitos brasileiros colaboradores desta pesquisa

No que se refere aos sujeitos brasileiros, colaboraram com a pesquisa 30 alunos de instituições públicas, entrevistados nos meses de setembro e outubro de 2011. Dentre esses sujeitos, 8 cursavam o 9º ano do Ensino Fundamental, 8 cursavam o 3º ano do Ensino Médio, 7 eram alunos do 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática e 9 alunos participaram dos estudos pilotos, descritos a seguir.

Com o objetivo de realizar uma pesquisa que não representasse especificamente uma realidade pontual, como em um único estabelecimento de ensino, fez-se a opção por diversificar os colégios de Ensino Fundamental e Médio do Núcleo Regional de Campo Mourão - PR. Igualmente, as entrevistas foram realizadas com alunos de duas universidades públicas que oferecem Curso de Licenciatura em Matemática no município de Campo Mourão ou nas proximidades deste município.

A relação das instituições e quantidade de sujeitos que participaram da pesquisa está descrita no quadro a seguir.

Quadro 9 - Instituições e quantidade de sujeitos brasileiros colaboradores da pesquisa

Instituições	Cidade	Quant. de sujeitos do Ens. Fund.	Quant. de sujeitos do Ens. Médio	Quant. de sujeitos do Ens. Superior
Colégio Estadual Unidade Pólo Ensino Fundamental, Médio e Profissional	Campo Mourão – Paraná	3	3	
UTFPR – Curso de Educação de Nível Técnico Médio Integrado	Campo Mourão – Paraná		2	
Colégio Estadual Olavo Bilac – Ensino Fundamental e Médio	Peabiru – Paraná	2	1	

Colégio Estadual 14 de Dezembro – Ensino Fundamental e Médio	Peabiru – Paraná	1	2	
Colégio Estadual 29 de Novembro Ensino Fundamental e Médio	Araruna – Paraná	2		
Colégio Estadual Princesa Isabel Ensino Médio	Araruna – Paraná		2	
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão	Campo Mourão – Paraná			9
Universidade Estadual de Maringá	Maringá – Paraná			3
Total		**8**	**10**	**12**

Fonte: a autora desta pesquisa

Os sujeitos franceses colaboradores desta pesquisa

Na França, as entrevistas foram realizadas com 21 alunos de instituições públicas da região Nord Pas de Calais, nos meses de março e abril de 2012. Não houve estudo piloto, no entanto, uma simulação da entrevista com uma mestranda em Didática das Ciências foi realizada com o intuito de confirmar a compreensão da expressão da língua francesa pela pesquisadora. Devido às dificuldades de encontrar instituições francesas que se dispusessem à realização da pesquisa, não foi possível diversificá-las de modo semelhante ao Brasil. Sendo assim, os sujeitos da pesquisa foram 7 alunos de *Troisième* de dois *Collèges*, 9 alunos de *Terminale* de um *Lycée* e 5 alunos do Curso de *Licence em Mathématiques*.

Como especificado no capítulo 3, na França existem diversas modalidades de *Lycée*, porém são os *Lycée Littéraire*, *Lycée Economique et Social* e *Lycée Scientifique* que preparam os alunos para a entrada na universidade. Considerando que o currículo do *Lycée Economique et Social* é o mais próximo do currículo do Ensino Médio brasileiro, no sentido dos conteúdos matemáticos contemplados, bem como a carga horária da disciplina de Matemática, percebeu-se a necessidade de entrevistar alunos desta modalidade. Contudo, como esta pesquisa compreende alunos franceses do curso de Matemática, e que, de modo geral, são os alunos que realizam o *Baccalauréat Scientifique*[41] que entram nos

[41] Na França, o *Baccalauréat* é um diploma obtido ao fim dos estudos secundários geral, tecnológico ou profissional. *O Baccalauréat Scientifique* é focalizado na cultura científica e Matemática.

cursos universitários de Matemática, por questão de coerência com o sistema de ensino francês, também foram realizadas entrevistas com alunos da *Terminale Scientifique*.

A relação das instituições e quantidade de alunos franceses de cada instituição que colaboraram com esta pesquisa está descrita a seguir.

Quadro 10 - Instituições e quantidade de sujeitos franceses colaboradores da pesquisa

Instituições	**Cidade**	**Quant. de sujeitos de *Troisième***	**Quant. de sujeitos de *Terminale ES***	**Quant. de sujeitos de *Terminale S***	**Quant. de sujeitos do Ens. Superior**
Collège Saint-Exupéry d'Onnaing	Valenciennes	4			
Collège de Hem	Hem	3			
Lycée Yves kernanec	Marcqen Baroeul		4	5	
Université Lille I – Sciences et Technologies[42]	Villeneuve-d’Ascq				5
Total		**7**	**4**	**5**	**5**

Fonte: a autora desta pesquisa

Um esquema contendo o número de sujeitos colaboradores da pesquisa, brasileiros e franceses, incluindo os alunos participantes do estudo piloto, está disponibilizado na Figura 12. O 3º momento da pesquisa, conforme aparece na figura, refere-se ao instrumento final de coleta de informações e está descrito mais adiante, ainda nesta seção.

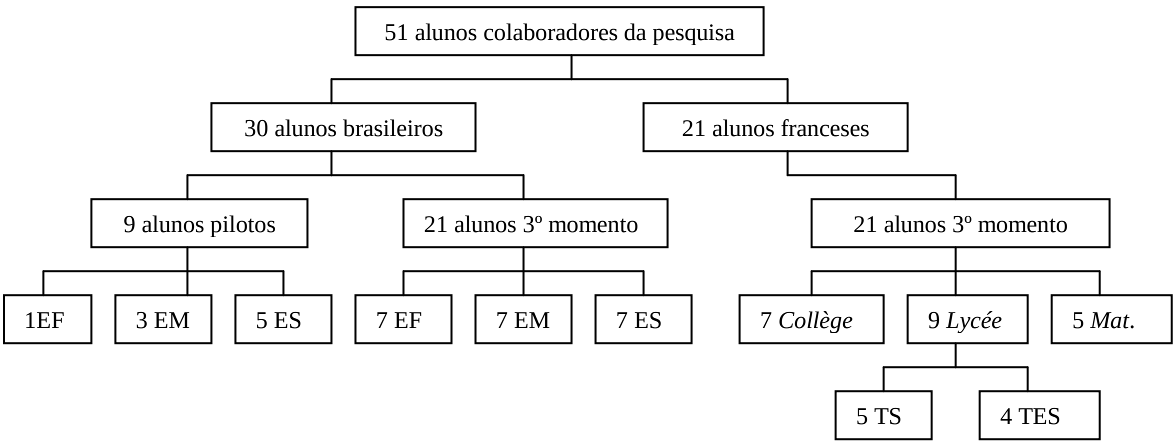


Figura 12 - Número de sujeitos colaboradores da pesquisa
Fonte: A autora desta pesquisa

[42] Única universidade pública que oferece curso de Matemática na região Nord Pas de Calais.

5.1.4 A coleta de informações

Em conformidade com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos – COPEP[43] da Universidade Estadual de Maringá, duas cópias do termo de autorização, com explicações éticas sobre a pesquisa, incluindo a filmagem, foram enviadas aos pais ou responsáveis dos menores solicitando suas assinaturas. As entrevistas foram realizadas mediante a entrega de uma das cópias assinadas. Em relação aos alunos do Ensino Superior, antes de cada entrevista, eles assinavam duas cópias do termo de consentimento. Estes termos solicitados aos alunos brasileiros e franceses estão disponíveis nos anexos.

5.1.4.1 Entrevistas filmadas

Segundo Loizos (2010), o vídeo tem a função de registrar informações sempre que um conjunto de ações humanas é difícil de ser descrito compreensivamente por um único observador. O autor acrescenta que “[...] não existem limites óbvios para as ações e narrações humanas que possam ser registradas, empregando conjuntamente imagem e som em um filme de vídeo” (p. 149). Sendo assim, com o intuito de facilitar as análises da pesquisa, captar as reações dos alunos e realizá-las do modo mais fiel possível, optou-se por filmar as entrevistas. Para analisar as 33h30min, aproximadamente e sem contar as entrevistas do estudo piloto, de entrevistas filmadas, a pesquisadora assistiu diversas vezes aos vídeos. Eles não foram transcritos na íntegra. A transcrição ocorreu apenas em algumas passagens, sobretudo naquelas em que foram percebidas possibilidades de mobilização de teoremas em ação, e que se considerou necessário explicitar no decorrer do texto.

5.1.4.2 Os três momentos de coleta de informações

A princípio, não se almejava realizar entrevistas com os sujeitos colaboradores da pesquisa, mas sim a resolução de problemas com o objetivo de analisar os registros escritos

---

[43] A Universidade Estadual de Maringá tem seu próprio comitê de ética, que tem a responsabilidade de apreciar os protocolos de pesquisas envolvendo seres humanos a serem desenvolvidos na Instituição visando salvaguardar a dignidade, os direitos, a segurança e o bem-estar do sujeito da pesquisa. www.ppg.uem.br. A presente pesquisa teve parecer favorável pelo COPEP em 01/04/2011, sob CAAE Nº 0038.0.093.000-11.

dos alunos. Pretendia-se que as atividades fossem aplicadas para um grupo de dez alunos de cada nível de ensino, de um mesmo colégio, no contra turno de seu horário de aula, sendo que os alunos deveriam resolver as atividades individualmente. Todavia, depois das atividades elaboradas, pensou-se que, diante de um grupo de alunos, poderia ocorrer, com maior frequência, de os sujeitos não responderem algumas questões, talvez por não se empenharem para resolvê-las ou pela dificuldade de registrá-las, comprometendo as análises da pesquisa. Sendo assim, optou-se por aplicar as atividades individuais aos sujeitos, com a hipótese de que, mesmo se eles não as resolvessem na íntegra, a pesquisadora pudesse questioná-los, tentando compreender suas dúvidas ou intenções de resolução, adquirindo mais informações de suas respostas.

Neste momento, foi acrescentado o desejo de não centralizar a pesquisa numa única instituição de cada nível de ensino, mas sim de diversificar as instituições com o intuito de obter resultados mais gerais, optando por envolver vários colégios da região de Campo Mourão. Nestas condições, realizaram-se dois estudos pilotos, em momentos distintos, de modo a refinar os instrumentos de coleta de informações e melhor atingir os objetivos da pesquisa. Os três momentos de coleta de dados da pesquisa são descritos na sequência. Os dois primeiros momentos estavam relacionados aos estudos pilotos, que contribuíram para a estruturação do terceiro momento, utilizado para coletar as informações para as análises da pesquisa.

Primeiro momento

Os primeiros estudos pilotos foram realizados com o objetivo de avaliar se os enunciados das atividades precisavam ser reelaborados, se algum deles poderia causar ambiguidades nas interpretações dos alunos, além de perceber o tempo de resolução das atividades e se as atividades e respostas permitiam responder o problema central da pesquisa. As atividades foram aplicadas a um aluno de cada nível de Ensino (Fundamental, Médio e Superior), e foram filmadas, procedendo-se do seguinte modo: a pesquisadora entregava uma atividade de cada vez ao aluno, questionava se ele tinha dúvidas sobre o enunciado, solicitava seu registro de resolução da atividade e o deixava livre para questionar sobre o enunciado ou discutir sobre a resolução da atividade. Após o término da atividade, a pesquisadora perguntava ao aluno se ele conhecia outro modo de resolvê-la. Em caso positivo, o aluno era questionado sobre o porquê de preferir o procedimento registrado.

Os resultados deste estudo não atenderam às expectativas da pesquisa por dois motivos: primeiro, em relação ao tempo que os alunos levavam para responder as questões, de aproximadamente uma hora e quarenta minutos. Eles justificavam suas opiniões detalhadamente em cada atividade. Sendo assim, considerou-se que poderia ser cansativo para os alunos. O segundo motivo foi o silêncio dos alunos. Mesmo que a pesquisadora os deixasse à vontade para interagir, a preocupação dos alunos estava centrada na produção escrita, e os momentos de interação ficavam reservados às questões que a pesquisadora propunha no final de cada atividade.

Segundo momento

Este segundo momento de entrevistas teve a intenção de reduzir o tempo de resolução das atividades pelos alunos, e, principalmente, de fazê-los interagir com a situação, ouvir suas opiniões, dúvidas, hesitações. Optou-se por aplicar as atividades em duplas. Para esta nova tentativa de metodologia, três duplas participaram dos estudos pilotos, sendo duas duplas do Curso de Matemática e uma dupla de alunas do 3º ano do Ensino Médio. As duas primeiras constituíram-se de alunos do Curso de Matemática, sendo uma dupla de alunos do 2° ano do curso e uma dupla de alunos do 4° ano. Estas duplas foram entrevistadas devido à sua disponibilidade em colaborar com a pesquisa. Com estes alunos, as expectativas esperadas foram atendidas, houve momentos em que os alunos apresentavam opiniões distintas e juntos chegavam a uma conclusão final. Contudo, o mesmo sucesso não ocorreu ao aplicar as atividades com a dupla de alunas do 3° ano do Ensino Médio. As alunas eram tímidas e não interagiam entre si. Quando a pesquisadora fazia perguntas, elas se olhavam, esperando que a colega respondesse, e, por fim, não respondiam à questão. Juntas, as alunas demoraram aproximadamente duas horas e quarenta minutos para responder as atividades. Mais uma vez, percebeu-se necessidade de readequar o instrumento de coleta de informações, descrito a seguir.

Terceiro momento

A análise cautelosa dos estudos pilotos propiciou uma reorganização do instrumento de coleta de informações. As atividades foram readequadas de modo a privilegiar a comunicação entre pesquisadora e sujeitos da pesquisa, optando por entrevista semiestruturada ao invés dos registros escritos. As entrevistas foram individuais, nas quais a pesquisadora procurou, assim como sugere Carraher (1989, p. 32), “[...] acompanhar o raciocínio de cada sujeito, estando atenta ao que o sujeito diz ou faz, sem corrigir automaticamente as respostas dadas pelo sujeito de acordo com seu raciocínio e sem completar o que o sujeito diz”, oportunizando que o sujeito formasse suas conclusões. Para as respostas de cada atividade, foram solicitadas justificativas, permitindo que os sujeitos demonstrassem melhor seu nível de compreensão. Procuraram-se meios de esclarecer as ambiguidades surgidas nas respostas. Esta reestruturação do modo de conduzir as entrevistas, juntamente com a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), que permite analisar e compreender as filiações e rupturas de conceitos, e reconhecer categorias implícitas nas respostas dos sujeitos por meio dos invariantes operatórios, possibilitou responder o problema central da presente pesquisa.

4.1.5 Critérios de elaboração das atividades

Para a elaboração das atividades, foram levados em consideração os pressupostos de Vergnaud (1990), conforme os quais, para a compreensão de um conceito, o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações relacionadas a este conceito. E ainda, de acordo com Vergnaud (2009), considerou-se que as situações devem fazer aparecer, ao menos parcialmente, os teoremas em ação pertinentes e facilitar as inferências em situação. A pesquisa de Bronner (1992) também serviu de inspiração para organizar as atividades em quadros inicialmente Numérico, Algébrico, Gráfico e Geométrico, assim como propostos na Teoria de Jogos de Quadros de Douady (1986), explicitada mais adiante.

Sendo assim, após o estudo histórico, epistemológico, de livros didáticos e documentos oficiais do sistema de ensino brasileiro relacionados aos números irracionais, foram apontadas situações, conceitos, teoremas e propriedades interligados a estes números e, desse modo, foram identificadas algumas ideias base que se considera necessárias para a construção do conceito de números irracionais. No entanto, salienta-se que tais ideias base não esgotam todas as possibilidades de situações necessárias para a construção do conceito de irracionalidade. Porém, conhecendo essas ideias, acredita-se que os alunos tenham boa noção dos números irracionais. São elas:

I. Compreender sobre as infinitas casas decimais de alguns números.

II. Compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem.

III. Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas.

IV. Considerar a existência de números irracionais e perceber pra quê esses números servem.

V. Saber aplicar o teorema de Pitágoras.

VI. Aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.

VII. Aceitar que a equação $x^2 = p$ tem solução real, para todo $p \in R_+$.

Para os alunos do Ensino Superior foram acrescentadas:

VIII. Saber demonstrar que os números algébricos da forma $\sqrt{n}$, com n não quadrado perfeito, não são racionais.

IX. Conhecer definições, propriedades e exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

X. Conhecer as teorias de Eudoxo, Dedekind e Cantor para a construção dos números reais.

Considerando estas ideias base relacionadas, as hipóteses de Vergnaud (1990)[44] e a pesquisa de Bronner (1992)[45], foram elaboradas questões e atividades matemáticas com o objetivo de analisar os conhecimentos relacionados aos números irracionais mobilizados pelos alunos entrevistados nesta pesquisa.

Estrutura do instrumento de pesquisa

i. As questões e atividades foram elaboradas no nível do Ensino Fundamental, envolvendo conceitos presentes nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática brasileiros desse nível de ensino, e foram propostas aos alunos dos três níveis de ensino dos dois países envolvidos.

---

[44] Para a compreensão de um conceito, são necessárias diversas situações relacionadas a este conceito.

[45] Inspirou a organização das atividades em quadros inicialmente Numérico, Algébrico, Gráfico e Geométrico.

ii. Como nos documentos do sistema de ensino brasileiro o estudo dos números irracionais não é oficialmente aprimorado no Ensino Médio, sendo apresentada apenas uma revisão dos conjuntos numéricos, somente uma atividade relacionada à demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi acrescentada a este grupo de alunos. Esta demonstração pode ser encontrada em alguns livros didáticos desse nível de ensino.

iii. Para os alunos do Ensino Superior, foram acrescentadas questões relacionadas às teorias e conceitos que fundamentam a existência e consistência dos números irracionais, tais como Teorias de Cantor, Dedekind, Eudoxo, conjuntos enumeráveis, não enumeráveis, etc.

Estas escolhas, que serviram para estruturar o instrumento de pesquisa, estão resumidas na Figura 13:

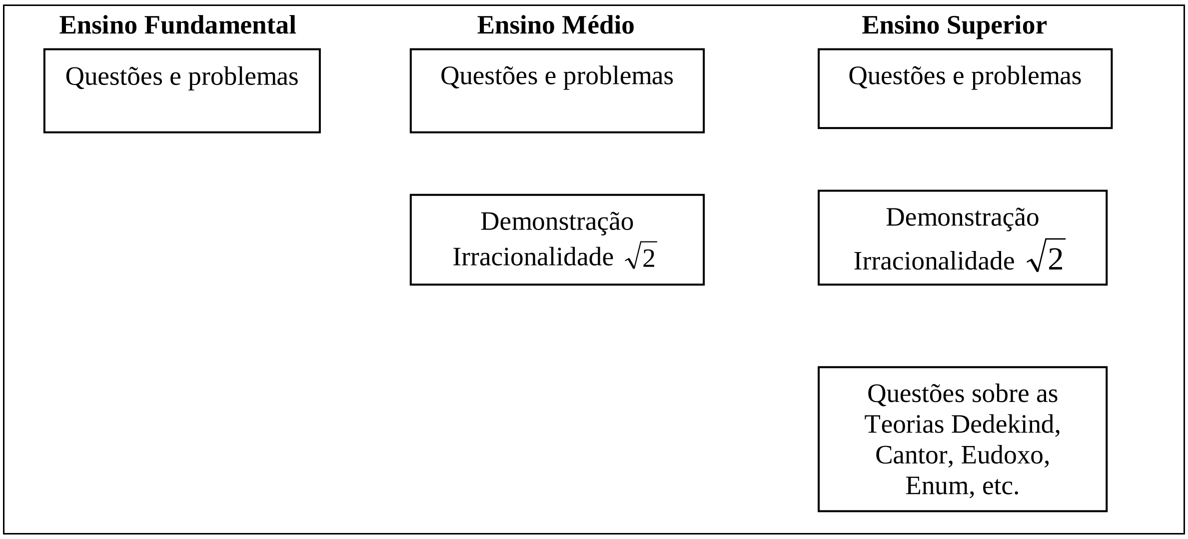


Figura 13 - Resumo do instrumento de pesquisa
Fonte: a autora desta pesquisa

Esta estruturação das atividades, além de permitir analisar os conceitos mobilizados pelos alunos e de identificar, possivelmente, os teoremas em ação mobilizados no decorrer das entrevistas, permitiu perceber o desempenho dos alunos entrevistados no decorrer da escolarização, ou seja, as diferenças conceituais apresentadas pelos alunos finalistas do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Superior de Matemática, corroborando um dos objetivos específicos desta pesquisa.

As questões e atividades propostas aos alunos são apresentadas na seção 6, seguidas de seus respectivos objetivos e análises. Apesar de estar especificado nas atividades, cabe adiantar que ao elaborá-las, teve-se como hipótese que alguns conhecimentos errôneos poderiam ser mobilizados pelos alunos. Esse fato foi confirmado com os estudos pilotos, permitindo indicar 3 teoremas em ação nas respostas dos alunos:

- ✓ *Se* $p \in R_+$ *não é quadrado perfeito então não existe* $x \in R$ *tal que* $x^2 = p$.
- ✓ *Se* $b \in R_+$ *não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$.
- ✓ *Se* $n \in N$ *não é quadrado perfeito, então não é possível representar* $\sqrt{n}$ *na reta numérica.*

Desse modo, a sequência de atividades teve como objetivo identificar os conhecimentos mobilizados pelos alunos e, ao mesmo tempo, contribuir para desestabilizar alguns conhecimentos errôneos, relacionados aos números irracionais, possíveis de serem indicados nas respostas dos alunos no decorrer das entrevistas.

4.1.6 Os pressupostos estabelecidos para as análises

As respostas individuais dos alunos de cada nível de ensino brasileiro e francês foram analisadas com base nas observações da conduta dos alunos no decorrer das entrevistas clínicas ao resolver as atividades propostas, levando em consideração os sucessos, hesitações, fracassos, com atenção especial aos possíveis teoremas em ação, verdadeiros e falsos, mobilizados pelos alunos durante as entrevistas.

Contudo, para comparar o desempenho dos alunos que finalizam Ensino Fundamental, Médio e Superior de Matemática e respectivos níveis do sistema de ensino francês, foram levadas em consideração:

- ✓ A predominância de teoremas em ação falsos ou verdadeiros indicados nas respostas dos alunos.
- ✓ A possibilidade e agilidade em desestabilizar teoremas em ação falsos no decorrer das entrevistas.

- ✓ O uso consciente da decimalização proporcionada pela calculadora na resolução das atividades com números irracionais.

4.1.7 Síntese da metodologia

A Figura 14 representa uma síntese da metodologia desta pesquisa, considerando os estudos preliminares para o delineamento da investigação, tal como o estudo histórico, epistemológico, de pesquisas relacionadas ao ensino dos números irracionais, de documentos oficiais do sistema de ensino e da Teoria dos Campos Conceituais; os três momentos de coletas de informações e análises da pesquisa que permitiram responder as questões centrais da pesquisa.

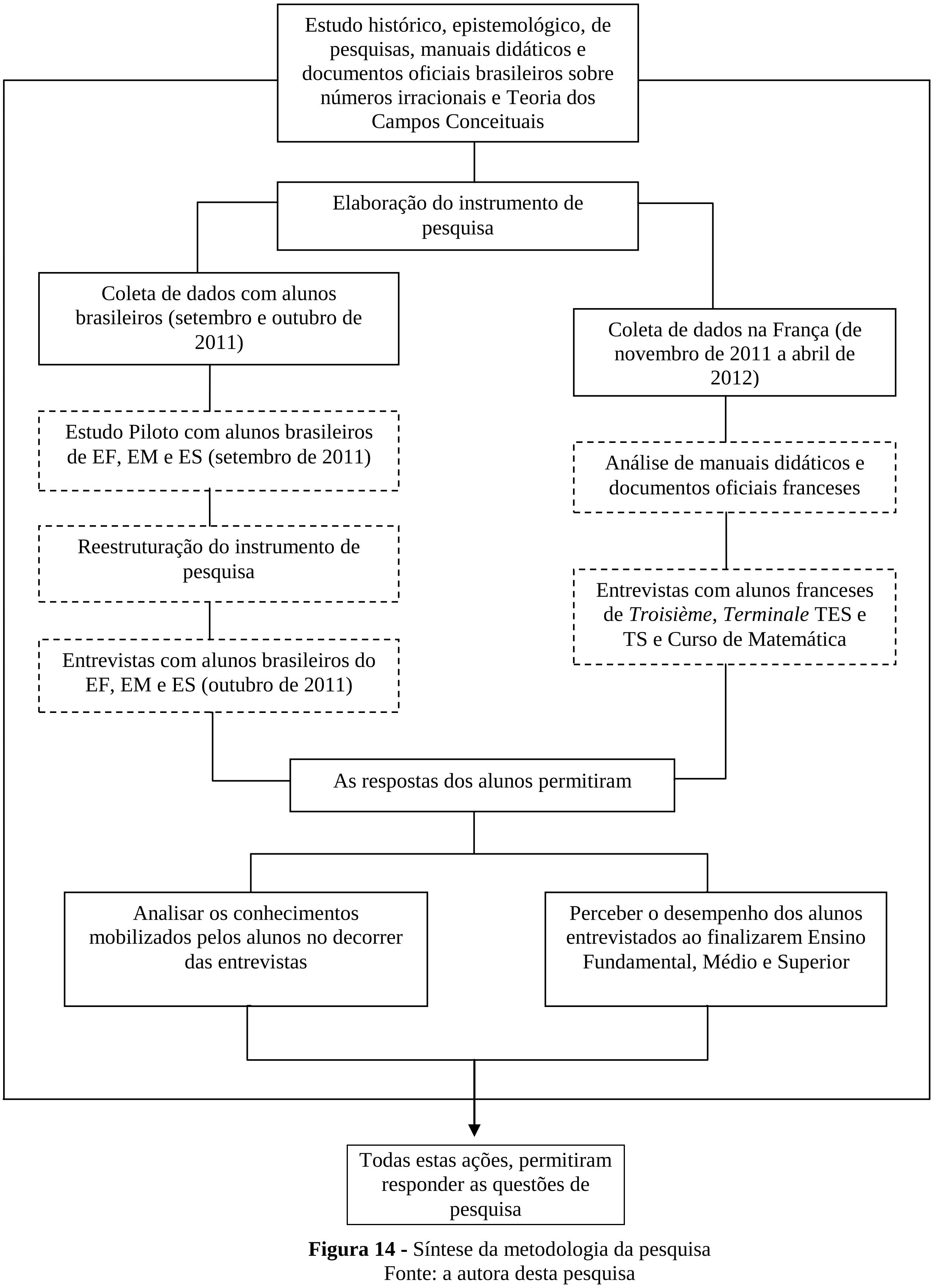


Figura 14 - Síntese da metodologia da pesquisa
Fonte: a autora desta pesquisa

6 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISES DOS RESULTADOS

A presente seção consiste na apresentação das atividades e análises das entrevistas realizadas com os alunos brasileiros e franceses, colaboradores desta pesquisa. Conforme a Figura 13 do capítulo precedente, o instrumento de pesquisa contou com 9 atividades elaboradas no nível do 9º ano do Ensino Fundamental, que foram aplicadas a todos os sujeitos da pesquisa. No entanto, foi acrescentada uma questão sobre a demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$ aos alunos brasileiros do Ensino Médio e Superior de Matemática, e aos alunos franceses do *Lycée* e *Ensino Superior*. Ademais, questões sobre as teorias que sustentam a construção dos números irracionais e reais também foram propostas aos alunos do Ensino Superior. Cada uma das atividades que compuseram o instrumento de pesquisa é apresentada nesta seção, seguida de seus respectivos objetivos e análises.

Para cada atividade, as análises foram realizadas, primeiramente, considerando as respostas dos alunos brasileiros, com o objetivo de apresentar os desempenhos conceituais desses alunos conforme avançam e finalizam os níveis de escolarização: Ensino Fundamental, Ensino Médio, Curso de Matemática. Destacando, quando possível, categorias e indicativos de teoremas em ação implícitos em suas respostas. Em seguida, e do mesmo modo, foram realizadas as análises referentes às respostas dos alunos franceses, que indicaram categorias e teoremas em ação semelhantes aos percebidos nas respostas dos alunos brasileiros. Desse modo, ao finalizar as análises parciais de cada atividade, apresentam-se as principais semelhanças e diferenças entre o desempenho dos alunos brasileiros e franceses conforme avançam e finalizam os níveis de escolarização, e o desempenho desses alunos em cada nível escolar semelhante.

No decorrer das análises, fragmentos das entrevistas dos alunos são destacados para justificar as afirmações realizadas. Destarte, para cada atividade foram elaborados 2 quadros, disponíveis nos anexos: um quadro contendo o resumo das análises e fragmentos das entrevistas com alunos brasileiros, e um quadro contendo o resumo das análises e fragmentos das entrevistas com alunos franceses.

6.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

6.1.1 Atividade 1[46]

A primeira atividade teve como objetivo conhecer as percepções dos alunos sobre o conceito de números irracionais no que concerne às ideias base I, II, III e IV de números irracionais[47], já especificadas na seção 5. Ainda, para os alunos do Ensino Superior, foram acrescentadas questões relacionadas à ideia base IX[48]. Para isto, foram escolhidos dez números – decimais, racionais, irracionais e complexos, que foram representados em cartões e exibidos aos sujeitos da pesquisa.

As entrevistas se iniciavam com a pesquisadora questionando se os alunos pensavam que números como o número 1 e o número 2 existiam, e se eles poderiam apresentar justificativas de para quê servem tais números. Estes números foram escolhidos para iniciar a atividade porque são números com os quais os alunos estão familiarizados e, segundo Vergnaud (1990), é importante que os alunos se apropriem da situação para que possam melhor desenvolvê-la. Em seguida, cartões com os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $3{,}14$, $0{,}333\ldots$, $0{,}10100100010000\ldots$, $\frac{2}{3}$, -4, $\sqrt{-4}$, 0 eram disponibilizados aos alunos, e a mesma questão sobre a existência ou não desses números, e qual sua utilidade, era proposta aos alunos[49]. Alguns critérios foram levados em consideração para a escolha dos números contemplados na atividade 1:

- O número $\sqrt{3}$ foi escolhido por se tratar de um número irracional algébrico, ou seja, por se tratar da raiz quadrada de um número positivo que não é quadrado perfeito. Preferiu-se o número irracional $\sqrt{3}$ ao invés do número $\sqrt{2}$ pelo

---

[46] No início de cada entrevista, foram disponibilizados aos alunos calculadora científica, régua, compasso, lápis, caneta, borracha e folhas para rascunho.

[47] Ideias base: I) Compreender sobre as infinitas casas decimais de alguns números. II) Compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem. III) Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas. IV) Considerar a existência de números irracionais e perceber pra quê esses números servem.

[48] Ideia base IX) conhecer definições, propriedades e exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

[49] Na presente atividade não foi questionado diretamente aos alunos se eles consideram estes símbolos como números. Apenas foi questionado se eles consideram ou não a existência dos símbolos representados nos cartões, bem como qual a utilidade desses números.

fato de $\sqrt{2}$ ser um número utilizado com certa frequência (pelo menos com mais frequência que $\sqrt{3}$) para exemplificar números irracionais nos livros didáticos e em aulas de matemática. E, desse modo, os alunos poderiam classificar $\sqrt{2}$ como número irracional por uma questão de hábito, mesmo sem conhecer as características de um número irracional.

