UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

MARLOVA ESTELA CALDATTO

O PROFMAT E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE CURRICULAR A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA PROCESSUAL E DESCENTRALIZADORA

MARINGÁ - PR
2015

MARLOVA ESTELA CALDATTO

O PROFMAT E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE CURRICULAR A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA PROCESSUAL E DESCENTRALIZADORA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Maria Pavanello
Coorientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini

MARINGÁ - PR
2015

C145 Caldatto, Marlova Estela

O PROFMAT e a formação do professor de matemática: uma análise curricular a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora / Marlova Estela Caldatto -- 2015.

414 f.: il.; 30cm

Orientadora: Profª Drª Regina Maria Pavanello
Coorientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini
Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Maringá.
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá.
Maringá, 2015.
Bibliografia: f. 404 – 414

1.Currículo. 2. Formação de professores de matemática. 3. Matemática. 4. Mestrado Profissional. 5. PROFMAT. 6. Educação. I. Pavanello, Regina Maria, orient. II. Fiorentini, Dario, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica Elaborada por
Maria Juçara Silveira CRB 9/1359
Biblioteca da UTFPR, Campus Pato Branco

MARLOVA ESTELA CALDATTO

O PROFMAT e a formação do professor de Matemática: *uma análise curricular a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Regina Maria Pavanello
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP

Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Prof. Dr. Ruy César Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN

Maringá, 15 de Junho de 2015.

DEDICATÓRIA

Aos *professores deste país* que, diariamente, enfrentam, com muita coragem e solitários, os problemas que afligem e depredam (ainda mais) os sistemas públicos de educação. Especialmente, *aos professores do Estado do Paraná* que, no dia 29 de abril de 2015, lutaram corajosa e bravamente pelos seus direitos defronte à Assembleia Legislativa do Paraná e foram massacrados moral, psicológica, social e fisicamente pelo Governador (Beto Richa), por 31 Deputados Estaduais, pela Polícia Militar e pela Tropa de Choque (o motivo do confronto foi a aprovação de *um projeto de lei que alterou o plano de previdência social destes servidores e eles foram vítimas de bombas de gás lacrimogêneo e pimenta*, *spray de pimenta*, *cassetetes*, *mordidas de cães policiais* e *tiros com bala de borracha*).

AGRADEÇO

Meus agradecimentos especiais:

A Profa. Dra. *Regina Maria Pavanello*, uma profissional séria, comprometida, digna e ética, pelo privilégio de sua orientação e pelo grande apoio;

Ao Prof. Dr. *Dario Fiorentini*, pelo privilégio de sua orientação no decorrer da realização do meu estágio sanduíche no País (SWP - CNPq) na Unicamp e pelo privilégio da coorientação desta tese;

Aos professores Dr.*Marcelo de Carvalho Borba*, Dr.*Plínio Cavalcanti Moreira,* Dr. *Rui Marcos de Oliveira Barros* e Dr. *Ruy César Pietropaolo,* pelas pertinentes críticas e sugestões que apresentaram a este trabalho como membros da banca de defesa desta tese;

As professoras Dra. *Clélia Maria Ignatius Nogueira* e Dra. (Luzia) *Marta Bellini*e, aos professores Dr. *Ourides Santin Filho* e Dr. *Rui Marcos de Oliveira Barros,* pelos momentos de grande aprendizado que me proporcionaram no PCM;

Aos *colegas e amigos, Leila, Maria Emília, Sandra, Nelma* e *Zé (José Roberto),* pelos momentos de estudo, incertezas, apoio e confraternização;

Aos *colegas do PRAPEM* (GEPFPM-UNICAMP), em especial à professora *Dione Lucchesi de Carvalho* e à colega *Vanessa Crecci*, pela receptividade e acolhida como membro do referido grupo de pesquisa;

Ao Prof. Dr. *Carlos Miguel Ribeiro,* pela acolhida na Unesp-Rio Claro – em seu pós-doutoramento – e pelos pertinentes momentos de discussão;

Aos *participantes e colaboradores desta pesquisa* pela disponibilidade e atenção, pois sem eles, literalmente, este trabalho não teria se concretizado;

À *Capes*, pelo fomento financeiro;

Ao *CNPq*, pelo fomento financeiro que viabilizou a realização do estágio sanduíche no País (SWP - CNPq) na Unicamp;

Ao *PCM*, pela infraestrutura e recursos ofertados para a realização deste trabalho;

A *minha amável e generosa Mamãe* que, além do apoio e compreensão, no decorrer de minha vida, insistente e veementemente, argumentou que o conhecimento é o único bem que jamais poderão me “tirar”;

Ao *Carlos*, pelo incentivo, respeito, apoio e ajuda nesta longa caminha da minha vida que culminou nesta tese.

J'acuse !

Mon devoir est de parler, je ne veux

pas être complice(...)

(Émile Zola)

O PROFMAT E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE CURRICULAR A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA PROCESSUAL E DESCENTRALIZADORA

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi analisar o currículo do PROFMAT, um programa de formação continuada direcionado ao aprimoramento da formação matemática de professores que ministram essa disciplina na escola básica, a partir da perspectiva processual e descentralizadora de Sacristán (1998; 2013), adotando como referências pesquisas produzidas na área de Educação Matemática cujo objeto de estudo são os conhecimentos do professor que ensina Matemática. Para atingir esse objetivo analisamos: o projeto acadêmico do PROFMAT (currículo proposto); livros-texto pertencentes a “Coleção PROFMAT” e a “Programação das Aulas de 2014” (currículo apresentado aos professores); dados oriundos da observação de aulas do PROFMAT (currículo moldado pelos professores e o currículo em ação); dados coletados por meio de questionários respondidos por acadêmicos do PROFMAT (currículo realizado); avaliações presenciais realizadas no ano de 2014 (currículo avaliado). A partir das análises realizadas concluímos que não existe uma vinculação estreita entre os elementos que compõem o currículo do PROFMAT na medida em que os objetivos a que ele se propõe não se cristalizam no material didático utilizado nas disciplinas, nem no processo de modelação do currículo pelos docentes e de seu desenvolvimento em sala de aula, e tampouco nos “currículos” “realizado” e “avaliado”. Tal conclusão decorre do fato das fases do currículo do PROFMAT – o “currículo apresentado aos professores”, o “currículo modelado pelos professores”, o “currículo em ação” e o “currículo avaliado” – não se vincularem à prática do professor de Matemática da educação básica, tal como a fase “currículo realizado” evidenciou.

Palavras–chave: Currículo. Formação de Professores de Matemática. Mestrado Profissional. PROFMAT.

The PROFMAT Program and Mathematics Teacher Education: a Curricular Analysis from a procedural and decentralizing perspective

ABSTRACT

The aim of this work was to analyze the PROFMAT curriculum, a continuing education program directed to the improvement of mathematics education of teachers who teach this discipline in elementary school, from the processual and decentralizing perspective of Sacristán (1998; 2013) and adopting as references the researches produced in the area of mathematics education whose object of study was the knowledge of the teacher who teaches math. To achieve this goal we analyze: the academic project of PROFMAT ("proposed curriculum"); textbooks belonging to "PROFMAT Collection" and the "Schedule of 2014 lessons" (curriculum presented to the teachers); data from the observation of the PROFMAT lessons (curriculum molded by teachers and the curriculum in action); data collected through questionnaires answered by students of PROFMAT (realized curriculum); face-to-face evaluations carried out in the year 2014 (evaluated curriculum). From the analyses carried out we concluded that there is no close linkage between the elements that make up the PROFMAT curriculum to the extent that the objectives that he proposes did not crystallize in the teaching material used in the disciplines, nor in the process of shaping the curriculum by teachers and its development in the classroom, nor in the "'realized' and 'evaluated' curricula". This conclusion stems from the fact that he phases of the curriculum of PROFMAT – the "curriculum presented to the teachers", the "curriculum modeled by teachers", the "curriculum in action" and the "evaluated curriculum" – do not link to the math teacher of basic education practice, such as "realized curriculum" phase showed.

Keywords: Curriculum. Mathematics Teacher Training. Professional Master. PROFMAT

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE SIGLAS

APCN	–	Aplicativo para Propostas de Cursos Novos
AV1	–	Avaliação Presencial 1
AV2	–	Avaliação Presencial 2
AV3	–	Avaliação Presencial 3
CAPES	–	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior
CCK	–	Common Contente Knowledge
CK	–	Content Knowledge
CLT	–	Consolidação das Leis do Trabalho
CNE	–	Conselho Nacional de Educação
COACTIV	–	Professional Competence of Teachers, Cognitively Activating Instruction, and the Development of Students' Mathematical Literacy
CONAE	–	Conferência Nacional de Educação
CPMF	–	Compreensão Profunda da Matemática Fundamental
CTC-EB	–	Conselho Técnico-Científico da Educação Básica
CTC-ES	–	Conselho Técnico-Científico da Educação Superior
DCE	–	Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática
DEB	–	Diretoria de Formação de Professores da Educação Básica
EDP	–	Equação Diferencial Parcial
ENEM	–	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	–	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

