UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA
A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

MICHELE CARVALHO DE BARROS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NO CONTEXTO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA MODELAGEM MATEMÁTICA

MARINGÁ - PR
2017

MICHELE CARVALHO DE BARROS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NO CONTEXTO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lilian Akemi Kato

MARINGÁ – PR
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Barros, Michele Carvalho de
B277e Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática/ Michele Carvalho de Barros. -- Maringá, 2017.
258 f. : il. color. , figs. , tabs.

Orientadora: Prof. Dr.a. Lilian Akemi Kato.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2017.

1. Educação Matemática. 2. Equações Diferenciais Ordinárias. 3. Registros de representação semiótica. 4. Modelagem Matemática. 5. Mudanças de domínio. I. Kato, Lilian Akemi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 22. ED.511.8
JLM-001650

MICHELE CARVALHO DE BARROS

Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de Representação Semiótica e da Modelagem Matemática

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em *Ensino de Ciências e Matemática.*

BANCA EXAMINADORA

Lilian Akemi Kato

Profa. Dra. Lílian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Lourdes Maria Werle

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Veridiana Rezende

Profa. Dra. Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

Trivizoli

Profa. Dra. Lucieli Maria Trivizoli da Silva
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Franco

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 23 de Março de 2017.

Ao meu namorado Leandro, dedico.

À minha mãe, Claudiomira, aos meus avós, Izabel e José (guardado no coração), ofereço.

Agradecimentos

"No início achei que eu não iria conseguir fazer nada, mas com o passar do tempo vi que não era tão assustador. E o mais legal é que parece que a turma inteira evoluiu junto". São falas como a desse aluno, participante desta pesquisa, que nos motivam, nos fazem esquecer as agruras do caminho e nos tornam realizados profissionalmente. Como bem disse a raposa cativada pelo pequeno Príncipe, o segredo é muito simples: "só se vê bem com o coração. O essencial é invisível aos olhos". E é por isso que agradeço aqui a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, fosse com incentivo, com seu tempo, com suas experiências e repertórios, com palavras de apoio ou com gestos simples que fizeram com que as coisas fossem possíveis. Com carinho,

A Deus e a Nossa Senhora por ouvirem minhas orações, meus apelos e por guiarem meus passos todos os dias.

À minha mãe, Claudiomira, à minha avó, Izabel e ao meu tio Claudemir, pelo apoio, orações e por me incentivarem, independente de quais sejam minhas escolhas. Em especial à minha mãe, pela companhia nas minhas idas e vindas a Maringá.

Aos professores Dr. Valdeni Soliani Franco, Dra. Lucieli Maria Trivizoli da Silva, Dra Ana Paula Jahn e Dra Lourdes Maria Werle de Almeida, por toda a dedicação na leitura desse texto e pelas relevantes contribuições dadas desde do início desta pesquisa. Foi uma honra tê-los como membros dessa banca.

À professora Dra. Veridiana Rezende pela disponibilidade e por aceitar de pronto o convite para participar da banca de defesa.

À professora Dra. Jana Trgalova, pelo carinho com que me recebeu na França e pelas valorosas contribuições no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos do grupo GIEMEM, pelas reflexões, críticas e sugestões durante todas as etapas dessa pesquisa, pela paciência nos seminários e por estarem sempre dispostos a me ajudar. Com certeza, vocês fizeram toda a diferença. Em especial, agradeço aos professores Lilian Kato e Valdinei Cardoso pelo carinho e pela responsabilidade com que coordenam nosso grupo. E aos meus amigos Bárbara Braz, Daniela Barbieri, Flávia Teodoro, Priscila Patricio e Wellington Oliveira pelo ombro amigo, incentivos e momentos de descontração. Também aproveito para agradecer aos amigos Bruno Umbezeiro, Cláudia Kato, Denise Figueiredo, que hoje não participam mais do grupo, porém estão sempre em nossos corações.

Às secretárias Sandra Grzegorczyk e Marta Peron, pelo carinho que sempre me atenderam.

Aos amigos Simone Gomes e João Guimarães pela amizade e por terem sido meu porto seguro durante o tempo que estive na França.

À amiga Marcela Butarelli pela amizade e pelas orações.

Agradeço, imensamente, aos queridos alunos da UTFPR, pela paciência, dedicação e comprometimento no decorrer do curso de extensão, sem a participação de vocês, nada disso seria possível.

À UTFPR e aos professores do DAMAT pela concessão do meu afastamento da universidade, o qual possibilitou que eu me dedicasse à minha pesquisa.

E, por fim, agradeço a quatro pessoas que foram extremamente importantes na minha vida durante o decorrer do meu doutorado, que fizeram eu acreditar que era capaz, que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando e apoiando. Sem a amizade e carinho de vocês eu não teria chegado até aqui. Assim, com muito amor, sem ordem de preferência dona Bárbara, agradeço,

À minha orientadora Lilian Akemi Kato, por quem eu tenho grande admiração, obrigada pela amizade, pela disposição a todo tempo, seja no domingo ou na semana do Natal. Suas sugestões e críticas foram fundamentais para que o nosso projeto inicial fosse lapidado e chegasse à fase final. Obrigada por acreditar em mim, mesmo quando eu não acreditava, pelas palavras de incentivo e, principalmente, pelos "puxões de orelha" quando necessários. Espero poder continuar aprendendo contigo. Saiba que mais que uma excelente orientadora é, para mim, uma grande amiga.

Às minhas amigas Bárbara Braz e Priscila Patricio pela amizade que a cada dia é fortalecida, por estarem sempre ao meu lado, pessoalmente ou pelo whatsapp, ouvirem meus lamentos (que são muitos) e sempre terem uma palavra de consolo. Bárbara, obrigada pelas inúmeras leituras, discussões e sugestões para a melhoria da minha pesquisa, por achar minha tese "linda", pela morada sempre de portas abertas para me receber em Maringá, pela oportunidade de conviver com sua família, da qual me considero parte. Priscila, obrigada por sempre ser minha amiga, mesmo quando estamos em lados opostos, pelas conversas e conselhos na madrugada, por me socorrer sempre que esquecia algo em Campo Mourão, por me acompanhar a médicos, exames etc. e pelos "oi tudo bem?" todos os dias, durante os sete meses que estive na França. Minhas amigas vocês tornaram meu caminho mais leve e alegre. E como falamos estes dias: o que seria de mim sem vocês? Mais feliz, Bárbara? Não sei, mas com certeza, eu seria incompleta.

Ao meu namorado, amigo e companheiro Leandro Waidemam pelo amor e carinho que recebo todos os dias há mais de seis anos. Pelas incontáveis viagens a Maringá combinadas com horas de espera, fosse na cantina ou embaixo de uma árvore no estacionamento. Por apoiar e incentivar minhas decisões, mesmo que elas incluam ficar meses distantes. Por aguentar minhas "surtadas", meus choros, meu mau humor, por ouvir minhas reclamações, sempre com paciência e ternura. Por ouvir minhas teorias malucas e ainda opinar sobre elas. Por entender todos os meus: agora não posso, preciso estudar. Enfim, obrigada por ser você e por me permitir ser eu, amo você!

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.
Fernando Pessoa

BARROS, Michele C. **Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da Modelagem Matemática.** 2017, 258f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciências e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

RESUMO

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) possuem ampla aplicação na resolução de problemas sobre movimento, crescimento, eletricidade, vibrações e de diversos tipos de fenômenos físicos que envolvem taxas de variação de quantidades, nas mais diversas áreas de conhecimento. Nesse contexto, seu estudo permite o estabelecimento de várias relações entre as Ciências e a Matemática. Porém, o que se observa nas disciplinas em que tal assunto é abordado, é que ela é tratada com um enfoque estritamente algébrico, fazendo com que os alunos se preocupem apenas em aprender o método que a resolva, deixando de lado o objetivo principal que seria entender o processo que gerou tal equação diferencial ordinária (EDO), e qual a relação entre a solução e o fenômeno que ela descreve. A Modelagem Matemática, uma das tendências da Educação Matemática, possibilita estabelecer diversas relações entre o modelo matemático, no caso uma EDO, e o fenômeno analisado, favorecendo também a atribuição de significados às variáveis que descrevem tal fenômeno. Partindo desses pressupostos, desenvolvemos um estudo de cunho qualitativo, objetivando investigar o potencial de uma sequência de situações, envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio, na condução do processo de aprendizagem das EDOs para estudantes dos cursos de engenharias. Como procedimentos metodológicos, propusemos o desenvolvimento de uma sequência de situações baseada nos pressupostos da engenharia didática. Os resultados obtidos apontaram que a sequência de situações possibilitou aos alunos compreensões das EDOs que contemplam os conhecimentos apontados nos exercícios propostos nos livros didáticos. O estudo em diferentes domínios e o uso de diferentes registros de representação semiótica auxiliou no estabelecimento de relações entre a família de soluções e a derivada, entre a EDO e o seu campo de vetores e entre o sinal da derivada e o campo de vetores. Particularmente, no desenvolvimento dos problemas de Modelagem Matemática, esses conhecimentos permitiram aos alunos interpretar as relações entre a equação e o fenômeno modelado, pois esse tipo de atividade solicita que o aluno interprete a situação estudada e não somente resolva a EDO. Neste processo de análise e de interpretação do fenômeno se faz necessária a utilização de ferramentas de diferentes domínios matemáticos e requer o uso de diferentes registros de representação, o que possibilita o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Equações Diferenciais Ordinárias. Registros de representação semiótica. Modelagem Matemática. Mudanças de domínio.

BARROS, Michele C. **Ordinary differential equations in the context of records of semiotic representation and mathematical modeling.** 2017. 258 sts. Thesis (Doctorate in Education for Sciencie and Mathematics). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

ABSTRACT

The ordinary differential equations (ODEs) have wide application in the resolution of complex problems of movement, growth, electricity, vibrations and of various types of physical phenomena which involve rates of variation of quantities in the most diverse areas of knowledge. In this context, studying these equations allows the establishment of several relations between Sciences and Mathematics. However, what is observed in the disciplines in which this subject is approached is that it is treated with a strictly algebraic approach, causing the students to worry only about learning the method that can solve it, leaving aside the main objective which would be understanding the process that generated such an ordinary differential equation (ODE), and what the relationship between the solution and the phenomenon it describes. Mathematical Modeling, one of the trends in Mathematics Education, makes it possible to establish several relationships between the mathematical model, in this case an ODE, and the analyzed phenomenon, also favoring the attribution of meanings to the variables that describe such phenomenon. Based on these assumptions, we have developed a qualitative study, aiming to investigate the potential of a sequence of situations, involving problems in the context of Mathematical Modeling, from the perspective of semiotic representation registers and interplay between settings, in the conduction of the learning process of the ODEs for Engineering students. As methodological procedures, we have proposed the development of a sequence of situations based on the presuppositions of didactic engineering. The results showed that the sequence of situations enabled the students to understand the ODEs that contemplate the knowledge pointed out in the exercises proposed in the textbooks. The study in different domains and the use of different registers of semiotic representation aided in the establishment of relations between the family of solutions and the derivative between ODE and its field of vectors and between the signal of the derivative and the field of vectors. In particular, in the development of Mathematical Modeling problems, this knowledge has allowed the students to interpret the relations between the equation and the modeled phenomenon, since this type of activity demands students to interpret the studied situation and not only solve the ODE. In this process of analysis and interpretation of the phenomenon it becomes necessary to use different tools of mathematical domains and requires the use of different representation registers, which enables the treatment, conversion and coordination between registers.

Keywords: Mathematical Education. Ordinary Differential Equations. Registers of semiotic representation. Mathematical Modeling. Interplays between settings.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIAÇÕES

AIEi: atividade número I estratégia número i

AIEis: atividade número I estratégia número i item s

DA: domínio auxiliar

Domínio da AA: domínio da Álgebra/Análise

Domínio da AA/F: domínio da Álgebra/Análise e domínio das Funções

Domínio da AL: domínio da Álgebra

Domínio da AN: domínio da Análise

Domínio das F: domínio das Funções

Domínio da GA: domínio da Geometria Analítica

Domínio NM: domínio não matemático

ED: equação diferencial

EDO: equação diferencial ordinária

EDOs: equações diferenciais ordinárias

EDP: equação diferencia parcial

ER: exercícios resolvidos

MM: Modelagem Matemática

RC: registro de chegada

RF: registro figural

RG: registro gráfico

RI: registro intermediário

RLNE: registro da língua natural de uso especializado

RP: registro de partida

RSA: registro simbólico-algébrico

RSN: registro simbólico-numérico

SUMÁRIO

Introdução

As ideias iniciais deste trabalho começaram antes mesmo do ingresso no programa de pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática na Universidade Estadual de Maringá, elas surgiram durante a atuação da pesquisadora como professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I) na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, para os cursos de Engenharia de Alimentos, Ambiental, Civil e Eletrônica.

A disciplina de CDI - I apresenta um alto índice de evasão e de reprovação, o que gera problemas tanto para alunos, que têm seu desenvolvimento no curso prejudicado, quanto para a universidade, que precisa abrir novas turmas para suprir a demanda, tendo que disponibilizar professores e espaço físico que não estavam planejados.

Desta preocupação veio a motivação de estudar teorias e estratégias de aprendizagens que pudessem auxiliar os futuros engenheiros a entender melhor os conceitos matemáticos necessários no decorrer dos seus respectivos cursos. Dentre os diversos conceitos matemáticos que são base dos cursos de Engenharia, escolhemos as equações diferenciais ordinárias (EDOs), que representam uma parte fundamental no estudo do Cálculo Diferencial e Integral e são utilizadas para compreender e investigar problemas sobre movimento, crescimento, eletricidade, termodinâmica, hidrodinâmica, propagação de doenças e todo tipo de fenômeno físico que envolva taxas de variação de quantidades.

Por esta gama de aplicações, as EDOs estabelecem relações entre as outras áreas das Ciências e das Engenharias com a Matemática, promovendo um estudo interdisciplinar, que permite ao aluno entender o processo que gerou tal equação diferencial ordinária (EDO) e qual a relação entre a solução e o fenômeno que ela descreve.

Essas características das EDOs aparecem enfatizadas nos objetivos das ementas das disciplinas de diversos cursos de graduação. Em particular, nos cursos de Engenharias, os alunos, ao cursarem tal disciplina, devem ser capazes de apresentar ferramentas e suportes matemáticos para a modelagem de problemas práticos e teóricos das diversas áreas das Ciências e Engenharias. Também, devem desenvolver a habilidade e a capacidade de criar métodos e ferramentas para solucionar problemas que envolvam taxa de variação e EDO.

No entanto, o que se observa, nos diversos cursos em que está presente, é o desestímulo dos alunos em relação ao seu estudo, muitas vezes ocasionados pela dificuldade de perceber possibilidades de aplicação direta em problemas relacionados à sua prática profissional ou pela falta de compreensão dos significados dos conceitos das EDOs (DULLIUS; VEIT; ARAUJO, 2011).

Pensando nisso, começamos a buscar por estratégias e teorias que poderiam auxiliar na melhoria da aprendizagem das EDOs para estudantes dos cursos de Engenharias. Primeiramente, pensamos na Modelagem Matemática (MM) como uma estratégia de ensino e de aprendizagem que poderia possibilitar o estabelecimento de diversas relações entre a EDO (o modelo matemático) e o fenômeno analisado, favorecendo a atribuição de significados às variáveis que descrevem tal fenômeno. A Modelagem Matemática pode ser entendida como um processo para a obtenção e a validação de modelos matemáticos com a finalidade de analisar e de prever o comportamento do fenômeno estudado.

Encontramos, na Modelagem Matemática, possibilidades para o estudo das EDOs no contexto de problemas aplicados a outras áreas do conhecimento, em particular, nas Engenharias. Contudo, percebemos que analisar um modelo representado por uma EDO apenas com aplicações de técnicas algébricas de resoluções, nem sempre é suficiente para a compreensão do fenômeno, sendo necessário subsidiar nossos alunos com ferramentas matemáticas que possibilitem compreensões para além da solução algébrica, proposta nos livros didáticos.

Pensando nisso, começamos a estudar algumas teorias que poderiam ser utilizadas em conjunto com a Modelagem Matemática de forma a possibilitar a compreensão do nosso objeto de estudo. Dentre essas teorias, uma nos chamou a atenção, as mudanças de domínio de Douady (1984, 1992), que são meios de obter diferentes formulações de uma situação sem que necessariamente elas sejam equivalentes, propiciando o estudo do conteúdo em diferentes ramos da Matemática, como o da Álgebra, da Geometria Analítica, das Funções, entre outros, o que, segundo a autora, é necessário para a compreensão de um conceito matemático.

Após um estudo inicial, devido a algumas interseções entre as mudanças de domínios e as transformações realizadas nos registros de representação semiótica de Duval (1993, 2010, 2012), identificamos a necessidade de utilizar também este referencial em nossa pesquisa. Para o autor, o uso de diferentes registros de representação semiótica no estudo de um objeto matemático e a coordenação entre estes registros possibilitam o entendimento deste conceito.

Como referencial metodológico, utilizamos a engenharia didática de Artigue (1996), que é composta por quatro fases: as análises preliminares, a construção das situações e análise *a priori*, a experimentação e a análise *a posteriori* e a validação.

Assim, apoiados nos referenciais teóricos e metodológicos citados, elaboramos e aplicamos uma sequência de situações (compostas por atividades matemáticas (fase 1) e problemas no contexto da Modelagem Matemática (fase 2), com dezesseis alunos dos cursos de Engenharias da Universidade Federal Tecnológica do Paraná, buscando propiciar uma compreensão do conceito das EDOs para esses alunos.

Objetivo

Esta pesquisa teve como objetivo investigar o potencial de uma sequência de situações, envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio, na condução do processo de aprendizagem das equações diferenciais ordinárias para estudantes dos cursos de engenharias.

Este objetivo desdobra-se em algumas metas mais específicas, a saber:

i) Identificar as mudanças de domínios e de registros de representações realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento da fase 1.
ii) Identificar as mudanças de domínios e de registros de representações realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento dos problemas de Modelagem Matemática (fase 2) e verificar se os alunos conseguem aplicar os conhecimentos trabalhados na fase anterior.

Estrutura da tese

A estrutura do texto compreende quatro capítulos, além das considerações iniciais e finais e das referências bibliográficas. Os aportes teóricos e metodológicos estão descritos no Capítulo 1 do presente estudo.

No Capítulo 2, apresentamos nosso objeto de estudo, as Equações Diferenciais Ordinárias, uma análise dos exercícios resolvidos de dois livros didáticos utilizados por universidades brasileiras para o ensino e a aprendizagem das EDOs e um estudo sobre os possíveis domínios e registros de representação para as EDOs.

No Capítulo 3, apresentamos a sequência de situações e suas análises *a priori*. No Capítulo 4, descrevemos a aplicação da sequência de situações e as análises *a posteriori.* E, por fim, apresentamos algumas considerações finais e as referências bibliográficas utilizadas.

1 Referencial teórico e metodológico

Neste capítulo apresentamos os referenciais teóricos e a metodologia que utilizamos neste trabalho.

1.1 Referencial teórico

Nesta seção descrevemos os seguintes referenciais teóricos utilizados nesta pesquisa: as mudanças de domínio de Douady (1983, 1984, 1986, 1992) e os registros de representação semiótica de Duval (1993, 2001, 2003, 2012).

1.1.1 Mudanças de domínio

As noções sobre mudanças de domínios[1] foram introduzidas por Régine Douady, em sua tese de doutorado, intitulada *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l´enseignement des mathématiques: une réslisation dans tout le cursus primaire*[2], defendida na Universidade Paris VII, em 1984.

Para Douady (1986),

> um domínio é constituído pelos objetos de um ramo da Matemática, das relações entre esses objetos, de suas diversas formulações e das imagens mentais associadas a estes objetos e a estas formulações. Estas imagens desempenham um papel essencial no funcionamento como ferramenta dos objetos dentro de um domínio. Dois domínios podem conter os mesmos objetos e diferirem por suas imagens mentais e problemática desenvolvida (DOUADY, 1986, p. 11, tradução nossa[3]).

Para Rogalski (2001), trabalhamos em certo domínio quando estudamos um problema cujos dados, o enunciado e as primeiras ferramentas de estudo fazem parte de uma teoria principal bem definida, mais ou menos ampla, muitas vezes com ligação com um campo conceitual[4].

O domínio, em geral, é um campo vasto como o da Análise, da Álgebra, da Geometria, ou mais restrito, como da Geometria Analítica, da teoria das Equações Diferenciais, da Álgebra

---

[1] Em francês, jeux de cadres.
[2] Em português, Mudança de domínio e dialética ferramenta-objeto no ensino da Matemática: uma realização em todo o currículo primário.
[33] Um cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellent diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets et différer par les images mentales et la problématique développée.
[4] No sentido de Vergnaud.

Linear, entre outros. Muitas vezes, podemos identificar os domínios nos livros, nos capítulos de livros, nos programas das disciplinas ou por meio da História da Matemática (ROGALSKI, 2001).

A mudança de domínio[5] "é um meio de obter diferentes formulações de um problema sem que necessariamente elas sejam equivalentes" (DOUADY, 1992, p. 135), ou seja, é uma passagem de um domínio para o outro. Esta mudança favorece um novo olhar para a situação dada promovendo o uso de ferramentas e de técnicas que não eram acessíveis inicialmente (DOUADY, 1992).

Para Douady (1983), uma mudança de domínio reflete a intenção de explorar o fato de que a maioria dos conceitos podem estar envolvidos em vários domínios, como o algébrico, o geométrico, o numérico, entre outros. Em cada domínio, um conceito apresenta objetos, propriedades e relações que lhe estabelecem significado.

Por exemplo[6], considere o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} -3x+2y=5 & \text{(I)} \\ x-y=-2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Segundo Douady (1992), o problema acima está formulado no domínio algébrico e pode ser resolvido no interior desse domínio utilizando o método da substituição. Neste caso, isolando y em (I), temos:

$$y=\frac{1}{2}(5+3x) \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II), obtemos:

$$\begin{aligned} x-y&=-2 \\ x-\frac{1}{2}(5+3x)&=-2 \\ 2x-5-3x&=-4 \\ x&=-1 \quad \text{(IV)} \end{aligned}$$

Para determinar o valor de y substituímos (IV) em (I)

$$\begin{aligned} -3x+2y&=5 \\ -3(-1)+2y&=5 \\ 2y&=5-2 \\ y&=1 \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema de equações é dada por $x=-1$ e $y=1$.

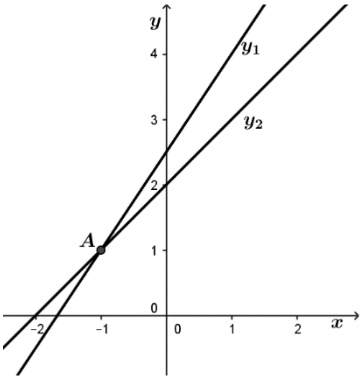
---

[5] Changement de cadre em francês.
[6] Exemplo adaptado de Douady (1992).

Observe que, neste caso, a resolução do problema se deu no domínio algébrico. Contudo, Douady (1992) considera que caso essa situação seja proposta para uma classe de alunos que não tenha tais conhecimentos algébricos disponíveis, porém, possuam familiaridade em calcular o valor numérico de algumas funções (lineares, afins etc.) e saibam observar suas representações gráficas em coordenadas cartesianas (obtidas com uma construção com lápis e papel ou com o auxílio de um software), então o problema pode ser transferido para o domínio das Funções, possibilitando a utilização de uma ferramenta gráfica que permita outras interpretações para o problema.

A autora ressalta que, neste caso, não é evidente que o aluno reconheça que as equações representam a lei de formação de funções afim, porém, com uma análise de que cada x tem correspondência a um y é possível considerar as equações (I) e (II) como sendo as funções $y_1(x) = \frac{1}{2}(3x+5)$ e $y_2(x) = x+2.$ Analisando os gráficos das funções y_1 e y_2 (Figura 1) pode-se verificar se as funções possuem um (ou vários) ponto(s) em comum ou nenhum e, consequentemente, determinar a solução do problema.

Figura 1: Ponto de interseção das funções y_1 e y_2



Fonte: Elaborado pela autora

Graficamente, a partir do momento que os alunos percebem que as representações gráficas de y_1 e y_2 são retas, outras perguntas podem surgir: as retas são paralelas? São distintas ou coincidentes? Qual o papel dos coeficientes?

Dessa forma, se o aluno reconhece que as duas equações do sistema são equações de retas, ele transfere o problema para o domínio da Geometria Analítica, realizando um procedimento análogo ao anterior. Esta escolha pelo domínio da Geometria Analítica ou das Funções depende do ponto de vista do sujeito em relação à situação, uma vez que temos uma interseção entre os dois domínios, pois a representação gráfica de uma função afim é uma reta. O direcionamento para um ou outro domínio depende dos conhecimentos dos alunos e/ou da intenção do professor.

Um outro exemplo[7] pode ser observado na seguinte situação: dados três pontos A, B e C distintos no plano, pergunta-se: A, B e C são colineares? Para resolver este problema o aluno pode recorrer a diferentes domínios matemáticos:

- ✓ Domínio da Álgebra Vetorial: A, B e C são colineares se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares.
- ✓ Domínio da Geometria Analítica: A, B e C são colineares se as coordenadas do ponto C verificam a equação da reta que passa pelos pontos A e B.
- ✓ Domínio da Geometria Euclidiana: A, B e C são colineares se C está sobre a reta que passa pelos pontos A e B ou se o segmento AC é coincidente ao segmento AB.

Observe que, em cada domínio, mudamos a forma de ver o problema. Por exemplo, no primeiro caso, analisamos o problema utilizando o objeto matemático vetor; no segundo, precisamos determinar a equação da reta que passa pelos pontos A e B para verificar se o ponto C pertence a ela. Em ambos os casos, chegaremos a mesma conclusão (se os pontos estão alinhados ou não), contudo, em cada caso, utilizamos ferramentas matemáticas diferentes.

A mudança de domínio pode ser realizada de forma espontânea pelo aluno ou provocada por intermédio de um outro aluno ou do professor. Essa mudança de domínio (espontânea ou provocada) permite que o aluno avance na resolução do problema, além de promover um avanço dentro do domínio (DOUADY,1984).

Neste processo, Douady (1986) distingue três fases. A primeira é a *transferência e a interpretação*, na qual o aluno transfere um problema de um domínio ao outro e interpreta algumas questões relativas ao problema. A outra é a *correspondência imperfeita*, as correspondências entre os domínios são imperfeitas, por razões matemáticas ou por falta de conhecimento dos alunos. E, por último, a *melhoria das correspondências e progresso dos conhecimentos*, uma evolução das correspondências entre os domínios e um avanço do aluno em relação à cada domínio.

Segundo Douady (1983), para os alunos em processo de aprendizagem, os conceitos operam de maneira parcial e de formas distintas em diferentes domínios, o que resulta em conexões incompletas entre os domínios. Desta forma, é necessário o desenvolvimento de atividades que envolvam mais de um domínio, para que, assim, os alunos adquiram a

[7] Exemplo adaptado de MUÑOS (2001, 2002)

capacidade de reconhecer e de compreender o conceito nas suas variadas representações e domínios.

No ensino e na aprendizagem das EDOs, podemos reconhecer vários domínios, como da Álgebra, das Funções, da Geometria Analítica, das Equações Diferenciais de primeira ordem, entre outros (GORDILLO, 2006). Consideramos também os domínios não matemáticos ou das grandezas (Química, Física, Biologia etc.).

Diante do exposto, acreditamos que atividades que envolvam os diversos domínios da Matemática favoreçam uma compreensão do conceito da EDO. Na seção 2.3 exploraremos melhor os possíveis domínios no contexto das EDOs.

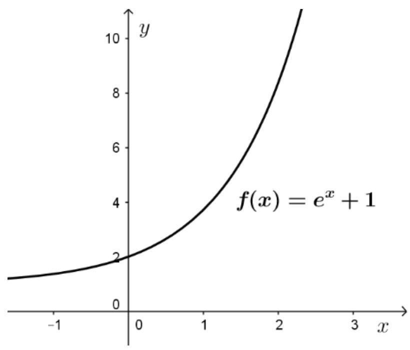
1.1.2 Registros de Representação Semiótica

Em uma atividade matemática, independente do domínio, precisamos utilizar uma escrita, um símbolo ou uma notação que represente o conceito matemático que queremos compreender e/ou utilizar, pois "não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação" (DAMM, 2012, pg. 169).

Segundo Duval (1993, p.38, tradução nossa[8]), "os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos 'reais' ou 'físicos'! É necessário representá-los".

Assim, por exemplo, para realizarmos alguma operação com a função $f(x)=e^x+1$, podemos utilizar sua expressão algébrica ou seu gráfico (Figura 2). Em ambos os casos, estamos operando no domínio das Funções, mas utilizando maneiras diferentes para representar a função f.

Figura 2: Gráfico da função $f(x)=e^x+1$



Fonte: Elaborado pela a autora

[8] En effet, les objets mathématiques ne son pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit 'réels' ou 'physiques'! Il faur donc pouvoir en donner des représentants.

Dessa maneira, para analisar a compreensão de conhecimentos, em especial, dos conhecimentos matemáticos, é necessário recorrer à noção de representação. São essas diferentes formas de representações de um conceito que permitem a comunicação entre os indivíduos e as atividades cognitivas do pensamento (DUVAL, 1993).

O papel das representações para a apreensão dos conceitos matemáticos é pesquisado por Raymond Duval desde a década de 1970. Duval é filósofo, psicólogo e professor emérito na Universidade du Litoral Côte d´Opale na França. Seu livro *Sémiosis et pensée humaine* de 1995 é um marco na teoria dos registros de representações semióticas e seus estudos têm direcionado diversas pesquisas em Educação Matemática no Brasil (DUVAL, 2011a).

Duval (2009) considera três tipos de representações:

1. As representações como representação subjetiva e mental: recobrem o conjunto das concepções que o sujeito possui sobre um objeto, um fenômeno físico e natural.
2. As representações internas ou computacionais: são representações internas e inconscientes do indivíduo. Ou seja, aquelas executadas de forma automática, sem pensar em todos os passos necessários para executar o processo.
3. As representações semióticas: são representações externas e conscientes do sujeito. "São produções constituídas pelo uso de sinais pertencentes a um sistema de representação que tem suas próprias restrições de significado e funcionamento" (DUVAL, 1993, p. 39, tradução nossa[9]).

Esses três tipos de representações não são espécies diferentes de representação, mas realizam funções diferentes. As representações mentais possuem uma função de objetivação, que permite o sujeito tomar consciência daquilo que, até então, ainda não o tinha feito. As representações computacionais têm uma função de tratamento automático, por exemplo, o cálculo do algoritmo da adição, o qual o aluno pode aplicar em diversas situações sem compreender o seu significado operatório (DUVAL, 2009).

Já as representações semióticas efetuam, de modo indissociável, a função de objetivação e de expressão. Elas também têm a função de tratamento, contudo, é um tratamento intencional, essencial para a aprendizagem (DUVAL, 2009).

Segundo Duval (2009, p. 15), "as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática". Um gráfico, uma expressão algébrica, um enunciado em língua natural são

[9] Les représentations sémiotiques son des productions constituées par l´emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement.

representações semióticas que denotam sistemas semióticos diferentes. Esse tipo de representação, além de ser uma forma de exteriorizar as representações mentais, também são igualmente importantes à atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 1993).

Dessa forma, a existência de diferentes registros de representação semiótica se mostra inseparável do funcionamento cognitivo. Ou seja, "sem as representações semióticas, torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende. É através das representações semióticas, que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essências do pensamento humano" (DAMM, 2012, p. 177)

Para Duval (1993), "chamamos **semiósis** a apreensão ou produção de uma representação semiótica e **noésis** a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a *noésis* é inseparável da *semiósis*" (p. 39-40, grifo do autor, tradução nossa[10]). Para o autor, não há *noésis* sem *semiósis,* ou seja, não há conceitualização de um objeto matemático sem a utilização das representações deste objeto.

Segundo Damm (2012), para que aconteça a aprendizagem de um conceito matemático, é preciso que a *noésis* (conceitualização) ocorra a partir de significativas *semiósis* (representações). Isso significa que a compreensão conceitual de um objeto matemático só ocorre quando o indivíduo consegue articular diversos registros de representação associado a esse objeto. Ou seja, "quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto" (p.177).

O termo registro de representação semiótica é utilizado, em Matemática, para designar os diferentes tipos de representações semióticas. A língua natural, as figuras geométricas, as representações gráficas, as escritas simbólicas algébricas e numéricas são exemplos de registros de representação semiótica. Duval (1993) afirma que, para um sistema semiótico ser um registro de representação, é preciso que ele permita três atividades cognitivas fundamentais ligadas a *semiósis:* a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A **formação de uma representação identificável**, seja para exprimir uma representação mental, seja para evocar um objeto real, implica a seleção de relações e de dados do conteúdo a representar, que pode ser estabelecida no enunciado de uma frase compreensível em uma linguagem natural dada, na elaboração de um esquema ou em uma expressão matemática.

Essa formação deve obedecer às regras do contexto em que ela se encontra, por exemplo, as regras gramaticais para as línguas naturais, ou as regras para o desenho de uma figura etc.

---

[10] On appelle **sémiosis** l'appréhension ou la production, d´une représetation sémiotique, et **noésis** l´appréhension conceptuelle d´un objet, il faut affirme que la *noésis* est inséparable de la *sémiosis*.

Dessa forma, os signos utilizados para a formação de uma representação identificável pertencem a um sistema semiótico já estabelecido socialmente. Essas regras são consideradas, por Duval (2009), como regras de conformidades que definem um sistema de representação. Consequentemente, os tipos de unidades constitutivas de todas as representações admissíveis em um registro versam sobre:

> - a determinação (estritamente limitada, ou ao contrário aberta) de unidades elementares (funcionalmente homogêneas ou heterogêneas ...): símbolos, vocabulários.
> - as combinações admissíveis de unidades elementares para formar unidades de nível superior: regras de formação para um sistema formal, gramática para as línguas naturais.
> - as condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção pertinente e completa: regras canônicas próprias a um gênero literário ou a um tipo de produção num registro (DUVAL, 2009, p. 55).

Por exemplo, para representar uma função polinomial de primeiro grau são necessárias as unidades simbólicas, $f(x)$, a, b, x, = e +, para formar a unidade de nível superior $f(x) = ax + b$ no registro de representação simbólico-algébrico. Essas regras têm por objetivo assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação e as possibilidades do seu uso para tratamentos e conversões.

O **tratamento** de uma representação é uma transformação dessa representação dentro de um mesmo registro, ou seja, uma transformação interna a um registro. Por exemplo, para calcular a derivada da função $f(x) = (x^2 + x)e^{2x}$, realizamos o seguinte procedimento:

$$f'(x) = (x^2 + x)(e^{2x})' + e^{2x}(x^2 + x)'$$

$$f'(x) = (x^2 + x)2e^{2x} + e^{2x}(2x + 1)$$

$$f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 2x + 2x + 1)$$

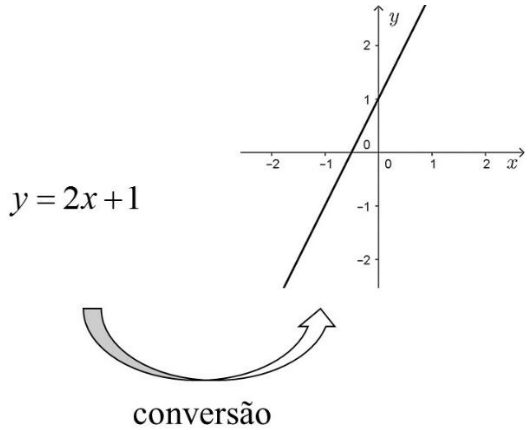
$$f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$$

O procedimento realizado ocorre sobre um mesmo registro de representação, ou seja, para determinar a derivada da função f foi preciso utilizar as técnicas de derivação sem a necessidade de mudar o registro de representação.

Cada registro possui regras próprias de tratamentos variando sua natureza e número de um registro a outro, consequentemente, as dificuldades de realizar tratamentos dependem do registro utilizado. A compreensão de um conceito matemático pode ser parcial quando utilizamos um único registro de representação, pois este registro pode não contemplar todas as características do conceito. Dessa forma, é necessária a utilização de diferentes registros de representação, ou seja, a capacidade de mudar de um registro para outro (DUVAL 2003).

A **conversão** de uma representação é uma transformação que consiste em modificar a representação de um objeto, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial, ou seja, é uma transformação externa ao registro de partida (registro inicial da representação a converter). A Figura 3 ilustra uma conversão do registro simbólico-algébrico para o registro gráfico.

Figura 3: Exemplo de conversão entre registros de representação



Fonte: Elaborado pela a autora

Para analisar a atividade cognitiva requerida na conversão entre registros, Duval (2003) classifica os registros de representação, segundo a sua natureza, em multifuncionais e monofuncionais, discursivos e não discursivos. Os registros multifuncionais são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis e os monofuncionais são aqueles nos quais as transformações de expressões são algoritmizáveis. Os registros discursivos utilizam-se de uma linguagem natural e formal ou de escritas simbólicas (linguagem matemática). Os registros não discursivos baseiam-se em figuras geométricas, gráficos cartesianos ou de esquemas advindos de um mesmo tipo de representação visual.

Quadro 1: Classificação dos diferentes tipos de registro de representação semiótica

	Discursivos Utilizam-se da linguagem natural ou matemática.	**Não discursivos** Utilizam-se de figuras, gráficos, esquemas.
Registros multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	* Língua natural *Associações verbais (concepções)* *Formas de raciocínio:* *- argumentos a partir de observações, de crenças.* *- deduções válidas a partir de teoremas (substituição)*	*Figuras geométricas planas ou em perspectiva (de configurações de formas em 0, 1, 2, 3 D) *Apreensão operatória e não somente perceptiva* *Construções utilizando instrumentos, uma mudança de instrumento pode causar mudanças de restrições*

Registros monofuncionais Os tratamentos são principalmente algorítmicos.	*Sistema de escrita - numérico (binário, decimal) - literal, algébrico, simbólico (linguagem formal) *Cálculo*	*Gráficos cartesianos *Mudanças de sistemas de coordenadas* *Interpolação, extrapolação*

Os (*) ilustram um exemplo de registro e as escritas em itálico um tratamento específico neste registro.
Fonte: Duval (2001, p. 92)

O grau de dificuldade para a aprendizagem matemática difere em relação à natureza dos registros utilizados. Em relação aos tratamentos, as maiores dificuldades referem-se aos registros multifuncionais. Já as conversões podem ser menos complexas se envolvem registros de mesma natureza (ambos multifuncionais ou ambos monofuncionais), ou mais complexas quando envolvem passagens entre registros monofuncionais e registros multifuncionais (DUVAL, 2003).

Na teoria dos registros de representação semiótica, as funções formação, tratamento e conversão são essenciais para o funcionamento cognitivo. Segundo Flores e Morreti (s/d), Duval considera também a função de identificação, que é o trabalho cognitivo que possibilita a recuperação da memória (humana ou de um sistema informático), ou seja, esta função concerne à organização das informações da memória. Ela é solicitada, por exemplo, para ler e analisar um quadro de dados, pois, dentre todas as informações contidas no quadro, é preciso identificar e selecionar aquelas que são necessárias para a análise do problema.

Os processos de tratamentos e conversões não podem ser confundidos, pois o primeiro ocorre no interior de um registro, à medida que o segundo se dá entre os registros, exigindo que o sujeito diferencie o significado (conceito matemático) do significante (representação) (DAMM, 2012).

Quadro 2: Tipos diferentes de transformação de representações semióticas

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: Tratamento	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: Conversão
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o

De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se, algumas vezes, procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	mesmo objeto por meio de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: Duval (2003, p. 15)

Duval (2003) afirma que a conversão e o tratamento são transformações de representações semióticas totalmente diferentes (Quadro 2). Contudo, muitas vezes, na descrição da resolução de um problema ou na análise da produção dos alunos, não se tem o cuidado de diferenciá-los.

Duval (2012) alerta que não podemos confundir a atividade de conversão com outras duas atividades que estão próximas a ela, a codificação e a interpretação. A “interpretação requer uma mudança de quadro teórico ou uma mudança de contexto. Esta mudança não implica mudança de registro. A codificação é a transcrição de uma representação em um outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente” (p. 273).

Desta forma, o aluno pode interpretar a expressão algébrica $C = 2x + 5$ como sendo a expressão para determinar o custo de produção de certo produto, ou seja, o aluno mudou de um contexto matemático para outro contexto, sem mudar o registro de representação.

Já a ação de codificar ocorre quando o aluno consegue retirar informações contidas no enunciado de um problema e organizá-las em um outro registro diferente do registro de partida (VERTUAN, 2007).

Segundo Karrer (2006), se, ao compararmos a representação do registro de partida com a representação final no registro de chegada, percebermos que a transformação está perto de uma situação de codificação, feita de maneira espontânea, dizemos que a conversão é congruente, caso contrário, não congruente.

Para explicar essa noção de congruência, Duval (2009) expõe três condições para que uma conversão seja congruente:

i) Correspondência semântica dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. Considera-se como unidade significante elementar toda a unidade que se destaca do “léxico” de um registro (p.68).
ii) Univocidade semântica terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde uma só unidade elementar no registro de representação de chegada.

iii) Mesma ordem possível de apreensão das unidades significantes nas duas representações.

Esses critérios possibilitam determinar a congruência entre duas representações semioticamente diferentes que representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo. Quando uma ou mais dessas condições não são satisfeitas, temos uma conversão não congruente. Karrer (2006) ressalta que existem conversões que são congruentes em um sentido, mas não são congruentes no sentido oposto. O Quadro 3 ilustra exemplos de congruência e de não congruência em uma atividade de conversão.

Quadro 3: Exemplo de congruência e de não congruência de uma conversão

Registro de partida (Registro da língua natural)	**Registro de chegada** (Registro simbólico-algébrico)	**Correspondência semântica das unidades de significado**	**Unicidade semântica terminal**	**Conservação da ordem das unidades**	**Conclusão**
a) Conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa	$y > x$	Sim	Sim	Sim	Congruente
b) O conjunto dos pontos que tem a abscissa positiva	$x > 0$	Não "Maior que zero" é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim	Não congruente
c) O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal	$x \cdot y > 0$ "O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero"	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)	Não congruente

Fonte: Adaptado de Duval (2003, p. 19)

A conversão a) do Quadro 3 é um exemplo de conversão congruente, pois o registro de chegada é praticamente uma codificação do registro de partida. A conversão b) não possui correspondência semântica das unidades de significado, pois não há uma unidade significante correspondente à palavra positivo, sendo necessária a utilização da perífrase "maior que zero" (> 0). A conversão c) não satisfaz nenhum dos três critérios de congruência, pois "maior que zero" expressa tanto ter o "mesmo sinal" quanto ser "positivo", ou seja, não há correspondência semântica. Não possui unicidade terminal, pois a unidade significativa elementar "conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada" no registro de saída apresenta mais de uma unidade significativa no registro de chegada ($x \cdot y$). E não tem a mesma ordem de apreensão dessas unidades nas duas representações, pois, ao realizar a conversão inversa (registro simbólico-algébrico para o registro da língua natural) não é possível obter a expressão inicial.

Os alunos tendem a apresentar mais facilidade em realizar uma conversão quando ela é congruente. Já quando a conversão é não congruente, apresentam dificuldades em realizá-la, o que leva a baixas taxas de êxito na realização dessa atividade. Assim, só podemos inferir que um aluno compreende um objeto matemático, se ele for capaz de resolver diferentes situações que envolvam o conceito, empregando, no mínimo, dois registros de representações simultaneamente (CARDOSO, 2014).

Segundo Duval (2011b), quando a conversão envolve o registro gráfico, os alunos apresentam dificuldades de interpretação e leitura do gráfico, pois muitos deles não conseguem estabelecer relações entre o registro gráfico (representação cartesiana) e o registro simbólico-algébrico (equação), mesmo para os casos mais simples, como, por exemplo, quando a representação gráfica é uma reta. Para o autor, essas dificuldades não estão relacionadas ao conceito de função afim, mas, sim, com a falta de conhecimento das unidades semânticas entre os dois registros (gráfico e simbólico-algébrico). Muitas vezes, a mudança da equação para o gráfico ocorre por uma construção ponto a ponto, que não explora de forma significativa a relação entre os dois registros, além do fato de esquecer que a conversão no sentido oposto (gráfico para simbólico-algébrico) apresenta mais problema.

Para Duval (2011b), três tipos de abordagens são possíveis para o registro gráfico: a abordagem ponto a ponto, de extensão do traçado efetuado e de interpretação global de propriedades figurais. A primeira, utilizada para introduzir a abordagem gráfica, consiste em marcar alguns pontos (pares ordenados), obtidos a partir da expressão algébrica dada, no plano cartesiano. Essa associação restringe-se a alguns pontos particulares, favorecendo o traçado de um gráfico de uma função polinomial de 1° ou 2° grau e/ou a identificação das coordenadas de algum ponto de interesse, como a interseção com os eixos.

A abordagem de extensão do traçado utiliza-se das atividades de extrapolação e de interpolação, por não necessitar de traços complementares e explicativos é uma abordagem praticamente mental. Diferente da abordagem anterior que se prende em um conjunto finito de pontos, ela abarca um conjunto infinito de pontos, seja entre os pontos marcados ou além deles. Contudo, em ambas as abordagens, o tratamento foca-se na procura de valores particulares sem levar em conta a forma da expressão algébrica (DUVAL, 2011b).

A terceira abordagem leva em consideração o conjunto de traçado/eixos e a expressão algébrica de um objeto. Toda a variação no gráfico/imagem corresponde a uma variação na expressão algébrica. Nesta abordagem, o importante é perceber as modificações conjuntas na imagem e na representação algébrica, o que conduz “a uma análise de congruência entre dois registros de representação de um objeto ou de uma informação” (DUVAL, 2011b, p. 99). Quando queremos determinar a expressão algébrica de uma função a partir do seu gráfico, a abordagem de representação global é requerida, pois, neste caso, as duas primeiras abordagens se tornam ineficazes.

Segundo o autor, para uma análise de congruência é preciso a distinção das unidades significativas de cada registro de representação e também das transformações implícitas necessárias para mudar de registro. No registro algébrico, estas unidades são, de certa forma, claras, como os símbolos relacionais (<, >, =, ...), de operações ou de sinais (+, -), de variáveis, de expoente, coeficiente e constante. Normalmente, cada símbolo corresponde a uma unidade significativa.

Porém, a análise das unidades significativas no registro gráfico não é tão clara. Assim, Duval (2011b) diferencia as variáveis gerais das variáveis relativas para o caso do gráfico de uma reta ou parábola, mas que também podem ser utilizadas para outros casos. As variáveis gerais são concernentes à implantação da tarefa, ou seja, o que se deve ressaltar como figura sobre o fundo: uma linha ou zona. Ou em relação à forma da tarefa, procurando verificar, ou não, se uma linha é uma reta ou uma curva (aberta ou fechada). As variáveis relativas estão relacionadas com uma simples modificação de configuração da linha traçada/eixos orientados, conforme ilustrado no Quadro 4.

Quadro 4: Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita; OBSERVAÇÃO: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página em caracteres latinos
- os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido.** - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical. OBSERVAÇÃO: no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Fonte: Duval (2011b, p. 101)

As variáveis visuais do Quadro 4 são relativas a um gráfico de uma reta com expressão algébrica dada por $y = ax + b$, cujas unidades significativas são as constantes *a* e *b*. O Quadro 5 mostra a correspondência algébrica com os valores obtidos no Quadro 4.

Quadro 5: Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

<table>
<tr><th>Variáveis visuais</th><th>Valores</th><th colspan="2">Unidades simbólicas correspondentes</th></tr>
<tr><td>Sentido da inclinação</td><td>Ascendente
Descendente</td><td>Coeficiente > 0
Coeficiente < 0</td><td>Ausência de sinal
Presença do sinal -</td></tr>
<tr><td>Ângulos com os eixos</td><td>Partição simétrica
Ângulo menor
Ângulo maior</td><td>Coefic. variável = 1
Coefic. variável < 1
Coefic. variável > 1</td><td>Não há coefic. escrito
Há coefic. escrito
Há coefic. escrito</td></tr>
<tr><td>Posição sobre os eixos</td><td>Corta acima
Corta abaixo
Corta na origem</td><td>Acresc. Constante
Subtrai-se constante
Sem correção aditiva</td><td>Sinal +
Sinal –
Ausência de sinal</td></tr>
</table>

Fonte: Duval (2011b, p. 101)

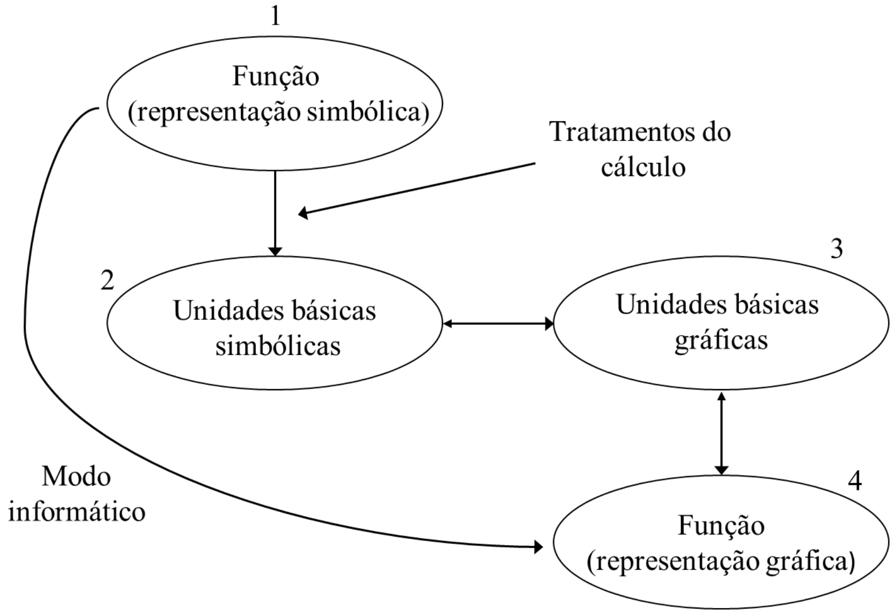
Analisando o Quadro 5 podemos ver que o conceito de inclinação está relacionado com o coeficiente da variável independente. Já este coeficiente está associado com as variáveis visuais: sentido da inclinação do traçado (ascendente ou descendente) e os ângulos formados pelo traçado com os eixos coordenados. Desta forma, para Duval (2011b), não existe congruência entre a direção da reta no plano e o coeficiente angular na expressão algébrica.

Segundo Moretti e Luiz (2014), é preciso levar em consideração uma outra abordagem possível das representações gráficas, a qual os autores chamam de “informático de interpretação global”. Nesta abordagem, a forma gráfica de uma função (ou equação) é obtida com o auxílio de um software computacional.

A conversão para o registro gráfico, neste caso, é geralmente realizada por um procedimento ponto a ponto, a diferença está na quantidade de pontos obtidos pelo software que é muito maior que os obtidos manualmente. O software obtém os pontos, localiza-os no plano e os une para traçar a curva, o que o usuário vê desse processo é o resultado final, ou seja, o desenho da curva no plano. As vantagens neste tipo de conversão advêm da rapidez para traçar o gráfico da curva ou para fazer mudanças nas escalas e nos parâmetros (MORETTI, LUIZ, 2014).

A próxima figura ilustra a conversão realizada no procedimento informático de interpretação global.

Figura 4: Esquema do procedimento informático de interpretação global



Fonte: Moretti; Luiz (2014, p. 69)

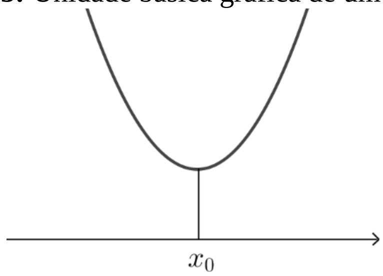
Segundo Moretti e Luiz (2014), Duval considera necessárias as conversões diretas, nos sentidos $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 1$ (Figura 4), entre os registros simbólico-algébrico e gráfico de funções sejam realizadas de forma direta, sem o auxílio de um software, para que o procedimento de interpretação global seja atingido. Contudo, os autores consideram que, no ensino universitário, a conversão realizada no sentido $1 \rightarrow 4$ (modo informático) é bastante adequada, dada a complexidade da expressão simbólica de algumas funções. A volta se faz considerando as unidades básicas gráficas e as respectivas unidades básicas simbólicas ($4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1$).

Neste caso, para que a interpretação global seja atingida no procedimento informático, os autores propõem que as conversões diretas $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 1$ indicadas por Duval, sejam realizadas da seguinte forma $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1$:

> $1 \rightarrow 4$: conversão direta da representação simbólica (1) para a gráfica (4) da função por meio informático;
> $4 \rightarrow 3$: tratamentos na curva (visuais inicialmente) em sua representação gráfica (4) para reconhecer e destacar as unidades básicas gráficas (3);
> $2 \leftarrow 1$: tratamentos de cálculo na função em sua forma simbólica (1) para determinar as unidades básicas simbólicas (2) relacionadas às unidades básicas gráficas (3);
> $3 \leftrightarrow 2$: conversão que confirma as correspondências entre as unidades básicas gráficas (3) e as unidades básicas simbólicas (2) (MORETTI; LUIZ, 2014 p. 79).

Por exemplo, na Figura 5, podemos observar a representação gráfica de uma função, na qual é possível suspeitar que tal função possui um valor mínimo na vizinhança de x_0, esta análise equivale ao percurso $4 \rightarrow 3$(reconhecer as unidades básicas gráficas). A suspeita pode ser confirmada por meio de tratamentos do Cálculo na representação simbólica da função, ou seja, verificar, por exemplo, que $y'(x_0) = 0$ e $y''(x_0) > 0$, completando o percurso $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1$ para esta unidade básica gráfica (MORETTI; LUIZ, 2014).

Figura 5: Unidade básica gráfica de um mínimo



Fonte: Moretti; Luiz (2014, p. 71)

Assim, para uma interpretação global do gráfico de uma função é preciso analisar a relação entre as unidades gráficas básicas e as unidades básicas simbólicas. Ou seja, mesmo que a conversão seja realizada com o auxílio de um software, para compreender a situação (problema) proposta é preciso a identificação dessas unidades em ambos os registros.

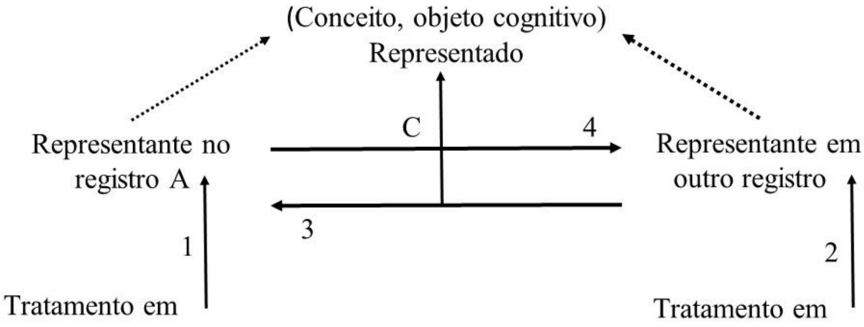
Segundo Duval (2009), a transformação de conversão não é algo natural para a maioria dos alunos, pois ela requer a coordenação de diferentes sistemas semióticos. O autor associa três fenômenos relativos à *semiósis* e à operação de conversão que favorecem o desenvolvimento do conhecimento:

1) Diversificação dos registros de representação semiótica: os registros de representação são diferentes entre si e evidenciam questões de aprendizagem específicas. Desta forma, a língua natural e as linguagens simbólicas, por exemplo, não podem ser vistas como formadoras de um só e mesmo registro.
2) Diferenciação entre o representante e o representado ou entre forma e conteúdo de representação: compreender que uma representação não é o objeto, apenas o representa, podendo, assim, associar outras representações a um mesmo objeto.
3) Coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica: capacidade de reconhecer, nos diferentes registros de representação, o mesmo objeto matemático.

Segundo Duval (2003), o que diferencia a atividade matemática é a possibilidade de mobilizar dois registros de representação ao mesmo tempo ou a possibilidade de mudar de registro de representação a todo o momento. Para o autor, “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas” (p. 15).

A Figura 6 ilustra uma estrutura por meio da qual podemos compreender o funcionamento da representação semiótica. Nesta estrutura, as flechas pontilhadas correspondem a distinção entre o representante e o representado. A flecha C supõe a coordenação de dois registros (compreensão integral). As flechas 1 e 2 indicam as transformações internas a um registro e as flechas 3 e 4 as conversões.

Figura 6: Estrutura da representação em função de conceitualização



Fonte: Duval (2012, p. 282)

Duval (2009) explica que essa estrutura leva em conta um caso simples de coordenação de dois registros. Em alguns domínios matemáticos, como o da Álgebra, por exemplo, a coordenação entre três registros pode ser solicitada. Desta forma,

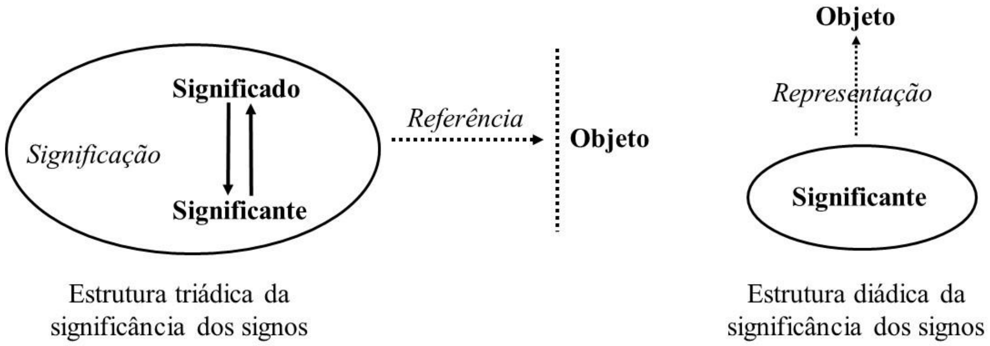
> A coordenação de vários registros de representação semiótica parece fundamental para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado (DUVAL, 1993, p. 40, tradução nossa[11]).

Segundo Burak e Brandt (2010), no estudo das representações semióticas, precisamos considerar, ainda, as estruturas diádicas e triádicas que aparecem nas relações estabelecidas entre o objeto e suas representações. Elas possuem base na dimensão linguística que considera as representações em relação às funções de expressão, tratamento e objetivação. Os autores ressaltam que, "entre os diversos significantes de um determinado significado, existe uma significação por parte do sujeito em relação a um conceito, tendo por referência um objeto matemático, e neste caso, a relação é triádica (p. 74)". Os signos da representação diádica, "tais como algumas noções matemáticas (notações de funções, vetores, operadores, ...), não têm significação e são constituídos por uma relação instituída no objeto (DUVAL, 2012, p. 281)".

A Figura 7 ilustra a estrutura diádica e triádica, em negrito estão os diferentes elementos constitutivos da significação dos signos e, em itálico, as relações entre eles.

[11] La coordinattion de plusieurs registres de repésentation sémiotique apparaît fondamentale pour une apprèhension conceptuelle des objets : il faul que l'objet ne soit pas confondu aves ses représentations et qu´il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. C´est à ces deux conditions qu´une représentation fonctionne véritablement comme représentation c´est-à-dire qu´elle donne accès à l'objet représenté.

Figura 7: Estrutura triádica e diádica da significância dos signos



Fonte: Duval (2012, p. 281)

Nas estruturas apresentadas na Figura 7, as relações entre os elementos significante, significado e objeto podem ser de representação ou de referência. Na relação diádica, elas são de representação e na relação triádica, elas são referência, instituídas entre significante, significado e objeto (BURAK; BRANDT, 2010).

No processo de conceitualização é preciso levar em conta a relação entre o significante (expressão algébrica, gráfico, palavra, entre outros) e o significado (conceito evocado pela representação mental), atribuído pelo sujeito. Esse processo de atribuir significado ao significante, realizado pelo sujeito, recebe o nome de significação. Um significante pode possuir significados diferentes de indivíduo para outro, pois o significado está sujeito a significação atribuída pelo indivíduo (CARGNIN, 2013).

Burak e Brandt (2010) exemplificam a significação utilizando a palavra "razão". Esta palavra quanto dita a um matemático, provavelmente suscitará o conceito de quociente, porém, se dita a outro sujeito (não matemático) é possível que ele a associe a "estar certo" ou a "racionalidade". Ou seja, conforme a significância atribuída por parte do sujeito, o significante (razão) vai estar relacionado com um significado (quociente ou estar certo), tendo por referência um determinado objeto.

Segundo Cargnin (2013), essa situação também pode ser verificada no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, com as notações diferentes para a função derivada ($f'(x)$ notação atribuída por Newton e $\frac{df}{dx}(x)$ notação utilizada por Leibniz). Esses registros diferentes vinculam-se a diferentes significados atribuídos pelos alunos. Isso pode comprometer a compreensão de que a expressão $df(x_0) = f'(x_0)dx$ não é resultado do produto e cancelamento por "dx" na igualdade $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$ e sim uma relação entre elementos de base duais num espaço de funções (transformações lineares).

Dessa forma, a utilização de diferentes registros de representação semiótica contribuiu no processo de conceitualização. Na seção 2.3, apresentamos os possíveis registros de representação semiótica e os domínios matemáticos que podem ser utilizados no ensino e na aprendizagem das EDOs.

1.1.3 Mudanças de domínio e de registros de representação semiótica

Perrin-Glorian (2001) considera que as mudanças de domínio são meios que utilizamos para resolver problemas, pois elas favorecem interpretações diferentes para a situação e auxiliam na produção de novos conhecimentos. O que possibilita essa mudança de domínio é o fato de que um objeto matemático pode aparecer em diversos domínios e que, na maioria das vezes, nem todas as propriedades desse objeto estão disponíveis em um único domínio.

Segundo a autora, os tratamentos realizados sobre os objetos ocorrem no interior de um domínio. São as propriedades, as definições e os teoremas em um domínio que validam e permitem a produção de regras de tratamento dos registros de representação (PERRIN-GLORIAN, 2001).

Neste contexto, ambas as teorias se completam, de modo que não podemos operar em um domínio sem utilizar registros de representações semióticas, da mesma forma que não podemos realizar conversões e tratamentos sem pensarmos (mesmo que inconscientemente) nos domínios matemáticos.

O Quadro 6 expõe algumas questões norteadoras em relação a mudanças de domínios e de registros de representação.

Quadro 6: A problemática da mudança de domínio e de registro

Questões diretrizes	Domínio	Registro
Como podemos distinguir um domínio de um registro?	Um conjunto de conceitos que podem ser organizados em uma progressão teórica. Um ramo da Matemática.	Um sistema semiótico produtor de um tipo de representação, cuja produção pode responder às funções cognitivas diferentes.
Como descrever a operação de mudança (de domínio ou de registro)?	Uma reinterpretação sobre a formulação do problema a resolver.	Uma conversão sobre as unidades de representação, mas conservando a referência da representação de partida.
Qual é o papel de uma mudança de domínio ou de registro?	A criação de novos objetos matemáticos ou a utilização de ferramentas e técnicas que antes não eram possíveis.	Tornar explícitas outras propriedades dos objetos. Permitir tratamentos que eram impossíveis ou muito trabalhosos no registro de partida.

Qual a clareza da correspondência entre os dados iniciais e posteriores?	Correspondências imperfeitas.	Congruência e não congruência entre as respectivas unidades de representação de partida e de chegada.
Quais são as condições para compreender o processo de mudança?	A utilidade do uso de um domínio auxiliar de representação.	Discriminação entre as variações de representação num registro que indica uma variação de representação em outro registro e aqueles que não variam.

Fonte: Adaptado de Duval (2001, p. 86)

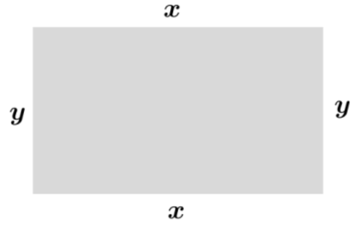
A mudança de domínio ou de registro, normalmente, é direcionada pelos conhecimentos que os alunos possuem sobre um determinado conceito. Assim, a falta dos conhecimentos inerentes ao conceito deve provocar um desequilíbrio, para o qual, às vezes, a intervenção do professor e/ou de um colega ou o uso de um material de apoio é necessário a fim de conduzir a uma mudança de domínio ou uma conversão.

Consideremos a seguinte situação: Bárbara tem 60 metros de tela e deseja cercar um terreno em seu sítio para fazer uma horta. Para evitar perdas de terreno, ela optou por um terreno retangular. Neste caso, quais serão as medidas dos lados do retângulo para que a área cercada seja a máxima possível?

A situação é proposta no domínio geométrico, pois, apesar de existir um contexto, este não influencia diretamente na situação proposta, porque os dados necessários para resolver o problema pertencem ao domínio da Geometria. Também, utiliza-se do registro da língua natural de uso especializado[12], pois apesar de utilizar a língua portuguesa, ela utiliza de termos próprios da Matemática.

Uma estratégia que pode ser mobilizada para resolver este problema é fazer uma mudança do registro da língua natural de uso especializado para o registro figural (Figura 8) dentro do domínio geométrico.

Figura 8: Representação da área a ser cercada



Fonte: Elaborado pela autora

[12] Terminologia adaptada de Karrer (2006, p. 64).

Denominando por x e y os lados de retângulo e por A sua área, usando os conhecimentos sobre área e perímetro, podemos estabelecer as seguintes relações entre as variáveis envolvidas: $\begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ A = xy \end{cases}$ no registro simbólico-algébrico, realizando uma conversão do registro figural para o registro simbólico-algébrico e uma mudança do domínio geométrico para o algébrico (fórmulas para o cálculo da área e perímetro de um retângulo).

Dessa forma, o problema passa a ser: determinar x e y que satisfaça a primeira equação $2x + 2y = 60$ e, ao mesmo tempo, forneça a área máxima para a segunda equação $A = xy$. Dentro do domínio algébrico podemos efetuar um tratamento no registro simbólico-algébrico, isolando y na primeira equação:

$$2y + 2y = 60$$
$$2y = 60 - 2x$$
$$y = 30 - x$$

E substituir na segunda equação:

$$A = x(30 - x)$$
$$A = 30x - x^2$$

A partir do momento que reconhecemos a equação $A = 30x - x^2$ como a equação de uma parábola na forma explícita ($A = ax^2 + bx + c$), transferimos o problema do domínio algébrico para o domínio da Geometria Analítica. Como o coeficiente a é negativo ($a = -1$), a parábola possui concavidade voltada para baixo, logo, o valor máximo que ela atinge corresponde às coordenadas do seu vértice. Realizando um tratamento no registro simbólico-algébrico, podemos determinar o valor da abscissa (x_v) do vértice, obtendo:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$x_v = -\frac{30}{2(-1)}$$
$$x_v = 15$$

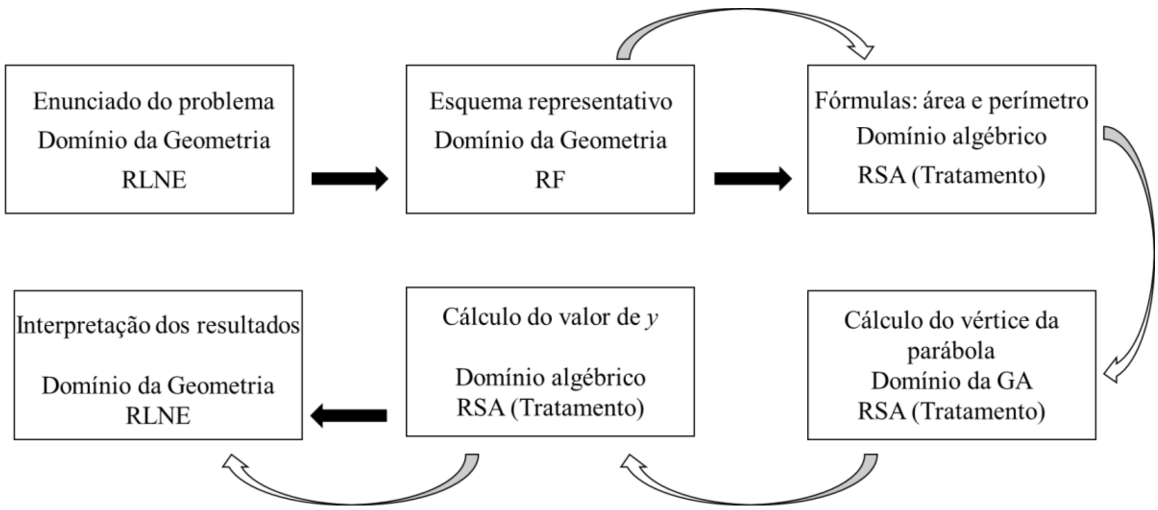
Uma vez determinado o valor de x que fornece a área máxima, precisamos retornar a equação $y = 30 - x$ para determinar o valor de y. Dessa forma, voltamos ao domínio algébrico e calculamos o valor de y realizando um tratamento no registro simbólico-algébrico:

$$y = 30 - x$$
$$y = 30 - 15$$
$$y = 15$$

Para responder ao problema inicial: quais serão as medidas dos lados do retângulo para que a área cercada seja a máxima possível? Precisamos interpretar os valores $x = 15$ e $y = 15$ como os lados do retângulo procurado, retornando ao domínio original do problema (domínio da Geometria) e realizar uma conversão do registro simbólico-algébrico para o registro da língua natural de uso especializado, fornecendo, por exemplo, a seguinte resposta: as dimensões do retângulo devem ser $x = 15$ e $y = 15$, ou seja, um quadrado com lado medindo 15 metros.

A Figura 9 ilustra as mudanças de domínio e as conversões realizadas no problema analisado. Nela, as setas retas (➡) indicam que foi realizada uma conversão, as setas curvas (↷) indicam uma mudança de domínio, e as seguintes abreviações foram utilizadas: domínio da Geometria Analítica (GA), registro da língua natural de uso especializado (RLNE), registro figural (RF), registro simbólico-algébrico (RSA).

Figura 9: Possíveis mudanças de domínio e conversões realizadas na resolução de um problema

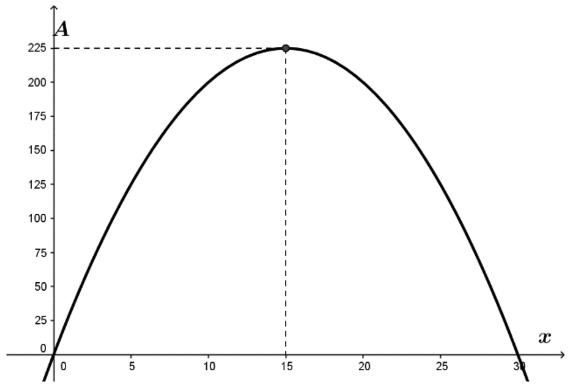


Fonte: Elaborado pela autora

Observando a Figura 9, percebemos que, na resolução de um problema, podemos ter mudança de domínio e conversão, mudança de domínio sem mudar o registro e conversão dentro do mesmo domínio.

Contudo, ressaltamos que, dependendo do conhecimento que o aluno possui, ele pode utilizar domínios e registros diferentes dos que aparecem na Figura 9. Por exemplo, se o aluno tem familiaridade com o registro gráfico, ele pode utilizá-lo para determinar o valor da abscissa do vértice da parábola (Figura 10) fazendo uma conversão do registro simbólico-algébrico para o registro gráfico, ao invés de um tratamento no registro simbólico-algébrico, como mostrado anteriormente. Em ambos os casos, ele opera no domínio da Geometria Analítica.

Figura 10: Representação gráfica da parábola $A = -x^2 + 30x$



Fonte: a autora

Outra opção é o aluno considerar a área (A) como uma função de uma variável, $A(x) = -x^2 + 30x$, ou seja, uma função polinomial de grau 2. Nesta situação, ele transporta o problema para o domínio das funções, sem mudar o registro utilizado, podendo realizar uma análise similar ao da parábola ou ainda utilizar a derivada da função para determinar o valor da abcissa (x) que possui a maior imagem (A). Ao calcular a derivada da função, o aluno realiza uma nova mudança de domínio (domínio da Análise) e continua utilizando o registro simbólico-algébrico. Para analisar a função derivada, o aluno pode dispor de outros registros de representação, como, por exemplo, o registro gráfico.

Diante do exposto, buscamos desenvolver, nesta pesquisa, atividades, no contexto das EDOs, que favoreçam tanto as mudanças de domínio como de registros de representação semiótica, para isso, realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo, com base nos pressupostos da engenharia didática.