- O número 3 representado na forma $\sqrt{9}$ foi escolhido pelo fato de 9 ser um número inteiro positivo quadrado perfeito. Optou-se por essa representação por meio do símbolo $\sqrt{\ }$ com o objetivo de perceber se a *apreensão perceptiva* dos alunos os levaria a classificar $\sqrt{9}$ como irracional devido à presença da raiz quadrada. Duval (1994) fala de *apreensão perceptiva*[50] para aquilo que se vê espontaneamente. Porém, após as análises, percebeu-se que o número 9 pode não ter sido uma boa escolha, por ser um número utilizado com certa frequência, e é espontâneo por parte dos alunos considerarem $\sqrt{9} = 3$. Talvez uma escolha como $\sqrt{49}$ ou $\sqrt{121}$ tivesse sido mais eficiente para os resultados da pesquisa.
- O número π foi eleito para compor o rol dos números investigados por ser um exemplo protótipo[51] de número irracional nas aulas de matemática.
- Escolheu-se o número decimal $3{,}14$ por ser um número tipicamente utilizado como aproximação do número π. E, devido a esse fato, desejou-se investigar se os alunos o identificariam com o número π, classificando-o como irracional.
- O número racional $0{,}333\ldots$ foi inserido no conjunto de números propostos aos alunos por ser um número racional com infinitas casas decimais. Interessou-se investigar se a *apreensão perceptiva* dos alunos relacionada a um racional com infinitas casas decimais leva-os a classificar este número como irracional.

[50] Segundo Duval (1994), existem várias maneiras de compreender uma figura geométrica, e, segundo o pesquisador, a mais imediata é a apreensão perceptiva (*l'apprèhension perceptive*), que consiste em identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou um objeto. Assim, como Larguier (2012), na presente pesquisa, fala-se de apreensão perceptiva no sentido de Duval (1994), porém para a escrita numérica.

[51] Larguier (2012) refere-se aos números $\sqrt{2}$ e π como institucionalizados como exemplos protótipos de números irracionais nas aulas de Matemática.

- Optou-se pelo número $0{,}10100100010000\ldots$ porque se refere a um número irracional representado na forma decimal composta apenas de 2 algarismos – zero e um. Almejou-se analisar se os alunos percebiam que se tratava de um número não periódico e, por isso, o classificavam como irracional, ou se eles o deixavam na mesma classe que o número $0{,}333\ldots$.
- O número $\frac{2}{3}$ foi escolhido por ser um número racional representado na forma de fração. O objetivo de inserir um número com representação fracionária foi investigar se, para os sujeitos da entrevista, uma fração pode ser identificada com um número irracional.
- O número -4 foi escolhido por ser um número inteiro negativo. Ele foi inserido com vistas a investigar se, para os sujeitos investigados, a palavra número irracional tem alguma relação com números negativos.
- Elegeu-se o número $\sqrt{-4}$ por ser a raiz quadrada de um número negativo e, também, pelo fato do número 4 ser um quadrado perfeito. Ao escolhê-lo, teve-se como hipótese que alguns alunos, sobretudo os alunos do Ensino Fundamental, poderia não conhecer a natureza deste número e não saberiam afirmar sobre a existência dele. Assim, nesse caso, teve-se como objetivo analisar se os alunos classificariam como irracional os números que não conhecem sua natureza ou não sabem se existem; ou, ainda, se o fato de o número $\sqrt{-4}$ estar relacionado com um número negativo poderia levá-los a classificá-lo como irracional.
- A escolha pelo número 0 deu-se pelo fato de este número ser historicamente difícil de ser aceito como número. Neste sentido, buscou-se investigar se o fato de os alunos não considerarem a existência de um número poderia levá-los a classificar o número como irracional.

Para a atividade 1, foi elaborado um roteiro contendo quatorze questões divididas em dois blocos: Bloco I e Bloco II, especificadas a seguir. O Bloco I foi constituído de dez questões dirigidas a todos os sujeitos colaboradores da pesquisa, que dizem respeito a investigar sobre os conhecimentos dos alunos relacionados às ideias base I, II, III e IV explicitadas na seção precedente. Já o Bloco II foi composto por 4 questões destinadas apenas aos alunos do Ensino Superior, por tratar de temas não abordados nos demais níveis de ensino, que referem-se às ideias base IX.

Atividade 1

Questões do bloco I

1) Você acha que o número 1 e o número 2 existem? Você poderia justificar para quê servem estes números?
2) E quanto aos números representados nos cartões, você acha que eles existem?
3) Você falou que os números 1 e 2 servem para.... E esses números representados nestes cartões, pra que você diria que eles servem?
4) Você se lembra dos conjuntos numéricos? Você poderia classificar os números representados nos cartões em racional, irracional ou nem racional nem irracional?
5) Imagine a quantidade de grãos de arroz que você já comeu na sua vida. Você acha que se trata de uma quantidade finita ou infinita? Por que você acha isto?
6) E sobre a quantidade de grãos de arroz que você ainda vai comer na sua vida. Você acha que será uma quantidade finita ou infinita? Por quê?
7) Você poderia me dizer o que significa os três pontinhos "..." que aparecem em determinados números, tais como nos números $0,333\ldots$ e $0,101001000\ldots$.
8) Você acha que existem mais casas decimais (mais quantidades de números 3) no número $0,333\ldots$ ou mais grãos de arroz que você ainda vai comer na sua vida? Por quê?

Questões do bloco II

9) Você saberia dizer se existem mais números racionais ou mais números irracionais. Por quê?
10) Você já estudou sobre conjuntos enumeráveis e não - enumeráveis?
11) Você sabe me dizer se o conjunto dos números racionais é enumerável ou não enumerável? Por quê?
12) E o conjunto dos números irracionais, você acha que ele é enumerável ou não enumerável? Por quê?

As análises da atividade 1 são apresentadas de acordo com as ideias base do conceito de número irracional, especificadas na seção 5. Para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, os alunos foram identificados por uma sigla correspondente a uma letra inicial de seu respectivo nível de ensino e um número que varia de 1 a 7, conforme a legenda a seguir:

Quadro 11 - Siglas dos sujeitos colaboradores da pesquisa

Níveis do Sistema de Ensino Brasileiro	**Sigla**
Ensino Fundamental	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7
Ensino Médio	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7
Graduação em Matemática	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7
Níveis do Sistema de Ensino Francês	**Sigla**
Collège	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7
Terminale Economique et Social - TES	ES1, ES2, ES3, ES4
Terminale Scientifique - TS	S1, S2, S3, S4, S5
Licence en Mathématiques	L1, L2, L3, L4, L5

Fonte: a autora desta pesquisa

Ideia base IV: Considerar a existência de números irracionais e perceber para quê esses números servem

De acordo com as análises, com exceção do aluno francês L1, que alegou que o número $0{,}101001000...$ é irracional e que, por este motivo, *este número não existe verdadeiramente* – diz L1, os demais alunos do Ensino Superior foram unânimes em considerar a existência de todos os números representados nos cartões.

Dentre os alunos brasileiros do Ensino Médio, o único número que foi considerado não existente por 5 alunos foi o número $\sqrt{-4}$. Já dentre os alunos do *Lycée*, além de $\sqrt{-4}$, também apareceram na lista dos não existentes os números 0; -4; $0{,}101001000...$ e $0{,}333...$. Estes dois últimos números foram considerados não existentes por 2 alunos do *Lycée*, porque, segundo os alunos, se tratam de números com infinitas casas decimais.

No que se refere aos alunos brasileiros do Ensino Fundamental[52] e alunos franceses do *Collège*, além de não considerarem a existência de $\sqrt{-4}$, destacam-se as dúvidas sobre a existência de $0{,}101001000...$ Como exemplo, cita-se o aluno F3, que disse nunca ter visto o número $0{,}101001000\ldots$ e, por isto, não sabia dizer se este número existe ou não. O número $\sqrt{3}$ também causou dúvida entre os alunos, talvez pelo fato de não

[52] Devido à variação nas respostas dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège* em relação à existência e a não existência dos números, foi elaborado o quadro 13, disponibilizado nos anexos, que consiste na classificação dos alunos em números que existem e números que não existem.

existir um número inteiro que seja igual a $\sqrt{3}$, como pode ser indicado na fala de F7: *Não existe né... porque não existe raiz de três.* Acredita-se que a dúvida de alguns alunos também estava relacionada à conversão $\sqrt{3}$ para $1{,}732050...$, concluindo pela não existência de números em sua representação decimal infinita.

Em relação ao número π, apenas o aluno F7 disse não conhecer o símbolo que representa esse número, e alegou nunca ter ouvido falar do número π. Considera-se este fato preocupante, vindo de um aluno que finaliza o 9º ano do Ensino Fundamental, uma vez que, segundo os PCN (BRASIL, 1998), nesta etapa do ensino, os alunos devem ter estudado sobre os conjuntos numéricos, e devem ter conhecimentos sobre fórmulas de área e comprimento de circunferência, por exemplo, que estão diretamente relacionados com o número π.

Ao serem questionados sobre *para quê servem os números representados nos cartões*, a maioria dos alunos ofereceu argumentos apenas para os números racionais: $3{,}14$, $\frac{2}{3}$, $0{,}333...$, que foram justificados para fazer contas, para repartir, alguma coisa repartida (no caso de $0{,}333...$), para medir, resultado de cálculos matemáticos. O número $\sqrt{9}$ foi associado pelos alunos com o número 3, com exceção de S4, que o classificou como irracional devido ao símbolo $\sqrt{\ }$. O número -4 foi associado com situações do cotidiano, tais como saldo negativo, temperatura negativa e para fazer contas. O número zero foi identificado, inclusive pelos alunos do Ensino Superior, para representar o nada, ou, como justificou o aluno F2, *[...] para representar a quitação de uma dívida*. Mostrando, portanto, a influência do modo como esses números são abordados nas aulas de Matemática.

O número π: quanto a dizer para quê serve o número π, dentre os alunos do Ensino Fundamental e do *Collège*, apenas o aluno brasileiro F4 disse que o número π está relacionado com fórmulas de circunferência. Os demais alunos não souberam justificar a existência desse número. Cabe lembrar que, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998) e com os *Programmes* (FRANCE, 2008), os alunos que finalizam este nível de ensino devem conhecer sobre fórmulas de medidas de área e comprimento de circunferência, cálculos de medidas de área e volumes de cilindros, diretamente relacionadas com o número π. Já todos os alunos do Ensino Médio e 5 alunos do *Lycée* dentre os 9 entrevistados, sendo 1 aluno de TES e 4 alunos de TS, relacionaram o número π com medidas de áreas de circunferências e esferas. Quanto aos alunos do Ensino Superior, eles também relacionaram, por unanimidade, aplicações do número π com cálculos de medida de área e perímetro de circunferência, e áreas e volumes de esfera.

O número $\sqrt{3}$: nenhum aluno do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, do *Collège* e de TES soube dizer para quê serve o número irracional algébrico $\sqrt{3}$. Dentre os alunos da Educação Básica entrevistados, apenas 2 alunos franceses de TS exemplificaram que $\sqrt{3}$ pode representar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Nota-se que, apesar de alguns argumentos corretos ao relacionaram $\sqrt{3}$ com medidas de segmentos, até mesmo os alunos brasileiros do Ensino Superior apresentaram dificuldades para justificar para quê servem números irracionais algébricos tais como $\sqrt{3}$. Embora esses alunos reconheçam que estes números representam medidas de certos segmentos, nota-se incompreensões dos números irracionais, conforme explicitado pelo aluno G5: *Esses números, eu acho que foram criados para dar resposta a uma medida que não é exata... eu sei que os irracionais existem lá na reta numérica porque nem tudo é inteiro e tal, mas eu não consigo ver utilidade deles... eu sei que eles completam a reta, mas não consigo ver pra que servem os irracionais!*

Quanto aos alunos franceses do Ensino Superior, dentre os cinco entrevistados, 4 disseram que $\sqrt{3}$ pode representar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, a diagonal de um quadrado, ou, no caso de L3, valores de seno, cosseno, resultados do teorema de Pitágoras, medida na reta real. O aluno L5 disse, corretamente, que $\sqrt{3}$ serve para fazer cálculos, sem especificar quais tipos de cálculos. Porém, provavelmente esse aluno também esteja se referindo a cálculos relacionados a teorema de Pitágoras ou valores trigonométricos.

O número $0{,}101001000...$: nenhum aluno do Ensino Fundamental, Ensino Médio, *Collège*, *Lycée*, e Ensino Superior brasileiro, justificou a existência de números como $0{,}1010010001000...$. Provavelmente, por existência de um número, os alunos imaginavam algo visível ou possível de apresentar uma aplicação. Apenas dois alunos franceses do Ensino Superior, L4 e L2, disseram que, como se trata de um número real, então existe uma medida que representa este número.

A diferença entre as respostas dos alunos dos diferentes níveis é que todos os alunos do Ensino Superior brasileiro e francês consideraram a existência do número $0{,}101001000...$. Porém, nem mesmo os alunos deste nível de ensino souberam apresentar uma justificativa para a existência de números irracionais transcendentes, tais como $0{,}101001000...$. O aluno G3 chegou a afirmar que não tinha nada em mente para este número, e alguns alunos, como G6, disseram, incorretamente, que é possível que exista uma fração que represente este número, ou seja, o consideraram racional. De acordo com o aluno G5, $0{,}101001000...$ *é um numero muito pequeno, geralmente utilizado em construções [...] eu não me lembro se é periódica ou não, porque ela vai mudando né? Periódica mas aumenta um zero... ela é periódica sim!* Provavelmente o fato de o número irracional $0{,}101001000...$ conter apenas zeros e uns, escolhidos propositalmente, levou os alunos a acreditarem na existência de uma fração que represente este número, deixando claro a sua não compreensão.

Essa dificuldade dos licenciandos em Matemática em exprimir para quê servem números irracionais também foi percebida na pesquisa de Soares, Ferreira e Moreira (1999). Dos 84 alunos investigados por estes pesquisadores, apenas 15 alunos (18%) responderam de modo coerente à pergunta *O que te leva a acreditar na existência dos números irracionais*, justificando que os irracionais servem para expressar medidas de diagonais de triângulos retângulos, e que sem os irracionais a reta seria cheia de buracos. Segundo os mencionados pesquisadores, estas dificuldades dos licenciandos apontam para a necessidade dos cursos de Licenciatura em Matemática se adequarem a uma abordagem dos números irracionais voltada para o ponto de vista didático e pedagógico, favorecendo práticas pedagógicas relacionadas a este conceito dos futuros professores.

Ideia base I: Compreender sobre a questão das infinitas casas decimais de certos números

Levando em consideração que a ideia de infinito é essencial para a compreensão do conceito de número irracional, foram elaboradas as questões 5, 6, 7 e 8 com a intenção de investigar quais as percepções dos alunos em relação às infinitas casas decimais dos números irracionais. Para isto, optou-se por iniciar este momento da investigação com as questões 5 e 6, para perceber, primeiramente, se os alunos distinguem uma quantidade finita que a princípio não pode ser determinada, tal como a quantidade de grãos de arroz que uma pessoa poderá comer em sua vida, de uma quantidade infinita. Esta situação foi inserida porque se entende que, se o aluno não reconhece ao menos esta diferença entre quantidades finitas e infinitas, ele não poderá compreender a ideia de infinitas casas decimais de um número irracional.

Assim, as análises das questões 5 e 6, que dizem respeito às quantidades de grãos de arroz que os alunos já comeram e que ainda poderão comer em suas vidas, mostram que, provavelmente devido à concepção que os alunos têm da ideia de infinito, a questão das infinitas casas decimais não parece ser bem compreendida por alguns sujeitos da pesquisa, e é motivo de dúvidas e equívocos até mesmo para alunos do Ensino Superior. Respostas errôneas relacionadas a dizer que a quantidade de *grãos de arroz que eles já comeram* é infinita foram identificadas em 1 aluno do Ensino Fundamental e 8 alunos franceses, sendo 3 alunos do *Collège*, 1 aluno de TS, 3 alunos de TES e 1 aluna da *Licence*. Suas justificativas dizem respeito a se tratar de um número indefinido de grãos de arroz, difícil ou impossível de se contar: *Infinito, porque os grãos de arroz são muito pequenos... nós comemos muito, não podemos calcular a quantidade* (ES2).

Relativamente à quantidade de *grãos de arroz que eles ainda irão* comer em suas vidas, as concepções equivocadas dizendo que se trata de uma quantidade infinita, são percebidas com maior frequência: 4 alunos brasileiros do Ensino Fundamental e 10 alunos franceses: 3 do *Collège*, 3 de TES, 2 de TS e 2 da *Licence*. Suas justificativas também se referem a um número muito grande ou a uma quantidade que não é possível determinar, conforme apontado pela aluna S4 de TS: *Porque nós não podemos dizer um número preciso de grãos de arroz*.

É preciso destacar, ainda, as dificuldades relacionadas à ideia de infinito presente nos alunos do Ensino Superior, como no caso da aluna francesa L3 da *Licence en Mathématiques*, que faz associação da quantidade de grãos de arroz com o conjunto dos números naturais, justificando que se trata de uma quantidade enumerável infinita: *Até o presente... é enumerável, nós podemos contar... pode ser como os grãos de areia... isto me parece infinito. Eu penso que infinito, mas enumerável, como no conjunto dos naturais N [...] E os grãos de arroz que eu poderei comer, é a mesma lógica, infinito, de fato* (L3). E mesmo alguns alunos do Ensino Superior que concluíram corretamente sobre a questão dos finitos grãos de arroz demonstraram dúvidas em suas respostas, como, por exemplo, a aluna brasileira G6 do Ensino Superior, que, apesar de ter concluído que se trata de uma quantidade finita, demonstrou dúvidas no decorrer de suas argumentações: *Que difícil isto!* (Silêncio) *Eu posso contar? Depende, não sei, não sei dizer... Se eu posso contar então é finita. Eu preciso dar certeza? [...] Que dúvida! Acho que finita*.

Ao serem questionados sobre a existência de mais grãos de arroz que os alunos ainda irão comer em suas vidas ou mais dígitos 3 no número $0{,}333\ldots$, alguns alunos que haviam dito que a quantidade de arroz que eles ainda vão comer se trata de uma quantidade infinita, reconheceram que existem mais dígitos 3 no número 0,333... do que grãos de arroz que eles irão comer em suas vidas. No entanto, 3 alunos do Ensino Fundamental, 2 alunos do *Collège*, 2 de TS e 1 de *Licence en Mathématiques* disseram que acreditam existir mais grãos de arroz do que dígitos 3 no número $0{,}333...$, ou que a quantidade de grãos de arroz que eles irão comer e a quantidade de dígitos 3 no número $0{,}333...$ é a mesma: *Existem infinitos dígitos 3... se eu considero que a quantidade de grãos de arroz é infinita, eu não posso comparar as duas quantidades. Então, não existe mais um do que o outro, os dois são infinitos* (L5).

Nota-se que, provavelmente devido à concepção que os alunos têm da ideia de infinito, eles não distinguiram entre um número finito muito grande, que a princípio não se pode determinar, e uma quantidade infinita. Esse fato pode levá-los a conceber um número com uma grande quantidade de casas decimais como sendo um número com infinitas casas decimais.

As dificuldades dos alunos em relação à ideia de infinito podem ser justificadas pelo fato de o infinito matemático se constituir como um obstáculo epistemológico, no sentido de Brousseau (1998, p. 120):

> Os obstáculos epistemológicos são facilmente identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para se superar na história. A compreensão desses obstáculos precisa de investigação em epistemologia e história da matemática. Em verdade, as grandes questões de matemática que foram fonte de progressos consideráveis, são todas obstáculos epistemológicos pelos alunos.

Nesse sentido, segundo D'Amore (2005), a ideia de infinito consiste de um obstáculo epistemológico, pois basta analisarmos as lutas, as discussões, as rupturas determinadas por sua aceitação desde os paradoxos de Zenão (Sec. IV – V a. C.) até sua aceitação decorrente das obras de Cantor (Sec. XIX e XX).

Ideia base III: Diferenciar um número irracional de um número racional

Considerando que haveria possibilidade de alguns alunos não saberem classificar[53] os números em racionais e irracionais, sobretudo os alunos franceses do *Collège*, pelo fato desses números não fazerem parte explicitamente dos *Programmes* do referido nível de ensino, a pesquisadora, primeiramente, questionava-os se eles já ouviram falar desses números.

Todos os alunos brasileiros, entrevistados nesta pesquisa, responderam que já estudaram ou pelo menos já ouviram falar sobre estes números. Todavia, alguns eram espontâneos em dizer que não sabiam explicar a diferença, e, até mesmo para esses alunos, a pesquisadora perguntava quais eram suas intuições sobre os números representados no que se refere a classificá-los em racionais, irracionais, ou nem um nem outro. Nos anexos, está disponibilizado o quadro 14 com as respectivas classificações dos números em racionais e irracionais pelos alunos brasileiros.

De acordo com as análises, nenhum aluno brasileiro do Ensino Fundamental e do Ensino Médio classificou corretamente em racionais e irracionais os números solicitados. Os erros mais frequentes para os alunos do Ensino Fundamental foram: 5 alunos classificaram $3{,}14$ como irracional, possivelmente por ser uma aproximação do número π, que eles igualmente classificaram como irracional, sendo que alguns alunos chegavam a falar que 3,14 é igual aos número π; 5 alunos classificaram $\frac{2}{3}$ como irracional; e 5 alunos classificaram $\sqrt{-4}$ também como irracional. Já os erros mais frequentes dentre os alunos do Ensino Médio foram: 4 alunos classificaram $0{,}333\ldots$ como irracional; 4 alunos classificaram π como racional, assim como classificaram $3{,}14$; e 3 alunos classificaram $\sqrt{3}$ como racional.

Quanto aos 7 alunos brasileiros do Ensino Superior, apenas 3 classificaram corretamente os números solicitados. O erro mais frequente em suas respostas foi em relação ao número $0{,}101001000\ldots$, pois 2 alunos o classificaram como racional, e 2 alunos ficaram na dúvida e não o classificaram. Ainda cabe ressaltar que 1 aluno ficou na dúvida se o número $0{,}333\ldots$ seria racional ou irracional, e por isto não o classificou em nenhum dos conjuntos numéricos.

No que diz respeito aos alunos franceses, os alunos do *Collège* disseram não saber sobre os números irracionais. Porém, mesmo diante desse fato, já esperado pela

[53] Este foi o primeiro momento da entrevista em que foram explicitadas as expressões números racionais e irracionais.

pesquisadora - pois, conforme mencionado, os números irracionais não fazem parte oficialmente dos *Programmes* do *Collège* -, os alunos eram questionados se, observando os números representados nos cartões, eles teriam alguma intuição sobre quais números poderiam ser irracionais, racionais, ou se alguns dos números poderiam ser classificados nem como irracionais nem como racionais. Diante desse questionamento, 3 alunos do *Collège* classificaram os números de acordo com suas percepções. Os demais não os classificaram, e justificaram dizendo que nunca ouviram falar desses números. Nota-se que, se os alunos não sabem classificar os números em racionais e irracionais, não significa apenas que eles não estudaram sobre os números irracionais, mas, sobretudo, que eles não conhecem sobre os números racionais, pois, caso contrário, eles teriam observado quais seriam números racionais, e os demais números eles poderiam ter classificado, por exclusão, como irracionais. O quadro 15, em anexo, consiste na classificação dos números representados nos cartões em números racionais e irracionais pelos alunos franceses.

Dentre os 3 alunos do *Collège* que classificaram os números, os erros mais frequentes foram: classificar π e $3{,}14$ como racional, pois consideram $\pi = 3{,}14$; classificar $0{,}333\ldots$ como irracional; e classificar $\frac{2}{3}$ como irracional.

Quanto aos alunos dos *Lycées*, apesar de não terem classificado corretamente os números em racionais e irracionais, eles tentavam classificá-los, seja porque tinham ao menos ouvido falar sobre esses números ou apenas por intuição. Porém, vale lembrar que nenhum desses alunos disse nunca ter ouvido falar desses números, assim como disseram os alunos do *Collège*. Destacam-se os erros mais frequentes dos alunos dos *Lycées*: classificar $0{,}333\ldots$ como irracional (4 alunos); classificar $0{,}101001000\ldots$ como racional (4 alunos); classificar π, assim como $3{,}14$, como racional (3 alunos).

Referente aos alunos do Ensino Superior francês, apenas o aluno L4 classificou os números corretamente. Os erros mais frequentes foram: 2 alunos classificaram $\sqrt{-4}$ como irracional e 1 aluno classificou $0{,}333\ldots$ como irracional.

Assim, de acordo com os erros cometidos pelos alunos ao classificar os números solicitados em racionais e irracionais, nota-se que os alunos entrevistados brasileiros e franceses não atribuem significação correta aos significantes representados nos cartões. Este fato indica que provavelmente esses alunos não reconhecem as caracterizações de números racionais e irracionais relacionados à possibilidade ou não de se representar um número como a razão entre dois inteiros, assim como a questão da periodicidade ou não de um número.

Algumas semelhanças identificadas nas respostas dos alunos

A análise das respostas possibilitou perceber algumas semelhanças entre a significação que os alunos atribuem aos signos representados nos cartões e indicativos de teoremas em ação, associados às expressões números racionais e números irracionais, permitindo classificar[54] suas respostas em:

Categoria 1.I: Irracionalidade associada a não existência de números.

Categoria 1.II: Irracionalidade associada aos números que não são inteiros.

Categoria 1.III: Irracionalidade associada à representação decimal infinita.

Categoria 1.IV: Números irracionais associados a números negativos.

Categoria 1.V: Números irracionais não podem ser escritos como a razão entre dois números inteiros.

Categoria 1.VI: Falta de percepção sobre a não periodicidade de certos números.

A seguir, apresentam-se as análises dessas classificações associadas a teoremas em ação implícitos nas respostas dos alunos.

Irracionalidade associada a não existência dos números

Esta classe de respostas foi percebida, sobretudo, em relação ao número $\sqrt{-4}$, pois 5 alunos do Ensino Fundamental, 3 alunos do Ensino Médio e 1 aluno de TS disseram não existir ou apresentaram dúvidas sobre a existência de $\sqrt{-4}$, e esses alunos foram unânimes em classificá-lo como irracional. Outro exemplo referente a esta classe de respostas é a classificação do aluno F7, que, no início da entrevista, disse que os números $3{,}14$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$, $0{,}333...$, 0 não existiam, e estes mesmos números foram classificados por ele como números irracionais. Com a intenção de confirmar se o aluno estava realmente associando números que não existem à irracionalidade, a pesquisadora escreveu o número $0{,}12547896351198321...$, explicou que se tratava de um número com infinitas casas decimais não periódicas e questionou sobre a existência deste

[54] Cabe ressaltar que estas classificações não são excludentes, ou seja, as respostas dos alunos podem fazer-se presentes em mais de uma dessas classes especificadas acima.

número: F7 respondeu que o referido número não existe, e que o classificaria como irracional, justificando: *Eu acho que... é porque ele não tem fim, então... eu acho que ele é irracional.* Identificar a não existência dos números com irracionalidade, também foi constatada nas respostas de sujeitos do Ensino Superior que participaram da pesquisa da Melo (1999), na qual um aluno respondeu: *Racional existe, irracional não existe*.

Irracionalidade associada aos números que não são inteiros

Foi percebido que 3 alunos do Ensino Fundamental, 1 aluno do *Collège* e 1 aluno de TS associaram números que não são inteiros, seja o número na representação fracionária, decimal ou na forma de radical, aos números irracionais. Este fato é notado na resposta do aluno F2, ao ser questionado sobre quais os critérios utilizados para a classificação dos números $\sqrt{9}$, -4, 0 em racionais, e $\frac{2}{3}$, $3{,}14$, $\sqrt{3}$, $0{,}333...$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$ em irracionais: *Porque os números* $\sqrt{9}$, -4, 0 *não são quebrados, e os números* $\frac{2}{3}$, $3{,}14$, $\sqrt{3}$, $0{,}333...$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$ *são quebrados.*

Fichbein, Jehian e Cohen (1995) também identificaram esta categoria de resposta, que diz respeito a identificar um número irracional com um número que não é inteiro, em 28% dos alunos investigados que cursavam *9th Grade*[55]. Desse modo, os resultados da presente pesquisa, juntamente com os resultados de Fichbein, Jehian e Cohen (1995), sugerem a possibilidade de um falso teorema em ação nas respostas desses alunos TAF1 [56]: *Se x não é um número inteiro, então x é irracional.*

Irracionalidade associada a números negativos

Dentre os alunos entrevistados, 2 do Ensino Fundamental, 3 do Ensino Médio, 1 aluno de TES e 1 aluno de TS, ou classificaram o número -4 como número irracional ou ficaram na dúvida e preferiram não classificá-lo nem como racional nem irracional. Este fato também foi percebido nas pesquisas de Fichbein, Jehian e Cohen (1995) e de Igliori e

---

[55] Nível escolar do sistema de ensino americano cuja idade média dos alunos é de 14 anos, semelhante ao 9º ano do Ensino Fundamental brasileiro.

[56] Indicam-se, nesta pesquisa, os teoremas em ação falsos por TAF. Os números que aparecem seguidos da sigla, por exemplo, TAF1, TAF2, TAF3, e assim por diante, são para diferenciar os diferentes teoremas em ação falsos mobilizados nas respostas dos alunos.

Silva (1999). Nesta última pesquisa, por exemplo, um dos argumentos dos alunos para classificar números em racionais e irracionais foi: *Racionais: números positivos, irracionais: números negativos* (p. 54), indicando, desse modo, a possibilidade de um teorema em ação falso implícito nas respostas dos alunos TAF2: *Se x é um número negativo, então x é irracional.*

Irracionalidade associada à representação decimal infinita

Nove alunos entrevistados, sendo 1 do Ensino Fundamental, 4 do Ensino Médio, 2 do *Collège*, 1 de TES e 1 de TS, relacionaram a questão da irracionalidade de um número às suas infinitas casas decimais, sem alusão ao período. Por exemplo, o aluno S1, de TS classificou como irracionais os números π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $0{,}101001000...$, $0{,}333...$, justificando esta classificação devido à vírgula presente nestes números, e uma *quantidade astronômica* de dígitos após a vírgula.

Cabe destacar que 13 alunos da Educação Básica, sendo 6 alunos do Ensino Fundamental; 2 alunos do Ensino Médio; 2 alunos do *Collège* dentre os 3 que responderam a esta questão; 1 aluno de TES; e 2 alunos de TS, classificaram $\frac{2}{3}$ como número irracional. Para alguns alunos, tal classificação decorre do fato de $\frac{2}{3}$ não se tratar de um número inteiro, porém, para outros alunos, assim como mencionado na resposta de S1, tal classificação diz respeito às infinitas casas decimais do número $\frac{2}{3}$.

Essa questão de associar números irracionais com representação decimal infinita sem alusão à periodicidade também foi detectada nas pesquisas de Soares, Ferreira e Moreira (1999), Melo (1999), Igliori e Silva (2001), e Fichbein, Jehian e Cohen (1995), sendo que, nesta última, 40% dos alunos do *9th Grade,* 38% do *10th Grade*[57] e 3 % dos licenciandos em Matemática definiram de modo errôneo um número irracional como sendo um número com infinitos dígitos. Esse fato também foi identificado na pesquisa de Robinet (1986, p. 15), percebido na fala de um dos sujeitos: *Um número real é um número que pode ter infinitos números depois da vírgula (positivo ou negativo).* Desse modo, pode-se indicar um possível teorema em ação falso implícito nas respostas desses alunos de TAF3: *Se um número x tem representação decimal infinita, então x é irracional.*

[57] Nível escolar do sistema de ensino americano semelhante ao 1º ano do Ensino Médio brasileiro.

Números irracionais não podem ser escritos como a razão entre dois números inteiros

As caracterizações de números irracionais mais frequentes nos livros didáticos são: a) um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros; b) um número irracional possui representação decimal infinita e não periódica. No entanto, as justificativas dos alunos brasileiros e franceses do Ensino Superior, e de 2 alunos franceses de TS, para classificar os números como irracionais, diz respeito à caracterização a.

Neste momento da entrevista, nenhum dos alunos destes níveis de ensino mencionou o fato de que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas. Possivelmente, decorrem desse fato dúvidas explicitadas pelos alunos brasileiros G1, G2, G6 e G7, e pelo aluno francês L5, sobre a natureza do número $0{,}101001000...$. Eles se questionavam sobre a existência de uma fração que pudesse representar o referido número: *Eu acho que é irracional, mas eu não sei, porque às vezes pode existir uma fração que resulte nesse número* (aluna G6). Se esses alunos fizessem referência à caracterização b de números irracionais, é provável que eles tivessem percebido que o número $0{,}101001000...$ trata-se de um irracional.