HCK – Horizon Contente Knowledge

IES – Instituição de Ensino Superior

IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

INAF-Brasil – Indicador de Analfabetismo Funcional – Brasil

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

KCC – Knowledge of Contente and Curriculum

KCS – Knowledge of content and students

KCT – Knowledge of Content and Teaching

KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics

KMLS – Knowledge of Mathematics Learning Standards

KMT – Knowledge of Mathematics Teaching

KoT – Knowlegde of Topics

KPM – Knowlegde of the Practice of Mathematics

KSM – Knowlegde of the Structure of Mathematics

LIFE – Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores

MEC – Ministério da Educação

MK – Mathematical Knowledge

MKT – Mathematical Knowledge for Teaching

MNPEF – Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

MTSK – Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge

NCRTE	–	National Center for Research on Teacher Education
OBEDUC	–	Observatório da Educação
OBM	–	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	–	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	–	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PAPMEM	–	Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio
PARFOR	–	Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica
PCK	–	Pedagogical Content Knowledge
PIBID	–	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PISA	–	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Programme for International Student Assessment)
PLI	–	Programa de Licenciaturas Internacionais
PNE	–	Plano Nacional da Educação
Prodocência	–	Programa de Consolidação das Licenciaturas
PROEB	–	Programa de Mestrado Profissional para Qualificação de Professores da Rede Pública da Educação Básica
PROFAP	–	Programa de Mestrado Profissional em Administração Pública
PROFARTES	–	Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional de Artes
PROFHISTÓRIA	–	Programa de Mestrado Profissional em Ensino de História
PROFLETRAS	–	Programa de Mestrado Profissional em Letras
PROFMAT	–	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROUNI	–	Programa Universidade para Todos
SAEB	–	Sistema de Avaliação da Educação Básica.
SBM	–	Sociedade Brasileira de Matemática
SCK	–	Specialized Contente Knowledge
SESu	–	Secretaria de Educação Superior
SNPG	–	Sistema Nacional de Pós-Graduação
TELT	–	Teacher Education and Learning to Teach
UAB	–	Sistema Universidade Aberta do Brasil
UFAL	–	Universidade Federal de Alagoas
UFF	–	Universidade Federal Fluminense
UFRJ	–	Universidade Federal do Rio de Janeiro
Unesco	–	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura
Unesp	–	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Unicamp	–	Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objeto de estudo desta pesquisa é o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), um programa de pós-graduação, que é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e fomentado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior. Seu público alvo são os professores que ministram a disciplina de Matemática na educação básica brasileira, especialmente nas redes públicas de ensino.

Esse programa tem como objetivos:

> 1. Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis; 2. Qualificar professores de Matemática que atuam na Educação Básica em nível de pós-graduação *stricto sensu*, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo, oferecendo um curso de formação profissional que contemple as necessidades advindas do trabalho cotidiano no espaço da escola; 3. Incentivar uma postura crítica acerca das aulas de Matemática nos níveis do Ensino Fundamental e Médio, que enfatize o papel central do conhecimento de matemática frente às exigências da sociedade moderna; 4. Buscar a valorização profissional do professor por meio do aprimoramento de sua formação. (CAPES, 2013, p. 01)

Além disso, segundo divulgação do site do PROFMAT[1], esse programa está em consonância com:

> A LEI Nº 13.005, DE 25 JUNHO DE 2014 (Plano Nacional de Educação), que coloca em sua Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos(as) os(as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino.

Na medida em que o PROFMAT é direcionado à formação [estritamente matemática] dos professores de Matemática que atuam na educação básica, possuindo amplitude nacional**,** este programa foi determinante para a instituição de uma política nacional de formação continuada de professores na modalidade de pós-graduação *stricto sensu*, financiado pelo governo federal, por intermédio da Capes, e fornece bolsa de estudos aos acadêmicos que dele participam. Esse programa de pós-graduação

---

[1] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/organizacao/apresentacao. Acesso em: 28 jul. 2014.

configura-se como uma ação governamental inédita que objetiva o fomento à formação de professores no Brasil.

O ineditismo deste programa perpassa inclusive seu formato de gestão e financiamento, conforme destacamos na sequência:

> A especificidade do Programa de Mestrado em Matemática em Rede exigiu da Capes investimentos diferenciados. Para viabilizar esses investimentos, a Capes firmou, a pedido da Sociedade Brasileira de Matemática, um convênio de cooperação com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por meio do qual foram repassados recursos destinados à manutenção do curso. O citado convênio teve como objetivo: “Concepção, Elaboração e Implantação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional” e importou inicialmente no valor de R$ 14.304.000,00 (quatorze milhões trezentos e quatro mil reais), sendo os recursos destinados a: concepção, elaboração e implantação do PROFMAT; obrigações tributárias e contributivas; serviços de terceiros e pessoa jurídica; material de consumo. Além disso, a Capes concedeu bolsas de estudo para alunos do curso. (CAPES, 2013, p. 10)

A empatia por este objeto de estudo surgiu, dentre outros fatores, de nossa persistente e não recente inquietação acadêmica sobre a possibilidade de entendimento das influências das ações governamentais no ensino da matemática, especialmente no que concerne às ações voltadas para a educação básica. Assim, considerando os fatores que elencamos até o momento sobre o PROFMAT, que aparentemente contribuirão direta ou indiretamente com a qualidade do ensino da matemática neste país, nos propusemos a estudar este Programa de Pós-Graduação em Matemática, buscando: *analisar o currículo do PROFMAT, um programa de formação continuada direcionado ao aprimoramento da formação matemática de professores que ministram essa disciplina na escola básica, a partir da perspectiva processual e descentralizadora de Sacristán (1998; 2013), adotando como referências pesquisas produzidas na área de Educação Matemática cujo objeto de estudo são os conhecimentos do professor que ensina Matemática.*

A partir deste objetivo, estruturamos esta tese em nove capítulos. No primeiro, intitulado “O PROFMAT”, exibimos uma breve apresentação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), com o objetivo de inteirar o leitor dos objetivos, especificidades e estrutura do referido programa de pós-graduação.

No segundo capítulo, cujo título é “A problemática da formação de professores de Matemática no Brasil e o surgimento do PROFMAT”, exibimos um panorama histórico da formação de professores, especialmente os de Matemática, no Brasil. Considerando que um marco importante neste panorama foi a criação das primeiras universidades em meados dos anos 1930, fixamos este marco como sendo o ponto de partida de nossa discussão. Finalizamos este texto temporalmente com o ano de 2014 e com a o advento da criação dos mestrados profissionais em rede destinados à formação continuada de professores.

O terceiro capítulo, intitulado “O conhecimento matemático do professor de Matemática”, apresenta uma revisão de pesquisas que contemplam a temática “Conhecimento Matemático do Professor de Matemática”. Esse texto é iniciado com a teorização proposta por Lee Shulman, na década de 80 do século XX, já que é uma das mais influentes e respeitadas teorias, em âmbito internacional, a respeito dos conhecimentos essenciais ao professor para o exercício da prática docente. Na sequência, apresentamos, considerando as datas de sua publicação, as pesquisas de Rainer Bromme, Deborah Ball, Jünger Baumert e José Carrillo, teorias que derivam da teorização de Shulman e destinam-se única e exclusivamente à formação de professores de Matemática. Posteriormente, apresentamos, também considerando as datas das publicações dos resultados, as teorizações propostas por Liping Ma e Plínio Moreira. O trabalho elaborado por Ma foi orientado (em nível de doutorado) por Shulman, enquanto que a teoria proposta por Moreira apresenta uma diferenciação entre a Matemática Escolar e a Matemática Científica como uma alternativa para a reflexão em torno dos saberes associados à prática docente. Finalizamos este capítulo apresentando nossas considerações a respeito das teorizações apresentadas e dos saberes associados à prática docente, nos atendo de modo particular à formação matemática do professor de Matemática.

No quarto capítulo, intitulado “A pesquisa: uma análise do currículo do PROFMAT a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora”, apresentamos o delineamento metodológico deste trabalho, discorrendo particularmente sobre os objetivos que orientaram esta pesquisa e a perspectiva teórica de Sacristán (1998; 2013), teoria que adotamos para fundamentar a discussão curricular realizada nesta tese.

O quinto capítulo, cujo título é “O currículo prescrito”, destina-se à discussão do Projeto Acadêmico do PROFMAT, por nós entendido como o *Currículo Prescrito* nos termos de Sacristán (1998; 2013). Na perspectiva processual e descentralizadora proposta por Sacristán, o currículo é visto como um processo que ocorre desde um plano – projeto – até sua conversão em práticas pedagógicas. O *currículo prescrito* é a primeira das fases desse processo de desenvolvimento curricular.

O capítulo "O currículo apresentado aos professores", o sexto no encadeamento da tese, é destinado ao estudo do currículo apresentado aos professores que ministram aula no PROFMAT, o que é feito por meio do estudo da ementa das disciplinas e sua respectiva bibliografia. Este estudo será restrito às disciplinas "Números e Funções Reais" e "Matemática Discreta" que compõem a grade do PROFMAT e contemplam as temáticas "Números Naturais" e "Números "Racionais". Além disso, analisamos as alterações que essas disciplinas sofreram da passagem do currículo prescrito para o currículo apresentado aos professores.

No sétimo capítulo, apresentamos "O currículo modelado pelos professores e o currículo em ação". O nosso objetivo com ele era, unicamente, entender se (e em que medida) o material bibliográfico referente a cada disciplina (livro-texto), a programação fixada pela Coordenação Acadêmica Nacional do PROFMAT e as avaliações produzidas por esta influenciaram na moldagem do currículo pelos professores das disciplinas "Matemática Discreta" e "Números e Funções Reais" ao abordarem os temas "Números Naturais" e "Números Racionais". Objetivamos também entender se a moldagem elaborada pelos professores do PROFMAT se altera no decorrer da implementação do currículo (*currículo em ação*), considerando que o PROFMAT se propõe a formar professores de Matemática contemplando as necessidades advindas do trabalho cotidiano destes profissionais.