1.2 Referencial metodológico

1.2.1 A pesquisa qualitativa

Neste estudo desenvolvemos uma pesquisa de abordagem qualitativa, buscando compreender e interpretar, o processo de aprendizagem das EDOs durante o desenvolvimento de atividades de Matemática e de problemas no contexto da Modelagem Matemática, que propiciam a utilização de diferentes domínios e de registros de representações semióticas. Dessa forma, não nos preocupamos em quantificar os resultados obtidos, mas em analisar o processo percorrido tanto pela pesquisadora como pelos estudantes colaboradores da pesquisa.

Considerando que o termo “Pesquisa Qualitativa” assume relativa polissemia no campo das Ciências Sociais, trabalhando com diferentes sistemas complexos de significado a partir de múltiplas técnicas de interpretação (MAANEN, 1979), adotamos neste estudo a pesquisa qualitativa conforme definição de Bogdan e Biklen (1994). Segundo os autores, a investigação qualitativa possui cinco características, contudo, ressaltam que nem todas as pesquisas desta natureza precisam apresentar, necessariamente, todas elas. Nesta pesquisa, assumiremos três das cinco características enunciadas por Bogdan e Biklen (1994). Dessa forma, consideraremos que:

1. *A investigação qualitativa é descritiva;*

Os dados recolhidos não são apenas numéricos, incluem transcrições de entrevistas, vídeos, notas de campos, fotografias, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. O pesquisador procura analisar esses dados em toda a sua riqueza, tentando respeitar a forma em que eles foram registrados e transcritos. Para ele, nada deve ser trivial, tudo tem potencial para construir uma pista que permite estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do seu objeto de estudo.

Neste estudo, o conjunto de dados foi obtido durante a realização de um curso de extensão ministrado pela pesquisadora. Este conjunto foi constituído pelos registros escritos dos alunos em todas as atividades desenvolvidas e do questionário inicial, pelas observações e pelas anotações feitas pela pesquisadora, das transcrições realizadas nas gravações em áudio e vídeo e das análises *a priori* e *a posteriori*[13].

2. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;*

Na pesquisa qualitativa há um interesse muito maior com o processo do que com o resultado. O pesquisador se preocupa em estudar um problema em todas as fases utilizadas para sua resolução, e não somente com o resultado final.

Neste estudo, preocupamo-nos em compreender o processo de aprendizagem das EDOs percorrido pelos alunos dos cursos de Engenharias, no decorrer do curso de extensão[14]. Dessa forma, as estratégias escolhidas, o desenvolvimento realizado, a participação e o comprometimento dos alunos são considerados objetos de análise, pois possuem influência direta na compreensão das EDOs por parte do aluno. Além disso, é durante o processo de resolução da atividade que podemos identificar os tratamentos, as conversões e os domínios matemáticos utilizados, sendo o resultado final uma consequência das escolhas realizadas durante este processo.

---

[13] As análises *a priori* e *a posteriori* serão abordadas na seção 1.2.3.
[14] O curso de extensão ministrado pela pesquisadora será apresentado na seção 1.2.3.

3. *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.*

Uma das principais preocupações neste tipo de pesquisa é com o significado que os sujeitos atribuem às coisas e ao mundo que os cercam. Ou seja, o pesquisador precisa compreender como as pessoas entendem a situação que está sendo proposta.

Portanto, nossas preocupações se detiveram sobre as percepções dos significados que os sujeitos atribuem às EDOs. Desta forma, elaboramos, aplicamos e analisamos uma sequência de situações, sendo algumas dentro do contexto da Modelagem Matemática, voltadas para a aprendizagem do conceito das EDOs, focando principalmente na compreensão do significado das EDOs dentro de cada situação.

Consideramos, aqui, uma sequência de situações, como sendo uma série de questões (no nosso caso, atividades matemáticas e problemas no contexto da Modelagem Matemática) que devem ser propostas e apresentadas em certa ordem visando a estruturação e ampliação do conhecimento dos estudantes em cada atividade. Para organizar e aplicar essa sequência de situações, utilizamos a metodologia da engenharia didática de Artigue (1996), que será descrita na seção 1.2.3.

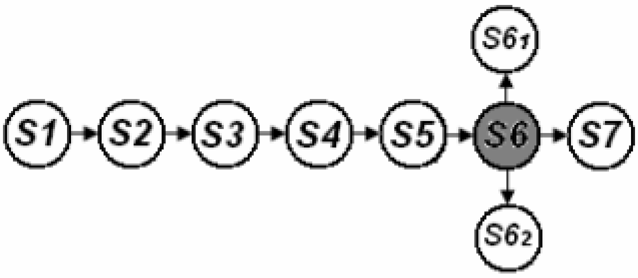
A sequência de situações constava de um questionário inicial, de nove atividades que trabalhavam o conceito de EDO em diversos domínios matemáticos (Álgebra/Análise, Funções, Geometria Analítica, entre outros) e de registros de representação semiótica (gráfico, simbólico-algébrico, língua natural de uso especializado etc.). Ademais, de três problemas no contexto da Modelagem Matemática, em que os estudantes deveriam analisar situações reais cujas análises demandariam uma compreensão das EDOs.

De maneira geral, a Modelagem Matemática[15] possui um caráter investigativo que a torna uma atividade aberta e, nesse sentido, normalmente não é possível fazer uma análise *a priori* sobre esta atividade. Contudo, Borges e Nehring (2008) afirmam que a Modelagem Matemática pode ser utilizada em uma Engenharia Didática de duas maneiras[16] distintas. Na primeira, a Modelagem Matemática é utilizada para gerar uma sequência de situações didáticas a partir de um problema real, na qual o ensino do conceito pretendido pode ser realizado utilizando um ou mais problemas no contexto da Modelagem Matemática, em conjunto com situações didáticas pensadas especificamente para ensinar conteúdos que o aluno não conhece e precisa conhecer para analisar o problema proposto.

[15] A concepção de Modelagem Matemática adotada será apresentada na seção 1.2.2.
[16] Os autores apresentam essas duas formas de uso da Modelagem Matemática em uma Engenharia Didática para o conceito de função linear e afirmam que ela pode ser utilizada para o ensino de outros conceitos matemáticos.

Na segunda forma, que é a aplicada neste estudo, a Modelagem Matemática é utilizada como parte de uma sequência de situações, com a função de contextualizar os conceitos introduzidos com as outras atividades da sequência proposta (BORGES; NEHRING, 2008).

Figura 11: Modelagem Matemática como parte de uma sequência didática



Fonte: Borges; Nehring (2008, p. 141)

A Figura 11 ilustra a sequência proposta por Borges e Nehring (2008). Nela, S6 é um problema de Modelagem Matemática, com características diretivas, definidas segundo a forma como o problema foi introduzido na sequência de situações. Este problema pode gerar outras sequências de situações ($S6_1$ e $S6_2$), o que faz com que a Engenharia Didática de sequências deixe de ser unidirecional e passe a ser uma rede, em que outros conceitos e habilidades podem ser desenvolvidos ou retomados, mantendo o direcionamento principal.

Nesta pesquisa, utilizamos a Modelagem Matemática (MM) como uma estratégia de ensino e de aprendizagem, conforme definida por Bassanezi (2011), que a concebe como "um processo que alia a teoria e prática" (p. 17) e convida quem a utiliza a tentar entender o meio que o cerca. No nosso caso, tivemos o objetivo não só de contextualizar o conteúdo das EDOs, mas também de trabalhar o conceito de taxa de variação e de propiciar o estabelecimento de relações entre o fenômeno analisado e a EDO. Além disso, pelo seu caráter investigativo, o desenvolvimento de problemas de MM permite desenvolver atitudes autônomas dos alunos, o que vem ao encontro dos objetivos da engenharia didática.

Na próxima seção, abordaremos as características da Modelagem Matemática e, na seção 1.2.3, apresentaremos os pressupostos da engenharia didática.

1.2.2 A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e de aprendizagem

Bassanezi (2015) inicia seu livro, Modelagem Matemática: teoria e prática, com a seguinte indagação: "Quem surgiu primeiro: a ciência Matemática ou a aplicação da Matemática?" (p. 10). Segundo o autor, o uso da Matemática é tão antigo quanto a própria Matemática, pois vários conceitos matemáticos surgiram a partir da necessidade de solucionar problemas de outras áreas do conhecimento, bem como alguns conceitos já existentes passaram a ser aplicados em situações reais.

Se fizermos um levantamento histórico, verificaremos que, desde os tempos mais primórdios, o homem já utilizava e necessitava da Matemática (EVES, 1995). Dessa utilização da Matemática pelo homem em contextos externos a ela, surgiu um ramo da Matemática denominado de Matemática Aplicada, que se ocupa do estudo da aplicação dos conhecimentos matemáticos nas diversas áreas do conhecimento, como a Física, a Química, a Biologia, as Engenharias, entre outras.

Resumidamente, a Matemática Aplicada possui a função de utilizar conceitos matemáticos para analisar e interpretar problemas não matemáticos. Por exemplo, dado um problema da Biologia, precisamos traduzi-lo em uma linguagem matemática (números, gráficos ou expressões matemáticas), analisar a situação nesta nova linguagem e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos do problema original.

Este processo de tradução do problema não matemático para uma linguagem matemática é denominada, dentro da Matemática Aplicada, de Modelagem Matemática e o conjunto de símbolos, gráficos e relações que representa o fenômeno, ou parte dele, é chamado de modelo matemático.

Segundo Bueno (2011), se pesquisarmos sobre a origem dos modelos matemáticos recaímos a milênios atrás. No domínio da Matemática, Pitágoras e os pitagóricos obtiveram o modelo $a^2 = b^2 + c^2$ (conhecido como teorema de Pitágoras que relaciona os comprimentos dos catetos (b e c) e da hipotenusa (a) em um triângulo retângulo) entre a primeira metade do século VI a.C. e o início do século V a.C.. No domínio da Física, temos o estudo sobre a queda de corpos realizado por Galileu Galilei no século XVII, obtendo o modelo $s(t) = \alpha t$, que relaciona a distância da queda (s) em termos do tempo percorrido (t).

Na década de 1980, a Modelagem Matemática passou a chamar a atenção de pesquisadores não só pela sua relação com outras áreas do conhecimento, mas pela possibilidade da sua utilização em sala de aula. Segundo Burak (2004), nesta década, o professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi obteve uma experiência satisfatória ao trabalhar a Modelagem Matemática com um grupo de professores da Universidade Estadual de Campinas e com alunos de uma turma regular de Engenharia de Alimentos. A partir daquele momento, a Modelagem Matemática da Matemática Aplicada começou a ser utilizada para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos em sala de aula.

Dessa forma, a Modelagem Matemática na Educação Matemática[17] tem suas raízes oriundas no método científico utilizados por pesquisadores da Matemática Aplicada. Segundo Borges e Nehring (2008), a modelagem como metodologia de pesquisa objetiva encontrar soluções para problemas reais. Em geral, quem utiliza esta modelagem são os pesquisadores pós-graduados de diversas áreas do conhecimento (Matemática, Química, Engenharias etc.), que possuem conhecimento matemático para modelar em suas áreas e/ou estão dispostos a estudar tópicos de Matemática relativos ao modelo estudado. A importação dessa modelagem para o ensino conserva o objetivo de investigação e adiciona a função de ensinar Matemática.

Nesta transposição da Matemática Aplicada para o ensino, a MM torna-se ainda mais multifacetada adotando diferentes concepções e perspectivas, em decorrência da diversidade de interesses e de intenções ao utilizar a Modelagem no âmbito educacional.

Em relação às concepções, elas permitem que a MM seja empregada como um método de ensino, uma alternativa aprendizagem ou uma estratégia de ensino e de aprendizagem, que é a utilizada neste estudo. Cada uma dessas concepções traz consigo diferentes implicações em relação às práticas pedagógicas de Matemática.

Kaiser e Sriraman (2006), a partir da análise de trabalhos, principalmente os gerados por atividades do *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) e do *The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), destacam seis perspectivas que atualmente são referenciadas internacionalmente:

i) Realística ou Modelagem Aplicada: possui como objetivo central resolver problemas reais, originários das Ciências ou da indústria, de forma a promover uma compreensão da realidade e o desenvolvimento de competências de Modelagem, ou seja, a habilidade de resolver e de analisar problemas aplicados a outras áreas do conhecimento.
ii) Modelagem Contextual: está relacionada com a interpretação de enunciados de situações problemas, com a intenção de motivar os alunos e de promover a aprendizagem. Neste caso, a obtenção do modelo é uma tarefa de resolução de problemas com o objetivo de que o aluno possa tomar o modelo e/ou o conceito do problema original e aplicá-lo em outras situações.
iii) Epistemológica ou Modelagem Teórica: tem como objetivo principal o desenvolvimento de teorias e/ou de conceitos matemáticos.

[17] A partir desta parte do texto sempre que nos referirmos à Modelagem Matemática na Educação Matemática utilizaremos somente o termo Modelagem Matemática.

iv) Modelagem Educacional: esta perspectiva possui elementos da perspectiva realista, pois resolve e analisa situações reais ao mesmo tempo que se preocupa com o desenvolvimento de conceitos matemáticos (perspectiva epistemológica), no âmbito da sala de aula. Ela possui dois tipos de objetivos: o didático, relativo à estruturação e ao desenvolvimento dos processos de aprendizagem; e conceitual, relacionado à introdução e ao desenvolvimento de conceitos matemáticos.

v) Modelagem sociocrítica: perspectiva que evidencia a necessidade de um pensamento crítico sobre o papel da Matemática na sociedade. Seu objetivo principal é desenvolver o pensamento crítico dos alunos. Dessa forma, as discussões e as reflexões entre os alunos são consideradas como partes fundamentais no processo de modelagem.

vi) Cognitivista: pode ser descrita como uma meta perspectiva e preocupa-se com os processos cognitivos que ocorrem durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática e com os processos psicológicos envolvidos, como a abstração ou a generalização, por exemplo.

Considerando que nosso objetivo constitui-se em investigar o potencial de uma sequência de situações, envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio, na condução do processo de aprendizagem das equações diferenciais ordinárias para estudantes dos cursos de engenharias, adotamos, nesta pesquisa, a concepção de Bassanezi (2015) e a utilizamos segundo a perspectiva educacional, com a intenção de auxiliar a aprendizagem do conceito das EDOs.

Nesta concepção, a MM é compreendida como “o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente, sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador” (BASSANEZI, 2015, p.15).

Em outras palavras, a MM consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos. É um processo criativo de abstração e de generalização com o intuito de fazer previsões e de interpretá-las na linguagem usual (BASSANEZI, 2011, p. 24).

Neste contexto, o modelo matemático é entendido como um conjunto de símbolos e de relações matemáticas que representam, de alguma forma, o objeto estudado. Sua importância consiste em ter uma linguagem precisa, que represente as situações modeladas de maneira clara e objetiva, de modo que os resultados do estudo possam ser colocados na linguagem original do problema, independente da sua área.

Bassanezi (2011) classifica os modelos matemáticos conforme o tipo de matemática utilizada:

> i. *Linear* ou *não linear*, conforme suas equações básicas tenham estas características;
> *ii.* *Estáticos*, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo, ou *Dinâmico* quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colmeia.
> *iii.* *Educacional*, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. O modelo presa-predador de Lotka-Volterra é um exemplo típico de tais modelos. O método empregado por tais modelos envolve a investigação de uma ou duas variáveis, isoladas da complexidade das outras relações fenomenológicas. Geralmente estes modelos não representam a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer as previsões. Entretanto, a virtude de tais modelos será na aquisição de experiência e no fornecimento de ideias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada; ou *Aplicativo* é aquele baseado em hipóteses realísticas e, geralmente, envolve inter-relações de um grande número de variáveis, fornecendo em geral sistemas de equações com numerosos parâmetros. Neste caso, um tratamento analítico pode ser impossível e os métodos utilizados para obtenção das soluções devem ser computacionais. E quanto mais complexo for o modelo, mais difícil será mostrar sua validade, isto é, que ele descreve a realidade! (p. 20 e p. 21).

Em nosso estudo, o modelo matemático utilizado é do tipo educacional, pois não buscamos um modelo que leva em conta todas as variáveis do fenômeno estudado e/ou necessita de uma matemática que está muito além dos conhecimentos dos alunos, mas sim de um modelo que auxilie os estudantes a compreender tanto o fenômeno analisado quanto o conceito estudado.

Outra característica do nosso modelo é que ele deve ser formulado por meio de uma EDO. Nesta condição, precisamos determinar um modelo algébrico, ou seja, precisamos obter a expressão algébrica da EDO, para, a partir dela, definir a forma de resolução que será utilizada e, assim, analisar o fenômeno estudado.

Os fenômenos a que nos referimos são problemas de outras áreas do conhecimento que envolvem a noção de taxa de variação. Segundo Almeida, Tortola e Merli (2012), há muitos séculos procura-se um entendimento do que seria um problema. Os autores apresentam algumas definições para este termo, como, por exemplo, a de Ferreira (1986, p. 1394), que compreende um problema como sendo “uma questão não solvida e que é o objeto de discussão”, para chegarem a seguinte interpretação: “problema é uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas a priori para sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções já indicadas” (ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012, p. 218).

Nesta pesquisa, consideramos problema como sendo uma situação proposta na qual o indivíduo precisa compreendê-la, mesmo que parcialmente, discuti-la, elencar questionamentos e buscar soluções tanto para as questões que surgiram dos questionamentos levantados quanto para a própria situação.

Além disso, compreendemos que um problema no contexto da Modelagem Matemática compreende todas as fases que, de alguma forma, os alunos tenham se envolvido com a situação proposta, desde a escolha de um tema de interesse, das discussões sobre este tema até as etapas da Modelagem Matemática definidas por Bassanezi (2011). Para o autor, a Modelagem Matemática é caracterizada por seis etapas que se complementam:

1) Experimentação: etapa que envolve a obtenção dos dados, experimentais ou empíricos, que são fundamentais para a compreensão do problema e auxiliam na estruturação, na formulação e em eventuais modificações dos modelos. Além disso, os dados experimentais decidem a validação dos modelos.
2) Abstração: procedimento que leva à formulação dos modelos matemáticos. Esta fase envolve a seleção de variáveis, a problematização, o levantamento de hipóteses e a simplificação do problema.
3) Formulação do modelo: o modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem usual por uma linguagem matemática. A construção do modelo segue de perto o uso de um dicionário que traduz as palavras chaves em alguma estrutura matemática.
4) Resolução: a resolução de um modelo depende da sua complexidade, podendo ser uma resolução analítica ou numérica.
5) Validação: etapa que envolve a aceitação, ou não, do modelo. Esta etapa envolve a comparação entre os dados obtidos pelo modelo encontrado e os valores obtidos no sistema real.
6) Modificação: se na validação do modelo o grau de aproximação desejado não é atingido, devemos inserir novas variáveis no modelo ou modificar sua lei de formação e, assim, o modelo original deve ser modificado, iniciando-se novamente o processo.

Pelo fato de utilizar problemas da realidade[18], a Modelagem Matemática insere o aluno na situação, fazendo com que sua solução não seja apenas mecânica ou uma obrigação, mas

---

[18] Não discutiremos o termo realidade nesta tese, assumimos como realidade tudo que existe.

sim um desafio, uma forma de entender alguns conceitos matemáticos. Também, é uma oportunidade de verificar onde seus conhecimentos acadêmicos podem ser aplicados.

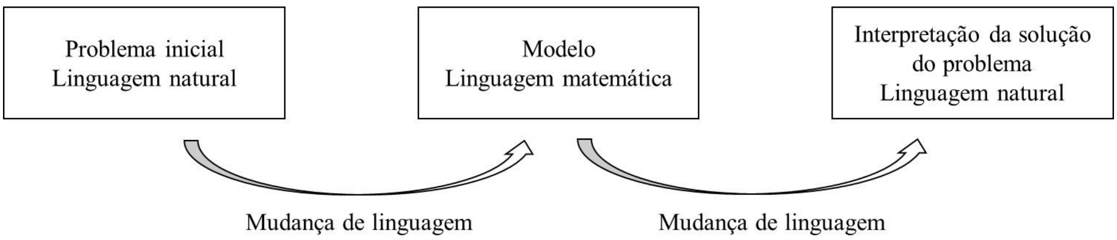
Segundo Bassanezi (2011), um modelo matemático pode ser construído dentro de uma teoria matemática já conhecida e, mesmo assim, pode ocorrer que as técnicas e os métodos dessa teoria não sejam suficientes para a obtenção dos resultados desejados. Este tipo de situação constitui-se em grandes motivações para o desenvolvimento de teorias matemáticas já estudadas. Este fato pode ser exemplificado com as EDOs, desde a sua origem, em problemas da Física, e, até hoje, como ferramenta indispensável para as áreas de: Biologia, Química, Economia e Engenharia, o que corrobora as justificativas dessa pesquisa.

1.2.2.1 A Modelagem Matemática e os registros de representação semiótica

Bassanezi (2011, p. 25) afirma que "a obtenção do modelo matemático pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e as operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa".

Em outras palavras, no desenvolvimento de um problema de Modelagem Matemática, é necessário realizar uma mudança da linguagem natural, na qual o problema é descrito para uma linguagem matemática coerente. Uma vez analisada esta situação, com o uso de ferramentas matemáticas, tem-se a necessidade de interpretar o resultado e fornecer uma resposta na linguagem natural do problema (Figura 12).

Figura 12: Mudança da linguagem natural para a linguagem matemática em problema de MM



Fonte: Elaborado pela autora

Esta transcrição de um problema em linguagem matemática constitui-se em uma mudança de registro na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1993), ou seja, uma atividade de conversão. A linguagem matemática, ilustrada na figura acima, diz respeito às expressões matemáticas, aos gráficos, aos números utilizados para expressar o conteúdo matemático, ou seja, as diferentes representações para o fenômeno estudado. Para Duval (2003, p.21), "a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro".

Podemos observar, na Figura 12, que no processo de desenvolvimento de um problema de MM é requerido pelo menos duas mudanças de registro: a primeira, do registro da língua natural de uso especializado para um outro registro, o registro simbólico-algébrico, por exemplo; e, na sequência, uma conversão deste registro para o registro da língua natural de uso especializado.

Além disso, para entender a situação analisada, durante o processo de resolução, é necessária a utilização de outros registros. Bassanezi (2011) sugere que a validação do modelo seja realizada com a utilização de gráficos das soluções, que permitem uma melhor interpretação do comportamento do fenômeno, auxiliando na avaliação das previsões que podem ser realizadas ou até mesmo em um aperfeiçoamento da solução obtida. Ou seja, o autor indica a importância da utilização de diferentes registros para compreender o modelo matemático analisado. Esse posicionamento está de acordo com os pressupostos de Duval (2003), o qual postula que a compreensão conceitual de um objeto matemático está associada à capacidade de o indivíduo articular diversos registros de representação associados ao objeto.

Segundo Duval (1993), a resolução de problemas que estão inseridos em situações não matemáticas (cotidianas ou profissionais) dependem da compreensão do enunciado e das conversões das informações, contidas neste enunciado, para uma expressão matemática. Somente após esta conversão é que os tratamentos podem ser efetuados. Para o autor, essa mudança de registro não está sujeita aos conhecimentos de regras de tratamentos ou de fórmulas matemáticas, pois o que mais importa no enunciado de tais situações são os sintagmas nominais e verbais que conferem sentidos relacionais.

Além disso, nesta transcrição do problema não matemático, precisamos considerar o raciocínio propiciado pela argumentação que está ligada diretamente ao registro da língua natural. E o raciocínio da dedução, uma vez que as definições e os teoremas matemáticos são enunciados em língua natural (DUVAL, 1993). Tanto a argumentação como a dedução se fazem presentes em um problema de Modelagem Matemática, desde a formulação de hipóteses até a resposta dada para a situação inicial.

Segundo Rosa (2009, p.44), “nas atividades de Modelagem Matemática, um registro complementa o outro, pois geralmente não se consegue estudar todas as características de um objeto matemático com uma única representação”. Para a autora, desenvolver atividades de Modelagem Matemática propicia ao aluno a utilização de diferentes registros de representação associados a um objeto matemático, logo, possibilita conversões congruentes ou não.

Para Vertuan (2007), a coordenação entre registro não resulta somente em uma conversão e sim em compreender que os diferentes registros representam o mesmo objeto matemático e se complementam, uma vez que as características e propriedades que não estão expressas com clareza em um registro podem ser visualizadas em outro registro.

O referido autor, em sua dissertação de mestrado, verificou que a utilização de diferentes registros de representação se faz presentes no desenvolvimento de um problema de Modelagem Matemática e possibilitam condições importantes para a aprendizagem, como o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros. Segundo Vertuan (2017 p. 135), “a interação entre Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica contribui para a aprendizagem de conceitos matemáticos e, consequentemente, para a discussão de situações da realidade”.

Burak e Brandt (2010, p. 100) afirmam que “o contexto da Modelagem serve para a atribuição de sentido e significação aos conceitos, pois o tema e sua problematização serão responsáveis pelas atribuições de significações ao par significante/significado, tendo por referência um determinado objeto matemático”.

Diante do exposto, podemos observar que, na resolução de um problema de MM, é imprescindível a utilização de diversos registros de representação e a coordenação desses diferentes registros é o que possibilita a compreensão do fenômeno estudado. É durante os processos de compreensão, de formulação e de interpretação do modelo que podemos observar as significações que os alunos conferem ao relacionar o significante e o significado.

Ao obter um modelo matemático para uma situação não matemática, além de uma conversão entre registros, estamos realizando uma mudança de um domínio não matemático para um domínio matemático. As estratégias aplicadas na resolução do modelo podem se utilizar de diferentes registros matemáticos, consequentemente, é possível que se tenha a necessidade de mudar o domínio matemático. Dessa forma, inferimos que a resolução de problemas no contexto da Modelagem Matemática viabiliza tanto o uso e a coordenação de diferentes registros quanto a utilização de diversos domínios.

Na próxima seção, apresentamos os pressupostos de engenharia didática.

1.2.3 A engenharia didática

As noções desta metodologia surgiram na didática da matemática (escola francesa) no início dos anos oitenta. Segundo Artigue (1996), a engenharia didática é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto específico, apoia-se em conhecimentos científicos do seu domínio, concordando em submeter-se a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é forçado a trabalhar com objetos mais complexos que os objetos depurados da Ciência.

Para Artigue (1996), “a engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, caracterizada - se, em primeiro lugar, como um esquema experimental baseado em ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino” (p. 247, tradução nossa[19]).

Apesar de ser caracterizada como uma modalidade de pesquisa experimental – em função do contexto em que se desenvolve e pelos recursos de validação aos quais recorre – a engenharia didática contém peculiaridades em relação a esta modalidade de pesquisa. Nela, por exemplo, dispensa-se a necessidade de aplicação de elementos como o pré-teste ou o pós-teste que, em seu contexto, são substituídos pela comparação entre análises *a priori* (desenvolvidas antes da aplicação das seções com os alunos) e análises *a posteriori* (que envolvem os alunos, mas aplica-se, mais diretamente, aos dados obtidos na experimentação).

Segundo Douady (1993), a engenharia didática também pode ser compreendida como

> [...] um conjunto de sequências de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. Durante as trocas entre o professor e os alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (pg. 2, tradução nossa[20]).

Dessa forma, a engenharia didática pode ser entendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori,* caso da metodologia da pesquisa, quanto como um processo resultante de uma adaptação do produto para a implementação em sala de aula (DOUADY, 1993).

Em síntese, o processo da engenharia didática se compõe de quatro fases, as análises preliminares, a construção das situações e análise *a priori*; a experimentação e a análise *a posteriori* e validação.

As análises preliminares são feitas levando em consideração um estudo sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos didáticos previamente adquiridos sobre o assunto. Essas análises têm por objetivo embasar a concepção da engenharia, contudo, elas podem ser retomadas e aprofundadas durante todo o processo.

Nesta pesquisa, as análises preliminares realizadas foram:

i) Um levantamento das pesquisas já realizadas sobre o ensino e a aprendizagem das EDOs.

---

[19] L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des "réalisations didactiques" en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement.

[20] [...] um ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un *maître-ingénieur* pour reáliser un projet d’apprentissage pour une certaine population d’élèves. Au cours des échanges entre le maître et les élèves, le projet évolue sous les réactions des élèves et en fonction des choix et décisions du maître.

ii) Um estudo sobre os possíveis domínios e registros de representações semióticas utilizados no estudo das EDOs.

iii) Análise de dois livros didáticos de EDO, evidenciando as mudanças de domínios e de registros de representações semióticas e os tipos de abordagens privilegiadas.

Na segunda fase da engenharia didática (a construção das situações e análise *a priori),* o pesquisador define as atividades que vão compor a sequência de situações que será aplicada aos alunos. Orientado pelas análises preliminares, deve delimitar as variáveis didáticas que serão levadas em consideração na formulação das situações-problema. Segundo Almoloud (2007), as variáveis didáticas são aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias de resolução dos problemas, podendo levar a transformações qualitativas nas formas de resolução das situações propostas.

Essas variáveis também são denominadas de variáveis de comando. Segundo Artigue (1988), podemos distinguir dois tipos de variáveis de comando:

> - As *variáveis da macrodidáticas ou globais* relativas a organização global da engenharia;
> - e as *variáveis da microdidáticas ou locais* relativas a organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou fase, umas ou outras podem ser elas mesmas as variáveis de ordem geral ou de variáveis dependentes do conteúdo didático, cujo o ensino é visado (pg. 291, tradução nossa[21]).

As variáveis macrodidáticas consideradas neste estudo foram a organização temporal do curso de extensão, ou seja, o tempo total destinado para a realização do curso e a divisão deste tempo por dia de curso. Acreditamos que tais variáveis influenciam diretamente na aprendizagem, pois, caso a quantidade de horas/dias de curso for muito longa, pode sobrecarregar os alunos, fazendo com que o rendimento desses seja comprometido. O contrário, por sua vez, também pode prejudicar o desenvolvimento das atividades, sobretudo os problemas de Modelagem Matemática, nos quais é importante que os alunos disponham de tempo para refletir sobre a situação. Além disso, a quantidade total de horas do curso influencia diretamente na elaboração da sequência didática, pois delimita o número de atividades a serem trabalhadas.

A utilização de um software computacional pode intervir diretamente no desenvolvimento de algumas atividades, seja positivamente, favorecendo a sua compreensão, ou gerando um meio de dificuldade pela não familiarização do estudante com o software.

---

[21] - les *variables macro-didactiques ou globales* qui concernente l'organisation globale de l'ingénierie,
- et les *variables micro-didactiques ou locales* qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé.

Em relação ao objeto de estudo, as variáveis macrodidáticas consideradas foram o comportamento das soluções das EDOs, a interpretação do campo de vetores, a taxa variação e os problemas modelados por EDO.

Quanto às variáveis microdidáticas, foram consideradas aquelas diretamente relacionadas com a sequência de situações, como os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento das atividades, a familiarização com os vários registros de representação semiótica, entre outras, que serão especificadas em cada atividade.

A análise *a priori* comporta uma parte de descrição e outra de previsão sobre as atividades da sequência de situações. Assim, para cada situação, o pesquisador deve determinar, antecipadamente, qual é o objetivo de tal atividade e quais resultados pretende atingir. Além disso, precisa fazer uma previsão das dificuldades que os alunos poderão apresentar para resolver a situação, dos possíveis caminhos a serem seguidos e dos prováveis erros cometidos (MACHADO, 2012).

Na terceira fase, a experimentação ocorre quando se aplica a sequência de situações com certa população de alunos. Esta fase, segundo Machado (2012), supõe:

i) A explicitação dos objetivos e das condições para a realização da pesquisa com a população de alunos;
ii) A aplicação dos instrumentos de pesquisa;
iii) O registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais etc.).

Neste estudo, a sequência de situações foi aplicada no decorrer de um curso de extensão ministrado pela pesquisadora. O curso foi realizado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Campo Mourão, no período de 20 de agosto de 2015 à 24 de setembro 2015, todas as terças e quintas-feiras, das 18:30h às 21:00h, totalizando vinte e sete horas[22]. O público alvo eram os alunos dos cursos de Engenharias (Ambiental, Alimentos, Civil e Eletrônica) que estavam matriculados na disciplina de Equações Diferenciais ou Matemática II, ambas são obrigatórias e, nas suas ementas consta o conteúdo de equações diferenciais ordinárias.

A escolha por esses alunos se deu pelo fato de a maioria estar cursando o segundo semestre de seu respectivo curso e, portanto, já terem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, na qual estudaram os conteúdos de função (polinomiais, exponenciais, trigonométricas etc.), derivada (definição, técnicas de derivação, teorema do valor médio, teste da derivada primeira etc.) e integral (definição, integral definida e indefinida, técnicas de

[22] O primeiro dia de curso foi de 2 horas.

integração, teorema fundamental do cálculo), as quais são pré-requisitos para o estudo das EDOs.

Por meio de um e-mail enviado a todos os alunos matriculados nas disciplinas supracitadas, a pesquisadora convidou os estudantes a participarem do curso de extensão. Além disso, o curso também foi divulgado por intermédio de outros professores que fizeram o convite em suas aulas.

As inscrições foram realizadas por e-mail, durante o período de quinze de agosto de 2015 até dezoito de agosto de 2015. No início, foram disponibilizadas vinte vagas, cinco para cada engenharia, sendo o critério de seleção a ordem de inscrição. No dia dezoito de agosto de 2015, só havia quinze inscritos e um novo e-mail foi enviado reforçando o convite. Assim, mais doze alunos se inscreveram. Como já prevíamos algumas desistências, foi decidido que todos os inscritos participariam do curso. Desta forma, o total de alunos passou de vinte para vinte e sete, dos quais vinte e cinco participaram de, pelo menos, um dia de curso e estão caracterizados no Quadro 7.

Quadro 7: Participantes da pesquisa

Nomes Fictícios	**Engenharia**	**Período**	**Ingresso na Universidade Semestre/Ano**	**Dependências**	**Participação em relação ao curso**
Ana	Ambiental	2º	1/2015	CDI-I	Concluiu.
Bia	Eletrônica	2º	1/2014	F-I e III, Q	Concluiu.
Bianca	Alimentos	2º	1/2015	Não	Dois primeiros dias.
Bruno	Civil	3º	2/2014	CDI-I	Concluiu.
Carlos	Civil	3º	2/2014	GA	Respondeu ao questionário inicial.
Cris	Alimentos	2º	1/2015	CDI-I e Q	Respondeu ao questionário inicial.
Daiane	Civil	3º	2/2014	F-II	Concluiu.
Diogo	Eletrônica	3º	2/2011	CDI-III, EDO, ETM, F-III, PCE	Respondeu ao questionário inicial.
Fábio	Ambiental	5º	2/2013	Não.	Dois primeiros dias.
Fernando	Eletrônica	3º	1/2012	EDO, CDI-III, ETM, PE	Concluiu.
Gustavo	Eletrônica	3º	2/2013	CDI-I e II, F-III	Concluiu.
Guto	Civil	3º	2/2014	Não.	Respondeu ao questionário inicial.
Laura	Alimentos	6º	2/2009	EDO, OP-II e FT-II	Dois primeiros dias.

Léo	Eletrônica	3º	1/2012	CDI-III, EDO, F-III, PCE	Concluiu.
Luciano	Eletrônica	2º	1/2015	Não	Concluiu.
Marcos	Eletrônica	3º	2/2014	Não	Concluiu.
Michel	Alimentos	2º	2/2012	EDO, GA, MEC-I, TCA	Concluiu.
Miguel	Eletrônica	2º	1/2014	GA	Concluiu.
Paula	Alimentos	2º	1/2015	Não	Dois primeiros dias de curso.
Pedro	Eletrônica	2º	2/2012	ETM, F-III, FP	Concluiu.
Renata	Alimentos	2º	1/2015	Não	Concluiu.
Sofia	Ambiental	4º	1/2013	MEC-II, CN, EDO	Concluiu.
Théo	Eletrônica	3º	1/2013	ETM e F-IV	Concluiu.
Vinicius	Civil	3º	2/2014	Não	Respondeu ao questionário inicial.
Vivian	Alimentos	7º	2/2009	EDO, F-III, RM	Concluiu.

CDI-I, II e III: Cálculo Diferencial e Integral I, II e III. **CN:** Cálculo Numérico. **EDO**: Equações Diferenciais Ordinárias. **ETM**: Eletromagnetismo. **FT-II**: Fenômeno dos transportes II. **F-I, II, III e IV**: Física I, II, III e IV. **FP**: Fundamentos da Programação. **GA**: Geometria Analítica e Álgebra Linear. **MEC I, II**: Mecânica I, II **OP-II**: Operações Unitárias II. **PCE**: Princípios de Circuitos Elétricos. **PE**: Probabilidade e Estatística. **Q**: Química. **RM**: Resistência dos Materiais. **TCA**: Tecnologia em Cana de Açúcar.

Fonte: Respostas dos alunos nas fichas de inscrição

As dependências listadas no Quadro 7 dizem respeito àquelas do semestre na qual o curso foi aplicado, sendo que reprovações anteriores, que já tinham sido superadas, não constam no quadro. A respeito do período em que o aluno se encontra, é importante ressaltar que, na UTFPR, o aluno é retido no período caso apresente reprovações, por este motivo, um aluno que ingressou na universidade no primeiro semestre de 2014, que deveria estar no 4° período, pode estar no 2° período pelo sistema da universidade.

O curso foi composto por duas fases: a primeira fase composta por nove atividades que foram desenvolvidas durante cinco dias de curso; a segunda foi composta por três problemas de Modelagem Matemática: o primeiro intitulado Decaimento Radioativo, foi desenvolvido pelos alunos em conjunto com a pesquisadora; o segundo foi uma situação que envolvia a Lei de Resfriamento de Newton, na qual foi desenvolvido um experimento com os alunos; e, por último, cada grupo desenvolveu um problema de Modelagem Matemática, no qual o tema e todo o desenvolvimento foi de responsabilidade do grupo e a única condição imposta pela pesquisadora foi a utilização do conceito de EDO para a explicar a problema escolhido.

E, por fim, a última fase da engenharia didática, análise *a posteriori* e validação baseia-se no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação, que conterá as observações realizadas durante as sessões, as produções realizadas pelos estudantes dentro e fora de sala de aula, os questionários e entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas ao início, durante e ao final da experimentação.

A validação ocorre quando se compara os resultados das análises *a priori* e *a posteriori*. Esta validação pode confirmar ou refutar as hipóteses consideradas no início da engenharia didática.

No próximo capítulo, apresentamos as EDOs e suas formas de abordagens, além da análise dos exercícios resolvidos dos capítulos de dois livros didáticos sobre EDO, em relação às mudanças de domínios e registros de representação semiótica.

2 Análises preliminares

Neste capítulo discorremos sobre o conceito de equação diferencial ordinária: sua origem, definição, as possíveis formas de abordagens de suas soluções e o que nos subsidiou para que houvesse a elaboração deste estudo. Na sequência, considerando o papel dos livros didáticos no processo de ensino e de aprendizagem das EDOs, no ensino superior, apresentamos uma análise de dois livros didáticos que abordam este conceito, neste nível de ensino, além da apresentação de algumas pesquisas que versam sobre o ensino e a aprendizagem das EDOs.

2.1 Um breve histórico das Equações Diferenciais

A noção de EDO, assim como a maioria dos conceitos matemáticos, foi construída gradualmente, como ferramenta para resolução de problemas. Sua história remonta ao século XVII com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Sasser (1992) afirma que, embora a resolução de problemas físicos tenha levado gradativamente a modelos matemáticos que envolviam o conceito de EDO, suas origens teóricas estão relacionadas com a resolução de alguns problemas advindos da Matemática, como o problema da isócrona, da quadratura da hipérbole, da braquistócrona, entre outros.

Segundo o autor, alguns historiadores garantem que o estudo das EDOs teve início quando Leibniz, em 1675, escreveu a equação $\int xdx = (1/2)x^2$. A ele foi atribuída a descoberta implícita do método de separação de variáveis decorrente do estudo do problema de tangente inversa (1691). Em 1694, ele resolveu o problema de quadratura da hipérbole.

Leibniz também estudou a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o método para determinar as soluções de EDOs lineares de primeira ordem, além de resolver diversos problemas a partir de trocas de correspondências com outros pesquisadores, como, por exemplo, os irmãos Bernoulli (BOYCE; DIPRIMA, 2013).

Embora Newton tenha atuado pouco nesta área, suas contribuições para o Cálculo Diferencial e Integral e a Mecânica forneceram a base para diversas aplicações das EDOs no século XVIII. Ele também classificou as EDOs de primeira ordem de acordo com as formas $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Newton foi o primeiro a concluir que a solução geral de uma EDO de primeira ordem depende de uma constante arbitrária e desenvolveu um método para resolver as equações do tipo $dy/dx = f(x,y)$ usando séries infinitas (Idem).

No final do século XVII e durante o século XVIII, vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento de métodos de resolução para as EDOs. Jackob Bernoulli (1654-1705), em 1690, publicou a solução para o problema da isócrona. Foi ele quem utilizou pela primeira vez a palavra integral, em 1696, o que fez com que a segunda das duas principais divisões do Cálculo mudasse o nome de *calculus summatorius* para *calculus integralis*, como conhecemos atualmente. Jackob Bernoulli propôs, em 1695, a solução para a equação $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^n$, conhecida atualmente como equação de Bernoulli. Em 1701, ele apresentou a solução para o problema do isoperimétrico, que resultava em uma EDO de terceira ordem (SASSER, 1992, ZILL; CULLEN, 2012).

Seu irmão, Johann Bernoulli (1667-1748), em 1696, resolveu o problema da braquistócrona e apresentou um método explícito para a separação de variáveis em 1694. Foi ele quem resolveu o problema das trajetórias ortogonais em 1698 e também discutiu os resultados da EDO $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}$ no ano de 1716.

Jacob Francesco Ricatti (1676-1754) realizou as primeiras discussões sobre a equação $y'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$, hoje conhecida como equação de Ricatti. Porém, foi Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann Bernoulli, quem conseguiu resolvê-la com sucesso (SASSER, 1992).

Alex Claude Clairaut (1713-1765) publicou, em 1734, sua pesquisa sobre a EDO $y=x\frac{dy}{dx}+f\frac{dy}{dx}$ (equação de Clairaut), sendo um dos primeiros matemáticos a resolver o problema das soluções singulares para as EDOs (SASSER, 1992).

Leonhard Euler (1707-1783) realizou trabalhos importantes neste campo de conhecimento, como compreender as propriedades e o papel das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e outras funções elementares nos estudos das EDOs. Desenvolveu o método de variação de parâmetros, identificou as condições para que uma equação de primeira ordem fosse exata, desenvolveu a teoria dos fatores integrantes, entre outros. Seus estudos também incluíram a elaboração de métodos numéricos que forneciam aproximações para vários tipos de equações. Além de estudos aplicados à Mecânica, que conduziram a vários fenômenos modelados por uma EDO (BOYCE; DIPRIMA (2013), SAGLAM-ARSLAM (2004)).

Depois de Euler, outros matemáticos como Lagrange (1736-1813) e Laplace (1749-1827), por exemplo, desenvolveram métodos mais sistemáticos para a resolução das EDOs, evidenciando que nem sempre elas poderiam ser resolvidas pelos métodos elementares. Desse modo, no século XIX, a preocupação centrou-se na necessidade de encontrar condições para a existência e a unicidade da solução e com o desenvolvimento de métodos mais elaborados de resolução, como o de expansão em séries de potências. Em alguns casos, mesmo garantindo a existência e a unicidade da solução, não era possível obtê-la usando somente os métodos de análises algébricos ou o método numérico desenvolvido por Euler, surgindo, assim, a necessidade de desenvolver novos métodos numéricos para determinar tal solução (BOYCE; DIPRIMA, 2013).

Com o avanço da computação, foi possível a elaboração de integradores numéricos cada vez mais refinados, como, por exemplo, os desenvolvidos por C. Runge (1856-1927) para resolver as EDOs que apareceram em seus estudos sobre espectros atômicos. Esse método faz parte do grupo de métodos numéricos mais utilizados atualmente, conhecido como métodos de Runge-Kutta (SAGLAM-ARSLAM, 2004).

Contudo, o desenvolvimento de métodos numéricos não foi suficiente para resolver alguns tipos de equações, como as EDOs não-lineares, por exemplo. Isso foi superado com o desenvolvimento de uma nova forma de análise das EDOs: a abordagem qualitativa, que foi introduzida por Henri Poincaré (1854-1912), no final do século XIX, e abriu uma nova possibilidade para resoluções das EDOs (Idem).

Embora inicialmente as EDOs tenham sido utilizadas para resolver problemas matemáticos, já no século XVII, Euler começou a utilizá-las no estudo da dinâmica. E, apesar de a Física dominar os objetivos e as principais motivações para o estudo das EDOs, com o passar do tempo elas se expandiram para outros ramos da Matemática e começaram a ser utilizadas no estudo de fenômenos de outras áreas do conhecimento, como a Química, a Biologia, as Engenharias, entre outras.

Desse modo, os problemas deixaram de ser puramente matemáticos e precisaram ser traduzidos de um contexto não matemático para um matemático. Como já visto nas seções anteriores, este processo de interpretar matematicamente uma situação com a finalidade de fazer inferências em relação a um fenômeno de outra área do conhecimento foi chamado de Modelagem Matemática. E o conjunto de elementos, de esquemas e de símbolos matemáticos utilizados para realizar tais inferências foi denominado de modelo matemático.

Assim, ao logo do tempo, diversos modelos matemáticos foram criados para tentar interpretar fenômenos naturais. Por exemplo, em 1798, Thomas Malthus publicou o livro *An Essay on the Principle of Population*, no qual fez um alerta sobre o crescimento da população mundial. Malthus verificou um acentuado crescimento demográfico entre os anos de 1785 e 1790, em decorrência dos benefícios trazidos pela revolução industrial, como o aumento da produção, as melhores condições de saúde advindas com melhorias no saneamento básico e o aperfeiçoamento da medicina, o que fez diminuir a taxa de mortalidade e aumentar a de natalidade.

Para Malthus[23], a capacidade de reprodução humana era maior do que a capacidade da terra de produzir meios para a sua subsistência. Assim, a população, quando não sofresse guerras, epidemias ou desastres naturais, tenderia a crescer em progressão geométrica (PG), enquanto a produção de alimentos aumentaria segundo uma progressão aritmética.

Nessas circunstâncias, temos que o crescimento de uma população, sem um fator de inibição, é proporcional à própria população em cada instante de tempo (PG) (BASSANEZI, 2011). Dessa forma, a população cresceria sem limites, o que levou Malthus a concluir que a fome no mundo seria inevitável, caso não houvesse um controle da natalidade.

Apesar de Malthus não ter formulado sua teoria em termos de uma EDO, atualmente seu modelo (o modelo de Malthus) é conhecido como uma das possibilidades de aplicação das EDOs em problemas de dinâmica populacional e é representado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \ ,$$

com P sendo a população, t o tempo e α uma constante de proporcionalidade. Embora as previsões de Malthus não tenham se confirmado, devido a vários fatores, seu modelo é utilizado até hoje para fazer previsões para populações em pequenos intervalos de tempo e está presente na maioria dos livros didáticos que versam sobre o conceito de EDO.

Ainda que seja um assunto antigo, do qual muito se conhece, as EDOs continuam sendo estudadas no século XXI, pois, para compreender fenômenos como a variação da corrente elétrica em um circuito elétrico em série (simples), a variação de temperatura em um corpo, a capitalização contínua, a propagação de doenças, o decaimento radioativo, entre outros, fazemos uso de uma EDO.

Segundo Bassanezi (2011), devido a sua pluralidade de aplicações nas diversas áreas de conhecimentos (Física, Química, Biologia, Economia, Engenharia, entre outras), as EDOs constituem um objeto vastíssimo da Matemática, que pode ser abordado de diferentes formas, dependendo do objetivo proposto.

Na próxima seção, apresentamos alguns conceitos matemáticos que estão relacionados com a noção de EDO.

---

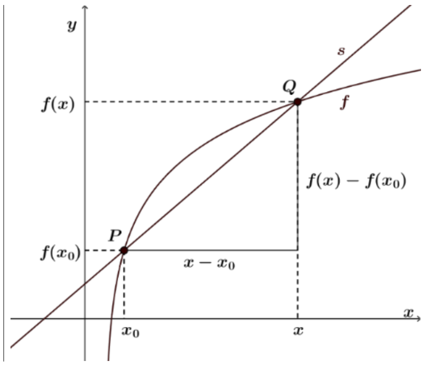
[23] Mathus: Economia, Textos de Malthus organizado por T. Szmrecsányi, Ed. Ática, 56-57 apud Bassanezi (2011)

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias: conceitos básicos

O conceito de EDO está atrelado ao conceito de derivada de uma função, e pode ser aplicado em diferentes áreas do conhecimento, desde que a situação envolva grandezas que possam ser representadas por funções. Geometricamente, a derivada fornece o coeficiente angular da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função, desde que a curva admita reta tangente neste ponto. Assim, seja f uma função definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ dois pontos distintos do gráfico de f (Figura 13), o coeficiente (m_s) da reta secante (s) ao gráfico de f nos pontos P e Q é dado por:

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

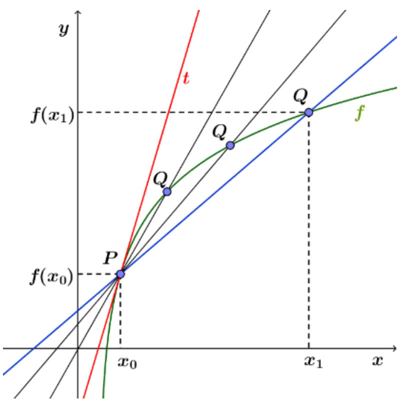
Figura 13: Reta secante



Fonte: Adaptado de Leithold (1994, p. 139)

Suponhamos que, mantendo o ponto P fixo, o ponto Q se mova sobre o gráfico de f em direção ao ponto P, ou seja, fazemos x tender a x_0, consequentemente, fazemos a diferença $x - x_0$ tender a zero. À medida que o ponto Q se aproxima do ponto P, o coeficiente angular da reta secante se aproxima do coeficiente angular da reta tangente (t) (Figura 14).

Figura 14: Reta tangente



Fonte: Adaptado de Leithold (1994, p. 139)

Fazendo $x = x_0 + \Delta x$ em (1) temos a seguinte definição:

Definição 1:(LEITHOLD, 1994, p. 140) Seja f uma função contínua em x_0. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é:

i) a reta que passa por P e tem inclinação m_t dada por

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (2)$$

ii) a reta $x = x_0$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ e } \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \text{ ou } -\infty.$$

Se nenhuma das situações acimas forem verdadeiras, então não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, y_0)$.

O limite do item i) é definido matematicamente como a derivada da função f.

Definição 2: (SWOKOWSKI, 1994, p. 125) A derivada de uma função f é a função f' definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista.

Se x_0 for um número conhecido do domínio de f, então o valor da derivada f' em x_0 é definido por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (3)$$

se o limite existir.

Observe que o limite da expressão (2) é o mesmo limite da expressão (3), ou seja, o coeficiente angular m_t da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é igual ao valor da derivada de f calculada em x_0.

A derivada de uma função pode ser representada por diferentes expressões. Assim, dada a função $y = f(x)$, temos as seguintes notações para a sua derivada:

$$f`(x) = D_x f(x) = D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

Nas expressões D_x e $\frac{d}{dx}$ a letra x representa a variável independente. Os símbolos D_x e d/dx são chamados de operadores diferenciais e isoladamente não têm significado prático, porém, quando acompanhados de uma expressão à direita, denotam uma derivada. Chamamos $D_x y$ e dy/dx a derivada de y em relação a x.

Outra aplicação da derivada de uma função que utilizamos neste estudo foi a derivada como taxa de variação. Seja $y = f(x)$, com f uma função em $\mathbb{R}$. Se a variável x possui inicialmente um valor x_0 e sofre uma variação Δx, assumindo em seguida um valor $x_0 + \Delta x$ então, a variação da variável y, denotada por Δy é igual a $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Definimos a taxa média de variação de y (y_m) por unidades de variação de x, quando x varia de x_0 para $x_0 + \Delta x$, como:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Fazendo $\Delta x \to 0$ no quociente acima, obtemos a taxa de variação instantânea ou pontual de y por unidade de variação de x em x_0, conforme definição a seguir.

Definição 3: (SWOKOWSKI, 1994, p. 121) Seja $y = f(x)$, com f uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0. A taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_0 é:

$$y_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

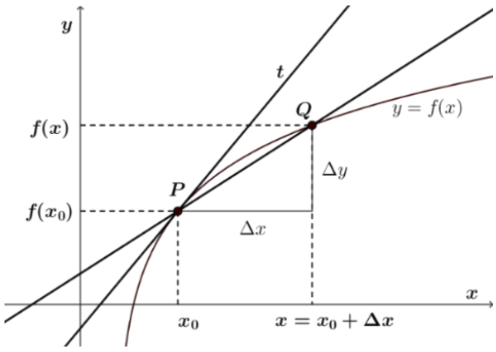
se o limite existir.

A seguir, apresentamos o conceito de incremento das variáveis x e y que são noções necessárias para a definição de diferencial.

Definição 4: (SWOKOWSKI, 1994, p. 161) Seja f uma função definida por $y = f(x)$. Se a variável x tem um valor inicial x_0 e assume, em seguida, um valor x, diferente de x_0 a diferença $x - x_0$, denotada por Δx é chamada de incremento em x, logo $\Delta x = x - x_0$.

O incremento correspondente de $y = f(x)$, denotado por Δy é dado por $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, como $x = x_0 + \Delta x$, podemos escrever $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Figura 15: Representação geométrica de Δx e Δy



Fonte: Adaptado de Swokowski (1994, p.161)

Se f é diferenciável, então, $\Delta y / \Delta x$ é o coeficiente angular m_s da reta secante que passa pelos pontos P e Q (Figura 15). Quando Δx tende a zero, x se aproxima de x_0. Consequentemente, o coeficiente angular da reta secante ($m_s = \Delta x / \Delta y$) se aproxima do coeficiente angular $f'(x)$ da reta tangente t, ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \text{ se } \Delta x \approx 0.$$

O que nos fornece a seguinte aproximação para Δy:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

A expressão $f'(x)\Delta x$ recebe o nome de diferencial da variável dependente de y, conforme a próxima definição.

Definição 5: (SWOKOWSKI, 1994, p. 162) Seja $y = f(x)$, na qual f é uma função diferenciável, e seja Δx um incremento de x.

i. A diferencial dx da variável independente x é definida por:

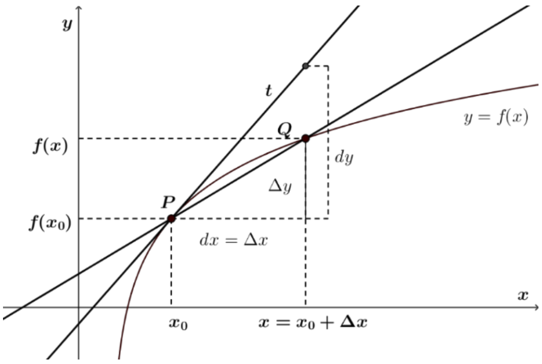
$$dx = \Delta x$$

ii. A diferencial dy da variável dependente y é definida por:

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx \qquad (4)$$

A Figura 16 ilustra a distinção gráfica entre dy e Δy.

Figura 16: Diferença gráfica entre dy e Δy



Fonte: Adaptado de Swokowski (1994, p. 161)

A reta t, ilustrada na Figura 16, é a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ a diferencial dy significa quanto a reta tangente t "sobe" ou "desce" quando a variável independente x varia de x_0 para $x_0 + \Delta x$, que difere da variação de Δy no gráfico de $y = f(x)$.

Na Figura 16, podemos observar que o coeficiente angular da reta tangente $m_t = f'(x)$ também pode ser obtido pelo quociente dy / dx, isto é,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima coincide com a notação de derivada já utilizada. A relação $f'(x) = dy/dx$ nos permite "enxergar" a notação dy/dx como um quociente de duas diferenciais em lugar de apenas uma notação para a derivada de y em relação a x.

Com base nesses conceitos, podemos definir as equações diferenciais ordinárias.

Definição 6: (ZILL; CULLEN, 2012, p. 2) Uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

As equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade. Em relação ao tipo, elas podem ser classificadas em ordinárias e parciais:

a) Equações diferenciais ordinárias (EDOs): são equações que envolvem somente derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Por exemplo,

$$(2-t)dt + udu = 0, \quad y' + 2y = -2x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = -2\frac{dy}{dx}$$

b) Equações diferenciais parciais (EDPs): são equações que envolvem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 7\frac{\partial v}{\partial x} = u - v, \quad 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3u.$$

A ordem de uma equação diferencial é definida como sendo igual a ordem da derivada de maior ordem. Por exemplo, $-y' + 2x^2 - x = 5$ é uma EDO de primeira ordem ou ordem um. A equação $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\left(\frac{dy}{dt}\right)^4 = t$ é uma EDO de segunda ordem ou ordem dois.

Dizemos que uma EDO é linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (5)$$

A equação que não pode ser escrita como em (5) é chamada não linear. As equações diferenciais lineares são caracterizadas pelas seguintes propriedades:

i. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau.

ii. Cada coeficiente depende apenas da variável independente y.

As equações $2xdy - 3ydx = 0$ e $y'' + 2y + 3 = x$ são EDO lineares de primeira e de segunda ordem, respectivamente. Já as equações $yy' - x = 0$ e $\frac{d^4s}{dx^4} + 3s^2 = x$ são EDO não lineares de primeira e quarta ordem, respectivamente, pois não podem ser escritas na forma da equação (5).

Definição 7: (ZILL; CULLEN, 2012, p. 4) A solução de uma EDO é qualquer função f definida em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que, quando substituída na EDO, reduz a equação a uma identidade.

Exemplo 1: A função $y = e^{2x} - 3$ é solução da equação $y' = 2y + 6$, pois

$$\begin{aligned} y' &= 2y + 6 \\ (e^{2x} - 3)' &= 2(e^{2x} - 3) + 6 \\ 2e^{2x} + 0 &= 2e^{2x} - 6 + 6 \\ e^{2x} &= e^{2x} \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A função $y = e^{2x} - 3$ não é a única função que satisfaz a equação $y' = 2y + 6$, pois qualquer função do tipo $y = Ce^{2x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$ conduz a uma identidade, por isso dizemos que as EDOs possuem infinitas soluções que diferem por uma constante real.

Definição 8: (BOYCE; DIPRIMA, 2013) A solução geral de uma EDO é toda a solução que envolve uma ou mais constantes arbitrárias. A solução particular de uma EDO é toda a solução obtida atribuindo valores às constantes arbitrárias da solução geral.

Exemplo 2: A função $y = Ce^{2x} - 3$ é uma solução geral para a equação $y' = 2y + 6$ e a função $y = e^{2x} - 3$ é uma solução particular para a mesma equação.

Neste estudo abordaremos somente as EDOs de primeira ordem. A forma normal deste tipo de equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{6}$$

com f uma função definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$.

Quando queremos resolver a equação (6), sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, na qual x_0 pertence a um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, temos um problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

Graficamente, para resolver o PVI (7) buscamos uma solução para a equação (6), definida em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que o gráfico dessa solução passe pelo ponto (x_0, y_0).

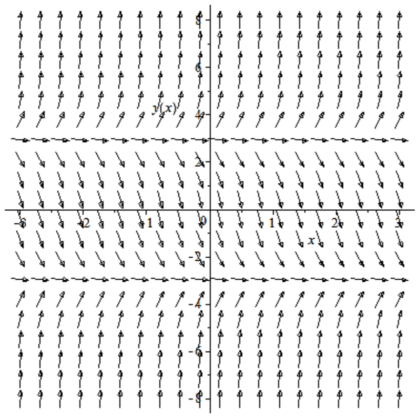
Quando a EDO não depende explicitamente da variável independente x, ou seja, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ ela recebe o nome de EDO autônoma.

A equação (6) relaciona as coordenadas de um ponto do plano e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução em cada ponto, ou seja, este tipo de equação define um campo de direções (vetores) ou de inclinações.

Definição 9: Dada a equação $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, sendo f uma função de duas variáveis x e y. Um campo de vetores para esse tipo de equação pode ser construído calculando-se o valor de f em cada ponto de uma malha retangular. Em cada ponto da malha desenha-se um pequeno segmento de reta cujo o coeficiente angular é o valor da função *f* naquele ponto. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto.

Exemplo 3: A Figura 17 ilustra um campo de vetores para a equação $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$.

Figura 17: Campo de vetores para equação $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$



Fonte: Elaborado pela autora

Definição 10: (BOYCE; DIPRIMA, 2013) Chamamos de solução de equilíbrio de uma equação diferencial do tipo $\frac{dy}{dx} = f(y)$, a função y para a qual a primeira derivada de y em relação a x se anula, ou seja, y não varia em relação a x.

Na Figura 17, podemos verificar que sobre as retas $y = -3$ e $y = 3$ os vetores possuem inclinação nula, ou seja, os valores de *y* não variam em relação a *x*. Neste caso, dizemos que as soluções $y=-3$ e $y=3$ são soluções de equilíbrio para a equação $\frac{dy}{dx}=y^2-9,$ pois sobre essas retas temos que a taxa de variação $\frac{dy}{dx}$ é nula.

Na próxima seção, apresentamos os diferentes tipos de abordagens para as soluções de uma EDO e os possíveis domínios e registros de representações utilizados em cada abordagem.

2.3 As diferentes formas de abordagens das soluções das EDOs

Na seção anterior vimos algumas definições da EDO, particularmente sobre as suas soluções. Agora, discutiremos as formas para se obter essa solução buscando compreensões para o processo de aprendizagem deste conceito.

As soluções das EDOs possuem três formas de abordagens: a algébrica, que privilegia a aplicação de técnicas matemáticas de resolução; a qualitativa que, embora não obtenha a expressão analítica das soluções, permite uma análise global dessas, e a numérica, que utiliza métodos de aproximação numérica para as soluções. Cada uma dessas abordagens apresenta suas vantagens e desvantagens em relação ao ensino e à aprendizagem das EDOs.

Artigue (1989, *apud* Gordillo, 2006) realizou um estudo sobre o ensino universitário das EDOs, na França, e verificou que, apesar de existirem as três formas de abordagens citadas acima, o ensino das EDOs centra-se na abordagem algébrica, o que também foi verificado no ensino das EDOs no Brasil, por Oliveira e Igliori (2013). Gordillo (2006), citando Artigue (1989), levanta alguns fatores que podem ter favorecido a abordagem algébrica:

- Restrições epistemológicas: a extensa dominação da abordagem algébrica na evolução história das EDOs e o desenvolvimento tardio das demais abordagens, conforme exposto na seção 2.1.
- Restrições cognitivas: a necessidade de mobilidade entre o registro simbólico-algébrico (equação) e o registro gráfico (campo de vetores), o que exige um certo nível de conhecimento para justificar a análise realizada.
- Restrições didáticas: a tendência sistemática de utilização de recursos algoritmos (técnicas de resolução), o mito de que a obtenção da expressão analítica da EDO, propiciada pela abordagem algébrica, fornece uma solução completa para EDO e a dificuldade de aceitação de um gráfico como solução.

Para Artigue (1989, *apud* Gordillo 2006), as EDOs se desenvolveram, historicamente, em três domínios matemáticos: o algébrico, o numérico e o gráfico. Concordamos com a autora em relação aos domínios citados, contudo, entendemos que é necessário aprofundar esse estudo, considerando que cada abordagem opera em uma interação entre diferentes domínios, por exemplo, a abordagem algébrica não é executada puramente no domínio algébrico, utilizado de ferramentas de outros domínios matemáticos.

Assim, apresentamos, nesta seção, os tipos de abordagens das EDOs, as vantagens e as desvantagens da sua utilização e os possíveis domínios e registros de representação semiótica envolvidos em cada uma delas.

2.3.1 A abordagem algébrica

Esta abordagem consiste em resolver algebricamente a EDO, obtendo, de forma explícita ou implícita, sua solução analítica, utilizando-se de fórmulas de quadratura de funções elementares usuais (polinômios, exponenciais, trigonométricas), desenvolvimento em série ou funções especiais conhecidas, como a função Bessel.

Para as EDOs, procuramos uma função a uma constante arbitrária que satisfaça a equação dada. Para cada tipo de EDO, variável, separável, exata, homogênea, entre outras, existe uma técnica algébrica de resolução adequada[24]. Assim, para obtermos algebricamente a solução de uma EDO, identificamos o tipo de equação de primeira ordem que estamos estudando e depois aplicamos a técnica de resolução apropriada, conforme ilustrado no Exemplo 4.

Exemplo 4: Resolva a equação $\frac{dy}{dt} = y - 2$.

Solução: A equação é do tipo separável, logo, podemos aplicar a seguinte técnica de resolução

$$\frac{dy}{dt} = y - 2$$

$$\frac{1}{y-2}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\int \frac{1}{y-2}\frac{dy}{dt}\,dt = \int dt \qquad (8)$$

Como $\frac{dy}{dt}dt = y'dt = dy$ (diferencial em y) podemos escrever a integral em (8) da seguinte forma:

[24] Para um estudo detalhado das técnicas algébricas de resolução para as EDOs, consultar Boyce, Diprima, 2013 e Zill, Cullen, 2012.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y-2}dy &= \int dt \\
\ln|y-2| &= t + c_1 \\
e^{\ln|y-2|} &= e^{t+c_1} \\
|y-2| &= e^t e^{c_1} \\
|y-2| &= Ce^t,\ C = e^{c_1} \\
y &= \pm Ce^t + 2 \\
y &= Ce^t + 2,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{9}$$

A constante C que aparece em (9) provém do resultado de e^{c_1}, portanto, é sempre positiva, logo $\pm C$ pode assumir qualquer valor real diferente de zero. Contudo, se analisarmos a equação $\frac{dy}{dt} = y - 2$, podemos verificar que esta equação também admite como solução a função $y = 2$. Esta solução só é obtida em (9) se a constante C assumir o valor zero. Desta forma, para expressarmos a solução geral para a família de soluções da EDO dada, devemos considerar que $C \in \mathbb{R}$.

A vantagem desse tipo de abordagem está no fato de obtermos a expressão analítica da solução, que permite a sua análise global, como a determinação de raízes, o comportamento assintótico e, principalmente, a determinação do valor exato da variável dependente para qualquer valor da variável independente.

A desvantagem está no fato de que nem todas as EDOs possuem solução analítica e mesmo quando possuem, nem sempre é fácil obtê-la, pois as técnicas de resolução envolvem mudanças de variáveis, integração por partes, integração por frações parciais etc. Além disso, segundo Arslan (2005), mesmo quando obtemos a solução, sua interpretação nem sempre é fácil, por diversos motivos, tais como:

i) A solução não pode ser explicitada em relação à variável independente, por exemplo, a equação $(e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)dy = 0$ que tem solução dada por $xe^{2y} - sen(xy) + y^2 + c = 0$ (ZILL; CULLEN, 2012, p.64).

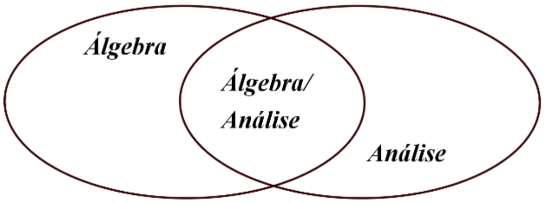
ii) A análise da solução não é trivial, por exemplo, a equação $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}q = 10 + 5sen(2t)$ com solução igual à $q(t) = 20 - \frac{40}{17}\cos(2t) + \frac{10}{17}sen(2t) + ce^{-t/2}$. Esta solução não é trivial porque envolve a soma de funções trigonométricas com a função exponencial, o que dificulta obter informações sobre seu comportamento assintótico, seus intervalos de crescimento/decrescimento e a sua representação gráfica, sem o auxílio de um software (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p. 44).

iii) A solução geral não pode ser expressa por funções elementares usuais, por exemplo, $y = e^{-t^2/4}\int e^{t^2/4}dt + c$ que é solução da equação $2y' + ty = 2$ (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p. 28).

Em relação aos domínios, apesar do nome abordagem algébrica, este tipo de resolução envolve ferramentas de outros domínios da Matemática. Analisando o Exemplo 4, observamos que a EDO não é uma simples equação algébrica, ela envolve uma derivada (objeto da Análise). Para resolvê-la, precisamos utilizar ferramentas dos dois domínios: Álgebra e Análise. Assim, por exemplo, dada a equação $\frac{dy}{dt} = y - 2$, a Álgebra permite multiplicarmos ambos as lados por $\frac{1}{y-2}, (y \neq 2)$. Por termos uma igualdade, podemos aplicar o operador $\int dt$ (Análise) em ambos os lados da equação (Álgebra). Contudo, para a resolução das integrais resultantes, precisamos recorrer às técnicas de integração (Análise). Resolvendo as integrais, obtemos como solução uma função implícita, para explicitar a solução em relação a t, precisamos aplicar a função inversa da função $\ln$.

Desta forma, observamos que a resolução algébrica não ocorre puramente no domínio da Álgebra ao mesmo tempo em que não temos uma mudança do domínio da Álgebra para o da Análise, assim inferimos que esta abordagem ocorre em um domínio formado pela interseção entre os domínios da Álgebra e da Análise, o qual vamos chamar de domínio da Álgebra/Análise. Também consideramos que a EDO, quando fornecida em sua expressão analítica, está no domínio da Álgebra/Análise. A figura abaixo ilustra esta ideia, na qual nosso objeto de estudo estaria na interseção dos domínios da Álgebra e da Análise.

Figura 18: Domínios para a abordagem algébrica da EDO



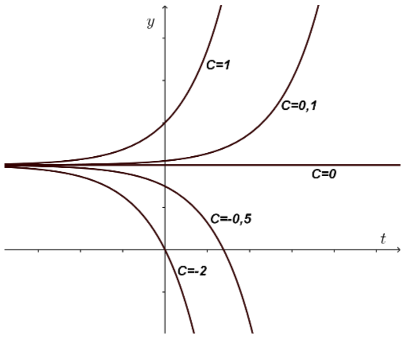
Fonte: Elaborado pela autora

Nas situações em que é solicitado ao aluno apenas determinar a solução de uma EDO dada, não temos mudanças de domínio, pois a função solução obtida é fruto de manipulações no domínio Álgebra/Análise. Contudo, em um problema no contexto da MM, o aluno precisa interpretar a solução do problema, para obter informações sobre a situação, para fazer uma estimativa ou para analisar o comportamento assintótico etc. Nesse caso, o aluno precisa operar no domínio das Funções.

Outra mudança de domínio propiciada por um problema de Modelagem Matemática é a de um domínio não matemático (das grandezas físicas, químicas etc.) para um domínio matemático (da Álgebra, da Análise, das funções, das EDOs), pois, em um problema no contexto da MM, pressupõe-se a interpretação de um problema não matemático em linguagem matemática, isso ocorre em todos os tipos de abordagem das soluções de uma EDO.

Sobre os registros de representações semióticas, a abordagem algébrica centra-se no registro simbólico-algébrico. Os registros da língua natural de uso especializado e do gráfico também são utilizados, mas com menor frequência. O primeiro é requerido para contextualizar uma situação, explicar o desenvolvimento da solução ou a própria solução encontrada. E o segundo, para representar a solução obtida, conforme Figura 19.

Figura 19: Gráfico de $y = Ce^t + 2$ para alguns valores de C



Fonte: Elaborado pela autora

Na abordagem algébrica, normalmente, o registro gráfico é requerido somente como forma de ilustrar as soluções obtidas, sem fornecer informações complementares sobre as soluções.

2.3.2 A abordagem qualitativa (gráfica)[25]

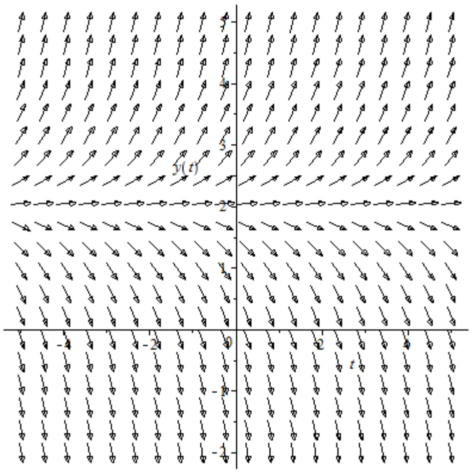
Ao contrário da resolução anterior, essa abordagem não fornece expressão analítica da família de soluções, contudo, permite um estudo do comportamento das soluções das EDOs do tipo $y' = f(x, y)$. As informações sobre as soluções, normalmente, são mais acessíveis graficamente, por este motivo, a abordagem qualitativa recebe também o nome de abordagem gráfica ou geométrica.