Resultado semelhante foi apontado por Ferreira, Soares e Moreira (1999). Dentre os 84 alunos de curso de Licenciatura em Matemática que responderam à questão: *Pra você, o que é um número irracional?* Apenas 29 responderam de modo coerente, sendo que 22 alunos responderam de acordo com a caracterização a, e apenas 7 alunos responderam de acordo com a caracterização b, indicando que a definição de números irracionais mais presente para os alunos é: *aquele número que não pode ser escrito como uma fração.*

Desse modo, no que tange às categorias de conhecimentos implícitos elaboradas por Vergnaud (1990), nota-se que, embora o teorema em ação verdadeiro TAV1: *Se um número x possui infinitas casas decimais não periódicas, então x é irracional* também caracteriza um número irracional, são os teoremas em ação verdadeiros TAV2: *Se um número x pode ser escrito na forma* $\frac{p}{q}$*, com* $p, q \in Z$ *e* $q \neq 0$*, então x é racional*; e TAV3: *Se um número p não é racional, então p é irracional,* que aparecem com mais frequência na presente pesquisa, implícitos nas respostas dos alunos do Ensino Superior e de TS. Esse fato pode levar a algumas dúvidas e equívocos, conforme mencionado acima nas respostas dos alunos G1, G2, G6, G7 e L5.

Falta de percepção sobre a não periodicidade de certos números

Pode-se afirmar que, dentre os alunos que classificaram os números em racionais e irracionais, com exceção de 1 aluno brasileiro do Ensino Médio (M4) e 1 aluno francês de TS (S3), os alunos do Ensino Fundamental e Médio, e respectivos níveis do sistema de ensino francês, não perceberam as diferenças concernentes à periodicidade ou não dos números $0{,}101001000...$ e $0{,}333...$, pois ou os alunos classificavam ambos os números como racionais, ou classificavam ambos os números como irracionais. Este fato também foi detectado na classificação do aluno francês L5 do Ensino Superior, assim como na pesquisa de Melo (1999), na qual mais de 30% dos alunos do Ensino Superior, desconhecem a irracionalidade do número $0{,}171771777...$.

Conforme comentado no início desta seção, duas questões relacionadas à primeira atividade foram direcionadas apenas para os alunos do Ensino Superior, e dizem respeito a teorias de sustentação do conjunto dos números irracionais.

Existem mais números racionais ou mais números irracionais?

Em relação a esta questão, as respostas dos alunos ficaram divididas em dizer que existem mais irracionais (4 alunos brasileiros e 4 alunos franceses); ou que existe a mesma quantidade de números irracionais e racionais (3 alunos brasileiros e 1 aluno francês), uma vez que se trata de quantidades infinitas e, segundo os alunos, não pode existir um infinito maior do que o outro. Alguns alunos, assim como G1, dizem já ter estudado ou já ouviram sobre o fato que existem mais irracionais do que racionais, porém esta questão de existir infinitos de ordens distintas nem sempre é compreendida pelos alunos, conforme explicitado pelo aluno G1: *Existem mais irracionais, eu acho que eu tenho esta concepção devido ao curso de matemática, se eu não tivesse cursado matemática, talvez eu não teria esta concepção... Eu entendo que tem mais irracionais do que racional, porém, o que me intriga muito é que existe um infinito maior do que o outro, isto eu não consigo entender.*

A dificuldade em aceitar que existem mais irracionais do que racionais também foi percebido por Fichbein, Jehian e Cohen (1995), sendo que 69% dos licenciandos entrevistados afirmaram corretamente que existem mais irracionais do que racionais, porém apenas 34% apresentaram justificativas coerentes. Essas inquietações demonstradas pelos alunos relacionadas a conjuntos infinitos de ordens distintas fizeram parte de um capítulo conflituoso da história da Matemática. Conforme mencionado no primeiro capítulo da presente pesquisa, os conflitos sobre a compreensão do conceito de infinito surgiram há mais de 2000 anos, com Zenão e seus paradoxos no século IV a. C, e só foram solucionados no século XIX, com as teorias de Cantor sobre as diferentes ordens de infinito. Tais teorias sobreviveram a diversos conflitos com outros matemáticos desta era, sobretudo com Kronecker, que refutava os trabalhos de Cantor e tentava impedir a publicação de seus artigos (ACZEL, 2003). Esses fatos mostram que a ideia de infinito precisa ser tratada com mais atenção nos cursos de Licenciatura em Matemática, de modo que o futuro professor possa conhecer sobre fatos históricos e teorias relacionadas a esse conceito e, sobretudo, aceitar este conceito matemático, e conhecer sobre as ordens distintas de infinito.

O conjunto dos números irracionais é enumerável ou não enumerável?

Apesar de todos os alunos, brasileiros e franceses, alegarem ter estudado sobre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, nenhum aluno brasileiro respondeu corretamente que os números racionais são enumeráveis e que os irracionais são não enumeráveis. Três alunos, G3, G5 e G7, enunciaram corretamente a definição de conjuntos enumeráveis e afirmaram que o conjunto dos números racionais são enumeráveis, porém esses três alunos disseram acreditar que os irracionais também são enumeráveis, pois acreditam que deve existir uma bijeção entre o conjunto dos irracionais e o conjunto dos números naturais.

Quanto aos alunos franceses, todos responderam corretamente que os irracionais são não enumeráveis e que os racionais são enumeráveis. Porém, este fato não colaborou com L3 e L5 para afirmarem que existem mais irracionais do que racionais devido a não enumerabildiade dos irracionais.

Essa falta de compreensão dos conceitos de enumerabilidade e não-enumerabilidade, elaborados por Cantor no século XIX (ACZEL, 2003), acarreta dúvidas sobre as diferentes ordens de infinito e a não compreensão de que a ordem do infinito dos irracionais é superior à dos racionais.

Considerações sobre as análises da atividade 1

As análises mostram que a vivência escolar influencia no desempenho dos alunos, independente do sistema de ensino em que estão inseridos. Pois, em relação à ideia base IV, os alunos do Ensino Fundamental e do *Collège* argumentaram que vários dentre os números considerados não existiam, e não souberam dizer para quê servem os referidos números irracionais. Já os alunos do Ensino Médio e *Lycée*, apesar de não considerarem a existência de alguns números, conforme especificado acima, apresentaram menos equívocos do que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, além de exibirem aplicações para o número π. Enquanto que os alunos do Ensino Superior, com exceção de L1, consideraram a existência de todos os números representados nos cartões; argumentaram sobre aplicações para o número π; apesar de algumas dúvidas por parte dos alunos brasileiros, eles associaram, principalmente, o número $\sqrt{3}$ com medidas de segmentos; 2 alunos franceses disseram que o número $0{,}101001000...$ representa uma medida por se tratar de um número real.

Relativamente à noção de infinito, ideia base I, pode-se dizer que alguns alunos entrevistados, de modo particular os da Educação Básica, não compreendem nem ao menos noções básicas, como, por exemplo, distinguir uma quantidade que a princípio não pode ser determinada de uma quantidade infinita, tal como os infinitos dígitos de certos números.

No que diz respeito à ideia base III, relacionada a diferenciar um número racional de um irracional, pode-se dizer que os alunos da Educação Básica, sejam brasileiros ou franceses, não a compreendem, pois nenhum destes alunos classificou corretamente os números em racional e irracional. Em relação aos alunos do Ensino Superior, foi possível perceber um avanço perante os alunos da Educação Básica, porém, é preciso destacar que até mesmo alguns destes futuros professores de Matemática não conhecem bem as caracterizações de números racionais e irracionais. Quanto à questão da não enumerabilidade dos números irracionais, nota-se, sobretudo nas respostas dos alunos brasileiros do Ensino Superior entrevistados, que eles não compreendem este conceito.

Observa-se que nesta atividade 1 não houve diferenças significativas entre as respostas dos alunos brasileiros e franceses de níveis semelhantes, sobretudo da Educação Básica. Desse modo, contata-se que, independente do sistema de ensino em que estão inseridos - seja no Brasil, onde os números irracionais fazem parte oficialmente dos documentos curriculares e dos livros didáticos, seja na França, onde os números irracionais não são oficialmente inseridos no sistema de ensino -, notamos nas respostas dos alunos indícios de que seus conhecimentos, relacionados as ideias base I, III e IV de números irracionais, são semelhantes, quando se refere a alunos da Educação Básica destes dois países.

6.1.2 Atividade 2

O objetivo desta atividade, relacionada a ideia base III, foi investigar se os alunos mobilizam corretamente o fato de que os números disponíveis no visor da calculadora são números decimais, e por este motivo, ao teclar um número irracional na calculadora, como por exemplo $\sqrt{2}$, o resultado não passa de uma aproximação desse número.

Sendo assim, os alunos eram solicitados a teclarem $\sqrt{2}$ na calculadora e questionados se seria possível afirmar que o número que aparece no visor da calculadora $1{,}414213562$ é igual ao número $\sqrt{2}$. Se os alunos afirmassem que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é verdadeira, a pesquisadora pedia que eles calculassem os valores de ambos os membros da referida igualdade ao quadrado, e justificasse o resultado obtido (o resultado obtido com os cálculos é $2 = 1{,}999999999$). Para aqueles alunos que respondiam imediatamente que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ não é verdadeira, a pesquisadora solicitava justificativas para este fato, e lançava questões relacionadas à irracionalidade do número $\sqrt{2}$, com o objetivo de investigar os conhecimentos dos alunos sobre este número irracional, considerado, segundo Larguier (2012), como um protótipo de irracional no ensino da Matemática.

Atividade 2

a) Tecle o número dois na calculadora seguido da tecla $\sqrt{\ }$. Qual o número que aparece no visor da calculadora?

b) Podemos afirmar que $\sqrt{2}$ é igual ao número que apareceu no visor da calculadora, ou seja, que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é verdadeira?

Bloco I de questões

(Somente para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é verdadeira)

c) Quanto é $\sqrt{2}$ elevado ao quadrado?

d) Quanto é $1{,}414213562$ elevado ao quadrado?

e) Compare os valores encontrados no item (c) e no item (d). Por que você acha que os resultados foram diferentes?

Bloco II de questões

(Somente para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é falsa)
f) Por que você acha que a igualdade não é verdadeira?
g) Você acha que existem mais alguns ou existem muitos números além destes que aparecem no visor da calculadora?
h) Como são estes números? Você acha que eles apresentam um período ou não apresentam um período?

O fato de a calculadora ter sito disponibilizada aos alunos, é um fator que influencia suas respostas. Pois, possivelmente, sem a calculadora as respostas dos alunos, e, portanto, os resultados encontrados, poderiam ser outros. Contudo, optou-se por disponibilizar este instrumento didático aos alunos, com o propósito de perceber em que medida a decimalização proporcionada pela calculadora é utilizada com consciência pelos alunos de diferentes níveis de ensino, de ambos os países envolvidos.

A análise das entrevistas permitiu classificar as respostas dos alunos em cinco categorias. Para melhor organizar as respostas dos alunos, para cada atividade de cada nível de ensino investigado, o termo categoria foi utilizado no sentido de agrupar as respostas que tenham características matemáticas em comum.

Cabe destacar que as categorias não foram elaboradas com base em teorias de análise de conteúdo. No entanto, diante de atividades matemáticas, as respostas dos alunos foram agrupadas de acordo com as estruturas e especificidades matemáticas presentes nas respostas dos alunos, conforme descritas a seguir.

Categoria 2.I: A decimalização do número $\sqrt{2}$.

Categoria 2.II: Suspeita-se que $\sqrt{2}$ possui mais casas decimais além daquelas que aparecem no visor da calculadora.

Categoria 2.III: A igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ não é verdadeira porque $1{,}414213562$ elevado ao quadrado não resulta em 2.

Categoria 2. IV: A igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ não é verdadeira porque $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais - sem alusão à periodicidade.

Categoria 2.V: A igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ não é verdadeira porque $\sqrt{2}$ é irracional.

Desempenho dos alunos brasileiros e franceses

Embora o número $\sqrt{2}$ seja um protótipo (LARGUIER, 2012) de número irracional, utilizado com certa frequência nas aulas de matemática e livros didáticos de Ensino Fundamental, Médio e Superior, seja por meio do teorema de Pitágoras, resultados de equações algébricas, relações trigonométricas, cálculos numéricos, métodos para calcular algumas de suas casas decimais, construções de segmentos com medidas irracionais, etc., a maioria dos alunos investigados, brasileiros e franceses, da Educação Básica, não oferecem indícios em suas respostas de compreenderem a natureza deste número. Esta afirmação é baseada no fato que apenas 3 dentre os 31 alunos, brasileiros e franceses, investigados da Educação Básica, apresentaram respostas coerentes, classificadas na categoria 2.V.

Entende-se que tão inquietante quanto os alunos não conhecerem a natureza do número $\sqrt{2}$, é a má manipulação das operações de potenciação e radiciação, como operações inversas, uma vez que apenas 2 alunos brasileiros da Educação Básica tiveram a iniciativa de calcular ambos os membros da igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ao quadrado, para concluir que os números $\sqrt{2}$ e $1{,}414213562$ são distintos.

No que diz respeito aos alunos do Ensino Fundamental e do *Collège*, pode-se dizer que, embora esses alunos estejam inseridos em sistemas de ensino distintos, eles apresentam argumentos e conhecimentos equivocados semelhantes, quando se trata da decimalização proporcionada pela calculadora. Neste nível de ensino, houve respostas na categoria 2.I, porém, predominou a categoria 2.II, conforme exemplifica a fala do aluno francês C4: *Sim, eles são iguais porque a gente tecla na calculadora e este é o resultado. [...] Elevando ao quadrado os resultados são diferentes, mas é bem próximo de dois... acho que tem mais alguns dígitos.* Neste caso, parece que o aluno percebe as limitações da calculadora.

Concernente aos alunos do Ensino Médio e do *Lycée*, 10 desses alunos também mobilizaram indicativos do teorema em ação falso TAF4. No entanto, nota-se um avanço no desempenho desses alunos em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, pois, além dos alunos do Ensino Médio e *Lycée* apresentarem menor indicativo de teoremas em ação falsos, eles reconheceram, imediatamente, que a calculadora proporciona a decimalização dos números, conforme a fala do aluno brasileiro M4: *Eu acho que não, porque na calculadora não aparece todos os números. Vai ter mais números.*

No que se refere à irracionalidade de $\sqrt{2}$, parece haver um avanço por parte dos alunos de TS, pois dentre os alunos do Ensino Médio e *Lycée*, apenas as respostas de 2 alunos de TS foram classificadas na categoria 2.V, indicando a mobilização do teorema em ação verdadeiro TAV1: *Se x é irracional então x possui infinitas casas decimais não periódicas.*

Observa-se que as respostas de 18 alunos da Educação Básica: seis alunos brasileiros, sendo 3 do Ensino Fundamental e 3 do Ensino Médio; e 12 alunos franceses, sendo 6 do *Collège*, 3 de TES e 3 de TS, foram classificadas na categoria 2.II de respostas, indicando a mobilização do teorema em ação falso TAF4. Nenhum desses 18 alunos, brasileiros e franceses, soube dizer se existem muitas ou poucas casas decimais além dos números que aparecem no visor da calculadora: *[...] A calculadora arredonda os resultados e não dá pra saber se tem mais dígitos ou não* (ES2). Segundo Jacquier (1996), o fato de os alunos não reconhecerem as infinitas casas decimais de um número irracional algébrico pode ser justificado por escutarem frequentemente de seus professores "*Quando nós utilizamos a tecla* $\sqrt{}$ *na calculadora, nós obtemos um valor aproximado do número na calculadora*" (p. 35), ou especificamente em se tratando de $\sqrt{2}$: "*Isto que vocês leem na calculadora de vocês não é* $\sqrt{2}$" (p. 44). De acordo com essa pesquisadora, este tipo de frase pode causar certo mecanismo aos alunos, conduzindo - os a afirmarem que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ não é verdadeira, porém, a natureza do número $\sqrt{2}$ não é reconhecida pelos alunos. Esse fato pode estar relacionado com a constituição do conceito de número irracional pelos alunos.

Em se tratando dos alunos do Ensino Superior brasileiro e francês, as respostas dos alunos foram relacionadas às categorias 2.IV e 2.V, predominado a categoria 2.V e indicando mobilização do teorema em ação verdadeiro TAV1. Cabe destacar que 3 alunos brasileiros não souberam argumentar sobre a não periodicidade de $\sqrt{2}$, fato também constatado em 1 aluna francesa do Ensino Superior. Este fato também foi identificado na pesquisa de Melo (1999), na qual 14% dos alunos de Licenciatura em Matemática não reconheceram a irracionalidade de $-\sqrt{2}$, e 4,7% deixaram a resposta em branco.

Assim, pode-se afirmar que as infinitas casas decimais de $\sqrt{2}$ são reconhecidas por esses alunos do Ensino Superior. Entretanto, a questão da não periodicidade desse número algumas vezes não é reconhecida por estes futuros professores de Matemática. Desse modo, nota-se que quando se trata de definir um número irracional como um número com infinitas casas decimais não periódicas, o que permanece presente para os alunos, sobretudo para os alunos do Ensino Superior, é a questão das infinitas casas decimais. A não periodicidade nem sempre é lembrada pelos alunos. No entanto, mesmo assim, nota-se um avanço no desempenho dos alunos do Ensino Superior perante os demais níveis de ensino, pois os alunos da Educação Básica, com exceção de 2 de TS, não reconhecem as infinitas casas de $\sqrt{2}$.

6.1.3 Atividade 3

A presente atividade teve como objetivo favorecer aos alunos mobilizarem conhecimentos relacionados às ideias base II e III, especificamente em relação ao fato que: *um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros*. Para isto, considerando o número irracional $\sqrt{2}$, os alunos eram questionados sobre a possibilidade ou não de escrever este número como a razão entre dois números inteiros, p e q, $q \neq 0$. Optou-se por inserir aos alunos do Ensino Fundamental e Médio[58] o item a, descrito a seguir, com vistas a contemplar a ideia base II, relacionada a *compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem*. Além disso, este item foi inserido, sobretudo, por contemplar números inteiros fáceis de serem explicitados pelos alunos, com a intenção que os alunos se apropriassem da situação (VERGNAUD, 1990) e compreendessem o que estava sendo solicitado no item b.

A atividade 3 consiste, ainda, dos itens c e d, relacionados às ideias base VIII e X, respectivamente. No entanto, o item c, por se tratar de questões relacionadas à demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, não foi questionado aos alunos do Ensino Fundamental; e o item d, relacionado a segmentos comensuráveis e incomensuráveis, teorias de Eudoxo, Dedekind e Cantor, foi destinada somente aos alunos do Ensino Superior.

Atividade 3

a) Existem dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever 3 igual a $\frac{p}{q}$? Se for possível diga quais são os números p e q. Caso contrário, justifique sua resposta.

[58] O item a desta atividade não foi apresentado aos alunos do Ensino Superior, por considerar que estes alunos compreenderiam a situação proposta no item b, e que este fato não influenciaria nas respostas dos alunos.

b) Existem dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever $\sqrt{2}$ igual a $\frac{p}{q}$? Se for possível diga quais são os números p e q. Caso contrário, justifique sua resposta.
c) Você conhece alguma demonstração matemática que comprove que $\sqrt{2}$ não pode ser representado como a razão entre dois números inteiros?
d) Você já estudou e saberia dizer do que se trata: i) segmentos comensuráveis e incomensuráveis; ii) teoria de Eudoxo; iii) Cortes de Dedekind; iii) teoria de Cantor sobre a construção dos números reais?

As análises da atividade 3 permitiram a classificação das respostas dos alunos em quatro categorias:

Categoria 3.I: Existem dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, associando $\sqrt{2}$ com um número decimal (racional).
Categoria 3.II: Um número não inteiro não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros.
Categoria 3.III: A razão entre dois números inteiros pode resultar num número com infinitas casas decimais não periódicas.
Categoria 3.IV: Não é possível escrever $\sqrt{2}$ como a razão entre dois inteiros porque $\sqrt{2}$ é irracional.

Desempenho dos alunos brasileiros e franceses

Relativamente ao desempenho dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, predominam em suas respostas a categoria 3.II, percebida em 3 alunos brasileiros e 4 alunos franceses, conforme exemplificado na fala do aluno F2: *Eu acho que não* (que não é possível representar $\sqrt{2}$ como a razão entre dois números inteiros)... *Porque a gente fez raiz de dois na calculadora e deu um número com vírgula*. Este conhecimento equivocado mobilizado pelos alunos, referente à impossibilidade de se escrever um número que não é inteiro como a razão entre dois números inteiros, também foi identificado na pesquisa de Jacquier (1996). A referida pesquisadora questionou 22 alunos da *Troisième* se *Todos os números decimais podem ser escritos na forma de fração*. Dentre os alunos investigados, 12 alegaram ser impossível ou disseram ter dúvidas em afirmar se é possível representar um número decimal como uma fração.

Ainda em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, é preciso destacar que 5 alunos responderam de acordo com a categoria 3.I, como pode ser percebido na fala de F3: *O que deu mais aproximado foi 15 dividido por 13... que deu 1,1538.* Falas como esta, indicam, possivelmente, a mobilização do teorema em ação falso TAF4: *Se p não é quadrado perfeito,* $\sqrt{p}$ *pode ter finitas casas decimais*.

Em relação ao desempenho dos alunos do Ensino Médio e os alunos do *Lycée* – TES e TS, a possibilidade de avanço desse nível de ensino, perante os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, é indicada apenas nas respostas dos alunos de TS, pois 2 desses alunos argumentaram, corretamente, apesar de demonstrarem dúvidas, de acordo com a categoria 3.IV, conforme exemplifica a fala de S2: *Pra mim não... pra mim as raízes não podem ser escritas como a divisão entre 2 inteiros, as raízes não são inteiras.* Já nenhum dos alunos do Ensino Médio e TES responderam corretamente, de acordo com a categoria 3.IV. Ao contrário, as respostas desses alunos foram classificadas na categoria 3.I - 5 alunos do Ensino Médio e 1 aluno de TES -, e na categoria 3.II – 2 alunos do Ensino Médio e 3 alunos de TES, ilustrada na fala do aluno francês ES3: *Não, eu penso que não... são números com vírgula, não são números como 1,2,3,4*.

Nota-se que 15 alunos entrevistados da Educação Básica: 7 alunos brasileiros - 2 do Ensino Fundamental e 5 do Ensino Médio; e 8 alunos franceses - 3 do *Collège*, 3 de TES e 2 de TS, foram classificadas na categoria 3.II. Assim, considerando os resultados da presente pesquisa e os resultados da pesquisa de Jacquier (1996), descritos acima, pode-se indicar a mobilização de um teorema em ação falso nas respostas dos alunos da Educação Básica: TAF6: *Seja x um número não inteiro, então não existem* $p,q \in Z$ *, com* $q \neq 0$ *tal que* $x = \frac{p}{q}$.

No que diz respeito aos alunos do Ensino Superior brasileiro e francês, as respostas de todos os alunos entrevistados foram classificadas, corretamente, na categoria 3.IV, conforme ilustra a fala de L3: $\sqrt{2}$ *é irracional, então não podemos escrever na forma racional por definição*, indicando, portanto, a mobilização dos teoremas em ação verdadeiros: TAV2: *Se um número x pode ser escrito na forma* $\frac{p}{q}$*, com* $p,q \in Z$ *e* $q \neq 0$*, então x é racional* e TAV3: *Se um número p não é racional, então p é irracional*. Desse modo, pode-se dizer que a ideia base III, particularmente, em relação a impossibilidade de representar um número irracional como a razão entre dois números inteiros, é concebida apenas pelos alunos do Ensino Superior, entrevistados nesta pesquisa. Além disso, destaca-se que os resultados desta análise corroboram aos resultados de Igliori e Silva (2001) e de Soares, Ferreira e Moreira (1999), referindo-se que dentre os licenciandos em Matemática é a caracterização i – *um número irracional não pode ser representado como a razão entre* *dois números inteiros* - a mais frequente de número irracional. Desse modo, pode-se aludir que os TAV2 e TAV3 são mais frequentes, implicitamente, nas respostas desses alunos, do que o TAV1, como pode ser conferido com as análises da atividade 2, pois 3 alunos brasileiros do Ensino Superior não argumentaram sobre a não periodicidade de $\sqrt{2}$.

Quanto ao item c, relacionado à demonstração matemática de que $\sqrt{2}$ não pode ser representado como dois números inteiros, nenhum aluno do Ensino Médio e *Lycée*[59] disse conhecê-la. Em relação aos alunos do Ensino Superior, todos os 5 alunos franceses e apenas 3 alunos brasileiros, realizaram a referida demonstração. O fato que 4 futuros professores de Matemática brasileiros entrevistados não souberam realizar esta prova é ao menos inquietante, pois esta demonstração é disponibilizada em obras de Cálculo e Análise (ÁVILA, 2006) do Ensino Superior, livros didáticos de Ensino Médio, e até mesmo em algumas obras do Ensino Fundamental (DANTE, 2006)[60], conforme indicado pelos PCN (BRASIL, 1998). Esse fato permite concluir um avanço no desempenho dos alunos franceses do Ensino Superior, concernentes à demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Em relação aos segmentos incomensuráveis, teoria das Proporções de Eudoxo, Cortes de Dedekind e teoria de Cantor sobre a construção dos números reais, a fala dos alunos permite afirmar que eles já estudaram algo sobre esses conceitos e teorias, seja nas disciplinas de Análise Real, História da Matemática ou História das Ciências. Porém, a menos de exemplificar segmentos incomensuráveis, os alunos entrevistados não sabem comentar sobre estas teorias. Em relação à construção dos números reais o aluno G3 argumenta:

> *Então, na verdade nós não vimos a construção dos Números Reais. Sabe, nosso professor de Análise admitiu a existência e começou... Eu sei que dá pra construir usando sequência de Cauchy, Cortes de Dedekind, mas eu não cheguei a estudar esta construção. Tipo, eu sei que tá lá no livro, eu sei onde está, é só pegar e estudar, mas eu não cheguei fazer isto ainda*.

Constata-se, desse modo, que as teorias que dão sustentação à construção dos números reais, e, portanto, dos irracionais, não foram tratadas com atenção no decorrer da formação inicial dos futuros professores de Matemática entrevistados nesta pesquisa. Ressalta-se a importância do estudo destas teorias nos cursos de Licenciatura em Matemática, não no sentido de estudarem uma matemática avançada, com pura

---

[59] Embora os números irracionais e a demonstração da não irracionalidade de $\sqrt{2}$ não seja contemplada nos currículos da Educação Básica do sistema de ensino francês, a prova que $\sqrt{2}$ não é racional é apresentada em alguns livros didáticos de *Troisième*, como por exemplo nas Coleções *Phare* (2008) e *Transmath* (2008).
[60] DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. Ensino fundamental, 8ª série, São Paulo. Editora Ática, 2006.

formalidade, ou a teoria pela teoria, mas no sentido que esses futuros professores venham compreender a origem, a construção e formalização desse conceito de modo que lhe sirvam de alicerce para suas futuras ações e argumentações em sala de aula da Educação Básica.

6.1.4 Atividade 4

Com a presente atividade, relacionada à ideia base VII, pretendeu-se investigar se os alunos consideram, ou não, a existência de solução para as equações da forma $x^2 = a$, com $a \in R$, sobretudo quando a não é um número quadrado perfeito, isto é, quando a solução da referida equação trata-se de um número irracional algébrico. Além do mais, também se desejou cotejar as justificativas dos alunos no caso do número a ser um número quadrado perfeito, um número negativo, um número primo e um número irracional, por este motivo, 4 equações foram inseridas no instrumento de investigação.

Atividade 4

As seguintes equações do segundo grau possuem solução no conjunto dos números reais?

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = 17$
c) $x^2 = -9$ d) $x^2 = \pi$

Desempenho dos alunos brasileiros e franceses

No que diz respeito aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, algumas semelhanças foram percebidas em suas respostas, sobretudo relacionadas a conhecimentos errôneos e possíveis teoremas em ação falsos mobilizados por esses alunos. No decorrer da entrevista, nenhum aluno do Ensino Fundamental e *Collège* mencionou soluções negativas das três equações do segundo grau, propostas nos itens a, b e d. Entretanto, ressalta - se que em relação a equação do item c: $x^2 = -9$, as soluções de três alunos do Ensino Fundamental e três alunos do *Collège* estiveram relacionadas a dois valores – um positivo e um deles envolvendo o sinal negativo -, como por exemplo: 3 e -3; $\sqrt{9}$ e $\sqrt{-9}$; $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Faz - se hipótese de que o valor negativo -9 presente na equação $x^2 = -9$ colabore com os alunos a se recordarem da existência de ambas as soluções - positiva e negativa -, já estudadas em sala de aula por estes alunos, uma vez que os conceitos de raiz quadrada, potência e equações do segundo grau fazem parte do currículo brasileiro e francês para este nível de escolarização.

Assim como indicado na pesquisa de Bronner (1997) realizada com alunos malienses e franceses, quando se trata de soluções relacionadas a raízes quadradas de números positivos, o domínio numérico dos alunos entrevistados do Ensino Fundamental e *Collège* esteve relacionado aos números decimais, ou no máximo racionais, que são quadrados perfeitos. Esse fato é atestado pelas respostas de 4 alunos do Ensino Fundamental e 5 alunos do *Collège* que alegaram que as equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ não possuem soluções, conforme justifica o aluno francês C2: *Não tem solução... porque não tem 17 na tábua de multiplicação*. Referente a apresentar solução decimal com o auxílio da calculadora para as equações propostas, apenas 1 aluno brasileiro deste nível de ensino o fez, dizendo que a solução de $x^2 = 17$ é $x = 4{,}123105626$.

Assim como observado nos alunos do Ensino Fundamental, a solução negativa de equações do segundo grau da forma $x^2 = a, a \in R_+$, também não foi mencionada pelos alunos do Ensino Médio e de TES. Assim, e considerando que 25 dentre os 30 alunos entrevistados da Educação Básica não explicitaram a solução negativa para nenhuma das 3 equações do segundo grau propostas nos itens a, b e d da presente atividade, pode-se indicar a mobilização do teorema em ação falso TAF9 nas respostas dos alunos: *Se* $p \in R_+$ *então* $x^2 = p$ *tem solução real, dada por* $x = \sqrt{p}$.

No entanto, algumas diferenças foram percebidas no desempenho dos alunos do Ensino Médio e TES, quando comparados com os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*. A primeira delas, é que os alunos de Ensino Médio e TES reconhecem, por unanimidade, a não existência de solução real para a equação $x^2 = -9$. Em segundo lugar, nota-se que a influência e decimalização proporcionada pela calculadora está mais presente nas respostas dos alunos do Ensino Médio e TES, do que dos alunos de Ensino Fundamental, pois 4 alunos do Ensino Médio e 2 de TES responderam, equivocadamente, que as soluções das equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ são valores iguais ou aproximados ao número disponibilizado pelo visor da calculadora, apontado indicativo do TAF5: *Se* $p \in R_+$ *não é quadrado perfeito, então* $\sqrt{p}$ *é o número decimal exibido pelo visor da calculadora*. No que diz respeito a considerar corretamente as soluções irracionais algébricas, apenas 1 aluno brasileiro e 2 alunos de TES indicaram considerá-las, pois exibiram como solução das equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ os números $\sqrt{17}$ e $\sqrt{\pi}$, respectivamente. No entanto, é preciso destacar que as soluções negativas $-\sqrt{17}$ e $-\sqrt{\pi}$ não foram mencionadas por estes alunos.

Já nas respostas dos alunos de TS, se fazem menos presentes os conhecimentos errôneos indicados nas respostas dos alunos dos níveis de ensino já mencionados. Esta afirmação é baseada no fato que, com exceção do aluno S1, os demais alunos fazem menção às soluções positivas e negativas das 3 equações do segundo grau – a, b e d - consideradas na presente atividade. Assim como os alunos de Ensino Médio e TES, os alunos de TS mobilizam corretamente o fato que não existe solução real para equações da forma $x^2 = -9$. Igualmente, existe avanço no desempenho desses alunos quanto ao domínio numérico para os valores de raízes quadradas, pois, eles consideram como solução os números $\sqrt{17}$ e $\sqrt{\pi}$, bem como as respectivas soluções negativas $-\sqrt{17}$ e $-\sqrt{\pi}$, que não foram citadas pelos alunos já mencionados. Porém, algumas dúvidas também surgem nos alunos de TS quando se trata do número transcendente π , conforme as palavras de S4 ao referir-se à solução da equação $x^2 = \pi$: *Eu não sei... pode ser que exista*.