O capítulo oitavo é intitulado como "O currículo realizado". Considerando que o PROFMAT se propõe a formar professores de Matemática contemplando as necessidades advindas do trabalho cotidiano dos professores, nos propusemos a analisar, nesse capítulo, os argumentos matemáticos adotados pelos estudantes do PROFMAT ao explicarem e abordarem, no contexto da sala de aula na educação básica, os conteúdos "operações com números naturais" e "operações com números fracionários".

No capítulo nono, apresentamos o "Currículo avaliado", no qual nos debruçamos sobre o estudo das avaliações realizadas no PROFMAT, no ano de 2014, referentes às disciplinas Números e Funções, Aritmética e Matemática Discreta. Nessa análise nos ateremos, particularmente, aos conteúdos "Números Naturais" e "Números Racionais".

Finalizamos este trabalho com a seção “Considerações Finais”, capítulo em que apresentamos nossas considerações sobre o Currículo do PROFMAT, a partir do entendimento dele como oriundo de processo descentralizador.

CAPÍTULO1: O PROFMAT

Neste capítulo, exibimos uma breve apresentação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Este capítulo possui o objetivo de inteirar o leitor sobre os objetivos, especificidades e estrutura do referido programa de pós-graduação, além disso, esta apresentação será *breve* porque os demais capítulos deste trabalho pormenorizarão esse curso de formação de professores de Matemática.

O "Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional" (PROFMAT[2]) é um programa de pós-graduação que concede aos egressos o título de Mestre em Matemática, em nível de Mestrado Profissional[3], coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e que está em andamento desde abril de 2011(SBM). No ano de 2013, o referido curso passou pela sua primeira avaliação trienal[4] – que foi realizada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior (Capes) – e obteve nota 5[5].

---

[2]Doravante o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional será identificado neste texto pela sigla PROFMAT, que é a mesma adotada pela Coordenação Nacional do referido programa de pós-graduação.

[3]O Mestrado Profissional é uma modalidade de Pós-Graduação *stricto sensu* voltada para a capacitação de profissionais, nas diversas áreas do conhecimento, mediante o estudo de técnicas, processos, ou temáticas que atendam a alguma demanda do mercado de trabalho. A estrutura curricular deve enfatizar a articulação entre conhecimento atualizado, domínio da metodologia pertinente e aplicação orientada para o campo de atuação profissional específico. Disponível em: http://www.capes.gov.br/avaliacao/sobre-a-avaliacao/mestrado-profissional-o-que-e. Acesso em: 19 jul. 2014.

[4]Os objetivos da Avaliação Trienal 2013 foram: 1) contribuir para a manutenção da qualidade de desempenho da pós-graduação brasileira: a) identificação dos programas de pós-graduação *stricto sensu* que, por atenderem o padrão mínimo de qualidade de desempenho exigido para cada nível de curso, tiveram a renovação de seu reconhecimento recomendada pela Capes; b) identificação dos programas de pós-graduação *stricto sensu* que, por não atenderem ao padrão mínimo de qualidade de desempenho, perderam sua condição de curso "recomendado" e integrante do Sistema Nacional de Pós-Graduação. 2) retratar a situação da pós-graduação brasileira no triênio de forma clara e efetiva, ao especificar: a) o grau diferencial de desenvolvimento alcançado pela pós-graduação nas diversas áreas; b) a hierarquia dos programas no âmbito de suas respectivas áreas, expressando as diferenças quanto à qualidade de desempenho que eles apresentaram no triênio; c) caracterização da situação específica de cada programa, mediante a apresentação de relatório detalhado sobre o desempenho do programa no triênio 2010-2012. 3) contribuir para o desenvolvimento de cada programa e área em particular e da pós-graduação brasileira em geral ao fornecer, a cada programa avaliado, as apreciações criteriosas sobre os pontos fortes e os pontos fracos de seu desempenho e antepor-lhes desafios e metas para o futuro. 4) fornecer subsídios para a definição de planos e políticas científico-acadêmicas de desenvolvimento e a realização de investimentos no Sistema Nacional de Pós-Graduação. Disponível em: http://www.avaliacaotrienal2013.capes.gov.br/home-page/objetivos. Acesso em: 15 jan. 2015.

[5]Os resultados da avaliação periódica dos Programas de Pós-graduação brasileiros são expressos em notas, que variam numa escala de 1 a 7, que são atribuídas após análise de indicadores referentes ao

Esse curso de Pós-Graduação em Matemática é voltado para a formação matemática de professores que lecionam, particularmente, nas redes públicas de ensino (educação básica) e, segundo o Regulamento do PROFMAT, “[...] tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática” (SBM, s.d., p.1).

Segundo os autores do “Projeto do PROFMAT”[6], o curso proposto visa contribuir para uma qualificação ampla do ensino de matemática na escola básica, indo desde um aprimoramento no processo de formação continuada de professores até mudanças efetivas da prática em sala de aula. Essa ação objetiva promover a construção de competências matemáticas no ensino básico por meio de um processo de ensino e aprendizado significativo, inserido de forma consistente em uma educação universal de qualidade.

> A meta é oferecer um curso de formação profissional alicerçado em sólida formação em Matemática, que contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional. (CAPES, 2010, p. 9)

Assim, esse Curso procura contemplar:

> a) a busca de uma formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica;
> b) a afirmação do compromisso permanente com a qualidade do ensino e da aprendizagem na área de Matemática;
> c) uma postura crítica acerca do trabalho nas aulas de Matemática nos níveis fundamental e médio;
> d) o papel central da competência matemática frente às exigências da sociedade moderna;
> e) a valorização profissional do professor através do aprimoramento de sua formação. (CAPES, 2010, p. 9)

Para atingir os objetivos aos quais se propõe, esse Mestrado Profissional em Matemática busca uma prática que está alicerçada nas seguintes diretrizes:

---

período avaliado. De acordo com o sistema, as notas 1 e 2 descredenciam o programa, a nota 3 significa desempenho regular, (que atende aos padrões mínimos de qualidade), as notas 4 e 5 significam um desempenho entre bom e muito bom, sendo 5 a nota máxima para os programas só com mestrado, enquanto as notas 6 e 7 são reservadas exclusivamente para os programas com doutorado.

[6]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/docs/OficioCTC.pdf. Acesso em: 20 ago. 2012.

> a) executar um processo de formação complementar em matemática, baseado nos conteúdos curriculares do ensino básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da matemática;
> b) promover uma articulação eficaz entre conhecimentos e práticas das ciências matemáticas e do ensino básico, direcionada aos objetivos da educação básica;
> c) estimular e promover a independência do professor cursista, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional de forma autônoma e permanente;
> d) incentivar a pesquisa e produção de materiais e práticas pedagógicas diferenciadas para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, *software*, simulações, ambientes de aprendizagem, aulas inovadoras, etc.).
> Em relação ao perfil do profissional a ser formado, espera-se que tais profissionais, que lecionam Matemática no Ensino Básico, tenham pleno domínio da matéria que ensinam, inclusive das suas aplicações mais imediatas, bem como uma noção da evolução histórica dos principais temas que constam do currículo escolar. (CAPES, 2010, p. 9)

Nesse programa de pós-graduação, 80% das vagas são destinadas aos professores das redes públicas da educação básica e 20% são destinadas à demanda social. Todos os acadêmicos do PROFMAT que comprovarem vínculo empregatício com instituições de ensino públicas que são destinadas à educação básica são contemplados com bolsas de estudo provenientes da Capes.

O PROFMAT é um curso semipresencial com oferta nacional e no ano de 2015 disponibilizou um total de 1.575 vagas, que estavam disseminadas em 60 Instituições de Ensino Superior (intituladas “instituições associadas”), distribuídas em 27 unidades da federação.

Apesar de o PROFMAT ser desenvolvido por 60 instituições de ensino superior, as principais atividades desenvolvidas por esse curso são gestadas pela SBM, por meio da seguinte hierarquia: Conselho Gestor (conselho deliberativo), Comissão Acadêmica Nacional (comissão executiva) e pelas Comissões Acadêmicas Institucionais. O Conselho Gestor, de acordo com o regimento do PROFMAT, possui, dentre outras atribuições, as de: a) coordenar a organização de todas as ações e atividades do PROFMAT, visando sua excelência acadêmica e administrativa; b) credenciar e descredenciar Instituições Associadas; c) organizar os processos formais de admissão de discentes e de produção do material didático (SBM, 2014).

A Comissão Acadêmica Nacional possui, dentre outras atribuições, as de: a) responsabilizar-se pela boa execução das atividades de ensino e pesquisa no âmbito do

PROFMAT; b) elaborar e atualizar as Normas Acadêmicas, a Matriz Curricular, o Catálogo de Disciplinas e as respectivas ementas; c) coordenar a elaboração e aplicação dos Exames Nacionais de Acesso e dos Exames de Qualificação, bem como a elaboração das provas nacionais das Disciplinas Básicas do PROFMAT; d) coordenar a elaboração do material didático nacional e a criação e utilização de ferramentas informáticas para ensino e comunicação a distância; e) elaborar o calendário anual e a programação acadêmica das disciplinas; f) credenciar e descredenciar os membros do corpo docente do PROFMAT nas Instituições Associadas, mediante proposta da respectiva Comissão Acadêmica Institucional (SBM, 2014).