[25] Terminologia utilizada por Arslan (2005).

Uma abordagem gráfica bastante utilizada é o campo de vetores (campo de direções), que pode ser "desenhado" manualmente, o que demanda muito tempo e trabalho, ou obtido com a ajuda de um software como Maple, Maxima, Winplot ou GeoGebra.

A Figura 20 ilustra um campo de vetores para a equação $\frac{dy}{dt} = y - 2$ do Exemplo 4. Apesar de não resolvermos a equação, podemos extrair diversas informações a partir do gráfico, tais como: as soluções são crescentes quando $y > 2$ para todo $t \in \mathbb{R}$; as soluções divergem quando $t \to +\infty$; a equação possui uma solução de equilíbrio em $y = 2$, entre outras.

Figura 20: Campo de vetores para a equação $\frac{dy}{dt} = y - 2$



Fonte: Elaborado pela autora

Essas informações sobre o comportamento das soluções obtidas no campo de vetores provêm da interpretação do seguinte teorema:

Teorema 1: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b).

i) Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a,b), então f é estritamente crescente em $[a,b]$.

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a,b), então f é estritamente decrescente em $[a,b]$.

Demonstração: i) Suponhamos que $f'(x) > 0$ para todo x em (a,b). Precisamos mostrar que, para quaisquer x_1 e x_2 em (a,b), temos que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Sejam x_1 e x_2 em (a,b), com $x_1 < x_2$. Por hipótese temos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2), então, pelo Teorema do Valor Médio[26] existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

[26] Teorema do Valor Médio: Se f for uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existirá pelo menos um c em (a,b) tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$ ou $f(a) - f(b) = f'(c)(b-a)$.

Temos que $f'(c) > 0$ pois $c \in (a,b)$ e $x_2 - x_1 > 0,$ logo

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ ou } f(x_1) < f(x_2).$$

Portanto, para todo x_1 e x_2 em (a,b), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$ A demonstração da parte ii) é análoga.

Desta forma, como os vetores da Figura 20 são os vetores diretores das retas tangentes aos gráficos das soluções de $\frac{dy}{dt} = y - 2$, então as inclinações desses vetores são determinadas pelos valores da derivada, logo, se esta inclinação é positiva (negativa), a derivada também é positiva (negativa). Pelo teorema anterior, se a derivada é positiva (negativa), consequentemente a função é estritamente crescente (decrescente).

A vantagem deste tipo de resolução é que ela pode ser aplicada em qualquer equação do tipo $y' = f(x,y)$ e também para EDOs de segunda ordem, fazendo as mudanças de variáveis necessárias para a construção do campo de direções.

A desvantagem da abordagem geométrica é que ela fornece uma ideia sobre o comportamento da curva solução, mas não sua solução analítica, contudo, dependendo da natureza do problema a ser resolvido, as aproximações fornecidas por tal abordagem são suficientes para uma boa análise do fenômeno estudado.

Outra forma de obter informações sobre o comportamento das soluções é analisando o sinal da derivada. Por exemplo, considerando a EDO $\frac{dy}{dt} = y - 2$ (Exemplo 4) temos as seguintes situações:

i) $\frac{dy}{dt} > 0 \Rightarrow y - 2 > 0 \Rightarrow y > 2.$

ii) $\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2.$

iii) $\frac{dy}{dt} < 0 \Rightarrow y - 2 < 0 \Rightarrow y < 2.$

Utilizando o Teorema 1, obtemos as seguintes conclusões sobre o comportamento das soluções da equação $\frac{dy}{dt} = y - 2$:

Para todo $t \in \mathbb{R}$,

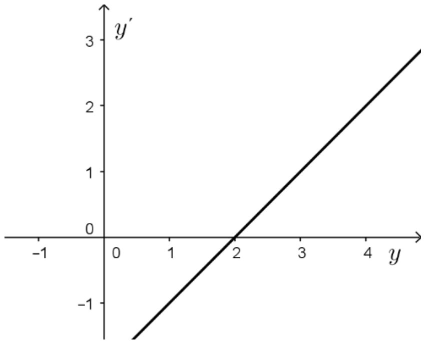
i) Se $y < 2$ temos que $y' < 0,$ portanto, as soluções são estritamente decrescentes.

ii) Se $y = 2$ temos que $y' = 0,$ portanto, a solução é constante.

iii) Se $y > 2$ temos que $y' > 0,$ portanto, as soluções são estritamente crescentes.

Estas informações podem ser fornecidas pelo gráfico de y' em relação y, conforme ilustrado na Figura 21.

Figura 21: Gráfico de $\frac{dy}{dt} = y - 2$



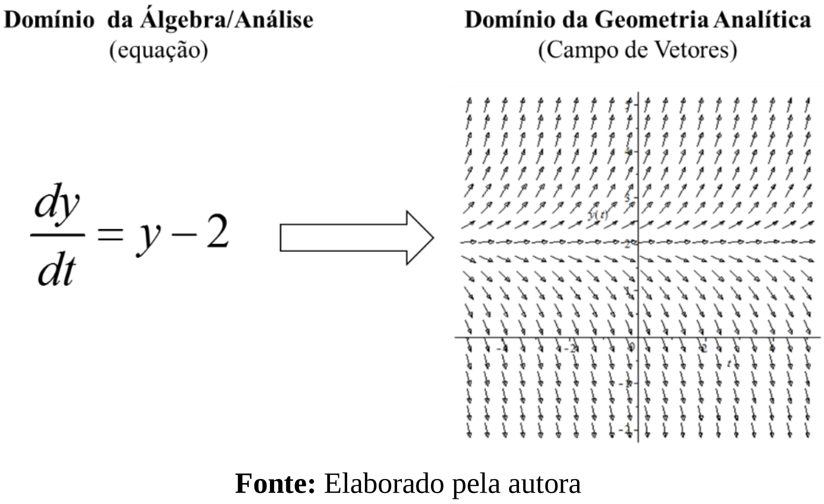
Fonte: Elaborado pela autora

Ressaltamos que, ao contrário do campo de vetores, esta análise pode demandar muito trabalho ou ser inviável para algumas equações do tipo $y' = f(x, y)$, uma vez que determinar os valores para os quais $f(x, y)$ é positiva, negativa ou nula pode ser tão complicado quanto resolver algebricamente a equação, assim como analisar o gráfico de uma superfície para a função de duas variáveis.

Contudo, para algumas EDOs que dependem somente da variável independente ou da variável dependente, este tipo de análise é viável, como é o caso da EDO autônoma do Exemplo 4.

A respeito dos domínios, vamos analisar as duas situações, quando utilizamos o campo de vetores e quando analisamos o sinal da derivada. A primeira situação propicia uma mudança do domínio Álgebra/Análise (equação) para o domínio da Geometria Analítica (campo de vetores), conforme ilustrado na Figura 22.

Figura 22: Mudança de domínio na abordagem qualitativa



Fonte: Elaborado pela autora

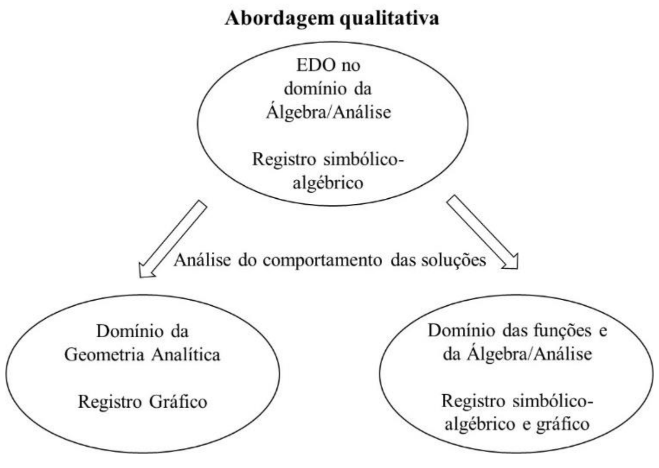
Ao mesmo tempo possibilita uma conversão do registro simbólico-algébrico para o gráfico. Durante a conversão entre o registro simbólico-algébrico e o gráfico da forma $y' = f(x, y)$, diferentes objetos matemáticos estão envolvidos: pontos, coordenadas, inclinação, reta tangente etc. Além disso, para estudar a direção de uma solução em um ponto $P(x_p, y_p)$ são necessárias informações sobre $y(P)$ que devem ser obtidas a partir de $y' = f(x, y)$, portanto, este tipo de tarefa permite estabelecer relações entre o registro simbólico-algébrico e o gráfico (GORDILLO, 2006).

Quando determinamos os valores (positivo/negativo) da derivada algebricamente, precisamos "enxergar" a equação $y' = f(x, y)$ como uma função de duas variáveis, desta forma, estamos analisando a EDO na interseção dos domínios das Funções e da Álgebra/Análise e podemos fazer esta análise utilizando dois registros de representação semiótica diferentes, o simbólico-algébrico e o gráfico.

No registro simbólico-algébrico, determinamos os valores de x e y, para os quais $f(x, y)$ é positiva, negativa ou nula, resolvendo as inequações/equações, $f(x, y) > 0$, $f(x, y) < 0$ e $f(x, y) = 0$ e, depois, aplicamos o Teorema 1, ou seja, precisamos recorrer às ferramentas da Álgebra (inequações/equações) e da Análise, por isso, consideramos que, neste caso, a análise ocorre em uma interseção dos domínios das Funções e da Álgebra/Análise. No registro gráfico, analisamos o gráfico de $y' = f(x, y)$ para obter os dados anteriores.

A Figura 23 ilustra os possíveis domínios para a análise do comportamento das soluções de uma EDO na abordagem qualitativa.

Figura 23: Domínios para a abordagem qualitativa



Fonte: Elaborado pela autora

Lembrando que, dependendo da estrutura do exercício, o registro da língua natural de uso especializado pode ser utilizado em qualquer uma das abordagens.

2.3.3 A abordagem numérica

Esta abordagem consiste na aplicação de métodos numéricos para aproximar a solução do problema de valor inicial (PVI) do tipo $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Um método numérico é um algoritmo composto por um número finito de operações envolvendo apenas números (operações aritméticas elementares, cálculo de valores numéricos de funções, consulta a uma tabela de valores etc.).

Na abordagem numérica não determinamos a expressão analítica da solução do PVI, mas aproximações para alguns de seus pontos. Com estes valores aproximados podemos plotar a curva, o que permite estudar a evolução das variáveis dependentes em relação à variável independente.

Existem diferentes métodos numéricos para o estudo das EDOs, como o método de Euler, Euler melhorado, Runge-Kutta de primeira ordem, Runge-Kutta de quarta ordem, entre outros. Com o desenvolvimento tecnológico, atualmente, temos à disposição diversos softwares que possibilitam a programação de tais métodos, ou ainda, softwares numéricos que já possuem os métodos pré-programados.

Como exemplo, vamos calcular uma aproximação para $y(0,5)$, solução do PVI: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo $h = 0,1$.

O método de Runge-Kutta[27] consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo de derivadas do método de Euler. O método de Runge-Kutta de quarta ordem para o PVI: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, é dado pela seguinte fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Com,

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$
$$h = x_{n+1} - x_n$$

---

[27] Para mais informações e demonstração do método consultar ARENALES, S.; DAREZZO, A. Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

Assim, para o nosso exemplo, temos:

Para $n = 0$,

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0,1) = -1,$$
$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1) = f(0,05, 0,95) = 0,95 - 2 = -1,05$$
$$k_3 = f(t_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2) = f(0,05, 0,9475) = 0,9475 - 2 = -1,0525$$
$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0,1, 0,89475) = 0,89475 - 2 = -1,10525$$

Logo,

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$
$$= 0,894829.$$

Assim, obtemos o ponto $(x_1, y_1) = (0,1; 0,894829).$ Os cálculos para os demais pontos estão resumidos na Tabela 1. Podemos observar que, neste caso, a aproximação numérica, com 6 casas decimais por truncamento, obtém resultados iguais aos da solução exata $(y(t) = -e^t + 2).$

Tabela 1: Método Runge-Kutta[28] de quarta ordem para $\frac{dy}{dt} = y + 2,\ \ y(0) = 1$

t_n	y_n	**Valor Exato**	**Erro absoluto**	**Erro relativo**
0,0	1,000000	1,000000	0,000000	0,00
0,1	0,894829	0,894829	0,000000	0,00
0,2	0,778597	0,778597	0,000000	0,00
0,3	0,650141	0,650141	0,000000	0,00
0,4	0,508175	0,508175	0,000000	0,00
0,5	0,351279	0,351278	0,000001	0,00

Fonte: Elaborado pela autora

A vantagem da abordagem numérica é que ela pode ser utilizada para aproximar qualquer equação do tipo $y' = f(x, y)$. A desvantagem é que ela fornece valores aproximados da solução, que são acompanhados de erros a cada iteração. Assim, mesmo para os métodos mais elaborados, o acúmulo de erros a cada passo pode levar a uma solução divergente da solução exata (ARSLAN, 2005).

Em relação aos domínios, podemos observar que as ferramentas do domínio numérico (operações de adição, de multiplicação, de potência etc.), permeiam praticamente todos os demais domínios, no caso das EDOs. Se analisarmos o método de Runge-Kutta aplicado no exemplo anterior, vemos que as operações numéricas utilizadas centram-se no cálculo do valor numérico da função $f(x, y)$, ou seja, para aplicar o método do Runge-Kutta utilizamos cálculos

[28] Dados obtidos com o auxílio do software Visual Cálculo Numérico.

numéricos (domínio numérico), contudo, para obtermos uma aproximação para y_{n+1} calculamos k_1, k_2, k_3 e k_4 que são valores numéricos da função $f(x,y)$, assim, estamos calculando o valor numérico de funções (domínio das Funções), ou seja, quando utilizamos este método estamos operando em uma interseção dos domínios numérico e das funções.

Na maioria das vezes, para efetuar os cálculos utilizamos o registro de representação semiótica simbólico-algébrico. Quando organizamos os dados em uma tabela, como, por exemplo, na Tabela 1, utilizamos o registro simbólico-numérico (tabela). Na abordagem numérica, também utilizamos o registro gráfico, para plotar os pontos calculados no plano cartesiano e analisar o comportamento da solução.

Essas inferências são relativas ao método de Runge-Kutta, exemplificado anteriormente, sendo que, para cada método numérico, devemos fazer uma análise própria, pois cada método possui as suas especificações.

O Quadro 8 apresenta alguns objetos matemáticos necessários para a compreensão das EDOs e os seus possíveis domínios e registros de representações semióticas.

Quadro 8: Objetos matemáticos em relação aos domínios e registros de representação semiótica

Objeto Matemático	**Domínio**	**Registro de representação semiótica**			
		Simbólico		Gráfico	Língua Natural
		Algébrico	Numérico		
EDO	Álgebra/ Análise	Expressão simbólica. $\frac{dy}{dx} = xy$	Tabela de valores	Representante gráfico	Expressão na língua natural de uso especializado
Soluções	Funções	Expressão simbólica. $y = f(x)$	Tabela de valores	Curva em um sistema de coordenadas	Expressão na língua natural de uso especializado
Solução de equilíbrio	Funções	$f(x,y) = 0$		Curva da equação $f(x,y) = 0$	Expressão na língua natural de uso especializado
Reta tangente em um ponto de uma curva solução	Geometria Analítica	Expressão simbólica.	Tabela de valores	Representante gráfico	Expressão na língua natural de uso especializado

Fonte: Adaptado de Gordillo (2006)

Diante do exposto nesta seção, vimos que as EDOs e os conceitos matemáticos a ela relacionados (funções, campo de vetores, reta tangente etc.) operam em diferentes domínios e utilizam diversos registros de representação semiótica. Desta forma, assumimos que o estudo das EDOs deve explorar as diferentes abordagens de resolução, de forma a tentar proporcionar uma compreensão mais significativa delas e não somente uma aprendizagem de fórmulas e de técnicas de integração. Nesse sentido, buscamos olhar, agora, para os livros didáticos de EDOs usados no ensino superior.

2.4 Análise de dois livros didáticos que versam sobre as EDOs

Nesta seção, apresentamos uma análise de dois livros didáticos utilizados para o ensino e a aprendizagem das EDOs nos cursos de Engenharia. Esta análise foi dividida em duas partes. Na primeira, identificamos as mudanças de domínios, os tratamentos e as conversões realizadas nas resoluções dos exercícios. Na segunda, fizemos uma análise em relação às atividades de “Modelagem Matemática” apresentadas nos livros.

Concordamos com Lajolo (1996) quando afirma que, apesar de o livro didático não ser o único recurso utilizado por professores e alunos, ele pode influenciar diretamente na qualidade do ensino e da aprendizagem em sala de aula, pois indica os conteúdos, recomenda as estratégias de ensino, determinando, de forma direta ou indireta, o que deve ser ensinado e como se deve ensinar.

Nos cursos de Engenharias, as disciplinas da área da Matemática se fazem presente desde o início do curso e a adoção do livro didático é uma prática normal, seja como livro texto usado pelo professor ou como material de apoio pelos estudantes. Segundo Biembengut (1997), normalmente, os professores de posse da ementa de Matemática para os cursos de Engenharias, buscam um livro texto que mais se adaptam, em muitos casos, é o mesmo que usaram em sua formação, e o reproduz em suas aulas.

Em relação ao conteúdo de EDO, Flemming, Luz e Wagner (2000) afirmam que todos os cursos de Engenharias possuem pelo menos uma disciplina que versa sobre este conceito e a estratégia didática empregada pelo professor, na maioria das vezes, segue um delineamento próximo ao livro didático utilizado.

Desta forma, reconhecendo a influência dos livros didáticos no ensino e na aprendizagem de qualquer conteúdo matemático, em particular do conceito de EDOs, expomos nesta seção uma análise de dois livros didáticos de EDOs, com o intuito de identificar quais registros de representação e domínios são utilizados pelos autores e como os modelos matemáticos são apresentados e trabalhados.

Os livros analisados são aqueles indicados como referência básica nos planos de ensino dos alunos participantes da pesquisa. Assim, diante do exposto, acreditamos que o tipo de abordagem, os registros de representação, os domínios priorizados pelos livros e a forma de trabalhar os modelos matemáticos são similares aos métodos de ensino aplicados na disciplina regular. Desta forma, esta análise nos auxiliou na elaboração de uma sequência de situações, utilizando de domínios e registros de representação que são pouco utilizados nos livros didáticos analisados.

2.4.1 Os livros selecionados

Os livros foram selecionados a partir de uma pesquisa nos programas das disciplinas que contemplam o conteúdo de EDO, dos cursos de Engenharia de algumas universidades públicas do estado do Paraná, tais como, Universidade Estadual de Maringá (UEM), Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO), Universidade Federal do Paraná (UFPR) e Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Constatamos uma frequência significativa de duas obras, além disso, verificamos que esses livros também são recomendados em outras universidades que oferecem cursos de Engenharia.

Os livros selecionados foram:

Livro 1: Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno (BOYCE; DIPRIMA, 2013);

Livro 2: Equações diferenciais (ZILL; CULLEN, 2012).

O Livro 1 (BOYCE; DIPRIMA, 2013) aborda o conceito das EDOs nos dois primeiros capítulos. No capítulo 1, os autores apresentam alguns conceitos básicos das EDOs, como definição, solução e classificação. Para isso, utilizam-se de dois problemas, um sobre objeto em queda e o outro sobre dinâmica populacional, convidando o leitor a fazer uma análise do fenômeno de forma mais intuitiva, utilizando-se do campo de vetores sem a necessidade de fórmulas. Esses exemplos são retomados à medida que o conceito vai sendo aprofundado ao longo do capítulo.

Neste capítulo, também, é apresentado uma nota sobre a construção de modelos matemáticos, com seis passos que devem ser seguidos para obter um modelo para um fenômeno estudado. No final do capítulo são levantadas algumas questões, de forma informal, sobre a existência e a unicidade de uma solução. Os autores comentam sobre a possibilidade do uso do computador para determinar uma solução numérica para uma EDO e sobre o uso deles para o seu estudo, mas sem apresentar nenhum método. Por fim, há uma nota histórica sobre as EDOs.

No capítulo seguinte, o campo de vetores deixa de ser utilizado para analisar o comportamento das soluções, e passa a ser praticamente ilustrativo, sendo apresentado junto com as curvas soluções, com pouca ou nenhuma explicação. Apesar de o capítulo 2 ter como foco principal as técnicas algébricas de resolução para as EDOs, os autores comentam sobre a abordagem gráfica (qualitativa) e apresenta o Método de Euler como uma forma de resolução numérica das EDOs.

O Livro 2 (ZILL; CULLEN, 2012) aborda o conceito das EDOs em três capítulos. O primeiro versa sobre as terminologias e conceitos básicos, como definição, soluções, classificação etc. Os autores falam brevemente sobre os modelos matemáticos e, em seguida, apresenta alguns fenômenos que são modelados por uma EDO, contudo, somente expõe o fenômeno e a EDO, sem resolvê-la.

O capítulo 2 aborda as técnicas algébricas de resoluções para as EDOs e o método iterativo de Picard. Os autores não utilizam o campo de vetores nos capítulos analisados. As aplicações das EDOs são realizadas no capítulo 3, com a resolução de vários problemas que ilustram os modelos apresentados no capítulo 1.

2.4.2 Análise dos exercícios resolvidos dos capítulos dos livros selecionados que abordam o conceito de EDO em relação às mudanças de domínios e de registros de representação semiótica

Conforme descrito na seção anterior, o Livro 1 aborda o conceito de EDO em 2 capítulos e o Livro 2 em 3. Nesses capítulos, além da parte teórica das EDOs, os livros apresentam exemplos que podem auxiliar uma melhor compreensão por parte do leitor.

Dentre os exemplos apresentados, vinte e nove do Livro 1 e setenta e seis do Livro 2, consideramos apenas os exemplos que eram acompanhados de algum tipo de resolução, os quais chamamos de exercícios revolvidos (ER). Os exemplos que apresentam somente uma explicação, afirmação ou não apresentam a resolução, como as letras a) e b) da Figura 24, não foram considerados na análise.

Figura 24: Exemplos não considerados nas análises dos livros

a) **EXEMPLO 3**

(a) As equações diferenciais de primeira ordem

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \text{ e } (y')^2 + y^2 + 4 = 0$$

não possuem soluções. Por quê?

(b) A equação de segunda ordem $(y'')^2 + 10y^4 = 0$ possui somente uma solução real. Qual?

b) **EXEMPLO 6**

Suponha que $T(t)$ denote a temperatura de um corpo no instante t e que a temperatura do meio ambiente seja constante, igual a T_m. Se dT/dt representa a taxa de variação da temperatura do corpo, então a lei de esfriamento de Newton poderá ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \text{ ou } \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \qquad \textbf{(11)}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. Como, por hipótese, o corpo está esfriando, devemos ter $T > T_m$; logo, $k < 0$.

Fonte: Zill; Cullen (2012, p. 6 e p. 22, respectivamente)

Desta forma, os vinte e nove exemplos apresentados no Livro 1 foram considerados ER e dos setenta e seis exemplos do Livro 2, cinquenta e sete foram considerados ER. Para os ER que apresentavam mais de um item, foi realizado uma análise para cada item, apesar de pertencerem ao mesmo exercício.

Como nosso objetivo era identificar as mudanças de domínios e de registro de representação semiótica apresentadas nas resoluções dos ER, dividimos nossa análise em duas partes:

i) Identificamos as mudanças de domínios propiciadas pela resolução dos ER.

ii) Identificamos os tratamentos e as conversões realizados nos ER.

Em relação ao item i) as mudanças de domínios, procuramos identificar nos ER quais mudanças de domínios matemáticos foram realizadas pelos autores ao resolvê-los. Durante a análise, identificamos que alguns ER não realizam mudanças de domínios, isso aconteceu quando os autores terminavam a resolução de um ER apresentando somente a expressão analítica da solução, sem realizar qualquer operação com ela, consideramos que não houve mudança de domínio, fato que está representado na primeira linha da Tabela 2.

Para o estudo das EDOs é necessária a compreensão de outros conceitos que estão diretamente ligados a elas, como, por exemplo, a definição de função homogênea. Nos ER sobre função homogênea não aparece a EDO, por este motivo consideramos que a resolução do ER pertence ao domínio das funções (Figura 25).

Figura 25: Exercícios que não apresentam mudança de domínio

EXEMPLO 1

(a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2$$
$$= t^2x^2 - 3t^2xy + 5t^2y^2$$
$$= t^2[x^2 - 3xy + 5y^2] = t^2f(x, y)$$

A função é homogênea de grau dois.

(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{t^2x^2 + t^2y^2} = t^{2/3}\sqrt[3]{x^2 + y^2} = t^{2/3}f(x, y)$$

A função é homogênea de grau 2/3.

Fonte: Zill; Cullen (2012, p. 53)

A próxima tabela mostra a quantidade de ER que não apresentam mudança de domínio.

Tabela 2: ER que não apresentam mudanças de domínios

Domínio	**Livro 1**	**Livro 2**
Álgebra/Análise	7	33
Funções	1	9

Total/Total ER	8/29	42/57

Fonte: Exercícios revolvidos dos Livros 1 e 2

Entendemos que ocorre uma mudança do domínio da Álgebra/Análise para o domínio das funções, quando os autores resolvem algebricamente a EDO dada e depois utiliza-se da solução (função) para esboçar o gráfico das soluções, construir uma tabela ou para fazer alguma estimativa. Ressaltamos que, neste caso, a resolução da EDO é realizada no domínio da Álgebra/Análise, contudo, para utilizar a solução encontrada é preciso fazer uso das ferramentas do domínio das funções e consideramos importante diferenciar este caso do anterior, que termina com a obtenção da solução analítica.

A respeito da mudança do domínio não-matemático para o da Álgebra/Análise, ela ocorre quando na apresentação do ER está presente elementos de outras áreas do conhecimento, como da Física ou da Química.

Deste modo, em nossas análises, identificamos alguns ER que realizavam duas mudanças de domínio, por exemplo, uma do domínio não matemático para o da Álgebra/Análise e depois uma para o domínio das funções. Neste caso, o ER foi contabilizado duas vezes.

Tabela 3: Mudanças de domínios apresentadas nos ER

Mudanças de domínio	Livro 1	Livro 2
Álgebra/Análise – Funções	14	14
Álgebra/Análise - Geometria Analítica	5	0
Álgebra/Análise – Numérico	3	0
Não matemático – Álgebra/Análise	5	10
Total/Total ER	27/29	24/57

Fonte: Exercícios revolvidos dos Livros 1 e 2

Observando os dados da Tabela 2 e da Tabela 3, podemos verificar que ambos os livros priorizam a resolução algébrica das EDOs, em detrimento das demais abordagens, que quase não são exploradas pelos autores. Acreditamos que isso influencia diretamente no ensino das EDOs nas universidades, o que vem ao encontro do estudo realizado por Oliveira e Igliori (2013), que verificaram que tal ensino concentra-se em resoluções analíticas a partir de manipulações algébricas.

Os autores do Livro 1 utilizam o campo de vetores para introduzir o conceito de EDOs, mas deixam de lado esta abordagem ao longo do livro. O Livro 2 não apresenta este tipo de resolução nos capítulos analisados. Para Artigue (1990), o uso de uma abordagem qualitativa, sem deixar de lado as demais, proporciona de maneira inevitável uma interação entre o domínio da Álgebra/Análise e o da geometria analítica[29], pois esta abordagem consiste em uma ida e volta entre a equação e o gráfico.

Para abordar a resolução numérica das EDOs, os autores do Livro 1 utilizam-se do Método de Euler e apresentam três exemplos, dos quais somente o primeiro mostra os cálculos para determinar a reta tangente, os demais apresentam diretamente uma tabela com os cálculos já efetuados computacionalmente (Figura 26), sem uma explicação de como obter estes dados utilizando um software.

Figura 26: Exemplo de resolução numérica apresentada no Livro 1

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y, \qquad y(0) = 1. \tag{15}$$

A solução geral desta equação diferencial foi encontrada no Exemplo 2 da Seção 2.1, e a solução do problema de valor inicial (15) é

$$y = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{11}{4}e^{2t}. \tag{16}$$

Use o método de Euler com diversos tamanhos de passos para encontrar valores aproximados da solução no intervalo $0 \le t \le 5$. Compare os resultados com os valores correspondentes da solução (16).

Usando os mesmos tamanhos de passos que no Exemplo 2, obtemos os resultados apresentados na Tabela 2.7.3.

TABELA 2.7.3 Comparação entre a Solução Exata e os Resultados do Método de Euler para Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 4 - t + 2y$, $y(0) = 1$

t	Exata	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,0	19,06990	15,77728	17,25062	18,10997	18,67278
2,0	149,3949	104,6784	123,7130	135,5440	143,5835
3,0	1109,179	652,5349	837,0745	959,2580	1045,395
4,0	8197,884	4042,122	5633,351	6755,175	7575,577
5,0	60573,53	25026,95	37897,43	47555,35	54881,32

Os dados na Tabela 2.7.3 confirmam, novamente, nossa expectativa de que para um valor dado de t a precisão aumenta quando o tamanho do passo é reduzido. Por exemplo, para $t = 1$ o erro percentual diminui de 17,3% quando $h = 0{,}1$ para 2,1% quando $h = 0{,}01$. Entretanto, o erro aumenta razoavelmente rápido quando t aumenta para um h fixo. Mesmo para $h = 0{,}01$, o erro em $t = 5$ é de 9,4% e é muito maior para tamanhos de passos maiores. É claro que a precisão necessária depende dos objetivos, mas os erros na Tabela 2.7.3 são grandes demais para a maioria das aplicações em ciências ou engenharia. Para melhorar a situação, poder-se-ia tentar passos menores ou restringir os cálculos a um intervalo bem curto contendo o ponto inicial. Apesar disso, é claro que o método de Euler é muito menos eficaz neste exemplo do que no Exemplo 2.

Fonte: Boyce; Diprima, (2013, p. 82)

Ambos os livros dedicam um capítulo à parte para a abordagem numérica das EDOs, contudo, na introdução das EDOs, esta abordagem é pouco utilizada. O Livro 2 apresenta o método iterativo de Picard, que é considerado um método numérico. Porém, observando a resolução do ER, na Figura 27, podemos verificar que o método utiliza integrais para calcular as aproximações requeridas, por este motivo, não consideramos que houve uma mudança do domínio da Álgebra/Análise para o domínio numérico. A mesma análise foi realizada no Livro 1.

[29] Artigue considera os domínios da Álgebra/Análise e da Geometria Analítica como os domínios algébrico e gráfico, respectivamente.

Figura 27: Resolução utilizando o método de Picard

EXEMPLO 1

Considere o problema

$$y' = y - 1, \quad y(0) = 2.$$

Use o método de Picard para encontrar as aproximações y_1, y_2, y_3, y_4.

Solução Se identificarmos $x_0 = 0$, $y_0(x) = 2$ e $f(t, y_{n-1}(t)) = y_{n-1}(t) - 1$, a equação (3) torna-se

$$y_n(x) = 2 + \int_0^x (y_{n-1}(t) - 1)\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Integrando esta última expressão, temos

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x 1 \times dt = 2 + x$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x (1 + t)\,dt = 2 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt$$

$$= 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3}$$

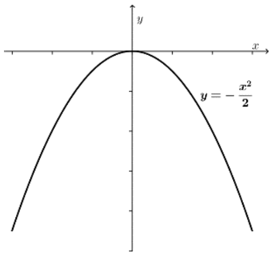
$$y_4(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2 \times 3}\right)dt$$

$$= 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 4}. \quad \blacksquare$$

Fonte: Zill; Cullen (2012, p. 89)

A respeito dos registros de representações semióticas, utilizaremos os registros apresentados no Quadro 9.

Quadro 9: Sistemas de registros de representação semiótica para as EDOs

Tipo de Registro	**Representação**
Registro simbólico	Representação simbólica-algébrica. $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$ (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p.2)
	Representação simbólica numérica tabular t — Euler com $h = 0{,}2$ 0,0 — 1,00000 0,2 — 1,50000 (Adaptado de BOYCE, DIPRIMA, 2013, p. 80)
Registro gráfico	Representação gráfica.  (ZILL; CULLEN, 2012, p. 82)
Registro da língua natural de uso especializado	Representação da língua natural de uso especializado. Se uma função f satisfaz $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para algum número real n, então dizemos que f é uma função homogênea de grau n (ZILL, CULLEN, 2012, p.53).

Fonte: Adaptado de Karrer (2006, p. 64)

Os registros que são mais presentes em ambos os livros são o simbólico-algébrico, da língua natural especializada, e o gráfico, tendo prioridade o primeiro. Para identificar a quantidade de tratamentos presentes nos livros, consideramos os RE que utilizam somente o tratamento, conforme Figura 28.

Figura 28: Exercício resolvido que utiliza apenas tratamento

EXEMPLO 1

Resolva **(a)** $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ e **(b)** $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$.

Solução Como ilustrado acima, ambas as equações podem ser resolvidas por integração.

(a) $y = \int (1 + e^{2x})\,dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(b) $y = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$

Fonte: Zill; Cullen (2012, p. 44)

Dessa forma, os ER que realizam um tratamento antes ou depois de uma conversão não foram considerados neste item. A Tabela 4 apresenta a quantidade de tratamentos identificados.

Tabela 4: Tratamentos presentes nos Livros

Tratamentos	Livro 1	Livro 2
Registro simbólico-algébrico	09	42
Total / Total ER	09/29	42/57

Fonte: Exercícios resolvidos dos Livros 1 e 2

Observando a Tabela 4, podemos verificar que ambos os livros utilizam apenas o tratamento no registro simbólico-algébrico, acreditamos que isso ocorre porque, segundo os próprios autores, o objetivo é apresentar as técnicas algébricas para a resolução das EDOs. Por ter este objetivo, a maior parte dos ER são do tipo: resolva a EDO, o que impossibilita o tratamento em outros registros de representação, como, por exemplo, o registro gráfico.

Em relação às conversões, identificamos que um ER pode apresentar mais de uma conversão, por exemplo, um ER apresentado na língua natural de uso especializado, pode realizar uma conversão para o registro simbólico-algébrico e, depois, uma nova conversão para o registro gráfico. Nesses casos, contamos duas conversões para um mesmo exercício. A Tabela 5 ilustra as conversões utilizadas nos ER.

Tabela 5: Conversões presentes nos Livros

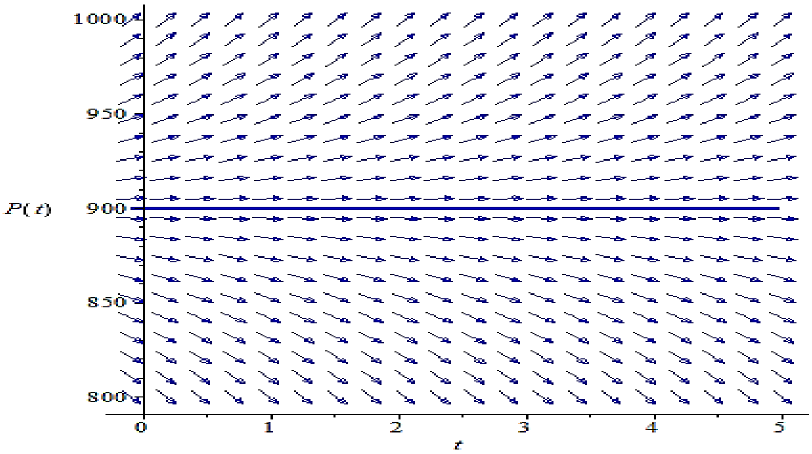
Conversão	Livro 1	Livro 2
Língua natural de uso especializado → simbólico-algébrico	7	10
Simbólico-algébrico → língua natural de uso especializado	2	2
Simbólico-algébrico → gráfico	21	20
Gráfico → língua natural de uso especializado	1	0
Simbólico-numérico (tabela)→ gráfico	1	0

Simbólico-numérico (tabela) → língua natural de uso especializado	3	0
Total de conversão/Total ER	35/29	32/57

Fonte: Exercícios resolvidos dos Livros 1 e 2

Podemos observar que os dois livros apresentam várias conversões nas resoluções dos ER, principalmente do registro simbólico-algébrico para o gráfico. No entanto, são poucas as situações em que o registro gráfico é requerido para obter informações, como, por exemplo, utilizar o campo de vetores da equação $dp/dt = 0,5p - 450$ (Figura 29), para determinar para quais valores p a taxa de variação dp/dt é positiva (negativa) o que implica as soluções serem crescentes (decrescentes).

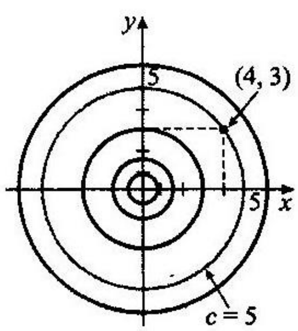
Figura 29: Registro gráfico utilizado para obter informações



Fonte: Adaptado de Boyce; Diprima (2013, p. 4)

A maior parte dos ER, em ambos os livros, utilizam o registro gráfico somente como uma forma de ilustrar a solução obtida, no fim da resolução do exercício. Como, por exemplo, o registro gráfico da Figura 30 que ilustra a solução do problema de valor inicial $dp/dt = -x/y, \quad y(4) = 3.$

Figura 30: Registro gráfico utilizado para ilustrar soluções



Fonte: Zill; Cullen (2012, p. 46)

O uso do registro gráfico com ideograma, que figura nos livros analisados, também aparece presente no ensino das EDOs. Gordillo (2006) verificou que tanto no ensino secundário[30] como no universitário, o registro gráfico é frequentemente utilizado como um ideograma e não possui praticamente nenhum papel na atividade matemática, o que também foi observado por Artigue (1990), que constatou que, no processo de ensino das EDOs, o gráfico é requerido para a representação e não para fornecer elementos de análise.

Diante do exposto, podemos observar, de modo geral, que ambos os livros priorizam uma abordagem algébrica das EDOs, fornecendo vários elementos para o estudo de técnicas de resolução, enquanto as abordagens qualitativa e numérica são menosprezadas ou até mesmo não apresentadas. Vários autores (ARTIGUE (1990), ARSLAN; LABORDE (2003), GORDILLO, (2006), JAVARONI, (2007), entre outros) consideram importante a utilização das diferentes formas de resolução das EDOs para melhorar seu ensino e aprendizagem, uma vez que cada uma delas trabalha com diferentes registros de representação semiótica e domínios matemáticos.

2.4.3 Os modelos matemáticos nos livros didáticos de EDO

Uma das justificativas para a aprendizagem das EDOs nos livros didáticos são suas aplicações nas diferentes áreas de conhecimento. Boyce e Diprima (2013), conforme exposto anteriormente, iniciam sua obra (Livro 1) com uma seção intitulada: *Alguns modelos matemáticos básicos e campos de direção*, na qual abordam alguns modelos matemáticos com o intuito de ressaltar a importância das EDOs para o estudo de situações reais. Além disso, uma outra seção chamada Modelagem com equações de primeira ordem dedica-se ao estudo de modelos matemáticos.

Do mesmo modo, Zill e Cullen (2012) fazem, na primeira página do seu livro (Livro 2), a seguinte pergunta: “Por que você, um futuro cientista ou engenheiro, precisa estudar este assunto?” (p.1). A resposta, segundo os autores, está no fato de que as EDOs são a base matemática para o estudo de fenômenos em diversas áreas da ciência e engenharia. Os autores tratam os modelos matemáticos em duas seções: na primeira, apresentam alguns fenômenos e a EDO que modela a situação, sem revolver a equação; na segunda, utilizam esses modelos pré-estabelecidos para analisar diversas situações propostas.

Ambos os livros apresentam os modelos matemáticos como forma de motivar o leitor ao estudo das EDOs ressaltando sua importância em diferentes áreas do conhecimento. Boyce e Diprima (2013, p. 5), por exemplo, expõem alguns passos para que o aluno construa um modelo matemático, tais como:

[30] Na França, o ensino das EDOs inicia-se no Terminal S, que equivale ao 3º ano do Ensino Médio no Brasil.

1. Identificar as variáveis independente e dependente, e atribuir letras para representá-las.
2. Escolher as unidades de medida de cada variável.
3. Usar um princípio básico ou lei que rege o problema em investigação.
4. Expressar o princípio ou lei do passo 3 em função das variáveis escolhidas no passo 1.
5. Certificar-se de que cada parcela em sua equação está nas mesmas medidas físicas.

As diretrizes sugeridas por Zill e Cullen (2012) são semelhantes aos passos apresentados no Livro 1. Se observarmos esses passos, podemos reconhecer algumas semelhanças com as etapas propostas por Bassanezi (2011), como a seleção de variáveis, a aplicação de leis que regem o fenômeno, entre outros.

Contudo, nos questionamos sobre como os livros apresentam esses modelos aos alunos. Assim, nesta subseção, nossas reflexões são em relação à formulação do modelo, à resolução apresentada pelos autores e às inferências em relação ao problema inicial. Nossas inquietações estão voltadas em verificar se essas ações (formulação e resoluções) direcionam os alunos a um problema de Modelagem Matemática, conforme considerado nesta tese, criando situações que favorecessem as formulações de hipóteses e as diferentes formas resoluções.

O Livro 1 introduz as EDOs utilizando de um modelo matemático, para um objeto em queda, deduzido a partir de leis físicas e interpretado com o auxílio do campo de vetores, o que se aproxima de um problema de Modelagem Matemática, pois, embora a situação não seja real, ela é possível de acontecer e o modelo é obtido com a interpretação e a análise do fenômeno em estudo. Porém, essa forma de dedução do modelo desaparece na seção: Modelagem com equações de primeira ordem, em que interpretamos que esse assunto seria melhor explorado. Na resolução dos exemplos desta seção, a maioria dos problemas de Modelagem apresenta de forma direta a EDO que modela o fenômeno, sem muita explicação para sua obtenção. Todas as EDOs obtidas são resolvidas por métodos algébricos, sem a utilização de outras abordagens de resolução.

O Livro 2, de forma similar, apresenta em uma seção vários fenômenos e a EDO que modela tal situação, conforme ilustra o exemplo abaixo:

Exemplo 5 (ZILL; CULLEN, 2012, p.28): Parece plausível esperar que a taxa de crescimento de uma população P seja proporcional à população presente naquele instante. *Grosso modo*, quanto maior for a população presente, maior ela será no futuro. Logo, o modelo para o crescimento populacional é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. Como esperamos que a população cresça, devemos ter $dP/dt > 0$, e, assim, $k > 0$.

O exemplo acima, assim como os demais desta seção, são situações genéricas e não são resolvidos. Após apresentar as técnicas algébricas de resolução para as EDOs, esses modelos matemáticos são retomados em outra seção, para resolver as situações propostas.

Para tanto, analisamos um exemplo do Livro 2, para ilustrar como é resolvido os problemas intitulados pelos livros de “Modelagem Matemática”, os demais exemplos seguem o mesmo delineamento, que também pode ser estendido aos modelos resolvidos pelo Livro 1 (exceto o exemplo para a introdução das EDO).

Antes de apresentar o exemplo, o livro retoma o modelo matemático para a Lei do Resfriamento de Newton que foi apresentada na mesma seção dos modelos matemáticos que retiramos o Exemplo 5.

A Lei do Resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante T_m do meio ambiente, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \qquad (10)$$

em que k é uma constante de proporcionalidade (ZILL; CULLEN, 2012, p.107)

E, em seguida, apresenta o próximo exemplo.

Exemplo 6 (ZILL; CULLEN, 2012, pg. 107): Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200°F. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 70 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for exatamente 70°F?

Solução proposta pelos autores: Em (10), fazemos a identificação de $T_m = 70.$ Devemos, então, resolver o problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70),\ T(0) = 300, \qquad (11)$$

e determinar o valor de k para que $T(3) = 200.$.

A equação (11) é linear e separável. Separando as variáveis, temos:

$$\frac{dT}{T-70} = kdt$$
$$\ln|T-70| = kt + c_1$$
$$T - 70 = c_2 e^{kt}$$
$$T = 70 + c_2 e^{kt}.$$

Quando $t = 0$, $T = 300$; assim $300 = 70 + c_2$ e $c_2 = 230$. Logo, $T = 70 + 230e^{kt}$.

De $T(3) = 200$, encontramos

$$e^{3k} = \frac{13}{23} \text{ ou } k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0{,}19018.$$

Então,

$$T(t) = 70 + 230e^{-0{,}19018t}. \qquad (12)$$

Analisando a resolução da situação proposta no Exemplo 6, podemos observar que os autores simplesmente substituem os dados do problema na fórmula obtida em (10) e, na sequência, aplicam uma técnica de resolução algébrica. Embora eles ressaltem a importância da identificação das variáveis e da formulação de hipótese na resolução deste tipo de situação, essas diretrizes não são seguidas na resolução proposta.

Segundo Bean (2012), a adoção de premissas e a formulação de pressupostos, que fazem parte da fase de abstração definida por Bassanezi (2011), são o que distinguem a Modelagem Matemática de outras atividades humanas. As premissas são as ideias ou as concepções globais que conduzem à construção do modelo e a formulação de pressupostos são as formas como os aspectos que são considerados na Modelagem serão conceituados.

Para o autor, ao se fazer modelagem é importante propiciar ao aluno um ambiente ou cenário no qual ele possa elaborar conceituações criativas e, desta forma, criar seus próprios modelos frente aos problemas que abrem portas para a adoção de premissas e as formulações de pressupostos.

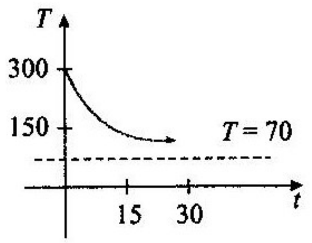
A resolução do exemplo analisado não fornece elementos para a adoção de premissas e as formulações de pressupostos, visto que nenhuma análise é feita de forma a verificar a possibilidade de aplicar a equação (10) à situação analisada, as variáveis não são identificadas e nenhuma hipótese é apresentada, por exemplo, a temperatura do bolo continua a decrescer com o passar do tempo? Existe um valor limite para o decrescimento da temperatura do bolo? Em caso afirmativo, qual seria esse valor?

Outro fator que não propicia a formulação de hipótese é a quantidade de dados fornecidos pelo enunciado do Exemplo 6 (somente dois valores da temperatura em relação ao tempo), desta forma, o aluno pode pensar que a variação da temperatura em relação ao tempo é a mesma para qualquer intervalo de tempo, pois ele não possui dados suficientes para uma melhor interpretação do fenômeno. Com a análise dos dados fornecidos não é possível verificar se o comportamento da temperatura em relação ao tempo é exponencial, isso só é verificado quando a fórmula (10) é aplicada. Se os autores fornecessem mais valores para a temperatura do bolo, o comportamento exponencial poderia ser verificado, por exemplo, utilizando a representação gráfica dos pontos.

Além disso, para responder à pergunta: Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 70 graus? Os autores dão a seguinte explicação:

> Notamos que (12)[31] não fornece nenhuma solução finita para $T(t)=70,$ pois $\lim_{t\to\infty} T(t)=70.$ Intuitivamente, esperamos que o bolo atinja a temperatura de seu meio após um longo período de tempo. O que é um longo período de tempo? Claro que não devemos ficar perturbados com o fato de o modelo (11) não ser fiel à nossa intuição física. As partes (a) e (b) da Figura 31 mostram claramente que o bolo está se aproximadamente em sua temperatura ambiente de 70°F em cerca de meia hora (ZILL; CULLEN, 2012, p. 108).

Figura 31: Variação da temperatura do bolo



(a)

T(t)	t(minutos)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

(b)

Fonte: Zill; Cullen (2012, p. 108)

Uma questão importante que é desconsiderada na interpretação do modelo é que “quanto maior for o valor de $|T-T_m|$ mais rápida será a variação de $T(t)$” (BASSANEZI, 1988, p. 43). Dessa forma, ao calcular o valor da constante k utilizando somente o valor da temperatura no tempo de três minutos, temos que o valor obtido leva em conta a variação nos primeiros minutos em que o bolo foi retirado do forno, na qual temos os maiores valores para $|T-T_m|,$ o que fornece uma variação da temperatura maior em todos os intervalos de tempo calculados utilizando tal constante, diferentemente do que teríamos na situação real. Além disso, o cálculo da constante de proporcionalidade $k,$ que é uma constante determinada experimentalmente, é realizado levando em consideração outros favores, como, por exemplo, a área de contato do recipiente do bolo com o seu meio e isso não é mencionado pelos autores.

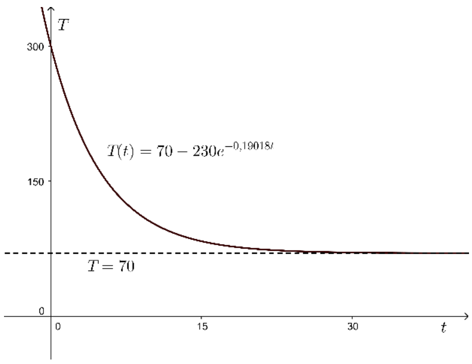
[31] A numeração das equações e as figuras foram adaptadas às numerações da tese.

Na resolução do Exemplo 6, nenhuma menção é feita sobre a validação do modelo, a solução determinada em (12) é considerada satisfatória sem nenhuma justificativa. Segundo Bassanezi (2011), a validação do modelo matemático é uma fase importante na Modelagem Matemática, pois é nela que se verifica se o modelo obtido representa a situação analisada.

Outro fato que podemos observar é a utilização do registro gráfico na letra a) da Figura 31, assim como verificado na subseção 2.4.2, este registro é utilizado somente como uma forma de ilustrar a afirmação obtida analiticamente ($\lim_{t\to\infty} T(t) = 70$), sem fornecer nenhuma informação adicional sobre o fenômeno. Além disso, a representação gráfica de $T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}$ ilustrada na figura, não condiz com a conclusão dos autores, ao afirmarem que a temperatura do bolo atinge a temperatura do meio em aproximadamente trinta minutos, pois o gráfico de $T(t)$ não está próximo de 70°F quando t está próximo de trinta minutos.

Segundo Bassanezi (2011) e Javaroni (2007), o uso do registro gráfico auxilia na compreensão do fenômeno analisado, tanto para a validação do modelo quanto para a interpretação dos resultados obtidos. A Figura 32 fornece uma representação gráfica mais adequada para a função T, utilizando-se da mesma expressão obtida em (12), nela é possível verificar, graficamente, que $T(t) \approx 70$ quando $t \approx 30$.

Figura 32: Gráfico da função $T(t)$



Fonte: Elaborado pela autora

É claro que, intuitivamente, sabemos que o bolo demora um certo tempo para atingir a temperatura de seu meio. Contudo, matematicamente, este tempo jamais é alcançado, uma vez que $T(t) = 70$ conduz a uma sentença não verdadeira, pois não existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaça a equação (13):

$$\begin{aligned} T(t) &= 70 \\ T(t) &= 70 \\ 70 + 230e^{-0,19018t} &= 70 \\ e^{-0,19018t} &= 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Graficamente, essa situação pode ser verificada pela assíntota horizontal em $T = 70$, e que, em ambos os casos, a temperatura do bolo jamais atinge a temperatura do seu meio, porém, na Física, essa situação é resolvida considerando o tempo necessário para que a temperatura atinja 99% da temperatura ambiente. Com essa informação, é possível estimar que a temperatura do bolo demora aproximadamente trinta minutos e vinte e sete segundos para chegar a 70°F.

Diante do exposto e considerando que, nesta pesquisa, uma situação é um problema, na medida que, o aluno não possui esquemas *a priori* para estudá-la, inferimos que os problemas de MM apresentados nos livros didáticos analisados se aproximam de uma resolução de exercícios com referência na realidade, na qual basta que o aluno retire os dados fornecidos no problema e substitua-os em uma fórmula pronta, no caso, a EDO que modela o fenômeno. Os problemas não são resolvidos pelos autores utilizando as diretrizes que eles mesmos estabelecem como necessárias para a Modelagem.

Segundo Robert (1997, *apud* SANTOS; CURI, 2011), quando a solução de um problema está associada ao uso direto de uma ferramenta, como a aplicação de fórmulas, por exemplo, a noção em jogo está explícita, o que leva a uma aprendizagem técnica, na qual a atividade cognitiva requerida por parte do aluno é bem menor, pois não exige adaptações ou mobilizações de conteúdo.

Dessa forma, os problemas apresentados nos livros didáticos não oferecem aos estudantes a possibilidade de elaborarem hipóteses e de interpretarem a situação para, na sequência, analisarem qual seria a EDO que poderia representar o fenômeno. Ou seja, os problemas apresentados não possuem as características de investigação de um problema no contexto da Modelagem Matemática, pois a EDO é fornecida pelos autores e não obtida pela análise do fenômeno.

Ressaltamos que os modelos matemáticos apresentados nos livros, por exemplo, os modelos de: variação de temperatura, variação da corrente elétrica em um circuito elétrico, crescimento populacional, entre outros, são considerados, na literatura, como modelos matemáticos clássicos que utilizam EDO. Dessa forma, seu ensino é relevante e, embora o desenvolvimento fornecido pelos livros conduza a uma resolução de exercícios, todos os modelos são possíveis de serem adaptados, pelos professores, de forma a apresentarem as características próprias de um problema no contexto da Modelagem Matemática.

Diante dessa preocupação, buscamos na literatura alguns estudos já realizados sobre as EDO no âmbito da Educação Matemática, que serão apresentados na próxima seção.

2.5 O ensino e a aprendizagem da EDO

O ensino e a aprendizagem das EDOs têm sido tema de diversas pesquisas no âmbito da Educação Matemática (BORSOI; ALMEIDA (2004), ARSLAN (2005), GORDILLO (2006), JAVARONI (2007), FEICCHIO (2011), OLIVEIRA; IGLIORI (2013)). Essas pesquisas, de modo geral, apresentam possibilidades para uso de estratégias e de teorias que possam auxiliar, de forma positiva, o processo de ensino e de aprendizagem das EDO.

Oliveira e Igliori (2013) fizeram um levantamento bibliográfico, no campo da Educação Matemática, das produções que versavam sobre o ensino e a aprendizagem das EDO entre os anos de 2000 a 2011. O estudo levou em consideração as possibilidades e as alternativas para esse ensino de forma a amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem desse conceito.

A partir dos trabalhos analisados, as autoras concluíram que o ensino das EDOs se concentra na resolução algébrica, focando-se na aplicação de técnicas de resolução, o que pode dificultar a compreensão do conceito, não permitindo sua aplicação e interpretação em problemas contextualizados. Além disso, no processo de resolução algébrica das EDOs, os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem, normalmente relacionadas à Matemática Básica e aos conceitos de derivada e integral.

Segundo Oliveira e Igliori (2013), a maioria das pesquisas aponta um estudo qualitativo das EDOs, com exercícios contextualizados, e oportunizando um equilíbrio entre as abordagens algébrica, numérica e gráfica, como forma de minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão desse conceito. As autoras ressaltam que a Modelagem Matemática aliada à utilização de recursos computacionais foi a estratégia de ensino desenvolvida na maioria das investigações, apresentando resultados positivos nas pesquisas realizadas.

Dullius, Veit e Araujo (2013) investigaram as dificuldades dos estudantes na aprendizagem das EDOs. A pesquisa foi realizada em três etapas: a primeira, constou de uma revisão bibliográfica; a segunda, de uma entrevista com professores experientes no ensino das EDOs; e a última, do acompanhamento de uma turma de alunos que cursavam a disciplina de EDOs. Em uma síntese da primeira etapa, as autoras destacam que todas as pesquisas analisadas relatam que os estudos sobre o ensino e a aprendizagem das EDOs carecem de investigações e que as mudanças na forma de abordagem desse conteúdo são necessárias, uma vez que seu ensino se concentra em técnicas algébricas de resolução. As pesquisas destacam as ferramentas tecnológicas como uma opção que pode auxiliar a introdução de outras formas de abordagens das EDOs.

A abordagem algébrica das EDOs pode levar a uma aprendizagem mecânica, o que, consequentemente, gera um desestímulo, por parte dos alunos, ao seu estudo. Além disso, o fato de as aulas serem baseadas em técnicas para encontrar soluções analíticas, faz com que os alunos priorizem este processo e apresentem resistência em aceitar um gráfico como solução de uma EDO (DULLIUS; VEIT; ARAUJO, 2013).

Em relação à segunda parte, foi realizada uma entrevista semiestruturada com quatro professores (dois de Matemática e dois de Física) de uma universidade do estado do Rio Grande do Sul. Todos os professores entrevistados afirmaram que os alunos não possuem conhecimentos básicos para o estudo das EDOs, como noções de derivada, de integral, de trigonometria, entre outros. De forma geral, os professores apontam que os alunos, desde o ensino básico, aprendem de forma mecânica, não compreendendo o significado do que estão fazendo e, desta forma, logo esquecem o que foi ensinado. Portanto, os alunos ingressam na universidade sem o conhecimento básico para acompanharem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e, consequentemente, a disciplina de EDO (DULLIUS; VEIT; ARAUJO, 2013).

A outra parte da pesquisa consta do acompanhamento de uma turma da disciplina de EDO de um curso de Licenciatura de Ciências Exatas. As aulas, nesta disciplina, tinham um delineamento tradicional, ou seja, exposição do conteúdo, apresentação das técnicas algébricas de resoluções, seguidas de alguns exemplos e aplicações de exercícios, sem a utilização do computador. Os dados foram obtidos a partir de um diário de campo organizado por uma das autoras, além de um questionário aplicado com os alunos. As análises apontaram que os alunos possuem dificuldade em Matemática Básica, em aceitar uma função como solução de uma EDO, em aceitar a abordagem qualitativa e, ainda, possuem dificuldades em interpretação de gráficos. Além disso, os alunos acreditam que a expressão analítica de uma função é mais importante e útil que seu gráfico (DULLIUS; VEIT; ARAUJO, 2013).

Dullius, Veit e Araujo (2013) destacam que algumas dificuldades em relação à aprendizagem das EDOs observadas nos alunos também foram relatadas pelos professores entrevistados e nas pesquisas analisadas, como, por exemplo, dificuldades em relação à Matemática Básica. Assim, as autoras indicam a necessidade de atualização da metodologia utilizada no ensino das EDOs, para tanto, como sugestão, indicam a criação de módulos que possam auxiliar os alunos a aprenderem os pré-requisitos necessários para a compreensão do conceito de EDO e o uso de uma metodologia que utilize outros tipos de abordagem das EDOs.

Arslan (2005) elaborou e aplicou uma sequência didática baseada nos pressupostos da engenharia didática de Artigue, com alunos do *Terminale S*[32] do colégio (lycée) Pablo Néruda, em Saint Martin d'Nères, na França. O objetivo principal era verificar a viabilidade de introduzir o conceito de EDO a partir da abordagem qualitativa com esses estudantes, antes do ensino da abordagem algébrica. Além disso, o autor investigou outra hipótese, a de que a abordagem algébrica poderia ser um entrave para o ensino da abordagem qualitativa.

Como referencial teórico, Arslan (2005) utilizou a noção de registros de representação semiótica de Duval e o modelo cK¢ de Balacheff. O autor realizou uma análise dos programas e dos manuais utilizados no ensino secundário da França, em relação ao conteúdo de estudo. Em relação aos programas, foi verificado que, antes da reformulação dos currículos francês, existia forte influência da resolução algébrica. Após a reformulação, os programas começam a introduzir a abordagem qualitativa e numérica, sem deixar de lado a abordagem algébrica. A mesma tendência foi encontrada nos manuais, antes e após a reformulação.

A experimentação foi realizada em três seções, nas quais os alunos trabalharam individualmente nas duas primeiras e em duplas na última. Como a turma era composta por alunos repetentes e não repetentes, o autor pôde validar suas hipóteses, pois os alunos repetentes, que possuíam alguma técnica algébrica mesmo sem uma base sólida, recorriam à resolução algébrica, obtendo, na maioria das vezes, respostas equivocadas, apresentando dificuldades em fazer uma análise qualitativa das EDOs.

Porém, os alunos iniciantes favoreciam o emprego da abordagem qualitativa, apresentando resultados melhores que os dos alunos dependentes. Nas últimas atividades, a estratégia algébrica quase desapareceu, o que levou o autor a concluir que é viável a introdução das EDO por meio da abordagem qualitativa para alunos do Terminale S.

Gordillo (2006), em sua tese, estudou as dificuldades dos alunos e o papel de um software de geometria dinâmica, Cabri Géomètre, no estudo de EDOs, em particular, durante a articulação dos registros gráfico e simbólico. O público alvo eram estudantes do CAPES (Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire) que certifica professores, na França, para a prática em faculdades e em escolas secundárias.

O autor organizou uma engenharia didática composta por um conjunto de situações a serem realizadas pelos alunos em dois ambientes diferentes: papel/lápis e de geometria

[32] Equivalente ao 3º ano do ensino médio no Brasil.

dinâmica. As mudanças de domínio de Douady e os registros de representação semiótica de Duval foram os referenciais teóricos utilizados para a composição e a análise da sequência.

Dos resultados obtidos, o autor concluiu que os alunos do CAPES, antes da experimentação, possuíam conhecimentos gerais sobre as EDOs, mas não conseguiam estabelecer espontaneamente ligações entre os conceitos que envolvem as EDOs, sendo a maioria incapaz de estabelecer ligações entre os registros simbólico-algébrico e gráfico, o que é decorrência do ensino algebrizado das EDOs.

Analisando as duas experimentações, o autor pôde levantar algumas dificuldades dos alunos, tais como: dificuldade no tratamento gráfico de dados gráficos, como, por exemplo, traçar uma solução no campo de vetores; dificuldades em estabelecer ligações entre a reta tangente e a EDO e família de soluções e a EDO. Além disso, também concluiu que o uso do software permitiu uma melhor visualização do comportamento das soluções, auxiliando alguns alunos a perceberem o erro no traço a mão (lápis/papel), a visualizar as mudanças de comportamento das soluções e a relacionar um vetor tangente e a equação diferencial.

O autor ainda ressalta que a influência algébrica é muito forte, pois, uma vez que os alunos têm uma expressão simbólica, eles tentam se adaptar ao problema, mesmo quando não possuem o controle dos conhecimentos dos domínios em questão. Contudo, apesar das dificuldades, alguns estudantes conseguiram estabelecer ligações diretas das propriedades gráficas das famílias de curvas e a expressão simbólica da EDO, sem precisar do registro simbólico-algébrico das soluções.

Arslan e Laborde (2003) também investigaram o potencial da utilização do software de geometria dinâmica *Cabri* no estudo das EDO. A investigação foi realizada utilizando uma engenharia didática, com 40 estudantes do PLC1 do *Institut Universitaire de Formation des Maîtres* (IUFM), na França. Durante a experimentação, os alunos precisavam associar quatro vetores tangentes (vetor diretor da reta tangente ao um ponto de uma solução da EDO dada) a sua EDO, em uma lista contendo sete EDOs. Os vetores foram pré-desenhados no software pelos autores, e o aluno, ao mover o vetor sobre o plano, precisava analisar as modificações obtidas e comparar com a expressão algébrica das EDOs na lista.

Os autores concluíram que o ambiente computacional favoreceu, espontaneamente, a criação de argumento, por parte dos alunos, para que pudessem relacionar o comportamento gráfico do vetor tangente com a expressão algébrica da EDO. A interação entre os domínios da Geometria Analítica (campo de vetores) e o domínio algébrico (EDO) propiciada pelo software é, segundo os pesquisadores, indispensável para uma abordagem qualitativa das EDOs.

Nesta linha de trabalhos que utilizam software computacionais para auxiliar no ensino e na aprendizagem das EDOs, encontramos o trabalho de Javaroni (2007), que buscou responder à questão: "quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de tecnologia de informação e comunicação?" (p.22). Para isso, a autora propôs uma abordagem geométrica das equações e soluções de alguns modelos matemáticos clássicos que envolvem o conceito das EDOs.

A coleta de dados ocorreu durante um curso de extensão de trinta e seis horas, com os alunos do curso de Matemática de uma universidade pública do estado de São Paulo. Os nove participantes, divididos em três duplas e um trio, estudaram os modelos matemáticos, envolvendo os temas: objeto em queda, crescimento populacional de Malthus e de Verhulst e Lei do Resfriamento de Newton. Para a análise do comportamento de cada modelo e suas soluções, os alunos esboçaram o campo de vetores utilizando os softwares Excel, Winplot, Maple, um applet, além de lápis e papel.

Javaroni (2007) verificou que a abordagem geométrica foi a abordagem privilegiada pelos alunos, porém, a abordagem algébrica se fez bastante presente, sendo que, em várias situações, os alunos utilizaram ambas estratégias de forma combinada. A pesquisadora concluiu que os softwares possuem um papel importante no desenvolvimento das atividades propostas aos alunos, pois, em algumas situações, eles desempenharam a função de facilitador de contas, em outras, auxiliaram na ampliação da memória e na reorganização do pensamento dos alunos.

Borssoi e Almeida (2004) realizaram um estudo fundamentado nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, como estratégia de ensino e de aprendizagem, e na perspectiva da aprendizagem significativa de Ausubel e Novak com o intuito de "investigar os ambientes de modelagem matemática e a suas potencialidades no que diz respeito à aprendizagem significativa dos estudantes" (p. 92).

Participaram da pesquisa trinta e nove alunos que estavam matriculados na disciplina de Cálculo 2, do curso de Bacharelado em Química, da Universidade Estadual de Londrina. Durante as aulas, as autoras orientaram os alunos no desenvolvimento de algumas atividades de Modelagem Matemática relacionadas com a área da Química. Essas atividades tinham por objetivo introduzir os novos conceitos e reforçar os conceitos já apresentados. Os alunos divididos em grupos desenvolveram outras atividades de Modelagem Matemática, nas quais cada grupo era responsável pela escolha e pela resolução de um problema, o objetivo dessas atividades eram propiciar a oportunidade de um desenvolvimento completo do processo de Modelagem Matemática pelos alunos (BORSSOI; ALMEIRA, 2004).

Neste estudo, Borssoi e Almeida (2004) analisaram a atividade cujo tema era: a variação da concentração de Cloro no tratamento da água na Sanepar. A situação foi conduzida pelas pesquisadoras com contribuições dos alunos durante todo o processo. Durante o desenvolvimento da atividade foi possível que os alunos aplicassem e transferissem os conteúdos trabalhados em atividades anteriores na nova situação, além de permitir a introdução de novos conhecimentos.

Segundo as autoras, o ambiente de Modelagem Matemática estimula o aluno a uma participação mais ativa, na qual ele se sente responsável pela própria aprendizagem. Além disso, este ambiente permitiu trabalhar vários conceitos matemáticos e extramatemáticos que proporcionam interações positivas para a aprendizagem. Por fim, as autoras afirmaram que a aproximação da aprendizagem significativa e da modelagem matemática favoreceu "o estabelecimento de uma educação menos impessoal, valorizando o processo de ensino e de aprendizagem no sentido da Educação Matemática, onde a educação do sujeito como um todo tem as contribuições da Matemática" (p. 119).

Fecchio (2011), em sua tese de doutorado, buscou investigar se as atividades interdisciplinares que utilizam a Modelagem Matemática propiciam a aprendizagem das equações diferenciais. Para responder a essa indagação, o autor utilizou a Modelagem Matemática, os conceitos de interdisciplinaridade, de competência e de habilidade e a teoria das Situações Didáticas.

A pesquisa, do tipo pesquisa-ação, foi realizada com doze alunos que cursavam a disciplinada de Cálculo 2 de um curso de Engenharia, na região do grande ABC. Inicialmente, o autor selecionou três atividades de Modelagem Matemática que foram desenvolvidas focalizando as etapas de Modelagem, definidas por Bassanezi, de modo a permitir o estabelecimento de relações com a teoria das equações diferenciais e permitindo momentos de reflexões e de devoluções que produzissem possíveis resultados positivos no processo de ensino e de aprendizagem desse conceito, além de promover a aquisição de competências e de habilidades que favorecessem a aplicação dos conhecimentos em outras situações. As atividades foram realizadas em quinze etapas, divididas em quatro ciclos, nomeados segundo as etapas da Modelagem: experimentação, abstração, resolução e validação e adaptados pelo autor em uma espiral autorreflexiva de Kurt Lewin.

Na tese, Fecchio (2011) optou por apresentar a atividade Misturas de Soluções que tinha como objetivo instigar os participantes a obterem um modelo matemático, em uma situação adidática. A atividade gerada por um problema da realidade foi desenvolvida em um meio constituído por laboratórios de Química, de informática, por uma sala de aula, ambientes que suscitaram indagações e devoluções, todas fundamentadas na teoria das situações didáticas.

Os dados foram obtidos por meio de relatório das atividades, de apresentações orais e escritas das duplas e de prova individual. As análises desses dados permitiram ao autor afirmar que atividades de Modelagem Matemática, orientada pelas etapas propostas na tese, indicam uma nova possibilidade de motivação e de exploração do conceito de equações diferenciais contribuindo para um melhor entendimento desse conceito, por parte dos alunos, e permitindo que eles apliquem esse conhecimento em novas situações.

Dos trabalhados encontrados, todos auxiliaram de alguma forma na composição deste estudo. Contudo, os trabalhos de Arslan (2005), Gordillo (2006) e Javorani (2007) tiveram grande influência no direcionamento e principalmente na composição das atividades que aplicamos aos alunos.

As pesquisas apresentadas apontam que a aprendizagem das EDOs ocorre de forma mecânica, focalizada no emprego de técnicas algébricas de resolução e sugerem um emprego conjunto das abordagens algébricas, numéricas e qualitativas e o uso de recursos computacionais para auxiliar no emprego das duas últimas abordagens citadas.

Alguns trabalhos demonstram que a utilização de diferentes registros de representação contribui para uma aprendizagem mais satisfatória das EDOs. Em relação à Modelagem Matemática, os estudos apontam que ela pode ser utilizada como uma estratégia de ensino, pois auxilia na compreensão dos significados das EDO, contempla a interdisciplinaridade e a contextualização por meio da formulação e da resolução de problemas reais.

Pensando nisso, elaboramos e aplicamos uma sequência de situações fundamentadas na mudança de domínios e de registros de representação semiótica, envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, com o intuito de investigar o potencial, de tal sequência, na condução do processo de aprendizagem das EDOs, para estudantes dos cursos de Engenharias.

No próximo capítulo, apresentamos as atividades e os problemas de Modelagem Matemática que compuseram a sequência de situações e suas análises *a priori*.

3 Concepção da sequência de situações e análise *a priori*

Neste capítulo apresentamos o questionário inicial, as atividades da fase 1 e os problemas de Modelagem Matemática da fase 2 que compuseram a sequência de situações e suas respectivas análises *a priori*.

3.1 A sequência de situações

Nesta seção expomos uma visão geral da sequência de situações que foi aplicada aos alunos durante o curso de extensão.

Organização geral: a sequência de situações foi composta por um questionário inicial, nove atividades matemáticas (fase 1) e três problemas no contexto da Modelagem Matemática (fase 2). Esses elementos da sequência serão apresentados com seus respectivos objetivos no decorrer deste capítulo.

A sequência de situações: as situações propostas tinham como objetivo fazer com que os alunos trabalhassem o conceito de EDO em diferentes domínios matemáticos e utilizassem diferentes registros de representação semiótica. A análise dos livros didáticos e a leitura de trabalhos anteriores apontam que, no ensino e na aprendizagem das EDOs, é mais comum o emprego da abordagem algébrica. Pensando nisso, propusemos aos alunos questões que explorassem mais as informações qualitativas da EDO do que a solução algébrica pura, como a utilização do campo de vetores que possibilita a visualização gráfica do comportamento das soluções.

Não previmos um tempo limite para o desenvolvimento das atividades, haja vista que este foi mediado pela pesquisadora durante o curso. Porém, caso os alunos não conseguissem terminar uma atividade, ela poderia ser retomada no outro dia do curso.

Os momentos de discussão: os alunos trabalharam em grupos de três a cinco alunos. Escolhemos esta forma de trabalho para que eles pudessem, durante a resolução das atividades, discutir os seus resultados de forma a validar ou a refutar suas hipóteses. Além disso, um momento de discussão geral das respostas era propiciado pela pesquisadora no início de cada dia de curso.

Durante o curso, cada aluno recebia a(s) folha(s) contendo a(s) atividade(s), analisava em grupo e respondia individualmente. Ao final, a pesquisadora recolhia estas folhas e selecionava as diferentes respostas. No outro dia de curso, estas respostas eram expostas pela pesquisadora (sem dizer a quem pertencia) para os grupos. Os alunos analisavam as respostas e argumentavam sobre a validade de cada uma, se estavam corretas, incompletas e, a partir dessas considerações, chegavam a um consenso sobre a resposta mais adequada para a questão, que poderia ser uma das respostas dos próprios alunos ou uma nova resposta formulada por todos eles.