No que diz respeito aos alunos do Ensino Superior brasileiro e francês, existe um avanço no desempenho desses alunos, quando comparados com as respostas dos alunos da Educação Básica brasileira e com os alunos franceses do *Collège* e TES. Assim como os alunos de TS, pode-se dizer que esta atividade apresenta indícios que mostram que os alunos do Ensino Superior possuem domínio numérico mais amplo que os alunos da Educação Básica brasileira e alunos franceses do *Collège* e TES, pois, eles consideram como solução de equações do segundo grau as raízes quadradas de números positivos que não são quadrados perfeitos – consideram números irracionais algébricos como solução, incluindo as raízes quadradas de números irracionais transcendentes, tal como o número π . Desse modo, pode se indicar a mobilização do teorema em ação verdadeiro: TAV5: *Se* $y \in R_+$ *então a equação* $x^2 = y$ *tem solução em R, dada por* $x = \pm\sqrt{y}$, nas respostas dos alunos de TS e Ensino Superior.

Contudo, alguns equívocos e dúvidas também foram percebidos nos alunos do Ensino Superior: 2 alunos franceses, L2 e L3, não mencionaram as soluções negativas em nenhuma das 3 equações – a, b e d; e dúvidas surgiram em relação a raiz quadrada do número transcendente π , como pode ser ilustrado pela fala do aluno G2:

> **G2:** *Como eu nunca tinha pensado na raiz de um número irracional, eu vou pensar como a raiz de 17, eu acho que existe. Mas são diferentes, porque raiz de 17 é a raiz de um número inteiro e raiz de* π *é a raiz de um número irracional. Mas eu acho que existe... estou com medo de afirmar que ela está no conjunto dos números reais... nunca pensei, não sei se eu colocar na calculadora o que vai aparecer. Se fosse uma avaliação, eu colocaria que está no conjunto dos números irracionais, mas porque... está eu não saberia dizer.*
> **Pesquisadora:** *Mas se não estiver no conjunto dos números reais, a qual conjunto deveria pertencer a raiz do número* π *?*
> **G2:** *Nos complexos.*
> **Pesquisadora:** *Você acha que a raiz de* π *é um número complexo?*
> **G2:** *Não, acho que não.*
> **Pesquisadora:** *Então a qual conjunto ele deve pertencer?*
> **G2:** *No conjunto dos números reais. Agora sim, faltou pensar um pouco mais... raiz de* π *pertence ao conjunto dos reais.*

Esta fala mostra que, embora os alunos do Ensino Superior apresentem avanço no desempenho em relação aos alunos da Educação Básica, é possível notar dúvidas presentes nas respostas desses futuros professores de Matemática condizentes a conceitos estudados desde o Ensino Fundamental, presentes a todo o momento nas aulas e livros de matemática, como os conceitos de raiz quadrada e número real.

6.1.5 Atividade 5 (a)

Esta atividade, relacionada à ideia base VI[61], foi elaborada com vistas a perceber se os alunos concebem a existência de um quadrado, cuja medida de lado é um número irracional algébrico e, igualmente, analisar quais são suas justificativas relacionadas a este fato. Sendo assim, duas questões foram propostas aos alunos: a primeira, item i, relacionada à existência de um quadrado de medida de lado inteira - $25cm^2$, e a segunda, item ii, questiona sobre a existência de um quadrado cuja medida de área é $13cm^2$, ou seja, com medida de lado irracional - $\sqrt{13}\ cm$. A opção por inserir o item i, deve-se ao fato de se desejar comparar os conhecimentos e justificativas mobilizadas pelos alunos em ambas as situações - existência de um quadrado cuja medida do lado é inteira, e existência de um quadrado cuja medida do lado é irracional.

Atividade 5 (a)

i) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 25cm^2$?

ii) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 13cm^2$?

[61] Ideia base VI: aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.

Referente a considerar a existência de um quadrado de medida de área $25\ cm^2$, alguns alunos de Ensino Fundamental, Médio, *Collège* e TES, confundiram os conceitos de área e perímetro. Cabe destacar que diversas pesquisas, assim como Baldini (2004) e Bellemain e Bittar (2000), apontam as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos de área a perímetro, bem como apresentam atividades para minimizar tais dificuldades. No entanto, nesta pesquisa, a pesquisadora buscou conduzir os alunos a perceberem suas inversões entre esses conceitos, com questionamentos da forma: *você se lembra da diferença entre área e perímetro de um quadrado?*, com a intenção que os alunos reconhecessem que a medida do lado do referido quadrado é $5\ cm$, concluindo sobre a existência do quadrado de medida de área é $25\ cm^2$, para dar continuidade às atividades seguintes.

No entanto, no que concerne ao quadrado de medida de área $13\ cm^2$, as repostas dos alunos foram diversificadas, permitindo classifica-las em seis categorias:

> **Categoria 5.I:** Não existe um quadrado de área $13\ cm^2$ porque não existe um número que multiplicado por ele mesmo resulte em 13.
> **Categoria 5.II:** Existe um quadrado de medida de área aproximadamente igual a $13\ cm^2$.
> **Categoria 5.III:** Pode ser que exista um quadrado de área $13\ cm^2$, porém os lados não são números inteiros.
> **Categoria 5.IV:** Existe o quadrado de área $13\ cm^2$ porque $(3{,}605551275)^2$ é 13 (resultado equivocado oferecido pelo visor da calculadora).
> **Categoria 5.V:** Existe o quadrado de área $13\ cm^2$ e a medida do lado é $\sqrt{13}\ cm$.

Desempenho dos sujeitos colaboradores desta pesquisa

No que concerne às respostas dos 14 alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, 11 alunos - 6 do Ensino Fundamental e 5 do *Collège* responderam de acordo com a Categoria 5.I, alegando que não existe o quadrado de medida de área $13\ cm^2$ porque não existe um número cujo quadrado resulta em 13, conforme ilustra a fala do aluno francês C4: *Não... porque não existe 13 na tábua de multiplicação... nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo resulte em 13.* Assim, pode-se indicar a mobilização de um teorema em ação falso, já explicitado na pesquisa de Bronner (1997): TAF11*: Seja* $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ *existe se e somente se* a *é quadrado perfeito*. A possível mobilização deste conhecimento falso, juntamente com os resultados das análises das atividades 5(b) e 6, relaciona-se à mobilização de outro teorema em ação falso nas respostas desses alunos, também indicado nas análises da atividade 4: TAF8: *Se* $p \in R_+$ *não é quadrado perfeito então não existe* $x \in R$ *tal que* $x^2 = p$.

Observa-se que dentre os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, apenas o aluno brasileiro F4 respondeu, corretamente, em conformidade com a categoria 5.V, dizendo que existe o referido quadrado, de medida de lado $\sqrt{13}\ cm$. No entanto, as análises da atividade 7, mostram que não é possível afirmar que os conhecimentos verdadeiros sobre a existência de segmentos com medidas irracionais, estejam estabilizados nas respostas do aluno F4.

Em relação aos 16 alunos do Ensino Médio e *Lycée* entrevistados, apenas 2 alunos de TS responderam corretamente, de acordo com a categoria 5.V, que o quadrado de medida de área igual a 13 cm^2 existe, cuja medida de seu lado é $\sqrt{13}\ cm$. Entretanto, embora tenham respondido corretamente nesta atividade, as análises das atividades 6 e 7 mostram que, esses alunos não apresentam conhecimentos estabilizados em relação à existência de segmentos de medidas irracionais.

Os demais alunos deste nível de ensino não responderam corretamente a esta atividade, e suas respostas foram classificadas nas categorias 5.I (3 alunos), 5.II (5 alunos), 5.III (4 alunos), e 5.IV (2 alunos). Destaca-se que 9 alunos responderam ou de acordo com a categoria II, relacionada com a existência de um quadrado de medida de área aproximadamente igual a 13 cm^2, ou de acordo com a categoria III, que diz respeito a possiblidade de existir o quadrado em questão. Porém, neste último caso, os alunos dizem não saber exprimir a medida do lado do quadrado, eles apenas alegam que deve ser um número na representação decimal, conforme ilustra a fala do aluno S1 de TS: *Na verdade é provável que exista um quadrado de lado com medida 13 cm. [...] Eu vou dizer uma besteira, é preciso que o lado seja um número astronômico, não infinito, mas próximo do infinito.*

Alguns alunos, assim como M2, não concebem $\sqrt{13}$ como um número que representa a medida de segmentos, e por isso, eles teclam $\sqrt{13}$ na calculadora na busca de um número que possa exprimir a medida do lado do quadrado, como mostra o fragmento da entrevista de M2:

M2: *Vai existir o quadrado. O lado mede* $3{,}605551275\ldots$. *E a área vai ser* $12{,}9999$. *Vai faltar* $1cm$.
Pesquisadora: *Então você acha que existe o quadrado com área* $13cm^2$ *?*
M2: (Silêncio) *Não existe! Eu acho que não... Porque eu não sei se tem fim* (aponta para o número $3{,}605551275\ldots$) *ou não tem fim.*

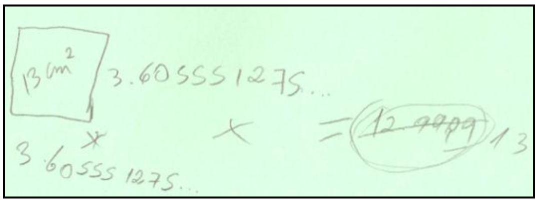


Figura 15 - Cálculos - quadrado de medida de área 13 cm^2 - aluno M2

Nota-se que ao argumentar que falta 1 cm para a área de medida 13 cm^2, o aluno também revela sua dificuldade em manipular números decimais. Em relação ao uso da calculadora para exprimir o valor da raiz quadrada, Bronner (1997) classifica esta concepção como modelo de Concepção Aproximada - CA$\approx$. Neste caso, segundo o pesquisador, a raiz quadrada é manifestada sob um aspecto de operador-algoritmo: $\sqrt{\ }: \to c$, onde c é o valor aproximado oferecido pela calculadora. Outros dois alunos - M6 e ES3 - também manifestam o modelo CA$\approx$. Porém, esses alunos concluíram sobre a existência do quadrado de medida de área 13 cm^2, alegando, de modo equivocado, que o lado do quadrado é $3{,}605551275$, uma vez que eles teclaram $3{,}605551275 \times 3{,}605551275$, e o resultado foi 13. E, mesmo após eles teclarem o número $3{,}605551275$, dígito por dígito, a pedido da pesquisadora, para confirmar se a calculadora não havia armazenado os dígitos do número $\sqrt{13}$, o resultado não foi alterado.

Desse modo, além da decimalização dos números, também apontada por Jacquier (1992) como uma desvantagem, nota-se outro conhecimento errôneo que, para certos números, a calculadora pode proporcionar - ao teclar o número disponibilizado pela calculadora disponibilizada vezes ele mesmo, como, por exemplo, $3{,}605551275 \times 3{,}605551275$, a calculadora arredondou o valor, oferecendo 13 no lugar de $12{,}999999996$. Para algumas situações, arredondamentos como estes não fazem diferenças significativas, no entanto, em outras situações, como no estudo dos *números irracionais*, dos *radicais*, das *potências*, das *equações do segundo grau*, essa ferramenta didática pode proporcionar dificuldades na compreensão destes conceitos. Toma-se como exemplo a identificação realizada por M6 e ES3 - $\sqrt{13} = 3{,}605551275$- devido ao fato que o resultado de $3{,}605551275 \times 3{,}605551275$, na calculadora, foi o mesmo que $\sqrt{13} \times \sqrt{13}$.

Em momentos de ensino como este, seria interessante o professor levar para a sala de aula outras calculadoras com quantidades de dígitos diferentes, para que os alunos pudessem perceber que o número de casas decimais pode variar de acordo com o modelo da calculadora. Igualmente, o computador pode ser favorável nestes momentos de ensino, pois o uso de um software como o Excel, por exemplo, pode mostrar aos alunos um maior número de dígitos além dos disponibilizados pela calculadora, sem contar que o Excel não faz arredondamentos com os números, assim como a calculadora.

Além dos 2 alunos de TS que alegaram a existência do quadrado de área $13\ cm^2$, não é possível dizer que houve avanço no desempenho dos alunos do Ensino Médio e *Lycée* em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*. Todavia, são constatadas diferenças entre as respostas dos alunos destes dois níveis de ensino. Pois, os alunos do Ensino Fundamental e *Collège* não manipularam a calculadora, e mobilizaram indicativos de 2 teoremas em ação falsos – TAF8 e TAF11. Já a maioria dos alunos do Ensino Médio e *Lycée*, utilizaram-se da calculadora, demonstrando o quanto a decimalização desta ferramenta didática pode prejudicar a compreensão de certos conceitos matemáticos.

No que se refere aos alunos do Ensino Superior, nota-se um avanço no desempenho dos alunos franceses, pois os 5 alunos franceses entrevistados responderam de acordo com a categoria 5.V, indicando, assim como nas análises das atividade 6, a mobilização dos teoremas em ação verdadeiros TAV8: *Se* $a \in R_+$, *então existe* $\sqrt{a}$, e TAV6: *Seja* $b \in R_+$ *então existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$, *cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}\ cm$.

Quanto às respostas dos alunos brasileiros do Ensino Superior, três categorias foram identificadas - categorias 5.I (1 aluno), 5.II (2 alunos) e 5.V (4 alunos). Contudo, é preciso salientar que, até mesmo os alunos do Ensino Superior, cujas respostas foram classificadas de acordo com a categoria 5.V, apresentaram dúvidas, hesitaram e refletiram para depois concluírem sobre a existência do quadrado de medida de área $13\ cm^2$. Esse fato pode ser confirmado no diálogo com o aluno G1, ao ser questionado sobre a existência de um quadrado cuja medida de área é $13\ cm^2$:

> **G1:** *De cara eu responderia que não, mas... eu tô desconfiado de todas as questões* (risos). *Mas eu desconfio que não.*
> **Pesquisadora:** *Então você acha que não existe o quadrado de área* $13\ cm^2$ *?*
> **G1:** *Eu acho que não.*
> **Pesquisadora:** *Por que você acha que não existe?*

> **G1:** *Mas pera lá, eu posso usar a calculadora?* (o aluno digita raiz de treze na calculadora e diz) *Se eu fizesse a representação deste número aqui numa reta, eu poderia fazer um quadrado, a partir desta representação com esta medida. Dá sim.*
> **Pesquisadora:** *Com estes números que aparece no visor da calculadora?*
> **G1:** *Não, não com estes números, mas com uma representação igual a gente faz com raiz de dois* (aqui o aluno refere-se a representar a medida $\sqrt{2}$ com o auxílio da construção de um triângulo retângulo de catetos unitários).

Nota-se que após as reflexões, o aluno se recordou da possibilidade de se representar segmentos de medidas irracional algébrica, da forma $\sqrt{n},\ n \in N$. Segundo Vergnaud (1990), existem classes de situações nas quais os sujeitos não dispõem de todas as competências necessárias para resolvê-las, o que os obriga a um tempo de reflexão, exploração, hesitações, tentativas frustradas, levando-os eventualmente ao sucesso ou ao fracasso. Assim, pode-se dizer que, até mesmo para os alunos do Ensino Superior, afirmar sobre a existência do quadrado de medida de área $13\ cm^2$, se tratou de uma situação nova, no qual eles não dispunham das competências necessárias para solucioná-las.

Em relação ao avanço no desempenho dos alunos do Ensino Superior perante aos alunos da Educação Básica, pode-se afirmar que, na presente atividade, ele é evidente em se tratando dos alunos universitários franceses. Porém, também pode se dizer que existe desempenho de 4, dentre os 7, alunos brasileiros do Curso de Matemática, em relação aos alunos brasileiros da Educação Básica, *Collège* e TES. Nesta atividade, não foi possível afirmar avanço dos alunos do Ensino Superior brasileiro em relação aos alunos franceses de TS, ou seja, o desempenho dos alunos brasileiros do ensino Superior e dos alunos franceses de TS foram correspondentes na atividade 5 (a).

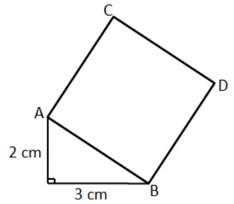
5.1.6 ATIVIDADE 5 (b)

Ao inserir a atividade precedente - 5(a) - no instrumento de pesquisa, teve-se como hipótese, confirmadas na análise anterior, que os alunos poderiam apresentar indicativos de conhecimentos equivocados, sobretudo, dos teoremas em ação falsos: TAF11: *Seja* $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ *existe se e somente se* a *é quadrado perfeito*, e TAF10: *Se* $b \in R_+$ *não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é* $A = b\ cm^2$. Assim, com vistas a colaborar com a possível desestabilização desses conhecimentos falsos, elaborou-se a presente atividade, proposta apenas aos alunos que indicaram mobilizar os TAF10 e TAF11, alegando que não existe, ou que existe aproximadamente, um quadrado de medida de área 13 cm^2.

A presente situação, relacionada às ideias base V[62] e VI[63], consistiu em apresentar aos alunos uma figura geométrica composta de um triângulo retângulo, com catetos de medida 2 cm e 3 cm, de modo que sua hipotenusa coincidia com o lado do quadrado ABCD. Nessas condições, e apresentando a ficha com a representação da referida figura geométrica, a pesquisadora indagava aos alunos: *nesta atividade nós temos a afirmação de que a área do quadrado ABCD é* 13 cm^2. *Você pode conferir se esta afirmação é verdadeira ou falsa? Para responder a esta pergunta, eu sugiro que você encontre a medida do lado do quadrado.* Esta sugestão foi dada aos alunos, pois se teve como pressuposto que, devido a atividade 5(a), os alunos poderiam afirmar, sem ao menos refletir sobre a situação, que não existe o quadrado de medida de área 13 cm^2.

Atividade 5 (b)

A área do quadrado ABCD é 13 cm^2. Você concorda com esta afirmação?



Para a atividade 5 (b), as categorias indicadas nas respostas referentes a presente atividade, foram semelhantes às 5 categorias percebidas na atividade 5 (a).

Desempenho dos sujeitos colaboradores desta pesquisa

Dentre os 12 alunos do Ensino Fundamental e do *Collège*, questionados sobre a atividade 5(b), apenas 2 alunos do *Collège* indicaram possibilidade de desestabilizar os TAF10 e TAF11, mobilizados na atividade 5(a), concluindo, portanto, sobre a existência do quadrado de medida de área 13 cm^2, argumentando que o lado do quadrado ABCD é $\sqrt{13}\ cm$.

---

[62] Ideia base V: Saber aplicar o teorema de Pitágoras.

[63] Ideia base VI: Aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$

No que diz respeito aos 6 alunos do Ensino Fundamental e os demais 4 alunos do *Collège*, não foi possível desestabilizar os conhecimentos falsos, indicados por esses alunos na atividade 5(a). Contudo, ao contrário da atividade anterior, na qual as respostas desses alunos foram classificadas na categoria 5.I, dizendo que não existe o quadrado de área $13\ cm^2$, nesta atividade, ao utilizarem o teorema de Pitágoras para encontrar a medida $\sqrt{13}$ da hipotenusa do triângulo retângulo, estes alunos teclavam $\sqrt{13}$ na calculadora, concluindo, portanto, pela existência de um quadrado de área aproximadamente igual a $13\ cm^2$, conforme atesta o registro do aluno C7:

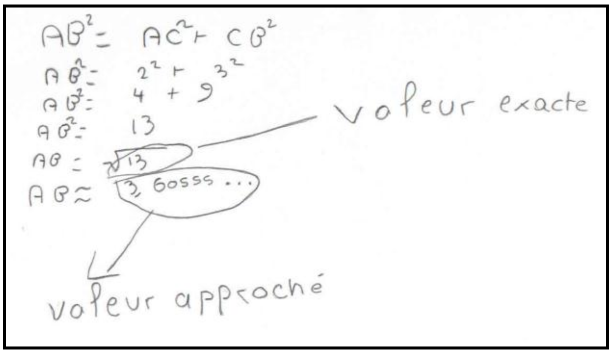


Figura 16 - Cálculos por meio do Teorema em Pitágoras - aluno C7
Fonte: a autora desta pesquisa

Este registro indica a dificuldade dos alunos em considerar o número *raiz de treze* em sua representação na forma de radical - $\sqrt{13}$, pois apesar de encontrarem, por meio do teorema em Pitágoras, o número $\sqrt{13}$ como solução, os alunos faziam a conversão para sua representação decimal, tomando a raiz quadrada sob um aspecto de operador-algoritmo: $\sqrt{\ }: \to c$, onde c é o valor aproximado oferecido pela calculadora com o auxílio da calculadora (BRONNER, 1997), conduzindo-os a concluírem sobre a existência de um quadrado de área *aproximadamente* $13\ cm^2$. Isto mostra, conforme Assude (1989), a crença de que a calculadora jamais oferece um valor incorreto. Esta crença é tão resistente para os alunos da presente pesquisa, que os levam a negar a existência de uma figura geométrica plana, estudada desde os anos iniciais de escolarização, como o quadrado.

Dentre os 6 alunos do Ensino Médio, 3 de TES e 1 de TS, submetidos aos questionamentos da presente atividade, 3 alunos do Ensino Médio e 2 de TES, concluíram que a afirmação *A área do quadrado ABCD é* $13\ cm^2$ é verdadeira, considerando $\sqrt{13}\ cm$ como medida do lado do quadrado. Estes alunos indicam, portanto, possível desestabilização dos conhecimentos falsos mobilizados por eles na atividade 5(a).

Contudo, assim como identificado nos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, nota-se, em 3 alunos do Ensino Médio e 1 aluno de TS, que a influência da decimalização proporcionada pela calculadora, assim como a dificuldade em aceitar *raiz de treze* na representação em forma de radical - $\sqrt{13}$, persistem nesta atividade. Destaca-se, ainda, que o aluno de TS conclui, erroneamente, que existe o quadrado de medida de área 13 cm^2, cujos lados medem $3{,}605551275$, devido ao arredondamento dos valores da calculadora.

Nota-se avanço no desempenho dos alunos do Ensino Médio e TES, em relação aos alunos de Ensino Fundamental e *Collège*, no sentido que a indicação de desestabilização do TAF10 foi percebida com maior frequência (5 alunos) nos alunos do Ensino Médio e TES.

Dentre os alunos do Ensino Superior, apenas 3 alunos brasileiros foram submetidos a esta atividade, dentre estes, 2 apresentaram indicativos de desestabilização dos conhecimentos falsos manifestados na atividade 5(a), embora o aluno G3 tenha apresentado dúvidas ao responder se a afirmação proposta é verdadeira ou não:

> **G6:** *Ai que chato! Não sei!* (Silêncio).
> **Pesquisadora:** *No que você está pensando?*
> **G6:** *Que eu acabei de falar que não existe um quadrado com este lado.*
> **Pesquisadora:** *Mas e agora, sua opinião mudou?*
> **G6:** *Não, então, eu tô pensando se...* (Silêncio) S*e eu pegar dois centímetros aqui e três aqui e ligar, então quer dizer que este aqui é raiz de treze. E se eu pegar esta medida e passar pra cá* (aponta para os lados do quadrado ABCD) *então vai existir. Mas não vai ser exatamente igual a raiz de treze... não sei.... <u>Como este número é... tem infinitos dígitos, eu acho estranho ele ser uma medida</u>.* (Silêncio. A aluna respira fundo, e fala bem baixinho) *Se o lado do quadrado é raiz de treze a área vai ser treze.*
> **G6:** *<u>Não tem como eu discordar, porque a conta tá falando que é verdade</u>.*
> **Pesquisadora:** *O lado é* $\sqrt{13}$ *?*
> **G6***: Sim. E* $\sqrt{13} \times \sqrt{13}$ *, a área é 13.*
> **Pesquisadora:** *Mas você concorda ou não com esta afirmação?*
> O aluno respira fundo, e diz:
> **G6:** *Pelas contas eu concordo, mas eu não sei.*
> **Pesquisadora:** *Você esta achando esta situação complicada?*
> **G6:** *Sim, está confuso... no exercício anterior... Concordo.*
> **Pesquisadora:** *Concorda?*
> **G6:** *humhum* (fazendo sinal de positivo com a cabeça)... *Fazer o quê?*

Assim, nota-se que o aluno vivencia um conflito entre o resultado de seu cálculo por meio do teorema em Pitágoras - $\sqrt{13}$, que ele entende que não pode ser negado, e a possibilidade de se considerar um número irracional – com infinitas casas decimais - como medida de um segmento. Desse modo, conclui-se que os conhecimentos desse aluno – futuro professor de Matemática - não estavam acomodados para afirmar sobre a existência de um quadrado de área $13cm^2$, e que esta atividade favoreceu momentos de desequilíbrios em relação aos conhecimentos falsos de G6. A indicação de desestabilização do TAF10, pelo aluno G6, fica mais bem elucidada com as análises das próximas atividades.

Vale lembrar que os argumentos do aluno G6, referente ao conflito enfrentado pelo aluno entre o resultado científico e o resultado apresentado pela calculadora, possivelmente ocorreu devido à disponibilização da calculadora para a resolução das atividades. Todavia, por se tratar de um aluno em situação de finalizar o Curso de Licenciatura em Matemática, estes resultados mostram a necessidade de melhor se explorar o instrumento didático calculadora, sobretudo interligado com situações relacionadas aos números irracionais, no decorrer da escolarização.

6.1.7 Atividade 6

Assim como na atividade 5, a presente atividade também questionava sobre a existência de um quadrado, cuja medida de área não é um número quadrado perfeito. No entanto, diferentemente da atividade 5, relacionada aos quadros[64] algébrico e geométrico, a presente atividade foi elaborada no quadro de funções, mais precisamente no seu aspecto gráfico (DOUADY, 1986). Assim, a atividade 6, proposta a todos os alunos entrevistados, visou dois objetivos: i) Pretendeu-se analisar se, num quadro diferenciado da atividade precedente, os indicativos de desestabilização dos teoremas em ação falsos TAF10 e TAF11, percebidos em alguns alunos no decorrer da atividade anterior, poderiam, igualmente, serem indicados nesta situação; ii) Desejou-se investigar se esta atividade poderia favorecer aos alunos, que até o momento vinham apresentando conhecimentos equivocados, sobre a existência de raízes quadradas e áreas de medidas que não são quadrados perfeitos, a superarem tais conhecimentos falsos.

Esta atividade, inspirada no artigo *Jogo de quadros e dialética ferramenta-objeto* de Douady (1986), diz respeito aos infinitos retângulos de área $24\ cm^2$ que podem ser representados no plano cartesiano. Observa-se que, tais retângulos têm características

[64] A noção de quadros foi introduzida por Douady (1986) para auxiliar o professor e o pesquisador a observarem as mudanças de quadros, que podem ser de natureza algébrica, numérica, geométrica, etc., espontâneas pelos alunos, ou a provocarem tais mudanças no decorrer do ensino e aprendizagem. Segundo Douady (1986) "Um quadro é constituído de objetos de um ramo da Matemática, de relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e de imagens mentais associadas a esses objetos e relações. [...] A mudança de quadro é um meio de obter formulações diferentes de um problema que, sem ser necessariamente equivalente, permite um novo acesso às dificuldades encontradas e a colocar em cena ferramentas e técnicas que não se fizeram presente na primeira formulação" (p. 11, tradução da pesquisadora).

específicas - eles estão representados no primeiro quadrante do plano cartesiano, um de seus vértices pertence ao eixo y, um dos vértices é a origem, um dos vértices pertence ao eixo x, e o quarto vértice está sob a curva contínua, dada por:

$$f : R_+^* \to R_+^*$$
$$x \mapsto \frac{24}{x} .$$

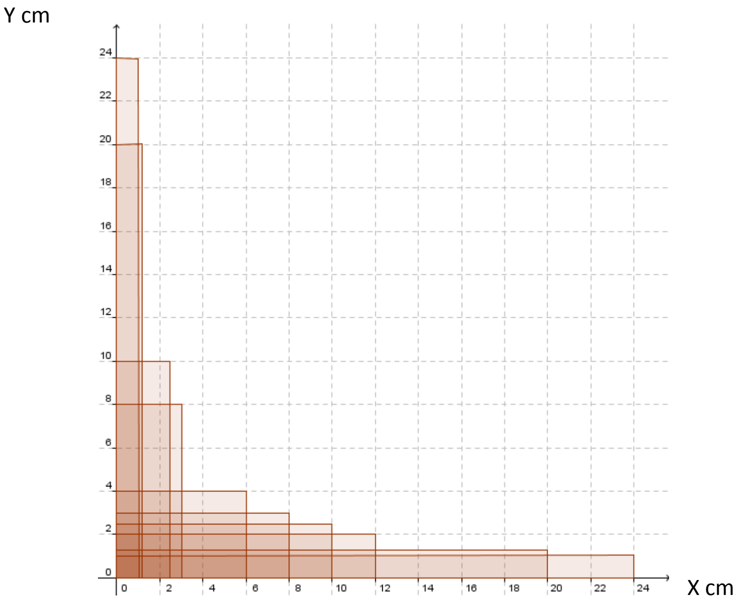
Nessas condições, e considerando que um quadrado é um caso particular de um retângulo, dentre os infinitos retângulos de área 24 cm^2, existe um quadrado de medida de área 24 cm^2. Este fato decorre da continuidade da função *f*, que garante, portanto, a existência do ponto P de coordenadas $x = y$, ou seja, $P = \left(\sqrt{24}, \sqrt{24}\right)$, pertencente à curva f, que representa o quarto vértice do quadrado de área 24 cm^2.

Atividade 6

a) No plano cartesiano estão representados alguns retângulos cuja medida de área é 24cm^2. Você acha que existem outros retângulos como esses, que também possuem medida de área 24cm^2 ? Em caso positivo, quais seriam outras possíveis medidas para os lados dos quadrados?

b) Pinte os pontos de coordenadas (x, y) que são vértices dos retângulos de área 24cm^2 e que não pertençam aos eixos do plano cartesiano (aqui a intenção é que os alunos percebam o comportamento da curva formada por estes pontos).

c) Você acha que é possível representar um quadrado neste mesmo plano cartesiano com as mesmas propriedades destes retângulos: um vértice na origem e outros dois sobre os eixos coordenados, que tenha medida de área igual a 24cm^2 ? Justifique sua resposta.



No decorrer das análises desta atividade, as categorias percebidas nas respostas dos alunos foram:

Categoria 6.I: Não existe um quadrado de medida de área $24\ cm^2$.
Categoria 6.II: Existe um quadrado de área aproximadamente $24\ cm^2$.
Categoria 6.III: Existe o quadrado de área $13\ cm^2$ porque $(3{,}605551275)^2$ é 13 (resultado errôneo oferecido pelo visor da calculadora).
Categoria 6.IV: Existe o quadrado com medida de área igual a $24\ cm^2$, e a medida do lado é $\sqrt{24}cm$**.**

Desempenho dos sujeitos colaboradores desta pesquisa

Quanto aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, pode-se dizer que esta atividade não favoreceu para a desestabilização dos teoremas em ação falsos TAF10 e TAF11, mobilizados por estes alunos nas atividades precedentes. Pois, 6 desses alunos responderam de acordo com a categoria 6.I, conforme atesta a fala de C3: *Não, eu acho que não... se não seria uma raiz [...] seria* $\sqrt{24}$*, eu acho que não existe*; e 7 alunos responderam de acordo com a categoria 6.II, exemplificada na fala de F7: *Só se for um um número que não é inteiro. [...] Só se for quatro e alguma coisa vezes quatro e alguma coisa, porque se for 5 dá 25. [...] Ele estaria por aqui, perto de 4,8, perto de 5*. Possivelmente, as respostas desses alunos estão associadas a seus conhecimentos anteriores sobre cálculos de medida de área, que pode ter influência do contrato didático vivenciado por eles, que pode ter favorecido o uso de medidas de lados de quadrado pertencentes ao conjunto dos números naturais ou no máximo decimais. É provável que esses alunos não tenham vivenciado situações matemáticas relacionadas às quatro operações com números irracionais da forma $\sqrt{a}, a \in R_+$: $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, a \neq 0$.