A Comissão Acadêmica institucional é responsável, dentre outras atribuições, por: a) coordenar a organização e execução de todas as ações e atividades do PROFMAT na Instituição Associada; b) representar, na pessoa do Coordenador Acadêmico Institucional, o PROFMAT junto aos órgãos da Instituição Associada; c) propor o credenciamento e descredenciamento de membros do corpo docente do PROFMAT em sua Instituição Associada; d) coordenar a aplicação na Instituição Associada dos Exames Nacionais de Acesso e das provas e outros instrumentos de avaliação dos discentes; e) definir, a cada período, a programação acadêmica e a distribuição de carga didática entre os membros do corpo docente na Instituição Associada (SBM, 2014).

Esse programa de pós-graduação é ofertado nacionalmente por meio de uma única matriz curricular (inclusive ementário e bibliografias) que foi elaborada para ser implementada no período de dois anos, ou seja, a referida matriz curricular é igualmente desenvolvida por todas as instituições de ensino associadas no período de dois anos letivos.A cada ano letivo, as disciplinas ofertadas são distribuídas em três períodos letivos: semestre 1 (desenvolvido no período de março a junho), semestre 2 (desenvolvido no período de agosto a novembro) e período de Verão (desenvolvido no período de janeiro e fevereiro).

A matriz curricular é composta por nove disciplinas, sete obrigatórias e duas eletivas, que são distribuídas no decorrer de quatro semestre letivos – duas disciplinas por semestre – e uma no período de “verão”. As disciplinas obrigatórias são: Números e Funções Reais; Matemática Discreta; Geometria; Aritmética; Resolução de Problemas; Fundamentos de Cálculo; Geometria Analítica. As quatro primeiras relacionadas são intituladas “disciplinas básicas” e são ministradas nos dois primeiros semestres letivos do curso.

As “disciplinas eletivas” são: Tópicos de História da Matemática; Introdução à Álgebra Linear; Matemática e Atualidade; Modelagem Matemática; Geometria Espacial; Probabilidade e Estatística; Cálculo Numérico; Tópicos de Teoria dos Números; Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral; Recursos Computacionais no Ensino de Matemática; Polinômios e Equações Algébricas; Tópicos de Matemática; Avaliação Educacional. As disciplinas eletivas a serem ofertadas em cada instituição associada, diferentemente do que ocorre com as obrigatórias que são fixadas pela Comissão Acadêmica Nacional, são definidas pela Comissão Acadêmica institucional a partir do rol de disciplinas discriminado acima.

Além da aprovação nas disciplinas, são pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre pelo PROFMAT: a aprovação no Exame de Qualificação e a aprovação no Trabalho de Conclusão de Curso. O Exame de Qualificação é uma avaliação escrita, elaborada pela Comissão Acadêmica Nacional, que versa sobre os conteúdos contemplados pelas “disciplinas básicas” e que é aplicado duas vezes ao ano, contudo cada estudante pode realizar o referido exame apenas duas vezes no decorrer do curso.

CAPÍTULO 2: A PROBLEMÁTICA DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO BRASIL E O SURGIMENTO DO PROFMAT

Neste capítulo apresentamos um panorama histórico da formação de professores, especialmente de professores de Matemática, no Brasil. Um marco importante neste panorama foi a criação das Instituições de Ensino Superior em meados dos anos 1930, assim, fixamos este marco como sendo o ponto de partida de nossa discussão. Finalizamos este texto temporalmente com o ano de 2014 com a criação dos mestrados profissionais destinados à formação continuada de professores.

INTRODUÇÃO

A formação de professores de Matemática, tanto a inicial quando a continuada, configura-se como um espaço de atuação e influência de diversos estamentos, que, por sua vez, possuem motivações de ordens diversas (sociais, políticas, econômicas, etc.). A complexidade desse cenário confere à formação de professores o *status* de problemática.

Sem ignorar a importância das demais dimensões dessa problemática, como a política de salários, as condições de trabalho, a organização do processo de trabalho na escola, entre outras (SOARES; FERREIRA e MOREIRA, 1997, RUIZ; RAMOS e HINGEL, 2007), que interferem na qualidade do ensino da Matemática, nem tampouco desconsiderar a interdependência das dimensões da problemática da formação docente em Matemática, ao tratar de nosso objeto de estudo, o PROFMAT, daremos especial atenção para a complexa dimensão que se refere à delimitação e implementação de programas/projetos de formação que correspondessem/correspondam às demandas provenientes dos distintos setores afetados (BLANCO, 2003; D'AMBRÓSIO, 2005).

A problemática da formação de professores de Matemática da escola básica, especificamente, a delimitação/definição de programas/projetos de formação, relaciona-se, especialmente, a três aspectos: a) a definição do formato dos cursos de formação inicial e continuada de professores de matemática, especialmente a carga horária e os conhecimentos a serem contemplados nos referidos cursos; b) a *articulação* entre a formação acadêmica proporcionada pelas instituições/órgãos formadores e a realidade da prática do professor de Matemática na escola. Ao adotarmos o termo *articulação*, apropriamo-nos da proposição feita por Moreira e David (2010, p. 101) ao discorrerem que "[...] a formação sempre se articula com a prática e, no limite, até mesmo uma imensa lacuna entre os dois processos pode ser vista como uma forma de articulação"; c) delimitação/definição do lugar da(s) matemática(s) nas formações inicial (Licenciatura em Matemática) e continuada(s) de professores que ensinam Matemática na escola básica. Ao adotarmos o termo *matemáticas* aproximamo-nos da teorização proposta por Fiorentini e Oliveira (2013, p. 919) ao questionarem: "de que matemática estamos falando, quando dizemos que o professor de matemática precisa saber bem matemática para ensiná-la?". Ou seja, estamos falando da matemática clássica, "em sua tradição platônica e euclidiana e, às vezes, formalista estrutural" (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 920) ou de "uma matemática que nunca aparece hermética e isolada em relação a outros saberes e campos disciplinares" (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 922)? Ou estamos falando de ambas? Nessa perspectiva, "[...] não faz sentido falar de *uma* Matemática (com letra maiúscula), mas de matemática com (letra minúscula) ou então de *matemáticas*, pois são múltiplas, dependendo do contexto de prática social [...]" (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 922, grifo dos autores).

Os aspectos a, b e c mencionados no parágrafo anterior relacionam-se fortemente entre si, porém essa relação somente se torna evidente na medida em que são elucidadas as especificidades e objetivos da *profissão professor de Matemática* e os objetivos da formação desse profissional. Essa relação é expressa por Fiorentini e Oliveira (2013) ao discorrerem sobre "lugar da matemática na Licenciatura em Matemática":

> Para pensar e discutir o lugar da matemática nos cursos de licenciatura, ou melhor, das matemáticas na formação inicial do professor de matemática, podemos, primeiramente, analisar o papel social da licenciatura na formação do professor. De modo semelhante ao que acontece com os cursos de medicina, de odontologia, de engenharia etc, a licenciatura também é um curso profissionalizante. Assim, a licenciatura em matemática visa formar o profissional da educação matemática. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 919 - 920)

Nesta conjuntura, os processos de reflexão, idealização, implementação e execução de formações – tanto iniciais, quanto continuadas – de professores de

Matemática – que atuam na educação básica – suscitam o entendimento deste sujeito como um profissional cuja prática é o ensino da matemática na escola, um local onde a prática pedagógica necessita ser entendida como prática social (SOARES; FERREIRA e MOREIRA, 1997), que é "[...] constituída de saberes e relações complexas que necessitam ser estudadas, analisadas, problematizadas, compreendidas e continuamente transformadas" (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 919 - 920).

A complexidade da problemática da formação de professores de Matemática que atuam na educação básica, conforme elencamos nos itens a, b e c que apresentamos anteriormente, cristalizam-se, sobretudo, em programas/projetos/cursos de formação de professores de Matemática implementados no Brasil, conforme abordaremos doravante.

2.1 AS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA, AS INTERVENÇÕES GOVERNAMENTAIS E AS CONSEQUÊNCIAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA.

Ao retrocedermos à década de 30 do século passado, ao processo da implementação das primeiras universidades brasileiras (a Universidade de São Paulo, na cidade de São Paulo, e a Universidade do Distrito Federal, no Rio de Janeiro, em 1934 e 1935, respectivamente), remontamos também à criação das Licenciaturas em Matemática (PAVANELLO, 1989). A Licenciatura em Matemática, "curso que forma e licencia para o exercício da docência", ofertava, basicamente, conhecimentos relativos aos conteúdos específicos (de matemática) e conhecimentos da área de educação (MOREIRA; FERREIRA, 2013, p. 983). Esse modelo de programa de formação ficou conhecido como "3+1" ou "bacharelado + didática" (MOREIRA, 2004, p. 2) porque seguia o formato "[...] em que as disciplinas de natureza pedagógica, cuja duração prevista era de *um* ano, estavam justapostas às disciplinas de conteúdo, com duração de *três* anos" sem haver um mínimo de articulação entre esses dois universos (DINIZ-PEREIRA, 2000, p. 54, grifo do autor).

Apesar de as licenciaturas datarem da década de 30, é somente a partir da promulgação da Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, que esse nível de formação é instituído para os professores dos anos finais do ensino fundamental e médio[7], por meio das Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras. Ainda no tocante a essa lei, destacamos

[7]Os atuais *anos finais do Ensino Fundamental* (6º ao 9º ano) e *Ensino Médio*, no contexto da Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, compunham a educação de grau médio, que subdividia-se em dois ciclos: o ginasial e o colegial.

a restrição da atuação de professores(as) normalistas[8], que a partir desse momento passaram a ministrar aula somente nos anos iniciais do ensino fundamental.