Essas respostas também eram discutidas pela pesquisadora, que fazia as observações e as correções necessárias de modo a auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos envolvidos.

Optamos por este tipo de discussão, no lugar de solicitarmos que cada grupo comentasse sua resposta, pelo fato de que, devido a experiências anteriores em sala de aula, percebemos que, em geral, um dos alunos comentava em nome dos demais e, em alguns casos, sua resposta não representava as ações e os pensamentos de todos os membros ou mesmo a ação negociada conjuntamente. Em algumas situações, os alunos apenas respondiam que resolveram de forma semelhante ao que um outro grupo expôs.

O papel do software: para auxiliar no desenvolvimento das atividades da sequência de situações, utilizamos os softwares Maple e GeoGebra. As funções de cada recurso computacional eram bem específicas, o software Maple foi utilizado para a construção do campo de vetores e o software GeoGebra, para traçar o gráfico de funções e/ou representar no plano cartesiano alguns pontos fornecidos pelas atividades. Desta forma, não foi realizada uma introdução detalhada sobre esses recursos, somente explicamos os comandos para realizar a função requerida.

Para utilizar o software Maple, cada aluno recebeu uma folha com os comandos necessários para plotarem o campo de vetores (Apêndice B). Ele deveria, então, copiar o comando, colar na tela do software e depois adaptar os dados à situação que precisava analisar. Caso tivesse alguma dificuldade para realizar essa adaptação, a pesquisadora o ajudava a solucionar o problema.

A pesquisadora explicou como plotar pontos e gráficos de funções no software GeoGebra, e, como alguns alunos já conheciam o software, das aulas de CDI I, sua utilização ocorreu sem problemas, pois um auxiliava o outro.

O papel da pesquisadora: durante a aplicação da sequência de situações, a pesquisadora tentou interferir o mínimo possível e somente quando fosse solicitada. Contudo, em alguns momentos, devido ao fato de que os alunos não conseguiam avançar no desenvolvimento de uma atividade, por algum tipo de dificuldade, a pesquisadora interviu com a intenção de fazer os alunos superarem tal dificuldade e continuarem o seu desenvolvimento.

A pesquisadora também auxiliou os estudantes com a manipulação dos softwares durante todo o curso. Além disso, ao final da discussão de cada atividade pelos grupos, a pesquisadora fazia um fechamento, fazendo as observações necessárias e retomando os conhecimentos que os alunos precisavam para o andamento das atividades.

3.2 Elaboração da sequência de situações

A sequência de situações iniciou com a aplicação de um questionário inicial que tinha por objetivo obter informações sobre os conhecimentos dos alunos sobre as EDOs, pois poderíamos ter alunos, inscritos no curso de extensão, que estavam iniciando os estudos sobre as EDOs e outros que já haviam cursado a disciplina (alunos repetentes). Além disso, este questionário serviu de base para as discussões do primeiro dia de curso.

As atividades da fase 1 tinham por objetivo propiciar aos alunos um estudo das EDOs, utilizando diferentes domínios e registros de representação semiótica, de forma a privilegiar aspectos qualitativos desse conceito. A resolução algébrica não foi descartada das análises *a priori*, podendo ser utilizada pelos alunos, contudo, procuramos apresentar as atividades de forma que essa estratégia não fosse obrigatória para a resolução das atividades.

O quadro a seguir mostra um resumo das atividades propostas com os possíveis domínios e registros de representação utilizados em cada uma delas. As legendas utilizadas no Quadro 10 estão especificadas nos quadros seguintes.

Quadro 10: Domínios e registros de representação para as atividades da fase 1

Atividade	**Objetivo**	**MD**	**DA**	**RP**	**RI**	**RC**
1	Introduzir a noção de campo de vetores	AA $\Rightarrow$ GA		RLNE RSA		RG
2	Estudar o comportamento das soluções	AA $\Rightarrow$ DF	AL AN F GA	RLNE RSA	RSA RG	RLNE
3	Estudar o comportamento das soluções e comportamento assintótico	GA $\Rightarrow$ F	GA AN F	RG	RLNE	RLNE RSA
4	Estudar o comportamento das soluções	AA $\Rightarrow$ F	AL AN F GA	RLNE RSA	RSA RG	RLNE
5	Estudar o comportamento das soluções e comportamento assintótico	AA $\Rightarrow$ F	AL AN GA F	RSA	RG RSA	RLNE RSA
6	Associar o campo de vetores com a EDO	AA GA	F	RSA RG		RLNE RSA

7	Estudar o comportamento das soluções	F	AA F AA	RG	RSA RLNE	RLNE
8	Analisar a unicidade das soluções	F	GA AA F	RSA RG	RG RSA	RLNE
9	Compreender o conceito de taxa de variação e PVI	NM	AA GA	RLNE	RG	RSA RLNE

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 11: Legenda para as abreviações[33]

Abreviação	Significado
MD	Mudança de domínio
DA	Domínio auxiliar[34]
RP	Registro de partida
RI	Registro intermediário
RC	Registro de chegada

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 12: Abreviações para os domínios matemáticos

Domínios	Notação
Álgebra/Análise	AA
Álgebra	AL
Análise	NA
Funções	F
Geometria Analítica	GA
Não matemático	NM

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 13: Abreviações para os registros de representação

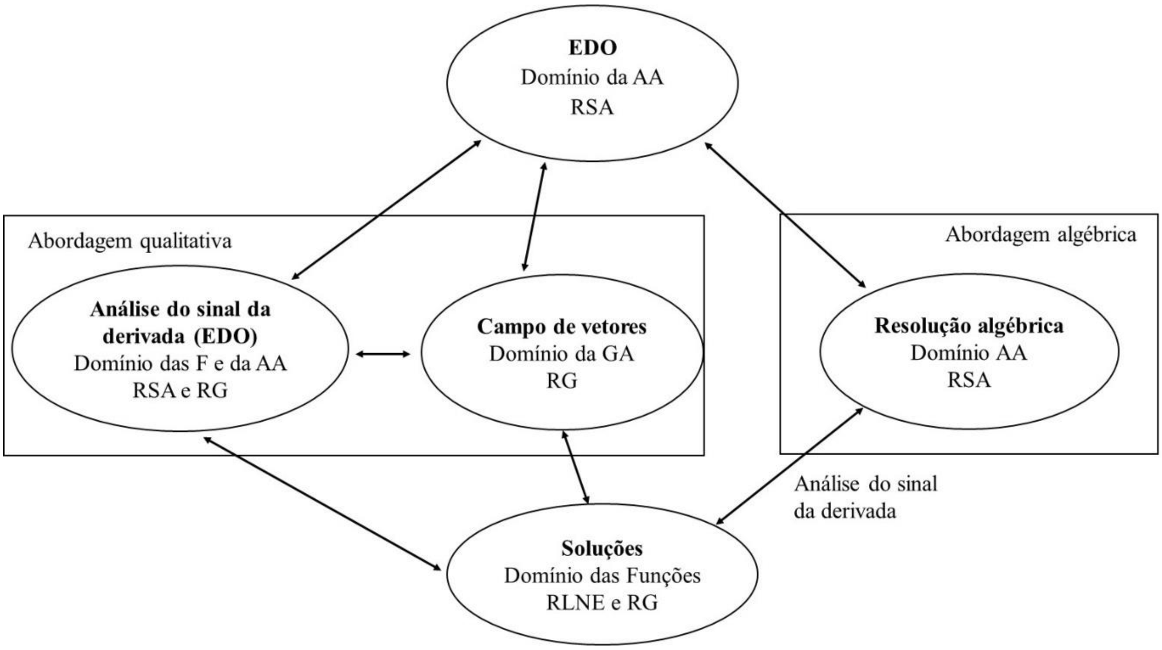
Registro	Notação
Registro da língua natural de uso especializado	RLNE
Registro simbólico-algébrico	RSA
Registro Gráfico	RG

Fonte: Adaptado de Karrer (2006)

A Figura 33 ilustra a relação entre os diferentes conceitos envolvidos no estudo das EDOs, seus domínios e registros de representação para as atividades da fase 1.

[33] As abreviações utilizadas no texto estão na Lista de abreviações no início da tese.
[34] Domínio que pode ser utilizado para auxiliar na mudança de domínio indicada.

Figura 33: Relação entre os diferentes conceitos no estudo das EDOs



Fonte: Elaborado pela autora

As setas nos dois sentidos, na Figura 33, exprimem o entendimento do conceito em suas diferentes formas de representação e domínios matemáticos, assim, embora não tenhamos realizado, de modo direto, algumas conversões, por exemplo, a conversão no sentido campo de vetores para EDO, acreditamos que a identificação das unidades significativas de cada registro, demandada pelas atividades, possa auxiliar na compreensão do conceito em ambos os registros.

A fase 2 da sequência constava dos problemas de Modelagem Matemática que tinham como objetivo a aplicação dos conceitos estudados na fase 1, além de retomar a aplicação da derivada como taxa de variação. Nessas atividades, pretendíamos analisar como os alunos iriam resolver a EDO que modela o fenômeno estudado, bem como quais domínios e registros de representação utilizariam.

Diferentemente da fase anterior, caso a abordagem algébrica não fosse utilizada pelos alunos durante a resolução da EDO, a pesquisadora poderia levantar questões para que os alunos resolvessem algebricamente a EDO e comparassem com os resultados obtidos pela análise qualitativa, de modo a promover uma interação ente os dois tipos de abordagem das soluções das EDOs.

Os alunos desenvolveram, então, três problemas desta natureza, o primeiro problema versava sobre o decaimento radioativo, na qual os estudantes realizaram um estudo sobre o acidente que ocorreu na cidade de Goiânia envolvendo o elemento radioativo Césio-37.

Para o segundo problema, foi realizado um experimento sobre a variação da temperatura de um refrigerante deixado à temperatura ambiente e os dados recolhidos durante o experimento foram utilizados para o desenvolvimento do problema.

E, para finalizar, cada grupo de alunos deveria escolher um tema e realizar um estudo matemático da situação utilizando uma EDO e apresentar este estudo para os demais alunos do curso.

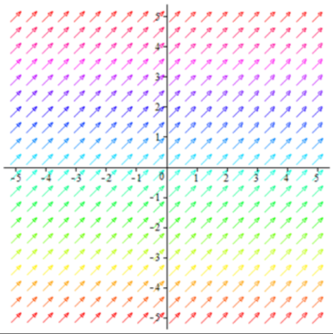
3.3 Análise *a priori* do questionário inicial

Como os participantes do curso eram estudantes que estavam cursando a disciplina de Equações Diferenciais, aplicamos um questionário inicial com o objetivo de obter uma visão geral dos conhecimentos dos alunos sobre as EDOs. As perguntas foram propostas de modo informal, buscando que os alunos escrevessem livremente suas ideias sobre as EDOs, sem a necessidade de uma formalização matemática. Acreditávamos que esse modo informal das perguntas poderia incentivar os alunos a expressarem suas ideias sobre esse conceito.

Nas perguntas, utilizamos o termo "equação diferencial" no lugar de "equação diferencial ordinária", pelo fato de que queríamos informações mais gerais, como, por exemplo, o que o aluno entende por solução de uma ED e a utilização do termo EDO poderia limitar as respostas.

Quadro 14: Descrição do questionário inicial

Questão	Objetivo
1) Você saberia dizer o que é uma equação diferencial?	Verificar o conhecimento sobre a definição de ED.
2) Na sua opinião, para que serve uma equação diferencial?	Constatar se os estudantes conhecem alguma aplicação para as EDs.
3) Você poderia citar alguns exemplos de equações diferenciais?	Verificar se os estudantes conseguem expressar, de alguma forma, uma ED, seja algebricamente ou na língua natural especializada.
4) Você saberia dizer o que é solução de uma equação diferencial? Como podemos representá-la?	Averiguar os conhecimentos sobre as soluções de uma EDO.
5) Considere a equação $y' = f(x, y)$. A função $f(x, y)$ define, em cada ponto (x, y) do plano *xy*, a inclinação ou o declive que deverá ter uma função $y(x)$ que seja solução da EDO. O campo de direções (campo de vetores) é um desenho (gráfico) no plano *xy*, onde em cada ponto (x, y) aparece um vetor com declive igual a $f(x, y)$. As soluções da equação diferencial serão as curvas tangentes a esses vetores em todos os pontos. A figura abaixo ilustra um campo de vetores para uma EDO, analisando este	Constatar se os estudantes possuem alguma familiaridade com o campo de direções e/ou utilizando das informações dadas conseguem estabelecer alguma relação entre o campo de direções e a família de soluções e/ou a equação diferencial.

campo de vetores que informações você poderia obter? 	

Fonte: Elaborado pela autora

Além dos objetivos descritos no Quadro 14, o questionário inicial serviu de base para fazer uma introdução do curso. As respostas dos alunos foram classificadas por similaridades de conhecimentos e de dúvidas, além de serem apresentadas e discutidas com a eles.

Em relação à primeira questão, esperávamos que a maioria dos alunos relacionasse a ED com uma equação que possui derivada ou diferencial, contudo, não esperávamos uma definição formal de ED ou da sua solução (quarta questão). Essas definições seriam estabelecidas durante a discussão em grupo. Para a representação da solução, esperávamos respostas nos registros RSA, RLNE e RG, com uma presença mais significativa do primeiro.

Para a segunda questão, esperávamos que eles pudessem supor que as EDs são utilizadas para modelar fenômenos das diversas áreas de conhecimentos, sobretudo na Física, devido à forma como as EDOs são apresentados nos livros didáticos. Nesta e na terceira questão, esperávamos um maior índice da expressão algébrica das EDOs, devido à influência da abordagem algébrica tanto no ensino de ED como no CDI I.

As discussões das quatro primeiras questões tinham por objetivo retomar as definições de ED, soluções e aplicações. Em relação à última questão, ela seria utilizada para introduzir a noção de campo de vetores que, segundo nossos estudos preliminares (análise dos livros e trabalhos anteriores) e conversa informal com a professora da disciplina regular, não era um conceito normalmente abordado nas aulas regulares de ED.

Por esse motivo, optamos por um campo de vetores com uma estrutura simples, no qual o gráfico representa o comportamento de funções polinomiais de primeiro grau. Suponhamos que, dos conhecimentos prévios que os alunos possuíam das disciplinas já cursadas no primeiro ano dos respectivos cursos de graduação (Cálculo Diferencial e Integral-I e Geometria Analítica), eles poderiam ter algumas informações, como posição dos vetores no plano, comportamento geral do campo de vetores, por exemplo.

3.4 Análise *a priori* das atividades da fase 1

As atividades dessa fase foram elaboradas com base nas teses de Arslan (2005), de Gordillo (2006) e de Javorani (2007) e nos livros de Bassanezi (2011), de Boyce e DiPrima (2013) e de Zill e Cullen (2012). Esses trabalhos também auxiliaram na composição das análises *a priori*. Além deles, nos pautamos nos resultados preliminares obtidos num teste piloto realizado com estudantes das Engenharias da UTFPR e em algumas atividades realizadas com os alunos do PIBID-Matemática-UEM que não serão apresentados nesta tese.

Para cada atividade da fase 1 apresentaremos seus objetivos, as variáveis didáticas escolhidas, as possíveis estratégias, as dificuldades que podem surgir durante a resolução e os possíveis domínios e registros de representação que a atividade foi proposta ou que podem ser utilizados pelos alunos.

As possíveis estratégias foram intituladas de AIE_i, em que AI representa a Atividade número I e E_i a estratégia número i. Assim, $A1E_1$ significa Atividade 1 estratégia 1, $A2E_3$ significa Atividade 2 estratégia 3, assim sucessivamente. As atividades que apresentavam mais de um item foram nomeadas de AIE_{is}, onde s representa o item da atividade, por exemplo, $A3E_{1a}$ significa Atividade 3 estratégia 1 para o item a).

As Atividades 1, 2 e 3, além dos objetivos descritos no Quadro 10, tinham a função de propiciar aos alunos as noções de campo de vetores, de EDO autônoma e o estudo do sinal da derivada. Dessa forma, acreditávamos que, após as discussões dessas atividades, os alunos teriam condições mínimas para aplicar tal conhecimento nas atividades seguintes.

3.4.1 Análise *a priori* da Atividade 1

Dos estudos apresentados nas seções 2.4 e 2.5, do Capítulo 2, pudemos inferir que os alunos, mesmo aqueles que cursaram a disciplina de ED, não possuíam familiaridade com o conceito de campo de vetores. Nesse sentido, esta atividade tinha por objetivo auxiliar os estudantes na compreensão de como se constrói um campo de vetores e trabalhar o conceito de EDO autônoma.

Atividade 1[35]

Dados um ponto *A* e uma função *f*, o valor da derivada de *f* neste ponto pode ser interpretado como o coeficiente angular da reta tangente a *f* no ponto *A.* A propriedade: uma função é estritamente crescente (decrescente) em um intervalo, se e somente se, o sinal derivada é positivo (negativo) neste intervalo, pode ser traduzido como: a função *f* é estritamente

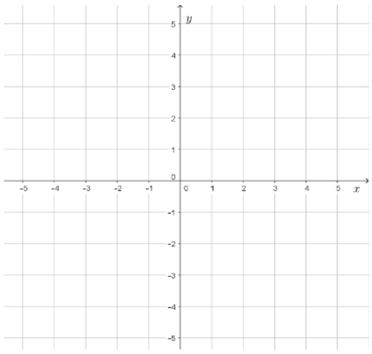
[35] Atividade adaptada de Arslan (2005, p. 110).

crescente (decrescente) em um intervalo se os coeficientes angulares das retas tangentes em cada ponto do seu gráfico, neste intervalo, são positivos (negativos).

a) Calcule os coeficientes angulares das retas tangentes às soluções da equação $y' = y$ nos pontos (2, -2), (2,0), (2,3), (-2, -2), (-2, 0), (-2,3). Marque estes pontos sobre o plano abaixo e desenhe os vetores diretores das retas tangentes em cada ponto.

b) O mesmo para os pontos (-3, 1), (-1, 1), (3,1), (-3, -1), (-1, -1), (2, -1).

c) Analisando os resultados dos itens a) e b), que conclusões podemos obter?



O campo de vetores seria utilizado em outras atividades da sequência, por isso, entender a relação entre os vetores representados no gráfico, a EDO e suas soluções era uma condição necessária para a compreensão das demais atividades. Embora a construção do campo de vetores pudesse ser realizada com o auxílio de um recurso computacional, julgávamos importante que os alunos soubessem qual o procedimento realizado pelo software, ou seja, que a inclinação e o sentido dos vetores são determinados pela EDO. E que cada vetor do plano representa a reta tangente a um ponto do gráfico de uma solução da EDO.

A atividade foi proposta no domínio da AA e utiliza-se do RLNE (texto explicativo) e do RSA (EDO). Para resolvê-la, era preciso realizar uma mudança do domínio da AA para o domínio da GA (vetores no plano cartesiano). E uma conversão do RSA para o RG, na qual duas representações estavam envolvidas: a EDO e o vetor diretor da reta tangente. Segundo Arslan (2005), para que esta mudança de registro seja realizada de forma satisfatória, o aluno precisa fazer a interpretação indicada no Quadro 15.

Quadro 15: Unidade significativa de uma EDO e as variações simultâneas para o vetor diretor da reta tangente

EDO		**Vetores**	
Unidades significativas no RSA	**Valores**	**Variações simultâneas para o coeficiente angular do vetor diretor da reta tangente**	**Observação**
	> 0	Coeficiente angular positivo	

Sinal da derivada y'	$= 0$	Coeficiente angular nulo	As retas tangentes às curvas soluções podem ser representadas pelos seus vetores diretores.
	< 0	Coeficiente angular negativo	

Fonte: Arslan (2005, p. 112)

As variações para o vetor diretor apresentadas no Quadro 15 decorrem da interpretação do texto explicativo no enunciado da atividade. Contudo, para traçar o vetor no plano, o coeficiente angular não é suficiente, sendo necessário obter a inclinação do vetor diretor no plano, ou seja, é preciso determinar o ângulo formado entre o vetor diretor e o eixo das abscissas. Como os vetores possuem a mesma inclinação da reta tangente, tomando por base as ideias de Duval (2011) apresentadas no Quadro 5 da seção 1.1.2 (p. 36), podemos fazer uma análise análoga para a conversão realizada nesta atividade.

Quadro 16: Unidades significativas no RSA e as variáveis visuais no RG

RSA EDO		**RG Vetores no plano**	
Unidades significativas	**Valores**	**Variáveis visuais**	**Valores**
Sinal de y'	$y' > 0$	Sentido da inclinação dos vetores	Ascendente
	$y' = 0$		Sem inclinação
	$y' < 0$		Descendente
Valor de y' em relação ao inteiro 1	$y' > 1$	Ângulo formado com os eixos[36]	Ângulo maior
	$y' = 1$		Partição simétrica
	$y' < 1$		Ângulo menor

Fonte: Elaborado pela autora

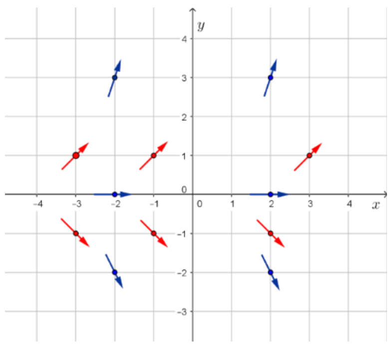
O conceito de inclinação pode ser traduzido algebricamente como o coeficiente angular da reta (DUVAL, 2011), no nosso caso, como o valor da derivada da função no ponto. O valor de y' (coeficiente angular da reta tangente) recobre duas unidades significativas no registro simbólico-algébrico: o sinal da derivada e seu valor em relação ao inteiro 1. Essas duas unidades significativas correspondem a duas variáveis diferentes no registro gráfico, ao sentido da inclinação e ao ângulo formado com os eixos. Dessa forma, a conversão do RSA (EDO) para o RG (campo de vetores) é uma conversão não congruente, pois, uma vez determinado o valor de y', por exemplo, $y' = 2$, é preciso destacar as duas propriedades distintas, uma em relação ao 0, $y' = 2 > 0$ (derivada positiva) e a outra em relação ao inteiro 1, $y' = 2 > 1$ (ângulo maior), ou seja, não existe correspondência semântica entre as unidades significativas.

[36] Variável visual e seus respectivos valores estão de descritos no Quadro 4 da seção 1.1.2.

Para obter o valor da derivada no ponto é preciso calculá-lo utilizando a equação $y' = y$. Esse processo é algo comum nas aulas de CDI-I, contudo, normalmente nos exercícios que abordam a noção de reta tangente, é fornecida a função ou sua derivada em relação à variável independente (na maioria das vezes utilizando a variável *x*). Neste caso, a derivada é definida em termos da variável dependente, desta forma, o aluno precisa interpretar que o coeficiente angular da reta tangente ao ponto (x_0, y_0) tem o valor determinado por y_0 e não x_0. Ou seja, o aluno precisa ampliar os conhecimentos que já possui para a nova situação.

A Figura 34 ilustra a resposta esperada para os itens a) e b). Acreditávamos que, ao traçarem os vetores no plano (Figura 34), os alunos (mesmo que intuitivamente) iriam perceber que os coeficientes angulares *m* das retas tangentes às curvas soluções da EDO $y' = y$ variam conforme modificamos os valores da ordenada e se mantêm iguais quando não modificamos este valor (resposta esperada para o item c). Assim, na discussão da Atividade, a pesquisadora poderia retomar o conceito de campo de vetores, que seria apresentado aos alunos durante a discussão das repostas do questionário inicial, e trabalhar o conceito de EDO autônoma, utilizando, para isso, os coeficientes angulares que foram calculados pelos alunos, fazendo perguntas do tipo: Existe alguma semelhança/diferença entre os valores obtidos? Qual a característica dos pontos que forneceram o mesmo coeficiente angular?

Figura 34: Resposta esperada para a Atividade 1



Em azul: pontos e vetores para o item a). Em vermelho: pontos e vetores para o item b)
Fonte: Elaborado pela autora

Variáveis didáticas: identificamos as seguintes variáveis didáticas para esta atividade**:**

A primeira foi relativa a opção por uma EDO linear autônoma $y' = y$, que não é explícita em termos da variável independente e sim em relação à própria função, o que era uma situação não habitual para a maioria dos estudantes.

A segunda foi a escolha de pontos que mantêm fixa a ordenada ou a abscissa, o que possibilita a visualização dos vetores de mesma (diferente) inclinação, tanto na expressão algébrica como na representação gráfica. Isso poderia auxiliar os alunos a perceberem que a inclinação da reta tangente depende da variável dependente y.

A terceira variável concerne ao plano cartesiano no papel quadriculado. Embora os participantes sejam alunos do Ensino Superior, inferimos que esta escolha poderia interferir positivamente no desenvolvimento da atividade, pois, ao traçarem o plano com régua e lápis, os alunos poderiam cometer algum erro de construção. Além disso, o papel quadriculado os auxiliaria a marcar os pontos selecionados.

Prováveis estratégias corretas de resolução: Para a resolução dos itens a) e b) desta atividade elencamos três estratégias possíveis:

AE1$_1$: Calcular o coeficiente angular para um ponto, obter a reta tangente a este ponto e, a partir do gráfico desta reta, desenhar o vetor diretor da reta tangente ao ponto.

Para aplicar esta estratégia no ponto (-3,1), por exemplo, é preciso realizar um tratamento no RSA dentro do domínio da AA.

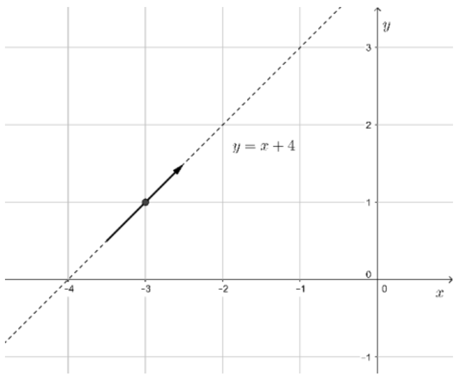
$$m = y'_{(x,y)} = y = 1.$$

Assim, calculamos a equação da reta tangente:

$$y_{(-3,1)} - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y_{(-3,1)} - 1 = 1(x + 3)$$
$$y_{(-3,1)} = x + 4$$

Para obter a equação $y_{(-3,1)} = x + 4$ realizamos uma mudança do domínio da AA para o domínio da GA e um tratamento no RSA. Utilizando essa equação, podemos obter o gráfico da reta tangente e utilizá-lo para traçar o vetor diretor da reta.

Figura 35: Vetor diretor a partir do gráfico da reta tangente



Fonte: Elaborado pela autora

Assim, realizamos uma conversão do RSA para o RG, dentro do domínio da GA. Acreditávamos que, para esses alunos, a conversão poderia ser realizada sem grandes dificuldades, utilizando a abordagem ponto a ponto (seção 1.1.2). Contudo, para a compreensão dessa conversão, as unidades significativas elencadas no Quadro 16 precisavam ser identificadas.

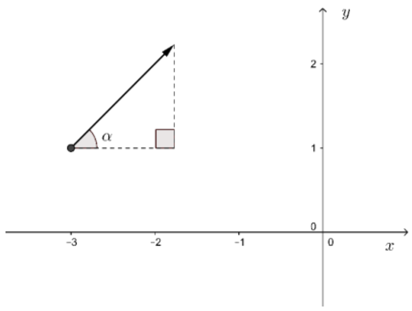
Para aplicar essa estratégia, os alunos precisavam relembrar a relação entre derivada e coeficiente angular da reta tangente, a equação reduzida da reta e o conceito de vetor diretor da reta, conceitos advindos dos domínios da AA e GA.

A1E2: Obter o coeficiente angular como na estratégia anterior e calcular o ângulo determinado por coeficiente e, com o auxílio de um transferidor, traçar o vetor diretor que passa pelo ponto. Por exemplo, para o ponto (-3, 1), temos que $m = y' = 1,$ logo:

$$m = tg(\alpha)$$
$$1 = tg(\alpha) \Rightarrow \alpha = 45°$$

Com o auxílio de um transferidor[37], desenhamos o vetor conforme ilustra a Figura 36.

Figura 36: Vetor diretor com o uso do transferidor



Fonte: Elaborado pela autora

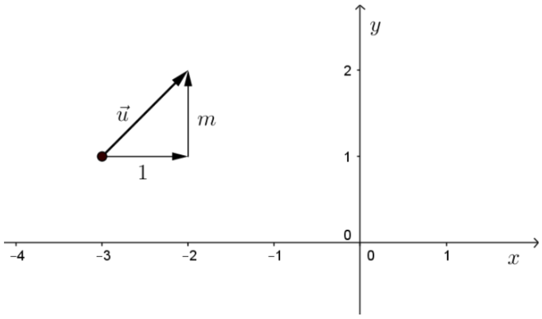
Aqui era necessário lembrar que a inclinação da reta é o ângulo α formado pela reta e pelo eixo das abscissas e seu coeficiente angular é determinado pela tangente desse ângulo $(m = tg\alpha).$ Dessa forma, era possível determinar a inclinação da reta tangente, utilizando o valor da derivada no ponto $(m = y'),$ e, com o auxílio de um transferidor, marcar o ângulo obtido e traçar o vetor diretor.

Neste caso, o aluno transferiu o problema do domínio da AA para o domínio da GA, realizando um tratamento no RSA e depois uma conversão para o RG (vetores no plano). Além disso, era preciso utilizar ferramentas do domínio da trigonometria, para o cálculo do ângulo α.

A1E3: Desenhar o vetor diretor $\vec{u}$ com inclinação *m,* como o resultado da soma dos vetores ortogonais de comprimento 1 e *m,* conforme ilustra a Figura 37, para o ponto (-3,1).

[37] O transferidor seria fornecido aos alunos, caso eles solicitassem para a pesquisadora.

Figura 37: Vetor diretor como soma de vetores



Fonte: Elaborado pela autora

Nessa estratégia, o aluno utiliza os mesmos domínios e registros das estratégias anteriores, contudo, é preciso recorrer ao conhecimento sobre soma de vetores e realizar um tratamento no RG.

Dentre as possíveis estratégias, esperávamos que as duas primeiras fossem as mais utilizadas, pois os alunos já cursaram a disciplina de CDI-I e deveriam possuir os conhecimentos básicos de derivada e de reta tangente.

Para responder ao item c), os alunos precisavam comparar os resultados obtidos anteriormente de forma a concluir que pontos com ordenadas iguais possuem a mesma inclinação.

Algumas dificuldades que poderiam surgir no decorrer desta atividade:

1) Os alunos, embora tenham cursado a disciplina de CDI-I, poderiam apresentar dificuldade em relacionar a derivada com o coeficiente angular da reta tangente. Esta dificuldade está relacionada aos diferentes significados envolvidos com o conceito de derivada.
2) Dificuldade pelo fato de não ser uma atividade habitual, na qual a função derivada não é uma função explícita na variável independente.
3) Ao utilizarem a estratégia A1E2, os alunos poderiam não lembrar a relação entre o valor da derivada, coeficiente angular da reta e o ângulo formado pela reta tangente e pelo eixo das abscissas.

Caso a pesquisadora percebesse que os alunos não conseguiam avançar em suas estratégias por falta de alguns conhecimentos prévios, ela poderia fazer algumas intervenções de forma a relembrar alguns conceitos, como, por exemplo, as relações entre derivada, coeficiente angular da reta tangente e a tangente do ângulo.

Diferente das demais atividades, a discussão da Atividade 1 seria realizada no mesmo dia, assim que os alunos concluíssem suas respostas, de forma que ela pudesse auxiliá-los no desenvolvimento das Atividades 2 e 3.

3.4.2 Análise *a priori* da Atividade 2

A atividade consistia em fazer um estudo sobre o comportamento da função f , sem conhecer a expressão algébrica da função ou da sua derivada.

Atividade 2[38]

Seja f uma função derivável e definida em $\mathbb{R}$. Sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x)$. Faça um estudo sobre o comportamento da função f.

Esta atividade pretendia estabelecer relações entre a função e a sua derivada. Ela foi proposta no domínio da AA utilizando, como registro de partida, o RSA, pois, apesar de ser acompanhado de um texto, a informação principal $(f'(x) = 3f(x))$ era dada no RSA. Esperávamos que os alunos comentassem o comportamento da função f, de preferência sem resolver a EDO, dando informações sobre as condições para que ela seja crescente (decrescente) ou constante, chegando à seguinte conclusão:

i) Se $f(x) > 0$ temos que $f'(x) > 0$, portanto, f é estritamente crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.
ii) Se $f(x) = 0$ temos que $f'(x) = 0$, portanto, f é constante para todo $x \in \mathbb{R}$.
iii) Se $f(x) < 0$ temos que $f'(x) < 0$, portanto, f é estritamente decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função f, em estudo, representa as soluções da EDO dada. Apesar das discussões das respostas do questionário inicial e do desenvolvimento da Atividade 1, a noção função solução ainda poderia ser algo incomum para os alunos, uma vez que eles estavam acostumados a procurarem um (ou mais) número real que satisfizesse a equação. Segundo Arslan (2005) e Gordillo (2006), a passagem de solução número para solução função não é algo trivial para os alunos e isso pode causar algum tipo de dificuldade no desenvolvimento da atividade. Os autores consideram esta passagem de solução número para solução função como um salto conceitual.

Outro salto conceitual, elencando por Arslan (2015), é a noção de infinitas soluções. Embora o enunciado não indicasse a existência de infinitas soluções, esta noção já teria sido abordada no questionário inicial e na Atividade 1, o que poderia levar alguns alunos a refletirem sobre esse fato. Contudo, acreditávamos que a maioria dos alunos não iria se atentar para este fato, dando resposta com a função f no singular, como expomos anteriormente. Neste caso, a

[38]Atividade adaptada de Arslan (2005, p. 105).

pesquisadora, durante as discussões desta atividade, chamaria a atenção tanto para a noção de função solução como para a de infinitas soluções.

Variáveis didáticas: A escolha de uma EDO linear autônoma $y' = f(y)$. Para essa variável, distinguimos dois valores:

i) Uma EDO linear autônoma do tipo $y' = a,\ a \in \mathbb{R}$, na qual a derivada é uma constante, o que implica que a família de soluções possui o mesmo comportamento (crescente/decrescente) para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) Uma EDO linear autônoma do tipo $y' = ay + b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Neste caso, o valor da derivada varia e obtemos tanto soluções crescentes como soluções decrescentes e ainda uma solução constante.

Nesta atividade, optamos por uma equação do tipo $y = ay + b,$ com $b = 0$ e pela notação $f(x)$ no lugar de $y,$ com a intenção de chamar a atenção do aluno para o fato de eles estarem estudando o comportamento de uma função. A escolha da equação $f'(x) = 3f(x),$ no lugar da equação $f'(x) = f(x)$, se deu em função do fato de que a resolução algébrica da segunda é mais acessível para os estudantes do que a resolução da primeira (ARSLAN, 2005). Além disso, poderia ser fácil relacionar a função exponencial à função que possui a derivada igual a ela mesma.

Contudo, essa notação $f'(x) = 3f(x)$ não é uma notação habitual para os alunos, pois, na aula de CDI –I, normalmente, é dada a lei de formação da função em relação à variável independente x (na maioria das vezes) e pede-se para determinar os intervalos em que a função é crescente (decrescente) em seu domínio, conforme ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 7 (SWOKOWSKI, 1994, p.234): Se $f(x) = x^3 + x^2,$ determinar os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.

Solução: A função f é uma função polinomial, portanto, é contínua e diferenciável para todo $x \in \mathbb{R},$ desta forma, podemos aplicar o Teorema 1. Primeiro, calculamos a derivada da função f :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2).$$

Depois, analisamos os intervalos para os quais a derivada é positiva e negativa.

Tabela 6: Intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3 + x^2$

Intervalo	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, 0)$	$(0, +\infty)$
Sinal de $f'(x)$	+	-	+
Conclusão	f é crescente em $(-\infty, -2/3]$	f é decrescente em $[0, -2/3]$	f é crescente em $[0, +\infty)$

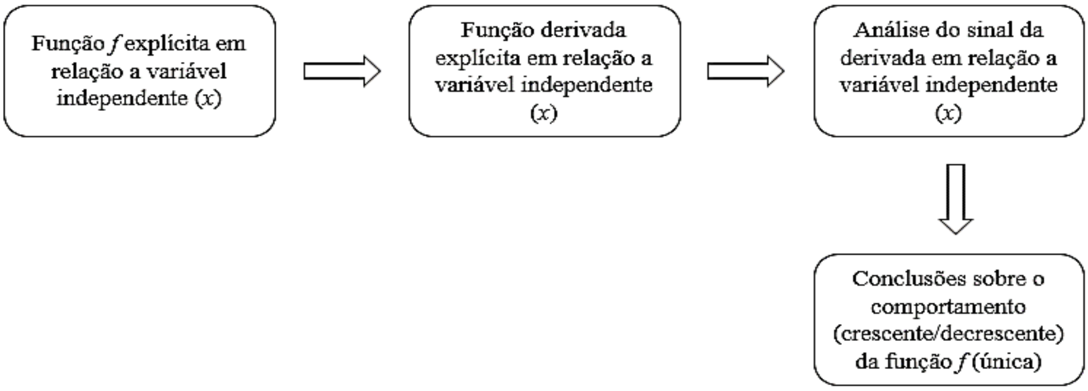
Fonte: Adaptado de Swokowski (1994, p. 235)

Com base neste exemplo, podemos observar que o processo para determinar os intervalos nos quais a função f é crescente ou decrescente é o seguinte:

1) Calcular a derivada da função f.
2) Determinar os valores para os quais a derivada é positiva, negativa ou nula (análise do sinal da derivada).
3) Conclusões sobre o comportamento da função f.

A Figura 38 ilustra este processo que é realizado em exercícios análogos ao Exemplo 7.

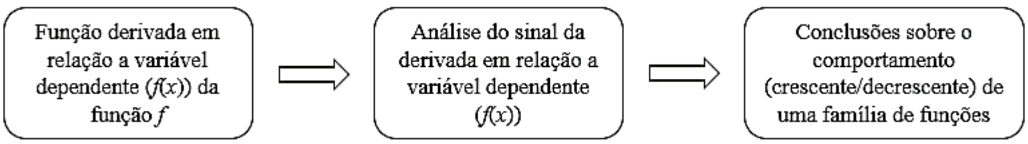
Figura 38: Processo de análise dos intervalos de crescimento de uma função na disciplina de CDI-I



Fonte: Elaborado pela autora

O processo realizado para resolver a Atividade 2 difere do processo ilustrado na Figura 38, pois, nesse caso, o aluno desconhecia a função que precisava estudar, suas análises são feitas a partir da derivada, que não está descrita em termos que uma variável independente usual (x). Desta forma, era preciso reconhecer que a derivada é uma função de $f(x)$ e, consequentemente, o sinal da derivada dependia do valor de $f(x)$. Diferente do Exemplo 7, as conclusões obtidas eram em relação ao comportamento de uma família de soluções e não em uma única função (Figura 39).

Figura 39: Processo de análise para a Atividade 2



Fonte: Elaborado pela autora

Com base na Figura 39, temos que, para resolver a Atividade 2, os alunos precisavam adaptar os conhecimentos que já possuíam sobre como determinar os intervalos de crescimento (decrescimento) de uma função a essa nova situação, o que considerávamos um salto conceitual.

Além disso, o aluno precisava mudar do domínio da AA para o domínio das F (pois a solução de uma EDO é uma família de funções) e realizar uma mudança do RSA para o RLNE, que envolvem a EDO e suas soluções. Para que esta mudança fosse realizada de forma satisfatória, era necessário analisar os valores que a EDO (sinal da derivada) poderia assumir e, a partir deles, fazer influências sobre o comportamento das soluções desta equação (Quadro 17).

Quadro 17: Unidades significativas da EDO e as variações simultânea nas soluções

RSA EDO		**RLNE Soluções**
Unidades significativas	**Valores**	**Variações simultâneas para as soluções**
Sinal de f'	> 0	As soluções são estritamente crescentes
	= 0	A solução é constante
	< 0	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Adaptado de Arslan (2005, p. 106)

Observando o Quadro 17 podemos verificar que não existe congruência semântica entre o sinal da derivada no registro simbólico-algébrico, $f'(x) > 0$ (derivada positiva ou maior que zero), e a expressão na língua natural de uso especializado (as soluções são estritamente crescentes). Para realizar esta conversão, é preciso identificar as unidades significativas no RSA e utilizar os conhecimentos sobre derivada e funções (Teorema 1) para depois inferir sobre o comportamento das soluções, ou seja, esta conversão demanda um conhecimento matemático maior do aluno.

Além disso, os registros envolvidos são de natureza distintas, o RSA é um registro monofuncional e o RLNE é um registro multifuncional, o que, conforme Duval (2003), torna a conversão entre eles mais complexa. Esta análise pode ser estendida para as demais atividades da sequência, portanto, para as próximas atividades apresentaremos somente um quadro similar ao anterior.

Estas mudanças de domínio e registros de representação, em alguns casos, são realizadas com o auxílio de domínios e registros auxiliares/intermediários, que serão descritos nas possíveis estratégias de resolução, porém, a análise final requer a interpretação do Quadro 17.

Prováveis estratégias corretas de resolução: elencamos cinco estratégias que os alunos podem utilizar para resolver esta atividade:

A2E1: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função f, determinado para quais valores de $f(x)$ a derivada é positiva, negativa ou nula. Assim, é preciso realizar um tratamento no RSA, para resolver as seguintes inequações/equação:

i) $f'(x) > 0 \Rightarrow 3f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$

ii) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

iii) $f'(x) < 0 \Rightarrow 3f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0.$

Logo, aplicando o Teorema 1, obtemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

i) Se $f(x) > 0$ temos que $f'(x) > 0$, portanto, as soluções são estritamente crescentes.

ii) Se $f(x) = 0$ temos que $f'(x) = 0$, portanto, a solução é constante.

iii) Se $f(x) < 0$ temos que $f'(x) < 0$, portanto, as soluções são estritamente decrescentes.

A resolução das inequações/equações anteriores só é possível com os conhecimentos básicos sobre inequações/equações algébricas e a aplicação do Teorema 1 decorre de conhecimentos do domínio da Análise. Além disso, é preciso “enxergar” a EDO como a função derivada que depende de $f(x)$, conforme exposto na subseção 2.3.2 do Capítulo 2.

Esperávamos que esta estratégia fosse mais utilizada que as demais, pois os alunos já estavam familiarizados a aplicar Teorema 1 nas aulas de CDI I. Outra forma de apresentar estas informações sobre a função f era utilizando uma tabela (Tabela 7). Esta representação é utilizada para a análise análoga a do Exemplo 7, por isso, alguns alunos poderiam aplicá-la para a Atividade 2.

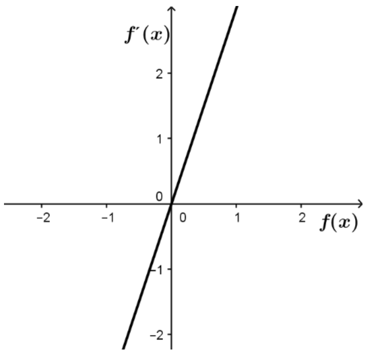
Tabela 7: Tabela de variação para a equação $f'(x) = 3f(x)$

Valor de $f(x)$	<0	$=0$	>0
Sinal de f'	−		+
Comportamento das soluções	Decrescentes	Constante	Crescentes

Fonte: Elaborado pela autora

A2E2: Esta estratégia, da mesma forma que a anterior, utiliza o sinal da derivada para analisar o comportamento da função f, porém, esta análise é realizada a partir dos dados fornecidos pela representação gráfica da função f' no plano cartesiano (Figura 40).

Figura 40: Gráfico de $f'(x) = 3f(x)$



Fonte: Elaborado pela autora

Para construir o gráfico de f', o aluno poderia utilizar estratégia ponto a ponto (seção 1.1.2) ou o auxílio de um software (procedimento informático). Ao construir o gráfico de f', o estudante realizou uma conversão do RSA para o RG e operou em uma interseção dos domínios AA e das F.

Acreditávamos que a conversão do RSA de uma função polinomial de primeiro grau (função linear) para seu gráfico (uma reta) fosse algo comum para estudantes do segundo semestre de cursos de Engenharias. Contudo, no caso da presente atividade, esta representação gráfica com valor da derivada $f'(x)$, no eixo das ordenadas, e a variável $f(x)$, no eixo das abscissas, não era algo habitual, uma vez que, tradicionalmente, as funções estudadas possuem gráficos nos quais a variável dependente $f(x)$ (ou y) é representada no eixo das ordenadas e a variável independente x no eixo das abscissas. Desta forma, o aluno precisava identificar as variáveis visuais do gráfico de f' e relacioná-las com as variações nas soluções da EDO.

Quadro 18: Variáveis visuais e as variações simultâneas nas soluções para a Atividade 2

RG EDO			**RLNE Soluções**
Variáveis visuais	**Variáveis visuais**	**Sinal da derivada**	**Variações simultâneas para as soluções**
Posição do traçado em relação ao eixo das abscissas	O traçado está acima do eixo para $f(x) > 0$	> 0	As soluções são estritamente crescentes
	O traçado está sobre do eixo para $f(x) = 0$	$= 0$	As soluções são constantes
	O traçado está abaixo do eixo para $f(x) < 0$	< 0	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

Além de visualizar a posição do traçado, o aluno precisava identificar em qual valor de $f(x)$ o traçado corta o eixo horizontal. Obtendo o valor $f(x) = 0$, analogamente à estratégia anterior, era preciso aplicar o Teorema 1 para obter as conclusões sobre as variações para as soluções da EDO.

Apesar de ser uma resolução possível, acreditávamos que ela não seria utilizada pela maioria dos alunos, pelo fato de as variáveis independente e dependente não serem as variáveis normalmente utilizadas, como já explicado anteriormente. As observações realizadas para esta estratégia são análogas para as Atividades 4 e 5, portanto, nestas atividades, apenas apresentaremos o gráfico da função derivada.

Esta utilização do gráfico da derivada para obter informações será abordada na Atividade 7.

A2E3: Resolver algebricamente a equação diferencial $f'(x) = 3f(x)$ e utilizar a expressão algébrica da família de soluções para analisar o comportamento da função f. Para isso, o aluno precisava possuir alguns conhecimentos sobre as técnicas de resoluções de EDO, realizando o seguinte tratamento no RSA no domínio da AA:

$$f'(x) = 3f(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 3, \ (f(x) \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = 3\int dx$$

$$\int \frac{1}{f(x)} df(x) = 3\int dx$$

$$\ln\left|f(x)\right| = 3x + C_1, \ C_1 \text{ constante}$$

$$\left|f(x)\right| = e^{3x+C_1}$$

$$\left|f(x)\right| = e^{3x}e^{C_1}$$

$$f(x) = Ce^{3x}, \ C \in \mathbb{R}$$

Assim, sendo $f(x) = Ce^{3x}$ temos que $f'(x) = 3Ce^{3x}$, como e^{3x} é positivo para qualquer valor de x, o sinal da derivada depende do valor da constante C, logo:

i) $C > 0$ implica $f'(x) > 0$, portanto, as soluções são estritamente crescentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) $C = 0$ implica $f'(x) = 0$, portanto, a solução é constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

iii) $C < 0$ implica $f'(x) < 0$, portanto, as soluções são estritamente decrescentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observe que, mesmo que os alunos utilizassem uma abordagem algébrica, a obtenção da expressão analítica da família de soluções não era suficiente para responder à atividade, sendo necessário, assim como nas estratégias anteriores, recorrer ao sinal da derivada.

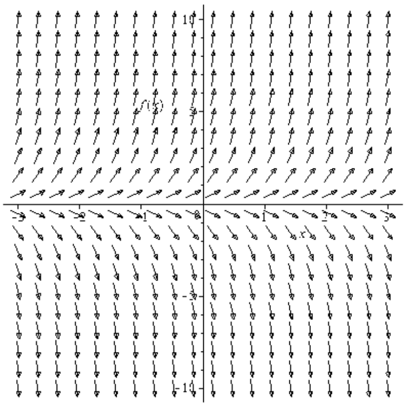
Esperávamos esta estratégia dos alunos que já possuíam alguma noção da resolução algébrica de uma EDO.

A2E4: Obter, por tentativa e erro, uma função que satisfaça a equação, chegando a função $f(x) = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$ e realizar uma análise análoga a da estratégia anterior.

Dos conhecimentos sobre derivadas e integrais que os alunos possuíam da disciplina de CDI-I era possível que eles relacionassem a função que possui derivada igual a ela mesma a função exponencial e utilizasse este conhecimento para adequar à situação proposta. Embora não fosse uma estratégia que apresentasse um certo rigor matemático na resolução, era uma forma correta de raciocínio.

A2E5: Com a utilização do software Maple, os alunos poderiam construir um campo de vetores para a equação dada e analisar o problema utilizando os dados fornecidos por este gráfico.

Figura 41: Campo de vetores para a equação $f'(x) = 3f(x)$



Fonte: Elaborado pela autora

Para utilizar esta estratégia, o aluno precisava mudar do domínio da AA para o domínio da GA e uma realizar conversão do RSA para o RG. Para responder à questão, o aluno precisava interpretar o gráfico e obter informações sobre as soluções, mudando do domínio da GA para o domínio das F e uma conversão do RG para o RLNE.

Não esperávamos que esta estratégia fosse utilizada, pois acreditávamos que, apesar das discussões do questionário inicial e da Atividade 1, o campo de vetores poderia não ser uma ferramenta à disposição dos estudantes. Além da falta de familiaridade dos estudantes em construir o campo de vetores usando este software. Desta forma, uma melhor análise da conversão realizada neste tipo de estratégia foi realizada nas próximas atividades.

Algumas dificuldades que poderiam aparecer no desenvolvimento desta atividade, seriam decorrentes da utilização equivocada de alguma estratégia:

1) Tentar obter a função f integrando ambos os lados da equação, porém, fazer um procedimento errôneo obtendo, por exemplo, as soluções $f(x) = F(x) + \text{C}$, $f(x) = f^3(x) + C$ ou alguma resposta diferente.
2) Confusão entre a equação dada e a equação $f'(x) = 3x$ e fornecer as seguintes variações.
    i) Se $x > 0$, $f'(x) > 0$ o que implica f crescente.
    ii) Se $x = 0$, $f'(x) = 0$ o que implica f constante.
    iii) Se $x < 0$, $f'(x) < 0$ o que implica f decrescente.
3) Obter, por tentativa e erro, uma função que satisfaça a equação, chegando a função $f(x) = e^{3x}$ e concluir que a função f é sempre crescente, pela ausência da constante de integração.
4) Usar a solução $f(x) = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$, obter informações sobre o comportamento da função f e concluir que se f é positiva (negativa), então, f é crescente (decrescente), o que indicaria que o estudante pensou que o fato de a função ser positiva (negativa) é o que determina seu crescimento (decrescimento).

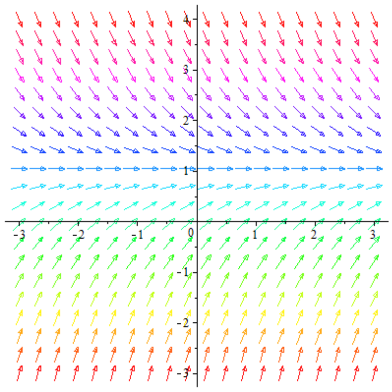
Dependendo das dificuldades apresentadas pelos alunos, a pesquisadora poderia fazer algumas intervenções, como, por exemplo, retomar o Teorema 1. Na discussão desta atividade, seria solicitado que os alunos construíssem o campo de vetores para a EDO dada, com o auxílio do software Maple e interpretassem as informações fornecidas por este gráfico, de forma que este conhecimento fosse cada vez mais presente para os estudantes e pudesse ser aplicado nas demais atividades.

3.4.3 Análise *a priori* da Atividade 3

Esta atividade consistia em analisar o comportamento das soluções da equação $y' = f(y)$ utilizando seu campo de vetores.

Atividade 3
O gráfico abaixo ilustra o campo de vetores para a equação diferencial $y' = f(y)$: a) Comente o comportamento das soluções dessa equação. b) Trace algumas curvas soluções sobre o campo de vetores da EDO dada.

c) Comente o comportamento das soluções quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.



O item a), assim como a Atividade 2, solicitava que o aluno descrevesse o comportamento das soluções de uma EDO, porém, esta atividade foi proposta no domínio da GA e o registro de partida era o RG, logo, para responder à questão, era preciso uma mudança para o domínio das F e para o RLNE.

Assim, o aluno precisava identificar as variáveis visuais do gráfico e relacioná-las com o comportamento das soluções da EDO, conforme mostra o Quadro 19.

Quadro 19: Variáveis visuais do registro gráfico e as variações simultâneas paras as soluções da EDO

RG **Campo de vetores**			**RLNE** **Soluções**
Variáveis visuais	**Valores**	**Sinal da derivada**	**Variações simultâneas para as soluções**
Sentido da inclinação dos vetores no plano	Ascendentes	> 0	As soluções são estritamente crescentes
	Sem inclinação	= 0	A solução é constante
	Descendentes	< 0	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

Analisando o Quadro 19, podemos observar que a conversão realizada é não congruente, pois, para realizar a conversão do RG, monofuncional e não discursivo para RLNE, multifuncional e discursivo, além de identificar tais variáveis, é necessário entender a relação vetores/soluções, ou seja, é preciso compreender que os vetores do gráfico representam os vetores diretores das retas tangente a um ponto do gráfico de uma solução de $y' = f(y)$. Desta forma, os valores para os quais a inclinação do vetor é ascendente, significa que o coeficiente angular da reta tangente a um ponto do gráfico de f é positivo, consequentemente, a derivada também é positiva e isso implica que as soluções são estritamente crescentes, ou seja, é preciso recorrer a uma representação auxiliar (sinal da derivada) e a um teorema matemático que não estão explícitos no registro de partida.

Segundo Duval (2011a), o estudo do funcionamento particular de cada registro se faz em correspondência a um outro registro, ou seja, "é preciso que as variações do conteúdo entre as representações de um registro possam ser colocadas em correspondência, de forma regular, com as variações do conteúdo do segundo registro" (p.124). Para o autor, este estudo não é simples quando o registro a analisar é o da língua natural, pois este registro é utilizado tanto para formular definições, teoremas e corolários, como para realizar raciocínios e justificar soluções. Desta forma, "existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável, mesmo os outros registros discursivos próprios da matemática ou da lógica" (p.125), e isso torna mais difícil a conversão entre o RLNE e os outros registros de representação.

Na situação proposta, também era preciso verificar para quais valores de y a inclinação dos vetores era ascendente, nesse sentido, era preciso perceber que as modificações nas inclinações ocorrem na vertical, ou seja, para mudanças nos valores da variável dependente y. Ao fim destas análises, os alunos deveriam obter a seguinte resposta:

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que

i) Se $y > 1$ então $y' < 0$, logo, as soluções são estritamente decrescentes.

ii) Se $y = 1$ então $y' = 0$, logo, a solução é constante.

iii) Se $y < 1$ então $y' > 0$, logo, as soluções são estritamente crescentes.

No item b) os alunos deveriam traçar algumas curvas soluções sobre o campo de vetores. Este item tinha como objetivo familiarizar os alunos com os representantes gráficos envolvidos, o campo de vetores e as curvas soluções. Além de verificar se os alunos conseguiriam respeitar o traçado das curvas soluções, como, por exemplo, não cortar a reta $y = 1$.

Para estudar o comportamento assintótico da EDO no item c), o aluno precisava realizar uma extrapolação do traçado do gráfico, ou seja, um tratamento no registro gráfico. Era preciso verificar o comportamento do campo de vetores quando os valores da variável independente aumentavam ou diminuíam infinitamente. Para responder à questão proposta, era necessário uma conversão do RG para o RLNE e uma mudança do domínio da GA para o domínio das F (Quadro 20).

Quadro 20: Variáveis visuais e as variações simultâneas nas soluções para a Atividade 3

RG Campo de Vetores		RLNE Soluções
Variáveis visuais	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**
Comportamento assintótico do campo de vetores	Tendem para um valor limite	As soluções tendem para um valor limite
	Divergem para $\pm\infty$	As soluções divergem para $\pm\infty$

Fonte: Elaborado pela autora

Desta forma, analisando o campo de vetores dado, os alunos devem obter as seguintes conclusões:

i) Quando $x \to +\infty$, temos que:

Se $y > 1$, as soluções tendem a reta $y = 1$.

Se $y = 1$, a solução tende a reta $y = 1$.

Se $y < 1$, as soluções tendem a reta $y = 1$.

ii) Quando $x \to -\infty$, temos que:

Se $y > 1$, as soluções divergem para $+\infty$.

Se $y = 1$, as soluções tendem a reta $y = 1$.

Se $y < 1$, as soluções divergem para $-\infty$.

Variáveis didáticas: A utilização do registro simbólico-algébrico $y' = f(y)$ que não permite que o aluno aplique as técnicas de resolução algébrica da EDO.

A escolha de uma equação do tipo $y' = f(y)$, que produz um campo de vetores relativamente simples, o que permite ao aluno identificar algumas propriedades da família de soluções, como o sentido e a direção dos vetores, o crescimento (decrescimento) das soluções, a solução de equilíbrio, o comportamento assintótico das soluções etc.

Possíveis estratégias de resolução: como a atividade demandava uma interpretação do campo de vetores, ou seja, analisar as direções e os sentidos dos vetores do gráfico, não foi possível definirmos as estratégias de resolução. Contudo, esperávamos que os alunos utilizassem os conhecimentos trabalhados na Atividade 1 para lembrar que cada vetor do plano é tangente a um ponto do gráfico de uma solução de $y' = f(y)$.

Em relação às dificuldades no item a) destacamos que os alunos poderiam não perceber que o comportamento das soluções não dependia da variável x, fornecendo respostas equivocadas. Ou que eles não analisassem o comportamento das soluções para todos os intervalos possíveis $(y > 1,\ y < 1 \text{ e } y = 1)$.

Além disso, o aluno poderia fornecer a seguinte resposta:

i) Se $y > 1$, as soluções são decrescentes.

ii) Se $y = 1$, a solução é constante.

iii) Se $y < 1$, as soluções são crescentes.

Este tipo de resposta, apesar de correta, poderia indicar que o aluno não considerava que era o sinal da derivada que determinava o comportamento das soluções e, desta forma, acreditavam que este comportamento depende somente do valor da variável y.

Caso a noção de campo de vetores não estivesse clara para os alunos, eles poderiam analisar a direção e o sentido dos vetores do gráfico, obtendo, de forma equivocada, informações sobre o comportamento da derivada.

i) Se $y > 1$, a derivada é decrescente.

ii) Se $y = 1$, a derivada é constante.

iii) Se $y < 1$ a derivada é crescente.

Outra dificuldade poderia ocorrer caso o aluno tentasse resolver algebricamente a equação. Como o registro fornecido não possui informações para aplicar alguma técnica de resolução algébrica, o aluno seria levado a cometer algum erro ao persistir em resolver a EDO.

Acreditávamos que os alunos não teriam dificuldades em traçar as curvas soluções, contudo, era possível que seus traços não respeitassem a solução de equilíbrio ou que alguns traços se cruzassem.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, a pesquisadora poderia retomar o conceito de campo de vetores, caso considerasse necessário. Se os alunos esquecessem de analisar algum intervalo de crescimento, a pesquisadora poderia questioná-los de forma a levá-los a perceber todas as variações do gráfico. Contudo, a proposta era que qualquer dificuldade e/ou erro que aparecesse seria explorado na discussão da atividade.

3.4.4 Análise *a priori* da Atividade 4

Esta atividade foi incluída na sequência devido à dificuldade que os alunos apresentaram na resolução da Atividade 2. Assim, após as discussões das Atividades 2 e 3, aplicamos esta atividade com o intuito de verificar a compreensão dos alunos em relação às discussões anteriores. Desta forma, ela possuía as mesmas caraterísticas da Atividade 2 e, portanto, todas as observações realizadas na Atividade 2 podem ser estendidas a esta atividade.

Atividade 4
Seja y uma função derivável e definida em $\mathbb{R}$. Sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $y' = -3y - 7$. Faça um estudo sobre o comportamento das soluções desta equação.

Assim como a Atividade 2, esta atividade foi proposta no domínio da AA e requeria uma mudança para o domínio das F e uma mudança do RSA para o RLNE (Quadro 21). Dependendo da estratégia utilizada, o aluno poderia utilizar domínios e registros de representação auxiliares.

Quadro 21: Variáveis visuais e as variações simultâneas nas soluções para a Atividade 4

RSA EDO		**RLNE Soluções**
Unidades significativas	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**
Sinal de y'	$y' > 0$ para $y < -7/3$	As soluções são estritamente crescentes
	$y' = 0$ para $y = -7/3$	A solução é constante
	$y' < 0$ para $y > -7/3$	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

Variáveis didáticas: A escolha pela equação $y' = -3y - 7$, que assim como na Atividade 2, não era uma equação explícita em relação à variável independente (x), poderia favorecer a utilização de uma análise qualitativa da equação.

Subtraímos a constante 7, com a intenção de que, caso os alunos utilizassem o campo de vetores, eles precisassem recorrer ao registro SA para determinar, com precisão, a solução de equilíbrio $y = \dfrac{-7}{3}$. Além disso, a inclusão dessa constante resulta em uma translação da solução de equilíbrio em relação a solução de equilíbrio da Atividade 2.

Prováveis estratégias de resolução: As estratégias eram análogas as da Atividade 2, contudo, esperávamos uma maior utilização das estratégias $A4E_1$ e $A4E_3$, pois como os alunos já resolveram e discutiram a Atividade 2, acreditávamos que eles se baseassem nos processos de resoluções vistos e os utilizassem nesta atividade.

$A4E_1$: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função *y*. Para isso, os alunos deveriam analisar para quais valores de y a derivada é positiva, negativa ou nula. Obtendo o seguinte resultado:

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:

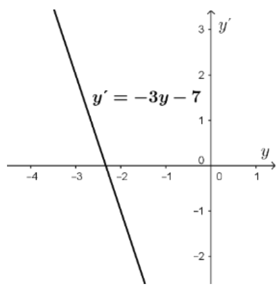
i) Se $y > -\dfrac{7}{3}$ temos que $y' < 0$, portanto, as soluções são estritamente decrescentes.

ii) Se $y = -\frac{7}{3}$ temos que $y = 0,$ portanto, a solução é constante.

iii) Se $y < -\frac{7}{3}$ temos que $y' > 0,$ portanto, as soluções são estritamente crescentes.

A4E2: Utilizar o gráfico da derivada para obter as mesmas informações anteriores (Figura 42).

Figura 42: Gráfico de $y' = -3y - 7$

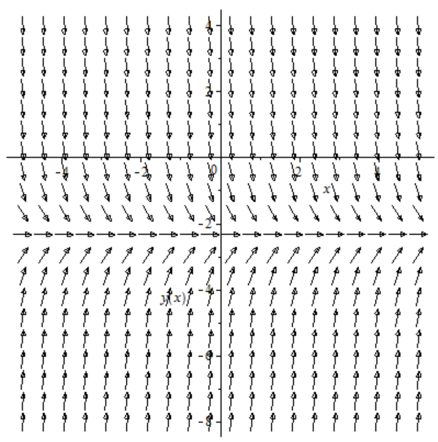


Fonte: Elaborado pela autora

Embora fosse uma estratégia possível, não esperávamos que os alunos a utilizassem pelo uso incomum da derivada como uma função dependente da variável y.

A4E3: Com o auxílio do software Maple, construir o campo de vetores para a equação dada e analisar o problema utilizando o gráfico.

Figura 43: Campo de vetores para $y' = -3y - 7$



Fonte: Elaborado pela autora

Diferente da Atividade 2, na qual não esperávamos que os alunos utilizassem o campo de vetores, acreditávamos que, para esta atividade, esse recurso pudesse ser requerido. A mudança do RSA para o RG realizada ao construir o campo de vetores, neste caso, seria feita com o auxílio do software Maple.

De modo análogo à Atividade 3, o aluno precisava identificar as variáveis visuais do gráfico e relacioná-las com o comportamento das soluções (segunda e terceira colunas do Quadro 22).

Além disso, o aluno precisava coordenar os RG e RSA, de modo a verificar se a EDO estudada possui o campo de vetores igual ao apresentado pelo software (procedimento informático de interpretação global). Assim, era necessário identificar as unidades significantes no registro simbólico-algébrico e variáveis visuais do registro gráfico e relacionar com as variações que ocorrem nas soluções.

Quadro 22: Unidades significativas para EDO, campo de vetores e as variações simultâneas nas soluções

<table>
<tr><th colspan="2">RSA
EDO</th><th colspan="2">RG
Campo de Vetores</th><th>RLNE
Soluções</th></tr>
<tr><th>Unidades significativas</th><th>Valores</th><th>Unidades visuais</th><th>Valores</th><th>Variações simultâneas nas soluções</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Sinal de y'</td><td>$y' > 0$ para $y < -7/3$</td><td rowspan="3">Sentido da inclinação dos vetores no plano</td><td>Ascendentes</td><td>As soluções são estritamente crescentes</td></tr>
<tr><td>$y' = 0$ para $y = -7/3$</td><td>Sem inclinação</td><td>A solução é constante</td></tr>
<tr><td>$y' < 0$ para $y > -7/3$</td><td>Descendentes</td><td>As soluções são estritamente decrescentes</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora

A4E4: Resolver a equação diferencial e utilizar a expressão algébrica da família de soluções para analisar o comportamento da função y.

$$y' = -3y - 7$$

$$y' = -3\left(y - \frac{7}{3}\right)$$

$$\frac{1}{\left(y - \frac{7}{3}\right)} y' = -3$$

$$\int \frac{1}{\left(y - \frac{7}{3}\right)} y' dx = \int -3dx$$

$$\int \frac{1}{\left(y - \frac{7}{3}\right)} dy = -3\int dx$$

$$\ln\left|y - \frac{7}{3}\right| = -3x + C_1$$

$$\left|y - \frac{7}{3}\right| = e^{-3x + C_1}$$

$$y = Ce^{-3x} + \frac{7}{3},\ C \in \mathbb{R}$$

Assim, sendo $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{7}{3}$, temos que $f'(x) = -3Ce^{-3x}$ como $-3e^{-3x}$ é sempre negativo, então, o sinal da derivada depende do valor da constante C, logo,

i) Se $C > 0$, $y' > 0$ o que implica y estritamente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Se $C = 0$, $y' = 0$ o que implica y constante $\forall x \in \mathbb{R}$.

iii) Se $C < 0$, $y' < 0$ o que implica y estritamente decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esperávamos que os alunos não apresentassem dificuldades em resolver esta atividade, pois já teriam a experiência das Atividade 2 e 3.

Durante o desenvolvimento da atividade, a pesquisadora poderia auxiliar os alunos com a utilização do software, caso eles solicitassem. Ou com outras dúvidas em relação ao Teorema 1, ao campo de vetores, entre outras coisas. Porém, sempre tentando interferir o mínimo possível no desenvolvimento das atividades.

3.4.5 Análise *a priori* da Atividade 5

Esta atividade mantinha as mesmas características das Atividades 2 e 4, com o objetivo de reforçar os conceitos trabalhados, como as mudanças no comportamento das soluções a partir de mudanças nos valores da derivada. E também pedia um estudo do comportamento assintótico das soluções a partir da expressão algébrica da EDO.

Atividade 5

a) Analise o comportamento das soluções da equação $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 9}{4}$.

b) Qual o comportamento das soluções da equação do item anterior quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$?

A atividade foi proposta no domínio da AA e requeria uma mudança para o domínio das F e uma conversão do RSA para o RLNE.

Variáveis didáticas: A escolha da equação $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 9}{4}$ que, embora seja uma EDO autônoma, é não linear. E diferente das equações das Atividades 2 e 4, requer uma resolução algébrica mais elaborada, pois envolve a resolução de integrais por decomposição em frações parciais. Este fato poderia levar o aluno a recorrer a uma mudança para o domínio da GA, utilizando o campo de vetores para obter as informações necessárias, principalmente para analisar o item b).

Prováveis estratégias de resolução para o item a): As possíveis estratégias para resolver as questões propostas são análogas às da Atividade 2, a diferença está na expressão analítica da EDO que é uma equação não linear.

A5E1a: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função y, determinando para quais valores de y a derivada é positiva, negativa ou nula.

Assim, é preciso resolver as inequações $\frac{y^2-9}{4} > 0$, $\frac{y^2-9}{4} < 0$ e a equação $\frac{y^2-9}{4} = 0$, obtendo o seguinte resultado:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

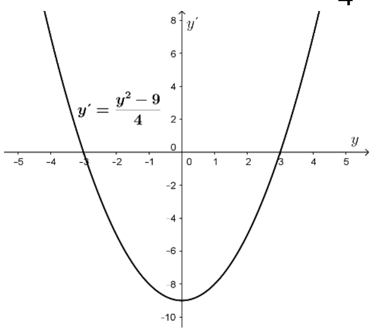
i) Se $y < -3$ ou $y > 3$ a derivada é positiva, portanto, as soluções são estritamente crescentes.

ii) Se $-3 < y < 3$ a derivada é negativa, portanto, as soluções são decrescentes.

iii) Se $y = -3$ ou $y = 3$ a derivada é nula, portanto, as soluções são constantes.

A5E2a: Analisar o gráfico da Figura 44 obtendo as mesmas respostas dadas anteriormente.

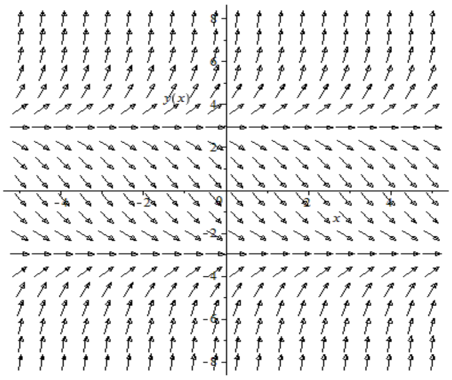
Figura 44: Gráfico de $y' = \frac{y^2-9}{4}$



Fonte: Elaborado pela autora

A5E3a: Analisar o campo de vetores da equação fornecida.

Figura 45: campo de vetores para $y' = \frac{y^2-9}{4}$



Fonte: Elaborado pela autora

Para isso, o aluno precisava realizar uma mudança do domínio da AA para o domínio da GA e uma mudança do RSA para o RG, esta mudança seria realizada com o auxílio do software, porém, era necessário que o aluno conseguisse identificar se o gráfico apresentado pelo software era o campo de vetores para a equação estudada. Em seguida, para responder à situação proposta, era preciso uma mudança do domínio da GA para o domínio das F e conversão do RG para o RLNE.

Quadro 23: Unidades significativas, variáveis visuais e as variações nas soluções para $y' = \frac{y^2-9}{4}$

RSA EDO		**RG Campo de Vetores**		**RLNE Soluções**
Unidades significativas	**Valores**	**Variáveis visuais**	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**
Sinal de y'	$y' > 0$ para $y < -3$ ou $y > 3$	Sentido da inclinação dos vetores no plano	Ascendentes (inclinação positiva)	As soluções são estritamente crescentes
	$y' = 0$ para $y = \pm 3$		Sem inclinação	As soluções são constantes
	$y' < 0$ para $-3 < y < 3$		Descendentes (inclinação negativa)	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

O quadro anterior ilustra as unidades significativas, as variáveis visuais e as variações simultâneas para as soluções da EDO, o que difere da Atividade 2 e 4 é que existem três diferentes intervalos de crescimento (decrescimento) em relação à variável y e duas soluções de equilíbrio.