Cabe destacar que na atividade 5(b), dois alunos do *Collège* - C1 e C3 - haviam apresentado indicativos de evolução em relação ao conhecimento falso TF10, alegando que existe o quadrado de medida de área $13\ cm^2$, com medida dos lados de $\sqrt{13}\ cm$. Todavia, a presente atividade favoreceu, no sentido de permitir afirmar, que o referido conhecimento falso não foi desestabilizado por esses alunos, pois C3 respondeu de acordo com a categoria 6.I, conforme explicitado um fragmento de sua fala no parágrafo precedente, e o outro respondeu de acordo com a categoria 6.II.

Ainda em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, observa-se que apenas o aluno F4 do Ensino Fundamental, respondeu corretamente de acordo com a categoria 6.V, indicando, assim como na atividade 5(a), mobilizar os teoremas em ação verdadeiros TAV6: *Seja* $b \in R_+$ *então existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$*, cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}\ cm$, e TAV8: *Se* $a \in R_+$*, então existe* $\sqrt{a}$.

Dentre os alunos do Ensino Médio e *Lycée*, 2 alunos brasileiros e 2 alunos de TES, haviam indicado, na atividade 5(b), uma evolução dos conhecimentos falsos TAF10 e TAF11, mobilizado por eles na atividade 5(a). Ademais, 1 aluno de TES e 3 alunos de TS, já na atividade 5(a), não apresentaram indicativos desses conhecimentos falsos. Não obstante, com a presente atividade, é possível indicar a não desestabilização desses conhecimentos falsos por esses alunos. Pois, com exceção de 1 aluno de TS, os demais alunos responderam a presente atividade de acordo com as categoria 6.I (3 alunos), categoria 6.II (9 alunos) e categoria 6.III (2 alunos). Nota-se que a maioria dos alunos respondeu de acordo com a categoria 6.II, relacionada a um quadrado de medida de área aproximadamente igual a $24\ cm^2$, conforme diz o aluno S3: *É preciso representar... nós podemos aproximar...* $\sqrt{24}$*, que é* $2\sqrt{6}$ *... nós podemos representar aproximadamente*.

Assim, em relação à existência de quadrados com medidas de área que não é um quadrado perfeito, não é possível afirmar que existe avanço no desempenho dos alunos do Ensino Médio e *Lycée* perante os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*. Esta afirmação é baseada no fato que, com exceção de 1 aluno de TS, as respostas dos alunos do Ensino Fundamental, *Collège*, Ensino Médio e *Lycée*, foram classificadas como incorretas, de acordo com as categorias 6.I, 6.II e 6.III, fato que corrobora a possibilidade de mobilização dos teoremas em ação falsos TAF10 e TAF11, nas respostas desses alunos da Educação Básica.

No que se referem aos alunos do Ensino Superior, os alunos franceses não haviam manifestado conhecimentos falsos em relação à existência dos quadrados em questão. Este fato continuou presente nas respostas dos alunos nesta atividade, apenas com exceção do aluno L5, que apesar de ter concluído corretamente sobre a existência do quadrado de área $24\ cm^2$, ele apresentou dúvidas no início de seus argumentos, conforme ilustra o fragmento de diálogo:

> **Pesquisadora:** *Considerando as mesmas condições e propriedades dos retângulos, você acha que é possível representar um quadrado de medida de área igual a* $24cm^2$ *?*
> **L5:** (Silencio) *Não, porque seria uma aproximação... Não seria verdadeiramente um quadrado.*
> ***Pesquisadora:*** *Mas, para um quadrado de área* $13cm^2$ *você me disse que é possível representar? Certo?*
> **L5:** *Ah, sim, nós podemos construir! Como* $\sqrt{13}$ *!*

Quanto aos alunos brasileiros, três – G1, G5 e G6 – haviam indicado desestabilizar, na atividade 5(b), os TAF10 e TAF11, notados em suas respostas na atividade 5(a). Porém, nesta atividade, os argumentos do aluno G6 mostraram que esses conhecimentos equivocados não foram desestabilizados por ele, conforme ilustra sua fala: *Existe. Vai estar entre 4 e 5*. Igualmente, o aluno G2 continuou a argumentar que existe um quadrado de medida de área *aproximadamente* igual $24cm^2$. Desse modo, percebe-se a dificuldade que até mesmo formandos do Curso de Matemática, com longa vivência escolar, têm em desestabilizar conhecimentos errôneos, sobretudo em relação ao TAF10, que diz respeito a existência de um quadrado com medida dos lados irracional.

Nesse sentido, pode-se dizer que, no que se refere à existência de quadrados com medida dos lados irracional, os alunos franceses do Ensino Superior apresentam desempenho mais avançado, em referência aos alunos brasileiros deste mesmo nível de ensino. Pois, desde a atividade 5(a), com exceção de L5 que apresentou algumas dúvidas, conforme já mencionado, mas que em seguida reorganizou suas ideias, os alunos indicam mobilizar o teorema em ação verdadeiro TAV6: *Seja* $b \in R_+$*, então existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$*, cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}$ *cm.* Enquanto que este fato ocorreu apenas com 3 alunos brasileiros[65] – G1, G3 e G5, embora, assim como o aluno francês L5, tenham demonstrado reorganizarem seus conhecimentos no decorrer da atividade 5(a), conforme indica a fala de G3: *Ah, eu não acredito não! Porque daí, o lado dele vai ter que medir* $\sqrt{13}$*... Apesar de que* $\sqrt{13}$ *é um número construtível! Então, a rigor existe. [...] Então, tá, existe também um quadrado com área* $13\ cm^2$.

6.1.8 Atividade 7

[65] Observa-se que a atividade 6 não foi proposta ao aluno brasileiro S4, por não ter sido impressa, juntamente com as demais atividades, para a realização da entrevista com o aluno. Ressalta-se que na atividade 5(a) o aluno indicou mobilizar o TAV6, e que seria possível que na presente atividade o aluno também indicasse tal mobilização.

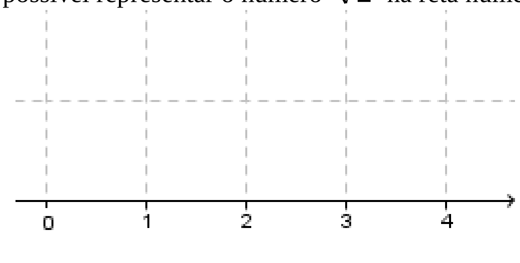
A atividade 7 foi inserida no instrumento de pesquisa, com vistas a analisar se os alunos reconhecem a possibilidade de se representar um número irracional algébrico, tais como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$, na reta numérica. E, desse modo, se desejou colaborar com a possível desestabilização de conhecimentos errôneos, relacionados a segmentos de medidas irracionais, assim como a medida do lado dos quadrados considerados nas atividades 5 e 6.

Sendo assim, foi solicitado aos alunos representarem o número $\sqrt{2}$ na reta numérica, escolhido estrategicamente por ser o número que representa a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários, fato utilizado nas aulas de matemática, desde o 8º ano do Ensino Fundamental, e, respectivamente, na *Quatrième*, após o estudo do teorema de Pitágoras. A intenção era que os alunos representassem o segmento de medida[66] $\sqrt{2}\ u.c$ na reta, com o auxílio da construção de um triângulo retângulo de catetos unitários, transportando a medida da hipotenusa - $\sqrt{2}\ u.c$ - para a reta numérica. Se este procedimento ocorresse, e com o objetivo de confirmar se os alunos mobilizavam corretamente os conhecimentos relacionados à construção de segmentos de medida $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$, a pesquisadora os questionava se seria possível representar o número $\sqrt{5}$ na reta. Para os alunos do Ensino Superior, solicitava-se diretamente que eles representassem o número $\sqrt{5}$ na reta numérica.

Como pode ser observado a seguir, a ficha da atividade 7 foi elaborada com a intenção de facilitar a construção de triângulos retângulos pelos alunos, cujas hipotenusas, de medidas $\sqrt{2}\ u.c.$ e $\sqrt{5}\ u.c$, deveriam ser transportadas para a reta numérica.

Atividade 7

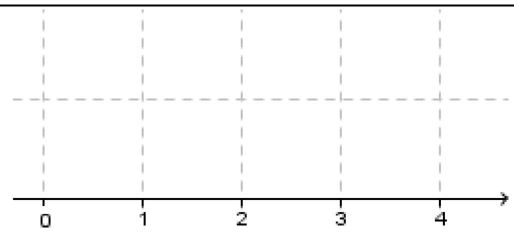
a) Você acha que é possível representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?



b) Você acha que é possível representar o número $\sqrt{5}$ na reta numérica?

---

[66] Nesta tese, utiliza-se *u.c.* para designar unidade de comprimento.



No que se referem a representar o número $\sqrt{2}$, e igualmente o número $\sqrt{5}$, na reta numérica, três categorias foram identificadas nas respostas dos alunos:

Categoria 7.I: Não é possível representar $\sqrt{2}$ na reta numérica.
Categoria 7.II: Representa um número decimal na reta numérica.
Categoria 7.III: Transporta o segmento de medida $\sqrt{2}$ *u.c.* na reta numérica.

Desempenho dos sujeitos colaboradores desta pesquisa

Alusivo aos alunos brasileiros e franceses da Educação Básica, entrevistados nesta pesquisa, pode-se dizer que eles não compreendem sobre a possibilidade de se representar um número irracional algébrico, tal como $\sqrt{2}$, na reta numérica. Pois, 16 alunos - 3 Ensino Fundamental, 4 *Collège*, 1 Ensino Médio, 4 TES, 4 TS – responderam de acordo com a categoria 7.I, exemplificado na fala de F7: *Não. [...] Porque é um número grande demais.* E, os demais 14 alunos da Educação Básica – 4 Ensino Fundamental, 3 *Collège*, 6 Ensino Médio, 1 TS – responderam conforme a categoria 7.II, ilustrado na fala de M5, após representar um ponto entre 1 e 2 na reta e escrever o número $1{,}414213562$: *É, da pra representar aproximadamente, né? Exato eu acho que não*.

Observa-se que, referente às atividades 5(a) e 6, dentre os alunos da Educação Básica, o aluno brasileiro do Ensino Fundamental F4, e o aluno francês S2 de TS, foram ágeis e precisos em suas respostas, dizendo que os lados dos quadrados considerados, mediam, respectivamente, $\sqrt{13}\ cm$ e $\sqrt{24}\ cm$. Desse modo, supunha-se que estes alunos poderiam indicar a mobilização do teorema em ação verdadeiro TAV6: *Seja* $b \in R_+$ *então existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$*, cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}\ cm$, conhecimento que está relacionado com a existência de segmentos de medida irracional algébrica. Entretanto, na presente atividade, estes alunos disseram que é possível representar apenas um valor aproximado de $\sqrt{2}$ na reta, segundo mostra a fala de S2: *Não, é possível representar apenas um valor aproximado 1,4.* As falas desses alunos estão relacionadas, principalmente, à mobilização do Teorema de Pitágoras e a falta de conhecimento da situação de se representar uma medida irracional algébrica na reta, geralmente apresentada nos livros didáticos de Matemática de Ensino Fundamental e Médio.

Por conseguinte, a presente atividade serviu para indicar um fato que esses alunos ainda não haviam manifestado até o presente momento da entrevista, em relação às diferentes representações e significantes dos números irracionais algébricos.

Com referência aos alunos do Ensino Superior, pode-se dizer que os alunos franceses entrevistados compreendem bem sobre a representação de números irracionais algébricos na reta numérica. Com exceção do aluno L2 - que apesar de não ter representado $\sqrt{5}$ na reta numérica, por dizer não se lembrar de um método para isto, ele afirmou que é possível representá-la justificando que se trata de um número real -, os demais alunos representaram corretamente o número $\sqrt{5}$, por meio da construção de um triângulo retângulo de catetos com medida $1\ u.c.$ e $2\ u.c$, transportando a medida da hipotenusa desse triângulo para a reta numérica. Com esta atividade, pode-se indicar a estabilização dos teoremas em ação verdadeiros TAV6 e TAV8, que já havia sido manifestada por estes alunos nas atividades 5(a) e 6, bem como a mobilização do TAV7: *Seja* $n \in Z_+$, *então existe o segmento de medida* $\sqrt{n}$, *sendo possível representá-lo na reta numérica*.

No que diz respeito aos alunos brasileiros do Ensino Superior, apenas 4 desses alunos representaram, corretamente, o número $\sqrt{5}$, transportando a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, construídos por eles, para a reta numérica. Desse modo, indica-se que o teorema em ação TAV7, bem como os teoremas em ação TAV6 e TAV8, estejam estabilizados por esses alunos, pois eles também indicaram a mobilização desses conhecimentos – TAV6 e TAV8 - nas atividades 5(a) e 6.

Os demais alunos – G2, G6 e G7, representaram na reta uma aproximação decimal do número $\sqrt{5}$, tal como $2{,}23$ ou $2{,}5$. No entanto, em referência ao aluno G2, após alegar sobre a representação de $\sqrt{5}$: *Sim, entre dois e três, mais próximo de 3... mais próximo de 2,5*, a pesquisadora questionou como ele representaria o número na reta numérica. Para este número, o aluno foi ágil em pegar o compasso e transportar a medida da diagonal do quadrado de lados unitários para a reta numérica, demonstrando conhecer esta situação. A pesquisadora perguntou, então, por que ele havia representado os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ de modos distintos, uma vez que para $\sqrt{5}$ ele havia representado o número decimal $2{,}23$, e para $\sqrt{2}$ ele havia transportado a medida da hipotenusa. Após pensar alguns instantes, o aluno adaptou seus conhecimentos sobre a representação de $\sqrt{2}$, realizou cálculos, e representou um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{5}\ u.c$, transportando, corretamente, o segmento de medida $\sqrt{5}\ u.c$ para a reta numérica.

Nota-se que, nas atividades precedentes, o aluno G2 havia concebido apenas uma aproximação decimal para os números irracionais algébricos em questão, demonstrando não considerar a existência de segmentos de medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in Z_{+}^{*}$. Todavia, pode-se dizer que, para G2, esta atividade favoreceu momentos de aprendizagens e possibilidades de desestabilização de conhecimentos errôneos, tal como aquele de conceber apenas a existência de quadrados e segmentos de medidas aproximadas, quando se trata de medidas irracionais.

Embora 2 alunos do Ensino Superior brasileiro tenham representado apenas uma aproximação do número $\sqrt{5}$ na reta, nota-se um avanço no desempenho dos alunos do Ensino Superior em relação aos alunos da Educação Básica, quando se trata de representar números irracionais algébricos na reta numérica. Pois, enquanto nenhum aluno da Educação Básica o fez corretamente, 10 alunos do Ensino Superior, dentre os 12 entrevistados, representaram de modo adequado, construindo o segmento de medida irracional, com o auxílio de régua e compasso.

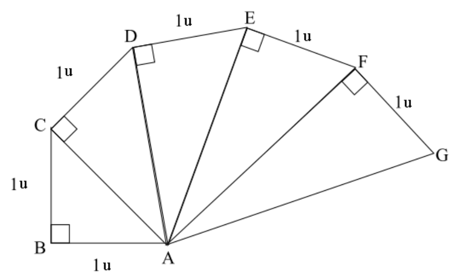
6.1.9 Atividade 8

Ao elaborar a atividade 7, teve - se como hipótese, confirmada com a análise anterior, que alguns alunos, sobretudo os da Educação Básica, poderiam alegar, de modo incorreto, que não seria possível representar o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) na reta numérica, ou, ainda, que eles poderiam representar uma aproximação do número $\sqrt{2}$, por meio de um número decimal. Assim, a presente atividade foi proposta apenas para estes alunos, visando para colaborar para desestabilizar, ou pelos menos perturbar localmente, esses conhecimentos errôneos.

Desse modo, a atividade 8 consistiu em apresentar a construção do caracol pitagórico, mostrando aos alunos uma possibilidade de se construir segmentos de medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$, quando n é um número quadrado perfeito. Após apresentar aos alunos esse método de construção de segmentos, a pesquisadora os questionava se, diante do referido método de construção de segmentos, eles representariam o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) de um modo diferente do que eles haviam representado na atividade 7.

Atividade 8

a) Considere o triângulo retângulo ABC de catetos unitários. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?
b) Considere o triângulo retângulo ACD, no qual um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo precedente e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?
c) Considere o triângulo retângulo ADE, no qual um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo ACD e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?
d) Agora que você conheceu um método de construção de segmentos de medidas $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$, você representaria na reta o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) de um modo diferente que você representou na atividade anterior?



Para a atividade 8, as categorias percebidas nas respostas dos alunos foram:

Categoria 8.I: Não é possível representar o número $\sqrt{2}$ na reta, ou representa uma aproximação decimal.
Categoria 8.II: É possível representar $\sqrt{2}$ na reta numérica, porém, não sabe como pode fazê-lo.
Categoria 8.III: Representa $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) utilizando-se da construção de triângulo retângulo, e transporta a medida da hipotenusa para a reta.

Desempenho dos sujeitos colaboradores desta pesquisa

Em relação às respostas dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, apenas um aluno francês – C1 – utilizou-se de passos da construção do caracol pitagórico, para transportar o segmento de medida $\sqrt{2}$ *u.c.* na reta numérica, demonstrando, portanto, um avanço em seu desempenho, perante os demais alunos desse nível de ensino.

Quanto aos alunos brasileiros do Ensino Fundamental, após conhecerem sobre a construção de segmentos de medida irracional, pode-se dizer que o desempenho de 4 desses alunos avançou, no sentido de que embora não soubessem representar, eles passaram a perceber sobre a possibilidade de representar tal medida na reta numérica, conforme o fragmento da entrevista de F1: *Agora eu acho que sim! Deixando na raiz. [...] Só que é difícil eu fazer esta dedução porque eu não aprendi isto ainda*.

Já, no que se refere aos demais alunos franceses do *Collège,* eles afirmaram que não conseguiriam representar a referida medida, ou eles realizaram tentativas erradas, conforme exemplifica as ações do aluno C5. Embora ele dissesse ser possível representar $\sqrt{2}$ na reta, para isto, ele construiu, de modo incorreto, um retângulo de lados com medidas 1 e 1,41 e diz que $\sqrt{2}$ é o ponto representado por 1,41.

No que se refere aos alunos do Ensino Médio e *Lycée*, enquanto apenas 2 alunos do Ensino Médio demonstraram compreender sobre a construção e representação do segmento de medida $\sqrt{2}$ *u.c.*, 7 alunos do *Lycée* o representaram corretamente, apresentando avanços, em relação às suas respostas nas atividades precedentes. É preciso destacar que apenas 1 aluno de TES e 1 aluno de TS não souberam representar o número $\sqrt{2}$ na reta, porém, disseram que tal representação é possível, como ilustra a fala de S4: *Sim... Mas eu não sei como representar* (o aluno chega construir um triângulo retângulo de catetos unitários, mas não transporta a medida da hipotenusa para a reta).

Os demais alunos do Ensino Médio continuaram a mobilizar os conhecimentos equivocados, percebidos em suas falas no decorrer da atividade 7. Eles alegaram ou que representariam o número decimal conforme o fizeram na atividade precedente, ou que não seria possível representar $\sqrt{2}$, por se tratar de um número com muitas casas decimais, conforme justifica M7: *Eu não sei como marcar na reta porque eu não conheço todas as casas dele.* Isto mostra o quão resistente é esse conhecimento errôneo de que um número irracional, por ter infinitas casas decimais, não pode ser representado na reta numérica, deixando implícito a presença do teorema em ação falso TAF7: *Se* $n \in N$ *não é quadrado perfeito, então não é possível representar* $\sqrt{n}$ *na reta numérica*. A manifestação do TAF7 impossibilita esses alunos de compreenderem a existência de um quadrado de medida de lado irracional, acarretando na mobilização do teorema em ação falso TAF6, conforme foi notado no decorrer das entrevistas.

Quanto aos 3 alunos brasileiros do Ensino Superior submetidos a esta atividade, é legítimo afirmar que a presente situação favoreceu para estes alunos compreenderem sobre a representação de segmentos de medidas irracionais, segundo atesta a fala de G7: *Sim, preciso construir um triângulo de hipotenusa* $\sqrt{5}$ *e transportar com o compasso*, indicando, portanto, a desestabilização do TAF7, manifestado por esses alunos, na atividade precedente. Destarte, é possível, ainda, afirmar que esta atividade favoreceu com a desestabilização do TAF6, conforme ilustra a fala do aluno G2, após representar o segmento de medida $\sqrt{5}\ u.c$ na reta numérica: *Então, a partir disto eu posso construir o quadrilátero com esta medida de lado?*

CONCLUSÕES

Para finalizar este texto, serão apresentadas as respostas relacionadas às duas questões que contribuíram para o desenvolvimento da investigação - *Quais os conhecimentos mobilizados por alunos que finalizam o Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática (e os correspondentes níveis franceses), em atividades matemáticas envolvendo números irracionais? Quais as semelhanças e diferenças do desempenho de alunos brasileiros e franceses, de níveis de escolarização correspondentes?* – e, igualmente, serão contempladas as contribuições da fundamentação teórica e da metodologia adotadas, a influência dos fatores históricos e dos sistemas de ensino para os resultados obtidos, bem como perspectivas para estudos posteriores.

Quanto aos procedimentos metodológicos – entrevistas individuais sustentadas na resolução de atividades previamente elaboradas - eles foram considerados pertinentes, pois permitiram a comunicação entre pesquisadora e cada um dos sujeitos investigados, e possibilitaram acompanhar o raciocínio de cada um deles no desenrolar das entrevistas, suas falas, expressões, hesitações e gestos. Além disso, a metodologia oportunizou esclarecer ambiguidades percebidas, e acrescentar questões para sanar dúvidas, por parte da pesquisadora, sobre a compreensão dos alunos pelas situações propostas, conforme indicado nas análises desta pesquisa.

A Teoria dos Campos Conceituais foi, certamente, valiosa para esta investigação, favorecendo a estruturação do instrumento de pesquisa, das análises e, sobretudo, fundamentou a hipótese de pesquisa - *O desenvolvimento do conceito de números irracionais necessita de um longo período de escolarização para ser compreendido pelos alunos, sendo este conceito aprimorado progressivamente, conforme avança os níveis escolares* -, comprovada com os resultados desta tese.

Referente às análises, a Teoria dos Campos Conceituais ofereceu subsídios para compreender o desempenho dos alunos no decorrer das entrevistas, oportunizando, especialmente, revelar indicações de conhecimentos implícitos em suas respostas, por meio da categoria que Vergnaud (1990) denomina por *teorema em ação*. Desse modo, foi possível apontar conhecimentos relacionados aos números irracionais, mobilizados pelos alunos de cada nível de ensino, bem como as diferenças entre os conhecimentos de alunos de níveis de ensino distintos, permitindo, portanto, responder as questões de pesquisa.

Uma síntese desses conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos, modelados na forma de teoremas em ação, e associados às ideias base de número irracional, é apresentada no quadro 12 a seguir. As ideias base[67] V, VII, IX e X, dentre as quais, as ideias base VII, IX e X foram questionadas apenas aos alunos do Ensino Superior, não foram contempladas no quadro 12 porque elas não foram associadas no decorrer das entrevistas a teoremas em ação, possíveis de serem mobilizados nas falas dos sujeitos.

Quadro 12 - Resumo de indicativos de teoremas em ação mobilizados pelos sujeitos no decorrer das entrevistas associados às ideias base de número irracional

Ideias Base	Indicativos de TAF	Indicativos de TAV
I. Compreender sobre as infinitas casas decimais de alguns números.	**TAF3:** Se um número x tem representação decimal infinita, então x é irracional. **TAF4:** Se p não é quadrado perfeito, $\sqrt{p}$ pode ter finitas casas decimais. **TAF5:** Se $p \in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{p}$ é o número decimal exibido pelo visor da calculadora.	**TAV1:** Se um número x possui infinitas casas decimais não periódicas, então x é irracional.
II. Compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem.	**TAF6:** Seja x um número não inteiro, então não existem $p, q \in Z$, com $q \neq 0$ tal que $x = \frac{p}{q}$.	**TAV2:** Se um número x pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in Z$ e $q \neq 0$, então x é racional. **TAV3:** Se um número p não é racional, então p é irracional.
III. Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas.	**TAF1:** Se x não é um número inteiro, então x é irracional. **TAF2:** Se x é um número negativo, então x é irracional. **TAF3:** Se um número x tem representação decimal infinita, então x é irracional. **TAF6:** Seja x um número não inteiro, então não existem $p, q \in Z$, com $q \neq 0$ tal que $x = \frac{p}{q}$.	**TAV1:** Se um número x possui infinitas casas decimais não periódicas, então x é irracional. **TAV2:** Se um número x pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in Z$ e $q \neq 0$, então x é racional. **TAV3:** Se um número p não é racional, então p é irracional.

[67] As ideias base V, VIII, IX e X, dentre as quais, as ideias base VIII, IX e X foram questionadas apenas aos alunos do ensino superior, não estão disponibilizadas no quadro 12 porque elas não foram associadas no decorrer das entrevistas a teoremas em ação, possíveis de serem mobilizados nas falas dos sujeitos. Ideias base: V) Saber aplicar o teorema de Pitágoras. VIII) Saber demonstrar que os números algébricos da forma $\sqrt{n}$, com *n* não quadrado perfeito, não são racionais. IX) Conhecer definições, propriedades e exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis. X) Conhecer as teorias de Eudoxo, Dedekind e Cantor para a construção dos números reais.

IV. Considerar a existência de números irracionais e perceber pra quê esses números servem.	**TAF6:** Seja x um número não inteiro, então não existem $p, q \in Z$, com $q \neq 0$ tal que $x = \frac{p}{q}$. **TAF7:** Se $n \in N$ não é quadrado perfeito, então não é possível representar $\sqrt{n}$ na reta numérica. **TAF10:** Se $b \in R_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é $A = b\ cm^2$. **TAF11:** Seja $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ existe se e somente se a é quadrado perfeito.	**TAV1:** Se um número x possui infinitas casas decimais não periódicas, então x é irracional. **TAV3:** Se um número p não é racional, então p é irracional. **TAV5:** Se $y \in R_+$ então a equação $x^2 = y$ tem solução em R, dada por $x = \pm\sqrt{y}$. **TAV6:** Seja $b \in R_+$ então existe um quadrado de área $A = b\ cm^2$, cuja medida dos lados é $\sqrt{b}\ cm$. **TAV7:** Seja $n \in Z_+$, então existe o segmento de medida $\sqrt{n}$, sendo possível representá-lo na reta numérica. **TAV8:** Se $a \in R_+$, então existe $\sqrt{a}$.
VI. Aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.	**TAF7:** Se $n \in N$ não é quadrado perfeito, então não é possível representar $\sqrt{n}$ na reta numérica. **TAF10:** Se $b \in R_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é $A = b\ cm^2$. **TAF11:** Seja $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ existe se e somente se a é quadrado perfeito.	**TAV6:** Seja $b \in R_+$ então existe um quadrado de área $A = b\ cm^2$, cuja medida dos lados é $\sqrt{b}\ cm$. **TAV7:** Seja $n \in Z_+$, então existe o segmento de medida $\sqrt{n}$, sendo possível representá-lo na reta numérica. **TAV8:** Se $a \in R_+$, então existe $\sqrt{a}$.
VII. Aceitar que a equação $x^2 = p$ tem solução real, para todo $p \in R_+$.	**TAF8:** Se $p \in R_+$ não é quadrado perfeito então não existe $x \in R$ tal que $x^2 = p$. **TAF9:** Se $p \in R_+$ então $x^2 = p$ tem solução real, dada por $x = \sqrt{p}$.	**TAV4:** Sejam p e $q \in R_+$, $\sqrt{p} = q \Leftrightarrow p = q^2$. **TAV5:** Se $y \in R_+$ então a equação $x^2 = y$ tem solução em R, dada por $x = \pm\sqrt{y}$.

Fonte: a autora desta pesquisa

Dentre os conhecimentos manifestados pelos alunos no decorrer das entrevistas, atribui-se atenção especial aos onze teoremas em ação falsos relacionados aos números irracionais, possíveis de serem mobilizados por alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior de Matemática. Afinal, em conformidade com a Teoria dos Campos Conceituais, é a desestabilização de conhecimentos falsos como estes que vão favorecer a compreensão do conceito de números irracionais pelos sujeitos no decorrer de suas escolarizações.

Quanto aos conhecimentos e desempenhos, relacionados ao Campo Conceitual dos *números irracionais*, a presente pesquisa permite afirmar que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège* os mobilizam de modo correspondente, não sendo possível apontar diferenças significativas entre suas respostas, nem perceber avanços em seus desempenhos, apesar de terem sido analisados sujeitos de sistemas de ensino culturalmente distintos, e dos currículos explicitarem ou não estes números. De acordo com os resultados obtidos, esses alunos não compreendem seis dentre as sete ideias base especificadas na seção 5, relacionadas aos números irracionais, mobilizando, portanto, teoremas em ação falsos associados às ideias base conforme o quadro 12. Apenas a ideia base referente ao teorema de Pitágoras foi mobilizada corretamente pelos alunos.

Muitas das semelhanças nas respostas dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège* dizem respeito aos conhecimentos falsos mobilizados por esses alunos no ato das entrevistas. Destaca-se que os referidos alunos não distinguem números racionais de irracionais, e não reconhecem como irracional nem ao menos certos irracionais protótipos, tais como $\sqrt{2}$ e π. Além disso, eles não souberam dizer para quê servem os números $\pi, \sqrt{3},\ 0{,}10100...$, embora o estudo de áreas e perímetros de circunferências, e volumes de esferas, que estão diretamente relacionadas ao número π, faça parte dos currículos brasileiros e franceses para esse nível de ensino, assim como o estudo do teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo, os quais se relacionam ao significante $\sqrt{3}$.

Em relação aos conhecimentos mobilizados sobre soluções de equações do segundo grau da forma $x^2 = b,\ b \in R_+$, foi possível notar que, embora de acordo com os currículos brasileiros e franceses, este conteúdo seja estudado nesse nível de ensino, nenhum desses alunos apresentou a solução negativa das equações contempladas no rol de atividades. Porém, quando se refere ao valor de b negativo, assim como a equação considerada na pesquisa $x^2 = -9$, surgem, de modo equivocado, nas respostas de seis alunos, sendo três alunos do Ensino Fundamental e três alunos do *Collège*, duas soluções – uma positiva e uma negativa -, conforme apontam as análises.

No que se refere a situações que envolvem a *raiz quadrada* de um número, foi possível constatar que o domínio numérico dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège* diz respeito aos números inteiros quadrado perfeito, pois nove desses alunos disseram que as equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ não possuem solução porque não existe um número que se elevado ao quadrado resulte em 17 ou π. Ademais, esses alunos afirmaram sobre a existência de um quadrado de medida de área $A = 25\ cm^2$, justificando que a medida do seu lado é $5\ cm$, devido ao fato de que a área de um quadrado é dada por $l \times l$, ou l^2. Porém, para os quadrados de medidas de área $13\ cm^2$ e $24\ cm^2$, os alunos concluíam pela não existência, e alegavam que não existe um número que represente a medida do lado do quadrado que se elevado ao quadrado resulte em 13 ou 24.

Destaca-se que, ao negar a existência de um quadrado, esses alunos estão negando a existência da medida do lado do quadrado, que se trata de um número irracional. Este conhecimento falso é tão resistente para esses alunos, que mesmo diante de um método de construção de segmentos de medida irracionais da forma $\sqrt{n},\ n \in Z_+$, apresentado na última atividade da entrevista, com o objetivo de contribuir para a desestabilização desse conhecimento equivocado, apenas um aluno do *Collège* demonstrou ter compreendido a situação e representou o segmento de medida $\sqrt{2}\ u.c.$ na reta.