Ainda nesse período, de acordo com Nascimento (2012, p. 340), “os índices de escolaridade [...] haviam crescido significativamente, mas sem uma política de formação de professores que correspondesse às novas necessidades da escola brasileira” e, a partir da constatação do déficit de profissionais qualificados gerado por esse contexto, inicia-se um processo de “improvisação de professores em detrimento dos padrões de ensino”, uma vez que as instituições de formação em nível superior não davam conta de formar professores em número suficiente para suprir as necessidades dos níveis básicos de ensino. E é nessa conjuntura que a licenciatura curta é criada, em “caráter experimental e emergencial” (NASCIMENTO, 2012, p. 341).

No tocante ao ensino da matemática no ciclo ginasial[9], o professor responsável por essa atividade possuía a formação polivalente intitulada Licenciatura em Ciências, que habilitava para “[...] o ensino de Ciências Físico-Biológicas, Iniciação às Ciências e Matemática” (NASCIMENTO, 2012, p. 342). Ainda segundo Nascimento (2012, p. 341), “a perspectiva era a do mínimo por menos, isto é, o mínimo de qualificação necessária ao exercício da atividade docente pelo menor custo e tempo possíveis. Nesta perspectiva mais valeria uma formação aligeirada do que formação alguma”.

Em 1971, durante a vigência do Regime Militar, é promulgada a Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, que deu origem ao ensino de 1º e 2º graus[10] e previa por meio do Art. 30 que:

> Art. 30. Exigir-se-á como formação mínima para o exercício do magistério:
> a) no ensino de 1º grau, da 1ª à 4ª séries, habilitação específica de 2º grau;
> b) no ensino de 1º grau, da 1ª à 8ª séries, habilitação específica de grau superior, ao nível de graduação, representada por licenciatura de 1º grau obtida em curso de curta duração;
> c) em todo o ensino de 1º e 2º graus, habilitação específica obtida em curso superior de graduação correspondente a licenciatura plena. (BRASIL, 1971)

---

[8]Os(as) professores(as) normalistas, de acordo com a Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, eram originários do *ensino normal* que tinha por fim a formação de professores, orientadores, supervisores e administradores escolares destinados ao ensino primário, e o desenvolvimento dos conhecimentos técnicos relativos à educação da infância. Sendo o *ensino primário* equivalente, atualmente, aos *anos iniciais do ensino fundamental* (1º ao 5º ano).

[9] O ciclo ginasial corresponde atualmente (2015) aos anos finais do ensino fundamental.

[10] O Ensino de 1º e 2º graus que foram instituídos pela Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, correspondem, atual e respectivamente, aos ensino fundamental e ensino médio.

A partir desse momento institui-se, por meio de legislação, duas modalidades de Licenciaturas, a de curta duração e a plena, sendo a primeira, no caso do ensino da matemática, de caráter polivalente, intitulada *Licenciatura em Ciências* e destinada à habilitação de professores para ministrarem aulas de biologia, matemática, química e física, enquanto a segunda era destinada à formação específica, no caso do ensino da matemática, intitulada como *Licenciatura em Matemática*. No contexto educacional, especialmente em relação à educação superior, a década de 70 destaca-se pelo forte impulso expansionista que se empreendeu nesse nível de ensino e da consequente expansão do sistema privado de ensino superior (MARTINS, 2000).

Em termos de organização do sistema educacional brasileiro, a Lei nº 5.692/71 substitui os Ensino Primário e Secundário (Ensino Ginasial e Colegial), pelos ensinos de 1º Grau (fusão do Ensino Primário e o Ensino Ginasial) e de 2º Grau (correspondente ao Ensino Colegial), além de abolir o exame de admissão para o acesso ao ensino secundário. O aumento das vagas na escola básica, previsto pela Lei nº 5.692/71, não garantiu efetivamente a democratização, porque ele não foi acompanhado pela provisão de espaços físicos e por um aumento do corpo docente qualificado proporcional à demanda, uma situação que ainda permanece em nossos dias, mesmo nas regiões mais desenvolvidas do país.

Ainda no tocante à educação em nível básico (ensinos fundamental e médio), as décadas de 70 e 80 caracterizam-se pela luta em defesa da democracia, tanto em termos de gestão escolar quanto do direito de acesso à educação. Essa luta no campo educacional era reflexo do movimento em busca da implementação da democracia no Brasil, que naquele momento encontrava-se em meio à ditadura militar, a qual cessou somente em 1985.

No ano de 1988, foi sancionada a Constituição da República Federativa do Brasil – 1988 que restaura juridicamente a democracia no país, cujo artigo 1º é assim redigido:

> Art. 1°A República Federativa do Brasil, formada pela união indissolúvel dos Estados e Municípios e do Distrito Federal, constitui-se em Estado Democrático de Direito e tem como fundamentos:
> I – a soberania;
> II – a cidadania;
> III – a dignidade da pessoa humana;
> IV – os valores sociais do trabalho e da livre iniciativa;
> V – o pluralismo político.
> *Parágrafo único*. Todo o poder emana do povo, que o exerce por meio de representantes eleitos diretamente, nos termos da constituição. (BRASIL, 1988, p. 3)

No tocante à educação, o Art. 205 menciona que “a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1988, p. 13). Um dos maiores legados da Constituição da República Federativa do Brasil, em 1988, para a educação básica, é a democratização do acesso ao ensino mas, novamente, o aumento das vagas na escola básica não garantiu efetivamente a democratização, porque ele não foi acompanhado pela provisão de espaço físico e por um aumento do corpo docente qualificado proporcional à demanda.

Especificamente em relação às Licenciaturas, na década de 80 inicia-se um movimento de inserção de disciplinas integradoras entre as disciplinas de conteúdo e as pedagógicas, que são disciplinas que fazem a “transposição do conhecimento da área” (no caso da Licenciatura em Matemática, a transposição da matemática) para o ensino fundamental e ensino médio: prática de ensino, instrumentação para o ensino, didática especial, etc. (DINIZ-PEREIRA, 2000, p. 71). Apesar desse movimento de inserção, a desarticulação entre a teoria e a prática veiculadas pelas Instituições de Ensino Superior – por meio das Licenciaturas em Matemática – e a prática do professor de Matemática da educação básica continua latente no processo de formação inicial do professor de Matemática, cabendo ao estágio o papel de protagonista e principal articulador entre a teoria vista na universidade e a prática do professor na escola básica.

Em 1996, com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996) e a revogação da Lei nº 5.540/68, os “currículos mínimos” para a formação de professores são extintos e as universidades passam a ter maior autonomia na delimitação dos currículos voltados para a formação de professores. Todavia, essa autonomia não é plena, uma vez que o governo federal exerce controle por meio da avaliação dos cursos e da fixação de diretrizes gerais, conforme evidencia o inciso II do Art. 53º da Lei nº 9.394/96, ao discorrer que é assegurada às universidades a seguinte atribuição: “fixar os currículos dos seus cursos e programas, observadas as diretrizes gerais pertinentes” (BRASIL, 1996).

No tocante à formação docente, essa lei, por meio do Artigo 62, dispõe que,

> Art. 62. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil

> e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade Normal. (BRASIL, 1996, s.p.)

Por meio do **§** 4º do Art. 87, a supracitada lei prevê que "Até o fim da Década da Educação somente serão admitidos professores habilitados em nível superior ou formados por treinamento em serviço" (BRASIL, 1996, s.p.). E a cristalização dessa lei se dá no Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2001) ao fixar o ano de 2007 como o prazo máximo para os professores do ensino básico concluírem sua formação em nível superior, ação essa, de acordo com Fiorentini (2008, p. 46), que causou "[...] maior impacto sobre a formação do professor[...]" porque mediante a "[...] demanda de 1,6 milhões de professores brasileiros em exercício sem essa titulação, surge a necessidade de aumento da oferta de oportunidades ou centros de formação", e como o Estado não deu conta de suprir a referida demanda, em todos os Estados brasileiros, surgiram novas instituições formadoras de professores, sem história e sem a pesquisa e a investigação do campo educacional como base da formação (FIORENTINI, 2008).

Ainda buscando sanar o déficit de professores para a educação em nível básico que o Brasil apresentava, no ano de 1997 o Conselho Nacional de Educação publica a Resolução nº 2/1997, que dispõe sobre os "programas especiais de formação pedagógica de docentes para as disciplinas do currículo do ensino fundamental, do ensino médio e da educação profissional em nível médio". Esta proposta prevê que portadores de diplomas de nível superior "em cursos relacionados à habilitação pretendida, que ofereçam sólida base de conhecimentos na área de estudos ligada a essa habilitação", a partir da participação em um curso de 540 horas[11], incluindo a parte teórica e prática - esta última com duração mínima de 300 horas -, estará habilitado a ministrar aula na educação básica. A publicação dessa resolução contribuiu para o processo de inserção de profissionais na escola com formação questionável, dado que graduados em diversas áreas (em Administração, Contabilidade, Engenharia, etc.), após serem aprovados em *cursos de complementação pedagógica* por meio dos "programas especiais de formação

---

[11]Essas 540 horas devem respeitar uma estruturação curricular articulada nos seguintes núcleos: a) Núcleo Contextual, visando à compreensão do processo de ensino-aprendizagem referido à prática da escola, considerando tanto as relações que se passam no seu interior, com seus participantes, quanto as suas relações, como instituição, com o contexto imediato e o contexto geral onde está inserida; b) Núcleo Estrutural, abordando conteúdos curriculares, sua organização sequencial, avaliação e integração com outras disciplinas, os métodos adequados ao desenvolvimento do conhecimento em pauta, bem como sua adequação ao processo de ensino-aprendizagem; c) Núcleo Integrador, centrado nos problemas concretos enfrentados pelos alunos na prática de ensino, com vistas ao planejamento e reorganização do trabalho escolar, discutidos a partir de diferentes perspectivas teóricas, por meio de projetos multidisciplinares, com a participação articulada dos professores das várias disciplinas do curso (BRASIL, 1997).

pedagógica de docentes", recebem a titulação de professores de Matemática e podem lecionar essa disciplina nas escolas brasileiras (BRASIL, 1997).