A5E$_{4a}$: Resolver algebricamente a equação diferencial:

$$y' = \frac{y^2-9}{4}$$

$$\frac{1}{y^2-9}y' = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{y^2-9}y'dx = \int \frac{1}{4}dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-9}dy = \frac{1}{4}x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

A técnica de resolução é similar a das Atividades 2 e 4, a dificuldade que pode aparecer vem do tipo de integral resultando no processo de resolução. Para resolver a integral do lado esquerdo da igualdade acima é preciso fazer a decomposição do integrando em frações parciais. Desta forma:

$$\frac{1}{y^2-9}=\frac{1}{(y-3)(y+3)}$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{1}{(y-3)(y+3)}=\frac{A}{y-3}+\frac{B}{y+3}$$
$$\frac{1}{(y-3)(y+3)}=\frac{A(y+3)+B(y-3)}{(y-3)(y+3)}.$$

Igualando os numeradores das frações acima, obtemos:

$$1=(A+B)y+3A+3B.$$

Que resulta no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição da primeira equação, temos que $A=-B$, substituindo na segunda:

$$3A-3B=1$$
$$-3B-3B=1$$
$$B=-\frac{1}{6}$$

Substituindo o valor de B na primeira equação, temos que $A=\frac{1}{6}$. Assim, a fração $\frac{1}{(y-3)(y+3)}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{(y-3)(y+3)}=\frac{1}{6\left(y-3\right)}-\frac{1}{6\left(y+3\right)}$$

Com essas novas frações podemos resolver a integral:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y^2-9}dy&=\frac{1}{6}\int\frac{1}{y-3}dy-\frac{1}{6}\int\frac{1}{y+3}dy\\&=\frac{1}{6}\ln|y-3|-\frac{1}{6}\ln|y+3|+C_2,\ C_2\in\mathbb{R}\\&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right|+C_2\end{aligned}$$

Substituindo este valor em $\int\frac{1}{y^2-9}dy=\frac{1}{4}x+C_1,$ temos que

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right|+C_2=\frac{1}{4}x+C_1$$

$$\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right|=\frac{3}{2}x+C_3$$

$$\frac{y-3}{y+3}=e^{\frac{3}{2}x+C_3}$$

$$\frac{y-3}{y+3}=Ce^{\frac{3}{2}x}$$

$$y-3=(y+3)Ce^{\frac{3}{2}x}$$

$$y=\frac{3+3Ce^{\frac{3}{2}x}}{1-Ce^{\frac{3}{2}x}}$$

A constante C representa as operações com as constantes C_1, C_2 e e^{C_3}. Observe que, com esta solução, não conseguimos obter a solução de equilíbrio $y=-3$, esta solução só é determinada analisando a EDO ou seu campo de vetores.

Calculando a derivada de $y=\dfrac{3+3Ce^{\frac{3}{2}x}}{1-Ce^{\frac{3}{2}x}}$, obtemos $y'=\dfrac{9Ce^{\frac{3}{2}x}}{\left(1-Ce^{\frac{3}{2}x}\right)^2}$, como o denominador é sempre positivo e $e^{\frac{3}{2}x}$ também, temos que a constante C determina o sinal da derivada:

i) Se $C>0$ temos que a derivada é positiva, portanto as funções são crescentes.

ii) Se $C=0$ temos que a derivada é nula e a solução é constante.

iii) Se $C<0$ temos que a derivada é negativa e as soluções decrescentes.

Prováveis estratégias para o item b): para este item, previmos somente uma estratégia, que era a análise do campo de vetores, obtendo as seguintes conclusões:

Para $t\to+\infty$ temos que:

i) Se $y>3$, as soluções vão para o infinito positivo.

ii) Se $-3<y<3$, as soluções tendem a reta $y=-3$.

iii) Se $y<-3$, as soluções tendem a reta $y=-3$

iv) Se $y=3$, a solução tende a reta $y=3$.

v) Se $y=-3$, a solução tende a reta $y=-3$.

Para $t\to-\infty$ temos que:

i) Se $y > 3$, as soluções tendem a reta $y = 3$.

ii) Se $-3 < y < 3$, as soluções tendem a reta $y = 3$.

iii) Se $y < -3$, as soluções vão para o infinito negativo.

iv) Se $y = 3$, a solução tende a reta $y = 3$.

v) Se $y = -3$, a solução tende a reta $y = -3$.

Algumas dificuldades relacionadas com este item poderiam vir de problemas relacionados com uso do software. Além disso, como a análise precisava ser dividida em várias partes (dependendo do valor da variável y), os alunos poderiam esquecer de analisar o comportamento das soluções para alguns valores da variável y. Contudo, esperávamos um aumento significativo de acerto nas respostas desta atividade em relação ao item c) da Atividade 3.

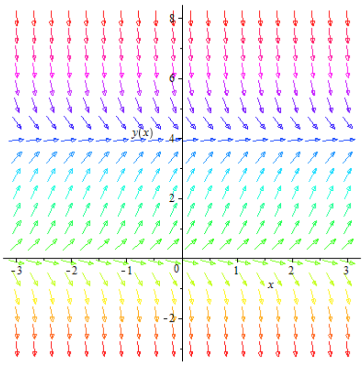
3.4.6 Análise *a priori* da Atividade 6

Esta atividade fazia a associação entre a EDO e seu campo de vetores.

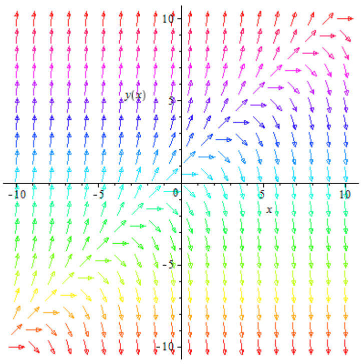
Atividade 6

Associe, a cada campo de vetores abaixo, uma das equações diferenciais ordinárias: $y' = y - x$, $y' = -2y - 4$ e $y' = -y^2 + 4y$. Justifique sua resposta.

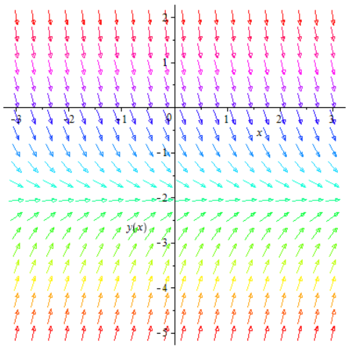
a)



b)



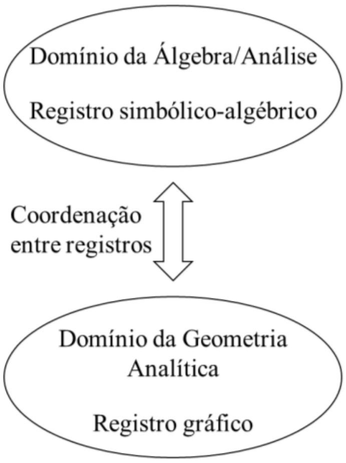
c)



Esta atividade tinha como objetivo fazer com que o aluno relacionasse a EDO com seu respectivo campo de vetores. Para isso, era preciso comparar as informações apresentadas no gráfico com as informações fornecidas pela EDO. Mesmo que utilizassem o computador para obter o campo de vetores, era necessário justificar a relação entre as duas representações.

A Atividade foi proposta no domínio da AA (EDO) e no domínio da GA (campo de vetores) e utilizava dois registros de representação: o RSA e o RG. Assim, o aluno precisava coordenar as informações em ambos os registros (Figura 46) de modo a obter informação para justificar as relações entre EDO e campo de vetores.

Figura 46: Coordenação entre os registros requerida para a Atividade 6



Fonte: Elaborado pela autora

Variáveis didáticas: A escolha das expressões algébricas das equações, sendo a primeira do tipo $y' = f(x, y)$ e as duas seguintes do tipo $y' = f(y)$.

A escolha pelas equações $y' = -2y - 4$ e $y' = -y^2 + 4y$ se deu pelo fato de os alunos já estarem habituados (pelo desenvolvimento das atividades anteriores) com a análise desse tipo de equação, o que poderia ajudá-los a traçar estratégias de resolução para a equação do tipo $y' = f(x, y)$. A escolha da equação $y' = y - x$ tinha como objetivo proporcionar aos alunos um contato com as equações não autônomas, evitando que eles pensassem que a variação do sinal da derivada depende sempre do valor da variável dependente.

Possíveis estratégias de resolução: Para resolver a atividade era preciso a coordenação entre o RSA e o RG. Assim, os alunos deveriam procurar as informações em um registro e comparar com as informações obtidas em outro, obtendo as seguintes conclusões:

O campo de vetores da letra a) corresponde a EDO $y' = -y^2 + 4y$, o quadro a seguir ilustra as relações que os alunos podem fazer para chegar a esta afirmação. A utilização da terceira coluna dos próximos três quadros, poderia ser requerida como forma de auxiliar as relações entre a EDO e o campo de vetores, porém, não são necessárias, uma vez que as informações contidas nas duas primeiras colunas já eram suficientes para responder à situação proposta.

Quadro 24: Sinal da derivada e sentido dos vetores para a equação $y' = -y^2 + 4y$

RSA EDO		RG Campo de Vetores		RLNE Soluções
Unidade significativa	**Valores**	**Variável visual**	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**
Sinal de y'	$y' > 0$ para $0 < y < 4$	Sentido da inclinação dos vetores	Ascendentes para $0 < y < 4$	As soluções são estritamente decrescentes
	$y' = 0$ para $y = 0$ ou $y = 4$		Sem inclinação para $y = 0$ e $y = 4$	As soluções são constantes
	$y' < 0$ para $y < 0$ e $y > 4$		Descendentes para $y < 0$ e $y > 4$	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

O campo de vetores da letra b) corresponde a EDO $y' = y - x$, o Quadro 25 ilustra as relações que os alunos poderiam fazer para chegar a esta afirmação.

Quadro 25: Sinal da derivada e sentido dos vetores para a equação $y' = y - x$

RSA EDO		RG Campo de Vetores		RLNE Soluções
Unidade significativa	**Valores**	**Variável visual**	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**
Sinal de y'	$y' > 0$ para $y > x$	Sentido da inclinação dos vetores	Ascendente para $y > x$	As soluções são estritamente crescentes
	$y' = 0$ para $y = x$		Sem inclinação para $y = x$	As soluções são possuem um ponto máximo
	$y' < 0$ para $y < x$		Descendente Para $y < x$	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

O campo de vetores da letra b) corresponde a EDO $y' = -2y - 4$, o Quadro 26 ilustra as relações que os alunos poderiam fazer para chegar a esta afirmação.

Quadro 26: Sinal da derivada e sentido dos vetores para a equação $y' = -2y - 4$

RSA EDO		RG Campo de Vetores		RLNE Soluções
Unidade significativa	**Valores**	**Variável visual**	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**

Sinal de y'	$y' > 0$ para $y < -2$	Sentido da inclinação dos vetores	Ascendentes para $y < -2$	As soluções são estritamente decrescentes
	$y' = 0$ para $y = -2$		Sem inclinação para $y = -2$	A solução é constante
	$y' < 0$ para $y > -2$		Descendentes para $y > -2$	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos poderiam relacionar as EDOs com seus campos de vetores apenas analisando algumas propriedades em ambos os registros (RSA e RG), por exemplo, identificando as soluções de equilíbrio. Neste caso, a pesquisadora pediria aos alunos para que eles escrevessem todas as relações que eram possíveis identificar entre a EDO e seu campo de vetores.

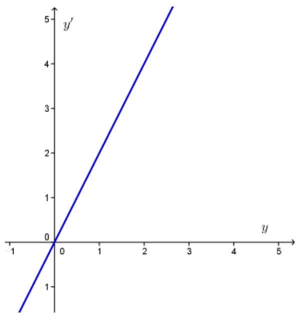
Não esperávamos que os alunos apresentassem dificuldades na resolução dessa atividade. Contudo, embora conseguissem relacionar a $y' = y - x$ com seu campo de vetores, os alunos poderiam não conseguir compreender o fato de a equação depender tanto dos valores da variável y como dos valores da variável x, isso seria explorado pela pesquisadora durante a discussão desta atividade.

3.4.7 Análise *a priori* da Atividade 7

Esta atividade pedia que o aluno analisasse o comportamento das soluções de uma equação do tipo $y' = f(y)$ utilizando o gráfico da derivada.

Atividade 7[39]

Para a equação diferencial $y' = f(y)$, o gráfico de f é dado abaixo. Usando este gráfico, comente o comportamento das soluções desta equação. O que podemos dizer sobre as curvas soluções que passam pelo ponto (2, 2), (-1,3), (0,-1)?



[39]Adaptado de Arslan (2005, p. 134).

O objetivo desta atividade era que o aluno obtivesse as informações sobre o comportamento das soluções da EDO, utilizando-se exclusivamente da representação gráfica da derivada.

Esta atividade não é uma atividade habitual para o estudo das EDOs, pois, na análise que realizamos dos dois livros de EDO, verificamos que nenhum dos autores utilizam este tipo de abordagem (gráfico da derivada) para a análise do comportamento das soluções.

Assim, para obter as informações necessárias, o aluno precisava reconhecer a derivada como uma função dependente da variável y. Dessa forma, a situação era proposta no domínio F e utilizava o RG, pois, apesar de apresentar a EDO no RSA, $y' = f(y)$, este registro não fornecia informações para resolver a situação proposta.

Desta forma, era preciso identificar as variáveis visuais do gráfico de f e verificar as variações concomitantes no comportamento das soluções. O quadro abaixo é uma adaptação do Quadro 18 (p. 128), apresentado na Atividade 2, contendo os valores de y para os quais a derivada muda de sinal.

Quadro 27: Variáveis visuais e as variações simultâneas nas soluções para a EDO da Atividade 7

RG **EDO**			**RLNE** **Soluções**
Variáveis visuais	**Variáveis visuais**	**Sinal da derivada**	**Variações simultâneas para as soluções**
Posição do traçado em relação ao eixo das abscissas	O traçado está acima do eixo para $y > 0$	$y' > 0$ para $y > 0$	As soluções são estritamente crescentes
	O traçado está sobre do eixo $y = 0$	$y' = 0$ para $y = 0$	A solução é constante
	O traçado está abaixo do eixo $y < 0$	$y' < 0$ para $y < 0$	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Elaborado pela autora

Observe que a conclusão final ocorre a partir da análise do sinal da derivada, o que recai na mesma interpretação da Atividade 2, contudo, a variação de sinal da derivada é obtida utilizando o RG.

Variáveis didáticas: A EDO foi fornecida no RSA, sem apresentar a sua expressão algébrica, assim, a única forma de obter informações sobre as soluções da EDO era pela análise do seu gráfico da derivada.

A escolha pela representação gráfica da derivada sendo uma reta, ou seja, um tipo de representação gráfica que os alunos já conheciam.

Possíveis estratégias de resolução: Pelo fato de a EDO, no RSA, não fornecer informações suficientes para analisar o sinal da derivada algebricamente ou para aplicar alguma técnica de resolução algébrica, a única estratégia de resolução possível era a análise do gráfico. Dessa forma, os alunos precisavam identificar as variáveis visuais do gráfico, obtendo o seguinte resultado:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

i) Se $y > 0$, então a derivada é positiva e, portanto, as soluções são estritamente crescentes.

ii) Se $y = 0$, então a derivada é nula e, portanto, a solução é constante.

iii) Se $y < 0$, então a derivada é negativa e, portanto, as soluções são estritamente decrescentes.

E utilizando esses dados para analisar o valor de y de cada ponto (x, y) dado, obtendo:

i) Para (2, 2), o valor de $y > 0$, a derivada é positiva e, portanto, a solução é estritamente crescente.

ii) Para (-1, 3), o valor de $y > 0$, a derivada é positiva e, portanto, a solução é estritamente crescente.

iii) Para (0, -1), o valor de $y < 0$, a derivada é negativa e, portanto, a solução é estritamente decrescente.

Considerando o fato de que, normalmente, no ensino e na aprendizagem das EDOs o gráfico é utilizado como um ideograma e o eixo das abscissa representado pela variável independente x e o das ordenadas pela variável dependente y, os alunos, embora já tivessem tido contato com uma EDO do tipo $y' = f(y)$, poderiam apresentar dificuldades em analisar um gráfico no qual o eixo das abscissa representa a variável independente y e o eixo das ordenadas representa a variável dependente y'.

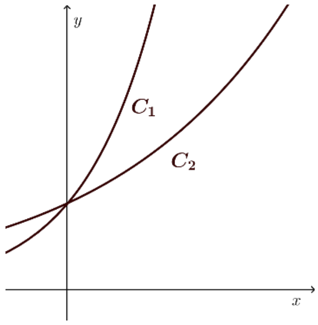
Neste caso, a pesquisadora poderia auxiliá-los com outros exemplos, como analisar o gráfico de uma função $y = f(x)$ e depois analisar o gráfico de funções nas quais a variável independente não é a variável x ($z = f(w)$, $x = f(s)$, ...).

3.4.8 Análise *a priori* da Atividade 8

Esta atividade solicitava que o aluno, conhecendo a representação gráfica de uma das soluções da equação $y' = 5y$, determinasse se a outra curva, representada no gráfico, também era solução da EDO dada.

Atividade 8[40]

A figura abaixo ilustra o esboço da curva C_1 que é uma solução da equação diferencial $y' = 5y$. A curva C_2 pode ser uma outra solução? Justifique.



O aluno deveria analisar a possibilidade de que duas curvas, soluções da EDO $y' = 5y$, se interceptem em algum ponto do plano. A unicidade das soluções da equação dada é garantida pelo Teorema da Existência e Unicidade[41], contudo, nesta atividade, não pretendíamos utilizar este teorema formalmente, o objetivo era que, baseado nas atividades anteriores, o aluno compreendesse que, no ponto (x_0, y_0), passa uma e somente uma curva solução da equação diferencial $y' = 5y$.

A atividade foi proposta em dois domínios: o domínio da AA (EDO) e o domínio das F (soluções); e utiliza os registros RSA e RG. Para analisar a situação proposta, o aluno precisava coordenar os dois registros. Dependendo da estratégia utilizada, ele poderia recorrer a registros e a domínios diferentes.

Variáveis didáticas: A opção foi pela representação gráfica das curvas soluções *C_1* e *C_2*, pois, se fosse dada a lei de formação das funções, a resolução se tornaria imediata, com um tratamento no RSA, por exemplo, dada a função $y(x) = 2e^{5x}$ bastaria substituí-la na equação para verificar se ela é solução ou não:

$$y' = 5y$$
$$(2e^{5x})' = 5 \cdot 2e^{5x}$$
$$5 \cdot 2e^{5x} = 5 \cdot 2e^{5x} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Este tipo de verificação, normalmente, é a única forma utilizada nos livros que versam sobre EDO. Sem a lei de formação da função, o aluno é levado a recorrer a outras ferramentas

[40]Adaptada de Arslan (2005, p. 124).

[41] Seja *R* uma região retangular no plano *xy* definida por $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são contínuas em *R*, então, existe um intervalo *I* centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em *I* que satisfaz o problema de valor inicial $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$.

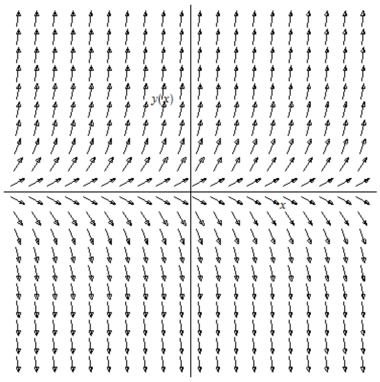
matemáticas, como o conceito de reta tangente, questionando-se, em um mesmo ponto, se é possível ter retas tangentes com inclinações diferentes.

Possíveis estratégias de resolução:

A8E1: Utilizar o conceito de reta tangente para mostrar que, em qualquer ponto (x_0, y_0) da reta tangente ao gráfico, a solução da equação $y' = 5y$ tem coeficiente angular m dado por $5y_0$. Desta forma, analisando o gráfico das funções C_1 e C_2 podemos observar que, no ponto de interseção das curvas, as retas tangentes a elas, possuem coeficientes angulares diferentes, portanto, C_2 não é solução de $y' = 5y$.

A8E2: Com o auxílio do software, esboçar o campo de vetores para a equação dada. Analisando este campo, observar que os vetores do campo não se interceptam, levando a conclusão de que C_2 não é solução da equação dada.

Figura 47: Campo de vetores para $y' = 5y$



Fonte: Elaborado pela autora

A8E1: Resolver algebricamente a EDO:

$$y' = 5y$$

$$\frac{1}{y} y' = 5$$

$$\int \frac{1}{y} y' dx = \int 5 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 5 \int dx$$

$$\ln|y| = 5x + b$$

$$y = e^{5x+b}$$

$$y = ae^{5x}, \ a \in \mathbb{R}$$

Obtendo a solução geral $y = ae^{5x}$, $a \in \mathbb{R}$, averiguar que, para quaisquer duas soluções $y_1 = a_1 e^{5x}$ e $y_2 = a_2 e^{5x}$, temos que $y_1 = y_2$, se e somente se, $a_1 = a_2$ e esta igualdade se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$ e não somente em um ponto conforme ilustra o gráfico da Atividade 8. Assim, ou y_1 e y_2 não se interceptam ou são a mesma curva. Desta forma, a curva C_2 não pode ser solução da equação dada.

Uma dificuldade que poderia surgir era que, utilizando-se das conclusões das atividades anteriores, os alunos observassem que as equações do tipo $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, possuem como soluções funções do tipo exponencial e, analisando o gráfico, verificassem que ambas as curvas possuem o comportamento próximo de uma função exponencial, concluindo que C_2 também é uma solução para $y' = 5y$.

Caso os alunos não conseguissem resolver esta atividade, a pesquisadora poderia sugerir que os alunos, utilizando o software Maple, traçassem algumas curvas soluções sobre o campo de vetores e observassem o comportamento destas curvas comparando com o gráfico da Atividade 8.

3.4.9 Análise *a priori* da Atividade 9

Esta atividade simulava uma situação envolvendo um problema de dinâmica populacional, com o intuito de retomar o conceito de derivada como taxa de variação.

Atividade 9 [42]

Considere uma população de ratos que habita certa área rural. Na ausência de predadores, a população cresce a uma taxa proporcional à população atual. Suponhamos que o tempo seja medido em meses e que a taxa de crescimento tem o valor de 0,5 por mês.

a) Escreva uma equação diferencial cuja solução é a população de ratos por mês.

b) Suponha que exista predadores que moram na mesma vizinhança e que eles matam 15 ratos por dia. Qual seria a equação diferencial que representa esta nova situação? O que acontece com esta população de ratos com o passar do tempo?

c) Transforme a equação diferencial obtida em a), em um problema de valor inicial. Estude a solução do problema para o valor inicial que você determinou.

Apesar de não ser uma atividade de Modelagem Matemática, pois a situação é fictícia e o problema foi apresentado de forma fechada, a atividade tinha por objetivo introduzir a ideia

[42] Adaptada de Boyce; Diprima (2013, p. 4).

de formular um modelo matemático por meio de uma expressão matemática, de um problema extramatemático e retomar o conceito de derivada como taxa de variação, para que este fosse aplicado nos problemas da fase 2.

O problema foi proposto em um domínio não matemático, desta forma, para uma análise matemática, era preciso levar o problema para um domínio matemático (domínio da Álgebra/Análise). Para isso, o aluno precisava escrever a situação em linguagem matemática, fazendo uma conversão do RLNE (registro de partida) para o RSA (registro de chegada).

A frase "a população cresce a uma taxa proporcional a população atual" pode ser traduzida para a linguagem matemática utilizando a seguinte expressão no registro simbólico-algébrico: $\frac{dP}{dt} = \alpha P$, com P sendo a população de ratos, t o tempo e α uma constante de proporcionalidade.

Quadro 28: Unidades significativas para os registros envolvidos na Atividade 9

RLNE **Enunciado**	**RSA** **EDO**
Unidades linguísticas	**Unidades significativas**
A população cresce a uma taxa	$\frac{dP}{dt}$
Proporcional à	α
População atual	P

Fonte: Elaborado pela autora

A conversão do RLNE para o RSA é congruente, pois satisfaz as três condições de Duval (2003), ou seja, existe correspondência semântica das unidades de significado, unicidade semântica terminal e conservação da ordem das unidades, conforme ilustra o Quadro 28. Nesse sentido, acreditávamos que os alunos não teriam dificuldades em realizar esta conversão.

Variáveis didáticas: A escolha pelo RLNE propiciando a mudança para o RSA. O uso do RLNE faz com que o aluno precise pensar na EDO como taxa de variação e recorde o conceito de proporcionalidade.

No item c) optamos que o próprio aluno elaborasse seu PVI, com o intuito de que eles percebessem que poderiam escolher o valor inicial para a população, desde que respeitassem as condições da situação, por exemplo, não pode ter uma população inicial negativa.

Prováveis estratégias de resolução:

Para o item a) esperávamos que os alunos realizassem a conversão do Quadro 28, chegando a expressão matemática $\frac{dP}{dt} = 0,5P$, sendo que 0,5 representa a constante de proporcionalidade α. Este valor foi fornecido no enunciado da atividade, sendo assim, o aluno precisava identificá-lo e substituí-lo na equação.

Para o item b) o aluno precisava adequar a EDO obtida no item anterior para a nova situação, na qual quinze ratos eram mortos por dia. Neste caso, o aluno precisava perceber que, embora a população ainda crescesse a uma taxa proporcional a ela mesma, este crescimento era afetado por uma perda fixa e diária de ratos. Dessa maneira, a taxa de crescimento mensal da população seria dada pela expressão obtida no item a), $\frac{dP}{dt}=0,5P$, menos a quantidade de ratos mortos ao mês, ou seja, a quantidade de ratos mortos por dia multiplicado por trinta dias. Assim, a nova EDO seria expressa por:

$$\frac{dP}{dt}=0,5P-450$$

Para analisar o que acontece com a população com o passar do tempo, esperávamos que os alunos utilizassem as estratégias de análise das atividades anteriores:

A9E1b: Analisar o sinal da derivada e fazer inferências em relação ao comportamento da população, obtendo as seguintes conclusões:

Com o passar do tempo:

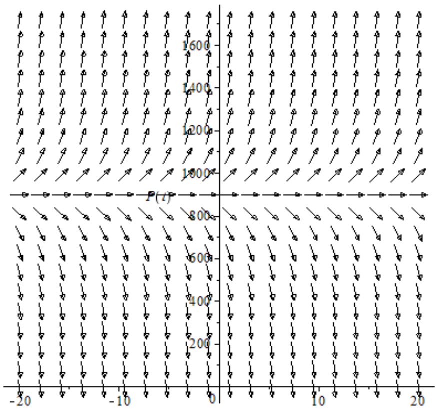
i) Se $P>900 \Rightarrow \frac{dP}{dt}>0$, a população de ratos cresce sem limite.

ii) Se $P=900 \Rightarrow \frac{dP}{dt}=0$, a população de ratos se mantém constante.

iii) Se $P<900 \Rightarrow \frac{dP}{dt}<0$, a população de ratos será exterminada.

A9E2b: Analisar o campo de vetores para $\frac{dP}{dt}=0,5P-450$, obtendo respostas análogas a da estratégia anterior.

Figura 48: Campo de vetores para a EDO da Atividade 9



Fonte: Elaborado pela autora

Para o item c) esperávamos que os alunos formulassem seu próprio PVI e analisassem a situação a partir dos dados escolhidos por eles. Esta análise poderia ser realizada utilizando as mesmas estratégias previstas para o item b).

Uma dificuldade que poderia surgir era que os alunos não recordassem que a derivada pode ser interpretada como taxa de variação de uma quantidade em relação a outra quantidade. Neste caso, a pesquisadora poderia retomar essa noção com os alunos.

3.5 Análise *a priori* das atividades da fase 2

Nesta seção apresentamos as análises *a priori* dos problemas no contexto da Modelagem Matemática. Ressaltamos que, diferentemente das atividades anteriores, as análises *a priori* para esses problemas se tratam de possibilidades, pelo fato de que não sabemos *a priori* como a atividade será realizada, por exemplo, não podemos garantir o uso da EDO. Além disso, as questões levantadas durante o desenvolvimento da atividade conduzem a diferentes estratégias de resolução. Contudo, apresentamos seus objetivos e alguns delineamentos possíveis para a resolução, tomando como base o interesse dos alunos e as suas participações durante o curso.

Nesta fase, o papel da pesquisadora como orientadora dos alunos no desenvolvimento dos problemas, foi o de conduzir os estudantes ao processo investigativo, característico da Modelagem Matemática, auxiliando-os a pensar matematicamente sobre as questões envolvidas no problema sem, no entanto, impor uma resolução, ou um encaminhamento.

O tema dos dois primeiros problemas de Modelagem Matemática, descritos nesta seção, surgiram no decorrer do curso durante conversas entre a pesquisadora e os alunos. O tema do terceiro problema foi definido por cada grupo sem interferência da pesquisadora. Como as escolhas dos temas dos problemas ocorreram em aulas anteriores ao seu desenvolvimento, foi possível que realizássemos suas análises *a priori*.

3.5.1 Análise *a priori* do primeiro problema de Modelagem Matemática

A primeira atividade deste tipo que desenvolvemos com os alunos foi uma situação envolvendo o tema decaimento radioativo.

Tema proposto: Acidente radioativo com o Césio-137 na cidade de Goiânia, em 1987.

Este tema surgiu no decorrer de uma conversa entre a pesquisadora e os alunos no dia 03/09/15. A pesquisadora questionou os alunos se eles conheciam alguma aplicação de EDO, a intenção da pesquisadora, neste dia, era que os alunos falassem sobre dinâmica populacional para que ela pudesse introduzir a Atividade 9, simulando um contexto fictício de crescimento da população de ratos, contudo, aproveitando o que eles falaram sobre decaimento radioativo, ela propôs estudar uma situação que envolvesse este assunto.

Pesquisadora: [...] E vocês poderiam dar um exemplo de EDO?
Alunos: Temperatura.
[...]
Gustavo: A velocidade.
Pesquisadora: Velocidade variando em relação ao tempo. O que mais?
Miguel: Corrente.
Pesquisadora: Variação da corrente elétrica.
[...]
Théo: A vida útil da radioatividade.
Pesquisadora: O quê?
Théo: Taxa de radioatividade
Pesquisadora: A taxa de radioatividade
Fernando: A meia vida.
Pesquisadora: Meia vida interfere na radioatividade de um elemento. O que é a meia vida?
[...]
Pesquisadora: Vocês já resolveram alguma atividade sobre este assunto?
Théo: Não, a professora só falou que dá para usar.
Pesquisadora: Então, vamos estudar alguma situação que envolva radioatividade na próxima aula?
Alunos: Sim.
Pesquisadora: Tentem procurar alguma situação real que envolva decaimento radioativo para a gente conversar na próxima aula.

Características da atividade: Conforme ilustra o diálogo acima, a motivação para este problema surgiu das discussões a respeito das aplicações de EDO que eles conheciam. Os alunos citaram exemplos como decaimento radioativo, variação da corrente elétrica em um circuito elétrico, entre outros, pois eles estavam inseridos em um curso regular de ED no qual adota-se os livros analisados, cujos modelos matemáticos de EDO apresentados são esses.

Desta forma, optamos por desenvolver um desses modelos clássicos envolvendo EDO, pois foram os que despertaram interesse nos alunos, visto que eles ouviram falar dessas aplicações na aula de ED, porém, não haviam resolvido nenhum problema dessa natureza.

Assim, foi apresentado a eles uma situação envolvendo o tema decaimento radioativo, por meio de uma reportagem extraída do site da Globo[43] que abordava o acidente radioativo que aconteceu na cidade de Goiânia, em 1987, com a intenção de promover uma discussão sobre o problema.

[43] http://g1.globo.com/goias/noticia/2013/09/maior-acidente-radiologico-do-mundo-cesio-137-completa-26-anos.html

Após a leitura e a discussão da reportagem, os alunos seriam convidados a analisar o problema matematicamente. Neste momento, eles poderiam formular questões sobre o que queriam estudar, buscando os dados necessários para responder as suas perguntas.

O objetivo desta atividade era proporcionar aos alunos uma aplicação das EDOs e trabalhar a noção da derivada como taxa de variação, pois este significado da EDO foi pouco explorado na fase 1. Além disso, este seria o primeiro contato dos alunos com um problema de Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática.

Para tanto, eles deveriam aprender a coletar as informações necessárias para a resolução do problema, selecionar as variáveis envolvidas, levantar hipóteses, resolver e validar o modelo obtido, conforme as etapas da MM indicadas por Bassanezi (2011).

Pretendíamos, com isso, verificar como os alunos iriam analisar o problema, se utilizariam uma EDO ou outro tipo de conceito matemático para modelar a situação, mesmo sabendo que o decaimento radioativo era uma aplicação da EDO. Caso eles resolvessem o problema de outra forma, a pesquisadora, durante as discussões em grupo, convidaria os alunos a analisar o problema por meio de uma EDO.

Assim, esperávamos que os alunos percebessem que a variação da quantidade de Césio-137 é proporcional à própria quantidade Césio-137 em cada instante de tempo. Além disso, pretendíamos verificar quais registros de representação e de domínios matemáticos seriam utilizados pelos alunos. Se eles aplicariam os conhecimentos trabalhados na fase 1 da sequência, como o campo de vetores, por exemplo, ou iriam utilizar a resolução algébrica que aprenderam nas aulas regulares de EDs.

Prováveis estratégias e dificuldades: Como os alunos não possuíam familiaridade com a Modelagem Matemática, esperávamos alguma dificuldade no sentido de ter que definir o que seria estudado ou na busca dos dados para complementar as informações sobre a situação. Portanto, nesta primeira atividade, a pesquisadora trabalharia em conjunto com os alunos, porém, sempre deixando um tempo para que eles refletissem sobre a situação e dando-lhes a oportunidade de resolver o problema sem a sua intervenção.

Quanto às estratégias realizadas, essas iriam depender da pergunta formulada, mas elencamos algumas possibilidades:

$M1E_1$: analisar os dados utilizando uma EDO. O uso desta estratégia nos permitiria analisar quais registros e domínios os alunos iriam utilizar para resolver a EDO.

$M1E_2$: obter uma função (linear, exponencial) que modele a situação.

$M1E_3$: caso optem por fazer alguma previsão, eles poderiam aplicar uma regra de três para aproximarem o valor procurado.

M1E4: obter uma constante de proporcionalidade e utilizá-la para fazer previsões.

Se, ao utilizarem a primeira estratégia, os alunos recorressem ao campo de vetores, a pesquisadora iria formular uma nova pergunta de modo que os alunos precisassem resolver a EDO e, depois, pedir que eles comparassem os resultados obtidos. O mesmo seria feito se eles resolvessem algebricamente e não fizessem o campo de vetores.

3.5.2 Análise *a priori* do segundo problema de Modelagem Matemática

Para o segundo problema no contexto Modelagem Matemática realizamos, com os alunos, um experimento sobre a variação da temperatura de um líquido.

Tema proposto: Variação da temperatura de um refrigerante gelado deixado a temperatura ambiente.

A ideia desse experimento surgiu durante uma aula, enquanto os alunos tomavam refrigerante e falaram que ele estava esquentando.

Vivian: Meu refrigerante esquentou.
Théo: Melhor tomar logo senão fica ruim.
Pesquisadora: Porque o refrigerante esquenta?
Alunos: ((murmúrios))
Pesquisadora: Pessoal o que acontece com o refrigerante quando a gente deixa ele fora da geladeira?
Vivian: Esquenta.
Ana: Perde o gás.
Pesquisadora: Se ele estiver gelado ele esquenta. E se fosse algo bem quente?
Miguel: Ele esfria.
Vivian: Vai para temperatura ambiente.
Théo: Ele esfria.
Pesquisadora: Ele esfria. E esfria até qual temperatura?
Vivian: Temperatura ambiente.
Pesquisadora: Se deixamos o refrigerante aqui na mesa, ele esquenta, mas até um limite, qual é este limite?
Alunos: A temperatura ambiente.
Pesquisadora: Podemos estudar esta situação matematicamente?
Théo: Sim, dá para fazer uma EDO.
Pesquisadora: Por quê?
Théo: Porque está variando.
Pesquisadora: E o que que eu teria variando, quais seriam as variáveis?
Gustavo: Temperatura e tempo.
Pesquisadora: Temperatura e tempo. Então, a minha temperatura varia conforme o tempo. Podemos estudar esta situação, e o que precisamos para fazer isso?
Gustavo: Medição, não é?
Vivian: Medir a temperatura.
Pesquisadora: Medir a temperatura conforme o tempo for passando. O que vocês acham de fazermos este experimento na próxima aula?
Miguel: Próxima aula? Vamos.
Vivian: Você vai medir a temperatura?
Pesquisadora: Nós vamos, a gente tem que trazer um líquido. Vocês preferem fazer com um líquido gelado ou quente?
Miguel: Gelado porque podemos beber.
Alunos: ((risos))

Pesquisadora: O que nós usarmos para o experimento, não podemos beber.
Vivian: É que tem que ter a mesma quantidade de refrigerante em todo o processo, então, por isso não dá para beber.
Pesquisadora: O que mais precisamos?

O diálogo continuou de forma a definir o que era necessário para o experimento, como um líquido gelado, um termômetro, uma sala com temperatura controlada. Assim, ao final ficou decidido que faríamos o experimento na aula seguinte e que utilizaríamos uma lata de refrigerante gelada.

Características do problema: A pesquisadora propôs aos alunos a realização de um experimento sobre a variação da temperatura de uma lata de refrigerante deixada a temperatura ambiente.

Os objetivos desse problema eram análogos ao do problema anterior, aplicação de EDO e derivada como taxa de variação. Uma das diferenças estava na forma que os dados foram coletados, a qual envolveu a participação direta dos alunos, que atuaram em todas as etapas do desenvolvimento do problema.

O experimento foi realizado durante uma aula do curso, na qual os alunos anotaram a temperatura do refrigerante durante duas horas e trinta minutos, com intervalos de tempo de dez minutos.

Para estudar a situação, esperávamos que os alunos tentassem obter um modelo matemático que utilizasse uma EDO para representar o fenômeno, desta forma, poderíamos verificar quais registros e domínios de representação seriam requisitados por eles para resolver a equação obtida. Elencamos algumas possibilidades de resoluções:

M2E$_1$: Utilizar uma EDO para obter um modelo para a situação, podendo chegar em uma destas equações:

a) $\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_a),$ sendo T a temperatura do refrigerante, T_a a temperatura ambiente, t o tempo e α a constante de proporcionalidade.

b) $\frac{dT}{dt} = \alpha T,$ sendo T a temperatura do refrigerante, t o tempo e α a constante de proporcionalidade. Caso utilizassem essa equação, esperávamos que os alunos, ao validarem o modelo, percebessem que a EDO obtida não representava o fenômeno analisado e reformulassem o modelo para obterem a equação do item a).

M2E$_2$: Utilizar uma outra ferramenta matemática para resolver o problema, como, por exemplo, uma função.

Como os alunos já resolveram o primeiro problema, não esperávamos que eles utilizassem uma outra ferramenta matemática para resolver a situação. Contudo, para obter o modelo do item a) da estratégia $M2E_1$, os alunos precisavam conhecer as propriedades físicas do fenômeno estudado, caso esses conhecimentos não estivessem disponíveis para os alunos e/ou eles não conseguissem as informações necessárias, a pesquisadora poderia fornecer tais informações.

3.5.3 Análise *a priori* do projeto final

O terceiro problema no contexto da Modelagem Matemática foi intitulado de projeto final. Neste projeto, cada grupo deveria escolher um tema de interesse e fazer um estudo matemático. A única restrição colocada pela pesquisadora era que os grupos deveriam escolher um tema que pudesse ser modelado por uma EDO e utilizassem este modelo para analisar a situação, ou seja, os alunos não poderiam usar outra ferramenta matemática para analisar o problema formulado por eles.

Durante o desenvolvimento do trabalho, os estudantes poderiam tirar dúvidas em relação ao tema escolhido, porém, a pesquisadora não interferiria na escolha desse tema e nem em sua forma de resolução, auxiliando somente em alguma questão que julgasse necessária, como, por exemplo, a aplicação de algum método ou conteúdo que não foi estudado no curso.

No último dia de curso, cada grupo apresentaria seu projeto aos demais, explicando todas as partes desde a escolha do tema, como chegaram ao modelo, a validação e os resultados obtidos.

Dos 4 grupos[44] que participaram do curso, 3 apresentaram seus projetos finais. O primeiro grupo, que denominamos G1, apresentou um trabalho sobre a variação da corrente elétrica em um circuito elétrico simples. O segundo grupo (G2), escolheu o tema queda livre de um corpo e o quarto grupo (G4) apresentou um estudo sobre o desmatamento na floresta Amazônica. O grupo 3 (G3) optou por não apresentar seu projeto final.

Para a análise dos projetos, definimos, *a priori*, alguns pontos que consideramos importantes:

1) A escolha de uma situação pertinente para a utilização de uma EDO.
2) A obtenção de um modelo utilizando uma EDO.
3) A mobilização de diferentes domínios e registros de representação na análise da situação.

[44] Apresentamos melhor os grupos do curso e seus projetos finais no próximo Capítulo.

Consideramos os três pontos anteriores importantes para nos auxiliar sobre a viabilidade da sequência, pois os dois primeiros mostram se os alunos são capazes de reconhecer e de trabalhar com uma situação que pode ser modelada por uma EDO. Com o item 3) poderemos observar se os alunos realizam, de forma espontânea, alguma mudança de domínio ou de registro de representação.

O próximo capítulo apresenta uma descrição do desenvolvimento da sequência de situações e suas análises *a posteriori*.

4 Aplicação da sequência de situações e análise *a posteriori*

4.1 Aplicação da sequência de situações

Assim, como previsto, o curso oferecido para a realização da pesquisa iniciou-se no dia vinte de agosto de 2015, com a participação de vinte alunos. Os alunos foram recepcionados pela pesquisadora, a qual explicou que eles estavam participando de uma pesquisa de doutorado, aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Estatual de Maringá (UEM)[45] e, por isso, era preciso ler e preencher alguns documentos. A pesquisadora iniciou a leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido junto com os alunos, esclarecendo como seria o curso, a participação deles, a necessidade da gravação em áudio e vídeo etc.

Em seguida, eles responderam, individualmente, ao perfil do estudante (Apêndice A) e ao questionário inicial. O perfil do estudante tinha por objetivo fornecer informações sobre nosso público alvo, como data de entrada da universidade, período em que estava matriculado, curso, disciplinas que tiveram dificuldades, expectativas com relação ao curso, entre outras.

O questionário inicial serviu como base para o início do curso. Assim, as respostas dos alunos foram retomadas no segundo dia, esclarecendo as dúvidas e os equívocos. Os demais encontros (2° a 6°) foram realizados seguindo a mesma dinâmica: os alunos discutiam as atividades em grupos, respondiam em folhas individuais, as folhas eram recolhidas e analisadas pela pesquisadora, que selecionava os diferentes tipos de respostas para serem discutidas no próximo encontro.

A partir do sexto encontro desenvolvemos três problemas de Modelagem Matemática, um sobre decaimento radioativo, outro sobre variação da temperatura de um corpo e o projeto final dos alunos. As discussões dos problemas eram realizadas assim que os alunos terminavam suas análises, com a exposição dos resultados de cada grupo.

Os participantes trabalharam em grupos, variando de três a cinco alunos, que foram constituídos de forma aleatória, pelos próprios alunos conforme iam chegando nos primeiros dias de curso. A ideia inicial era manter os grupos durante todos os dias dos cursos, porém, nos primeiros dias, alguns alunos desistiram e, por isso, alguns grupos sofreram modificações no decorrer das aulas.

[45]Pesquisa aprovada pela Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá (UEM), pelo parecer número 1.164.719; e com Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) número 43667815.6.0000.0104.

Ao todo obtivemos quatro grupos: grupo 1 (G1), grupo 2 (G2), grupo 3 (G3) e grupo 4 (G4). Os grupos G1 e G2 eram bastantes participativos, com poucas faltas, sempre demonstrando interesse, chegavam no horário e levavam os materiais necessários.

O G3 foi o grupo que apresentou maior índice de faltas, sendo que, em alguns dias, nenhum participante do grupo compareceu ao curso. Os participantes normalmente chegavam atrasados e não participavam das discussões das atividades. Em nenhum dia de curso os alunos levaram o notebook, quando era possível utilizavam o da pesquisadora ou resolviam a atividade sem o auxílio de um software. Devido a isso, o aluno Bruno do G3 decidiu trocar de grupo e passou para o G4. Os alunos do G4 faltaram em algumas aulas e, às vezes chegavam atrasados, contudo, eram participativos e interessados.

O Quadro 29 mostra as atividades ministradas e os alunos participantes, nos respectivos dias de cursos.

Quadro 29: Organização do curso

Dia do curso (Ano 2015)	**Carga horária (em horas)**	**Atividade desenvolvida**	**Alunos participantes**
20/08 1° encontro	2	Apresentação do curso. Leitura e assinatura do termo de consentimento. Aplicação do questionário inicial e perfil do estudante.	Ana, Bia, Bianca, Bruno, Carlos, Cris, Daiane, Fábio, Fernando, Gustavo, Léo, Luciano, Marcos, Michel, Miguel, Paula, Pedro, Renata, Sofia, Théo,
25/08 2° encontro	2,5	Discussões das respostas do questionário inicial. Aplicação das atividades 1, 2 e 3. Discussão da Atividade 1.	**G1:** Gustavo, Laura, Pedro, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G3:** Bruno, Fábio, Michel, Renata. **G4:** Bianca, Fernando, Léo, Paula**.**
27/08 3° encontro	2,5	Discussões das atividades 2 e 3. Aplicação das atividades 4 e 5.	**G1:** Gustavo, Pedro, Sofia, Théo, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G4:** Daiane, Fernando, Léo, Luciano.
01/09 4° encontro	2,5	Discussões das atividades 4 e 5. Aplicação das atividades 6, 7 e 8.	**G1:** Gustavo, Sofia, Théo, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G3:** Bruno, Michel, Renata. **G4:** Daiane, Luciano.
03/09 5° encontro	2,5	Discussões das atividades 6, 7 e 8.Aplicação da atividade 9. Realização do experimento sobre a variação de temperatura.	**G1:** Gustavo, Pedro, Sofia, Théo, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G4:** Bruno, Daiane, Fernando, Léo.
08/09 6° encontro	2,5	Discussão da atividade 9. Acidente radioativo em Goiânia.	**G1:** Gustavo, Pedro, Théo, Vivian. **G2:** Marcos, Miguel. **G3:** Luciano, Michel, Renata. **G4:** Bruno, Daiane, Fernando, Léo.
10/09 7° encontro	2,5	Acidente radioativo em Goiânia. Temperatura do refrigerante.	**G1:** Pedro, Théo, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos. **G3:** Luciano, Renata. **G4:** Daiane, Fernando, Léo.
15/09	2,5	Temperatura do refrigerante.	**G1:** Gustavo, Pedro, Sofia, Théo. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G3:**

8° encontro			Luciano, Renata.**G4:** Bruno, Fernando, Léo.
18/09 9° encontro	2,5	Temperatura do refrigerante. Tempo livre para discutir o tema do projeto final.	**G1:** Pedro, Sofia, Théo, Vivian. **G2:** Bia, Marcos, Miguel. **G3:** Luciano, Michel, Renata. **G4:** Bruno**,** Daiane, Fernando, Léo.
22/09 10° encontro	2,5	Desenvolvimento dos projetos dos grupos.	**G1:** Gustavo, Pedro, Sofia, Théo, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G3:** Michel, Luciano, Renata. **G4:** Bruno, Daiany, Fernando, Leonardo.
24/09 11° encontro	2,5	Apresentação dos projetos e fechamento do curso.	**G1:** Gustavo, Pedro, Sofia, Théo, Vivian. **G2:** Ana, Bia, Marcos, Miguel. **G3:** Michel, Luciano, Renata. **G4:** Daiane, Fernando, Bruno, Leonardo.

Fonte: Dados do curso de extensão

Cabe ressaltar que, durante a realização do curso de extensão, os alunos estavam cursando a disciplina regular de Equações Diferenciais, de seus cursos de graduação, simultaneamente. No entanto, considerando nossa proposta do curso e a ementa da disciplina, entendemos que isso não prejudicaria os objetivos da nossa pesquisa.

No plano de ensino da disciplina regular constava que as aulas seriam realizadas com a exposição do conteúdo teórico utilizando como recursos o quadro negro e o projetor multimídia e com a resolução de exemplos teóricos para a fixação dos conhecimentos e técnicas apresentados. A disciplina possui carga horária de sessenta e oito horas/aulas, distribuídas em quatro horas/aulas por semana.

O Quadro 30 mostra os conteúdos que os alunos estudaram na disciplina regular no decorrer do curso de extensão. Ressaltamos que o cronograma apresentado nos planos de ensino estava sujeito a alterações de acordo com andamento das atividades em cada turma.

Quadro 30: Conteúdo apresentado na disciplina regular

Curso de extensão	Conteúdo apresentado na disciplina regular
1° encontro	Apresentação do plano de ensino e de alguns modelos matemáticos.
	Definição: classificação, ordem e grau;
2° e 3° encontros	Equações de variáveis separáveis;
	Aplicações.
4° e 5° encontros	Equações homogêneas;
	Equações diferenciais exatas;
6° e 7° encontros	Fator integrante;
	Equações diferenciais lineares;
8° e 9° encontros	Equação de Bernoulli;
	Equação de Ricatti;
10° e 11° encontros	Equação de Clairaut.

Fonte: Plano de ensino da disciplina regular de Equações Diferenciais

Nas próximas seções, apresentamos o desenvolvimento e as análises *a posteriori* da sequência de situações.

4.2 Análise *a posteriori* do questionário inicial

Os alunos responderam ao questionário inicial no dia vinte de agosto de 2015 e as aulas (disciplina regular) do segundo semestre da UTFPR iniciaram no dia dezessete de agosto de 2015. Assim, todos os alunos tinham assistido pelo menos uma aula da disciplina regular de ED, na qual, conforme indicado no plano de ensino, a professora comentou sobre as aplicações das EDs.

O Quadro 31 ilustra as categorias de respostas fornecidas pelos alunos a questão 1).

Quadro 31: Respostas para a questão 1) – Questionário inicial

1) Você saberia dizer o que é uma equação diferencial?		
Categorias de respostas	**Comentários**	**Quantidade de alunos**
Não sei.	*"Que é uma área da matemática mais complexa que cálculo 2. Contudo, não sei dizer muito".*	7
Relação com derivadas.	*"Uma equação que envolve derivadas".* *"Igualdades que possuem derivadas, compostas de uma ou mais varáveis dependente em relação a uma ou mais variáveis independentes".*	10
Relação com funções.	*"Seria uma função com incógnitas".*	1
Taxa de variação.	*"Equações com variações".*	3
Relação entre as variáveis dependente e independente.	*"Uma ou mais variável em relação a uma única variável independente".*	3
Relação com vetores.	*"Acredito que tem relação com vetores"*	1
Total		20[46]

Fonte: Respostas dos alunos

Podemos observar que a noção de ED ainda não estava clara para os alunos, apesar de alguns relacionarem com a derivada, a maioria não soube explicar o que é ou apresentou certa confusão entre a definição de ED e de EDO. Inferimos que a resposta que relaciona a ED com vetores pode ter sido influenciada pela questão 5) que introduzia uma ideia sobre o campo de vetores, o que pode ter levado o aluno a tal conclusão.

O próximo quadro mostra algumas das repostas que obtivemos para a questão 2).

[46] Dos 25 alunos que responderam ao questionário inicial, 5 responderam em outro momento, inclusive depois das discussões sobre o questionário e por isso suas respostas não foram incluídas na análise do questionário.

Quadro 32: Respostas para a questão 2) – Questionário inicial

2) Na sua opinião, para que serve uma equação diferencial?		
Categorias de respostas	**Comentários**	**Quantidade de alunos**
Não sei ou em branco.		11
Taxa de variação.	*"Para padronizar comportamentos de taxas de variação, como, por exemplo: a taxa de crescimento populacional de alguma espécie".*	3
Para resolver problemas.	*"Para resolver problemas matemáticos"* *"Para aumentar a visão lógica do aluno, fazendo com que ele veja alternativas para resolver o problema".* *"... para auxiliar em questões da Física e Química"*	4
Diversas	*"...ter a ver com triangulação de vetores".* *"Representar um gráfico".*	2
Total		20

Fonte: Respostas dos alunos

Conforme apresentado no Quadro 32, onze participantes não souberam responder para que serve uma ED, como somente três alunos já haviam cursado a disciplina de ED, já esperávamos que a maioria não responderia a esta questão. O Quadro 33 ilustra as respostas para a questão 3).

Quadro 33: Respostas para a questão 3) – Questionário inicial

3) Você poderia citar alguns exemplos de equações diferenciais?		
Categorias de respostas	**Comentários**	**Quantidade de alunos**
Não sei ou em branco.		9
Expressão algébrica da ED.	"$2\frac{dx}{dy}+3y=e^x$", "$a=\frac{dv}{dt}$"	4
Relação com os métodos de resolução.	*"Homogênea, não homogênea, método de Bernoulli".*	1
Dinâmica populacional.	*"Crescimento populacional".* *"A população de uma bactéria, na termodinâmica etc.".*	2
Relação com derivadas e integrais.	*"Derivadas e integrais".* *"Integral com várias operações".*	3
Definição de EDO	*"EDO é composta de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma independente"*	1
Total		20

Fonte: Respostas dos alunos

Assim como nas repostas da questão 1), podemos perceber que esses estudantes ainda não tinham esse conceito bem definido, pois nove alunos não responderam à questão e, nas respostas dos demais, verificamos uma certa confusão entre a ED e suas aplicações (dinâmica populacional), entre os tipos de ED (homogênea, EDO) e com os conceitos de derivada e integral, que apesar de estarem diretamente relacionados com as EDs, não podemos considerar como um exemplo de EDO.

Após a aplicação do questionário, percebemos que esta questão pode não ter ficado clara para os alunos, pois, quando solicitamos um exemplo de ED, isso pode levar o aluno a pensar em uma aplicação, nos tipos de ED etc., o que não deixa de ser um exemplo. Contudo, a forma vaga de resposta, como, por exemplo, equação homogênea sem uma explicação sobre esta equação, pode decorrer de uma simples memorização.

O Quadro 34 ilustra as categorias de respostas a questão 4) do questionário inicial.

Quadro 34: Respostas para a questão 4) – Questionário inicial

4) Você saberia dizer o que é solução de uma equação diferencial? Como podemos representá-la?		
Categorias de respostas	**Comentários**	**Quantidade de alunos**
Não sei ou em branco.		18
Um número.	*“A solução seria um número, um resultado normal”.*	1
Diversa.	*“Talvez uma representação gráfica do resultado”.*	1
Total		20

Fonte: Respostas dos alunos

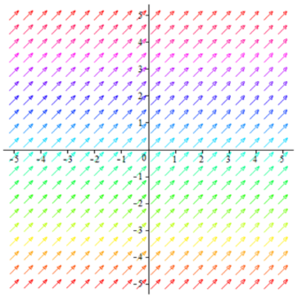
Embora na questão 1) os alunos não tivessem dado a definição formal de ED, vários conseguiram apresentar, mesmo que de forma desconexa, alguma informação sobre a ED, seja com a derivada, definição de EDO ou com taxa de variação. Porém, quando questionados sobre a solução da equação, nenhum aluno incluiu o termo função, nem mesmo os alunos repetentes. Ainda que a maioria (dezessete alunos) não tinha cursado a disciplina de ED, esta dificuldade de relacionar a solução de uma ED com uma função (ou família de funções) foi verificada mesmo em alunos que já foram aprovados na disciplina de ED.

Em uma pesquisa realizada na França com estudantes do CAPES[47], Gordillo (2006) fez um questionamento análogo para cinquenta e seis professores de Matemática, dos quais dezessete não souberam responder e dois responderam de forma equivocada. O autor afirma que eles podem ter sucesso em resolver algebricamente uma ED, contudo, não são capazes de explicar o que é a sua solução, e que isso é consequência do ensino das EDs que prioriza as técnicas algébricas de resolução.

[47]Certificat d’AptitudeauProfessorat de l’EnseignementSecondaire: certificado dado aos professores, na França, para a prática em faculdades e escolas secundárias.

O próximo quadro mostra as respostas obtidas para a questão 5), na qual era dada uma explicação sobre o campo de vetores para uma EDO e depois apresentava a pergunta descrita no Quadro 35.

Quadro 35: Respostas para a questão 5) – Questionário inicial

A Figura abaixo ilustra um campo de vetores para uma EDO, analisando este campo de vetores que informações você poderia obter? 		
Categorias de respostas	**Comentários**	**Quantidade de alunos**
Não sei ou em branco.		15
Relação com a reta tangente ou sinal da derivada.	*"Que em todo seu domínio, temos uma inclinação positiva, ou seja, as derivadas são sempre positivas".* *"Que a inclinação da reta tangente ou derivada é a mesma em todos os pontos".* *"Que nesse plano (x, y) a equação da reta tangente tende ao infinito positivo* $(\infty +)$*".*	3
Relação com uma equação do 2º grau.	*"Posso concluir que as soluções para as equações diferenciais são curvas de uma equação de 2º grau."* *"Que ao resolver a EDO, teríamos como resposta funções do 2º grau com apenas uma variável. Portanto, acredito que a EDO é para diminuir variáveis de uma equação".*	2
Total		20

Fonte: Respostas dos alunos

Pelas informações do Quadro 35, observamos que a maioria dos alunos não conhecia o conceito de campo de vetores e que as informações que constavam na questão não foram suficientes para que eles conseguissem responder ao que foi solicitado.

Acreditávamos que a leitura explicativa sobre o campo de vetores pudesse auxiliar os alunos a responderem este item. Contudo, baseados nos estudos de Oliveira e Igliori (2013), que verificaram que o ensino e a aprendizagem das EDO centram-se na abordagem algébrica e da análise dos exercícios resolvidos dos livros didáticos da subseção 2.4.2, na qual verificamos que a abordagem qualitativa quase não é utilizada, já esperávamos que a maioria dos alunos não tivesse êxito em suas respostas, mesmo os alunos repetentes.

Como mostrado na subseção 2.3.2, a abordagem qualitativa propicia mudanças de domínios e de registros de representação semiótica, por este motivo, a utilização do campo de vetores se tornou necessária na nossa pesquisa.

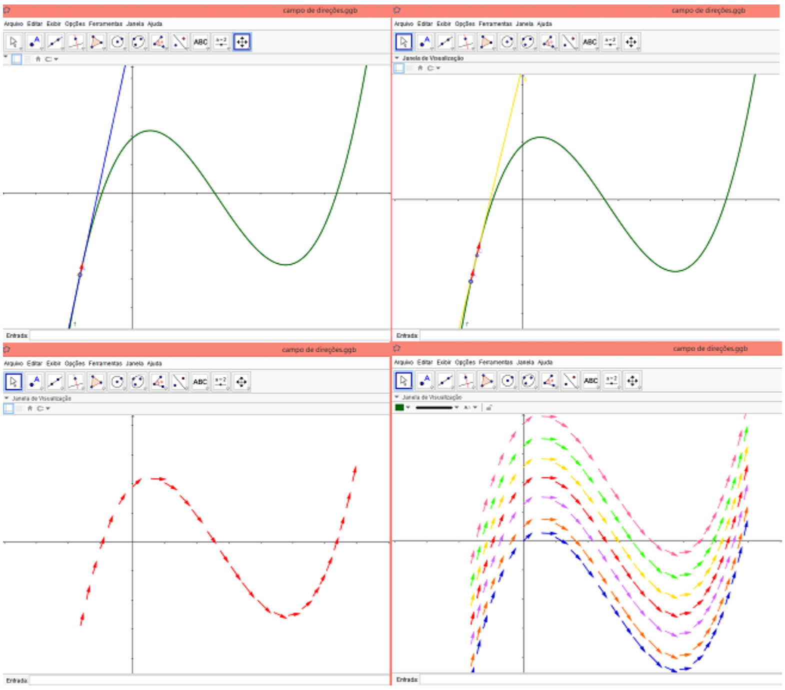
Apresentação dos resultados do questionário inicial

No segundo encontro, realizamos uma discussão com os alunos em relação às respostas fornecidas no questionário inicial. As respostas de cada questão foram selecionadas pela pesquisadora e apresentadas aos estudantes com o auxílio do software PowerPoint. Os alunos leram as respostas e deram suas opiniões sobre elas. Estas discussões eram mediadas pela pesquisadora até que os alunos pudessem formular uma resposta que considerassem correta e esta fosse validada pela pesquisadora. O diálogo abaixo ilustra como se desenvolveu parte desta discussão.

Pesquisadora: O que que vocês acham dessas opções?
Pedro: Que está no caminho
Gustavo: Parece que está tudo certo.
Pesquisadora: Parece que estão todas certas, todas erradas, todas mais ou menos, o que vocês acham?
((Silêncio)).
Pesquisadora: Vamos pessoal, não precisam ter medo de falar, se estiver errado corrigimos juntos. ...Vamos gente, é para vocês falarem suas opiniões, o que vocês acham?
Pedro: Igualdade não poderia ser. Se tratar como igualdade.
Pesquisadora: Se eu pergunto para vocês o que é uma equação diferencial? O que vocês me responderiam, hoje?
Vivian: É uma questão de uma coisa, porque é uma derivada, né? Aí ela é a variação de uma determinada coisa em relação a variável dependente, uma coisa assim.
Pesquisadora: Isso, a ideia é mais ou menos por aí. Mas quando eu falo em equação diferencial, o que que vocês acham que deveria aparecer? Imagina uma pessoa que nunca viu equação diferencial. Como vocês definiriam uma equação diferencial? O que que vocês acham que ela tem que ter?
Alguns alunos: Derivada.
Pesquisadora: Para ser uma equação tem que ter o que?
Alunos: Igualdade.
Pesquisadora: Igualdade. Então, matematicamente, tem que ter o símbolo de igualdade. Então isso a gente já sabe. Além de uma igualdade, tem que ter uma coisa especial, porque não é uma equação qualquer. Por exemplo, como eu sei que a equação de segundo grau?
[...]
Théo: Se tem derivada.
Pesquisadora: Se tem derivada. Só derivada? O que que o nome diz, o nome diz?
[...]
Bia: Diferenciais.

Para o item 5), após apresentar as respostas e ler texto explicativo, que constava na atividade, a pesquisadora construiu um campo de vetores com o auxílio do software GeoGebra, fazendo o processo inverso, ou seja, conhecendo função *f*, a pesquisadora traçou a reta tangente em um ponto qualquer do gráfico da curva e depois substituiu esta reta pelo seu vetor diretor no ponto a que ela era tangente a curva. O processo foi repetido para diversos pontos e depois a curva *f* foi ocultada de modo que os alunos pudessem ver que o conjunto de vetores obtidos possuía o mesmo comportamento da curva *f*, como a solução de uma EDO não é única o processo foi repetido para outros pontos do plano (Figura 49).

Figura 49: Campo de vetores no software GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 36 apresenta algumas conclusões que foram obtidas durante estas discussões.

Quadro 36: Conclusões das discussões do questionário inicial

Questão	Conclusões
1)	Equações diferencial é uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.
2)	Foi aceito como exemplo de equação diferencial a EDO, equação de Bernoulli, $2\frac{dx}{dy}+3y=e^{x}$, entre outros.
3)	Para resolver e/ou formular problemas matemáticos e de diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, problemas de dinâmica populacional.
4)	A solução de um ED é uma família de funções que diferem por uma constante.
5)	Como a maioria dos alunos não souberam responder a este item, apesar das explicações dados pela pesquisadora, não podemos afirmar que os alunos compreenderam o campo de vetores. Este conceito precisou ser trabalhado várias vezes durante a sequência.

Fonte: Elaborado pela autora

Conforme esperado, podemos observar que a maioria dos alunos não tinha o conceito de EDO estabelecido. Além disso, embora a pesquisadora tenha trabalhado com eles a noção de campo de vetores, este conteúdo não ficou bem claro para os estudantes e foi preciso retomá-lo diversas vezes durante o curso.

Na próxima seção, apresentamos o desenvolvimento de cada atividade e sua análise *a posteriori*.

4.3 Análise *a posteriori* das atividades da fase 1

Nesta seção, apresentamos a análise *a posteriori* de cada atividade, destacando as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, as suas respostas e as dificuldades, comparando-as com o que foi previsto nas análises *a priori*.

Embora os alunos trabalhassem em grupos, nem todos, individualmente, forneciam a mesma resposta e/ou utilizavam a mesma estratégia. Por isso, apresentamos, para cada atividade, um quadro ilustrando as estratégias e as respostas obtidas pelos alunos de cada grupo. Essas respostas diferentes dos alunos de um mesmo grupo foram diminuindo ao longo do curso. Inferimos que, no início, a falta de entrosamento entre os participantes fez com que alguns alunos trabalhassem em dupla ou individualmente.

No segundo dia de curso, os alunos resolveram as Atividades 1, 2 e 3. Participaram da resolução dessas atividades dezessete alunos[48], que estavam divididos em 4 grupos, G1: Gustavo, Laura, Pedro, Vivian, Théo, G2: Ana, Bia, Marcos, Miguel, G3: Bruno, Fábio, Michel, Renata e G4: Bianca, Fernando, Léo, Paula.

4.3.1 Análise *a posteriori* da Atividade 1

Esta atividade tinha por objetivo auxiliar os estudantes na compreensão de como se constrói um campo de vetores e trabalhar o conceito de EDO autônoma. Dada a equação $y' = y$ pedia-se que os alunos desenhassem os vetores diretores das retas tangentes ao gráfico das soluções da EDO, para alguns pontos. Os pontos do item a) mantinham fixas as coordenadas das abscissas e os pontos do item b) fixavam a ordenada e variava a abscissa. O item c) solicitava uma comparação entre os resultados obtidos nos itens a) e b). O Quadro 37 resume as ideias principais das possíveis estratégias para esta atividade que foram previstas na análise *a priori* do Capítulo 3.

Quadro 37: Possíveis estratégias para a Atividade 1

A1E$_1$: Desenhar o vetor diretor a partir da equação da reta tangente.
A1E$_2$: Desenhar o vetor diretor com o auxílio do transferidor.
A1E$_3$: Desenhar o vetor diretor como o resultado da soma de dois vetores.

Fonte: Elaborado pela autora

[48]O aluno Théo precisou sair antes e não respondeu as atividades.

A pesquisadora realizou a leitura da atividade com os alunos e solicitou que eles tentassem resolvê-la. No início, todos os alunos tiveram dificuldades para resolver a atividade. Ao contrário do esperado na análise *a priori*, nenhum aluno relacionou o coeficiente angular da reta tangente com a derivada, embora esta informação estivesse no enunciado da atividade. Alguns alunos disseram que tinham estudado sobre o vetor diretor de uma reta nas aulas de Geometria Analítica, mas não conseguiam lembrar o seu significado.

Os alunos se mantiveram em silêncio por alguns minutos e a pesquisadora, percebendo a dificuldade deles em resolver a atividade, fez uma intervenção no sentido de retomar alguns conceitos, questionando os alunos sobre o que eles sabiam em relação à derivada. A maioria dos alunos respondeu que a derivada fornecia o coeficiente angular da reta tangente.

A pesquisadora fez o esboço do gráfico de uma função no quadro, escolheu um ponto qualquer sobre este gráfico e traçou a reta tangente a este ponto. Depois, retomou o conceito de vetor diretor e desenhou um representante deste vetor passando pelo ponto escolhido. Os conceitos de reta tangente, vetor diretor e derivada haviam sido retomados nas discussões do questionário inicial, mas as dificuldades dos alunos apontam que somente a discussão da Questão 5 do questionário inicial não foi suficiente para que os alunos utilizassem esses conteúdos nesta atividade.

Contudo, mesmo após esta intervenção, a atividade não fluía, pois alguns alunos não conseguiam identificar as coordenadas da abscissa e da ordenada do ponto. Acreditamos que esta dificuldade pode ser consequência da estrutura da atividade na qual a equação não era expressa em termos da variável independente x. Mesmo após a identificação das coordenadas dos pontos, os alunos apresentaram dificuldades em marcar os pontos no plano cartesiano.

Segundo Rosa (2009), a conversão do registro numérico por n-uplas, RNU, (par ordenado) para o RG é uma conversão congruente, pois o processo de marcar os pontos no plano cartesiano está muito próximo de uma codificação. Considerando a afirmação de Rosa (2009) e o fato de os participantes serem alunos do Ensino Superior e, consequentemente, já terem efetuado esta conversão em outras situações, não levamos em consideração esta dificuldade nas análises *a priori*.

Contudo, Almouloud (2007) alerta que, para localizar pontos no plano, é preciso o uso de propriedades da Geometria Analítica, ou seja, é preciso que o aluno compreenda as propriedades desse objeto no domínio da GA, podemos afirmar que tais conhecimentos não estavam bem compreendidos para alguns alunos. Apesar disso, este fato foi resolvido pelos próprios alunos dos grupos que não apresentavam tais dificuldades.

Embora demonstrassem uma estranheza em calcular o valor da derivada no ponto utilizando o valor da variável dependente *y*, após algum tempo, os alunos conseguiram efetuar tal processo, porém, não sabiam como utilizar este dado, pois não viam ligação entre ele e a inclinação do vetor. Desta forma, mesmo obtendo o coeficiente angular, eles não conseguiam estabelecer relações entre ele e a inclinação.

Essas dificuldades podem estar relacionadas com o fato de que não existe congruência semântica entre a EDO e o vetores no plano cartesiano (análise *a priori* Capítulo 3), segundo Duval (2011), a conversão não é algo natural para os alunos e o fenômeno de não congruência é um fator que a torna ainda mais complexa.

Além disso, esta conversão é acompanhada de mudança do domínio da AA para o domínio da GA. E, diante dos resultados, podemos inferir que as ferramentas desse domínio não estavam disponíveis para os alunos, como a noções de marcar um ponto no plano, vetor diretor, reta tangente, coeficiente angular etc.

Os alunos não apresentavam progresso e solicitavam a ajuda da pesquisadora a todo momento. Como não conseguiam traçar o vetor no plano, pediram que a pesquisadora resolvesse a atividade para, pelo menos, um ponto.

Assim, a pesquisadora decidiu apresentar as duas primeiras estratégias previstas na análise *a priori* para o primeiro ponto do item a). Acreditamos que o fato da estratégia $A1E_2$ ter sido a primeira utilizada pela pesquisadora e dos alunos terem o transferidor fez com que todos os alunos optassem por esta estratégia.

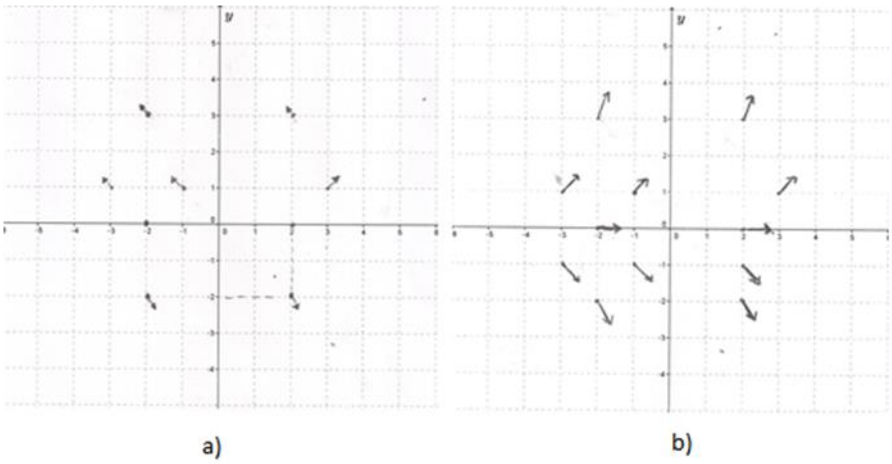
Esta interferência da pesquisadora comprometeu o desenvolvimento da atividade, pois direcionou a estratégia utilizada pelos estudantes. Além disso, apesar de a pesquisadora acreditar que a $A1E_2$ seria a mais fácil para a compreensão dos alunos, ela trouxe outras dificuldades que não foram previstas nas análises *a priori*.

Desta forma, ao contrário do que esperávamos, mesmo depois de traçar o primeiro vetor, os alunos ainda apresentaram dificuldades com o uso do transferidor e uma grande parte do desenvolvimento da atividade focou-se no uso deste instrumento.

> **Vivian:** Eu não sei usar transferidor.
> **Laura:** Eu também não.
> **Pedro:** Nem eu.
> **Vivian:** Professora, nunca usei um transferidor, como é que mede?
> **[...]**
> **Pedro:** Professora, você pode vir aqui rapidinho. Eu quero achar este ponto, que é com o 63, né ((refere-se ao ângulo))? Aí onde eu coloco ((o transferidor))?

A pesquisadora precisou fazer outras intervenções em relação ao uso do transferidor e sobre como determinar o sentido do vetor, contudo, duas alunas do G1 e um aluno do G3, utilizaram o transferidor de forma incorreta, no lugar de colocar o transferidor com o ângulo 180° à esquerda do ponto, colocavam ao contrário, assim no lugar de marcar o ângulo de 45°, marcaram o de 135º (Figura 50 a)) e mesmo após a discussão em grupo, os alunos não mudaram suas respostas, o que indica que eles não compreendiam a noção de ângulo.