Desse modo, esta pesquisa mostra que embora currículo e livros didáticos brasileiros explicitem os números irracionais, sendo contemplado nos livros didáticos de 8º ou 9º ano um capítulo para o estudo dos conjuntos numéricos; e, embora no currículo francês, o conceito de raiz quadrada seja contemplado pelos livros didáticos da *Troisième* (corresponde ao 9º ano) com um capítulo específico para seu estudo, os alunos brasileiros do Ensino Fundamental, e os alunos franceses do *Collège*, entrevistados nesta pesquisa não apresentaram diferenças significativas em suas respostas, e mobilizaram conhecimentos falsos correspondentes.

Em relação aos alunos do Ensino Médio e *Lycée* – TES e TS foram identificadas semelhanças e diferenças em seus desempenhos, sendo percebido, dentre os alunos de TS, respostas mais precisas, com menor frequência de teoremas em ação falsos e maior indicativo de desestabilização, ou pelo menos de perturbação local, de conhecimentos equivocados. Desse modo, comparando o desempenho dos alunos entrevistados de Ensino Médio, TES e TS, é possível afirmar que existe avanço no desempenho dos alunos de TS, diante de situações do Campo Conceitual dos números irracionais. Este fato não surpreende, uma vez que os alunos de TS são preparados para ingressar em cursos universitários de Ciências Exatas, recebendo, portanto, maior ênfase nas disciplinas de Matemática, bem como carga horária mais ampla do que os alunos dos demais *Lycée* e do Ensino Médio brasileiro, conforme mostrado na seção 4.

Assim como era esperado, devido à experiência escolar, também foram constatados avanços e diferenças nos desempenhos dos alunos do Ensino Médio e TES em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*. Todavia, esta pesquisa mostra que os alunos do Ensino Médio e *Lycée* também não compreendem as ideias base de números irracionais em sua totalidade, o que significa, portanto, que eles não vivenciaram ou não compreenderam, no decorrer de suas escolarizações, situações relacionadas aos números irracionais, tais como aquelas propostas nesta pesquisa. Este fato expressa, sobretudo em relação ao sistema de ensino brasileiro, que os alunos ingressam no Ensino Superior de Matemática, ou de outras áreas de Ciências Exatas, sem ao menos compreender as ideias base de números irracionais.

Uma diferença percebida, que não foi considerada como um avanço, entre as respostas dos alunos do Ensino Médio e *Lycée*, e dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, diz respeito ao uso da calculadora. A manipulação com a calculadora está mais presente nos alunos do Ensino Médio e *Lycée*, embora nem sempre mobilizada corretamente, quando se trata de números irracionais. É revelado, desse modo, o modelo de Concepção Aproximada - CA $\approx$ (BRONNER, 1997), no qual a raiz quadrada é manifestada sob um aspecto de operador-algoritmo: $\sqrt{\ } : \rightarrow c$, onde c é o valor aproximado oferecido pela calculadora.

Para favorecer a desestabilização desses conhecimentos falsos relacionados aos números irracionais e uso da calculadora, sugere-se que nos momentos de ensino dos números irracionais, o professor disponibilize a seus alunos calculadoras com capacidades de dígitos distintas em seus visores, de modo a favorecer resultados distintos relativos às quantidades de dígitos disponíveis. Nesse momento, também se considera importante a apresentação de um software, como, por exemplo, o Excel, que favoreça cálculos com várias casas decimais sem o armazenamento de dígitos que acarreta em arredondamentos de certos números, assim como ocorre com algumas calculadoras, como as duas utilizadas durante as entrevistas desta pesquisa, conforme já mencionado na atividade 5(b).

Concernente aos avanços dos alunos de Ensino Médio e TES em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, destaca-se que esses alunos de nível mais avançado consideram a existência de todos os números representados nos cartões na atividade 1, e apresentaram aplicações para o número π, relacionando-o com fórmulas de área e perímetro de circunferência; eles reconhecem, por unanimidade, a não existência de solução real para a equação $x^2 = -9$, e apresentam indicativos de domínio numérico mais amplo do que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*.

No que diz respeito à existência de segmentos com medidas irracionais, os alunos do Ensino Médio e *Lycée* também mobilizam conhecimentos falsos. No entanto, a possibilidade de desestabilizá-los, ou pelo menos perturbá-los localmente, é mais concebível do que em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, conforme os resultados da atividade 5(b) e atividade 8.

Segundo o que se presumia, devido o longo período escolar, experiências com estudos e situações matemáticas, o maior desempenho, no decorrer das entrevistas, ocorreu com os alunos do Ensino Superior. Estes sujeitos apresentaram respostas mais precisas, menor quantidade de conhecimentos falsos, mobilização consciente da decimalização proporcionada pela calculadora, e possibilidade de desestabilizar, ou pelo menos perturbar localmente, teoremas em ação falsos.

Entretanto, as análises mostram que conhecimentos falsos ligados às situações relacionadas aos números irracionais também se fazem presentes nas respostas desses futuros professores de Matemática. Destaca-se o fato de alguns alunos não considerarem a não periodicidade dos números irracionais, classificando $0{,}101001000\ldots$ como racional, ou $0{,}333\ldots$ como irracional, e não saberem sobre a não periodicidade de $\sqrt{2}$; dificuldades com a ideia de infinito; não justificam a existência de números irracionais transcendentes tal como $0{,}101001000\ldots$; não consideram a existência e não sabem representar segmentos de medidas irracionais algébricas, e chegam a negar a existência de quadrados cuja medida de área é $13\ cm^2$ ou $24\ cm^2$.

Todas as incompreensões percebidas nas respostas de alguns alunos do Ensino Superior brasileiro e francês estão relacionadas às ideias base de números irracionais, presentes explicitamente no currículo brasileiro da Educação Básica e implicitamente no currículo francês da Educação Básica. Cabe salientar que, em relação às teorias de construção do conjunto dos números irracionais, elucidadas na seção 2, os alunos entrevistados disseram ter estudado ou ter ouvido falar sobre elas, porém nenhum deles soube explicitá-las, dizer para quê serve ou dizer do que se tratam. Esses fatos comprovam a hipótese desta pesquisa, em relação à necessidade de um longo período escolar para que os alunos se apropriem do conceito de números irracionais, por meio de diversas situações vivenciadas durante a escolarização.

Considerando respostas precisas, mobilização de teoremas em ação verdadeiros e falsos, tempo de reflexão e hesitação para apresentar solução, adaptação das situações propostas a situações possivelmente já vivenciadas pelos alunos, possibilidade de desestabilizar ou perturbar localmente conhecimentos equivocados, foi percebido um avanço no desempenho dos alunos franceses do Ensino Superior em relação aos alunos brasileiros de mesmo nível, sobretudo em relação às atividades 3, 4, 5, 6 e 7, conforme apontam as análises.

Entretanto, com relação às situações presentes no Campo Conceitual dos números irracionais, e considerando os sistemas de ensino brasileiro e francês, constatou-se que, independente do sistema de ensino em que os alunos estejam inseridos, seu desempenho avança conforme avança o nível de escolarização. Ademais, no estágio de desenvolvimento cognitivo em que os alunos se encontram ao finalizar o nível semelhante ao Ensino Fundamental, o desempenho e os conhecimentos mobilizados por esses alunos sobre os números irracionais são semelhantes. Igualmente, este fato foi observado no desempenho dos alunos que finalizam o Ensino Médio e TES, ou seja, apenas em um ensino que recebe maior ênfase matemática, assim como recebem os alunos de TS, foi possível constatar avanço significativo em seus desempenhos em relação aos demais sujeitos entrevistados de nível de ensino correspondente.

No sistema de ensino francês, de modo geral, são os alunos que cursam TS que ingressam nos cursos universitários de Matemática. Por consequência, com base matemática mais consistente, os alunos franceses do Curso de Matemática apresentaram, nesta pesquisa, avanço em seus desempenhos nas atividades propostas, em relação aos alunos brasileiros. No entanto, ressalta-se que esta análise é geral, com olhar voltado para as respostas de todos os alunos franceses e de todos os alunos brasileiros entrevistados, pois é preciso considerar que houve respostas de alunos brasileiros que, no decorrer de toda a entrevista, tiveram desempenho semelhante ou mais avançado do que certos alunos franceses.

Na França, atualmente, não há explicitamente um estudo sobre os números irracionais no currículo da Educação Básica. No entanto, os alunos do *Lycée* entrevistados nesta pesquisa fizeram parte da última turma em que o estudo dos conjuntos numéricos ainda fazia parte dos currículos da *Seconde*. Porém, mesmo que esses números não sejam explicitados no currículo, não se pode negar que as situações, os conceitos e os significantes relacionados ao Campo Conceitual dos números irracionais estão presentes a todo o momento nas aulas de Matemática, ao longo da vida escolar dos alunos.

Desse modo, a presente pesquisa mostra que, independente de este conceito estar explícito ou não nos currículos e livros didáticos, de apresentar ou não a definição dos números irracionais aos alunos, de se inserir ou não um capítulo nos livros didáticos para se estudar a natureza dos números – racionais, irracionais, reais -, estes fatores não interferem na aprendizagem dos alunos em relação à natureza dos números. Ao contrário, os resultados da presente investigação apontam que é a experiência escolar, a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos, e a disponibilidade do professor em conhecer e apresentar a seus alunos atividades que favoreçam a desestabilização de conhecimentos falsos, que vão favorecer a apropriação do conceito de números irracionais.

Assim, com a presente pesquisa constata-se que a institucionalização dos números irracionais, bem como dos números reais, no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental, conforme vem sendo explorado nas aulas de matemática, e conforme consta no currículo brasileiro da Educação Básica, não contribui para a compreensão desse conceito pelos alunos desse estágio de desenvolvimento cognitivo. Afinal, esta investigação que envolveu sujeitos de sistemas de ensino culturalmente distintos, de modo especial em relação aos números irracionais, mostra que os conhecimentos mobilizados por esses alunos nas atividades contempladas no instrumento de pesquisa não apresentaram diferenças significativas, especialmente em relação aos alunos que finalizam o Ensino Fundamental e nível correspondente francês.

Assim, infere-se que as dificuldades de aprendizagens desse conceito estão relacionadas à sua natureza epistemológica, necessitando, portanto, atenção especial por parte de professores da Educação Básica, e, sobretudo de professores de Cursos de Licenciatura em Matemática, responsáveis pela formação de professores.

Os resultados desta pesquisa indicam ainda que para favorecer a compreensão do conceito de número irracional pelos alunos, é importante que o professor conheça os conhecimentos implícitos possíveis de serem mobilizados por seus alunos, conforme indicados no quadro 12, para que ele possa melhor compreender as respostas de seus alunos e, então, explorar diferentes situações presentes no Campo Conceitual dos números irracionais. Sugere-se que as atividades contempladas em sala de aula sejam escolhidas, conforme as contempladas nesta pesquisa, com vistas a desestabilizar teoremas em ação falsos, possíveis de serem manifestados nas ações dos alunos.

Ressalta-se, ainda, a importância de se explorar em sala de aula situações relacionadas a Teorema de Pitágoras, trigonometria, resolução de equações polinomiais, áreas de figuras planas, volumes de sólidos geométricos, construções geométricas com medidas irracionais, entre outras, para que com o decorrer do período escolar o conceito de número irracional possa ser apropriado pelos alunos.

Observa-se que as dificuldades dos alunos em compreender o conceito de números irracionais, assim como a necessidade de longo período escolar para sua apropriação, podem ser reflexos do percurso histórico desses números. Pois, conforme os resultados da seção 2, a História da Matemática nos revela os períodos conflituosos, cheios de dúvidas, além do longo tempo que levou para a construção de teorias consistentes, especialmente por Cantor e Dedekind, para a formalização dos números irracionais.

Nesse sentido, surge a importância dos Cursos de Licenciatura em Matemática favorecerem aos futuros professores o acesso a fatos históricos dos números irracionais, as origens desses números, as dificuldades e conflitos enfrentados pelos matemáticos até a formalização desse conceito. Pois, assim como aponta Cobianchi (2001), com poucas exceções, a abordagem dos números reais nas obras da Educação Básica leva o leitor a crer que não houve qualquer percalço em toda a trajetória dos números reais.

Ainda em relação aos futuros professores de Matemática, é importante que eles tenham oportunidades em suas formações de conhecer sobre os processos de construção dos irracionais, não somente com o propósito de estudarem uma matemática avançada, com pura formalidade, ou a teoria pela teoria, mas, sim, com vistas a favorecer alicerces para futuras práticas pedagógicas e argumentações em sala de aula da Educação Básica, para compreender as dificuldades de seus alunos e melhor contribuir para suas superações.

Quanto aos resultados desta pesquisa, espera-se que eles contribuam com os professores da Educação Básica, no sentido de perceberem que certos conhecimentos relacionados aos números irracionais, possíveis de serem manifestados por seus alunos, não podem ser tratados como um simples erro. Afinal, esta pesquisa mostra que estes conhecimentos podem permanecer arraigados até a fase adulta, caso os alunos não tenham acesso a situações matemáticas que favoreçam a desestabilização desses conhecimentos. E, sobretudo, que apresentar a definição de número irracional e apresentar exemplos não é suficiente para os alunos construírem este conceito. É preciso que eles vivenciem diversas situações, compreendam e relacionem diversas representações e significantes, passem por momentos de desequilíbrios, desestabilizem conhecimentos falsos, para que, com o passar dos anos escolares, possam efetivamente conhecer e compreender os números irracionais.

Espera-se que estes resultados também favoreçam aos professores dos Cursos de Matemática, para perceberem que nem ao menos a natureza dos números, presente no currículo da Educação Básica, é compreendida pelos alunos que ingressam no Ensino Superior. Corre-se o risco de os futuros professores de Matemática entrarem numa sala de aula como professor desta disciplina sem compreender e ter vivenciado, em sua escolarização, situações que favoreçam a compreensão das ideias base de números irracionais, conforme mostra esta pesquisa. Pois, conforme mencionado na seção 2, Cobianchi (2001) alerta que, em se tratando de obras utilizadas nos cursos de Matemática, elas não abordam construções dos números reais viáveis para a preparação dos futuros professores de Ensinos Fundamental e Médio.

As atividades que contemplaram o instrumento de pesquisa foram elaboradas levando em consideração diversas situações, significantes, representações e possibilidades de teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos, relacionados ao Campo Conceitual dos números irracionais. Algumas atividades, ainda, como as atividades 5(b), 6 e 8, foram inseridas com o objetivo de favorecer a desestabilização, ou pelo menos perturbação local, desses falsos conhecimentos que supostamente poderiam ser mobilizados pelos alunos. Estes fatores considerados favorecem, segundo Vergnaud, aprendizagens aos alunos, fato que pode ser confirmado no decorrer das entrevistas.

Desse modo, sugere-se que esta sequência de atividades, ou outra sequência de atividades que atendam esses requisitos, seja contemplada nas aulas de Matemática tanto da Educação Básica, quanto do Ensino Superior, como, por exemplo, nas disciplinas de Estágio Supervisionado, Prática de Ensino, Didática da Matemática ou Complementos de Matemática, para favorecer a compreensão do conceito de número irracional pelos alunos.

Sobretudo, aos futuros professores de Matemática, nas disciplinas já mencionadas, além desta sequência de atividades favorecer aprendizagens a esses futuros professores, após resolver as atividades, sugere-se que os resultados da presente pesquisa possam ser discutidos com estes futuros professores para que eles venham a conhecer os possíveis erros de seus futuros alunos, e estarem mais bem preparados para lidar com estes erros e contribuir com a construção do conceito de número irracional de seus futuros alunos.

Como sugestões para pesquisas futuras, sugere-se que se utilizem as atividades contempladas numa investigação com professores de Matemática da Educação Básica e Superior, no sentido de questioná-los, individualmente, sobre o que eles pensam que seus alunos responderiam em cada uma das atividades. Desse modo, seria possível confrontar os conhecimentos dos alunos, de acordo com os resultados da presente tese, com as suposições dos professores sobre os conhecimentos dos alunos, relacionados ao Campo Conceitual dos números irracionais. Além disso, seria possível buscar na fala desses professores indicativos que favoreçam a elaboração de outras desestabilizações do conceito de número irracional, que por ventura não tenham sido contempladas nesta tese.

Outra possibilidade de investigação futura seria observar em sala de aula, no decorrer do ano letivo do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na disciplina de Cálculo I, quais situações e conceitos do Campo Conceitual dos números irracionais são efetivamente trabalhados, e como são realizadas as abordagens destas situações.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática.** 2ª Ed. Trad. João B. P. de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2002.

ACZEL, Amir D. **O mistério do Alef**: A matemática, a cabala e a procura pelo infinito. Editora Globo, 2003.

ASSUDE, Teresa. **Racines carées: conceptions et mises en situations d'élèves de quatriéme et troisiéme**. Petit X, nº 20, pp. 5 à 33, 1989.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. Editora Edgard Blücher Ltda., 2001

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira**. Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica.** Dissertação de mestrado, Programa de Pós – Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL, Londrina, 2004.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar ; BITTAR, Marilena. O ensino da Geometria e a teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais da 25ª Reunião Anual da Anped**. Caxambu, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes curriculares nacionais formação de professores em nível superior**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.

BRONNER, Alain. **Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée**. Thèse, Université J. Fourier, Grenoble, 1997.

BRONNER, Alain. Connaissances Maliens a propos de la Racine Carrée. **Petit X**, n. 28, pp. 119 a 55, IREM de Grenoble, Grenoble, 1992.

BROUSSEAU, Guy**. Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Théorie des situations didactiques**, RDM, Pensée Sauvage, Grenoble, 1998.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática.** Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico:** usando os exames de Piaget. São Paulo: Cortez, 1989.

COBIANCHI, Antônio Sérgio. **Estudos de continuidade e Números Reais: Matemática, descobertas e justificativas de professores**. Tese de doutorado. UNESP, Rio Claro, Instituto de Geociências e Ciências exatas, 2001.

COUSQUER, Eliane. **La fabuleuse Histoire des Nombres**. Diderot Editeur, Arts et Sciences, 1998.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005.

DAUMAS, Denis; GUILLEMOT, Michel. Faut-il toujours raison garder? Des grandeurs incommensurables aux nombres réels. In: **Histoires des Problèmes. Histoire des Mathématiques**. Editeur Ellipses Paris, 1993 Collection : IREM - Epistémologie et Histoire des Maths, pp 33 a 57.

DEDEKIND, Richard. **La création des nombres.** Librairie Philosophique J. VRIN, 2008.

DOUADY, Régine. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 7, n. 2, pp. 5 a 31, 1986.

DUVAL, Raymond. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**. IREM, n. 17, pp. 120 – 138.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Trad. H. H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FISCHBEIN, Efraim, JEHIAN, Ruth, COHEN, Dorit. The concept of irrational number in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**. pp. 29 a 44, 1995.

FRANCE. Bulletin Officiel (B. O.) nº 30 du 23 du juillet 2009. **Programmes des Mathématiques. Classe de Seconde**. Disponível em: <http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html>. Acesso em: nov. 2011.

FRANCE. Bulletin Officiel spécial (B. O.) nº 6 du 28 du août 2008. Programmes du Collège. **Programmes de l'enseignement de Mathématiques**. Disponível em: <http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf>. Acesso em: nov. 2011.

FREITAS, J. L. M. **A evolução do pensamento matemático**. Revista Integração, publicação do Departamento de Matemática UFMS, 2ª edição, Campo Grande. Editora da UFMS, 1987.

GODEFROY, Grilles. **A Aventura dos Números.** Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

GRINGS, Edi Terezinha de Oliveira; CABALLERO, Concesa; MOREIRA, Marco Antonio. **Uma proposta didática para abordar o conceito de temperatura a partir de situações, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud.** Revista Brasileira de Educação Científica e Tecnológica, v.1, n.1, 2008b.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo; SILVA, Benedito Antônio da. Concepções dos alunos sobre números reais. In: LACHINI, J., LAUDARES, J. B. (Org.). **A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo.** Editora FURMAC, Belo Horizonte, 2001.

JACQUIER, Isabelle. Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième? **Petit x.** N. 41, pp. 27-50. IREM de Grenoble, Grenoble, 1996.

LARGUIER, Mirène. La connaissance des differents types de nombres: un problème de la profession en seconde. **Recherches en Didactique des Mathématiques**,. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 32, n°1 pp. 101-144, 2012.

LOBORDE, Colette , VERGNAUD, Gérard. L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. In : **Apprendissages et didactiques, où en est-on ?** Org. Vergnaud, G. Editora HACHETTE Éducation. pp. 63-93, Paris, 1994.

LOIZOS, Peter. Vídeo, filme e fotografias como documentos de pesquisa. In : BAUER, Martin W., GASKELL, George (Org). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som : um manual prático.** 8ª edição, Petrópoles, Rj : Vozes, 2010. p. 137-155.

LORIN, João Henrique. **Uma Revolução Científica na Matemática: do Paradigma Pitagórico ao Paradigma Euclidiano.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas, UEM, Maringá, 2009.

MELO, Severino Barro de**.** A compreensão do conceito de números irracionais e sua história: um estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. **Revista Symposium,** Recife, Ano 3, n. 1, p. 27-36, jan./jun. 1999. Disponível em: <www.unicap.br/Arte/ler.php?art_cod=1512 >. Acesso em: 30 jan. 2010.

MIGUEL, Antônio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática.** 1993. 361 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993. Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000069861 >. Acesso em: 27 out. 2009.

PARANÁ, **Diretrizes Curriculares de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio: Matemática** – Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2008, 50p.

ROBINET, Jacqueline. **Les Réels: quel modèles en ont les élèves? Cahier de didactique des mathématiques.** I.R.E.M. Université Paris VII, nº21, 1986.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2012.

SARAIVA, José Cloves Verde. **As pirâmides do Egito e a razão áurea.** Revista do Professor de Matemática, nº 48, 2002.

SOARES, Eliane Faria; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plínio Cavalcati. Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Revista Zetetikè,** v. 7, n. 12, pp. 95 – 117, 1999.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Org. BITTAR, Marilena, MUNIZ, Cristiano Alberto. Editora CRV, Curitiba, 2009.

______. **A Criança, a matemática e a Realidade**. Trad. De Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

______. A gênese dos campos conceituais. In. **Por que ainda há quem não aprende?** Org. GROSSI, Esther Pillar. 2ª edição. Editora Vozes, Petrópolis, 2003.

______. Teoria dos Campos Conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, p. 1 - 26. Rio de Janeiro,1993.

______. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

_____. Concepts et schème dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, n. 30, pp. 245 a 252, 1985.

ANEXO A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS PAIS

Prezados pais, gostaríamos da vossa permissão para que seu filho(a) participe de nossa pesquisa de doutorado que faz parte do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) e é orientada pela professora Drª Clélia Maria Ignatius Nogueira da Universidade Estadual do Paraná (UEM). O objetivo da pesquisa é investigar se existem semelhanças nas resoluções de atividades relacionadas a determinados Números em alunos de 9º ano do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática. Para isto a participação de seu filho(a) é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: conceder-nos uma entrevista videogravada com resoluções de atividades de Matemática relacionadas a estes Números. Informamos que mesmo que seu filho(a) não tenha respostas para algumas questões da entrevista, isto não terá problemas, nem para ele e nem para nossa pesquisa, pois com nossa pesquisa pretendemos adquirir um panorama geral sobre o ensino destes Números e os resultados não dependerão somente de respostas especificas da parte dele. Gostaríamos de esclarecer que a participação do seu filho(a) é totalmente voluntária, podendo você ou seu filho(a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade de seu filho. Os registros gravados serão arquivados após a pesquisa, na secretaria do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática sob total sigilo, sendo que se necessária nova utilização desse material para outras pesquisas. Os benefícios esperados é obter um panorama dos três níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior) sobre determinados Números, e apontar contribuições para o ensino deste conteúdo. Uma cópia da pesquisa será entregue à direção deste estabelecimento, ..., que gentilmente possibilitou a realização de parte de nossa pesquisa, e também à biblioteca Central da Universidade Estadual de Maringá. Caso você tenha mais dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta deste documento. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue ao Sr(a).

Eu,………………………………………………......... declaro que fui devidamente esclarecido e concordo que meu filho .... participe VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pelo Profa Veridiana Rezende.

____ Data:……………………..

Assinatura

Eu, Veridiana Rezende, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

____ Data:..............................

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador, conforme o endereço abaixo:

Nome: Veridiana Rezende

Endereço: Av. Curitiba, 1231

e-mail: rezendeveridiana@gmail.com

Telefone: (44) 3531-2439

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

ANEXO B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA ALUNOS UNIVERSITÁRIOS

Gostaríamos de convidá-lo a participar de nossa pesquisa de doutorado que faz parte do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) e é orientada pela professora Drª Clélia Maria Ignatius Nogueira da Universidade Estadual do Paraná (UEM). O objetivo da pesquisa é investigar se existem semelhanças nas resoluções de atividades relacionadas aos Números Irracionais em alunos de 9º ano do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática, e ainda obter um conhecimento geral sobre o ensino dos Números Irracionais. Para isto a sua participação é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: conceder-nos uma entrevista envolvendo resolução de atividades sobre os Números Irracionais. Informamos que mesmo que você não tenha respostas para algumas questões/atividades, isto não terá problemas, nem para você e nem para nossa pesquisa, pois com nossa pesquisa pretendemos adquirir um panorama geral sobre o ensino dos Números Irracionais e os resultados não dependerão especificamente de suas respostas. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Os registros gravados serão arquivados após a pesquisa, na secretaria do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática sob total sigilo, sendo que se necessária nova utilização desse material para outras pesquisas, será antes enviado para análise à COPEP. Os benefícios esperados é obter um panorama dos três níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior) sobre os Números Irracionais, e apontar contribuições para o ensino deste conteúdo. Uma cópia da pesquisa será entregue ao diretor (chefe) deste estabelecimento, que gentilmente possibilitou a realização de parte de nossa pesquisa, e também à biblioteca Central da Universidade Estadual de Maringá. Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM, cujo endereço consta deste documento. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Eu,………………………………………………................. declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pelo Profa Veridiana Rezende.

_______________________________________ Data:……………………..

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, Veridiana Rezende, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

_______________________________________ Data:.............................

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador, conforme o endereço abaixo:

Nome: Veridiana Rezende

Endereço: Av. Curitiba, 1231

e-mail: rezendeveridiana@gmail.com

Telefone: 44 99694445

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da UEM, no endereço abaixo:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

ANEXO C

UNIVERSITÉ CHARLES-DE-GAULLE LILLE 3

Sciences humaines et sociales

Laboratoire Théodile – CIREL EA 4354

AUTORISATION PARENTALE

Lille, le ... mars 2012.

Madame, Monsieur,

Je suis professeur de

Mathématiques et doctorante en Sciences de l'Education – discipline de Mathématiques au Brésil. Dans le cadre de ma recherche de Doctorat, dirigée par Mesdames Clélia Maria Ignatius Nogueira de l'Université brésilienne et Dominique Lahanier-Reuter de l'Université Lille 3, je sollicite votre autorisation pour la participation de votre enfant à ma recherche. Cette participation consiste en un entretien avec quelques activités mathématiques à résoudre.

Voici quelques informations complémentaires :

Cette recherche est développée dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. L'objectif de cette recherche est de comparer les conceptions des élèves brésiliens et français relatives à un sujet particulier de l'enseignement de mathématiques: les Nombres. Cette étude concerne des élèves de 3e du Collège, de Terminale - Baccalauréat et de la Licence. La participation de votre enfant est très importante pour ma recherche scientifique. Ces entretiens, qui auront lieu au collège et qui dureront prés de 50 minutes, seront enregistrés par vidéo afin de faciliter mes analyses, et ensuite, seront détruits. Cet enregistrement servira exclusivement à l'analyse et ne sera pas diffusé. **L'anonymat de votre enfant sera entièrement garanti et préservé au long de cette recherche.**

AUTORISATION :

Je soussigné(e)... parent ou tuteur (tutrice) légal(e) de .... autorise l'élève de la classe de .... à participer à la recherche de Doctorat en Mathématiques dirigée par Mesdames Clélia Maria Ignatius Nogueira et Dominique Lahanier-Reuter.

Avec tous mes remerciements pour votre collaboration, je vous prie de recevoir, Madame, Monsieur, mes salutations les plus distinguées.

Veridiana Rezende

Pour toute information complémentaire, n'hésitez pas à me contacter.

Veridiana Rezende
rezendeveridiana@gmail.com

ANEXO D

UNIVERSITÉ CHARLES-DE-GAULLE LILLE 3
Sciences humaines et sociales
Laboratoire Théodile – CIREL EA 4354

LETTRE DE CONSENTEMENT

Lille, le .... mars 2012

Madame, Monsieur,

Je suis professeur de Mathématiques et doctorante en Sciences de l'Education – discipline de Mathématiques au Brésil. Dans le cadre de ma recherche de Doctorat, dirigée par Mesdames Clélia Maria Ignatius Nogueira de l'Université brésilienne et Dominique Lahanier-Reuter de l'Université Lille 3, j'aimerais solliciter votre collaboration et participation à ma recherche. Cette participation consiste en un entretien avec quelques activités mathématiques à résoudre.

Voici quelques informations complémentaires :

Cette recherche est développée dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. L'objectif de cette recherche est de comparer les conceptions des élèves brésiliens et français relatives à un sujet particulier de l'enseignement des mathématiques. Cette étude concerne des élèves de 3^e du Collège, de Terminale - Baccalauréat et de la Licence en Mathématiques. Votre participation est très importante pour ma recherche scientifique. Ces entretiens, qui auront lieu dans une salle de l'Université et qui dureront prés de 50 minutes, seront enregistrés par vidéo afin de faciliter mes analyses, et ensuite, seront détruits. Cet enregistrement servira exclusivement à l'analyse et ne sera pas diffusé. **Votre anonymat sera entièrement garanti et préservé tout au long de cette recherche.**

AUTORISATION :

Je soussigné(e).. consens librement à participer à la recherche de Doctorat en Mathématiques dirigée par Mesdames Clélia Maria Ignatius Nogueira et Dominique Lahanier-Reuter.

____ Date : ___________________________

Signature du participant

Avec tous mes remerciements pour votre collaboration, je vous prie de recevoir, Madame, Monsieur, mes salutations les plus distinguées.

Veridiana Rezende

Pour toute information complémentaire, n'hésitez pas à me contacter.

Veridiana Rezende
rezendeveridiana@gmail.com

ANEXO E

UNIVERSITÉ CHARLES-DE-GAULLE LILLE 3

Sciences humaines et sociales

Laboratoire Théodile – CIREL EA 4354

Mme REZENDE, Veridiana
Doctorante en Sciences de l'Education
Discipline de Mathématiques
à l'Université d'Etat de Maringá - Brésil
rezendeveridiana@gmail.com

Lille, le .... mars 2012

À M. Le Principal
(Proviseur)
Collège ....
(Lycée..................)

Objet : Demande d'autorisation de procéder à des entretiens auprès de 4 élèves de la classe de Troisième (Terminale) pour une recherche scientifique en Mathématiques

Monsieur Le Principal (Proviseur),

Je suis professeur de Mathématiques et Doctorante en Sciences de l'Education – discipline Mathématiques au Brésil. Je developpe ma recherche dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France, où je suis accueillie par le Laboratoire Théodile - CIREL de l'Université Lille 3. L'objectif de cette recherche est de comparer les conceptions des élèves brésiliens et français relatives à un concept Mathématiques. Cette étude concerne des élèves de Troisième, de Terminale et de la Licence 3 en Mathématiques.

Comme M. ...., enseignante en Mathématiques de votre établissement, a accepté de participer à ma recherche, je me permets de solliciter votre autorisation pour procéder à des entretiens auprès de 4 élèves de Troisième (Terminale). Je désirerais faire ces entretiens individuels, qui dureront prés de 50 minutes, dans un local de votre établissement. Afin de faciliter mes analyses ces entretiens seront enregistrés par vidéo qui seront détruites dès la fin de ma recherche. Cet enregistrement servira exclusivement à l'analyse scientifique.