A partir desse momento, as políticas neoliberais adotam o conceito de professor como prático-reflexivo e a pedagogia das competências como norteadores da formação docente na tentativa de justificar a preferência por "formadores práticos" que são "professores escolares com larga experiência na educação básica, mas com pouca formação teórica e científica" (FIORENTINI, 2008, p.47). E as principais fomentadoras dessa política foram as instituições formadoras de professores da esfera administrativa privada. Entretanto, as instituições que tomam a si esta tarefa, de acordo com Fiorentini (2008),

> [...] não são aquelas universidades que tradicionalmente desenvolvem pesquisas e contribuem com a produção de conhecimentos para o campo da Educação Matemática. Seu corpo docente geralmente não tem mestrado ou doutorado. São geralmente *formadores práticos*, de baixo custo, e que podem dedicar-se exclusivamente à docência, sem a exigência de realizar pesquisa. (FIORENTINI, 2008, p. 47, grifo do autor).

A formação inicial de professores de Matemática para a educação básica é regulamentada pelas "Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena" (Resolução CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002), pela Resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002, que instituía duração e carga horária dos cursos de licenciatura, e pelas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Esses documentos, elaborados pelo Ministério da Educação (MEC) e analisados pelo Conselho Nacional de Educação[12], são utilizados como parâmetro pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)[13] nos processos

---

[12]O Conselho Nacional de Educação é um órgão colegiado integrante do Ministério da Educação, que foi instituído pela Lei nº 9.131, de 25 de novembro de 1995, com a finalidade de colaborar na formulação da Política Nacional de Educação e exercer atribuições normativas, deliberativas e de assessoramento ao Ministro da Educação. As atribuições do Conselho são normativas, deliberativas e de assessoramento ao Ministro de Estado da Educação, no desempenho das funções e atribuições do poder público federal em matéria de educação, cabendo-lhe formular e avaliar a política nacional de educação, zelar pela qualidade do ensino, velar pelo cumprimento da legislação educacional e assegurar a participação da sociedade no aprimoramento da educação brasileira. Fonte: site do Ministério da Educação. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=14306%3Acne-historico&catid=323%3Aorgaos-vinculados&Itemid=754. Acesso em 25 out. 2014.

[13]Órgão vinculado ao Ministério da Educação cuja missão institucional é subsidiar o processo decisório das políticas educacionais. Para isso, produz e dissemina informações, bem como estudos e trabalhos relevantes para a comunidade educacional. No tocante ao Ensino Superior, este órgão é responsável pela avaliação dos cursos ofertados neste nível de ensino. Fonte: site do Inep. Disponível em: http://www.publicacoes.inep.gov.br/. Acesso em: 25 out. 2014.

de avaliação dos cursos de Licenciatura em Matemática. Abordaremos, na sequência, as "Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura".

2.2 AS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS PARA OS CURSOS DE MATEMÁTICA, BACHARELADO E LICENCIATURA

No tocante às Resoluções CNE/CP 1 e 2 de 2002, destacamos a fixação da carga horária total dos cursos de licenciatura em 2.800 horas (desmembradas em: 400 horas de estágio curricular supervisionado, 400 horas de prática como componente curricular, 1.800 horas de aulas para os conteúdos curriculares de natureza científico-cultural e 200 horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais) a serem integralizadas em, no mínimo, três anos letivos (BRASIL, 2002 b).

Essa brecha deixada pela legislação vigente em relação ao tempo mínimo de três anos letivos para a integralização da carga horária total das licenciaturas é mais um dos agravantes da problemática da formação do professor de Matemática, uma vez que essa carga horária é insuficiente em relação às especificidades inerentes ao processo de formação do professor de Matemática (GARNICA, 2006; FIORENTINI, 2008; OLIVEIRA, 2009). Neste contexto, "[...] o curso de formação deveria ter, ao invés de três anos como vem ocorrendo atualmente, uma duração de no mínimo cinco anos" (FIORENTINI, 2008).

> Devido à concorrência dessas instituições que oferecem cursos aligeirados de licenciatura e de baixo custo, muitas das instituições com tradição em ensino e pesquisa no campo da Educação Matemática se viram obrigadas a suspender a oferta de licenciatura em matemática. Essa situação torna-se ainda mais crítica se considerarmos que são geralmente os alunos desses cursos que recebem apoio do Governo Federal, através das bolsas de estudo *Prouni*[14].(FIORENTINI, 2008, p. 48)

O documento "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura" é o instrumento regulador e delineador dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática ofertados no Brasil, e simultaneamente faz proposições (uma parte considerável dessas proposições são comuns ao licenciado em

---

[14]De acordo com o site do PROUNI, ele é um programa do Ministério da Educação brasileiro que concede bolsas de estudo integrais e parciais (de 50%) em instituições privadas de educação superior, em cursos de graduação e sequenciais de formação específica, a estudantes brasileiros sem diploma de nível superior. Disponível em: http://siteprouni.mec.gov.br/. Acesso em: 24 nov. 2014.

Matemática e ao bacharel em Matemática) em relação ao perfil e à forma de se desenvolver esse perfil tanto para o professor de Matemática da escola em nível básico quanto para o pesquisador em Matemática e professor de ensino superior.

O texto das "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura", partindo da perspectiva teórica do desenvolvimento de "competências profissionais", propõe que o Projeto Pedagógico de formação profissional a ser formulado pelos Cursos de Matemática (para ambas as habilitações, licenciado e bacharel) deve explicitar: a) o perfil dos formandos; b) as competências e habilidades de caráter geral e comum e aquelas de caráter específico; c) os conteúdos curriculares de formação geral e os conteúdos de formação específica; d) o formato dos estágios; e) as características das atividades complementares; f) a estrutura do curso; g) as formas de avaliação.

Para o perfil do Licenciado em Matemática, segundo o texto das "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura", desejam-se as seguintes características:

> a) visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades **com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos**; b) visão da **contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania**; c) visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina. (BRASIL, 2001, p. 3, grifos da autora)

No tocante ao campo "Competências e Habilidades", de acordo com as "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura", "os currículos dos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades": a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; b) capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares; c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas; d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento; e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; g) conhecimento de questões contemporâneas; h) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social; i) participar de programas de formação continuada; j) realizar estudos de pós-graduação; k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber (BRASIL, 2001, p. 3).

Em relação às competências e habilidades específicas do educador matemático, o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de: a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica; b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos; c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica; d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente; f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica (BRASIL, 2001).

As características do perfil idealizado para o Licenciado em Matemática e as "Competências e Habilidades" a serem desenvolvidos nestes sujeitos, propostas pelas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura", evidencia a tentativa de superação do modelo "bacharelado + didática", uma vez que essas proposições contemplam distintas dimensões da atividade do docente de Matemática na escola, especialmente se considerarmos teorizações da área formação de professores que são reconhecidas internacionalmente, como as teorias de Shulman (1987), Day (1999), Perrenoud (2000), Schön (1997, 2000) e Tardif (2002).

No tocante aos conteúdos **"comuns a todos os cursos de Licenciatura"** (BRASIL, 2001, p. 6, grifo do texto original), o supracitado documento prescreve os seguintes conteúdos: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. De acordo com o formato adotado pelas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura", esses conteúdos são apresentados como *protagonistas* da formação profissional do professor de Matemática, apesar de o documento não os articular com as "competências e habilidades" e o "perfil" esperado para o Licenciado em Matemática, ou seja, o documento não explicita, por exemplo, de que forma o conhecimento dos Fundamentos de Análise favorecerá/auxiliará o professor de Matemática em seu entendimento de que "a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania" (BRASIL, 2001, p. 3). Essa falta de articulação é perigosa, uma vez que não vincula os *fins* (o perfil do formando e as competências e habilidade a serem adquiridas pelo licenciado) aos *meios* (os conteúdos) do processo de formação, deixando a cargo do professor que ministra aula na licenciatura (formador) o estabelecimento dessas relações, o que em geral não ocorre.

Ainda em relação ao arcabouço formativo idealizado pelas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura" para o professor de Matemática da escola básica (produto da Licenciatura em Matemática) e para o professor de ensino superior/pesquisador de Matemática (produto do Bacharelado em Matemática) identifica-se uma similaridade grande entre os conteúdos matemáticos a serem trabalhados em ambos os processos formativos, já que os conteúdos considerados **"comuns a todos os cursos de Bacharelado"** (BRASIL, 2001, p.5, grifo do texto original) são: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Topologia, Análise Matemática, Álgebra, Análise Complexa e Geometria Diferencial.