Figura 50: Respostas dos alunos para a Atividade 1



Fonte: Respostas dos alunos

Para termos uma ideia geral da Atividade 1, fizemos um levantamento das respostas que obtivemos para os itens a) e b). Consideramos a resposta como satisfatória quando o aluno calculou o coeficiente angular e traçou o vetor respeitando a inclinação encontrada (Figura 50 b)), e não satisfatória quando o aluno, apesar de calcular o coeficiente angular, não conseguiu traçar o vetor direto com a respectiva inclinação (Figura 50 a)).

Quadro 38: Repostas dos itens a) e b) da Atividade 1.

Tipo de resposta	Quantidade de alunos			
	G1	G2	G3	G4
Satisfatória	2	4	3	4
Não satisfatória	2		1	
Total de alunos	16			

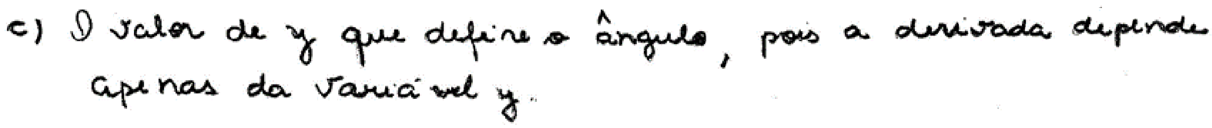
Fonte: Respostas dos alunos

Em relação ao item c), durante o cálculo do coeficiente angular, podemos observar, no diálogo a seguir (extrato retirado dos diálogos do G1), que os alunos perceberam que o valor do coeficiente angular dependia do valor da variável y, colocando esta observação na sua resposta.

Pedro: O bom do outro é que é só 1 e -1... O outro é 45 e -45.
Gustavo: Sim.
Vivian: Vai ser o mesmo ângulo é 1 também.
Pedro: Qual foi a conclusão que você chegou nesta daqui.
Gustavo: Que quando tem o mesmo *y*, tem a mesma inclinação.
Pedro: O *y* define.

Depois dessa conversa, os alunos responderam que a derivada dependia da variável *y* (Figura 51).

Figura 51: Resposta da Atividade 1 – item c)


c) O valor de y que define o ângulo, pois a derivada depende apenas da variável y.

Fonte: Respostas dos alunos

Todos alunos deram respostas similares a da figura anterior, exceto a aluna Vivian, do G1, que não conseguiu verificar um padrão para os vetores (Figura 52), inferimos que isso pode ter ocorrido pelo fato de a aluna apresentar dificuldades com o uso do transferidor. Assim, mesmo calculando corretamente o ângulo não traçou o vetor de forma correta no plano.

Figura 52: Resposta da Atividade 1 – Aluna Vivian


não sei, as flechas, não tem um padrão definido.

Fonte: Resposta da aluna Vivian

Na discussão conjunta desta atividade, cada grupo apresentou seus resultados e a pesquisadora desenhou os vetores no quadro. Apesar de os alunos acompanharem a resolução da atividade, alguns não fizeram modificações em suas respostas.

O objetivo dessa atividade era que os alunos compreendessem como se constrói o campo de vetor e o conceito de EDO autônoma. Dos resultados apresentados, podemos inferir que tais objetivos não foram totalmente alcançados, visto que o foco da atividade se deteve mais em como marcar o ângulo, do que a relação entre a derivada e o vetor (reta tangente).

Contudo, houve a retomada de alguns conceitos importantes para o desenvolvimento das demais atividades, como a derivada como coeficiente angular da reta tangente, vetor diretor, coordenadas de um ponto, Teorema 1 e EDO autônoma. E, embora com dificuldades, os alunos realizaram a conversão do RSA para RG e uma mudança do domínio da AA para o domínio GA, conforme previsto na análise *a priori*.

Ao fim da discussão da atividade, os alunos construíram o campo de vetores no Maple para a equação dada, sendo este o primeiro contato deles com o software.

Considerações sobre a Atividade 1: Apesar das dificuldades apresentadas pelos estudantes no desenvolvimento da atividade, julgamos que ela foi importante para o objetivo geral da sequência, pois, apesar de reconhecermos as potencialidades da utilização de um software, acreditamos ser necessário que o aluno compreenda como o campo de vetores é construído e que desenhar manualmente alguns vetores pode ajudá-lo nesta compreensão.

Contudo, sugerimos algumas mudanças para esta atividade:

i) Propor uma atividade inicial com uma EDO do tipo $y' = f(x)$, o que pode auxiliar os alunos no cálculo do valor da derivada, uma vez que a derivada depende da variável x.

ii) Preparar textos explicativos sobre os conhecimentos prévios necessários, vetor diretor e coeficiente angular da reta tangente, de forma a diminuir a intervenção da pesquisadora.

iii) Fornecer mais pontos com a mesma inclinação, de forma a facilitar a visualização.

4.3.2 Análise *a posteriori* da Atividade 2

Esta atividade solicitava um estudo do comportamento da função f, a partir da análise da equação $f'(x) = 3f(x)$. Esperávamos que os alunos utilizassem uma abordagem qualitativa, com o objetivo de que eles compreendessem a relação entre a função e a sua derivada.

Na análise *a priori*, apresentamos cinco estratégias de resolução, que estão resumidas no Quadro 39.

Quadro 39: Possíveis estratégias para a Atividade 2

A2E$_1$: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função f.
A2E$_2$: Esboçar o gráfico de $f'(x)$ em função de $f(x)$.
A2E$_3$: Resolver a equação diferencial.
A2E$_4$: Obter por tentativa uma função que satisfaça a equação.
A2E$_5$: Analisar o campo de vetores para $f'(x) = 3f(x)$.

Fonte: Elaborado pela autora

Inicialmente, a pesquisadora fez a leitura das Atividades 2 e 3 que foram entregues em uma mesma folha, após, solicitou que os grupos as resolvessem. O Quadro 40 ilustra os tipos de respostas fornecidas e a estratégia realizada por eles.

Quadro 40: Tipos de respostas obtidas na Atividade 2

Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
Em branco					4

A2E$_1$: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função f .	Se y é negativo a derivada é negativa, portanto, a função decresce. Se y é positivo a derivada é positiva, portanto, a função cresce. Se y é zero, a derivada é zero, portanto, a função é constante.		2		
	Quando $f'(x)=0$, a função é nula. Quando $f'(x)>0$, a função é crescente. Quando $f'(x)<0$, a função decrescente.			3	
A2E$_5$: Resolver a equação diferencial.	Os valores de x não importam, pois a função é constante. $\int 3f(x)=f(x) \Rightarrow 3\int f(x)=f(x) \Rightarrow f(x)=0$		2		
A2ENP[49]$_1$: Realizar uma conversão de registro.	A derivada é 3 vezes o valor da função em x.	3			
A2ENP$_2$: Escrever uma lei de formação qualquer para a função *f*.	Função do primeiro grau $f(x)=ax+b, f'(x)=a$, o coeficiente angular dependerá se, na função, for positiva.	1			
Total		15[50]			

Fonte: Respostas dos alunos

Ao contrário do que esperávamos na análise *a priori*, somente dois alunos do G2 utilizaram a estratégia A2E$_1$ de forma satisfatória, conseguindo identificar as variáveis significativas do registro simbólico (sinal da derivada $f'(x)$) e relacioná-las com o comportamento das soluções, realizando uma mudança do domínio da AA para o domínio das F e uma conversão do RSA para o RLNE. Conforme exposto na análise *a priori*, esta conversão é não congruente, o que, segundo Cardoso (2014), pode levar a baixa taxa de sucesso dos alunos ao realizá-la. Desta forma, inferimos que o fenômeno de não congruência da conversão associado a outros fatores descritos a seguir podem ser a causa da maioria dos alunos não ter respondido corretamente a esta atividade.

Outros alunos do G2 somente enunciaram o Teorema 1 sem procurar estabelecer alguma condição para que o teorema fosse verificado, acreditamos que esta resposta tenha sido dada em função de a pesquisadora ter retomado este teorema quando explicou para os alunos o campo de vetores na atividade anterior.

Observando as respostas do Quadro 40, percebemos que os alunos ainda não associam a EDO com uma família de solução e sim uma solução única. Segundo Gordillo (2006), esta é

[49] ENP= estratégia não prevista.
[50] O aluno Bruno do Grupo 3 saiu mais cedo e não resolveu as Atividades 2 e 3.

uma dificuldade muito persistente entre os estudantes, pois, para ele, a mudança de solução de equação sendo um número para a solução sendo uma família de soluções não é algo trivial, e sim um salto conceitual.

Embora os alunos estivessem cursando a disciplina de ED, somente Ana e Marcos do G2 tentaram resolver algebricamente a EDO, porém sem sucesso. Nenhum dos alunos repetentes (Michel, Léo, Laura e Vivian) optaram por esta estratégia, ao contrário do que foi constatado por Arslan (2005) que, em sua tese, verificou que os alunos repetentes tendem a utilizar a estratégia algébrica quando se deparam com uma EDO, mesmo que de forma equivocada. Esta não utilização da estratégia algébrica também foi contrária aos resultados que obtivemos no teste piloto realizado com outros estudantes das Engenharias da UTFPR e com os alunos do PIBID-Matemática-UEM e por Gordillo (2006).

Os alunos que não responderam à questão pertenciam todos ao G4, durante uma conversa com a pesquisadora o grupo afirmou que era necessário atribuir valores para $f(x)$, ou seja, buscavam a expressão analítica da função. Esta necessidade de conhecer a expressão algébrica pode ser decorrência do ensino de CDI, pois, segundo Cargnin (2013), as aulas de Cálculo focam-se na representação algébrica dos conceitos. A autora também verificou que os livros-texto seguem o mesmo perfil, com exposição de elementos teóricos e exercícios que promovem a reprodução de técnicas, desta forma, para calcular a derivada ou determinar os intervalos nos quais ela é positiva/negativa, os alunos precisavam da expressão da função, como mostramos na análise *a priori*.

O mesmo aconteceu com o aluno Gustavo do G1 que, não concordando com a resposta dos demais membros do seu grupo, escreveu uma expressão para a função f para calcular sua derivada (Figura 53). Embora a função escolhida não fosse uma solução para a equação dada, o aluno a utilizou para calcular a derivada e fazer inferência sobre esta função.

Figura 53: Resposta a Atividade 2 dada pelo aluno Gustavo

Seja f uma função derivável e definida em $\mathbb{R}$. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x)$. Faça um estudo sobre o comportamento da função f.

$y' = 3y$

função 1° grau $\Rightarrow$ $f(x) = ax + b$

$f'(x) = a$

O coeficiente angular dependerá se na função for positiva.

Fonte: Resposta do aluno Gustavo

Por fim, tivemos repostas diferentes das previstas na análise *a priori*, como, por exemplo, responder que a derivada é o triplo da função, ou seja, os alunos simplesmente escreveram as informações apresentadas do RSA utilizando o RLNE.

Figura 54: Resposta da Atividade 2 dada por um aluno

Seja f uma função derivável e definida em $\mathbb{R}$. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x)$. Faça um estudo sobre o comportamento da função f. Neste caso a derivada da função possui uma proporção onde ela sempre será a própria função multiplicada por 3

Fonte: Respostas dos alunos

No início do terceiro encontro foi realizada uma discussão das respostas apresentadas pelos alunos nas Atividades 2 e 3. A discussão seguiu o mesmo procedimento das discussões do questionário inicial.

Para esta atividade foram apresentadas as respostas obtidas da forma similar as apresentadas nos comentários do Quadro 40. Após analisarem as respostas, a pesquisadora explicou que as informações também poderiam ser obtidas pelo campo de vetores, fazendo gráfico no Maple com os alunos e comparando as informações do software com as obtidas, analisando o sinal da derivada.

A pesquisadora questionou os alunos sobre qual função poderia ter a derivada igual a 3 vezes ela mesma. Alguns alunos responderam que era a e^x e logo chegaram na resposta e^{3x}, porém, a EDO não foi resolvida algebricamente para não incentivar o uso desta forma de resolução.

Com a função e^{3x}, a pesquisadora aproveitou para explicar a importância do uso da constante e porque a EDO possui infinitas soluções. Também foi trabalhado o fato de que, embora na derivada aparecesse somente a variável dependente *y*, a variável independente *x* estava implícita. Assim, os alunos chegaram a seguinte conclusão:

Se y é negativo a derivada é negativa, portanto, as soluções decrescem para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se y é positivo a derivada é positiva, portanto, as soluções decrescem para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se y é zero, a derivada é nula, portanto, a solução é constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

O Quadro 41 resume algumas noções matemáticas trabalhadas nas discussões dessa atividade.

Quadro 41: Noções trabalhadas nas discussões da Atividade 2

Noção trabalhada	Desenvolvimento
Teorema 1	Aplicação do teorema.

A noção de infinitas soluções.	A partir da função e^{3x}, foi analisado que outras funções satisfaziam a equação até chegarmos a solução geral $y = Ce^{3x}$.
A noção de campo de vetores.	Estudo realizado com ajuda do software Maple.

Fonte: Elaborado pela autora

Considerações sobre a Atividade 2: Embora a atividade não tenha sido resolvida de forma satisfatória pela maioria dos alunos, a consideramos importante, pois é uma atividade que permite uma abordagem qualitativa, tanto pela utilização do campo de vetores como pelo uso do sinal da derivada.

Contudo, algumas modificações podem ser incluídas de forma a facilitar a compreensão do que foi solicitado na Atividade e a auxiliar os alunos em sua resolução:

i) Trocar: Faça um estudo sobre o comportamento da função f, por: Faça um estudo sobre o comportamento da função f em relação aos intervalos nos quais a função é crescente, decrescente ou constante.

ii) Colocar uma nota explicativa contendo o Teorema 1, de forma a auxiliar os alunos na sua aplicação.

4.3.3 Análise *a posteriori* da Atividade 3

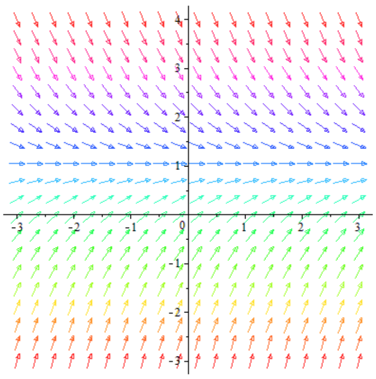
Esta atividade consistia em analisar o comportamento das soluções da equação $y' = f(y)$ utilizando seu campo de vetores. O objetivo principal era que os alunos interpretassem o campo de vetores, conseguindo extrair as informações do gráfico, ou seja, trabalhar em um outro domínio matemático, o da Geometria Analítica, e com o registro gráfico. Ela era composta por três itens:

a) Comente o comportamento das soluções desta equação.

b) Trace algumas curvas soluções sobre este campo.

c) Comente o comportamento das soluções quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

Figura 55: Campo de vetores para a EDO da Atividade 3



Fonte: Elaborado pela autora

Como a atividade demandava a interpretação do campo de vetores, não elencamos possíveis estratégias de resoluções na análise *a priori*.

Diferente da Atividade 2, esta atividade foi bastante discutida pelos grupos, assim, foi possível observar que os alunos conseguiram perceber que as variações do gráfico dependiam do valor de y, contudo, ainda apresentavam dúvidas em relação às influências das variações do valor de y na derivada e nas funções soluções.

O Quadro 42 ilustra os tipos de respostas apresentadas pelos alunos para o item a) da atividade. Assumimos que respostas do tipo, se $y > 1$, então a solução é decrescente, apesar de serem corretas, podem levar o aluno a pensar que é o valor de y que determina o crescimento ou decrescimento da função, quando, na verdade, o valor de y determina o sinal da derivada e esta, por sua vez, determina os intervalos de crescimento ou decrescimento das funções soluções.

Quadro 42: Respostas obtidas para a Atividade 3 a)

Comentários	**Quantidade de alunos**			
	G1	**G2**	**G3**	**G4**
$y = 1 \Rightarrow y' = 0$, portanto, solução constante. $y > 1 \Rightarrow y' < 0$, portanto, solução decrescente. $y < 1 \Rightarrow y' > 0$, portanto, solução crescente.	1	2		
$y = 1 \Rightarrow y' = 0$ $y > 1 \Rightarrow y' < 0$ $y < 1 \Rightarrow y' > 0$		2		
Se $y = 1$, solução constante. Se $y > 1$, solução decrescente. Se $y < 1$, solução crescente.			2	4
Para $y < 1$, a derivada é crescente e para $y > 1$ a derivada é decrescente e em $y = 1$ a derivada é nula.	3		1	
Total	15			

Fonte: Respostas dos alunos

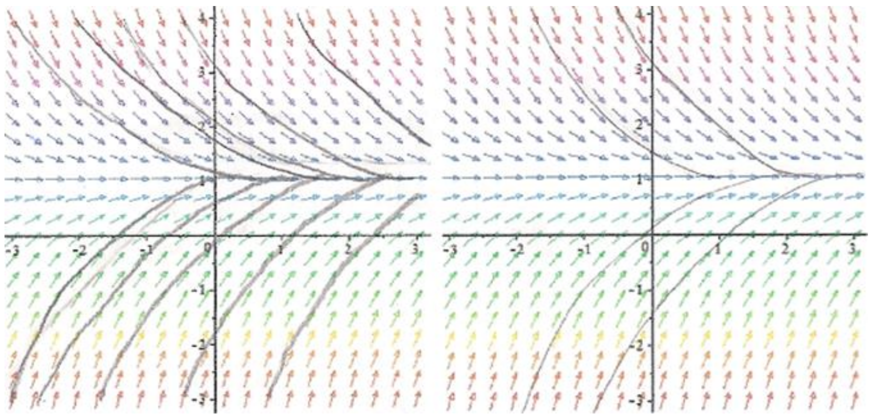
Apesar de os alunos trabalharem em grupos, as respostas individuais divergiam, por exemplo, dois alunos do G2 conseguiram relacionar os valores da variável y nos quais o sentido da inclinação do vetor era ascendente, com o sinal positivo da derivada e, consequentemente, com a solução crescente. Contudo, os outros dois alunos somente relacionaram a inclinação do vetor com o sinal da derivada.

Os alunos dos G3 e G4 deram respostas similares às duas últimas linhas do Quadro 42. Os alunos do G1 foram os que apresentaram maiores dificuldades na análise do gráfico, inicialmente, compararam a situação com o limite de x^3 por x^2 e tentaram observar se o gráfico correspondia a esta função, o que indica uma tentativa de recorrer a uma expressão algébrica para situação, mesmo expressando-se oralmente, o que pode ser consequência do fato que, segundo Rasmussen (2001, *apud* DULLIUS; VEIT; ARAUJO, 2013), os alunos, quando pensam em função, enxergam uma equação ou uma regra e não um gráfico. E, assim como na Atividade 2, esta dependência algébrica também está relacionada com o ensino do Cálculo, que está centrado em técnicas algébricas de resolução, não favorecendo o uso de outros registros de representação semiótica, o que pode causar dificuldades em analisar o gráfico sem estar acompanhado da expressão algébrica (CARGNIN, 2013).

Desta forma, foi solicitado que os alunos do curso de extensão observassem o gráfico sem tentar obter uma função. Eles explicaram para a pesquisadora os intervalos nos quais a solução era crescente/decrescente relacionando-os com o sinal da derivada, porém, quando a pesquisadora se ausentou e eles tentaram escrever estas afirmações, começaram a se questionar sobre a relação da derivada com a função e não chegaram num consenso. Desta forma, somente um aluno deu a resposta esperada na análise *a priori*, os demais relacionaram o sentido e a inclinação do vetor com a derivada crescente/decrescente.

No item b) todos os alunos apresentaram respostas similares a da Figura 56, ou seja, apesar de respeitarem o comportamento das soluções em relação aos intervalos de crescimento e de decrescimento e a solução de equilíbrio, eles não apresentavam coordenação do traçado em relação à inclinação dos vetores, simplesmente traçaram curvas crescentes nas regiões em que os vetores tinham inclinação positiva, sem respeitar a tangente, o que indica que a noção de campo de vetores ainda não estava bem definida para os alunos.

Figura 56: Respostas de um aluno do G2 e de um do G3, respectivamente a Atividade 3, item b)



Fonte: Respostas dos alunos

Em relação ao item c), ao contrário do que prevemos na análise *a priori*, nenhum aluno analisou o comportamento das soluções quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ separando-as nos casos

$y=1$, $y>1$ e $y<1$, sendo que oito alunos não conseguiram responder de forma satisfatória este item, a maioria deles disse que o comportamento das soluções não se altera quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, pois a equação dependia somente da variável *y*. O Quadro 43 ilustra algumas respostas que obtivemos para este item.

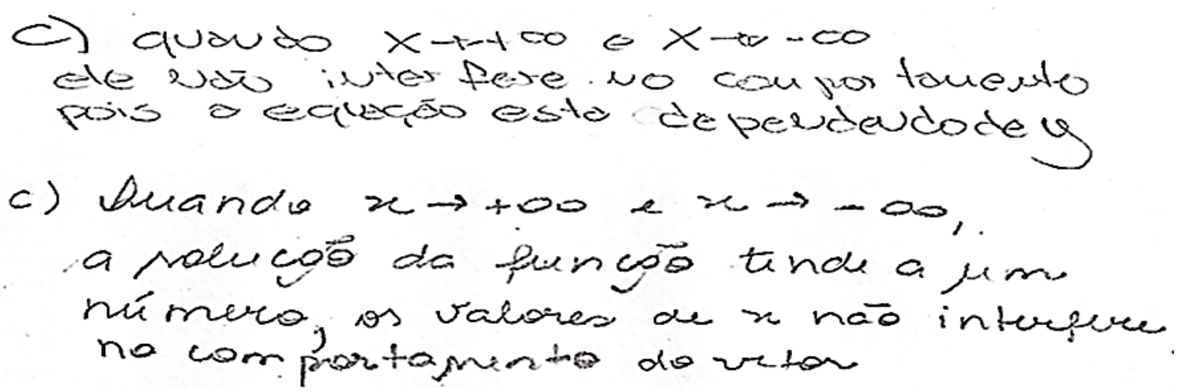
Quadro 43: Respostas dos alunos a Atividade 3 c)

Tipo de repostas	Comentários	Quantidade de alunos			
		G1	G2	G3	G4
Em branco.			1		
O valor de x não interfere na resposta.	Quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ ele não interfere no comportamento pois a equação depende de y.	4	3		
As soluções têm o mesmo comportamento quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.	Tende a 1.			3	
As soluções possuem comportamento diferente quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1.$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$				4
Total		15			

Fonte: Respostas dos alunos.

Segundo Duval (2011), o registro gráfico é pouco utilizado nas aulas de Matemática e, muitas vezes, seu emprego está vinculado a uma abordagem ponto a ponto (seção 1.1.2), na qual o aluno realiza uma conversão do RSA para RG, já a conversão do RG para outros registros de representação quase não é trabalhada, o que pode ter gerado dificuldade no desenvolvimento dessa atividade, pois, para responder à questão solicitada, o aluno precisa realizar uma conversão do RG para o RLNE. Conforme exposto na análise *a priori*, esta conversão é não congruente e envolve registros de naturezas diferentes, o que a torna ainda mais difícil de ser realizada.

Figura 57: Respostas de dois alunos a Atividade 3, item c)


c) quando x→+∞ e x→-∞ ele não interfere no comportamento pois a equação esta dependendo de y

c) Quando x→+∞ e x→-∞, a solução da função tende a um número, os valores de x não interfere no comportamento do vetor

Fonte: Respostas dos alunos

Na resposta apresentada na Figura 57, podemos ver que um dos alunos reconhece que as soluções tendem a algum valor e, ao mesmo tempo, afirma que os valores de *x* não interferem no comportamento das soluções. Acreditamos que isso pode ser consequência do que foi solicitado no item a) que também perguntava sobre o comportamento das soluções, porém, no sentido de crescente ou de decrescente. Neste item, o comportamento das soluções dependia apenas da variável *y*, sendo que, uma vez determinado o valor de *y* que modificava o comportamento das soluções, elas se mantinham igual para todo *x*.

Durante a discussão dos resultados do item a) da Atividade 2, os alunos não tiveram problemas para chegarem a uma conclusão, pois alguns já tinham fornecido vários elementos para a resposta necessitando apenas estruturá-los. A pesquisadora retomou alguns pontos, como o fato de a função ser positiva não implicar ela ser crescente, a relação entre o sinal da derivada e o comportamento das soluções, função constante e para quais valores de *x* as respostas eram válidas. Ao fim, os alunos chegaram a seguinte conclusão:

Se $y > 1$ a derivada é negativa e as soluções são decrescentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $y < 1$ a derivada é positiva e as soluções são crescentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $y = 1$ a derivada é nula e a solução é constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

Depois a pesquisadora, utilizando o software Maple, plotou algumas soluções da EDO sobre o campo de vetores, para que os alunos comparassem com as que tinham feito e fizessem as modificações necessárias no item b).

Em seguida, os alunos analisaram as respostas para o item c), para isso, foi discutido o que deveria se olhar no gráfico, ou seja, como ver que o $x \to +\infty$ e como olhar a solução quando isso acontece, conforme ilustra o diálogo abaixo.

Pesquisadora: O que acontece com as soluções, quando *x* tende a mais ou menos infinito?
Alunos: ((murmúrios)).
Pesquisadora: Quando *x* tende a infinito, mais infinito, a gente tem que olhar o eixo-*x*, do zero para os positivos, infinito positivo. Quando tende a menos infinito, eu vou olhando do para os negativos indo para o menos infinito, e preciso ver o que está acontecendo com as minhas funções. Certo? ... Então, olha aqui, quando *x* vai para mais infinito, as minhas funções vão para onde? Acompanhe as funções, independente da onde eu pego, elas estão se aproximando de quem?
Bia: De 1.
Pesquisadora: De 1. E se eu pego em outro ponto aqui em cima? ((aponta para uma parte do gráfico acima de y=1.))
Bia: Também.
Pesquisadora: Também. Então, o que que eu tenho, se o *y* é menor que 1, as minhas funções são crescentes e são limitadas, qual que é o limite delas?
Alunos: 1.
Pesquisadora: Isso elas se aproximam de y=1. Depois acima, as minhas funções são decrescentes e também são limitadas em y=1. Então, a primeira parte, tende a 1 para *x* tendendo a mais infinito. E para menos infinito, o que que acontece?
Alunos: ((murmúrios))

Pesquisadora: O que acontece com as soluções quando *x* tende a menos infinito? Elas se aproximam de 1 também?
Alunos: Não.
Pesquisadora: Não. E elas tem comportamento semelhantes?
Alunos: Diferentes.
Pesquisadora: Diferentes. E qual que é o comportamento?
Alunos: Para *y* maior que 1 vai para mais infinito, quando é menor que 1 vai para menos infinito.
Pesquisadora: Isso. E a gente está esquecendo de analisar alguma coisa?
Alunos: Quando é 1.

Assim, os alunos chegaram a seguinte conclusão:

Quando $x \to +\infty$ *as soluções tende a y=1 para qualquer valor de y.*

Quando $x \to -\infty$ *, se y>1 as soluções tendem para mais infinito, se y<1 as soluções tendem para menos infinito e se y=1 as soluções tendem para y=1.*

O próximo quadro ilustra algumas noções trabalhadas nas discussões desta atividade.

Quadro 44: Noções trabalhadas nas discussões da Atividade 3

Noção trabalhada	Desenvolvimento
Teorema 1.	Diferenciação entre o sinal da derivada e o sinal da função no estudo do comportamento (crescente/decrescente) das soluções.
Campo de vetores.	Construção do campo no GeoGebra, relação entre o campo de vetores e o comportamento da solução.
Comportamento das soluções.	Comportamento assintótico das soluções.

Fonte: Elaborado pela autora

Considerações sobre a Atividade: 3: Esta atividade foi bastante discutida pelos alunos de todos os grupos. Apesar de as respostas não serem completas ou até mesmo incorretas e os alunos apresentarem dificuldades em interpretar o campo de vetores, acreditamos que a atividade cumpriu com seu objetivo, uma vez que os alunos conseguiram obter informações do registro gráfico e trabalhar com a EDO em outro domínio matemático, o da Geometria Analítica.

Em relação ao item c), embora durante o teste da atividade com outros alunos não detectarmos problemas em relação à compreensão do que cada item solicitava, na experimentação, conforme já mencionamos, a estrutura do item a) pode ter influenciado os alunos a concluir que o comportamento das soluções dependia apenas da variável *y*.

Assim, sugerimos algumas modificações nos itens desta atividade. Como esta foi a primeira atividade na qual era dada o campo de vetores, acreditamos que perguntas mais direcionadas poderiam auxiliar os alunos a compreender melhor a atividade:

a) Comente o comportamento das soluções desta equação em relação aos intervalos de crescimento/decrescimento.

b) Trace algumas curvas soluções sobre este campo. Observação: Dado um campo de vetores para uma equação diferencial ordinária, se uma solução passa por um ponto desse campo, então, a curva é tangente ao vetor neste ponto.

c) Comente o comportamento assintótico das soluções de $y' = f(y)$, ou seja, o que acontece com as soluções quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

Após a discussão desta atividade, os alunos responderam as Atividades 4 e 5. Participaram do 3° encontro treze alunos, divididos em três grupos, G1: Gustavo, Pedro, Sofia, Théo, Vivian, G2: Ana, Bia, Marcos, Miguel e G4: Daiane, Fernando, Léo, Luciano. Neste dia, nenhum integrante do G3 participou do curso.

4.3.4 Análise *a posteriori* da Atividade 4

Esta atividade, assim como a Atividade 2, solicitava um estudo do comportamento das soluções da equação $y' = -3y - 7$. Como esta atividade foi proposta depois das discussões das Atividades 2 e 3, esperávamos que os alunos começassem a utilizar o campo de vetores para analisar o comportamento das soluções da EDO.

Quadro 45: Possíveis estratégias para a Atividade 4

A4E$_1$: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função *y*.
A4E$_2$: Utilizar o gráfico da derivada para determinar o sinal da derivada.
AE4$_3$: Analisar o campo de vetores.
AE4$_4$: Resolver algebricamente a EDO.
AE4$_5$: Obter a solução da EDO por tentativa e erro.

Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 46 apresenta algumas respostas dos alunos e as estratégias utilizadas.

Quadro 46: Respostas dos alunos a Atividade 4

Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
A4E$_1$: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função *y*.	Se *y>-7/3*, *y´<0*, portanto, as soluções são decrescentes. Se *y=-7/3*, *y´=0*, portanto, as soluções são constantes. Se *y<-7/3*, *y´>0*, portanto, as soluções são crescentes.				3
	Se *y>-7/3*, portanto, as soluções são decrescentes. Se *y=-7/3*, portanto, as soluções são constantes.				1

	Se $y<-7/3$, portanto, as soluções são crescentes.				
Uso conjunto das estratégias $A4E_1$e $A4E_3$.	Se $y>-7/3$, $y´<0$, portanto, as soluções são decrescentes. Se $y=-7/3$, $y´=0$, portanto, as soluções são constantes. Se $y<-7/3$, $y´>0$, portanto, as soluções são crescentes.	3	4		
	Se $y>-7/3$, portanto, as soluções são decrescentes. Se $y=-7/3$, portanto, as soluções são constantes. Se $y<-7/3$, portanto, as soluções são crescentes.	1			
	Se $y>-2$, positivo a $y´$ é crescente. Se $y<-2$, negativo a $y´$ é decrescente. Quando está em -2 a $y´$ é constante.	1			
Total de alunos		13			

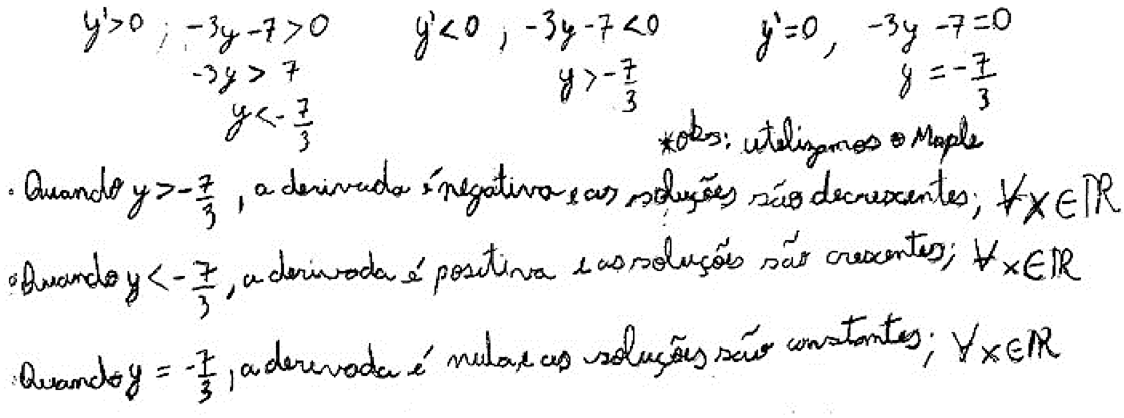
Fonte: Respostas dos alunos

Diferente da Atividade 2, na qual os alunos praticamente não refletiram sobre a situação, nesta atividade eles já conseguiram formular melhor suas respostas. Os alunos do G1 foram os que utilizaram as estratégias $A4E_1$ e $A4E_3$ simultaneamente, sem a interferência da pesquisadora. Gustavo fez o campo de vetores no Maple ($A4E_3$) e ele e Vivian começam a analisar o gráfico, enquanto Théo utiliza $A4E_1$, questionados por Pedro os alunos começam a relacionar suas estratégias:

Pedro: Vocês observaram o comportamento da equação?
Vivian: Ali, como que é, é menor que 3, ela é constante?
Gustavo: Menos sete terços ela é constante.
Théo: Eu fiz igual a que a gente fez antes, se a derivada é menor que zero, ela cresce. Aí eu isolei o *y*.
Vivian: Ela cresce ou ela decresce?
Théo: Quando a derivada é maior que zero ela cresce. Aqui quando *y* é menor que menos sete terços ela cresce. E quando é maior ela decresce.
Vivian: Ah, tá, ela decresce. Daí quando ela é menor que três, ela é constante?
Théo: Quando *y* é igual a menos sete terços ela é constante.
Gustavo: É que esse valor é menos sete terços, não três ((valor para qual os vetores eram paralelos ao eixo das abscissas no campo de vetores)).
Vivian: Ah, tá.
Pedro: É menos sete terços. Se você isolar aqui também dá ((fala para Vivian isolar o *y* na expressão algébrica da equação)), foi o que você fez aí? ((pergunta para o Théo se isolando *y* na equação $-3y-7=0$, obtém o $y=-7/3$)).
[...]
Théo: Então, àquela hora um dos problemas era que a gente deixava só, que é a função né? Que tinha que colocar mais, no plural, né? É mais que uma.
Gustavo: A função.
Théo: Todas as funções são crescentes, seria isso ... mais de uma função.

Assim, alunos do G1 chegaram ao resultado apresentado na Figura 58, exceto Vivian que, em sua resposta, não faz menção à derivada, como, por exemplo, escreveu que “ *quando* *y>-7/3 as soluções são decrescentes*" e Sofia que não conseguiu resolver a inequação corretamente e no gráfico identificou o valor -2 no lugar de -7/3.

Figura 58: Resposta de um dos alunos do G1 a Atividade 4



$y'>0$; $-3y-7>0$
$-3y>7$
$y<-\frac{7}{3}$

$y'<0$; $-3y-7<0$
$y>-\frac{7}{3}$

$y'=0$, $-3y-7=0$
$y=-\frac{7}{3}$

*obs: utilizamos o Maple

· Quando $y>-\frac{7}{3}$, a derivada é negativa e as soluções são decrescentes; $\forall x \in \mathbb{R}$

· Quando $y<-\frac{7}{3}$, a derivada é positiva e as soluções são crescentes; $\forall x \in \mathbb{R}$

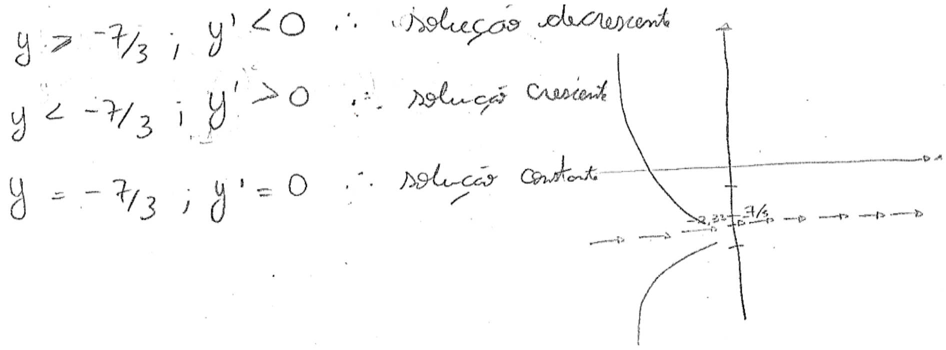
· Quando $y=-\frac{7}{3}$, a derivada é nula e as soluções são constantes; $\forall x \in \mathbb{R}$

Fonte: Respostas dos alunos

Os alunos G2 utilizaram a estratégia A4E$_1$, porém, quando resolveram as inequações inverteram a desigualdade. Percebendo este equívoco, a pesquisadora perguntou a eles se havia outra forma de analisar a situação, os alunos responderam que poderiam utilizar o Maple e que iam fazer o campo de vetores para comparar suas respostas. Ao analisarem o gráfico, eles perceberam o erro cometido e adequaram as suas respostas.

Os alunos do G4 utilizaram somente o sinal da derivada para obter as informações sobre o comportamento das soluções, quando a pesquisadora os questionou se havia uma forma de verificar se as respostas estavam corretas, eles afirmaram que poderia usar o campo de vetores, mas que não era necessário pois tinham certeza do que fizeram. E, para explicar, um dos alunos fez um gráfico que ilustrava o comportamento das soluções, conforme mostra a Figura 59.

Figura 59: Gráfico esboçado por um aluno do G4 para a Atividade 4

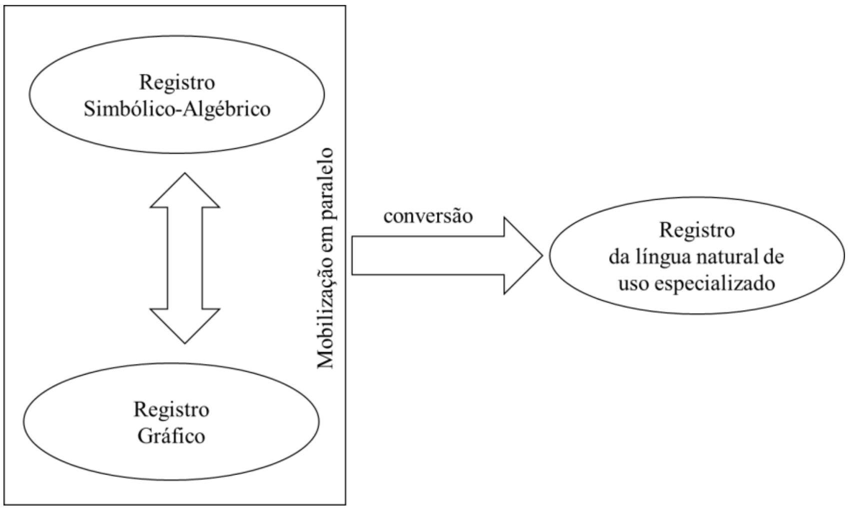


Fonte: Respostas dos alunos

Observamos uma melhora significativa nas respostas dos alunos para esta atividade em relação à Atividade 2, a maior parte deles conseguiu relacionar as unidades significativas (sinal da derivada) do RSA com as variações concomitantes nas soluções. A aluna Sofia, do G1, foi a única participante que relacionou o valor da variável *y* com o comportamento (crescente/decrescente) da derivada. Atribuímos esta confusão ao fato de que a aluna não participou dos dois dias anteriores do curso. Além disso, conforme descrito na análise *a priori*, a conversão do RSA ou RG para o RLNE é não congruente e, neste caso, exige um conhecimento matemático maior do aluno (Teorema 1) que não está explícito na conversão, além de conversão ser realizada entre um registro monofuncional (RSA/RG) para um registro multifuncional (RLNE), o que, segundo Duval (2003), dificulta a conversão.

Por outro lado, alguns alunos começaram a utilizar simultaneamente os registros RSA e RG para responder a situação. Ou seja, os alunos, com o auxílio do software, realizaram uma conversão para o RG (campo de vetores), contudo, não utilizaram somente este registro para obter suas respostas, eles articularam os dois registros RSA e RG, para depois realizar uma conversão para o RLNE (Figura 60).

Figura 60: Mobilização em paralelo de dois registros de representação

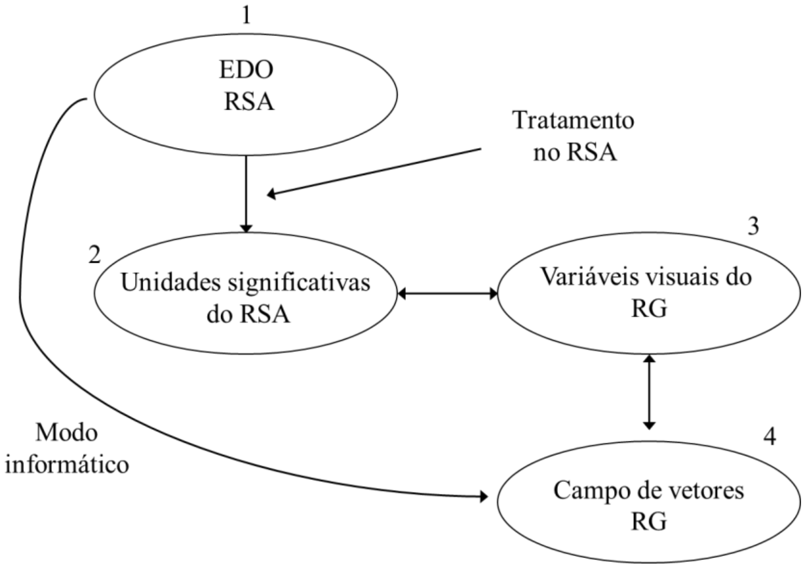


Fonte: Elaborado pela autora

Segundo Duval (2003), a compreensão de um objeto matemático está relacionada com a mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação, ou com a possibilidade de mudar de registro a todo o momento. Além disso, é importante identificar cuidadosamente se uma conversão consiste em "uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes" (p. 24).

Ao mobilizar em paralelo os registros RSA e RG, os alunos realizaram um procedimento informático de interpretação global, conforme ilustrado na Figura 61, ou seja, os alunos conseguiram perceber as mudanças no sinal da derivada (RSA) e as mudanças que ocorrem no campo de vetores (RG). Segundo Duval (1993, 2003), para a aprendizagem em matemática, a conversão entre os registros precisa ocorrer em uma mão dupla, isto é, a conversão precisa ser realizada em ambos os sentidos.

Figura 61: Procedimento informático de interpretação global para as EDOs



Fonte: Adaptado de Moretti; Luiz (2014, p. 69)

Para Moretti e Luiz (2014), a conversão em duplo sentido é garantida no procedimento informático de interpretação global quando o aluno consegue relacionar as unidades significativas do RSA com as variáveis visuais do RG, o que foi realizado por alguns alunos do curso, de forma espontânea (G1) ou por intermédio da pesquisadora (G2).

Alguns erros cometidos nesta atividade foram oriundos de problemas relativos à resolução das inequações $-3y-7>0$ e $-3y-7<0$, ou seja, dificuldades em relação à Matemática Básica. Essas dificuldades não são restritas aos estudantes do curso, pois, segundo Gomes, Lopes e Nieto (2005), muitos alunos que ingressam nos cursos de Engenharias desconhecem as propriedades algébricas elementares, por exemplo, a propriedade distributiva, além de não terem bem estabelecidas as propriedades da potencialização e da radiciação, o conceito de logaritmo e suas propriedades, entre outros.

No quarto encontro, foi realizada uma discussão dos resultados obtidos para a Atividade 4, que seguiu o mesmo padrão das anteriores, apresentação de algumas respostas e discussões dos alunos, seguida por explicações da pesquisadora e conclusão final dos alunos.

Após os alunos analisarem as respostas para a Atividade 4, a pesquisadora resolveu as inequações com eles, explicando todos os passos e retomou os conceitos de EDO autônoma, soluções de equilíbrio, campo de vetores, infinitas soluções, solução particular (PVI), sinal da derivada e crescimento/decrescimento da função, comportamento das soluções em relação à variável independente. Esses conceitos já haviam sido trabalhados nas atividades anteriores, porém, sempre eram retomados durante o curso com a intenção de melhorar a sua compreensão e formalização.

Assim, os alunos chegaram a seguinte conclusão em relação a Atividade 4: para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $y < -7/3$ *a derivada é positiva e as soluções são crescentes.*

Se $y > -7/3$ *a derivada é negativa e as soluções são decrescentes.*

Se $y = -7/3$ *a derivada é nula e a solução é constante.*

Aproveitando dessa atividade, a pesquisadora chamou a atenção dos alunos para o fato de que uma função pode ser crescente e negativa ou positiva e decrescente, ou seja, não é porque a função é positiva (negativa) que ela é crescente (decrescente).

Considerações sobre a Atividade 4: Julgamos que esta atividade cumpriu com seu objetivo na sequência de situações que era uma análise do comportamento das soluções de uma EDO. Diferente da Atividade 2, os alunos conseguiram analisar a situação proposta. Também pudemos observar que eles começaram a mobilizar outros registros de representação semiótica não comuns no tratamento das EDOs, como visto na análise dos livros, como, por exemplo, o campo de vetores o que pode auxiliá-los a compreender melhor o conceito de EDO.

4.3.5 Análise *a posteriori* da Atividade 5

Esta atividade tinha por objetivo reforçar as ideias trabalhadas nas atividades anteriores, ou seja, a relação entre o comportamento das soluções e o valor da derivada e o comportamento assintótico das soluções de uma EDO. Ela era composta por dois itens que estão ilustrados no quadro a seguir, junto com as possíveis estratégias de resolução.

Quadro 47: Possíveis estratégias para a Atividade 5

Item	Estratégia
a) Analise o comportamento das soluções da equação $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 9}{4}$.	**$A5E_{1a}$**: Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função f.
	$A5E_{2a}$: Analisar o gráfico de $f(y) = \frac{y^2 - 9}{4}$.
	$A5E_{3a}$: Analisar o campo de vetores da equação fornecida.
	$A5E_{4a}$: Resolver algebricamente a equação diferencial.
b) Qual o comportamento das soluções da equação do item anterior quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$?	**$A5E_{1b}$**: Analisar o campo de vetores para responder à questão proposta.

Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 48 ilustra as respostas obtidas para o item a) desta atividade.

Quadro 48: Respostas dos alunos a Atividade 5 – a)

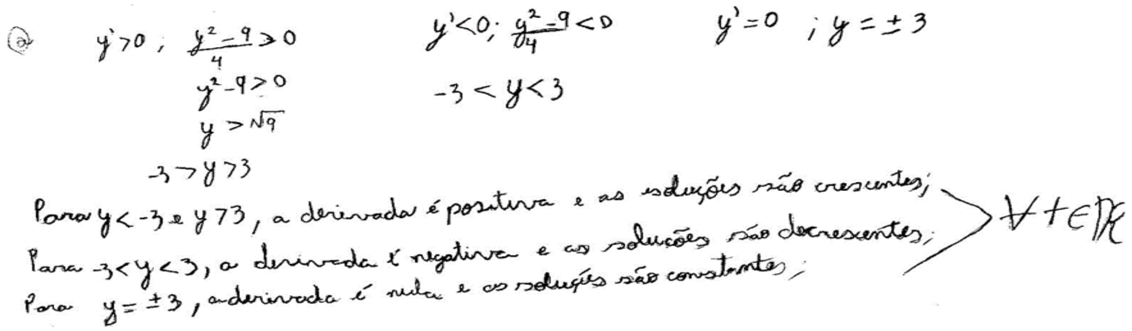
Estratégia utilizada	Tipo de respostas	Quantidade de alunos			
		G_1	G_2	G_3	G_4
Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função ($A5E_{1a}$)	Se $y<-3$ ou $y>3$, $y'>0$ e as soluções crescem. Se $-3<y<3$, $y'<0$ e as soluções decrescem. Se $y=-3$ e $y=3$, $y'=0$ e as soluções são constantes.		4		2
	Se $y<-3$ ou $y>3$ as soluções crescem. Se $-3<y<3$, as soluções decrescem. Se $y=-3$ e $y=3$, as soluções são constantes.				2
Uso conjunto das estratégias $A5E_{1a}$ (sinal da derivada) e $A5E_{3a}$ (campo de vetores)	Se $y<-3$ ou $y>3$, $y'>0$ e as soluções crescem. Se $-3<y<3$, $y'<0$ e as soluções decrescem. Se $y=-3$ e $y=3$, $y'=0$ e as soluções são constantes.	3			
	Se $y<-3$ ou $y>3$ as soluções crescem. Se $-3<y<3$, as soluções decrescem. Se $y=-3$ e $y=3$, as soluções são constantes.	1			
	Se $y<-3$ ou $y>3$ a derivada cresce. Se $-3<y<3$, a derivada decresce. Se $y=-3$ e $y=3$, a derivada é constante.	1			
Total de alunos		13			

Fonte: Respostas dos alunos

Do quadro anterior podemos observar que nove alunos responderam corretamente a este item, três não relacionaram a derivada e uma aluna do G1 relacionou os valores da variável *y* com o crescimento/decrescimento da derivada, o mesmo equívoco que ela cometeu na atividade anterior, lembrando que a discussão desta atividade e da Atividade 4 foram realizadas em conjunto em outro dia de curso.

O que nos chamou a atenção durante a resolução desse item foi o fato de que nenhum aluno conseguiu resolver algebricamente as inequações de segundo grau resultantes da análise do sinal da derivada. Por exemplo, para a inequação $\frac{y^2-9}{4}>0$, eles obtiveram $y>\pm 3$, e como não conseguiam interpretar o resultado recorreram a outra forma de análise. Os alunos do G1 estavam utilizando, simultaneamente, a análise do sinal da derivada e o campo de vetores, e assim, analisando o gráfico, adequaram as informações obtidas sobre o comportamento das soluções, a forma algébrica (Figura 62).

Figura 62: Resposta de um aluno do G1 a Atividade 5 - a)



a) $y' > 0$; $\frac{y^2-9}{4} > 0$ $\quad$ $y' < 0$; $\frac{y^2-9}{4} < 0$ $\quad$ $y' = 0$; $y = \pm 3$

$y^2 - 9 > 0$ $\quad$ $-3 < y < 3$

$y > \sqrt{9}$

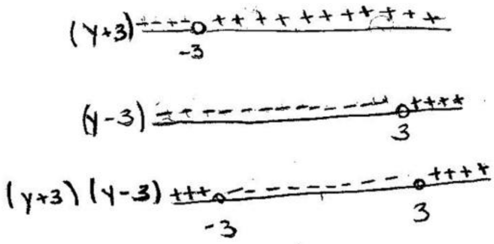
$-3 > y > 3$

Para $y < -3$ e $y > 3$, a derivada é positiva e as soluções são crescentes;
Para $-3 < y < 3$, a derivada é negativa e as soluções são decrescentes;
Para $y = \pm 3$, a derivada é nula e as soluções são constantes; $\forall t \in \mathbb{R}$

Fonte: Respostas dos alunos

Já os alunos dos grupos G2 e G4, ao se depararem com a desigualdade $y > \pm 3$, optaram por reescrever a inequação de segundo grau, como o produto de duas inequações do primeiro grau, conforme ilustra a figura abaixo. Os alunos destes grupos deram respostas análogas a da Figura 62.

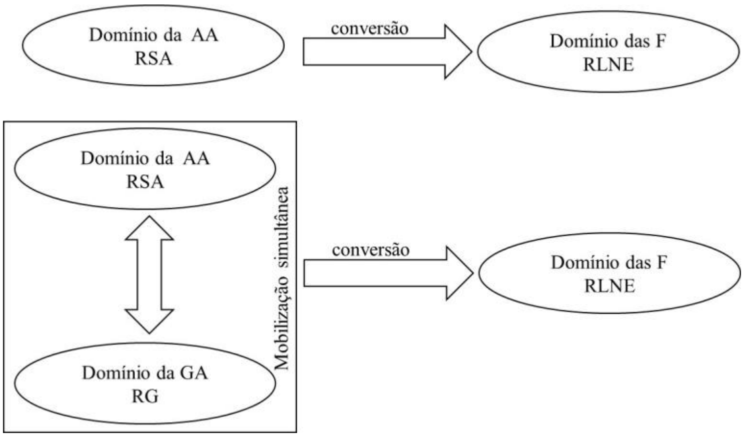
Figura 63: Resolução da inequação da Atividade 5



Fonte: Respostas dos alunos

Desta forma, a dificuldade dos alunos neste item foi em relação ao tratamento realizado no RSA e não às conversões realizadas, mesmo ocorrendo o fenômeno de não congruência, conforme exposto na análise *a priori*. Podemos verificar que, assim como nas atividades anteriores, os conhecimentos matemáticos do domínio da Álgebra não estão disponíveis para estes alunos. A Figura 64 ilustra as conversões e as mudanças de domínio realizadas pelos alunos no desenvolvimento deste item.

Figura 64: Mudanças de domínio e registro de representação para a Atividade 5 a)

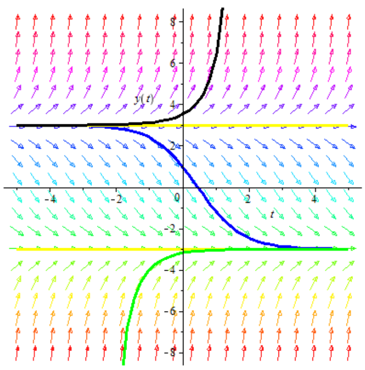


Fonte: Elaborado pela autora

Em seguida, os alunos passaram a responder o item b), analisando o campo de vetores para obter as informações necessárias, conforme esperávamos da análise *a priori*. Contudo, os alunos não conseguiam visualizar o comportamento das soluções para todos os intervalos possíveis e se perguntavam se o gráfico representava o comportamento da derivada ou das soluções. Embora alguns alunos já tivessem interpretado de forma correta o campo de vetores, esta confusão entre derivada e função sempre retornava, sendo assim, a pesquisadora retomou o conceito de campo de vetores, utilizando uma atividade no software GeoGebra (Figura 49) e o Maple.

Em seguida, a pesquisadora sugeriu que eles utilizassem algumas condições iniciais, com $y = \pm 3,\ y > 3,\ y < -3$ e $-3 < y < 3,$ para que visualizassem o que acontecia com as soluções quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Ela auxiliou os alunos a colocar estas opções no software, pois esperava que o traçado das soluções poderia ajudá-los a compreender o comportamento assintótico delas (Figura 65).

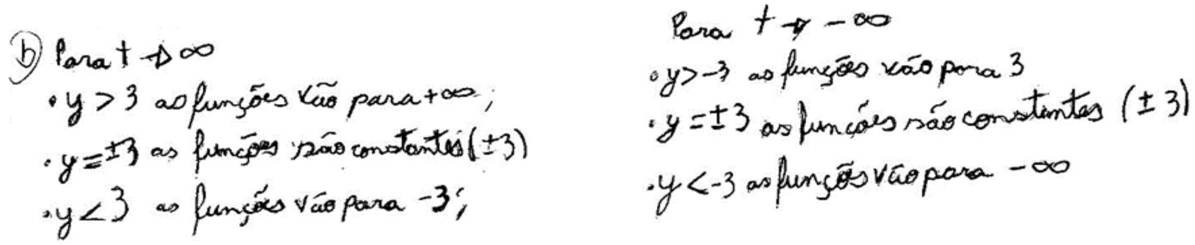
Figura 65: Campo de vetores para Atividade 5



Fonte: Elaborado pela autora

Mesmo após observarem a figura anterior, nenhum aluno apresentou o registro escrito para todos os casos. A Figura 66 ilustra uma das respostas dos alunos, podemos observar que para $t \to +\infty$ o aluno não considerou o intervalo $-3 \le y \le 3$ e $t \to -\infty$, ele considerou a condição para $y > -3,$ desconsiderando a mudança no comportamento assintótico das funções para $y > 3.$

Figura 66: Resposta de um aluno a Atividade 5 – b)



b) Para $t \to \infty$
• $y > 3$ as funções vão para $+\infty$;
• $y = \pm 3$ as funções são constantes (± 3)
• $y < 3$ as funções vão para -3;

Para $t \to -\infty$
• $y > -3$ as funções vão para 3
• $y = \pm 3$ as funções são constantes (± 3)
• $y < -3$ as funções vão para $-\infty$

Fonte: Respostas dos alunos

Mesmo participando das discussões de seus grupos, sete alunos (três do G1, dois do G2 e dois do G4) responderam à questão analisando o comportamento assintótico das soluções somente para $y > 3$ e $y < -3$.

A Figura 67 ilustra as mudanças de domínio e conversões realizadas pelos alunos na resolução deste item.

Figura 67: Mudanças de domínio e registro de representação para a Atividade 5 item b)

Fonte: Elaborado pela autora

Embora tivéssemos discutido em conjunto as respostas das Atividades 2 e 3, os alunos ainda se confundiam em relação ao comportamento da solução e ao sinal da derivada. Durante a discussão da Atividade 3 item c), os alunos conseguiram falar sobre o comportamento assintótico das soluções, porém, não conseguiram o mesmo desempenho na Atividade 5, isso só foi possível com o auxílio da Figura 65.

Gordillo (2006) observou que professores de Matemática apresentam dificuldades sobre o funcionamento dos conceitos que envolvem as EDO, mesmo em tarefas aparentemente simples. Para o autor, os alunos/professores focam-se no registro gráfico, mas o fato é que os gráficos somente são descritos em um registro discursivo e os alunos não possuem conhecimento suficiente para validar as conjecturas formuladas. Além disso, o registro gráfico normalmente é usado somente para representação e no caso das EDOs, a interpretação matemática das informações requer conhecimentos de diferentes domínios, como o das funções, da Geometria Analítica etc. Porém, os participantes da sua pesquisa não possuíam estes conhecimentos.

Podemos fazer inferências semelhantes às de Gordillo (2006) para os nossos alunos, pois a falta de conhecimento dos domínios da Álgebra, das funções e da Análise (CDI-I) gerou dificuldades para eles.

Nas discussões em conjunto desta atividade, no quarto encontro, foi retomada com os alunos a resolução de inequações modulares. Depois que os alunos visualizaram suas respostas e opinaram sobre elas, a pesquisadora projetou o campo de vetores para a equação dada com algumas curvas soluções (Figura 65) e foi conversando com os alunos sobre cada intervalo que precisavam analisar.

> **Pesquisadora:** [...] Então, o que acontece, sempre que eu tiver intervalos diferentes, intervalos onde ela é crescente, onde ela é decrescente, eu tenho que analisar o comportamento assintótico

para cada situação, para cada intervalo. Então, a gente tem que analisar o que acontece com as soluções acima de três, o que acontece com as soluções abaixo de menos três, e o que acontece com as soluções entre menos três e três, para *t* tendendo a infinito e menos infinito.
[...]
Pesquisadora: Então o que acontece lá ((*y>3*)), se eu seguir aquela solução em preto, que é uma das soluções representadas ali. Conforme o *t* cresce, o que acontece com minha solução? Para onde ela está indo?
Alunos: infinito
Pesquisadora: Infinito. Mas, se a gente analisar essa mesma solução, quando *t* vai para menos infinito, para onde as soluções vão, elas vão para menos infinito também?
Alunos: Não, para 3.
[...]
Pesquisadora: Entre os dois valores. O que acontece quando eu tenho uma solução entre menos três e três, para *y*. Quando *y* está entre menos três e três. Quando ele assumir qualquer valor entre menos três e três. O que acontece com essa solução, seria a azul. Quando *t* cresce, ela cresce também?
Alunos: Não.
[...]
Pesquisadora: Menos três. Agora o contrário. Quando *t* vai para menos infinito. O que acontece com a minha solução?
Alunos: Vai para três.

Dessa forma, os alunos analisaram cada caso e chegaram às seguintes conclusões para a Atividade 5:

Quando $t \to +\infty$*:*

Se $y > 3$ *as soluções vão para o infinito positivo.*

Se $-3 < y < 3$*, as soluções tendem a reta* $y = -3$.

Se $y < -3$*, as soluções tendem a reta* $y = -3$

Se $y = 3$*, as soluções tendem a reta* $y = 3$.

Se $y = -3$*, as soluções tendem a reta* $y = -3$.

Quando $t \to -\infty$*:*

Se $y > 3$ *, as soluções tendem a reta* $y = 3$.

Se $-3 < y < 3$*, as soluções tendem a reta* $y = 3$.

Se $y < -3$*, as soluções vão para o infinito negativo.*

Se $y = 3$*, as soluções tendem a reta* $y = 3$.

Se $y = -3$*, as soluções tendem a reta* $y = -3$.

Considerações sobre a Atividade 5: Julgamos que a atividade cumpriu com seu objetivo. Porém, de forma a auxiliar a compreensão do enunciado da atividade, por parte dos alunos, sugerimos algumas modificações nas perguntas:

a) Analise o comportamento das soluções da equação $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 9}{4}$ em relação aos intervalos de crescimento/decrescimento.

b) Qual o comportamento assintótico das soluções da equação do item anterior quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$?

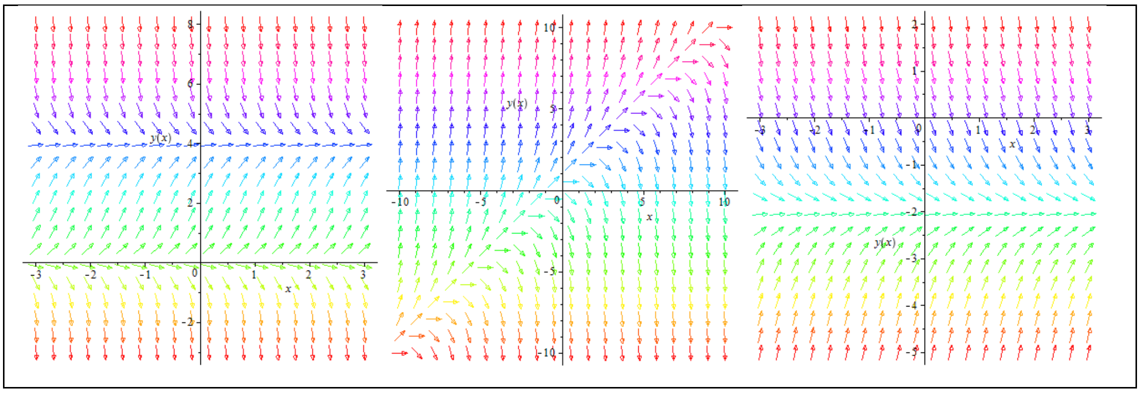
Após a discussão desta atividade, os alunos responderam as Atividades 6, 7 e 8. Participaram desde dia de curso 13 alunos, divididos em 4 grupos, G1: Gustavo, Sofia, Théo, Vivian, G2: Ana, Bia, Marcos, Miguel, G3: Bruno, Michel, Renata e G4: Daiane, Luciano.

4.3.6 Análise *a posteriori* da Atividade 6

Esta atividade tinha por objetivo fazer com que os alunos relacionassem a EDO ao seu campo de vetores, ou seja, que eles relacionassem as informações fornecidas pela expressão algébrica com o gráfico do campo de vetores.

As equações diferenciais: $y' = y - x$, $y' = -2y - 4$ e $y' = -y^2 + 4y$, foram fornecidas aos alunos juntamente com os campos de vetores mostrados na Figura 68.

Figura 68: Campos de vetores para a Atividade 6



Fonte: Elaborado pela autora

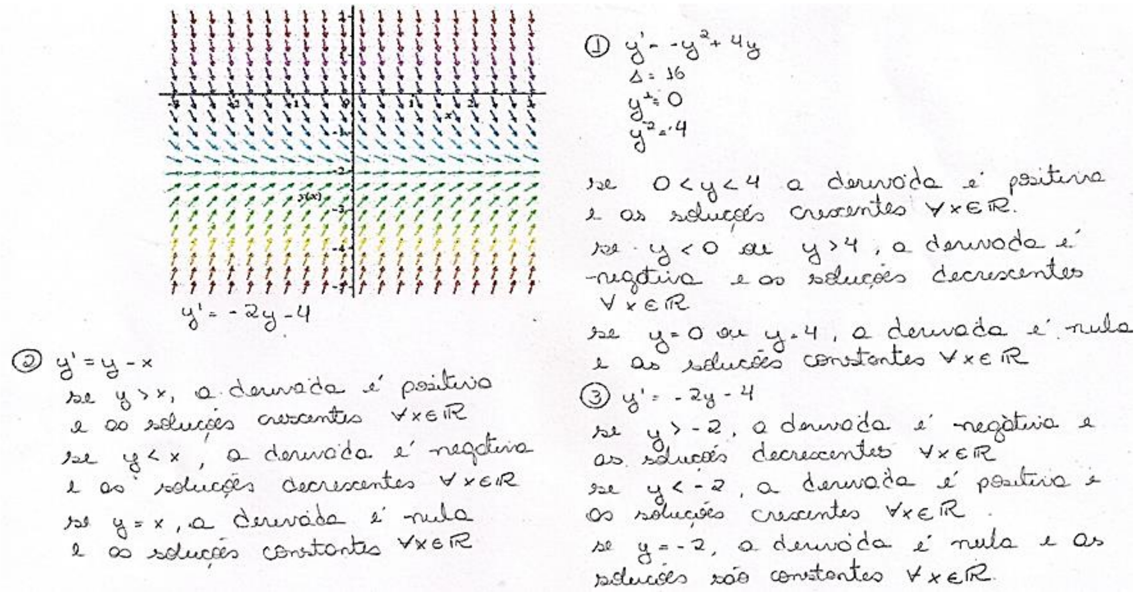
A pesquisadora leu a atividade com os alunos e explicou que era preciso justificar cada associação que eles fizessem. Eles enumeraram as equações 1) $y' = y - x$, 2) $y' = -2y - 4$ e 3) $y' = -y^2 + 4y$, e os campos de vetores a), b) e c), da esquerda para a direita, da forma que estão dispostos na Figura 68.

Na análise *a priori*, verificamos que, para responder à atividade, era preciso que os alunos identificassem as unidades significativas do RSA da EDO e as variáveis visuais do RG fornecidos pelo campo de vetores e as relacionassem. Desta forma, a estratégia de resolução seria a identificação destas unidades significativas, podendo se limitar à identificação das soluções de equilíbrio em ambos os registros.

Os quatro grupos compararam o sinal da derivada da EDO, obtido pelo tratamento no RSA (EDO) com as variações apresentadas em cada um dos campos de vetores resolvendo corretamente a questão. A única dificuldade foi para a equação $y' = y - x$, pois os alunos chegaram à conclusão de que $y' = 0$ implica $y = x$ e mesmo identificando o provável campo de vetores não conseguiam visualizar no gráfico as informações obtidas, pois diferente dos campos de vetores anteriores, as variações não dependiam somente da variável dependente y.

Os alunos do G2 foram os únicos que apresentaram em suas respostas todos os valores da derivada para quais as funções eram crescentes, decrescentes ou constantes (Figura 69).

Figura 69: Resposta de um aluno do G2 a Atividade 6



Fonte: Respostas dos alunos

Nas discussões em grupo, foi solicitado que os alunos falassem sobre suas justificativas para as associações feitas, uma vez que eles haviam respondido de forma satisfatória a esta atividade.

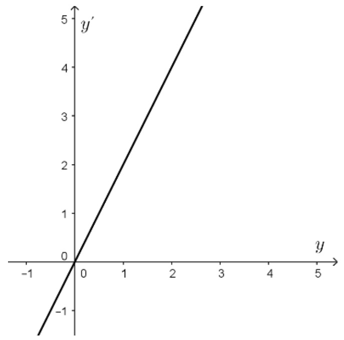
A pesquisadora explicou a diferença nas soluções da equação $y' = y - x$ que eles diziam ser constantes em $y = x$. E que, diferente das equações que eles tinham visto até agora, esta equação em $y' = 0$ possuía um ponto de máximo local e retomou o teste da derivada primeira para extremos locais.

Considerações sobre a Atividade 6: Julgamos que a atividade cumpriu com seu objetivo que era o de estabelecer relações entre a EDO e seu campo de vetores. Contudo, inferimos que poderia ser incluído mais um campo de vetores de uma equação do tipo $y' = f(x, y)$ de forma a explorar melhor este tipo de equação.

4.3.7 Análise *a posteriori* da Atividade 7

Esta atividade tinha como objetivo analisar o comportamento das soluções de uma EDO do tipo $y' = f(y)$, utilizando o gráfico da função derivada para obter os valores para os quais a derivada era positiva, negativa e nula.

Figura 70: Gráfico de $y' = f(y)$



Fonte: Elaborado pela autora

Prevemos, na análise *a priori*, que a estratégia possível para resolver esta atividade era analisar o gráfico para retirar as informações sobre o sinal da derivada. Porém, os alunos não conseguiam obter tais informações. Alguns alunos procuraram um meio de fazer o campo de vetores, porém, perceberam que não possuíam dados suficientes para isso.

Gustavo: Poderia perguntar para ela ((a pesquisadora)), se tem como fazer o outro gráfico. O outro ilustra melhor ((refere-se ao campo de vetores)).
Théo: Mas, e como que faz?
Gustavo: Ou um gráfico de *x*, *y*, normal.
Vivian: Quer tentar fazer no programa?
Gustavo: Pode ser.
Vivian: Mas, qual que é a função que você vai ter que colocar?
Théo: É então, não tem a função aqui.
Gustavo: Esse é o problema.

Na fala de Gustavo, percebemos que, para ele, um gráfico "normal" é aquele que apresenta as variáveis *x* e *y*, nos eixos coordenados. Isso nos indica que, além de trabalharmos um conceito nos diferentes domínios e registros de representação, conforme indicam Douady (1986, 1992) e Duval (1993, 2012), também é necessário apresentar aos alunos diferentes simbólos, de forma que eles não associem que uma função é sempre f, eixo-*x*, entre outros.

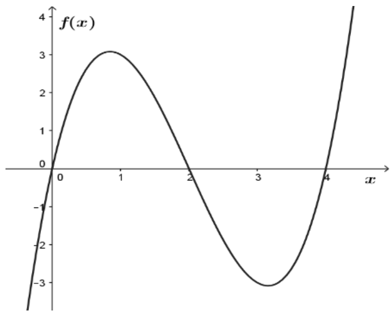
Os alunos chamaram a pesquisadora para saber se era possível fazer um outro gráfico.

Gustavo: Eu queria, o outro gráfico, aquele gráfico que fez no programa, desse daqui.
Pesquisadora: Esse gráfico é da sua derivada. O campo de vetores não é da derivada, o que você vê no campo de vetores?
Gustavo: Soluções.
Pesquisadora: Comportamento das soluções. Então você usa a derivada, lá, se ela é positiva ou negativa, para te dar aquela inclinação no vetor, mas ele não representa a derivada.
Gustavo: Certo. Ele representa as soluções.
[...]

Théo: Eu não entendi como analisar isso daqui.
Pesquisadora: A ideia é a mesma, a mesma que vocês tinham [...]. Pensando lá, o que que a gente está sempre buscando?
Théo: Onde a derivada era nula maior e menor que zero.
Pesquisadora: Aqui eu vou buscar a mesma coisa, a diferença é que quem vai me dar essa informação é o gráfico. Então eu tenho o gráfico, eu estou encarando a derivada como uma função. E a derivada é uma função. Certo? Função derivada.

Conversando com os alunos, a pesquisadora percebeu que o problema estava nas variáveis utilizadas nos eixos e principalmente no fato de a derivada estar representada no eixo das ordenadas. Assim, ela propôs outras situações para os alunos analisarem os intervalos nos quais a função, representada graficamente, possuía valores positivos (negativos), por exemplo, o gráfico da função da Figura 71, objetivando que, assim, eles conseguissem analisar o gráfico da Atividade 7.

Figura 71: Gráfico da função f



Fonte: Elaborado pela autora

Neste caso, os alunos não tinham nenhuma dificuldade em dizer para quais valores de x a função f era positiva, negativa ou nula. A pesquisadora fez outros exemplos e, depois, foi mudando as variáveis da ambos os eixos e os alunos continuaram respondendo corretamente, contudo, quando a derivada foi representada no eixo das ordenadas, os alunos não conseguiam repetir o raciocínio anterior.