En vous remerciant vivement pour votre compréhension et votre collaboration à ma recherche veuillez agréer M. Le Principal (Proviseur) mes salutations les plus respectueuses.

Veridiana Rezende

ANEXO F

GUIA DE QUESTÕES PARA AS ATIVIDADES

Este guia de questões norteava a pesquisadora no decorrer das entrevistas. Todavia, se necessário, para melhor compreender as respostas dos alunos, algumas questões poderiam ser acrescentadas. É importante ressaltar que os alunos não tiveram acesso a este roteiro de questões.

Atividade 1

1) Você acha que números inteiros tais como o número 1 e o número 2 existem? Você poderia apresentar uma justificativa de para que servem estes números?
2) Eu tenho alguns cartões que representam números (os números representados nos cartões foram $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $3{,}14$, $0{,}333\ldots$, $0{,}10100100010000\ldots$, $\frac{2}{3}$, -4, $\sqrt{-4}$, 0). Eu vou apresentá-los, e eu gostaria de saber se você acha que cada um destes números existe.
3) Você me falou que os números 1 e 2 servem para.... e estes números representados nestes cartões, para que você acha que eles servem?
4) Você se lembra dos conjuntos numéricos? Você saberia classificar estes números representados nos cartões como racional, irracional ou nem racional nem irracional?
5) Você acha que a quantidade de grãos arroz que você já comeu na sua vida é uma quantidade finita ou infinita? Por que você acha isto?
6) E a quantidade de grãos de arroz que você ainda comer na sua vida será uma quantidade finita ou infinita? Por quê?
7) Você acha que a quantidade de números (casas decimais) que existem no número 0,10100100010000... (explicar que aqui poderia ser a combinação de quaisquer números ou mesmo números aleatórios como 0,138493850297...) é maior ou menor do que a quantidade de arroz que você ainda vai comer na sua vida? Por quê?
8) Você acha que existem mais números como este (mostra o cartão com o número 0,10100100010000...) ou como este (0,333...)? Por quê?

Alunos da graduação:

9) Você sabe me dizer se existem mais números racionais ou mais números irracionais. Por quê?

10) Você já estudou sobre conjuntos enumeráveis e não - enumeráveis? Você poderia me falar das características destes conjuntos.

11) Você sabe me dizer se o conjunto dos números racionais é enumerável ou não - enumerável? Você pode me dar uma explicação para este fato?

12) E o conjunto dos números irracionais, você acha que ele é numerável ou enumerável. Por quê?

Atividade 2

1) Se você teclar o número dois na calculadora e depois a tecla $\sqrt{\ }$, qual o valor que aparece no visor?

2) Com este resultado que você encontrou você acha que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é verdadeira? Por quê?

i) **Se o aluno responder que a igualdade não é verdadeira** porque raiz de dois tem infinitas casas decimais, questionar (com o objetivo que o aluno argumente sobre a não periodicidade deste número) se ele sabe como são estas casas decimais, se elas apresentam alguma característica específica. Perguntar se ele sabe como são chamados os números com estas características, com o objetivo de perceber se ele o caracteriza como um número irracional.

ii) **Se o aluno responder positivamente** a questão nº 1, questiona-lo:

(a) Você acha que é possível encontrar $\sqrt{2}$ ao quadrado?

(b) Quanto é $1{,}414213562$ ao quadrado?

(c) Compare os valores encontrados no item (a) e no item (b). Por que você acha que os resultados foram diferentes?

Atividade 3

a) Você acha que existem ou não dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever 3 igual a $\frac{p}{q}$? Você poderia me dizer dois possíveis números p e q que satisfaçam esta condição?

b) E se considerarmos a mesma coisa para o número $\sqrt{2}$. Você acha que existem ou não dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever $\sqrt{2}$ igual a $\frac{p}{q}$? Você poderia justificar sua resposta?

Se o aluno responder que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma fração de dois inteiros p e q, $q \neq 0$, porque $\sqrt{2}$ é um número irracional, questionar:

c) Você conhece uma prova matemática que garante este fato?

Resposta positiva:

d) Você poderia escrever esta prova matemática que garante que não podemos escrever $\sqrt{2}$ como a razão de dois inteiros?

Alunos da graduação:

e) Você já estudou segmentos comensuráveis e incomensuráveis? Você poderia apresentar um exemplo de dois segmentos incomensuráveis?

f) Você conhece a Teoria das Proporções de Eudoxo? Você saberia dizer do que se trata?

g) Você estudou Cortes de Dedekind? Você sabe pra que servem os Cortes de Dedekind?

f) Você estudou a teria de Cantor para a construção dos números reais?

Atividade 4

Você acha que estas equações do segundo grau têm solução no conjunto dos números reais?

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = 17$ c) $x^2 = -9$ d) $x^2 = \pi$

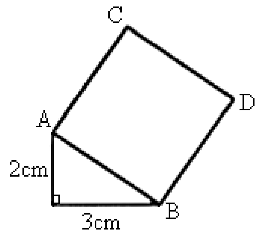
Atividade 5

a) Você acha que existe um quadrado de área $A = 25\ cm^2$? Qual deve ser a medida do lado deste quadrado?

b) Você acredita que existe um quadrado de área $A = 13\ cm^2$? Qual deve ser a medida do lado deste quadrado?

Atividade 5(b)

a) Considere o quadrado ABCD representado na ficha de atividade. Temos uma afirmação: A área do quadrado ABCD é 13 cm^2. Você concorda com esta afirmação ou não?



Atividade 5(c)

Para os alunos que responderem que a afirmação da atividade 5(b) é verdadeira, questionar: Você acha que é possível construir um quadrado de área 5cm^2?

Solicitar ao aluno a construção deste quadrado. Questionar se é possível construir este quadrado sem o auxílio do teorema de Pitágoras.

Observação:

i. Para os alunos que não concordarem com a afirmação do item (a) que o quadrado ABCD tem área 13 cm^2, não questionar o item (b) desta atividade.
ii. Para os alunos que responderem no item (c) da questão algébrica 2, que o quadrado de área 13 cm^2 existe, e que o lado deste quadrado mede $\sqrt{13}\ cm$, não questionar o item (a) desta atividade algébrica 3 e questionar diretamente o item (b) desta atividade.

Atividade 6

a) No plano cartesiano estão representados alguns retângulos com medida de área 24cm^2. Você pode confirmar este fato?

b) Você acha que existem outros retângulos como estes que também possuam área 24cm^2?

c) Você pode explicitar outras medidas para os lados destes retângulos?

d) Você acha que é possível representar um quadrado, neste mesmo plano cartesiano, com as mesmas condições destes retângulos (um vértice na origem e outros dois sobre os eixos coordenados) que tenha área igual a 24cm^2? Por quê?

Atividade 7

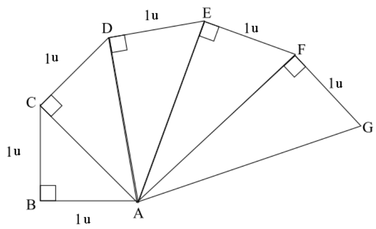
Na sua opinião, é possível representar o número $\sqrt{5}$ na reta numérica?

Observação:

i. Se o aluno representar o número $\sqrt{5}$ na reta numérica utilizando o teorema de Pitágoras e o compasso para transportar o segmento, a próxima atividade não será apresentada.

ii. Se o aluno não souber representar o número $\sqrt{5}$ na reta numérica, ou representá-lo por aproximações de números decimais, ele será conduzido à próxima atividade com a intenção que ele perceba que é possível construirmos qualquer segmento de medida $\sqrt{n}$, com n um inteiro positivo.

Atividade 8



a) Apontar para o primeiro triângulo da sequência e questionar sobre a medida da diagonal deste triângulo.

b) Apontar para o segundo triângulo e questionar: E se você considerar este outro triângulo de catetos medindo raiz de dois e um, qual é a medida da diagonal deste triângulo?

c) Continuar o processo até obter hipotenusa raiz de seis e questionar como fazer pra encontrar o segmento de medida raiz de sete.

d) Agora que você conheceu um modo de construir segmentos de medidas $\sqrt{n}$, com n um inteiro positivo, você representaria de um modo diferente do que você apresentou anteriormente o número $\sqrt{5}$ na reta numérica?

ANEXO H

GUIDE D'ENTRETIEN

Activité 1

1) Selon toi, est-ce que le nombre 1 et le nombre 2 existent ? Selon toi, à quoi servent-ils ?
2) Voici quelques cartes qui representent des nombres. Choisis une carte à la fois et dis si le nombre representé sur la carte existe ou non. Selon toi, à quoi sert ce nombre ?
3) Voici des nombres representés sur des cartes. Regroupe-le en nombres rationnels, en nombre irrationnels, ou ni rationnels ni irrationnels ? Comment tu as fait pour le regrouper ?
4) Reflechis au nombres de grains de riz que tu as dejá mangé jusqu'à présent. Penses-tu qu'il s'agit d'une quantité finie ou infinie ? Pourquoi?
5) Imagine la quantité des grains de riz que tu pourras manger durant ta vie. Penses-tu qu'il s'agit d'une quantité finie ou infinie ? Pourquoi ?
6) Qu'est-ce que c'est pour toi les points de suspentions « ... « qui exist dans quelques nombres, comme par exemple, 0,333... ou 0,101001000... ?
7) À ton avis, est-ce qu'il y a plus de chiffres 3 dans le nombre 0,333... ou plus de grains de riz que tu pourras manger dans ta vie ? Pourquoi ?
8) À ton avis, est-ce qu'il y a plus de nombres comme 0,333... (nombre périodique) ou plus de nombres comme 0,1827340938573205970... (nombre non périodique) ? Pourquoi ?

Pour les élèves du Lycée et les étudiants de la Licence en mathématiques

9) Est-ce que tu penses qu'il exist plus de nombres rationnels ou plus de nombres irrationnels ? Justifie ta réponse.

10) Est-ce que tu as étudié les ensembles dénombrables et non dénombrables ?

11) Est-ce que tu sais si les ensembles des nombres rationnels et des nombres irrationnels sont dénombrables ou non dénombrables ? Peux-tu justifier ta réponse?

Activité 2

1) Tape racine carré de deux sur ta calculatrice, s'il te plaît.
2) À ton avis, est-ce qu'on peut affirmer que $\sqrt{2} = 1,414213562$? Pourquoi ?

Réponse positive :

a) Est-ce que tu peux élever $\sqrt{2}$ au carré?

b) Est-ce que tu peux élever 1,414213562 au carré?

c) Compare les résultats de (a) et (b). Comment tu peux expliquer ?

Réponse négative :

a) Comment sont les chiffres de $\sqrt{2}$? (questionner s'ils sont finis, infinis, périodiques).

b) Penses-tu que la racine carré de deux est un nombre rationnel ou irrationnel ? Pourquoi ?

Activité 3

1) Selon toi, existe-t-il deux nombres entiers naturels p et q, $q \neq 0$, tels que $3 = \frac{p}{q}$?

2) Selon toi, existe-t-il deux nombres entiers naturels p et q, $q \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$?

Pour les élèves du Lycée et les étudiants de la Licence en mathématiques

3) Connais-tu une démonstration mathématique sur ce sujet ? Peux-tu l'écrire ?

Pour les étudiants de la Licence en mathématiques

4) Est-ce que tu as étudié les segments commensurables et non commensurables ?

5) Est-ce que tu as étudié la théorie des Proportions d'Eudoxe ? Est-ce que tu peux m'en parler?

6) Est-ce que tu as appris sur les Coupures de Dedekind ? À quoi servent-elles?

Activité 4

Voici quatre équations. Est-ce que les équations ont des nombres réels comme solution?

Activité 5

1) À ton avis, existe-t-il un carré d'aire $A = 25cm^2$? (Quelle est la mesure du côté de ce carré ?)

2) À ton avis, existe-t-il un carré d'aire $A = 13cm^2$?(Quelle est la mesure du côté de ce carré ?)

Activité 5 (b)

(uniquement pour les élèves que ne réusssissent pas l'activité précédente)

Voici une affirmation : ABCD est un carré de $13cm^2$ d'aire.

À ton avis, est-ce que cette affirmation est vraie ou fausse ? Pourquoi ?

Activité 6

a) Voici plusieurs rectangles qui ont pour aire $24cm^2$. (expliquer aux élèves les caractéristiques des rectangles : ils ont un sommet sur le point (0,0), un sommet sur l'axe x, un sommet sur l'axe y)

b) Est-ce qu'il semble y avoir d'autres rectangles avec les mêmes caractéristiques ? Est-ce que tu peux les représenter ?

c) Est-ce qu'il semble y avoir un carré, avec ces caractéristiques (un sommet sur le point (0,0), un sommet sur l'axe x, un sommet sur l'axe y) et ce carré a-t-il une aire $24cm^2$? Est-ce que tu peux le représenter?

Activité 7

Selon toi, est-ce qu'il est possible de représenter le nombre $\sqrt{2}$ sur la droite des nombres réels ?

Pour les réponses positives : Peux-tu le représenter?

Pour les réponses negatives : Pourquoi ?

Activité 8

(uniquement pour les élèves que ne réusssissent pas l'activité précédente)

a) Si on considère le triangle rectangle ABC, tel que les segments AB et BC ont 1u de longueur, quelle est la longueur de AC ? (réponse $\sqrt{2}$)

b) À partir du triangle ABC, on peut construire un nouveau triangle rectangle ACD, tel que la longueur de CD est 1u. Quelle est la longueur de AD ? (réponse $\sqrt{3}$)

c) À partir du triangle ACD, on peut construire un nouveau triangle rectangle ADE, tel que la longueur de DE est 1u. Quelle est la longueur de DE ? (réponse $\sqrt{4}$) ...

On peut poursuivre de manière analogue la construction et construire les segments de longueur $\sqrt{n}$, n entier naturel. Maintenant que tu as vu une méthode de construction de segments de longueur $\sqrt{n}$, penses-tu qu'il est possible de répresenter $\sqrt{2}$ d'une façon différente de l'activité précédente?

ANEXO I

Quadro 13 - Existência dos números segundo alunos do Ensino Fundamental e *Collège*

	Alunos	**Números que existem**	**Números que não existem**	**Não sabe opinar**
Alunos brasileiros do Ensino Fundamental	**F1**	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $0{,}10100...$	$\sqrt{-4}$	
	F2	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $0{,}10100...$	$\sqrt{-4}$	
	F3	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π	$\sqrt{-4}$	$0{,}10100...$
	F4	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, $0{,}10100...$, π		$\sqrt{-4}$
	F5	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, $0{,}10100...$, π, $\sqrt{-4}$		
	F6	$3{,}14$, 0, -4, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π		$\sqrt{-4}$, $0{,}10100...$, $0{,}333...$, $\frac{2}{3}$
	F7	$\sqrt{9}$, -4, $\frac{2}{3}$	$\sqrt{-4}$, $0{,}10100...$, 0, $3{,}14$, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$	π
Alunos franceses do *Collège*	**C1**	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $0{,}10100...$	$\sqrt{-4}$	
	C2	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, $0{,}10100...$, π, $\sqrt{-4}$		
	C3	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $0{,}10100...$	0	$\sqrt{-4}$
	C4	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π		$0{,}10100...$
	C5	$3{,}14$, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π	0, $\sqrt{-4}$, $\frac{2}{3}$,	

			$0{,}10100...$	
	C6	$3{,}14$, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π	0, $\sqrt{-4}$, $\frac{2}{3}$, $0{,}10100...$	
	C7	$3{,}14$, 0, -4, $\sqrt{9}$, π	$\sqrt{-4}$, $\frac{2}{3}$, $0{,}10100...$, $0{,}333...$	$\sqrt{3}$

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 14 - Classificação dos números em racionais e irracionais por alunos brasileiros

	Alunos	Números Racionais	Números Irracionais	Dúvidas
Alunos do Ensino Fundamental	**F1**	$\sqrt{9}$, -4, 0, $3{,}14$	π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$, $0{,}333...$	
	F7	$\sqrt{9}$, -4, $\frac{2}{3}$	$3{,}14$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$, $0{,}333...$, 0	π
	F2	$\sqrt{9}$, -4, 0	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$, $0{,}333...$	π
	F3	$\sqrt{9}$, -4, 0	$3{,}14$, π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000...$, $0{,}333...$	
	F4	$\sqrt{9}$, -4, 0, $0{,}333...$, $0{,}101001000...$	$3{,}14$, π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$	$\sqrt{-4}$
	F5	$\sqrt{9}$, $0{,}333...$, $0{,}101001000...$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$	$3{,}14$, π, $\frac{2}{3}$, -4, 0	
	F6	$\sqrt{9}$, 0, $3{,}14$, $0{,}333...$, $0{,}101001000...$, $\sqrt{3}$, π	$\frac{2}{3}$, -4, $\sqrt{-4}$	
Alunos do Ensino Médio	**M1**	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $0{,}1010010001000...$, π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$	$\sqrt{-4}$	
	M2	π, $\sqrt{9}$, 0, $\sqrt{3}$, $3{,}14$	-4, $0{,}333...$, $0{,}1010010001000...$, $\frac{2}{3}$	
	M3	0, -4, $\sqrt{9}$	$\frac{2}{3}$, $0{,}333...$, $\sqrt{3}$ $0{,}1010010001000...$, π, $3{,}14$	
	M4	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$,	$0{,}1010010001000...$	

		π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$		
	M5	$3{,}14$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}$, 0	$\sqrt{-4}$, -4, $0{,}333...$, $0{,}1010010001000...$	π
	M6	$\sqrt{9}$, $3{,}14$, π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$	$\sqrt{-4}$, $0{,}333...$, $0{,}1010010001000...$	0, -4
	G1	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$	$0{,}1010010001000...$, π, $\sqrt{3}$	
	G2	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$	$0{,}1010010001000...$, π, $\sqrt{3}$	
	G3	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$	$0{,}1010010001000...$, π, $\sqrt{3}$	
	G4	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$, $0{,}1010010001000...$	π, $\sqrt{3}$	
	G5	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$, $0{,}1010010001000...$	π, $\sqrt{3}$	
	G6	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $0{,}333...$, $\sqrt{9}$	π, $\sqrt{3}$	$0{,}10100...$, $\sqrt{-4}$
	G7	$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, 0, -4, $\sqrt{9}$	π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$	$0{,}10100...$, $0{,}333...$

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 15 - Classificação dos números em racionais e irracionais por alunos franceses

	Alunos	Números Racionais	Números Irracionais	Dúvidas
Alunos do *Collège*	**C1**	$\sqrt{9}$, -4, 0, $\sqrt{-4}$	$3{,}14$, π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $0{,}10100...$, $0{,}333...$	
	C3	$\sqrt{9}$, -4, $\frac{2}{3}$, 0, $3{,}14$, π, $\sqrt{-4}$	$\sqrt{3}$, $0{,}10100...$, $0{,}333...$	
	C7	$\sqrt{9}$, $3{,}14$, -4, π	$0{,}333...$, $0{,}10100...$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$	0
	C5	*Diz não saber classificar*	*Diz não saber classificar*	
	C6	*Diz não saber classificar*	*Diz não saber classificar*	
	C2	*Diz não saber classificar*	*Diz não saber classificar*	
	C4	*Diz não saber classificar*	*Diz não saber classificar*	
TES	**ES1**	$\sqrt{9}$, -4, 0, $3{,}14$, $\frac{2}{3}$	$0{,}333...$, π, $0{,}10100...$, $\sqrt{3}$	$\sqrt{-4}$
	ES2	$\sqrt{9}$, -4, 0, $3{,}14$, π	$0{,}333...$, $0{,}10100...$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$	$\sqrt{-4}$
	ES3	$\sqrt{9}$, $\sqrt{3}$	$0{,}333...$, $0{,}10100...$, $3{,}14$,	

			$\pi, \sqrt{-4}, -4$	
	ES4	$3{,}14,\ \pi,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ 0{,}333...,\ 0{,}10100...,\ \sqrt{9},\ \sqrt{3}$	$\sqrt{-4}$	
Alunos de TS	**S1**	$3{,}14,\ -4,\ \sqrt{9}$	$\frac{2}{3},\ \sqrt{3},\ 0{,}333...,\ 0{,}10100...,\ \pi$	$0,\ \sqrt{-4}$
	S2	$3{,}14,\ 0,\ -4,\ \sqrt{9},0{,}333...,\ 0{,}10100...$	$\sqrt{3},\ \frac{2}{3},\ \pi$	0 e $\sqrt{-4}$
	S3	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ 0{,}333...,\ \sqrt{9}$	$0{,}10100...,\ \pi,\ \sqrt{3}$	
	S4	$3{,}14,\ \pi,\ \frac{2}{3},\ 0{,}333...,\ 0{,}10100...$	$0,\sqrt{9}$	$-4,\ \sqrt{-4},\ \sqrt{3}$
	S5	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ 0{,}333...,\ 0{,}10100...,\ \sqrt{9}$	$\pi,\ \sqrt{3}$	
Alunos de *Licence*	**L1**	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ 0{,}333...,\ \sqrt{9}$	$0{,}10100...,\ \pi,\ \sqrt{3},\ \sqrt{-4}$	
	L2	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ 0{,}333...,\ \sqrt{9}$	$0{,}10100...,\ \pi,\ \sqrt{3},\ \sqrt{-4}$	
	L3	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ -4,\ 0{,}333...,\ \sqrt{9}$	$0{,}10100...,\ \pi,\ \sqrt{3}$	$0,\ \sqrt{-4}$
	L4	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ 0{,}333...,\ \sqrt{9}$	$0{,}10100...,\ \pi,\ \sqrt{3}$	
	L5	$3{,}14,\ \frac{2}{3},\ 0,\ -4,\ \sqrt{9}$	$0{,}333...,\ 0{,}10100...,\ \pi,\ \sqrt{3}$	

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 16 - Resumo da análise da atividade 2 - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos	Indicativo de TA
E. Fundamental	**Categoria 2.I**	**F5:** Eu acho que sim, que a igualdade é verdadeira. [...] talvez porque $1{,}999999999$ está mais próximo de dois. Daí, como não tem um número exato, coloca o dois. **F2:** Sim, é verdadeira. [...] Acho que mais um pouquinho (de casas decimais), porque a diferença é 0,1, então acho que tem mais um pouquinho.	**TAF4 e TAF5**
	Categoria 2.II	**F7:** Eu acho que não (que a igualdade não é verdadeira), porque eu acho que vai continuar os números. Mas eu não tenho certeza. **F3:** Eu acho que sim (que existem mais números do que os dígitos da calculadora). [...] Não, eu não sei (se são poucos ou muitos números). **F6:** Eu acho que aproximadamente sim. [...] Porque eu acho que dois não tem raiz exata.	**TAF4**

	Categoria 2.III	**F1:** Não. [...] Porque, por exemplo, raiz de quatro é dois, porque dois vezes dois dá quatro. Então pra eu ver se $\sqrt{2} = 1{,}414213562$, eu peguei $1{,}414213562 \times 1{,}414213562$ pra ver se isto daria 2. Daí eu percebi que este número não é raiz de dois. [...] Eu acho que (as casas decimais) vão continuar aleatórias. Eu acho que já vi isto num livro.	**TAV4**
	Categoria 2. V	**F4:** Na verdade isso aqui seria uma aproximação dela. Na verdade, ela continuaria. [...] Se tivesse período seria racional. [...] É irracional.	**TAV1**
Ensino Médio	**Categoria 2.I**	**M2:** É finito. Vai chegar uma hora que vai ter fim.	**TAF4**
	Categoria 2.II	**M4:** Eu acho que não, porque na calculadora não aparece todos os números. Vai ter mais números. **M1:** Eu afirmo que a igualdade é verdadeira. Eu acho que sim. [...] É isto que eu estava pensando, tem mais casas depois da vírgula... Mas dá pra arredondar, né.	**TAF4**
	Categoria 2.III	**M6:** Não sei... só se eu fizer $1{,}414213562 \times 1{,}414213562$ e o resultado der dois. [...] Não é exato! Na calculadora não cabe todos os números. **M3:** Não. Porque se eu fizer $1{,}414213562 \times 1{,}414213562$ não vai dar dois.	**TAV4**
	Categoria 2.IV	**M5:** Não, porque $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais que não aparece no visor da calculadora.	
Ensino Superior	**Categoria 2.IV**	**G5:** Não porque tem mais dígitos que não aparecem na calculadora. [...] eu acho que tem um período sim. **G6:** Não, eles são diferentes. [...] Infinitas. [...] Como é um número que não tem um padrão aqui no começo, eu acho que não vai ter um padrão pra frente. **G7:** Não, porque $\sqrt{2}$ tem infinitas casas. [...] Eu não sei se tem período ou não tem período.	
	Categoria 2.V	**G3:** A igualdade não é verdadeira porque $\sqrt{2}$ é irracional. **G1:** Não, porque $\sqrt{2}$ é um número irracional, tem infinitas casas que não aparece na calculadora. **G4:** Não, tem mais números que não aparece no visor da calculadora [...] infinitos, $\sqrt{2}$ é irracional. **G2:** Não... porque os números da calculadora são uma aproximação de $\sqrt{2}$ [...] $\sqrt{2}$ é irracional.	**TAV1**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 17 - Resumo da análise da atividade 2 - alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos	Indicativo de TA
	Categoria 2.I	**C6:** Sim, eu penso que $\sqrt{2} = 1{,}414213562$. [...] é estranho, eu pensei que os dois números elevados ao quadrado resultaria em 2... Eu não sei.	**TAF4 e TAF5**
	Categoria 2.II	**C1:** Não, porque eu calculei ao quadrado e o resultado não é o mesmo [...] são valores aproximados [...] eu não sei tem muitos ou poucos dígitos depois da vírgula. **C3:** [...] Pode ser que exista alguns números depois da vírgula. **C5:** Não... pode ser que tenha mais alguns dígitos. **C7:** Eu não sei... eu não posso afirmar porque eu não sei se tem mais números. **C4:** Sim, eles são iguais porque agente tecla na calculadora e este é o	**TAF4**

		resultado. [...] Elevando ao quadrado os resultados são diferentes, mas é bem próximo de dois... acho que tem mais alguns dígitos. **C2:** É um valor aproximado, deve continuar eu penso [...] acho que finitos.	
TES	**Categoria 2.II**	**ES2:** Sim [...] Aproximadamente sim. [...] A calculadora arredonda os resultados e não dá pra saber se tem mais dígitos ou não. **ES4:** É aproximadamente igual. Eu acho que tem muitos dígitos, mas infinitos eu não sei. **ES3:** É aproximadamente igual. Eu não sei se tem muitos ou poucos dígitos.	**TAF4**
	Categoria 2.IV	**ES1:** Eles não são iguais, existem vários dígitos que não aparecem no visor da calculadora. [...] Eu penso que infinitos dígitos.	
TS	**Categoria 2.II**	**S1:** Não, é falso. O visor da calculadora é muito pequeno para mostrar todos os dígitos. [...] Uma quantidade finita, eu penso. **S4:** Não, porque a calculadora mostra uma certa quantidade de dígitos e ela não pode mostra mais, estes dígitos vão continuar. [...] Eu acredito que uma quantidade finita. **S5:** Não, porque a capacidade da calculadora é limitada, não aparece todos os decimais. [...] Eu penso que eles são muitos, mas são finitos.	**TAF4**
	Categoria 2.V	**S2:** Não, é um valor aproximado, existem mais números. [...] Eu penso que se trata de uma quantidade infinita, e que não tem período. **S3:** Não, é um valor infinito. [...] Eu penso que não tem período.	**TAV1**
Licence	**Categoria 2.IV**	**S3:** São aproximados. [...] Tem infinitos dígitos, é um irracional. [...] Eu não sei se são periódicos ou não.	
	Categoria 2.V	**L4:** É uma aproximação [...] $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais, é um irracional. **L2:** Não, porque raiz de dois não pára jamais, é um irracional. **L5:** Não, é uma aproximação, raiz de dois é irracional, portanto tem infinitos dígitos. **L1:** Eu diria que não, porque é uma aproximação. [...] Uma infinidade de dígitos... eu diria que não tem período.	**TAV1**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 18 - Resumo da análise da atividade 3 – alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos	Indicativo de TA
Ensino Fundamental	**Categoria 3.I**	**F3:** O que deu mais aproximado foi 15 dividido por 13... que deu 1,1538. **F5:** Pode dar um número que seja igual aquele la infinito que seja igual a raiz de dois. Mas raiz de dois exata, eu acho que não. **F6:** Eu não sei... porque a raiz de dois não é exata, né? [...] Eu acho que existem.	**TAF4**
	Categoria 3.II	**F2:** Eu acho que não... Porque agente fez raiz de dois na calculadora e deu um número com vírgula. **F7:** [...] são dois números inteiros né, e raiz quadrada de dois não é um número inteiro.	**TAF4 e TAF6**
	Categoria 3.III	**F1:** Eu acho que sim, só que eu não teria como comprovar isto. [...] Eu sei que, bom eu acho que entre dois números poderia dar isto daí, a divisão deles.	
	Categoria 3.IV	**F4:** Bom, na verdade teria, mas seriam números irracionais. [...] Não, inteiros não.	**TAV2 e TAV3**

Ensino Mpedio	**Categoria 3.I**	**M2:** Sem a raiz, considerando 1,4142 e outras casas decimais, daí pode ser né. **M1:** Só existem números inteiros que satisfazem isto, porque eu considero $\sqrt{2} = 1{,}4142$ **M4:** Pode ser que tenha, mas eu não sei de dar exemplo. **M7:** Acredito eu que possa, mas eu não sei te dizer qual. **M5:** Eu acho que pode existir...	
	Categoria 3.II	**M6:** Não, eu não consigo. Porque teria que ser um número quebrado, inteiro eu não consigo. **M3:** Não, eu acho que não. [...] Porque um número racional ou irracional? Raiz de dois? Não dá pra dividir com um inteiro.	**TAF6**
Ensino Superior	**Categoria 3.IV**	**G7:** Não porque raiz de dois é irracional e eu não consigo escrevê-lo como uma fração. **G 1:** Não, porque raiz de dois é um número irracional. **G5:** Eu acredito que não. Porque esta seria uma condição para ele ser um número racional, né? **G4:** Dois números inteiros? Não! Um número escrito como a razão de dois números inteiros é um número racional. **G2:** Não existe, porque raiz de dois é um número irracional e não satisfaz esta condição de ser escrito como a fração de dois inteiros. **G3:** Não, não existe, porque se existisse raiz de dois seria racional. **G6:** Não, porque $\sqrt{2}$ é irracional. E p sobre q é racional.	**TAV2 e TAV3**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 19 - Resumo da análise da atividade 3 – alunos franceses

	Categorias	**Fragmentos das entrevistas dos alunos**	**Indicativo de TA**
Alunos do *Collège*	**Categoria 3.I**	**C5:** É possível, mas eu não consigo encontrar... raiz quadrada de deois é igual 1,41, nós podemos arredondar por 1,41... **C3:** Eu não sei... mas eu acho que é possível. **C7:** Eu penso que pode existir, mas não seria muitas combinações, talvez uma ou duas combinações.	
	Categoria 3.II	**C1:** Não existe, porque $\sqrt{2}$ é um número com vírgula. **C6:** Como vimos, $\sqrt{2}$ não tem valor exato, então eu acho que não existem dois inteiros, porque quando telcamos na calculadora não é o mesmo resultado de $\sqrt{2}$. **C4:** Eu acho que não existe... [...] Eu jamais calcular algo assim, eu não consigo encontrar... eu acho que não... **C2:** Eu acho que não, porque ... é um número infinito.	**TAF4**
Alunos de TES	**Categoria 3.I**	**ES4:** Podem existir... existem infinitos números. Eu não sei encontrar, mas podem existir.	
	Categoria 3.II	**ES1:** Eu não sei... eu penso que não, mas não tenho certeza. **ES2:** Não, porque não seria igual a raiz de dois. **ES3:** Não, eu penso que não... são números com vírgula, não são números como 1,2,3,4.	**TAF4**
TS	**Categoria 3.I**	**S4:** Sim [...] não, eu não posso te dizer quais seriam estes números... mas eu acho que existem. **S5:** Eu penso que pode existir, mas eu sou incapaz de dizer os números.	
	Categoria 3.II	**S1:** Com números com vírgula sim, mas escrever com números inteiros eu acho que não.	**TAF4**