Um dos principais problemas com a estrutura prescrita por essas Diretrizes é que

> O modelo original das licenciaturas, seguindo a "fórmula 3+1", ainda não foi totalmente superado pela maior parte das universidades brasileiras, uma vez que as disciplinas de conteúdo, de responsabilidade das unidades básicas, continuam precedendo e pouco articulando-se com as pedagógicas, que geralmente ficam a cargo apenas das faculdades ou dos centros de educação. (DINIZ-PEREIRA, 2000, p.75)

Apesar da fala de Diniz-Pereira ser datada do ano 2000, essa crítica tem sido expandida, periodicamente, para o curso de Licenciatura em Matemática por diversos autores ao discorrem sobre a estrutura das licenciaturas em Matemática e a dicotomia entre os conhecimentos valorizados e lecionados nesses cursos e aqueles que são mobilizados e elaborados na prática pedagógica escolar (Soares, Ferreira e Moreira (1997), Dias (2002), Ferreira (2003), Fiorentini e Castro (2003), Moreira (2004; 2012), Moreira, Cury e Vianna (2005), Fiorentini (2005; 2008), Zaidan (2009), Moreira e David (2010), Fiorentini e Oliveira (2013), Moreira e Ferreira (2013), Vilela (2013)). Isto porque

> [...] a profissão do professor de matemática da escola básica não se identifica, nem mesmo parcialmente, com a profissão do matemático. Os saberes profissionais, as condições de trabalho, as necessidades relativas à qualificação profissional, os resultados do trabalho

> profissional, tudo concorre muito mais para diferenciar do que para identificar as duas profissões. Por que, então — a nosso ver essa seria uma questão a ser aprofundada numa eventual sequência do debate —, a formação matemática do professor da escola básica deveria se constituir a partir de valores, concepções e práticas específicas de uma "cultura matemática" a qual se tem relacionado historicamente com as práticas, valores e concepções da cultura escolar quase sempre através da emissão de prescrições? (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 31)

Nessa conjuntura, Diniz-Pereira (2000, p. 63) reforça "[...] a necessidade de mudança na prática pedagógica dos professores das licenciaturas e na orientação de suas disciplinas, consideradas muito teóricas e desarticuladas da realidade profissional dos futuros professores". Na mesma linha de Diniz-Pereira, Fiorentini e Castro (2003), ao analisarem a trajetória formativa de um licenciando em Matemática, discorrem que o profissional formado na Licenciatura em Matemática é um

> [...] "bacharel disfarçado ou perdido em seus objetivos". Ou seja, a licenciatura preocupa-se muito mais em formar um profissional que tenha domínio *operacional* e *procedimental* da matemática do que um profissional que fale sobre matemática, que saiba explorar suas ideias de múltiplas formas, tendo em vista a formação humana. (FIORENTINI; CASTRO, 2003, p. 137, grifo dos autores)

Em relação aos conteúdos a serem abarcados pelas Licenciaturas em Matemática, esse documento regulador discorre também que "a parte comum deve ainda incluir" (BRASIL, 2001, p. 6):

> a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise;
> b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;
> c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (BRASIL, 2001, p. 6)

O formato adotado pelas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura" na prescrição dos conteúdos, classificando os conteúdos entre *conteúdos matemáticos* (Álgebra, Geometria e Análise) e *conteúdos matemáticos presentes na educação básica* (Álgebra, Geometria e Análise) demonstra a *distinção* entre as matemáticas presentes na formação do professor de Matemática, além da sobreposição da *matemática acadêmica* em relação à *matemática presente na escola*. Essa distinção feita pelo documento regulador/regulamentador dos *currículos* da formação inicial de professores da escola em nível básico corrobora uma das principais (se não a principal) fragilidades do processo de delimitação/definição dos saberes que compõem a formação profissional do professor de Matemática, que é o entendimento do *lugar da(s) matemática(s) na licenciatura em Matemática* (FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013; MOREIRA e FERREIRA, 2013).

As "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura" incluem no conjunto dos "conteúdos profissionais" "os conteúdos da educação básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio" (BRASIL, 2001, p. 6).

No tocante às recomendações das "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura" destaca-se ser o estágio o principal instrumento de *articulação* entre a formação acadêmica proporcionada pela Licenciatura em Matemática e a prática do professor de Matemática da educação básica, uma vez que a ele é destinada a função de desenvolver: "a) uma sequência de ações onde o aprendiz vai se tornando responsável por tarefas em ordem crescente de complexidade, tomando ciência dos processos formadores; b) uma aprendizagem guiada por profissionais de competência reconhecida" (BRASIL, 2001, p. 6-7).

No tocante à posição central ocupada pela matemática na Licenciatura em Matemática, Moreira e Ferreira (2013) questionam:

> Uma afirmação genérica e, talvez por isso, provavelmente consensual, é a de que a Matemática deve ocupar um lugar central na licenciatura em matemática. Tal consenso se desfaz, no entanto, quando abandonamos essa posição de generalidade (e superficialidade) para nos propormos questões como: *trata-se de pensar o lugar de qual matemática na licenciatura em matemática*? *O professor de matemática separa, em lugares distintos e estanques, os diferentes saberes mobilizados em sua prática docente escolar*? *Correspondentemente, até que ponto é adequado à formação do professor de matemática separar, em lugares distintos e estanques, os conhecimentos matemáticos relevantes para a (futura) prática docente escolar? Quais são os pressupostos segundo os quais se distribuem os lugares dos diversos saberes na formação do professor? Qual é a relação entre o lugar ocupado na formação por um determinado saber e o papel que esse mesmo saber desempenha na prática profissional para a qual se está formando*? *Como tem se modificado, ao longo da história, o lugar da matemática na licenciatura? Como tem se modificado, ao longo da história, a própria matemática (que ocupa seus lugares) na licenciatura?* Essas questões, obviamente, não esgotam as possibilidades de reflexão sobre o tema proposto, são apenas exemplos que demonstram a sua riqueza e complexidade, ao mesmo tempo em que ilustram algumas direções segundo as quais a pesquisa nacional e internacional tem abordado

> essa temática. (MOREIRA e FERREIRA, 2013, p. 982-983, grifo dos autores)

Os questionamentos de Moreira e Ferreira (2013) evidenciam a instabilidade do modelo adotado pelo órgão regulamentador da formação inicial de professores de Matemática, especialmente se levarmos em consideração que este modelo de formação não tem apresentado resultados satisfatórios em termos da aprendizagem da matemática pelos estudantes da escola básica. Por isso, de acordo com Ferreira (2003),

> [...] percebe-se claramente um descontentamento generalizado com a forma e a estrutura atual dos cursos de licenciatura em matemática no país. Todos os estudos apontam deficiências no processo de formação inicial e apresentam alguma perspectiva para a sua melhoria. As pesquisas apontam a reflexão, o trabalho colaborativo e uma relação mais equilibrada e harmoniosa entre teoria e prática – na qual ambas se tornem aliadas, dialogando dialeticamente – como pontos fundamentais para as diversas mudanças que se mostram necessárias. (FERREIRA, 2003, p. 32)

Ainda a esse respeito, Fiorentini e Oliveira (2013) discorrem que:

> Os cursos de licenciatura em geral, isto é, não só de matemática, têm sido alvo de inúmeras críticas, tanto da parte de pesquisadores como de professores formadores, de egressos e de licenciandos. Essas críticas referem-se aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas, às metodologias de ensino das aulas, ao distanciamento ou desconexão entre as práticas de formação e as práticas de ensinar e aprender na escola básica, à falta de diálogo ou interrelação entre as disciplinas específicas e as de formação *didático-pedagógica*, ao isolamento do estágio, entre outras. (FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013, p. 918 – 919, grifo dos autores)

Com base nas críticas até aqui expostas, especialmente as apresentadas por Ferreira (2003), Fiorentini e Oliveira (2013) e Moreira e Ferreira (2013), e no panorama que apresentamos até o momento, verifica-se que a formação inicial de professores de Matemática, já adjetivada como problemática em função da desarticulação entre a matemática estudada na Licenciatura em Matemática e a prática do professor em sala de aula, tem esse *status* acentuado, à medida que se estabelece a formação em nível superior como pré-requisito para o profissional do ensino da matemática na escola básica, tendo como limitante o ano de 2007, e demanda por profissionais com a referida formação aumenta significativamente, exigindo ações governamentais para a amenização dessa demanda. E, como consequência, são implementadas, por meio de legislações e regulamentações, *alternativas* como: a) redução da carga horária dos cursos de Licenciatura em Matemática (e a consequente implementação de cursos de licenciatura com duração de três anos); b) implantação de *cursos de complementação pedagógica* de ínfima carga horária por meio dos "programas especiais de formação pedagógica de docentes", que habilitam profissionais das mais diversas áreas (Administração, Contabilidade, Engenharias, etc.) a lecionarem Matemática nas escolas brasileiras; c) inserção no corpo docente das licenciaturas do "formadores práticos", que, em geral, possuem uma formação deficitária em termos acadêmico-científicos; d) abertura em larga escala de instituições formadoras de professores de esfera administrativa privada, que, em geral, fornecem uma formação inicial precária, em função do barateamento do ensino superior.