Pesquisadora: Isso. Agora caso a minha função aqui, não é o Z. Quem está aqui é a minha derivada, y'. Então, neste caso, quando que a minha derivada é positiva? ... Quando? ... Mesma coisa que vocês falaram antes, só que no lugar do Z está escrito y'.
Sofia: Quando y for positivo.
Pesquisadora: Quando y é. O que vocês falaram antes, quando era Z? É a mesma coisa, não é porque usou y' que mudou. Quanto é y?
Gustavo: Maior que 1.
Pesquisadora: Maior que 1, y' que é a sua função que podia ser a *f*, podia ser a *g*, só que agora é y'. Quando y maior que 1, y' é?
Alunos: Positivo.

Inferimos que os alunos possuíam o conhecimento sobre como analisar para quais valores uma função é positiva (negativa) olhando o gráfico. Contudo, este conhecimento era restrito a funções do tipo $y = f(x)$, pois, conforme mostrado na análise *a priori*, a utilização do gráfico da derivada não é uma atividade normalmente requerida nas aulas das disciplinas CDI e ED, o que causou dificuldade em aplicar este conhecimento para a função $y' = f(y)$.

A pesquisadora fez uma interferência análoga em todos os grupos e, da mesma forma, os alunos não apresentavam dificuldades em analisar os intervalos em que a função era positiva/negativa, desde que a variável no eixo das ordenadas não fosse y'.

Após esta intervenção, a atividade decorreu sem dificuldades. Em uma primeira análise, os grupos também se questionaram sobre o fato de os pontos não pertencerem ao gráfico da derivada, mas, depois, conseguiram perceber, sem o auxílio da pesquisadora, que os pontos pertenciam às soluções e não ao gráfico da derivada.

Observando o Quadro 49, podemos verificar, ao final, que todos os alunos conseguiram analisar o gráfico para obter as informações a respeito de derivada e, consequentemente, das soluções da EDO, fornecendo as respostas previstas na análise *a priori*.

Quadro 49: Respostas dos alunos a Atividade 7

Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
Analisar o gráfico para obter o sinal da derivada.	Se $y > 0 \Rightarrow y' > 0$, portanto, as soluções são crescentes. Se $y = 0 \Rightarrow y' = 0$, portanto, a solução é constante. Se $y < 0 \Rightarrow y' < 0$, portanto, as soluções são decrescentes. Para (2, 2) o valor de $y > 0$, logo $y' > 0$, portanto, a solução é estritamente crescente. Para (-1, 3) o valor de $y > 0$, logo $y' > 0$, portanto, a solução é estritamente crescente. Para (0, -1) o valor de $y < 0$, logo $y' < 0$ portanto, a solução é estritamente decrescente.	3	4	3	2
Total		12[51]			

Fonte: Respostas dos alunos

Considerações sobre a atividade 7: Acreditamos que a atividade cumpriu com seu objetivo, pois os alunos conseguiram obter as informações sobre os valores da derivada por meio da análise do seu gráfico, e utilizando estes dados, fizeram inferências sobre as soluções da EDO. Além disso, a atividade auxiliou os estudantes a perceber que é possível representar outras variáveis, que não somente, *x* e *y*, nos eixos coordenados.

[51] A aluna Vivian precisou se ausentar e não respondeu a esta atividade.

4.3.8 Análise *a posteriori* da Atividade 8

Esta atividade tinha por objetivo que os alunos compreendessem que por um ponto (x_0, y_0) passa uma, e somente uma, curva solução da equação diferencial $y' = 5y$, o que consideramos como um Teorema da Existência e Unicidade local, ou seja, somente para as equações do tipo $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$. As possíveis estratégias definidas nas análises *a priori* estão descritas no quadro a seguir.

Quadro 50: Possíveis estratégias para a Atividade 8

A8E$_1$: Utilizar o conceito de tangente (vetor diretor) para mostrar que em um ponto (x_0, y_0) a equação $y' = 5y$ a reta tangente tem inclinação m dada por $m = 5y_0$.
A8E$_2$: Analisar o campo de vetores para a equação dada.
A8E$_3$: Resolver algebricamente a equação obtendo a sua solução geral.

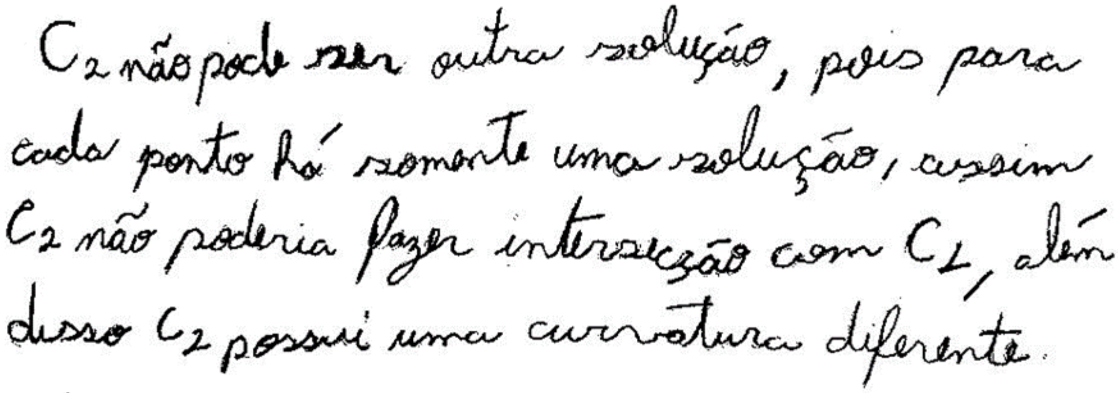
Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos do G1, G2 e G4 primeiramente analisaram a atividade utilizando somente os dados fornecidos pela própria questão e, em seguida, utilizaram o campo de vetores para confirmar ou refutar suas hipóteses. Podemos observar pelo diálogo abaixo dos alunos do grupo G1 que eles também utilizaram dos conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores e este fato pode ser estendido aos alunos dos grupos G2 e G4.

Gustavo: Este é o *y*, e elevado a *x*. Este gráfico é o e^x.
Théo: É.
Gustavo: É a exponencial.
Théo: Aí é $5x$. Porque a derivada dá 5 vezes ele mesmo. Você tem $y = e^{5x}$. A derivada dele é e^{5x} vezes a derivada em relação a *x*.
Théo: É.
Gustavo: Porém, em qualquer lugar não vai se cruzar.
Théo: Não.
Gustavo: Esse daí/ porque, aqui não tem como/ senão ela seria/ viria no mesmo ponto. Não abria aqui embaixo. Eu coloquei, mas não sei se está certo.
Théo: Mas aqui, provavelmente, teria alguma constante somando. Tipo, se ele ... se ele é solução ... é não.
Gustavo: Se tivesse seria a mesma curvatura. Igual aqui, teria a mesma curvatura.
Théo: Vou colocar aqui. Tipo mais três.
Gustavo: Não vai adiantar nada. Eu acho sabe o que ... a curvatura é a mesma, olha aqui. Só que aqui nem a mesma curvatura é. Eu acho que está certo.
Théo: O que você colocou como justificativa.
Gustavo: A curva C_2, não pode ser a outra solução, porque não pode haver intersecção. Há somente uma solução para cada ponto específico, quando a solução não é constante. Mas, não sei se está certo.
Théo: Cada ponto ... há somente uma solução .... assim C_2 .... não poderia fazer intersecção ... com C_1 ((fala baixo enquanto escreve))
Gustavo: Eu acho, não sei se você concorda também.
Théo: Além disso, o C_2 tem um outro comportamento também, uma outra função.
Gustavo: É, se ela fosse, ela seria a mesma curvatura.

Os alunos do G1 apresentam uma resposta similar à da Figura 72.

Figura 72: Resposta de um aluno do G1 a Atividade 8


C2 não pode ser outra solução, pois para cada ponto há somente uma solução, assim C2 não poderia fazer intersecção com C1, além disso C2 possui uma curvatura diferente.

Fonte: Respostas dos alunos

O G3 não utilizou o campo de vetores pois não trouxeram o notebook. Os alunos desse grupo trabalharam de forma separada e apresentaram respostas diferentes um dos outros. O Quadro 51 ilustra as estratégias utilizadas e alguns tipos de respostas que obtemos para esta atividade.

Quadro 51: Respostas dos alunos a Atividade 8

Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	G2	G3	G4
Em branco.			1	1	
A8E$_2$: Analisar o campo de vetores para a equação dada.	*Não, pois não existe ponto em comum entre duas soluções.*		3		2
	Análoga a Figura 72	3			
A8E$_3$: Resolver a equação obtendo a sua solução geral.	$y'=5y \Rightarrow f(y)=\underbrace{\frac{5y^2}{2}}_{fixa}+\underbrace{C}_{varia}$. *O gráfico não pode cruzar pois, se a diferença das constantes der 2 o gráfico desloca 2 unidades para cima, assim sucessivamente.*			1	
Estratégia equivocada	$y'=2x \Rightarrow y=x^2+C,\ x^2+\sqrt{3},\ x^2+5,\ x^2+e^8.$ *Eles tendem a 0 e não se cruzam, mesmo todos tem x^2 com n° comum não é suficiente para saber se C_2 é solução da equação.*			1	
Total		12[52]			

Fonte: Respostas dos alunos

Uma aluna do G2 e um aluno do G3 não responderam à questão, embora ela tenha ouvido os demais colegas discutindo sobre a atividade. Podemos observar que a aluna do G3 que optou por A8E$_3$, possuía conhecimentos sobre translação de funções, contudo, utilizou tal

[52] A aluna Vivian do G1 saiu antes e não respondeu a esta atividade.

conhecimento numa resolução incorreta da integral, por este motivo consideramos que a aluna não respondeu corretamente à questão, embora ela tenha chegado na resposta correta (não se cruzam) utilizando o conceito de translação.

Dos doze alunos que responderam a esta atividade, sete chegaram a uma conclusão satisfatória em relação aos objetivos propostos e os demais ou não responderam ou responderam de forma equivocada. Dos alunos que responderam equivocadamente, inferimos que as dificuldades podem estar relacionadas com a falta de conhecimento de conteúdos anteriores, como não saber resolver corretamente as integrais e com a necessidade de recorrer à expressão algébrica da função, utilizando as funções do tipo $f(x) = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$ embora a equação fosse $y' = 5y$.

Para a discussão em grupo desta atividade, a pesquisadora não selecionou as diferentes respostas, solicitando que os alunos falassem as suas respostas. Após a exposição dos alunos, a pesquisadora fez o seguinte questionamento:

> **Pesquisadora:** Então eu tenho as curvas vermelha e a azul. Certo? A minha equação é dada por $y' = 5y$. O que acontece quando eu venho nesse ponto ((ponto de intersecção de C_1 e C_2)), e eu vou calcular a inclinação da reta tangente eu vou usar qual derivada?... Quem é a derivada?
> **Alunos:** $y' = 5y$
> **Pesquisadora:** $y' = 5y$. Ela vai me dar a inclinação neste ponto para C_1. Se eu venho no mesmo ponto, e vou calcular a inclinação usando a mesma derivada só que para C_2, qual é a resposta que eu vou ter?
> **Alunos:** A mesma.
> **Pesquisadora:** A mesma. Mas, o que acontece ali, se eu calcular a reta tangente ali, a inclinação é diferente?
> **Alunos:** Sim.
> **Pesquisadora:** Então eu posso ter para o mesmo ponto, para a mesma solução, para mesma equação, duas inclinações das tangentes?
> **Alunos:** Não.

Assim, os alunos concluíram que, por um ponto (x_0, y_0), passa uma e somente uma curva solução da equação diferencial $y' = 5y$, a pesquisadora falou com os alunos sobre o Teorema da Existência e Unicidade, porém, não o formalizou nem o demonstrou.

Segundo os alunos, eles já haviam visto na disciplina regular este teorema, contudo, não conseguiram lembrar como poderiam utilizá-lo nesta atividade. Além disso, nenhum aluno conseguiu enunciar o teorema.

Considerações sobre a Atividade 8: A Atividade cumpriu com seu objetivo e acreditamos que não seja preciso realizar modificações em sua estrutura.

No quinto encontro foi desenvolvida a Atividade 9, com a participação de treze alunos divididos em três grupos, G1: Gustavo, Pedro, Sofia, Théo e Vivian, G2: Ana, Bia, Marcos e Michel, G4: Bruno, Daiane, Fernando e Léo.

4.3.9 Análise *a posteriori* da Atividade 9

Esta atividade tinha por objetivo familiarizar os estudantes com o estudo de problemas não matemáticos que pudessem ser modelados por meio de uma EDO e retomar o conceito da derivada como taxa de variação. Ela apresentava informações sobre uma população de ratos que crescia a uma taxa 0,5 ao mês e trazia os seguintes itens:

a) Escreva uma equação diferencial cuja solução é a população de ratos por mês.
b) Suponha que existam predadores que moram na mesma vizinhança e que eles matam 15 ratos por dia. Qual seria a equação diferencial que representa esta nova situação? O que acontece com esta população de ratos com o passar do tempo?
c) Transforme a equação diferencial obtida em a), em um problema de valor inicial. Estude a solução do problema para o valor inicial que você determinou.

As estratégias previstas para responder à segunda pergunta do item b) estão representadas no Quadro 52.

Quadro 52: Possíveis estratégias para a Atividade 9 – item b)

$A9E_1$: Analisar o sinal da derivada.
$A9E_2$: Analisar o campo de vetores.
$A9E_3$: Resolver algebricamente a EDO.

Fonte: Elaborado pela autora

Para dar início a atividade, a pesquisadora conversou com os alunos sobre a ideia da dinâmica populacional, perguntando sobre o que influenciava o crescimento de uma população, conforme ilustra o diálogo abaixo:

Pesquisadora: O que é dinâmica populacional?
Gustavo: O que é?
Fernando: Crescimento de uma população?
Pesquisadora: Crescimento de uma população. E a população também pode?
Alunos: Decrescer ((falam antes da pesquisadora)).
Pesquisadora: Decrescer. O que que vocês acham que influencia no crescimento da população?
Théo: Taxa de natalidade e mortalidade.
Miguel: A taxa de natalidade tem que ser maior que a mortalidade.
[...]
Pesquisadora: Então, imaginem se a Ana resolvesse criar ratos. Ela começou com dois ratinhos, mas ela descuidou, e esses ratinhos fugiram, e começaram a procriar. O que que vocês acham que vai acontecer com essa população de ratos?
Alunos: Vai crescer.
Pesquisadora: Ela vai crescer. E vocês acham que ela vai ter um fim, ou vai crescer, crescer, cada vez mais?

Sofia: Crescer cada vez mais.
Bia: Cresce exponencialmente.
Pesquisadora: Vai crescer um monte. Como daria para limitar essa população?
Miguel: Matar.
Sofia: Matando todo mundo.
Pesquisadora: Matando?
Fernando: Com um predador.
[...]
Pesquisadora: Vai limitar. Será que sempre vai limitar?
Gustavo: Pode extinguir.
Fernando: Tem que limitar os predadores.

Após esta conversa, a pesquisadora entregou a Atividade 9 aos estudantes para que eles analisassem a situação proposta. Apesar de o item a) solicitar explicitamente a EDO que representasse o problema, os alunos tentaram determinar uma função que descrevia o fenômeno, e segundo eles, obtendo esta função poderiam derivá-la para obter a EDO.

Percebendo que todos os grupos procuram pela função que modelava a situação, a pesquisadora fez uma intervenção, perguntando quais eram as variáveis envolvidas e como era possível representar, matematicamente, a taxa de variação da população. Vários alunos responderam que a taxa de variação da população poderia ser representada matematicamente pela derivada da população em relação ao tempo.

Assim, a pesquisadora explicou que eles já tinham encontrado a primeira parte da EDO procurada no item a) e que precisavam escrever em notação matemática a outra parte da afirmação: "é proporcional a própria população".

Assim, os grupos escreveram a equação $\frac{dP}{dt} = 0,5P$, realizando uma conversão do RLNE para o RSA e uma mudança do domínio não matemático para o domínio da AA.

Nesse momento, alguns alunos pediram para pesquisadora explicar a EDO obtida, pois não entenderam como chegaram a esta expressão. A pesquisadora percebeu que estes alunos não entendiam o modelo apresentado pelo fato que não compreendiam o conceito de proporcionalidade envolvido, desta forma, não entendiam o porquê da notação $0,5P$. A pesquisadora retomou o conceito de proporcionalidade, fazendo alguns exercícios nos quais os alunos precisavam escrever, em notação matemática, algumas afirmações como: o número quatro é proporcional ao número dois.

A equação $\frac{dP}{dt} = 0,5P$ possui as mesmas características das EDOs trabalhadas na sequência, contudo, nas atividades anteriores, eles não precisavam compreender cada termo da equação, sendo que eles, até o momento, não tinham se questionado sobre as constantes que apareciam nas EDOs.

Na análise *a priori* esperávamos que uma dificuldade que pudesse surgir era os alunos não recordarem que a derivada pode ser entendida com a taxa de variação, contudo, a dificuldade que apareceu não foi em relação à derivada e sim à falta de entendimento do conceito de proporcionalidade, que não foi prevista, o que fez com que alguns alunos não conseguissem compreender a conversão do RLNE (informação) para o RSA (EDO), embora ela fosse congruente (análise *a priori*).

Cargnin (2013) alerta para a importância dos alunos compreenderam os termos e os conceitos envolvidos no enunciado de um exercício, pois a falta de conhecimento de uma palavra, conceito ou expressão pode comprometer a compreensão da situação proposta e, consequentemente, sua resolução. O que também foi percebido com essa turma.

Em seguida, os alunos começaram a analisar o item b). Eles discutiram sobre o fato de que a taxa de crescimento, dada no problema, era mensal e a quantidade de ratos mortos era por dia, e concluíram que precisavam multiplicar a quantidade de ratos mortos por 30 (quantidade de dias no mês) para obter a quantidade de ratos mortos no mês.

Após esta discussão, eles escreveram a equação $\frac{dP}{dt} = 0,5P - 450.$ Os alunos não apresentaram dificuldades em analisar a EDO determinada e forneceram as respostas apresentadas no Quadro 25 para esse item.

Quadro 53: Respostas dos alunos a Atividade 9 –item b)

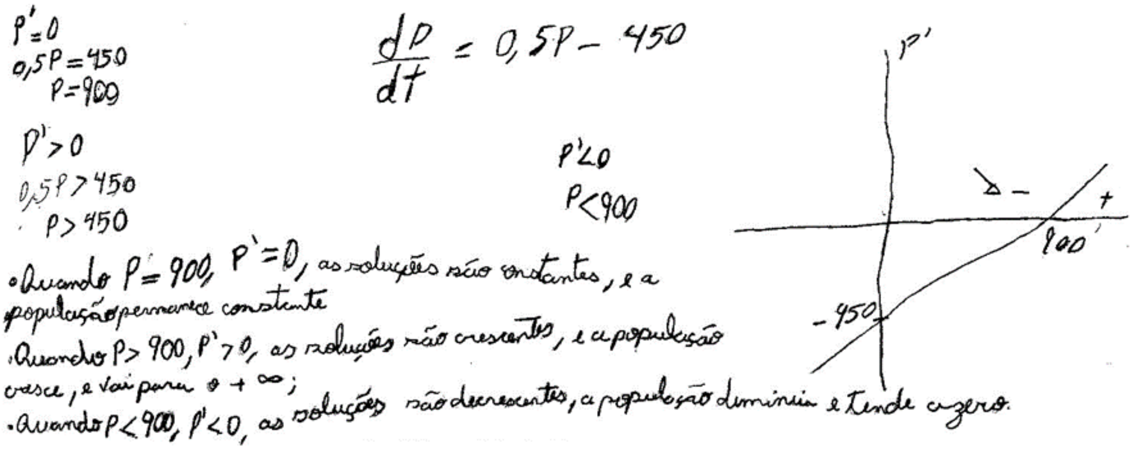
Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**		
		G1	**G2**	**G4**
Analisar o sinal da derivada (A9E$_1$) e o campo de vetores (A9E$_2$).	Se $P > 900 \Rightarrow \frac{dP}{dt} > 0$, a população cresce. Se $P = 900 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0$, a população se mantém constante. Se $P < 900 \Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0$, a população decresce.	5	4	4
Total		13		

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos de todos os grupos utilizaram, simultaneamente, o sinal da derivada e o campo de vetores da EDO obtida para o item b), nesta análise, realizando um procedimento informático de interpretação global. Ao utilizar este procedimento, os alunos puderam validar o modelo encontrado, além disso, o campo de vetores auxiliou-os na compreensão da situação, uma vez que eles puderam visualizar o comportamento da população de ratos para qualquer valor de *P*.

Os alunos do G1 também utilizaram o gráfico da derivada, $P' = 0,5P$, (Figura 73) de forma similar ao processo realizado na Atividade 7, ou seja, os alunos conseguiram aplicar os conhecimentos trabalhados em outras atividades, utilizando diferentes registros de representação e, consequentemente, ferramentas de diferentes domínios matemáticos para explicar, analisar e validar os resultados obtidos, o que, segundo Duval (1993, 2003) e Douady (1986), são condições para a compreensão de conceito, no caso, as EDOs.

Figura 73: Resposta de um aluno do G1 para a Atividade 9 item b)



Fonte: Respostas dos alunos

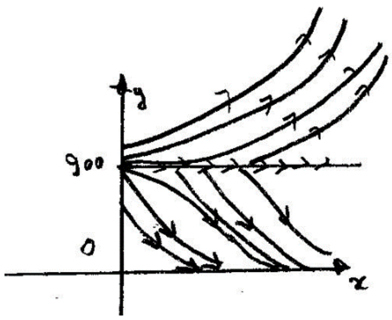
Além disso, os alunos conseguiram relacionar o resultado matemático ao problema estudado, conforme ilustra a resposta na Figura 73 e o diálogo abaixo:

Pedro: Aqui ela vai decrescendo
Gustavo: Mas ela está decrescendo
Pedro: ((fala não identificada))
Gustavo: Vai ir a zero. Zero vai ser o de limitante.
Pedro: Mas lá vai para infinito
Gustavo: Vai para infinito. Eu estou com uma ((fala não identificada)) de zero a meio. Se eu tirar 1 milhão de ratos, ele vai crescer 1 milhão e meio, e somar o quatrocentos e cinquenta. Então, vai crescer para o infinito.
Vivian: Como é que vocês falaram. Para maior que novecentos ela vai para o infinito, e menor que novecentos ela vai para zero.
Gustavo: Para novecentos ela é constante.
Pedro: Você chegou a conclusão?
Gustavo: A partir desse gráfico assim. Ela fala para pôr um valor inicial.
Pedro: Você colocou?
Gustavo: Novecentos.
Pedro: E por que você colocou novecentos?
Gustavo: Por que vai dar constante. Você pode colocar qualquer um. A solução vai depender do valor inicial que você determinou ... Com novecentos ela vai permanecer constante, tipo, nasce quatrocentos e cinquenta, mata quatrocentos e cinquenta.
Sofia: Não entendi por que que vocês fizeram o gráfico desse jeito. ((A aluna refere-se ao gráfico que Gustavo fez (Figura 74) que representa somente as soluções no primeiro quadrante)).
Gustavo: A b) né? Está escrito, a derivada é igual a meio de P menos quatrocentos e cinquenta, certo? Esse aí é o fator. O P é o fator determinante para ver se a população vai crescer ou decrescer. Então, tipo dP/dt é a derivada. Quando a derivada é nula, em alguma coisa, a

população é constante. Então, você achou o valor do P, esses novecentos, ela vai ser constante. Então, se a população inicial for novecentos, ela vai manter constante. O que vai crescer, vai morrer. Se for maior que novecentos, então a população vai aumentar. Se for menos que novecentos, a população vai diminuindo, até chegar em zero. Entendeu? Então ela vai tender a zero. Cresce, pode falar.
Sofia: Não é que ... eu entendi o problema, só não entendi o gráfico ser desse jeito.
Gustavo: Aqui ele está crescendo para o infinito. Quanto maior a população inicial, mais vai crescer, se for 901, vai sobrar 1. Então, 1 por mês até, um monte, tende ao infinito
Sofia: Mas, daí não teria que ter um outro lado da conta?
Gustavo: Não. Ah, não, tem um outro aqui, menor. Ele vai tender a zero, não existe população negativa. Então ele vai tendendo até a zero.
Sofia: Ah, tá. Então, essa parte aqui, seria o maior que 900, e essa o menor que 900.
Gustavo: Isso, entendeu?

A próxima figura ilustra o gráfico esboçado por Gustavo para compreender a situação proposta.

Figura 74: Gráfico do aluno Gustavo para a Atividade 9

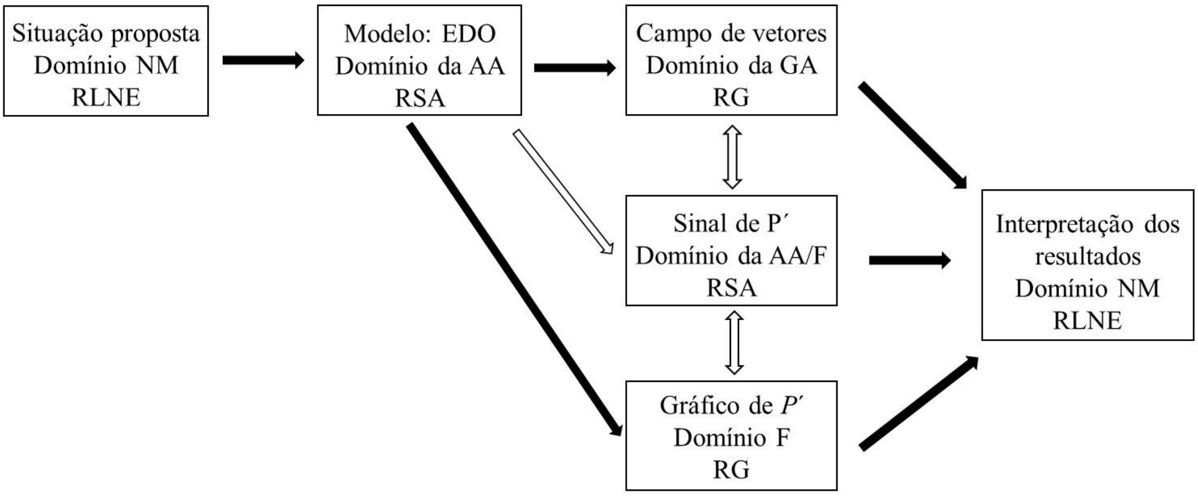


Fonte: Resposta do aluno

Em relação ao item c) os alunos não apresentaram dificuldade em formular e analisar seu PVI, somente perguntaram à pesquisadora se eram eles mesmos que poderiam escolher o valor inicial. Alguns alunos fizeram o PVI utilizando a EDO obtida no item a) e outros, a do item b) e, em conjunto, decidiram utilizar o item b), pois no item a) a população iria crescer independente da população inicial.

A Figura 75 ilustra os domínios matemáticos e os registros de representação utilizados durante o desenvolvimento da Atividade. As setas $\longrightarrow$ indicam as conversões realizadas, a seta $\Longrightarrow$ o tratamento efetuado para a análise do sinal da derivada e as setas $\Longleftrightarrow$ ilustram a coordenação entre os registros. Ressaltamos que o gráfico da derivada foi utilizado somente pelos alunos do G1.

Figura 75: Domínios e registros utilizados na resolução e interpretação da Atividade 9)



Fonte: Elaborado pela autora

Observando a Figura 75, podemos verificar que, ao efetuarem as conversões indicadas, os alunos também realizaram uma mudança de domínio, recorrendo a ferramentas de diferentes ramos da Matemática. Além disso, diferente das atividades anteriores, os alunos realizaram, pela primeira vez, uma conversão do RLNE para RSA e uma mudança do domínio NM para o domínio da AA.

Nas discussões dessa atividade, a pesquisadora novamente recordou o conceito de proporcionalidade e explicou as constantes das EDOs dos itens a) e b). Também foi comentado sobre a possibilidade de uma população crescer infinitamente, o que, segundo os alunos, não era possível, visto que existe a necessidade de alimentos, predadores, entre outros fatores que limitam a população.

Considerações sobre a Atividade 9: A atividade propiciou a aplicação da derivada como taxa de variação, que era um dos seus objetivos. Além de propiciar aos alunos um contato com a formulação de modelo matemático, o que acreditávamos que poderia auxiliá-los no desenvolvimento dos problemas de Modelagem Matemática da fase 2.

4.4 Análise *a posteriori* da fase 2

Nesta seção, apresentamos a análise *a posteriori* dos problemas no contexto da Modelagem Matemática. Foram desenvolvidos com os alunos três problemas deste tipo: o primeiro abordou o tema decaimento radioativo; o segundo, a variação de temperatura de um refrigerante, ambos os temas podem ser facilmente encontrados em livros didáticos que tratam do conceito de EDO. Porém, propomos um estudo diferente do proposto pelos livros didáticos, ou seja, os alunos precisaram analisar o fenômeno, levantar hipóteses, para, na sequência, determinar o modelo matemático e não somente substituir os dados do problema em uma fórmula, conforme exposto na subseção 2.4.3.

Para o terceiro problema, os alunos fizeram um trabalho em grupo, denominado projeto final, no qual cada grupo deveria escolher um tema e desenvolver uma análise matemática da situação por meio de uma EDO.

Para além de encontrar e de resolver a EDO que representasse cada um dos problemas considerados nesta fase, os alunos deveriam buscar compreensões sobre o fenômeno estudado a partir da equação, utilizando, para tanto, os conhecimentos e as experiências construídos no desenvolvimento da sequência.

4.4.1 Análise *a posteriori* do primeiro problema de Modelagem Matemática

Este problema tinha por objetivo proporcionar aos alunos um primeiro contato com uma aplicação das EDOs, em uma situação real, cujos dados seriam investigados por eles mesmos, e trabalhar a derivada como taxa de variação, pois esta noção tinha sido explorada somente na Atividade 9. Apesar de ser um problema de Modelagem Matemática, o qual não poderíamos prever todos os delineamentos, levantamos na análise *a priori* alguns possíveis encaminhamento para a interpretação deste problema, os quais foram descritos no Quadro 54.

Quadro 54: Possíveis estratégias para o primeiro problema de Modelagem Matemática

M1E$_1$: analisar os dados utilizando uma EDO.
M1E$_2$: obter uma função (linear, exponencial) que modele a situação.
M1E$_3$: caso optem por fazerem alguma previsão, eles podem aplicar uma regra de três para aproximarem o valor procurado.
M1E$_4$: obter uma constante de proporcionalidade e utilizá-la para fazer previsões.

Fonte: Elaborado pela autora

O problema foi desenvolvido durante um encontro e meio (6° e 7° encontros). No sexto encontro, participaram treze alunos (G1: Gustavo, Pedro, Théo, Vivian. G2: Marcos, Miguel. G3: Luciano, Michel, Renata. G4: Bruno, Daiane, Fernando, Léo).

No sétimo encontro, participaram onze alunos, sendo que duas alunas não haviam participado da atividade no dia anterior (G1: Pedro, Théo, Vivian. G2: Ana, Bia, Marcos. G3: Luciano, Renata. G4: Daiane, Fernando, Léo).

No sexto encontro, a pesquisadora retomou a ideia do tema decaimento radioativo com os alunos. Durante as discussões, eles falaram sobre os acidentes ocorridos em Chernobyl, no Japão, e em Goiânia, no Brasil.

Depois de os alunos falarem o que sabiam sobre o acidente em Goiânia, foi entregue a eles uma reportagem sobre o assunto. Após a leitura, os alunos comentaram as informações da reportagem e a pesquisadora fez alguns questionamentos de forma a auxiliá-los na compreensão e no desenvolvimento do problema.

Pesquisadora: Com o passar do tempo, o que que vai acontecendo com a quantidade de Césio?
Fernando: Cai pela metade.
[...]
Pesquisadora: Isso, precisamos saber a meia vida do Césio, e mais alguma coisa?
Alunos: Quantidade inicial.
Théo: Ano que aconteceu.
[...]

Os alunos, acessando sites na internet, obtiveram os seguintes dados:

i) Meia vida do césio-137 igual a 30,2 anos, ou seja, a cada 30,2 anos, a quantidade de césio-137 reduz pela metade.

ii) Quantidade inicial de césio-137 igual a 19,26 gramas.

iii) Ano que ocorreu o acidente: 1987.

E levantaram a hipótese de que a quantidade de césio-137 diminuía com a passar do tempo, então, para validar esta hipótese, decidiram determinar a EDO que modelava essa situação. Acreditamos que, por estarem envolvidos com o curso de EDO, encontrar a EDO que modelava o fenômeno era uma motivação para os alunos, por isso, a pesquisadora deixou que os alunos respondessem, num primeiro momento, a seguinte pergunta: Qual a EDO que modela este fenômeno?

Os alunos consideraram as variáveis tempo t (em anos) e quantidade de Césio Q (em gramas) e escreveram a primeira parte da equação dQ/dt sendo a taxa de variação da quantidade de césio em relação ao tempo. Eles discutiram um tempo sobre esta situação e os alunos do G1 e G2, utilizando da informação que a cada 30,2 anos a quantidade de Césio diminui pela metade, organizaram os dados conforme a tabela a seguir:

Tabela 8: Quantidade de Césio-137 ao longo do tempo

Ano	**Q**
1987	19,26
2017,2	9,63
2047,4	4,81
2077,6	2,40
2107,8	1,20
2138	0,6

Fonte: Respostas dos alunos

A pesquisadora reproduziu a tabela acima no quadro para que todos os alunos pudessem visualizá-la. Utilizando os dados da tabela, a pesquisadora indagou-os sobre o que influenciava na taxa de variação da quantidade de césio. Como os alunos acreditavam que era somente a meia vida do elemento radioativo que interferia na taxa de variação, ela supôs outras situações nas quais as quantidades de césio eram diferentes, até que os alunos puderam perceber que a quantidade de césio interferia na sua taxa de variação, ou seja, a taxa de variação da quantidade de césio-137 era proporcional à quantidade de césio-137 em cada instante de tempo. Com essa afirmação e, possivelmente, considerando a experiência com a Atividade 9, os alunos não tiveram dificuldade em escrever a equação $\frac{dQ}{dt} = \alpha Q$ para representar o problema.

Os alunos assumiram $\alpha = 0,5$, pois, como a quantidade de Césio diminuía pela metade a cada 30,2 anos, eles acreditavam que a constante de proporcionalidade era igual a 0,5. Porém, ao construírem o campo de vetores perceberam que a quantidade de Césio estava aumentando, o que ia contra sua hipótese de que a quantidade de Césio deveria diminuir com o passar do tempo e solicitaram a ajuda da pesquisadora. Ela explicou que variação da quantidade de Césio-137 era contínua durante os 30,2 anos, ou seja, ia diminuindo todos os dias durante os 30,2 anos.

Em seguida, a pesquisadora, junto com os alunos, deduziu a fórmula[53] $\alpha = (Q_t / Q_0)^{\frac{1}{t}} - 1$ sendo *t* o tempo, Q_t a quantidade de Césio no tempo *t* e Q_0 a quantidade inicial de Césio, que poderia ser utilizada para calcular α (Figura 76).

Figura 76: Dedução da fórmula para a constante α

$$Q(t+1) - Q(t) = \alpha Q(t)$$
$$Q(t+1) = Q(t) + \alpha Q(t)$$
$$Q(t+1) = (1+\alpha) Q(t)$$
$$\begin{cases} Q_{t+1} = (1+\alpha) Q_t \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$
$$Q_1 = (1+\alpha) Q_0$$
$$Q_2 = (1+\alpha) Q_1$$
$$Q_2 = (1+\alpha)(1+\alpha) Q_0$$
$$Q_2 = (1+\alpha)^2 Q_0$$
$$Q_3 = (1+\alpha)^3 Q_0$$
$$\boxed{\therefore\ Q_t = (1+\alpha)^t Q_0}$$

isolando α

$$\sqrt[t]{\frac{Q_t}{Q_0}} = \sqrt[t]{(1+\alpha)^t}$$
$$\boxed{\alpha = \left(\frac{Q_t}{Q_0}\right)^{1/t} - 1}$$

Fonte: Respostas dos alunos

53 Procedimento descrito em Bassanezi (2011, p. 331).

Com esta fórmula os alunos calcularam a constante α, obtendo a EDO

$$\frac{dQ}{dt} = -0,023Q$$

O Quadro 55 ilustra a estratégia utilizada para modelar o problema dado.

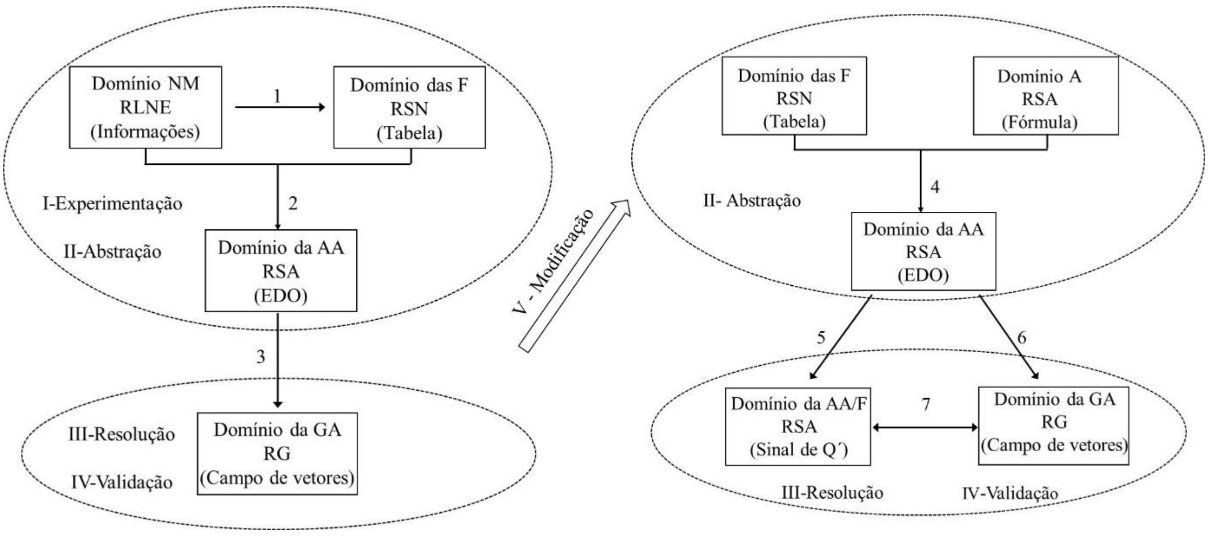
Quadro 55: Estratégias utilizadas para resolução do primeiro problema de Modelagem Matemática

Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
M1E$_1$: analisar os dados utilizando uma EDO.	$\frac{dQ}{dt} = 0,5Q$ $\frac{dQ}{dt} = -0,023Q$	4	4	3	4
Total		15[54]			

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos estudaram a equação $\frac{dQ}{dt} = -0,023Q$ com procedimentos análogos aos utilizados nas atividades da fase 1, ou seja, a análise simultânea do campo de vetores e do sinal da derivada. A Figura 77 ilustra as mudanças de domínio e os registros de representação realizados pelos alunos no desenvolvimento do problema de Modelagem Matemática (MM).

Figura 77: Mudanças de domínio e registros de representação e as fases da MM



Fonte: Elaborado pela autora[55]

Observando a Figura 77, podemos verificar que os alunos realizaram diversas mudanças de domínio e de registros de representação no decorrer das fases da MM, conforme apresentado na subseção 1.2.2:

[54] Total de 15 alunos que participaram de, pelo menos, um dia de desenvolvimento do problema.
[55] As abreviações das figuras estão na Lista de Abreviações no início da tese.

Fase I - Experimentação: os alunos selecionaram os dados necessários para a análise do problema, utilizando da reportagem e de buscas na internet. Ainda, organizaram essas informações utilizando o RLNE.

Fase II - Abstração: Os alunos discriminaram as variáveis em estudo (t e Q), levantaram a hipótese de que a quantidade Q de Césio diminuía com o passar do tempo e deduziram um modelo matemático. Para isso, foi necessária uma mudança do domínio não matemático (domínio da Química que trazia informações a respeito do elemento radioativo Césio-137, definição de meia vida) para o domínio das funções (Tabela 8 que representa a função $Q(t)$ que expressa a quantidade de Césio em relação ao tempo) o que acarretou uma conversão do RLNE para o RSN (registro simbólico-numérico) (seta 1). Analisando as informações nesses dois domínios e registros, os alunos obtiveram a EDO no RSA, ou seja, realizaram uma conversão acompanhada de uma mudança para o domínio da AA (seta 2).

Fase III - Resolução: Para resolver a EDO, construída nas fases anteriores, os alunos plotaram o campo de vetores, com o auxílio do software, realizando uma mudança para o domínio da GA acompanhada de uma conversão para o RG. O uso do RG auxiliou os alunos a visualizar o comportamento das soluções da EDO, o que possibilitou a não validação do modelo (próxima fase), de forma mais rápida, sem a necessidade de recorrer para a resolução algébrica da EDO que requer de um tratamento no RSA e que, normalmente, é indicada nos livros didáticos para a análise de problemas de “Modelagem Matemática”.

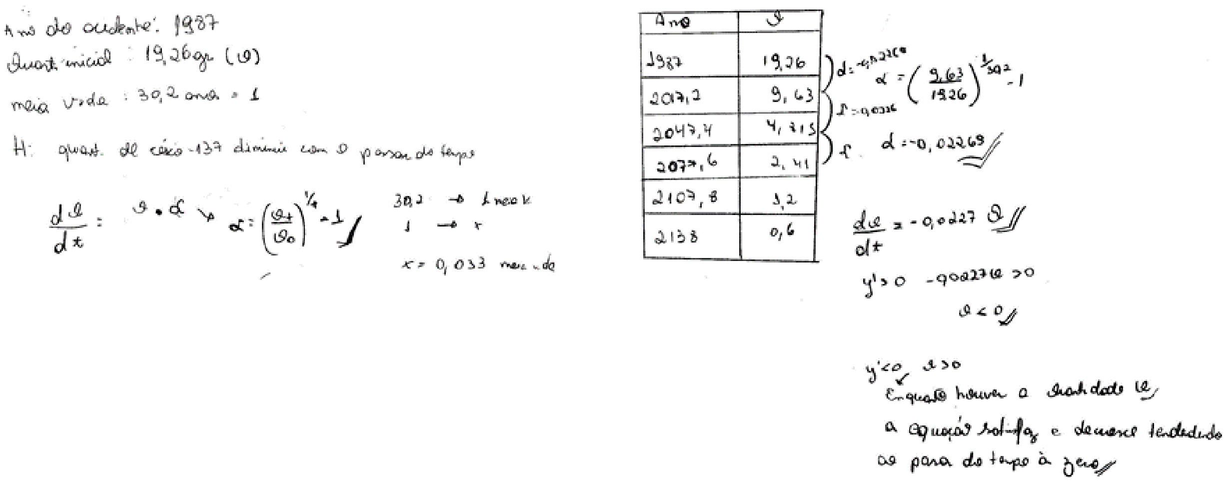
Fase IV – Validação: Analisando o campo de vetores construído na fase anterior, os alunos perceberam que a EDO obtida não representava o fenômeno analisado, pois a quantidade de Césio estava aumentando ao invés de diminuir, o que fez com que eles percebessem que tinham cometido algum erro na formulação do modelo, sem precisar procurar ou perguntar “qual a resposta correta”, ao mesmo tempo que se mobilizaram para reformular o modelo.

Fase V – Modificação: A não validação do modelo fez com que os alunos reformulassem sua equação, retornando à fase II – Abstração.

Nesta nova etapa de abstração, os alunos, com o auxílio da pesquisadora, obtiveram a fórmula para a constante α e, realizando um tratamento no RSA, determinaram o valor desta constante e reescreveram a EDO (seta 4).

Para analisar a nova equação, os alunos utilizaram o sinal da derivada, realizando um tratamento no RSA e operando em uma interseção dos domínios da AA e das Funções (seta 5), simultaneamente, com o campo de vetores (seta 6). A seta 7 indica o uso simultâneo das duas estratégias de resolução, ou seja, o procedimento informático de interpretação global. Os alunos também realizaram uma conversão para o RLNE e a mudança para o domínio das Funções escrevendo as informações obtidas sobre o comportamento da função *Q(t)* em função do problema analisado (Figura 78).

Figura 78: Resolução do primeiro problema de Modelagem Matemática



Fonte: Respostas dos alunos

Desta forma, podemos observar que no desenvolvimento deste problema de MM, os alunos utilizaram diferentes registros de representação, coordenando-os de modo a obter o modelo e analisar e compreender tanto o modelo obtido quanto o fenômeno estudado. Segundo Duval (2003), a coordenação entre registros é uma condição fundamental para o acesso à compreensão dos conceitos matemáticos.

Segundo Vertuan (2007), em um problema de MM, as conversões (congruentes ou não congruentes) são efetivadas não por uma questão de escolha e sim pela necessidade de interpretar a situação. Podemos observar que nossos alunos naturalmente utilizam-se de diversos registros, em função da própria caraterística da Modelagem Matemática de ser um problema aberto sem ter um "modelo" pronto a seguir, como apresentados nos livros didáticos.

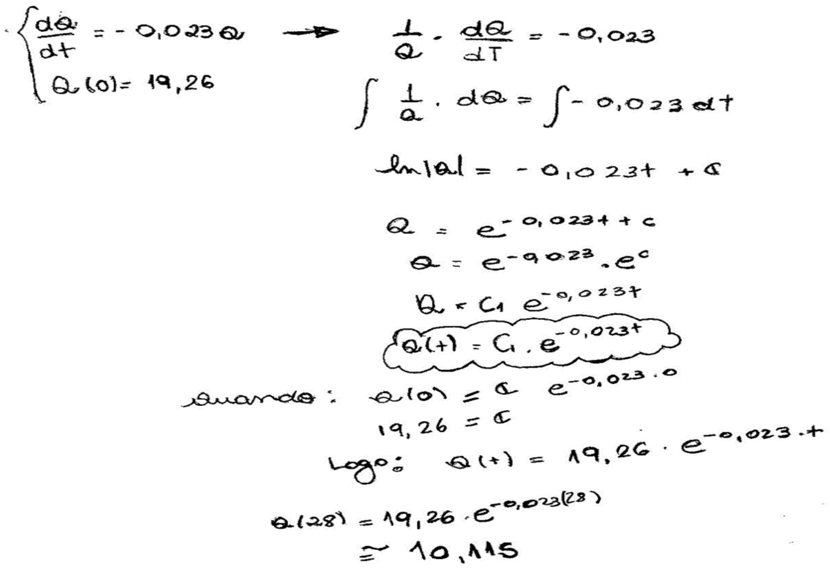
Observe que a taxa de variação de Césio é proporcional à própria quantidade de Césio, o que é análogo à situação da população de ratos, contudo, na Atividade 9, a informação a respeito da taxa de variação foi fornecida no enunciado da atividade e não observada pelos alunos, isso pode ter influenciado eles a não sentirem necessidade de validar o modelo $\frac{dP}{dt} = 0,5P$ ao contrário da equação $\frac{dQ}{dt} = 0,5Q$, a qual os alunos, por iniciativa própria, verificaram se a EDO estava de acordo com a hipótese formulada.

O encontro terminou sem que os alunos discutissem sobre os resultados obtidos. Desta forma, no sétimo encontro, o problema foi retomado e os alunos explicaram a situação analisada e a EDO obtida para os demais que não haviam participado do primeiro dia de resolução do problema. Considerando a concepção de Modelagem Matemática proposta por Bassanezi

(2011), que a compreende como um processo para a obtenção e a validação de modelos matemáticos com a finalidade de analisar e prever o comportamento do fenômeno estudado, a pesquisadora propôs aos alunos uma nova pergunta: Qual a quantidade atual de césio-137 na cidade de Goiânia?

Para responder a esta questão, os alunos resolveram algebricamente a EDO. Como eles já tinham estudado na disciplina regular a técnica de resolução para o tipo de equação analisada (equação do tipo separável), não apresentaram dificuldades em resolvê-la. As dúvidas que apareceram foram em relação à Matemática Básica, pois alguns alunos não lembravam que precisavam aplicar a inversa da função logarítmica para obter o resultado procurado. Depois que obtiveram a função $Q(t) = 19,26e^{-0,0023t}$, eles fizeram a estimativa para $t = 28$ que, no modelo obtido, significava 28 anos após 1987, o equivalente ao ano de 2015.

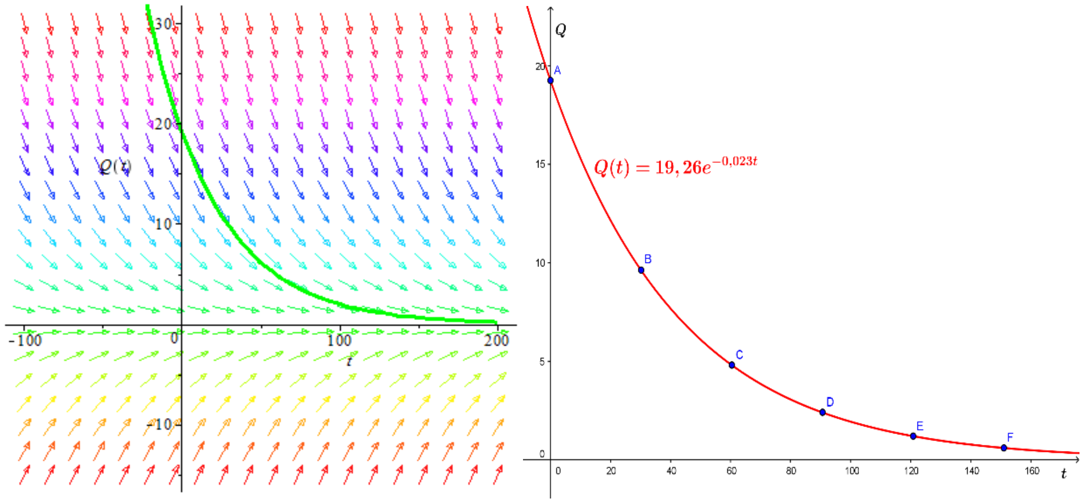
Figura 79: Resposta de um aluno para a quantidade de césio-137 para o ano de 2015



Fonte: Respostas dos alunos

Durante as discussões da solução dessa nova pergunta, a pesquisadora questionou como os alunos poderiam validar o modelo obtido algebricamente e eles disseram que substituíram alguns valores e compararam com os dados da Tabela 8. A pesquisadora explicou que eles também poderiam ter feito uma validação do modelo pelo gráfico da função e, assim, pediu que eles fizessem o gráfico da função com o auxílio do software GeoGebra.

Figura 80: Campo de vetores e gráfico da solução para a equação $Q(t) = 19,26e^{-0,023t}$

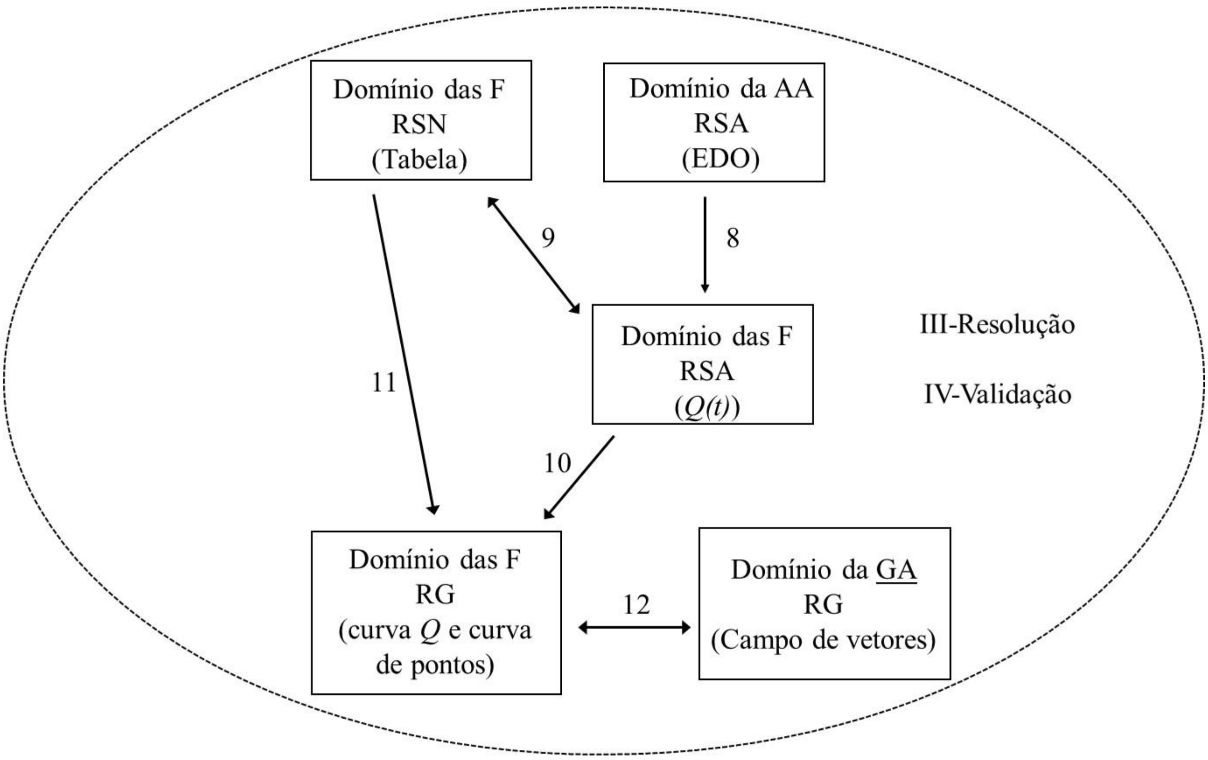


Fonte: Elaborado pela autora

A pesquisadora utilizou os gráficos da Figura 80 para fazer comparações entre o comportamento das soluções visualizados no campo de vetores e o gráfico da solução. Segundo Javaroni (2007), a coordenação de diferentes mídias é importante, uma vez que a comparação dos resultados obtidos pode ajudar os alunos a validarem, ou não, suas hipóteses, além de auxiliá-los na compreensão do objeto de estudo.

Na Figura 81 mostramos as mudanças de domínios e registros de representação utilizados pelos alunos para responder à nova pergunta.

Figura 81: Mudanças de domínio e registros de representação e as fases da MM - 2



Fonte: Elaborado pela autora

Para responder à pergunta proposta pela pesquisadora, os alunos retornaram à fase III - resolução da MM e realizaram um tratamento no RSA e uma mudança para o domínio das F (seta 8), para obter a solução analítica da EDO. Com a expressão algébrica da função *Q(t)*, os alunos validaram o modelo (fase IV da MM) calculando alguns valores da função e comparando com os dados da Tabela 8 (seta 9) e também realizaram uma previsão da quantidade de Césio-137 para o ano de 2015.

Por sugestão da pesquisadora, os alunos validaram graficamente a solução do modelo, realizando uma conversão do RSA para o RG, dentro do domínio das F (seta 10). Depois, os alunos realizaram uma conversão do RSNT (Tabela) para RG (seta 11). E, por fim, compararam o gráfico da função *Q* com o gráfico obtido no campo de vetores (seta 12).

Além disso, para explicar o modelo utilizado e os resultados obtidos, os alunos precisaram utilizar o RLNE e retornar ao domínio original do problema, o domínio da Química.

Desta forma, podemos observar que, na compreensão e na resolução desse problema no contexto da MM, os alunos utilizaram diferentes domínios matemáticos e registros de representação semiótica, o que vem ao encontro do estudo de Vertuan (2007), ou seja, que o desenvolvimento de problemas de MM viabiliza a utilização de vários registros de representação semiótica, além de tratamentos, de conversões e de coordenação entre registros.

Além disso, os alunos utilizaram representações que não foram solicitadas na fase 1 da sequência, como, por exemplo, o uso do RSNT. Segundo Flores e Moretti (2005, p. 2), a leitura de uma tabela não é uma tarefa simples, pois ela "exige por parte do leitor certa intimidade, e também domínio, do modo de representação utilizado. Ler, interpretar, analisar e julgar, ou organizar dados em gráficos e tabelas significa, antes de tudo, dominar o próprio funcionamento representacional". No nosso problema, o uso desse registro possibilitou aos alunos compreenderem como se dava a taxa de variação da quantidade de Césio, uma vez que somente as informações no RLNE não foram suficientes.

Embora a pesquisadora tenha auxiliado os alunos no desenvolvimento do problema, algumas conversões ou mudanças de domínio foram realizadas de forma espontânea por eles, por exemplo, a utilização do campo de vetores, o que é um indício de que os alunos compreenderam esta noção e conseguiram aplicar este conhecimento em uma nova situação (problema real). Segundo Duval (2003), a mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação e a possibilidade de mudar de registro a qualquer momento, sinalizam a compreensão do objeto matemático por parte do aluno, no nosso caso, as EDOs.

Ao final, a pesquisadora explicou aos alunos que o modelo encontrado não era único, que era possível analisar o fenômeno usando outros conceitos matemáticos, também foi explorado o significado matemático e físico da assíntota horizontal em zero. Depois de encerrados os comentários sobre esta atividade, foi dado início ao segundo problema de Modelagem Matemática, que está descrito na próxima subseção.

4.4.2 Análise *a posteriori* do segundo problema de Modelagem Matemática

De forma análoga ao problema anterior, este problema tinha por objetivo trabalhar a derivada como taxa de variação e utilizar a EDO como uma ferramenta na resolução de problemas. Diferentemente do primeiro problema, em que os alunos obtiveram as informações sobre a situação na reportagem levada pela pesquisadora e em buscas em sites na internet, neste problema os alunos foram responsáveis pela coleta de dados, que aconteceu durante a realização de um experimento em sala de aula, com a intenção de analisar a taxa de variação da temperatura de um líquido deixado a temperatura ambiente.

O desenvolvimento desse problema ocorreu em, aproximadamente, quatro horas divididas em três encontros (7°, 8° e 9°). No sétimo encontro, os alunos analisaram o problema por cerca de 30 minutos e teve a participação de onze alunos (G1: Pedro, Théo, Vivian. G2: Ana, Bia, Marcos. G3: Luciano, Renata. G4: Daiane, Fernando, Léo).

No oitavo encontro, contamos com a participação de 13 alunos, sendo que 3 destes alunos não haviam participado do desenvolvimento do problema no dia anterior (G1: Gustavo, Pedro, Sofia, Théo. G2: Ana, Bia, Marcos, Miguel. G3: Luciano, Renata. G4: Bruno, Fernando, Léo).

No nono encontro, os alunos trabalharam no problema por cerca de cinquenta minutos, e contou com a participação de quatorze alunos, sendo que somente o aluno Michel, do G3, não havia participado de nenhum dos dias anteriores (G1: Pedro, Sofia, Théo, Vivian. G2: Bia, Marcos, Miguel. G3: Luciano, Michel, Renata. G4: Bruno, Daiane, Fernando, Léo).

Além desses dias supracitados, os alunos também tiveram contato com o problema na escolha do tema e na coleta de dados que ocorreu no dia três de setembro 2015, durante o curso. Realizamos o experimento em uma sala com ar condicionado com a intenção de manter a temperatura ambiente estável (dentro do possível), a qual, no momento, era de 23,3ºC (verificada com o termômetro digital). Também foram utilizados uma lata de refrigerante de 350 ml como temperatura inicial de 3,6°C, um termômetro digital com precisão de uma casa decimal e o cronômetro dos celulares dos alunos.

Os alunos anotaram a temperatura do líquido com intervalos de tempo de dez minutos, que foram controlados pelos próprios alunos, durante duas horas e trinta minutos. Estas anotações foram organizadas pela pesquisadora em uma tabela.

Tabela 9: Dados do experimento da temperatura do refrigerante

Tempo	**Temperatura (°C)**
18h 45min	3,6
18h 55min	6,0
19h 05min	7,6
19h 15min	9,8
19h 25min	11,7
19h 35min	13,2
19h 45min	14,2
19h 55min	14,9
20h 05min	15,3
20h 15min	15,9
20h 25min	16,4
20h 35min	17
20h 45min	17,6
20h 55min	18,0
21h 05min	18,4
21h 15min	18,9

Fonte: Experimento realizado com os alunos

Conforme descrito nas análises *a priori* não poderíamos traçar todas as estratégias dos alunos para este problema, porém, devido ao fato de os alunos já terem trabalho com o problema anterior, não esperávamos que eles utilizassem uma ferramenta matemática que não fosse uma EDO. Desta forma, esperávamos que os alunos utilizassem a primeira estratégia do Quadro 56.

Quadro 56: Possíveis estratégias para o segundo problema de Modelagem Matemática

M2E$_1$: Utilizar uma EDO para obter um modelo para a situação, podendo chegar em uma destas equações: a) $\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_a)$, T_a = temperatura ambiente e α = constante de proporcionalidade. b) $\frac{dT}{dt} = \alpha T$, para esta equação esperamos que os alunos após validarem o modelo, refaçam suas hipóteses e cheguem a equação do item a).
M2E$_2$: Utilizar uma outra ferramenta matemática para resolver o problema, como, por exemplo, uma função.

Fonte: Elaborado pela autora

No sétimo enocntro, os alunos receberam uma folha contendo a Tabela 9 e as demais informações sobre o experimento (Apêndice C). Com esses dados, eles definiram as variáveis do problema, temperatura (*T*), temperatura ambiente (T_a) e o tempo (*t*) e formularam a hipótese de que a temperatura do refrigerante aumentaria com o passar do tempo até atingir a temperatura do meio ambiente. Como a ideia desse problema surgiu com o intuito determinar uma EDO que modelasse a taxa de variação da temperatura do refrigerante ao longo do tempo, os alunos, primeiramente, optaram por determinar esta equação, sem a intenção de fazer alguma estimativa. Desta forma, os grupos começaram a analisar os dados coletados.

Conforme esperávamos na análise *a priori*, e devido à pergunta formulada pelos alunos ser: qual a EDO que modela a situação? Nenhum aluno utilizou uma ferramenta matemática que não fosse uma EDO.

Quadro 57: Estratégias utilizadas para resolução do segundo problema de Modelagem Matemática

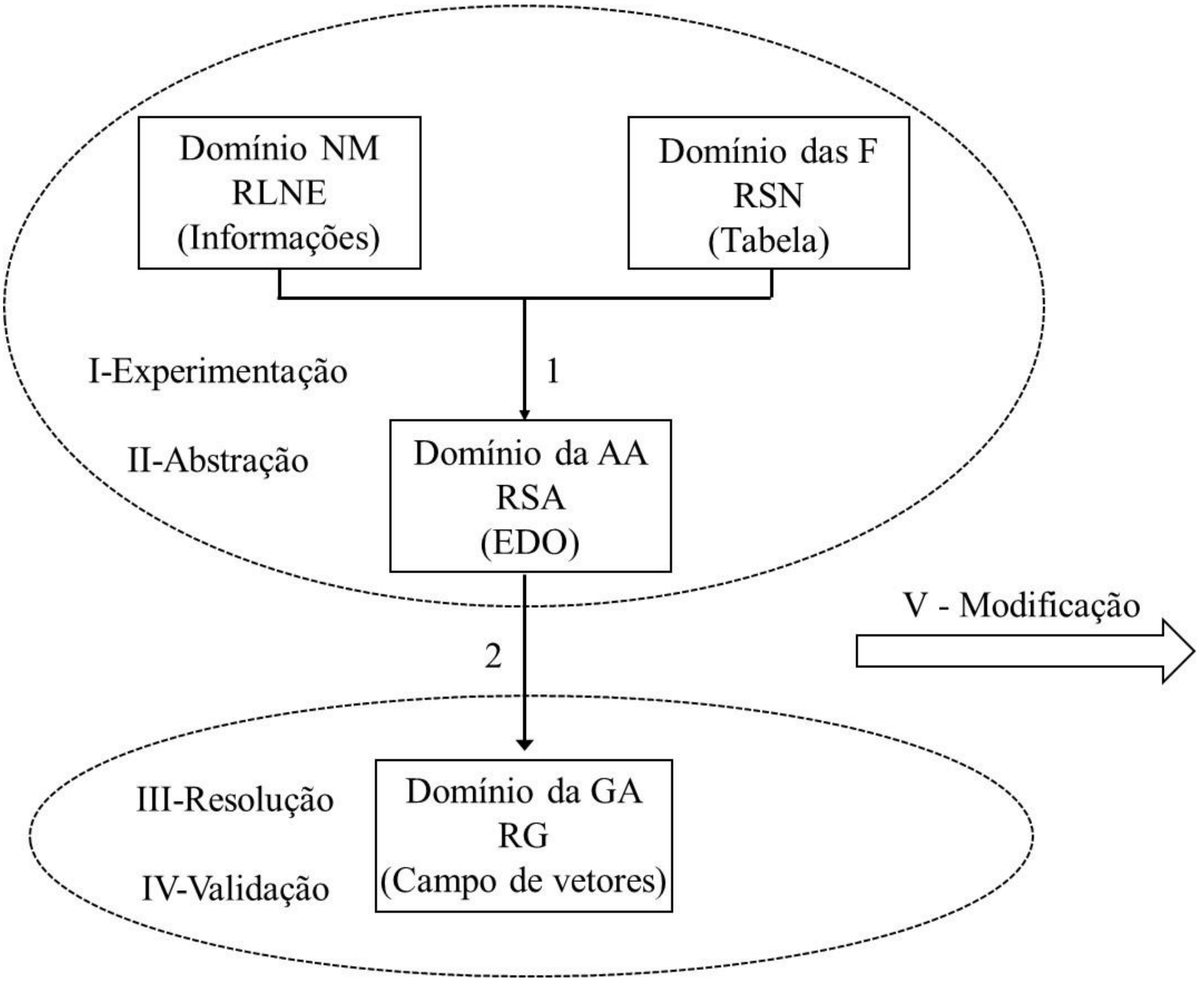
Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
M2E$_1$: a) utilizar a EDO $\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_a)$ para modelar o fenômeno.	$\frac{dT}{dt} = -9,94 \cdot 10^{-3}(T - 23,3)$	5			
M2E$_1$: b) utilizar a EDO $\frac{dT}{dt} = \alpha T$ para modelar o fenômeno.	$\frac{dT}{dt} = 0,0111T$		4	2	4
Total		15[56]			

Fonte: Respostas dos alunos

Os alunos dos grupos G2, G3 e G4 utilizaram o modelo do problema anterior nesta situação, pois acreditavam que a variação da temperatura era proporcional à própria temperatura, porém, ao analisarem o campo de vetores perceberam que a equação não correspondia ao fenômeno, pois, com o passar do tempo, a temperatura aumentava sem limite, não se aproximando da temperatura ambiente. Eles perceberam que não levaram em conta a temperatura do ambiente, desta forma, voltaram a analisar os dados para reformular seus modelos.

[56] Total 15 alunos que participaram de, pelo menos, um dos dois primeiros dias do desenvolvimento do problema, no qual a EDO foi determinada.

Figura 82: Mudança de domínio e registros e as fases da MM para o segundo problema de MM



Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 82 mostra as fases que os alunos percorreram no desenvolvimento deste problema e os domínios e os registros de representação utilizados:

Fase I - Experimentação: Os alunos realizaram o experimento de deixar um refrigerante no ambiente e verificar a variação da sua temperatura e coletaram os dados necessários.

Fase II - Abstração: Os alunos discriminaram as variáveis em estudo (temperatura, temperatura ambiente e tempo), levantaram hipóteses (a temperatura do refrigerante aumenta com o passar do tempo até atingir a temperatura ambiente) e deduziram um modelo para a situação. Para isso, foi necessária uma mudança do domínio não matemático da Física para o domínio da AA (EDO), o que acarretou uma conversão do RLNE para o RSA (seta 1). Para obter a constante de proporcionalidade, os alunos utilizaram os dados da Tabela 9 e a fórmula deduzida no problema anterior.

Fase III - Resolução: Para resolver a EDO, os alunos construíram, com o auxílio do software, o campo de vetores, realizando uma mudança para o domínio da GA acompanhada de uma conversão para o RG.

Fase IV – Validação: Analisando o campo de vetores, os alunos perceberam que a EDO obtida não representava o fenômeno analisado, pois a temperatura do refrigerante aumentava sem limite e, assim, precisavam reformular seu modelo (Fase V – Modificação), retornando à fase II – Abstração.

Os alunos do G1, desde do início, tentaram incluir a temperatura ambiente na formulação do modelo, conforme diálogo abaixo:

> **Théo:** Então, só que a taxa de variação também vai depender da temperatura ambiente. Porque se eu tivesse uma temperatura ambiente muito maior, provavelmente aqui a variação seria maior.
> **Pedro:** Ela dependeria ... do tempo que leva para alcançar a temperatura ambiente.
> **Théo:** Não ... seria a diferença. Então, ela depende da diferença de temperatura na verdade.
> **Pedro:** Da diferença da temperatura.
> **Théo:** Delta T.
> **Pedro:** Quanto maior a temperatura, mais rápido ela iria esquentar, né?
> **Théo**: É.
> **Pedro:** Então, mais rápido ela ia alcançar a temperatura.
> **[...]**
> **Pedro:** Isso, que depende tanto da temperatura que ela está, quanto na temperatura ambiente. Então seria a variação de temperatura, né?
> **Théo:** A variação de temperatura fica entre, em relação à temperatura ambiente e à temperatura inicial dela.
> [...]
> **Pedro:** Alfa vezes delta T? Tipo acho que seria alguma coisa.
> **Vivian:** É, acho que sim. E o T seria de temperatura, né? E daí o alfa seria?
> **Théo:** Seria a variação? O alfa a gente teria que calcular, é a constante, né?
> **Pedro**: Seria isso, alfa vezes 23,3 menos T zero.

Os alunos escreveram a equação $\frac{dT}{dt} = \alpha(23{,}3 - T_0)$, porém, quando substituíram o valor $T_0 = 3{,}6$ nesta equação, obtiveram como resultado $\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot 19{,}7$ e perceberam que a equação não variava com relação à T e trocaram T_0 por T obtendo a equação $\frac{dT}{dt} = \alpha(23{,}3 - T)$. Pedro, aluno do curso de Eletrônica, sugeriu que eles procurassem na internet alguma equação da termodinâmica que poderia ajudá-los a resolver o problema. Realizando uma pesquisa na internet, os alunos encontram um modelo para a taxa de variação de temperatura e utilizaram-no para escrever a equação $\frac{dT}{dt} = \alpha(T - 23{,}3)$.

Ao procurar essas informações, eles se depararam com variáveis que não haviam levado em consideração na realização do experimento, como área de contato do líquido com o meio, tipo de material utilizado, entre outros. Assim, eles passaram um período discutindo se havia a possibilidade de conseguir todos os dados que precisavam.

Como os demais grupos não conseguiam escrever a equação, a pesquisadora solicitou que os alunos do G1 falassem a relação física que tinham encontrado e a equação que eles haviam estabelecido. Em seguida, a pesquisadora escreveu a lei física utilizada pelos alunos do G1 no quadro:

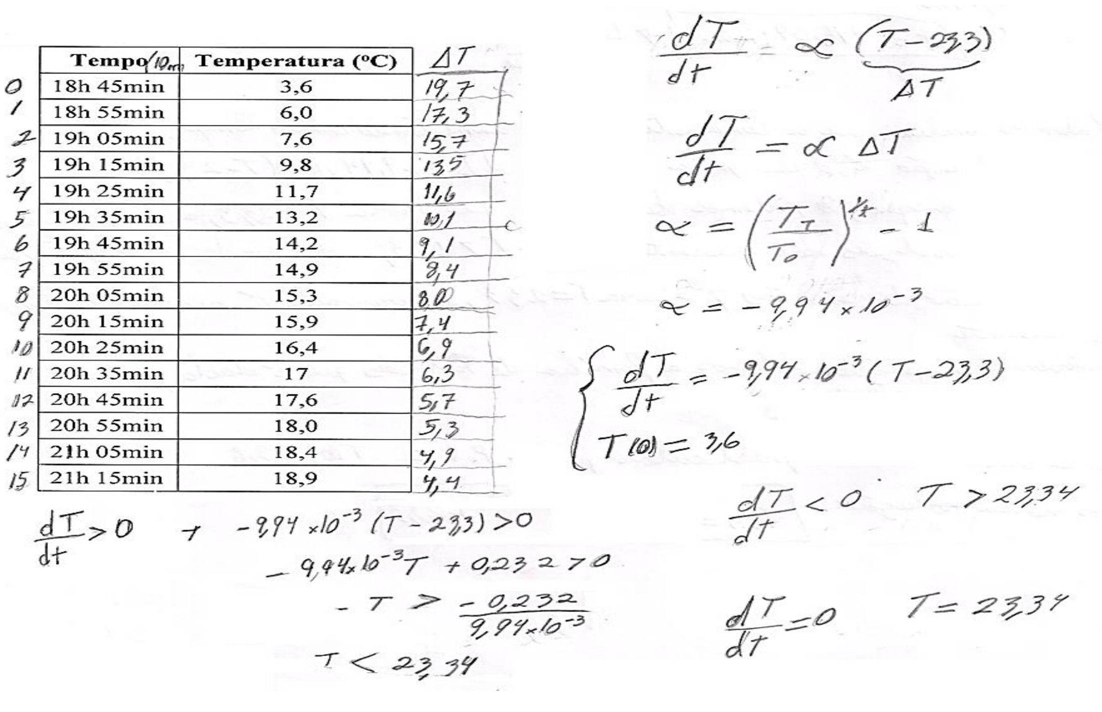
A taxa de variação no tempo t, da temperatura do corpo (T), pode ser interpretada como a derivada da temperatura do corpo (T) em relação ao tempo t, $\frac{dT}{dt}$. Que, por sua vez, é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e meio ambiente (T_a).