	Categoria 3.IV	**S2:** Pra mim não... pra mim as raízes não podemos escrever como a divisão entre 2 inteiros, as raízes não são inteiras. **S3:** Eu acho que não... que não existe uma fração para representar $\sqrt{2}$.	
Licence	**Categoria 3.IV**	**G1:** Não, não podemos escrever $\sqrt{2}$ igual a p sobre q. **G2:** Não, porque $\sqrt{2}$ é irracional. **G3:** $\sqrt{2}$ é irracional, então não podemos escrever na forma racional por definição. **G4:** Não, porque não é um racional. **G5:** Não, porque $\sqrt{2}$ é um número irracional.	**TAV5**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 20 - Resumo da análise da atividade 4 (b) $x^2 = 17$ - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos brasileiros	Indicativo de TA
Ensino Fundamental	**Categoria 4.I**	**F5:** Este não tem um número exato que ele vezes ele mesmo dá 17. [...] Eu acho que não existe solução. **F6:** Não, porque não tem nenhum número que vezes ele mesmo dê 17. **F3:** 17 é um número primo, então não vai ter um número que elevado ao quadrado vai dá ele. **F2:** Não, porque 17 não tem raiz, né.	**TAF8**
	Categoria 4.II	**F7:** Tem solução, $x = 4{,}123105626$.	**TAF5**
	Categoria 4.III	**F1:** Eu acho que existe solução, só que este número completo é infinito. **F4:** Tem solução real, mas é um irracional.	**TAF9**
Ensino Médio	**Categoria 4.I**	**M3:** Não, porque é um número primo, né? Eu acho que não tem nenhum número que multiplica ao quadrado e dá 17... Só se for aqueles quebradinhos. **M4:** Não porque é um número ímpar, né?	**TAF8**
	Categoria 4.II	**M2:** Tem solução, $x = 4{,}123105626$. **M6:** Tem solução, $x = 4{,}123105626$. **M5:** Tem solução aproximada, $x = 4{,}1234$. **M1:** $x \cong 4{,}12312$. Mas eu não sei se este é um número irracional, se é infinito ou não, ou se é um número real.	**TAF5**
	Categoria 4.IV	**M5:** Tem solução só que não seria solução real, pertenceria ao conjunto dos irracionais.	**TAF9**
Ensino Superior	**Categoria 4.IV**	**G7:** Tem solução, eu não sei o valor, mas é raiz de 17.	**TAF9**
	Categoria 4. V	**G4:** $\pm\sqrt{17}$. **G3:** $\pm\sqrt{17}$. **G6:** $\pm\sqrt{17}$. **G2:** $\pm\sqrt{17}$. **G1:** $\pm\sqrt{17}$. **G5:** $\pm\sqrt{17}$.	**TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 21 - Resumo da análise da atividade 4 (b) $x^2 = 17$ - alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Collège	**Categoria 4.I**	**C2:** Não tem solução... porque não tem 17 na tábua de multiplicação. **C5:** Não tem solução. **C1:** Não, porque não existe o dobro de um número que vai ser 17. **C7:** Não, porque seria aproximada.	**TAF8**
	Categoria 4.II	**C2:** Pode existir, mas vai ser um número com vírgula. **C6:** Eu penso que vai ter solução, mas não exata.	**TAF5**
	Categoria 4.III	**C3:** $\sqrt{17}$, mas é um número que não termina, com vírgula.	**TAF9**
TES	**Categoria 4.II**	**ES1:** Aproximadamente $4{,}12$. **ES3:** $x = 4{,}123105626$.	**TAF5**
	Categoria 4.IV	**ES4:** $\sqrt{17}$. **ES2:** $\sqrt{17}$.	**TAF9**
TS	**Categoria 4.I**	**S4:** Não, porque na verdade teria que ser par... não tem um número que elevado ao quadrado resulte em 17.	**TAF8**
	Categoria 4.IV	**S1:** $\sqrt{17}$.	**TAF9**
	Categoria 4. V	**S2:** $\pm\sqrt{17}$. **S5:** $\pm\sqrt{17}$. **S3:** $\pm\sqrt{17}$.	**TAV6**
Licence	**Categoria 4.IV**	**L2:** $\sqrt{17}$ **.** **L3:** $\sqrt{17}$ **.**	**TAF9**
	Categoria 4. V	**LS4:** $\pm\sqrt{17}$. **L5:** $\pm\sqrt{17}$. **L1:** $\pm\sqrt{17}$.	**TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 22 - Resumo da análise da atividade 4 (d) $x^2 = \pi$ - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos	Indicativo de TA
EF	**Categoria 4.I**	**F1:** O Pi eu acho que não tem solução. **F3:** Esta também eu acho que não dá. **F2:** Não tem solução. **F7:** Eu acho que não tem solução.	**TAF8**
	Categoria 4.II	**F5:** Eu acho que existe. O valor de Pi é 3,2 né? Não sei qual seria. [...] Eu acho que existe. **F6:** Eu não sei, porque eu não sei o valor de Pi. Eu acho que deve ter, mas eu não sei.	
	Categoria 4.III	**F4:** Tem solução real, mas é um irracional.	

	Categoria 4.I	**M4:** O número Pi? Acho que não tem solução... **M3:** Essa não tem solução.	**TAF8**
	Categoria 4.IV	**M2:** $x = 1{,}772084516$. Mas eu não tenho certeza se tem solução. **M5:** Eu acho que existe, mas vai ser uma solução aproximada: $x = 1{,}77$. **M6:** Uma solução aproximada, $x = 1{,}772004515$. **M1:** $x \cong 1{,}7724$. Mas eu não sei se este é um número irracional, se é infinito ou não, ou se é um número real.	**TAF5**
	Categoria 4.III	**M5:** Essa também, eu acho que pertenceria ao conjunto dos irracionais.	**TAF9**
Ensino Superior	**Categoria V**	**G7:** Essa também tem solução, porque Pi é um número real, positivo, então existe raiz de Pi. **G5:** Raiz de Pi? Pi é um número irracional. Raiz de um número irracional? É, vai dá um valor, vai ser um real. **G1:** Raiz de um número irracional? Eu não vou conseguir dar um valor exato, porque eu não vou conseguir saber todas as casas de Pi, então eu só consigo dar um valor aproximado. Mas, ela existe, mas... eu não consigo representar. **G2:** E assim, eu nunca tinha pensado. Acho que existe.	**TAF9**
	Categoria 4.VI	**G4:** $\pm\sqrt{\pi}$. **G3:** $\pm\sqrt{\pi}$. **G6:** $\pm\sqrt{\pi}$.	**TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 23 - Resumo da análise da atividade 4 (d) $x^2 = \pi$ - alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos franceses	Indicativo de TA
Collège	**Categoria 4.I**	**C1:** Não, porque π é um valor aproximado. **C2:** Não, porque o π é aproximado, 3,14... **C6:** Não, porque o π é um número que não termina. **C4:** Não, porque o π é infinito. **C7:** Não, porque π é um valor aproximado, então o resultado vai ser sempre aproximado.	**TAF8**
	Categoria 4.II	**C5:** Eu acho que existe, mas é preciso encontrar.	
	Categoria 4.V	**C3:** $\sqrt{\pi}$, mas, vai ser um número com vírgula.	**TAF9**
TES	**Categoria 4.IV**	**ES1:** Aproximadamente 1,77. **ES3:** $1{,}772453851$.	**TAF5**
	Categoria 4.V	**ES4:** $\sqrt{\pi}$. **ES2:** $\sqrt{\pi}$.	**TAF9**
TS	**Categoria 4.II**	**S4:** Eu não sei... pode ser que exista...	
	Categoria 4.V	**S1:** $\sqrt{\pi}$.	**TAF9**
	Categoria 4.VI	**S2:** $\pm\sqrt{\pi}$. **S5:** $\pm\sqrt{\pi}$.	**TAV6**

		S3: $\pm\sqrt{\pi}$.	
Licence	**Categoria 4.V**	**L3:** $\sqrt{\pi}$. **LS2:** $\sqrt{\pi}$.	**TAF9**
	Categoria 4.VI	**L1:** $\pm\sqrt{\pi}$. **L4:** $\pm\sqrt{\pi}$. **L5:** $\pm\sqrt{\pi}$.	**TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 24 - Resumo das análises da atividade 5 - existência ou não de um quadrado de medida de área $A=13\ cm^2$ - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas dos alunos	Indicativo de TA
Ensino Fundamental	**Categoria 5.I**	**F5:** Não [...] Porque não tem, eu acho que não tem um número que multiplica por ele mesmo e dá treze. **F3:** Não, porque treze é um número primo, e um quadrado tem que ter todos os lados iguais. Então se eu multiplicar um número por outro não dá treze. **F7:** Eu acho que não... porque não vai dá um número inteiro. Eu acho que não existe não. **F1:** Eu acredito que não (o aluno tecla na calculadora o resultado de $\sqrt{13}$ vezes ele mesmo). **F2:** Não, porque eu não consigo encontrar um número que vezes ele mesmo dá 13, né. Porque 13 não tem raiz exata, né... Só se for um número quebrado. Essa eu não sei... **F6:** Não existe um número que vezes ele mesmo resulte em 13.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.V	**F4:** Existe. O lado vai ser $\sqrt{13}$.	**TAV5 e TAV6**
Ensino Médio	**Categoria 5.I**	**M3:** Não, porque nenhum número ao quadrado dá treze. **M4:** Não, porque não tem um número que elevado ao quadrado vai ser 13.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.III	**M5:** Eu acho que existe o quadrado mas não vai ser exato... eu acho que não vai dar certinho, sabe? [...] Não, eu acho que não existe. Eu acho que vai ser infinito. **M2:** Não existe. Porque eu não sei se tem fim (aponta para o número $3{,}605551275\ldots$ que indica ser o lado do quadrado) ou não tem. **M1:** Ah, é possível, mas... é complicado... (silêncio). O lado é infinito. (silêncio) Ah, eu diria que existe... eu acho que é exato na aproximação, né? **M5:** Eu acho que pode existir o quadrado, mas pra eu saber o valor eu teria que ir por tentativa e erro. O lado dele seria uma dízima.	**TAF10**
	Categoria IV	**M6:** Só vai existir o quadrado se $3{,}605551275 \times 3{,}605551275$ der 13 [a aluna realizou tal multiplicação na calculadora e o resultado foi 13].	**TAF5**
Ensino Superior	**Categoria 5.I**	**G6:** Não! Raiz quadrada de treze é irracional. [...] Não, não existe.	**TAF10**
	Categoria 5.II	**G7:** Existe. Mas o lado? ... Teria que ser raiz de treze, é, teria que ser raiz de treze. Mais ai que tá, o lado... é um número aproximado né, porque raiz de treze não é um número inteiro, é um número decimal, mas existe. **G2:** Deve existir, eu não sei... eu não consigo pensar em dois números que multiplicados dê exatamente 13... teria que ser um número racional... estaria entre 3 e 4. Se tiver um quadrado de área 13 o lado deste quadrado vai estar entre 3 e 4.	

	Categoria 5.V	**G5:** Existe, o lado teria que ser raiz de treze, né? Seria um número irracional. Mas a área existe. **G4:** Então L ao quadrado é treze, então o lado é raiz de treze. É um irracional. Os lados têm medida irracional e a área é um número inteiro, 13. **G3:** Ah, eu não acredito não! Porque daí, o lado dele vai ter que medir $\sqrt{13}$... Apesar de que $\sqrt{13}$ é um número construtível! Então, a rigor existe. [...] Então, tá, existe também um quadrado com área $13\ cm^2$. **G1:** Dá sim. [...] representação igual agente faz com raiz de dois.	**TAV5 e TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 25 - Resumo das análises da atividade 5 - existência ou não de um quadrado de medida de área $A = 13\ cm^2$ - alunos franceses

	Categorias	**Fragmentos das entrevistas dos alunos**	**Indicativo de TA**
Collège	**Categoria 5.I**	**C1:** Não, porque seria um número com vírgula e muitos dígitos... seria preciso uma régua com muitos milímetros. **C3:** Eu acho que não... porque não existe um número que ao quadrado seja igual a 13. **C7:** Eu acho que não existe... porque eu não sei dois números iguais que multiplicados dá 13. Poderia ser um númro com vírgula, mas eu não sei qual seria. **C4:** Não... porque não existe 13 na tábua de multiplicação... nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo é 13. **C2:** Eu acho que... 6,5 [...] Não, seria um número infinito.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.II	**C5:** O lado vai ser aproximadamente 3,6. [...] Aproximadamente sim, mas exatamente eu não sei.	**TAF5**
	Categoria 5.III	**C6:** Sim, mas seria um número longo após a vírgula. Eu acho que existe um número exato, grande, mas eu acho que existe.	
TES	**Categoria 5.II**	**ES4:** Sim, existe. É um pouco difícil de traçar porque não é um valor exato. [...] Existe aproximadamente. **ES1:** Sim, mas seria um número com vírgula... é um valor aproximado : 3,6. **ES2:** Existe, mas é aproximado, não é preciso.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.IV	**ES3:** Sim, o lado vai ser 30605551275.	**TAF5**
TS	**Categoria 5.I**	**S4:** 6,5 pode ser... Ah, não, eu não sei se existe. Não existe um número que ao quadrado seja 13. Eu acho que não existe.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.II	**S1:** Não eu acho que não... na verdade é provável que exista um quadrado de lado com medida 13 cm. [...] Eu vou dizer uma besteira, é preciso que o lado seja um número astronômico, não infinito, mas próximo do infinito. **S3:** Seria raiz de 13... Mas... pode existir na teoria, nós não conseguimos um valor exato, podemos aproximar.	
	Categoria 5.V	**S2:** $\sqrt{13}$. **S5:** $\sqrt{13}$.	**TAV5 e TAV6**
Licence	**Categoria 5.V**	**L4:** Sim, de lados medindo $\sqrt{13}$. **L1:** Existe, o lado vai ser $\sqrt{13}$. **L3:** $\sqrt{13}$... É construtível. **L4:** $\sqrt{13}$. **L5:** $\sqrt{13}$. É um pouco difícil de construir, mas existe.	**TAV5 e TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 26 - Resumo das análises da atividade 5(b) - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Ensino Fundamental	**Categoria 5.II**	**F7:** Eu acho que não... porque a área seria 13,18022856. **F1:** Eu acredito que não. Porque raiz de treze não é um número exato. **F5:** Não... Vai ser... vai ser um número que vai estar dentro da raiz de treze. [...] É, a área pode ser 13. **F3:** Eu acho que não. Se fosse fazer por aproximação, eu acho que não ia dar, porque 3,7 passa de treze. E 3,6 falta um pouco. Então eu acho que não dá. **F6:** Eu acho que ela é verdadeira, talvez. Porque se a área medir $12{,}96$ ela pode ser arredondada por 13. **F2:** Não, porque não tem raiz quadrada de 13 (na atividade anterior o aluno afirmou que $\sqrt{13}$ não tem valor exato).	**TAF8 e TAF10**
Ensino Médio	**Categoria 5.II**	**M2:** Como eu comentei na atividade anterior, vai faltar *1cm* para a área ser $13\ cm^2$. **M5:** Eu estou com dúvidas... [...] Eu acho que sim, mas não sei por que. [...] Se pode deixar tudo na raiz, se pode deixar tudo aproximado... se são números infinitos. **M4:** Eu acho que não existe... porque se você achar a raiz de treze, vai ser um número menor do que 13.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.V	**M3:** A área vai ser $\sqrt{169}$ que é 13. **M7:** Existe. O lado é $\sqrt{13}$. **M1:** Eu to confuso, porque, por exemplo, o lado é raiz de treze. Se eu calculo a área dá 13. Mas se for pra pensar, e voltar pra ver quanto vale o lado dele, seria $\sqrt{13}$, se eu tirar a raiz dele, vai virar um número infinito. Como é que eu vou calcular a área com um negócio infinito? [...] Tá cada vez me intrigando mais... esse negócio infinito. Ah... nesse aqui eu concordo.	**TAV6**
	Categoria 5.V	**M6:** Existe, porque $3{,}605551275 \times 3{,}605551275$ é 13.	**TAF5**
Superior	**Categoria 5.III**	**G2:** Não sei... é existe. O lado vai estar entre 3 e 4.	
	Categoria 5.V	**G1:** É, o lado é raiz de treze, eu concordo que este quadrado tem área 13. **G6:** Pelas contas eu concordo, mas eu não sei... Concordo. [...] Fazer o quê?	**TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 27 - Resumo das análises da atividade 5(b) - alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Collège	**Categoria 5.II**	**C7:** Eu diria que é falso... porque raiz de 13 é um valor aproximado, então não vai ser 13, mas quase 13.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 5.III	**C4:** Pode ser que sim... Não sei... **C6:** É possível que a afirmação seja verdadeira, porque os dígitos não terminam... [...] Eu não sei se tem 2, 3 ou vários dígitos, mas eu acho que pode existir o quadrado de área 13.	
	Categoria 5. IV	**C2:** A afirmação é verdadeira... o lado do quadrado é 3,605551275.	**TAF5**
	Categoria 5.V	**C1:** Ah, sim, lado vezes lado é 13. **C3:** Sim, porque lado vezes lado é 13.	**TAV5 e TAV6**

	Categoria 5. V	**ES2:** Sim [a aluna tecla raiz de 13 na calculadora e conclui que a afirmação é verdadeira].	**TAF5**
	Categoria 5.V	**ES1:** Sim, a afirmação é verdadeira porque se fazemos lado vezes lado a área é 13. **ES4:** Raiz quadrada de 13 ao quadrado é 13. Lado vezes lado... 13. Bem, sim, eu penso que é verdade.	**TAV5 e TAV6**
TS	**Categoria 5.III**	**S4:** É verdadeira... eu não sei quanto é raiz quadrada de 13... É falso... Eu não sei...	

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 28 - Resumo das análises da atividade 6 - existência de um quadrado de área $24\ cm^2$ - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Ensino Fundamental	**Categoria 6.I**	**F3:** Eu acho que não. [...] Eu estou tentando achar dois números que multiplicados ele por ele dá 24. [...] Não dá. **F1:** Eu acho que não. [...] Porque na calculadora não dá nem um número exato. **F6:** Eu acho que não, porque não tem um número que vezes ele mesmo dê 24. **F2:** (depois de alguns cálculos com a calculadora) Acho que não tem. [...] Não consegui achar nenhum número... Não consegui.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 6.II	**F5:** Eu acho que pode existir... mas eu não sei aonde. [...] Eu acho que vai estar por aqui (próximo ao número cinco). **F7:** Só se for um número que não é inteiro. [...] Só se for quatro e alguma coisa vezes quatro e alguma coisa, porque se for 5 dá 25. [...] Ele estaria por aqui, perto de 4,8, perto de 5.	**TAF10**
	Categoria 6.IV	**F4:** Seria $\sqrt{24}$.	**TAV5 e TAV6**
Ensino Médio	**Categoria 6.I**	**M3:** Não dá... Porque teria que ter um número que multiplicado por ele daria 24. E aqui não tem. **M4:** Não... porque num quadrado os lados tem que ser iguais, né? Então, aqui eu acho que eu consigo, mas os lados são diferentes.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 6.II	**M2:** Vai existir. Vai esta por aqui (o aluno representa um quadrado com medidas dos alunos aproximadamente igual a 4,9cm). **M5:** Existe, mas a área vai ser aproximadamente 24 e uns quebradinhos. **M1:** Sim (o lado representa um quadrado cuja medida do lado é 4,89). **M7:** Vai estar entre 4 e 5 cm, vai ser raiz de 24.	**TAF10**
	Categoria 6.III	**M6:** (depois de várias simulações de cálculos com a calculadora, a aluna conclui) Dá sim! O lado vai ser este número 4,898979486 [...] porque ele vezes ele dá 24.	**TAF5**
Ensino Superior	**Categoria 6.II**	**G6:** Existe. Vai estar entre 4 e 5. **G2:** É, vai estar entre 4 e 5... mais próximo de 5... [...] Sim, raiz de 24.	**TAF10**
	Categoria 6.IV	**G7:** acredito que sim, imagino que pode ser feito uma função... Sim, porque existe um ponto nesta curva $b=\frac{24}{a}$, quando $a=b$, que é o vértice do quadrado de área $24\ cm^2$. **G1:** Se eu consigo representar um quadrado de $13\ cm^2$ eu também consigo representar um quadrado de $24\ cm^2$, o lado dele vai ser $\sqrt{24}$. **G3:** Ele só vai ter uma representação... seria raiz de vinte e quatro, que é dois raiz de seis. **G5:** Sim... o lado vai ser $\sqrt{24}$.	**TAV5 e TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 29 - Resumo da análise da existência de um quadrado de área $24\ cm^2$ por alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Collège	**Categoria 6.I**	**C3:** Não, eu acho que não... se não seria uma raiz [...] seria $\sqrt{24}$, eu acho que não existe. **C5:** Não existe [o aluno faz simulações na calculadora por aproximadamente 4 minutos].	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 6.II	**C1:** Eu penso que 12 vezes 12 [...] Eu acho que existe, mas eu não sei a medida do lado. **C7:** Sim, mas seria um valor aproximado... e o valor seria a raiz quadrada... é como no exercício anterior que a raiz de 13 que é o valor exato. [A pesquisadora questionada de qual valor seria a raiz quadrada] Bem, eu diria... bem, eu não sei se seria raiz quadrada... eu não sei. **C6:** Eu acho que vai ser como 13, vai ser um número com vírgula, mas vai ter solução. **C2:** Aproximadamente, o lado seria próximo de 4,9. **C4:** Aproximadamente 24.	**TAF8 e TAF10**
TES	**Categoria 6.I**	**ES2:** Não é possível...	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 6.II	**ES4:** Daria para representar com um valor aproximado, com um valor exato eu não sei... **ES1:** Lado 4,9 aproximadamente.	**TAF8 e TAF10**
	Categoria 6.III	**ES3:** Sim, o lado vai ser 4,898979486.	**TAF5**
TS	**Categoria 6.II**	**S3:** É preciso representar... nós podemos aproximar... $\sqrt{24}$ que é $2\sqrt{6}$ ... podemos representar aproximadamente. **S5:** Sim, a condição que nós conhecimentos quanto é $\sqrt{24}$... Mas eu não sei quanto é... mas, deve ser possível... Sim, um pouco menos que 25. **S1:** É possível, mas é preciso encontrar um ponto que representa $\sqrt{24}$.	**TAF6 e TAF8**
	Categoria 6.IV	**S2:** $\sqrt{24}$.	**TAV5 e TAV6**
Licence	**Categoria 6.IV**	**L1:** Sim, $\sqrt{24}$. **L2:** A medida do lado é $\sqrt{24}$. **L3:** Sim, do mesmo modo que o quadrado de área 13, nós podemos construir $\sqrt{24}$. **L5:** Não porque seria uma aproximação… não seria verdadeiramente um quadrado [...] Ah, sim, nós podemos construir! **L4:** Sim, $\sqrt{24}$.	**TAV5 e TAV6**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 30 - Resumo das análises da atividade 7 - representação na reta do número $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ - alunos brasileiros

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA

EF	**Categoria 7.I**	**F1:** Eu vou por dedução mesmo, eu acho que não. [...] Porque tem infinitas casas decimais. [...] eu acho que não dá pra representar. **F7:** Não. [...] Porque é um número grande demais. **F6:** Eu não sei se é possível. [...] Porque eu não sei se existe $\sqrt{2}$.	**TAF7**
	Categoria 7.II	**F2:** Posso usar a calculadora? (o aluno representa aproximadamente 1,41 na reta). **F3:** É bem difícil, mas eu acho que consegue... não tão precisamente. [...] $\sqrt{2}$ eu vou arredondar para 1,14. **F5:** Eu acho que sim. [...] o resultado que deu fica entre 1 e 2. **F4:** Eu acho que sim. Na verdade, $\sqrt{2}$ é 1,2 e alguma coisa.	**TAF5**
EM	**Categoria 7.I**	**M7:** Não é possível porque eu não conheço ele inteiro... eu não posso representar na reta porque eu não vou ter certeza se ele é realmente igual ou é aproximadamente.	**TAF7**
	Categoria 7.II	**M3:** Raiz de dois? É possível... vai estar por aqui (representa o número 1,41 na reta numérica, referindo-se $\sqrt{2}$). **M4:** Eu acho que sim... [a aluna representa 1,4]. **M2:** Está entre 2 e 3. Vai ser 1,414213562. **M6:** Raiz de dois não dá exata né? Vai dá pra representar mais ou menos [representa o número 1,414213562]. **M5:** O aluno representa: um ponto e escreve: 1,414213562. É, da pra representar aproximadamente, né? Exato eu acho que não. **M1:** Eu teria que considerar todos os números né? Eu marcaria mais ou menos assim 3,2360 (para representar $\sqrt{5}$).	**TAF5**
Ensino Superior	**Categoria 7.II**	**G6:** Eu acho possível... [representa 2,23 na reta numérica]. **G2:** Sim, entre dois e três, mais próximo de 3... mais próximo de 2,5. **G7:** De forma intuitiva sim. Raiz de cinco é alguma coisa entre dois e três, mais próximo de dois.	
	Categoria 7.III	**G3:** Sim, eu faria do mesmo modo que eu fiz na atividade anterior, eu construiria o segmento de medida raiz de cinco e transportaria o segmento. **G5:** É possível. Agora, como? [A aluna representou corretamente tal segmento, considerando o triângulo retângulo de lados 1 e 2]. **G1:** Deixa eu pensar... [faz algumas simulações de lados de triângulos com valores] Sim, tem que considerar um triângulo de catetos dois e um. **G4:** Ele estaria neste intervalo entre 2 e 3... pensa murmura... tem que achar o valor exato? ... Ah então tem que usar régua e compasso... [o aluno transporta a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 1 e 2].	**TAV7**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 31 - Resumo das análises da atividade 7 - representação na reta do número $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ - alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Collège	**Categoria 7.I**	**C6:** Seria aproximado, eu não poderia fazer exato. **C2:** Não porque $\sqrt{2}$ não é um número exato. **C3:** Aproximadamente eu acredito… **C7:** Seria próximo de 1,4… mas na verdade não termina.	**TAF7**
	Categoria 7.II	**C3:** Eu não consigo, porque eu não sei calcular raiz quadrada de cabeça... [a aluna utiliza a calculadora e representa 1,4 na reta numérica]. **C1:** Sim, 1,4 […] porque …. É 1,4142… **C5:** Sim, 1,41.	**TAF5**

TES	**Categoria 7.I**	**ES4:** Podemos representar aproximadamente, mas não com o valor exato. **ES1:** Vai ser um valor aproximado. **ES2:** Não porque não vai ser muito preciso. **ES3:** É 1,4, mas não é preciso, é aproximado.	**TAF7**
TS	**Categoria 7.I**	**S2:** Não, é possível representar apenas um valor aproximado 1,4. **S3:** É possível representar um valor aproximado. **S5:** Não é possível representar exatamente, porque eu não sei quantos dígitos existe após a vírgula [...] podemos representar 1,4 ou 1,41, mas não exatamente. **S1:** Não, eu acho que não, eu sei que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.	**TAF7**
	Categoria 7.I	**S4:** Sim, vai estar entre 1 e 2 [o aluno representa 1,4 na reta].	**TAF7**
Licence	**Categoria 7.III**	**L2:** Sim, é possível porque é um real... eu sei que está entre 1 e 2... é preciso encontrar um meio prático.	
	Categoria IV	**L1:** Sim, é preciso construir um triângulo retângulo de catetos 1 e 2 [a aluna constroi o retângulo e transporta o segmento de medida $\sqrt{5}$]. **L3:** Sim [a aluna constroi, primeiramente, o segmento de medida $\sqrt{2}$ e, em seguida, a pedido da pesquisadora, o segmento de medida $\sqrt{5}$, por meio do triângulo retângulo de catetos com medida 1 e 2]. **L4:** Sim, é preciso construir triâgulo de lado 1. **L5:** Sim [a aluna representa o triângulo retângulo de catetos unitários, transportando o segmento de medida $\sqrt{2}$ para a reta, e explica como representaria o segmento de medida $\sqrt{5}$].	**TAV7**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 32 - Resumo das análises da atividade 8 - representação na reta do número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) na reta numérica - alunos brasileiros

	Categorias	**Fragmentos das entrevistas**	**Indicativo de TA**
Ensino Fundamental	**Categoria 8.I**	**F4:** Eu não sei né, porque na verdade é possível representar de várias formas, porque $\sqrt{2}$ é um número.... mas desta forma, eu não sei te responder.	
	Categoria 8.II	**F6:** Eu acho que agora é possível representar... mas eu não sei como. **F1:** Agora eu acho que sim! Deixando na raiz. [...] Só que é difícil eu fazer esta dedução porque eu não aprendi isto ainda. **F3:** Esse tamanho é $\sqrt{2}$ ... eu acho que sim, é possível sim. **F7:** Eu acho que sim... bem eu não sei representar.	
Ensino Médio	**Categoria 8.I**	**M5:** Eu acho que não. **M7:** Eu não sei como marcar na reta porque eu não conheço todas as casas dele. **M1:** Acho que não. **M4:** Ah, eu marcaria da mesma forma 1,41. **M3:** Outra forma do que aquela? Ah, eu colocaria raiz de dois (representa o símbolo $\sqrt{2}$ na reta).	**TAF7**
	Categoria 8.II	**M2:** Sim, a hipotenusa de catetos com medida 1. [...] estou sem ideias de como representar.	**TAV7**
	Categoria 8.III	**M6:** [representa um triângulo retângulo de catetos unitários e transporta a medida da hipotenusa e diz:] Vai estar por aqui.	**TAV7**

Superior	**Categoria 8.III**	**G6:** Sim, eu posso transportar o segmento de medida $\sqrt{5}$. **G7:** Sim, preciso construir um triângulo de hipotenusa $\sqrt{5}$ e transportar com o compasso. **G2:** Então, a partir disto eu posso construir o quadrilátero com esta medida de lado?	**TAV7**

Fonte: a autora desta pesquisa

Quadro 33 - Resumo das análises da atividade 8 - representação na reta do número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) na reta numérica - alunos franceses

	Categorias	Fragmentos das entrevistas	Indicativo de TA
Collège	**Categoria 8.I**	**C1:** 2 vezes 2 [aponta para um quadrado]... Não, eu não sei como representar. **C3:** Eu acho que não é possível porque o tamanho [refere-se à unidade de media escolhida] é muito grande. **C7:** Eu não sei... **C5:** Sim... [o aluno constrói incorretamente um retângulo de lados com medidas 1 e 1,41 e diz que $\sqrt{2}$ é o ponto representado por 1,41]. **C4:** Não. **C6:** Não, eu não consigo.	**TAF7**
	Categoria 8.III	**C2:** Sim... [o aluno constrói o triângulo retângulo de catetos unitários e transporta a medida da hipotenusa].	**TAV7**
TES	**Categoria 8.II**	**ES3:** Sim, é possível.... mais eu não sei como representar.	
	Categoria 8.III	**ES4:** Nós podemos representar a medida sobre a medida sobre a reta real [a aluna mede com o compasso o segmento de medida $\sqrt{2}$ no caracol pitagórico e transporta para a reta numérica]. **ES1:** Sim, é possível, representamos um triângulo. **ES2:** Sim.	**TAV7**
TS	**Categoria 8.II**	**S4:** Sim... Mas eu não sei como representar [a aluna chega construir um triângulo retângulo de catetos unitários].	
	Categoria 8.III	**S1:** Sim [o aluno constrói o triangulo retângulo de catetos unitários e transporta com o auxílio do compasso]. **S2:** Sim, com a hipotenusa do triângulo nós podemos transportar $\sqrt{2}$. **S3:** Sim [o aluno constrói o triangulo retângulo de catetos unitários e transporta com o auxílio do compasso]. **S5:** Sim, nós podemos transportar a medida $\sqrt{2}$.	**TAV7**

Fonte: a autora desta pesquisa