Com isso, os alunos dos demais grupos obtiveram a mesma equação que o G1, eles discutiram sobre a constante de proporcionalidade e decidiram, em conjunto, utilizar a mesma fórmula do problema anterior para determinar α, pois não tinham dados suficientes para calcular esta constante da forma que viram em um artigo na internet.

Porém, eles não conseguiam calcular a constante, pois, neste caso, a variação não dependia apenas da temperatura e sim da diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura. Assim, a pesquisadora retomou este conteúdo com os alunos e fez alguns exemplos com eles, de forma a auxiliá-los no cálculo da constante α. Depois disso, os alunos calcularam a constante e escreveram a equação $dT/dt = -9.94 \cdot 10^{-3}(T - 23,3)$.

Como de costume, os grupos analisaram o sinal da derivada e o campo de vetores para validar suas hipóteses e, em seguida, decidiram resolver algebricamente a EDO (Figura 83).

Figura 83: Resolução do segundo problema de Modelagem Matemática de um aluno



	Tempo/10min	Temperatura (ºC)	ΔT
0	18h 45min	3,6	19,7
1	18h 55min	6,0	17,3
2	19h 05min	7,6	15,7
3	19h 15min	9,8	13,5
4	19h 25min	11,7	11,6
5	19h 35min	13,2	10,1
6	19h 45min	14,2	9,1
7	19h 55min	14,9	8,4
8	20h 05min	15,3	8,0
9	20h 15min	15,9	7,4
10	20h 25min	16,4	6,9
11	20h 35min	17	6,3
12	20h 45min	17,6	5,7
13	20h 55min	18,0	5,3
14	21h 05min	18,4	4,9
15	21h 15min	18,9	4,4

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \underbrace{(T - 23,3)}_{\Delta T}$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \, \Delta T$$

$$\alpha = \left(\frac{T_T}{T_0}\right)^{1/t} - 1$$

$$\alpha = -9,94 \times 10^{-3}$$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -9,94 \times 10^{-3}(T - 23,3) \\ T(0) = 3,6 \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} > 0 \rightarrow -9,94 \times 10^{-3}(T - 23,3) > 0$$

$$-9,94 \times 10^{-3} T + 0,232 > 0$$

$$-T > \frac{-0,232}{9,94 \times 10^{-3}}$$

$$T < 23,34$$

$$\frac{dT}{dt} < 0 \quad T > 23,34$$

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad T = 23,34$$

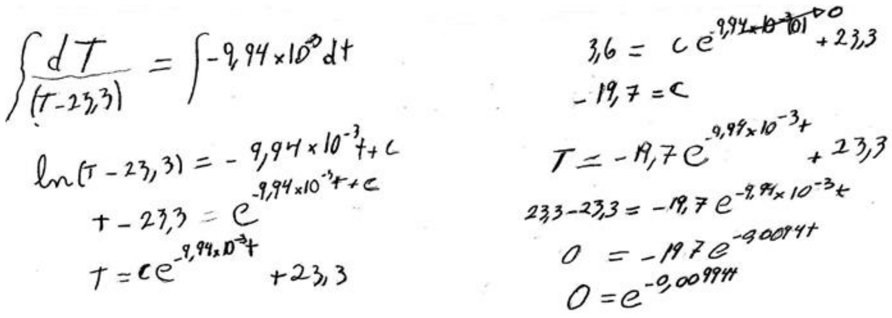
Fonte: Respostas dos alunos

No oitavo encontro, o problema foi retomado e os alunos explicaram suas resoluções. A pesquisadora levantou questões sobre o que acontecia quando a temperatura era maior ou igual a temperatura ambiente e os alunos não tiveram dificuldades em responder. Depois, os questionou sobre o tempo que levaria para o refrigerante atingir a temperatura ambiente, desta forma, os alunos passaram a responder à pergunta: Quanto tempo seria necessário para que a temperatura do refrigerante atingisse a temperatura ambiente?

Como já haviam resolvido algebricamente a EDO, os alunos igualaram o resultado a 23,3, chegando a uma indeterminação, conforme ilustra a Figura 84, ao mesmo tempo que analisavam o campo de vetores:

Pedro: Não vai dar.
Théo: Aqui ((olhando o campo de vetores)) está mostrando todas as soluções que estão crescendo.
Vivian: Sim.
Sofia: Não tem como saber, vai dar infinitamente.
Vivian: É, até por conta do gráfico.
Théo: Não vai dar, vai ter que pegar um valor muito próximo.
Sofia: Teria que ser o valor de 150?
Théo: Não, a gente tem que achar o tempo que a temperatura vai chegar a 23, só que vai dar ln de zero, não existe.

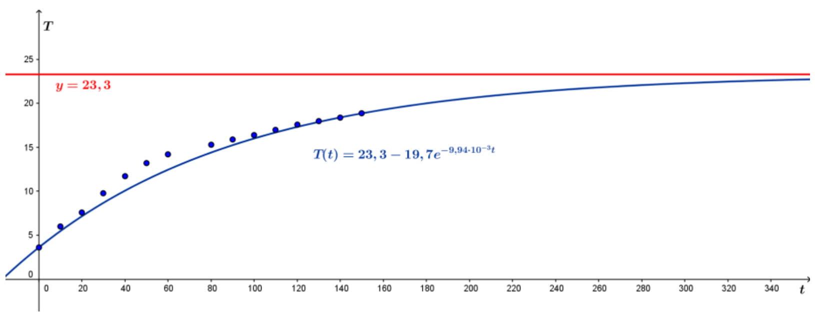
Figura 84: Cálculo do tempo necessário para a temperatura atingir a temperatura ambiente



Fonte: Respostas dos alunos

Assim, foi realizada uma discussão sobre o resultado obtido e, como alguns alunos haviam plotado o gráfico da função solução no GeoGebra, a pesquisadora solicitou que acrescentassem a reta $y = 23{,}3$ (Figura 85).

Figura 85: Gráfico de $T(t) = 23{,}3 - 17e^{-9{,}94 \cdot 10^{-3} t}$



Fonte: Elaborado pela autora

Analisando o gráfico da figura anterior e o campo de vetores, os alunos afirmaram que a função jamais atingiria o valor de 23,3°C e, segundo Théo, do G1, teria que utilizar um valor próximo desta temperatura para estimar o tempo necessário que a temperatura do refrigerante atingisse a temperatura do ambiente.

A pesquisadora explicou que, matematicamente, a temperatura do refrigerante pode chegar tão perto quanto se queira da temperatura ambiente, porém, não atingiria este valor. Contudo, sabemos que, na realidade, após um período de tempo, as duas temperaturas se igualam, neste caso, para se estimar este tempo, consideramos o tempo que o líquido precisa para atingir 99% da temperatura (Figura 86).

Figura 86: Cálculo do tempo que a temperatura leva para atingir 99% da temperatura ambiente

$$23{,}067 - 23{,}3 = -19{,}7\, e^{-0{,}00994t}$$

$$-0{,}233 = -19{,}7\, e^{-9{,}94 \cdot 10^{-3} t}$$

$$11{,}83 \times 10^{-3} = e^{-9{,}94 \times 10^{-3} t}$$

$$\frac{-4{,}437}{9{,}94 \times 10^{-3}} = -t$$

$$\boxed{t = 446{,}39 \text{ min}}$$ → tempo necessário para atingir a temperatura ambiente

∴ Podemos concluir que a temperatura está aumentando com o tempo, a taxa de variação é dada pela equação $\frac{dT}{dt} = -9{,}94 \times 10^{-3}(T - 23{,}3)$ após analisar a equação podemos observar que para $T < 23{,}3$, a derivada é positiva e as soluções são crescentes; para $T > 23{,}3$, a derivada é negativa e as soluções são decrescentes; e para $T = 23{,}3$, a derivada é nula, e a temperatura é constante

Resolvendo a equação obtemos a família de soluções que é dada por

$$T(t) = C\, e^{-0{,}00994t} + 23{,}3$$

E para o nosso caso em particular, como P.V.I. $T(0) = 3{,}6$

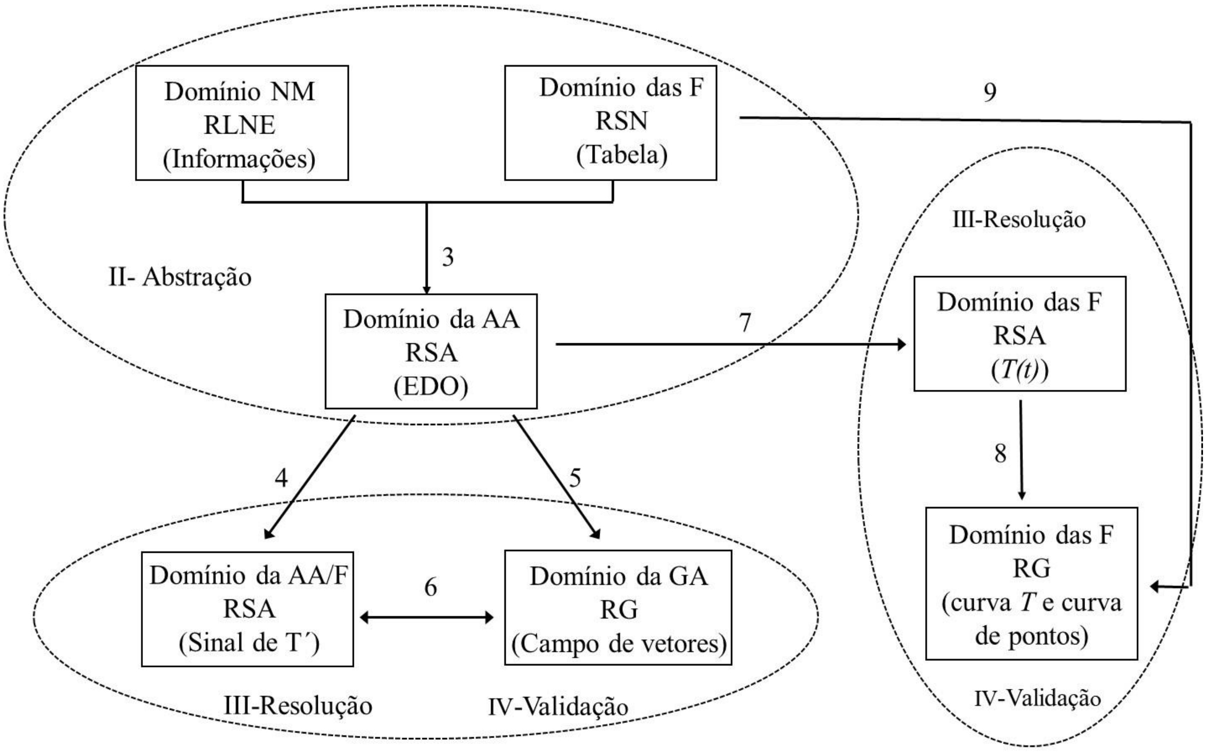
temos nossa solução $\boxed{T(t) = -19{,}7\, e^{-0{,}00994t} + 23{,}3}$

Fonte: Respostas dos alunos

Ao final da atividade os alunos e a pesquisadora comentaram sobre as variáveis que interferiram na coleta dos dados e na obtenção do modelo, tais como, a variação da temperatura ambiente que não foi levada em consideração na coleta dos dados e no modelo obtido, a precisão do termômetro digital e do cronômetro (celulares dos alunos) utilizados e o cálculo aproximado da constante de proporcionalidade.

A próxima figura ilustra as fases da MM percorridas durante a resolução deste problema, os domínios e os registros de representação semiótica utilizados pelos alunos. Ressaltamos que este processo foi realizado pelos grupos G2, G3 e G4, após perceberem a necessidade de modificação do modelo.

Figura 87: Mudança de domínio e registros e as fases da MM para o segundo problema de MM-2



Fonte: Elaborado pela autora

Podemos observar na Figura 87 que, assim como no problema anterior, os alunos utilizaram diferentes domínios matemáticos e registros de representação semiótica, ou seja, os alunos realizaram conversões (setas 3, 5, 8 e 9), tratamentos (setas 4 e 7), e, consequentemente, coordenações entre os registros, como, por exemplo, a indicada na seta 6, o que indica que eles compreendem os diferentes aspectos e propriedades do objeto EDO.

Este problema é uma adaptação do problema de variação da temperatura do bolo apresentado no Livro 2 que descrevemos na subseção 2.4.3, porém, neste caso, o desenvolvimento não se deu apenas com a substituição dos dados em uma EDO já definida, os alunos selecionaram as variáveis, levantaram hipótese, refutaram esta hipótese, validaram o modelo. E, mesmo que a EDO tenha sido obtida em uma busca na internet, esta pesquisa ocorreu por iniciativa dos próprios alunos para validarem as ideias que haviam formulado.

Em outras palavras, a adaptação do problema proposto no livro para um problema no contexto da MM propiciou uma participação mais efetiva dos alunos, na qual eles foram responsáveis pela busca das informações e do conteúdo (extramatemáticos) para a resolução dos problemas o que corrobora com a pesquisa de Borssoi e Almeida (2004), pois, segundo as autoras, o ambiente de MM instiga o aluno a uma participação mais ativa, na qual ele se vê responsável pela própria aprendizagem.

4.4.3 Análise *a posteriori* dos projetos finais

No final do nono encontro, os alunos tiveram um tempo livre para discutir sobre os seus projetos finais. Ficou acordado que eles enviariam os temas para a pesquisadora no fim de semana e teriam o décimo encontro para desenvolverem seus projetos. No último dia de curso (décimo primeiro encontro), os grupos deveriam apresentar seus projetos aos demais alunos.

Primeiro, apresentamos os projetos de cada grupo e, depois, faremos uma análise geral em relação ao esperado na análise *a priori*. A descrição do projeto final está pautada no trabalho escrito entregue pelos grupos e na apresentação deste trabalho aos demais alunos.

4.4.3.1 Projeto final do G1

Os alunos do G1 já vinham levantando ideias sobre o possível tema que iriam trabalhar desde o início do curso. Os temas sugeridos pelo grupo foram: consumo de água, crescimento de uma colônia de bactérias, poluição de um rio, variação da temperatura do cooler de um computador, entre outros. No final, o grupo decidiu estudar a variação de corrente elétrica em um circuito elétrico simples, proposto por Theo.

Título do trabalho: Modelagem Matemática para um circuito com indutor e resistor em série usando EDO.

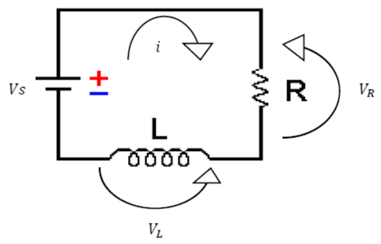
Alguns alunos do grupo cursavam a disciplina Princípios de Circuitos Elétricos, na qual estudavam este assunto, porém, não utilizavam o conceito de EDO. Assim, eles resolveram analisar este fenômeno usando uma EDO e comparar os resultados obtidos com os fornecidos pelo software PSIM[57] que eles utilizavam na disciplina supracitada.

Desta forma, os alunos apresentaram um projeto sobre a variação da corrente elétrica em um circuito resistor-indutor (circuito RL), como ilustrado na Figura 88, com a intenção de

[57] Um programa de simulação de circuitos elétricos que, segundo os alunos, era o programa que utilizavam nas aulas de Princípios de Circuitos Elétricos.

analisar primeiro se o modelo formulado por uma EDO estava de acordo com as informações apresentadas no software e verificar quanto tempo a corrente elétrica em um circuito RL levava para se estabilizar.

Figura 88: Esquema de um circuito RL

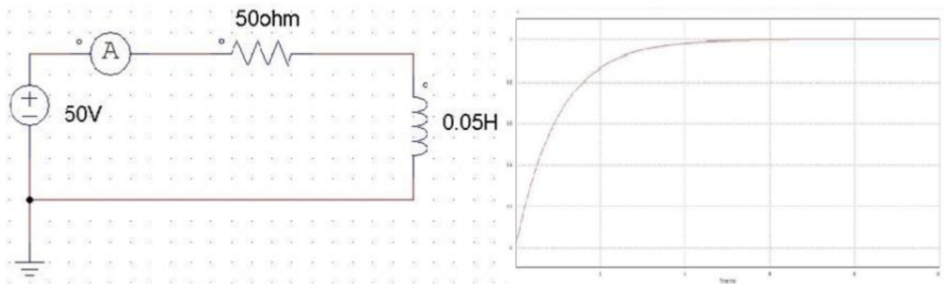


Fonte: Trabalho escrito dos alunos do G1

Os alunos explicaram a função de cada variável no circuito elétrico (R: resistor, L: indutor, V_S: tensão de fonte, V_R: tensão no resistor, V_L: tensão no indutor, *i*: corrente elétrica) e suas unidades de medidas e o funcionamento do circuito elétrico.

Os dados foram obtidos pelo programa PSIM, a Figura 89 ilustra o circuito construído pelos alunos no software e o gráfico da variação da corrente elétrica pelo tempo, fornecido pelo programa computacional. Durante a apresentação, o grupo apresentou o software aos demais colegas, explicando como poderiam fazer as simulações.

Figura 89: Circuito elétrico construído no software PSIM



Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Para obter a equação diferencial que modelava o fenômeno, os alunos utilizaram as seguintes relações da Física:

i) $V_S = V_L + V_R$ (segunda Lei de Kirchhoff),

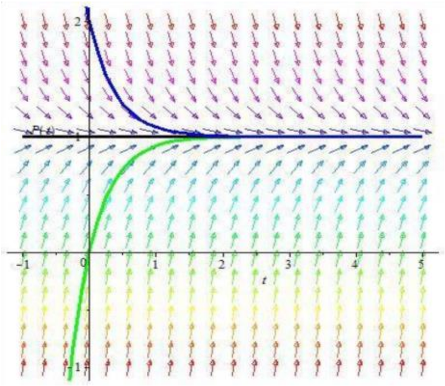
ii) $V_L = L(di/dt)$

iii) $V_R = iR$

Substituindo as equações ii) e iii) em i) os alunos chegaram a EDO, $\frac{di}{dt} = \frac{V - iR}{L}$, com $V = V_s$ e substituindo os valores que utilizaram no programa PSIM, $V = 50V$ (volts), $R = 50\Omega$ (ohms) e $L = 0,05H$ (Henrys) obtiveram a equação $\frac{di}{dt} = \frac{50 - 50i}{0,05}$.

Os alunos plotaram o campo de vetores no Maple (Figura 90) com algumas curvas soluções e explicaram que a curva em verde representava a situação estudada, comparando-a com a curva fornecida pelo software PSIM (Figura 89).

Figura 90: Campo de vetores para a equação $di/dt = (50-50i)/0,05$



Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Eles explicaram que as informações visualizadas no campo de vetores também poderiam ser obtidas analisando a equação $\frac{di}{dt} = \frac{50-50i}{0,05}$:

i) Quando o *i<1*, *i'* é positiva e as soluções (corrente elétrica) são crescentes (aumenta) para todo *t*.

ii) Quando o *i>1*, *i'* é negativa e as soluções (corrente elétrica) são decrescentes (diminui) para todo *t*.

iii) Quando o *i=1*, *i'* é nula e a corrente elétrica se mantém constante para todo *t*.

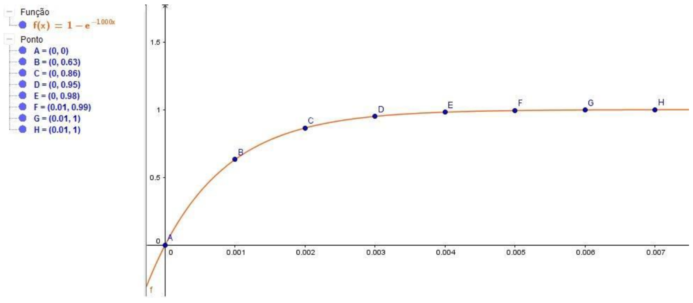
Eles explicaram e compararam os resultados obtidos na análise da EDO com o campo de vetores.

Os alunos explicaram que a EDO era do tipo separável, obtendo a solução geral $i(t) = -ke^{-1000t}+1$, *k* constante. Como no programa PSIM, eles utilizaram uma corrente inicial de 0A (ampère) e chegaram a solução particular $i(t) = 1-e^{-1000t}$.

Com a função *i(t),* os alunos construíram a tabela da Figura 91 e plotaram os dados desta tabela e a função no GeoGebra (Figura 91) para verificarem e ilustrarem o comportamento da solução obtida.

Figura 91: Gráfico da solução e os pontos da tabela no GeoGebra

t(s)	i(A)
0	0
0,001	0,632
0,002	0,864
0,003	0,950
0,004	0,981
0,005	0,993
0,006	0,997
0,007	0,999
0.008	0,999



Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Os alunos compararam o gráfico obtido no GeoGebra com o gráfico gerado pelo programa, explicando as semelhanças entre eles e concluindo que o modelo obtido por eles estava de acordo com as informações apresentadas no software e passaram a responder à pergunta: Quanto tempo a corrente elétrica do circuito simulado por eles no software levava para se estabilizar?

Eles explicaram que, assim como verificado no problema da temperatura (segundo problema de MM), a corrente elétrica jamais se estabiliza e que, desta forma, era preciso calcular o tempo que a corrente levava para atingir 99% da corrente elétrica total. Assim, resolvendo a equação $1 - e^{-1000t} = 0,99,$ eles obtiveram, aproximadamente, t = 0,005 segundos, valor que também pode ser verificado na tabela da Figura 91.

Os alunos comentaram que na Engenharia Eletrônica, como eles não utilizavam o conceito de EDO, este tempo era calculado utilizando a constante de tempo τ (unidade de medida em segundos), que é definida por $\tau = LR$. Substituindo os valores de L = 0,05H e R = 50Ω, obtém-se τ = 1ms[58].

Segundo os alunos, como a corrente nunca assume o valor de 1A, considera-se, na Engenharia Eletrônica, que a corrente se estabiliza em $t = 5\tau$, ou em t=5ms=0,005s, o mesmo valor obtido anteriormente, utilizando a EDO.

Assim, eles concluíram que o modelo obtido utilizando uma EDO estava de acordo com a teoria que eles já conheciam e com o circuito simulado no PSIM. Contudo, ressaltaram que, em um laboratório, existem outras variáveis que não foram consideradas por eles, como a temperatura, a umidade, a pressão, a calibragem dos equipamentos e dos componentes etc.

[58] Milissegundos (1ms=0,001s)

4.4.3.2 Projeto final do G2

Os alunos do G2 não haviam escolhido um tema para o seu projeto, até o dia marcado para que eles trabalhassem em seus projetos. Neste dia, Marcos trouxe os dados de um experimento sobre queda livre que estava descrito em um artigo[59] que encontrou na internet. Assim, os alunos do grupo decidiram estudar o fenômeno de queda livre utilizando uma EDO, já que o artigo utilizava regressão polinomial.

Os alunos relataram brevemente o surgimento do conceito de queda livre. Depois explicaram como o experimento foi realizado e mostraram fotos dos equipamentos utilizados pelo autor do artigo para coleta dos dados. Em seguida, passaram a analisar os dados com a intenção de responder à seguinte pergunta: Quanto tempo o corpo levará para atingir o solo?

Figura 92: Posição do corpo em queda livre

Tabela 1: Posição (m) do corpo em queda livre e intervalo de tempo correspondente (s)
Fonte: Rev. Bras. Ensino Física vol. 31, 2009

Foto	t(s)	y(m)
1	0,033	0,053
2	0,067	0,083
3	0,100	0,123
4	0,133	0,165
5	0,167	0,224
6	0,200	0,283
7	0,233	0,365
8	0,267	0,459
9	0,300	0,559
10	0,333	0,677
11	0,367	0,789
12	0,400	0,924
13	0,433	1,083
14	0,467	1,235
15	0,500	1,400
16	0,533	1,577

Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Utilizando a segunda lei de Newton: $F = ma$, com F sendo a força que age sobre o corpo em Newtons (N), m a massa do corpo em quilogramas (Kg) e a aceleração em metros por segundos ao quadrado (m/s^2). E as relações físicas $F = mg$ (força igual a massa vezes a gravidade) e $a = dv/dt$ (aceleração igual a derivada da velocidade em relação ao tempo):

$$F = ma$$

$$mg = m\frac{dv}{dt}$$

$$g = \frac{dv}{dt}$$

[59] MORAES CORVELONI, E. P., *et al.* Utilização de máquina fotográfica digital (multi-burst) para aulas experimentais de cinemática - queda livre. Rev. Bras. Ensino Fís. vol.31 n°.3. São Paulo jul/set. 2009.

Assim, os alunos escreveram o PVI: $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g \\ v(0) = 0 \end{cases}$, que tem solução dada por: $v(t) = gt$.

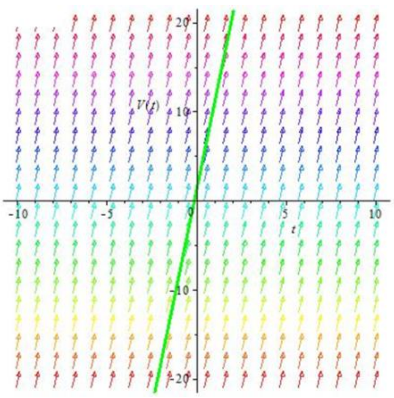
Como a velocidade é a derivada do espaço percorrido, obtiveram a equação:

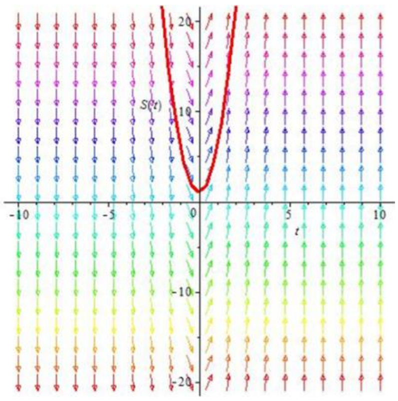
$$v = gt$$

$$\frac{dy}{dt} = gt$$

E consideraram o PVI: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = gt \\ y(0,033) = 0,053 \end{cases}$ com solução dada por $y(t) = \dfrac{gt^2}{2} + 0,0477$, considerando a gravidade 9,8 m/s², os alunos obtiveram a função $y(t) = \dfrac{9,8}{2}t^2 + 0,0477$.

Figura 93: Campo de vetores para o problema de queda livre





Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Embora tivessem resolvido as EDOs algebricamente, os alunos analisaram o campo de vetores ilustrado na Figura 93, pois queriam explicar o comportamento das soluções de cada equação obtida. Eles explicaram que o primeiro campo de vetores (da esquerda para a direita) representava a equação $\dfrac{dv}{dt} = g = 9,8$, cujas soluções representavam a velocidade do corpo em relação ao tempo . Assim, como $\dfrac{dv}{dt}$ era sempre positiva, então a velocidade do corpo estava aumentando para todo o t, contudo, na situação estudada, era preciso restringir a situação para $t > 0$, pois a variável tempo não assume valores negativos. Os alunos explicaram que a reta em verde ilustrada na Figura 93, representava a função $v(t) = gt = 9,8t$ que era a solução do PVI: $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g \\ v(0) = 0 \end{cases}$.

O segundo campo de vetores representava a equação $\frac{dy}{dt} = gt = 9{,}8t$ cuja solução representava a posição do objeto, assim, para $t > 0$, a derivada $\frac{dy}{dt}$ era positiva e o espaço percorrido pelo corpo aumentava com o passar do tempo, a curva vermelha representava a função $y(t) = \frac{9{,}8}{2}t^2 + 0{,}0477$ que era a solução do PVI: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = gt \\ y(0{,}033) = 0{,}053 \end{cases}$.

Utilizando a expressão $y(t) = \frac{9{,}8}{2}t^2 + 0{,}0477$, os alunos calcularam a posição do objeto para os valores considerados no artigo, conforme ilustra a tabela da Figura 94.

Figura 94: Posição do corpo em relação ao tempo

Tabela 2: Obtido através dos dados da nossa equação.

t(s)	y(m)
0,033	0,053036
0,067	0,069696
0,1	0,0967
0,133	0,134376
0,167	0,184356
0,2	0,2437
0,233	0,313716
0,267	0,397016
0,3	0,4887
0,333	0,591056
0,367	0,707676
0,4	0,8317
0,433	0,966396
0,467	1,116336
0,5	1,2727
0,533	1,439736

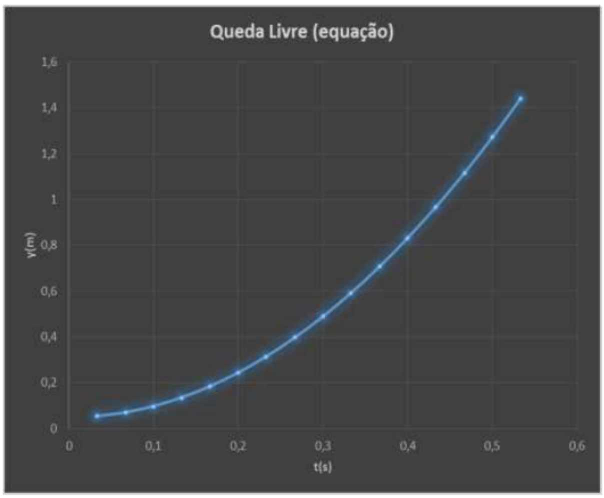


Gráfico 2: Obtido através dos dados da nossa equação, que representa o movimento de queda livre.

Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Embora o modelo construído apresentasse algumas divergências com os dados trazidos no artigo, os alunos o consideraram um bom modelo, pois segundo eles, difere do artigo que usou regressão polinomial para obter a função posição ($y(x) = 0{,}0451 + 0{,}2219x + 4{,}9758x^2$), sendo y a posição do objeto e x o tempo), eles haviam utilizados leis da Física, que os ajudou a compreender melhor o fenômeno analisado.

Os alunos também utilizaram o gráfico da Figura 94 para validar o modelo obtido por eles, porém, os pontos marcados no plano eram os mesmos que eles obtiveram utilizando a função $y(t) = \frac{9{,}8}{2}t^2 + 0{,}0477$, o que levou eles a se perguntarem sobre esta diferença entre a representação gráfica e os valores obtidos na expressão algébrica. A pesquisadora percebeu qual era o problema e explicou para os alunos que eles precisavam utilizar os valores reais do problema para fazer a validação.

Mesmo com este equívoco, os alunos, considerando o modelo deles satisfatório, calcularam uma aproximação para o tempo gasto para o objeto atingir o solo, obtendo o tempo de 0,606 segundos.

Eles também explicaram que não consideraram a resistência do ar e que isso poderia ser umas das causas das divergências dos dados. Além disso, o artigo utilizado tinha como objetivo verificar o uso didático da máquina fotográfica digital, para os alunos aprenderem experimentalmente o movimento de queda livre. Contudo, ao utilizarem as fotos tiradas pela máquina para obterem a posição do corpo, foram necessárias algumas aproximações, o que também pode ter influenciado na divergência dos dados do modelo obtido por eles (alunos).

4.4.3.3 Projeto final do G4

Os alunos do G4, até a penúltima semana de curso, não haviam decido o seu projeto. Os alunos Fernando e Leonardo queriam estudar ressonância em um oscilador harmônico amortecido, porém, no dia em que iam trabalhar neste projeto, mudaram de ideia quando a aluna Daiane propôs que eles estudassem o desmatamento da floresta Amazônica.

Título do projeto: Desmatamento da floresta Amazônica.

Os alunos iniciaram a apresentação dando um panorama geral sobre a floresta Amazônica e o seu desmatamento. Segundo os alunos, o interesse pelo assunto surgiu quando leram um artigo sobre a floresta[60], no qual era apresentada a área da floresta que tinha sido desmatada entre os anos de 1970 até de 2014.

Observando essas informações, os alunos levantaram a hipótese de que o desmatamento da floresta aumentava com o passar do tempo e decidiram investigar, com base nesses dados, qual seria a área total desmatada no ano de 2016. Para isso, optaram por utilizar os dados dos anos de 2000 a 2014, conforme indica as três primeiras colunas da tabela ilustrada na Figura 95.

[60] Artigo disponível em http://rainforests.mongabay.com/amazon/deforestation_calculations.html

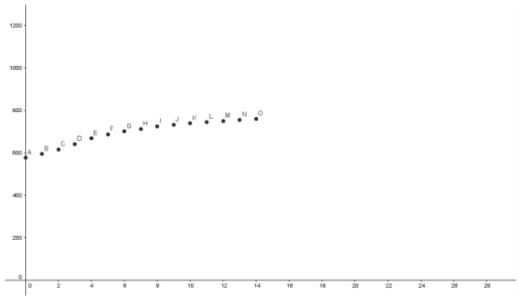
Figura 95: Área desmatada nos anos de 2000 a 2014

Ano	Tempo (t)	Área Desmatada (km²)	ΔA(t)	(y_i , y_{i+1})	Limitante (km²)
2000	0	575,903	-229,3	(575,903 ; 594,068)	805,20555
2001	1	594,068	-211,1	(594,068 ; 615,462)	
2002	2	615,462	-189,7	(615,462 ; 640,709)	
2003	3	640,709	-164,5	(640,709 ; 668,132)	
2004	4	668,132	-137,1	(668,132 ; 686,978)	
2005	5	686,978	-118,2	(686,978 ; 701,087)	
2006	6	701,087	-104,1	(701,087 ; 712,619)	
2007	7	712,619	-92,59	(712,619 ; 724,587)	
2008	8	724,587	-80,62	(724,587 ; 732,051)	
2009	9	732,051	-73,15	(732,051 ; 739,051)	
2010	10	739,051	-66,15	(739,051 ; 745,289)	
2011	11	745,289	-59,92	(745,289 ; 749,86)	
2012	12	749,86	-55,35	(749,86 ; 755,703)	
2013	13	755,703	-49,5	(755,703 ; 760,551)	
2014	14	760,551	-44,65		

Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Os alunos acreditavam que a área desmatada aumentava exponencialmente, porém, após plotarem os pontos da tabela da Figura 95 no software GeoGebra, perceberam que os dados, embora tivessem um comportamento exponencial, pareciam convergir para um valor limite.

Figura 96: Dados sobre o desmatamento da floresta



Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Desta forma, eles poderiam representar a taxa de variação do desmatamento em relação ao tempo pela seguinte EDO:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \alpha \cdot \Delta A(t)$$

$$\Delta A(t) = (A(t) - A^*)$$

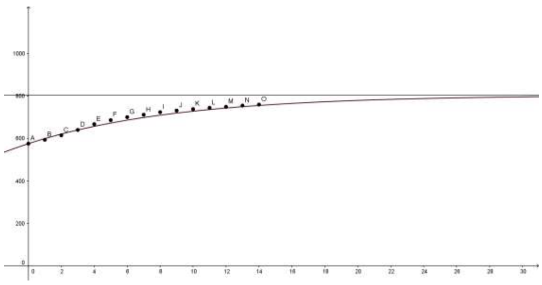
Sendo *A(t)* a área desmatada em função do tempo *t*, α constante de proporcionalidade e *A** o limitante (quantidade máxima de área desmatada).

Para determinar o limitante (A*), os alunos utilizaram o método de Ford-Walford[61], obtendo o valor de 805,20555 km² (Figura 95) e para calcular a constante de proporcionalidade, o alunos utilizaram a mesma fórmula aplicada nos problemas anteriores, obtendo $\alpha = -0{,}110229$ e assim o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dA(t)}{dt} = -0{,}11029(A(t) - 805{,}20555) \\ A(0) = 575{,}903 \end{cases},$$

cuja solução é dada por $A(t) = -229{,}30255e^{-0{,}11029t} + 805{,}20555.$ Os alunos validaram o modelo graficamente (Figura 97). E concluíram que, continuando nesse processo, para o ano de 2016, a área total desmatada seria de 765,93785km^2.

Figura 97: Gráfico da função $A(t)$



Fonte: Trabalho escrito dos alunos

Analisando o gráfico da Figura 97, os alunos explicaram que acreditavam que o desmatamento estava diminuindo devido às novas leis de proteção ambiental e à própria conscientização do ser humano. E que o comportamento dos dados indicava que o desmatamento encontraria um "momento estático". Porém, eles não poderiam concluir que este limitante era "absoluto", pois, segundo eles, "o ser humano pode vir a destruir o meio ambiente em uma quantidade maior do que a já esperada, saindo assim de nosso espectro de estudo e então vir a mudar o valor do limitante".

4.4.3.4 Análise dos projetos finais

Na análise *a priori* definimos alguns critérios para a análise dos projetos finais:

1) A escolha de uma situação pertinente para a utilização de uma EDO.
2) A obtenção de um modelo utilizando uma EDO.
3) A mobilização de diferentes domínios e registros de representação na análise da situação.

---

[61] A pesquisadora auxiliou os alunos na aplicação deste método, pois embora percebessem que os dados estavam convergindo para um valor limite, não sabiam como calcular este valor.

Em relação ao item 1), podemos observar que todos os grupos escolheram um tema que poderia ser modelado por uma EDO e também utilizaram este conceito para obter o modelo matemático, atingindo também o item 2).

Consideramos importante o fato de os alunos terem cumprido estes dois itens, pois isso indica que eles conseguiram relacionar a EDO com taxa de variação, seja da corrente elétrica ou do desmatamento. Embora os grupos G1 e G2 tenham escolhido estudar problemas clássicos (circuito elétrico e queda livre), os alunos conseguiram explicar o fenômeno estudado utilizando uma EDO, aplicando os conhecimentos que possuíam.

Para Bassanezi (2011), o estudo de modelos clássicos é um procedimento comum em Modelagem Matemática, pois serve de motivação tanto para questionamentos sobre sua formulação quanto para analisar suas possíveis restrições. No caso dos modelos clássicos que envolvem as EDOs, o autor atribui sua importância ao fato de que, quando o aluno compreende bem esses modelos, ele tem mais facilidade em modelar novas situações, pois uma mesma EDO pode ser usada como modelo para diferentes situações, porém, análogas em termos evolutivos, como, por exemplo, a equação do tipo $\frac{dy}{dx} = \alpha y$ que pode ser utilizada tanto para analisar o crescimento da população de ratos (Atividade 9) como para estudar o problema do decaimento radioativo do Césio-137 (primeiro problema de MM).

Além disso, os temas foram escolhidos pelos grupos sem a interferência da pesquisadora, segundo Bassanezi (2011) é importante que os alunos escolham o tema que pretendem estudar, pois assim eles se sentem corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, o que faz com que sua participação, neste processo, seja mais ativa.

Para estudar a situação proposta por eles, os alunos utilizaram diferentes domínios matemáticos e registros de representação. Por exemplo, o G1 utilizou de conceitos e leis da Física (domínio não matemático) para obter a EDO (domínio da AA) que modelava o fenômeno. Para analisar a equação obtida, os alunos utilizaram o campo de vetores, sinal da derivada, resolução algébrica da EDO, gráfico da função *i(t)*. Essas diferentes formas de resolução e de análise da EDO conduziu à utilização de diferentes domínios e registros de representação semiótica e, consequentemente, a conversões e os tratamentos nestes registros, conforme já verificado durante o desenvolvimento das fases 1 e 2 da sequência.

Podemos observar que os alunos utilizaram as noções e os conceitos explorados na sequência, em particular, o campo de vetores e o sinal da derivada obtido após tratamentos na expressão algébrica das EDOs, que, conforme verificado na análise dos livros e em trabalhos anteriores, são conceitos pouco explorados no ensino e na aprendizagem das EDOs.

Além disso, os problemas de “Modelagem Matemática” propostos nos livros propiciam a aplicação de fórmulas prontas, o que, muitas vezes, não auxilia o aluno na compreensão do fenômeno estudado ou do conteúdo visado para a aprendizagem. Nesse sentido, esta condução dos alunos na resolução do problema, proporcionou-lhes uma visão mais qualitativa do fenômeno estudado, o que será mais pertinente no desenvolvimento de suas atividades profissionais.

Inferimos que o G4 não utilizou o campo de vetores pelo fato de que os alunos buscavam a área total da floresta desmatada no ano de 2016, o que pode ter beneficiado a resolução algébrica. Ou o fato de a pesquisadora ter emprestado o livro de Bassanezi (2015) para eles estudarem o modelo de Ford-Walford, pois o delineamento seguido pelos alunos estava próximo do apresentado pelo autor, ou também pela influência da disciplina regular, na qual os alunos priorizam este tipo de resolução.

Contudo, embora os alunos tenham optado pela resolução algébrica, podemos perceber que eles realizaram uma atividade diferente da proposta nos livros didáticos, pois formularam hipóteses, modificaram suas hipóteses, validaram o modelo obtido e utilizaram o gráfico para explicar o fenômeno analisado e não somente para ilustrar a solução.

Diante disso, podemos afirmar que todos os grupos que desenvolveram seus projetos cumpriram com os critérios definidos na análise *a priori*, demonstrando a compreensão do conceito de EDO, utilizando de diferentes domínios e registros de representação, como os trabalhados na fase 1 e nos dois problemas de MM.

Resultados e considerações finais

Para iniciar nossas considerações finais, somos levados a retomar o objetivo da nossa pesquisa, qual seja, investigar o potencial de uma sequência de situações, envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio, na condução do processo de aprendizagem das equações diferenciais ordinárias para estudantes dos cursos de engenharias.

No nosso contexto, assumimos que a sequência de situações possui potencial para favorecer o processo de aprendizagem de um conceito matemático, no nosso caso, as EDOs, quando ela possibilita ao aluno compreensões que extrapolam a formulação matemática do conceito, instigando-o a explorar outros domínios e técnicas que o subsidiem a analisar as soluções da EDO, mesmo que não conheça sua expressão analítica à luz do problema considerado.

A partir das reflexões realizadas, ao longo dos capítulos que compõem essa tese e tendo em vista nossa questão norteadora, retomamos, em linhas gerais, os resultados e as compreensões obtidos no desenvolvimento desta pesquisa.

Nas análises preliminares, evidenciamos que o ensino e a aprendizagem das EDOs centram-se em uma abordagem algébrica, que privilegia o emprego de técnicas de resolução, a qual, normalmente, não favorece a utilização de diferentes registros de representação ou o uso de ferramentas de outros domínios matemáticos. Verificamos que os livros didáticos também beneficiam a abordagem algébrica desse conceito e mesmo as atividades ditas de “Modelagem Matemática” conduzem a uma aplicação de fórmulas já estabelecidas.

Segundo Duval (2003), tanto a criatividade quanto o conhecimento do aluno se aprimoram mais quando ele utiliza diferentes registros de representação e não apenas a formação de um único registro e no tratamento deste. Para Douady (1992), uma mudança de domínio produz novos conhecimentos, uma vez que ela pode criar um desequilíbrio entre o que o aluno espera e o que se produz efetivamente, fazendo com que ele busque explicações para a nova situação produzida. Em particular, para as EDOs, a autora afirma que adotar uma abordagem qualitativa, por exemplo, implica uma mudança de ponto de vista do problema analisado, o que leva à formulação de novas questões e ao uso de outras ferramentas que antes não estavam disponíveis ou evidentes.

Cada domínio possui regras e leis que o governa, assim, os tratamentos em um registro só podem ser realizados de forma efetiva, se o aluno conhecer as regras e as leis que regem o domínio. A falta de conhecimento dessas regras em um domínio gera dificuldades para o aluno operar neste, para qualquer que seja o registro de representação escolhido.

Foi nesse contexto que propusemos uma sequência de situações que instigava um estudo das EDOs, por meio do estabelecimento de relações entre diferentes domínios nas quais uma EDO pode estar contida e o uso de diferentes registros de representação com a intenção de propiciar uma melhor compreensão desse conceito para os estudantes dos cursos de Engenharias.

Como a metodologia utilizada foi a engenharia didática proposta por Artigue (1996), realizamos uma análise *a priori* para cada situação, explicitando seus objetivos, possíveis caminhos para sua resolução e as prováveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar no desenvolvimento de cada atividade.

A análise *a priori* da fase 1 da sequência, mostrou diferentes estratégias que os alunos poderiam utilizar, realizando conversões (congruentes e não congruentes) e utilizando diferentes domínios matemáticos para analisar e responder a atividade proposta.

Embora nas atividades iniciais os alunos apresentassem dificuldades na compreensão (Atividade 1) e análise (Atividade 3) do campo de vetores e na interpretação da EDO (Atividade 2), o que demandou diversas intervenções da pesquisadora, a partir das Atividades 4 e 5, vários alunos começaram a demostrar familiaridade e domínio para utilizar simultaneamente o campo de vetores e o sinal da derivada (EDO) para fazer inferências sobre as soluções da EDO.

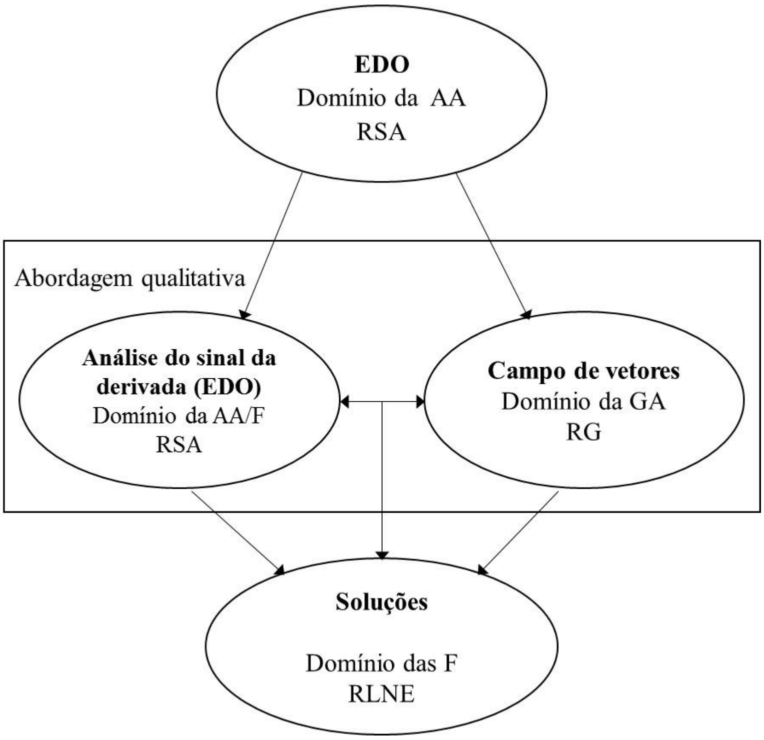
Todos os alunos que resolveram a Atividade 6 conseguiram identificar e relacionar as unidades significativas do RSA (EDO) com as unidades visuais do RG (campo de vetores). Na Atividade 7, após os alunos entenderem que a derivada poderia ser representada no eixo das ordenadas, eles conseguiram fazer inferências sobre o comportamento das soluções EDO utilizando as informações sobre o sinal da derivada obtidas analisando o RG.

Na Atividade 8, os alunos conseguiram observar que em um ponto do plano cartesiano passa uma única solução da equação $y' = 5y$. E esta constatação foi possível a partir da compreensão das EDOs advinda das atividades anteriores e da utilização do campo de vetores.

No desenvolvimento da Atividade 9, era preciso determinar a EDO que representava o fenômeno analisado. Ainda que os alunos tivessem as informações necessárias no RLNE para obter o modelo procurado, surgiu a necessidade de compreender o conceito de proporcionalidade envolvido, o que não foi requisitado nas demais atividades da fase 1. Isso indica a importância de propor aos alunos problemas contextualizados, pois, embora a constante de proporcionalidade estivesse presente nas demais equações estudadas, por exemplo, na equação $f'(x) = 3f(x)$, não era preciso compreendê-la à luz do problema analisado.

A Figura 98 ilustra os registros de representação e domínios que mais foram utilizados pelos alunos no desenvolvimento da fase 1 da sequência.

Figura 98: Registros e domínios utilizados pelos alunos na fase 1



Fonte: Elaborado pela autora

Chamamos a atenção para o uso do registro gráfico, o qual foi utilizado para obter informações (intervalos de crescimento/decrescimento e comportamento assintótico) e não somente como forma de representar as soluções, conforme verificamos nos livros didáticos de EDO analisados.

A utilização e a coordenação entre diferentes registros de representação indicam que os alunos eram capazes de reconhecer o conceito da EDO em suas diferentes formas de representação, o que, para Duval (2003), conduz à conceitualização (noésis) do objeto matemático.

Na fase 2 da sequência, os alunos precisavam aplicar os conhecimentos trabalhados na fase 1 em uma situação extramatemática. Assim, queríamos verificar se os alunos saberiam identificar problemas que pudessem ser representados por um modelo envolvendo uma EDO e, nesse caso, se e como eles utilizariam as diferentes formas de interpretação da solução praticadas na fase 1, na interpretação desse problema. Mais ainda, se eles conseguiriam olhar o problema a partir dessa EDO construída.

Nesta fase, os alunos se depararam com a necessidade de interpretar o conceito de derivada como taxa de variação, pois, para a compreensão da situação, era preciso entender como o fenômeno estava evoluindo ao longo do tempo.

Diferente das atividades da fase 1, os alunos não tinham todas as informações necessárias para resolver o problema proposto, o que fez com que eles buscassem os dados e as informações que precisavam tanto para interpretar quanto para resolver a situação proposta, o que tornou sua participação mais ativa no desenvolvimento do problema.

Além disso, eles precisaram levantar hipóteses sobre o comportamento do fenômeno analisado. O fato deles mesmos terem levantado estas hipóteses fez com que, por iniciativa própria, validassem o modelo obtido, percebessem que haviam cometido algum erro em sua formulação e retomassem a análise da situação.

Na análise *a posteriori* dos problemas de MM percebemos que, ao percorrerem as etapas de MM sugeridas por Bassanezi (2011), os alunos foram levados a utilizar diferentes domínios e registros de representação, em decorrência da experiência da fase 1 da sequência. Além disso, verificou-se que os alunos recorreram a registros diferentes do RSA, enfatizado nos livros didáticos, tanto para resolver a EDO que modelou o fenômeno quanto para explicá-lo.

Nos problemas de MM estudados no curso, tivemos a utilização da tabela, a qual não havia sido solicitada na fase 1 da sequência. Segundo Flores e Moretti (2005), as tabelas não são representações autônomas, elas se articulam com representações em um outro registro, como, por exemplo, a interação entre a tabela e o enunciado do problema (RLNE) ou a escrita algébrica (RSA). Em nossos problemas, as tabelas representavam, parcialmente, o comportamento do fenômeno e sua leitura não serviu apenas para a obtenção de dados, mas para o entendimento da situação analisada e, consequentemente, para a obtenção do modelo.

A representação dos dados da tabela no plano cartesiano foi necessária para a validação dos modelos, contudo, a validação só foi possível quando os alunos compararam este gráfico com a representação gráfica das curvas soluções. Ou seja, os alunos conseguiram identificar as informações a respeito da solução da EDO em diferentes registros e relacioná-las ao fenômeno estudado.

Na fase 2 da sequência, além de resolver a EDO, os alunos também precisaram estabelecer ligações entre elas e a situação extramatemática analisada, buscando explicações em domínios não matemáticos, como o da Física, ou seja, puderam ver a utilização do conceito de EDO em outras disciplinas, o que, segundo Bassanezi (2011), é uma característica da MM.

Diante disso, concordamos com Vertuan (2007), Rosa (2009) e Gomes e Silva (2013) que, ao utilizarmos a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e de aprendizagem (ou alternativa pedagógica), propiciamos aos alunos a possibilidade de discutir problemas extramatemáticos, uma participação ativa no processo de resolução, na qual o uso de diferentes registros de representação se faz necessário.

Particularmente, ao olharmos para os nossos sujeitos da pesquisa, alunos dos cursos de Engenharias, e para o conteúdo matemático tratado, as EDOs, essas assertivas dos autores revelam a necessidade de estudos que apontem os diferentes papéis da formação matemática na qualificação profissional desses universitários.

Nos cursos de Engenharia, as ferramentas matemáticas são bases para resolver os problemas próprios da área, por isso saber aplicar tais ferramentas é uma condição necessária tanto para o desenvolvimento acadêmico do aluno quanto para sua atuação profissional.

De acordo com Klymchuk *et al*. (2008), a inclusão de problemas de Modelagem Matemática, nos cursos de Engenharia, é uma forma de preparar os alunos para fazer uso dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo de sua formação em situações reais, visto que, graduados nessa área, vão lidar com a Modelagem Matemática de diferentes fenômenos em sua atuação profissional.

Como muitos desses problemas são modelados por EDOs, é importante que os engenheiros saibam lidar com as EDOs nas suas diferentes representações, conseguindo analisar e interpretar suas soluções, mesmo quando não possuem ou não é possível obter a expressão analítica das soluções.

Nesse sentido e, considerando nossos resultados que evidenciam que, em ambas as fases da sequência, os alunos utilizaram ferramentas de diversos domínio da Matemática e exploraram diferentes registros de representação semiótica, bem como realizaram as atividades de conversão, de tratamento e de coordenação entre os registros, é que assumimos que a sequência de situações construída, é potencialmente favorecedora para a compreensão do conteúdo de EDOs.

Contudo, ressaltamos alguns pontos que devem ser levados em consideração, como as dificuldades apresentadas pelos alunos, o papel do software no desenvolvimento das atividades e o papel da pesquisadora.

As dificuldades apresentadas pelos alunos: no desenvolvimento da sequência observamos que, embora os alunos tenham apresentado algumas dificuldades com noções próprias do conceito das EDOs, como a de infinitas soluções e a de campo de vetores, grande parte dessas dificuldades foram em relação à Matemática Básica, em particular, conceitos do domínio da Álgebra.

Como exposto na análise *a posteriori*, nenhum aluno conseguiu resolver as inequações modulares que surgiram no desenvolvimento da Atividade 5. Além disso, alguns alunos não tiveram sucesso ao resolver inequações do tipo $ay - b > 0$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Essas dificuldades comprometeram o desenvolvimento e a compreensão de algumas atividades por parte dos alunos. Por exemplo, na Atividade 4, a aluna Sofia (G1) ao resolver a inequação $-3y - 7 > 0$ chegou à conclusão que $y < 10$, ao analisar o campo de vetores a aluna verificou que a solução de equilíbrio da EDO $y' = -3y - 7$ estava próxima de -2 e tentou resolver novamente a inequação, solicitando a ajuda de Vivian, que também não sabia como resolver a inequação. Sofia não conversou com os demais membros do grupo e forneceu como resposta $y > -2$ que foi o que ela conseguiu visualizar no gráfico, não obtendo o valor de -7/3, ou seja, a falta de conhecimento do domínio da Álgebra fez com que a aluna não conseguisse relacionar as unidades significativas do RSA com a unidades visuais do RG.

As dificuldades em Matemática Básica têm fortes influências no desenvolvimento acadêmico dos alunos, levando a erros no procedimento de resoluções ou impedindo a compreensão dos novos conceitos. Essas dificuldades refletem no desempenho dos alunos, em particular nos estudantes de Engenharia, tanto que este assunto tem sido tema de alguns trabalhos do Cobenge[62] (FLEMING; LUZ; COELLHO, (1999), CURY (2003), GOMES; LOPES; NIETO (2005), SOBRINHO; DECHECHI; DETONI, (2005)). Cury (2003) observou em sua pesquisa com alunos da disciplina de CDI, que os erros cometidos por eles indicavam que as dificuldades mais graves estavam relacionadas com os conteúdos dos Ensino Básico, em especial aos conteúdos de Álgebra do oitavo e novo anos, ou seja, as mesmas dificuldades observadas em nossos alunos.

O uso dos softwares computacionais: Nesta pesquisa não tínhamos a intenção de verificar os benefícios, ou não, do emprego das tecnologias na aprendizagem das EDOs. Contudo, a utilização desses recursos foi importante e necessária para o desenvolvimento das atividades pelos alunos.

A construção do campo de vetores sem o auxílio do software, demandaria muito tempo tornando-se inviável a sua utilização. Além de gerar outros problemas, como o da utilização do transferidor, verificados na resolução da Atividade 1.

---

[62] Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia.

Acreditamos que o fato de o aluno copiar e colar o comando para construção do campo de vetores no software Maple minimizou os problemas que poderíamos ter durante a utilização dessa tecnologia. Ressaltamos que nosso objetivo não era que o aluno compreendesse os comandos e as propriedades do software e sim que eles conseguissem plotar o campo de vetores e fazer as modificações necessárias, como uma mudança nos valores dos eixos coordenados, o que foi realizado sem maiores transtornos.

Dessa forma, julgamos que os softwares utilizados favoreceram positivamente o desenvolvimento da sequência. Assim, concordando com Artigue (2008), podemos afirmar que as possibilidades oferecidas pelos softwares permitem a interação entre diferentes domínios matemáticos e registros de representação semiótica para o estudo das EDOs.

O papel da pesquisadora: Na análise *a priori* esperávamos que a pesquisadora interferisse o mínimo possível nas resoluções dos alunos. Contudo, isso nem sempre foi possível, ou devido a alguma dificuldade dos alunos ou até mesmo pela forma de condução da atividade pela pesquisadora.

Em algumas situações, a intervenção da pesquisadora direcionou a estratégia de resolução dos alunos, o que causou outras dificuldades, como o uso do transferidor na Atividade 1.

Como a preocupação inicial estava centrada nas conversões e nas mudanças de domínios e, consequentemente, nas estratégias de resoluções utilizadas pelos alunos, a pesquisadora focou-se em verificar tais estratégias e retomar os conceitos necessários para sua utilização (por exemplo, a noção de campo de vetores) deixando passar alguns conceitos importantes, tais como: a diferença entre uma função crescente e estritamente crescente em um dado intervalo (os alunos utilizaram o termo crescente) e o fato de a solução de equilíbrio ser única quando $y' = 0$ (os alunos utilizaram soluções constantes, no plural).

Diante do exposto, as análises indicam que os resultados da sequência em relação à aprendizagem das EDOs podem ser melhorados com as sugestões expostas na análise *a posteriori* e com a elaboração de uma pré-sequência que retome os conhecimentos necessários para o estudo das EDOs, sobretudo os conceitos da Álgebra e do CDI-I de forma a minimizar as dificuldades em relação à Matemática Básica.

Assim, chegando ao final desta pesquisa, não poderíamos deixar de sugerir alguns estudos futuros. Com relação ao uso conjunto dos registros de representação semiótica, mudança de domínios e Modelagem Matemática, novos estudos podem ser realizados no sentido de investigar sua utilização para o estudo das EDOs do tipo $y = f(x, y)$ e para as EDOs de segunda ordem. Além de um estudo propondo o uso conjunto dos diferentes tipos de abordagens das soluções de uma EDO: algébrica, qualitativa e numérica.

As reflexões aqui realizadas fundamentam novos entendimentos das contribuições que os registros de representação semiótica e as mudanças de domínios possuem para a aprendizagem das EDOs. E também para o papel dos modelos matemáticos neste processo de aprendizagem, que requerem de um encaminhamento diferente dos propostos nos livros didáticos, resgatando, assim, a relação entre o comportamento das soluções das EDOs e a evolução do fenômeno analisado.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. ; TORTOLA, E. ; MERLI, R. F. Modelagem Matemática Com o que estamos lidando: Modelos diferentes ou Linguagens diferentes. **Acta Scientiae** (ULBRA), v. 14, p. 200-214, 2012.

ALMOULOUD, S., A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARSLAN, S., LABORDE, C. Un outil favorisant l'interaction entre cadres: CABRI une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. Lagrange J.B. & al. (eds). Reims, France, 2003 <edutice-00001314>.

ARSLAN, S. **L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S:** Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences? Thèse de Doctorat. Grenoble. Universite Joseph Fourier – Grenoble 1, 2005.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.9, n.3, p. 281-308. Paris, 1988.

______________ Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. In : **Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique**, Grenoble, p. 183-209, 1989. In: GORDILLO, J. A. M. Articulation des registres graphique et symbolique pour l'etude des equations differentielles avec cabri geometre: Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel. Thèse de Doctorat. Grenoble. Universite Joseph Fourier – Grenoble 1. 2006.

______________Difficultes cognitives et didactiques dans la construction de relations entre cadre algebrique et cadre graphique. In: BOOKER, G, et all. **Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference**, México, v.1, p. 93-100, jun. 1990.

______________ Ingénierie didactique. In: BRUN, J. **Didactique des Mathématiques**, Delachaux et Niestlé, Paris, 1996.

______________L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques : contenus et pratiques, p. 11-24. In : **Actes du séminaire DGESCO** de février 2007 : Utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques, Paris, 2008.

BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais com aplicações.** São Paulo: Harbra, 1988.

______________ **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

______________ **Modelagem matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: V Seminário internacional de pesquisa em educação matemática, 2012, Petrópolis. **Anais**... Petrópolis, 2013, 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade no ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular.** Tese de doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 1997.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. Tradução de: Qualitative Research for Education: an introduction to theory and methods.

BORGES, P. A. P.; NEHRING, C. M. Modelagem Matemática e Sequências Didáticas: uma relação de complementaridade. **Bolema.** Rio Claro, ano 21, n. 30, p. 131-147, 2008.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-121, 2004.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C**. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

BUENO, V.C. **Modelagem Matemática:** quatro maneiras de compreendê-la. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

BURAK, D. **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**. In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática. 2004, Londrina. Anais do I EPMEM, 2004.

BURAK, D.; BRANDT, C.F. Modelagem Matemática e Representação Semiótica: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiké** – FE – Unicamp – v.18, n.33, jan/jun, p. 63-102, 2010.

CARDOSO, V. C. **Ensino e aprendizagem de álgebra linear:** uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. Tese de doutorado (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação. Campinas, 2014.

CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real:** possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. Tese de doutorado (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2013.

CURY, H. N. **Análise de erros em Cálculo Diferencial e Integral:** resultados de investigações em cursos de Engenharia. XXXI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, **COBENGE**. Rio de Janeiro, 2003.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. MACHADO, S. D. A. (org.) São Paulo: EDUC, 2012.

DOUADY, R. **Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres.** Cahier de didactique des mathematiques. Universite Paris VII, n. 3, p. 5-26. 1983. Disponível em: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDM_3_r%C3%A9gine_douady_-_Rapport_enseignement_apprentissage_Dialectique_outil-objet_jeux_de_cadres.pdf. Acesso em 02 de set. De 2014.

______________ Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Thèse de Doctorat d'état. Université Paris VII, 1984.

______________ Des apports de la didactique des mathematiques a l'enseignement. **REPÈRES-IREM**, n. 6, p. 132-158, Paris, 1992.

______________ L´Ingeniérie Didactique: un moyen pour l´enseignant d´organiser les rapports entre l´enseignement et l´aprentissage. **Cahier de DIDIREM**, n. 19, p 1-43. Paris, 1993.

______________ Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

DULLIUS, M., M.; VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia **Boletim de Educação Matemática** [On-line] 2011, Disponível em:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291222086003> Acesso em 19 de abril de 2014.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, IREM-ULP, v. 5, p.37-65, Strasbourg, 1993.

______________ Comment décrire et analyser l´activité mathématique ? Cadres et registres. In: **Actes de journée em hommage à Régine Douady**. Organizado por l´équipe DIDIREM. Unisersité Paris 7, Paris, 2001.

______________ Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Machado, S. D. A. (org.) Campinas-SP: Papirus, 2003.

______________ Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. trad. LEVY L. F; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Editora da Física, 2009.

______________ Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. **Amazônia** – Revista de Educação em Ciências e Matemáticas v.6, n. 11, jul./dez. 2009, v.6, n.12, p. 126-143, jan./jun. 2010.

______________ Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos: [tradução Marlene Alves Dias], 1 ed., São Paulo: PROEM, 2011a.

______________Gráficos e equações: articulação de dois registros. Trad.: Méricles T. Moretti. **Revemat:** Florianópolis-SC, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011b.

______________ Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do pensamento. **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FECCHIO, R., A. **Modelagem Matemática e a interdisciplinaridade na introdução do conceito de equações diferenciais em cursos de Engenharia**. 2011. 208f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio**. R.J.: Ed. Nova Fronteira, 1986.

FLEMMING, D. M., LUZ, E.F., WAGNER, R. Equações diferenciais na Engenharia Civil: uma proposta didática. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. **Anais**, Ouro Preto, 2000. Disponível em: < http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2000/artigos/166.PDF > Acesso em: 20 de dezembro de 2015.

FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. A articulação de registros semióticos para a aprendizagem: analisando a congruência semântica na Matemática e na Física. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, MS, v.1, n.1, p.25-40, jan/jun, s/d. Disponível em: http://inma.sites.ufms.br/files/2015/08/PPGEDUMAT_-matematica_vol_1.pdf. Acesso em 20/04/2016.

FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. 28ª **Reunião Anual da ANPED**. (Grupo de Trabalho: Educação Matemática – 19). Caxambu-MG, 2005. Disponível em http://www.anped.org.br/reunioes/28/textos/gt19/gt19736int.pdf Acesso em 20 de jun. 2016.

GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. S. Cálculo zero: uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, COBENGE. 33, 2005, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM.

GOMES, G. F.; SILVA, K. A. P. Registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no 1.º ano do ensino médio. In: XI **Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba, 2013.

GORDILLO, J. A. M. **Articulation des registres graphique et symbolique pour l'etude des equations differentielles avec cabri geometre**: Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel. Thèse de Doctorat. Grenoble. Universite Joseph Fourier – Grenoble 1. 2006.

JAVARONI, S., L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e a aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.** 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2007.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. In: **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**. v. 38, n. 3. p. 302-310, 2006.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.** 435f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KLYMCHUK, S.; ZVERKOVA, T.; GRUENWALD, N.; SAUERBIER, G., Increasing engineering students' awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. **Teaching Mathematics and its Applications**, v. 27, n. 3, p. 123-130, 2008.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, p. 3-9, jan./mar. 1996.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

MAANEN J., V. **Reclaiming qualitative methods for organizational research:** a preface. In Administrative Science Quarterly, v.24, n.4, pg. 520-526. 1979.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. MACHADO, S. D. A. (org.) São Paulo: EDUC, 2012.

MORETTI,M. T., LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. In. **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática.** Orgs. BRANT, C. F., MORETTI, M. T. Ed. Unijuí, Unijuí, 2014.

MUÑOS, G. H. Changements de cadres et de registres. **Mémoire discipline Mathématiques**. Montpellier, 2001-2002. Disponível em : http://flora.allain.perso.sfr.fr/Master2/res/Cadres%20et%20registres.pdf. Acesso em: 10 de jan. de 2016.

OLIVEIRA, E., A.; IGLIORI, S., B., C. **Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica**. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. v. 4, n.2 . pg. 1-24. 2013.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Mileu, cadres et registres. In: **Actes de journée em hommage à Régine Douady**. Organizado por l´équipe DIDIREM. Unisersité Paris 7, Paris, 2001.

RASMUSSEN, C. New directions in differential equations A framework for interpreting students' understandings and difficulties. **Journal of Mathematical Behavior**, v.20, p.55-87, 2001. In : DULLIUS, M. M. ; VEIT, E. A. ; ARAUJO, I. S. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. **Alexandria**, v.6, n.2, p. 207-228, 2013.

ROBERT, A. Quelques outils d'analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. **Actes de la IX école d'étè de didactique des mathématiques.** Houlgate. França, 1997. In : SANTOS, C. A. B. ; CURI, E. Os Registros de Representação Semiótica como Ferramenta Didática no Ensino da Disciplina de Física Os Registros de Representação Semiótica como Ferramenta Didática no Ensino da Disciplina de Física. **Revemat**: Florianópolis, v. 06, n.1, p.1-14, 2011.

ROGALSKI, M. Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In: **Actes de journée em hommage à Régine Douady**. Organizado por l´équipe DIDIREM. Unisersité Paris 7, Paris, 2001.

ROSA, C. C. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

SAGLAM-ARSLAN, A. **Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique:** Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir. Thèse de Doctorat. Grenoble. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004.

SASSER, J. E. History of Ordinary Differential Equations: The First Hundred Years. In: **Proceedings of the Midwest Mathematics History Society**, 1992. Disponível em: http://www2.fiu.edu/~yuasun/ODE_History.pdf Acesso em: 12 de nov. de 2015.

SOBRINHO, J.P., DECHECHI, E.C., DETONI, M.M. Dificuldades conceituais em Matemática Básica de ingressantes no curso de Engenharia de Produção. XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, **COBENGE**. Campina Grande, 2005.

SWOKOWSKI, Earl Willian. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo Makron, 1994.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

ZILL, D. G., CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. Vol. 1. 3ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

Apêndice A

Perfil do estudante

Nome:

RG: CPF: RA:

E-mail:

Idade:

Curso: Ingresso:

Cidade:

Possui dependência? ( ) não ( ) sim. Em qual (is) disciplina (s)?

Você já cursou ou está cursando alguma disciplina que tenha na ementa equações diferenciais ordinárias?

Das disciplinas que você cursou, qual foi a que você sentiu mais dificuldade? Justifique.

Quais são suas expectativas em relação a este curso de extensão?

Quais suas pretensões com o curso de graduação que você faz?

Apêndice B

Instruções Maple

Dada a equação: $\dfrac{dP}{dt} = 9P(\mathrm{t})$

- Comandos necessário para iniciar as análises:

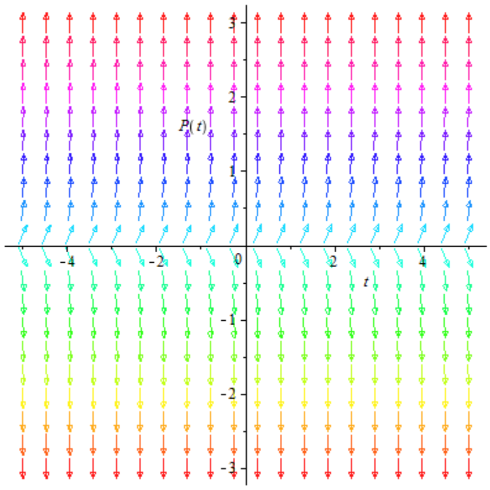
restart:

with(DEtools):

with(plots):

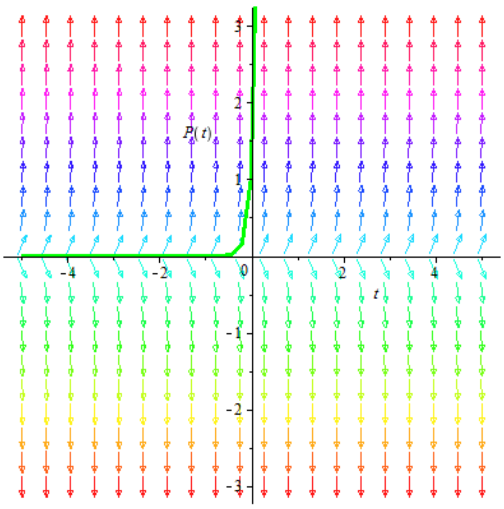
- Para fazer o campo de vetores usar o comando:

dfieldplot(diff(P(t), t) = 9*P(t), P(t), t = -5 .. 5, P = -3 .. 3, arrows = medium, colour = P(t)) ;



- Para fazer o campo de direções com condição inicial, utilizar:

  DEplot(diff(P(t), t) = 9*P(t), P(t), t = -5 .. 5, P = -3 .. 3, [[0, 1]], linecolor = [green], arrows = medium, colour = P(t));



Apêndice C

Aluno (a):

Curso: Período: Data:

No dia 03 de setembro de 2015, fizemos o seguinte experimento: deixamos em temperatura ambiente, uma lata de refrigerante gelada, com 350 ml, e registramos sua temperatura durante 2 hrs e 30 min. A temperatura ambiente era de 23,3ºC. Os valores obtidos estão na Tabela abaixo:

Tempo	Temperatura (ºC)
18h 45min	3,6
18h 55min	6,0
19h 05min	7,6
19h 15min	9,8
19h 25min	11,7
19h 35min	13,2
19h 45min	14,2
19h 55min	14,9
20h 05min	15,3
20h 15min	15,9
20h 25min	16,4
20h 35min	17
20h 45min	17,6
20h 55min	18,0
21h 05min	18,4
21h 15min	18,9