No tocante à formação continuada de professores de Matemática desenvolvida nos últimos 50 anos, Ferreira (2003) discorre que esta

> [...]sofre grandes transformações ao longo das décadas de 1970, 1980 e 1990. Inicialmente se desenvolvendo por meio de projetos de treinamento, reciclagem, atualização ou mesmo adestramento, posteriormente passa a projetos de parceria entre formadores de professores (geralmente professores universitários) e professores. (FEREIRA, 2003, p. 32)

Diante do que foi até aqui apresentado torna-se evidente a necessidade de discussões (que contemplem as diversas esferas envolvidas pelo e no ensino da matemática) e as consequentes alterações na estrutura dos cursos de formação inicial do professor de Matemática, além a implementação de políticas efetivas de valorização da carreira de professor de Matemática. Essa necessidade acentua-se ao considerarmos: a) o alto índice de evasão que aflige os cursos de Licenciatura, especialmente as Licenciaturas em Matemática (em torno de 56%), ocasionada, de acordo com o relatório produzido no âmbito da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação intitulado "Escassez de professores no Ensino Médio: Propostas estruturais e emergenciais" (BRASIL, 2007b, p. 11), "[...] por vários fatores, que vão desde as repetências sucessivas nos primeiros anos, até a falta de recursos para os alunos se manterem, mesmo numa universidade pública"; b) o baixo porcentual de professores da educação básica com formação inicial específica na disciplina de Matemática, que gira em torno de 27%, de acordo com Brasil (2007b, p. 17); c) a relação entre a baixa qualidade do ensino na escola básica e a formação inicial de professores de Matemática. Nessa conjuntura, o relatório citado discorre que "a ausência de qualidade, certamente, é um dos fatores que contribui para a elevada taxa de abandono escolar, próxima a 14%, acompanhada de uma taxa de repetência da ordem de 10%" (BRASIL, 2007b, p. 6).

Nos últimos 10 anos dois fatores têm alterado consideravelmente a formação de professores no Brasil. O primeiro deles foi a criação da UAB e, o outro, a fixação da Capes como principal órgão público de gestão e fomento da formação de professores em nível nacional. Discorreremos a seguir sobre estes fatos e suas consequências para a formação de professores.

2.3 A CRIAÇÃO DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL (UAB)

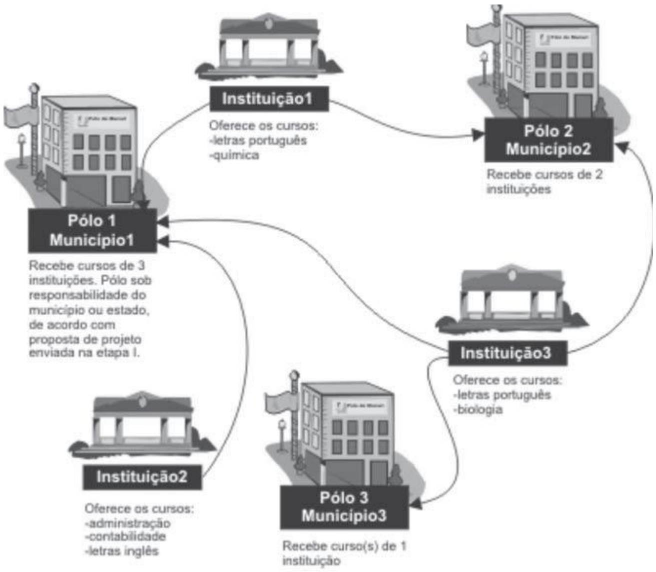
A Educação a Distância (EAD) está inserida no contexto nacional de formação de professores como consequência da Lei nº 9.394/96, que prevê, por meio do Art. 80 que "O Poder Público incentivará o desenvolvimento e a veiculação de programas de ensino a distância, em todos os níveis e modalidades de ensino, e de educação continuada" (BRASIL, 1996) em função da demanda de 1,6 milhões de professores brasileiros em exercício sem a titulação de licenciados (FIORENTINI, 2008). Contudo, somente a partir do ano de 2006 é que a política de formação de professores a distância é institucionalizada por meio do programa Pró-Licenciatura[15] e do Decreto nº 5.800, de 8 de junho de 2006**.** Esse decreto dispõe sobre o "Sistema Universidade Aberta do Brasil" (UAB), que é "voltado para o desenvolvimento da modalidade de educação a distância, com a finalidade de expandir e interiorizar a oferta de cursos e programas de educação superior no País", tendo como prioridade a oferta de cursos de licenciatura e de formação inicial e continuada de professores da educação básica (BRASIL, 2006).

A UAB, um sistema que visa atender às demandas locais por educação superior, articula universidades públicas e governos estaduais e municipais para a oferta de cursos de nível superior por meio do uso da metodologia da Educação a Distância (EAD). A articulação é que define qual instituição de ensino responsabilizar-se-á por ministrar determinado curso em um certo polo de apoio presencial, cada polo correspondendo a um município ou microrregião. A Figura 1 sintetiza o funcionamento do Sistema UAB.

---

[15] De acordo com o site do MEC, o Pró-Licenciatura oferece formação inicial a distância a professores em exercício nos anos/séries finais do ensino fundamental e/ou ensino médio dos sistemas públicos de ensino. Esse programa ocorre em parceria com instituições de ensino superior que implementam cursos de licenciatura a distância, com duração igual ou superior à mínima exigida para os cursos presenciais, de forma que o professor-aluno mantenha suas atividades docentes. O objetivo é melhorar a qualidade de ensino na educação básica por meio de formação inicial consistente e contextualizada do professor em sua área de atuação. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=708**.** Acesso em: 28 nov, 2014.

Figura 1: Esquema que sintetiza o funcionamento da UAB.



Fonte: http://uab.capes.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=7&Itemid=19. Acesso em: 09 dez. 2014.

A inserção da EAD no contexto da formação de professores é interpretada por Fiorentini (2008) como uma estratégia de formação em grande escala que visa à minimização dos custos da formação inicial de professores.

De acordo com Freitas (2007),

> Esta nova configuração da formação inicial deve ser analisada tendo como referência a crítica à concepção de educação e de formação que informa os cursos e programas de EAD, na medida em que se impõe por ações "minimalistas" na formação, pelos encontros presenciais de 4 horas semanais, pelo caráter da ação dos tutores, uma forma precarizada de trabalho de formação superior, e ainda quanto aos processos de elaboração dos materiais didáticos, financiamento e instrumentos necessários à formação superior. O caráter das propostas atuais de cursos a distância, nos quais os encontros presenciais acontecem *apenas uma vez por semana*, em caráter não obrigatório, sendo apenas a avaliação obrigatoriamente presencial, está em sintonia com o sentido de responsabilização que se imprime às políticas atuais. Responsabiliza-se os estudantes, que já chegam a estes cursos em condições desiguais frente aos demais estudantes das universidades, sem que se ofereça, pelas condições de ensino – a mediação dos tutores e a ênfase em estudos individualizados e solitários –, possibilidades de auto-superação de suas limitações, resultantes de seu percurso na educação básica. (FREITAS, 2007, p. 1.213, grifo da autora)

As discussões que apresentamos nesse capítulo até o momento permitem algumas considerações:

1) A formação de professores, especialmente a inicial, sofreu (e ainda sofre) uma forte influência das políticas públicas expansionistas do sistema de ensino em consequência das quais temos um *constante déficit* no corpo docente de professores da escola básica, especialmente de professores de Matemática;

2) *Políticas emergenciais* de formação de professores são constantemente implementadas, visando sanar o déficit no corpo docente da escola básica;

3) Parcela considerável das políticas públicas que possuíam, em sua implementação, caráter emergencial assumiram (e assumem), com o passar do tempo, o caráter de perenes;

4) No decorrer da história do ensino da matemática no Brasil constata-se ter sido sempre (e ainda ser) possível que pessoas não possuidoras de formação em Licenciatura em Matemática ministrassem aulas de matemática na educação básica nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio;

5) Uma parcela das políticas públicas de formação de professores tem contribuído consideravelmente para a deterioração da formação de professores, especialmente a formação inicial;

6) O formato “3+1” ou “licenciatura + bacharelado” ainda não foi superada como formato da formação inicial de professores, especialmente em relação às licenciaturas em Matemática onde existe uma sobreposição da matemática universitária em relação à matemática escolar e aos conhecimentos de cunho didático-pedagógicos.

2.4 A CAPES E A POLÍTICA NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

No ano de 2007 foi sancionada a Lei nº 11.502, de 11 de julho de 2007, que modificou as competências e a estrutura organizacional da fundação Capes, na qual, conforme o *caput* do Art. 2º da referida lei, “[...] subsidiará o Ministério da Educação na formulação de políticas e no desenvolvimento de atividades de suporte à formação de profissionais de magistério para a educação básica e superior e para o desenvolvimento científico e tecnológico do País” (BRASIL, 2007a).

De acordo com o parágrafo segundo do Art. 2º da referida lei:

> § 2º No âmbito da educação básica, a Capes terá como finalidade induzir e fomentar, inclusive em regime de colaboração com os Estados, os Municípios e o Distrito Federal e exclusivamente mediante convênios com instituições de ensino superior públicas ou privadas, a formação inicial e continuada de profissionais de

> magistério, respeitada a liberdade acadêmica das instituições conveniadas, observado, ainda, o seguinte: I - na formação inicial de profissionais do magistério, dar-se-á preferência ao ensino presencial, conjugado com o uso de recursos e tecnologias de educação a distância; II - na formação continuada de profissionais do magistério, utilizar-se-ão, especialmente, recursos e tecnologias de educação a distância. (BRASIL, 2007a)

A partir desse momento, a Capes passou a ser a principal agência reguladora (em nível nacional) da formação de professores no Brasil. Além disso, com a promulgação da Lei nº 11.502, de 11 de julho de 2007,a UAB passou a ser também gerenciada pela Capes, de modo que, de acordo com Costa e Duran (2012, p. 279), "[...] pode-se dizer que a principal casa da UAB é a Capes".

O Presidente da República, no ano de 2009, por meio do Decreto nº 6.755, de 29 de janeiro de 2009, instituiu a "Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica" e, dentre outras providências, disciplinou a atuação da Capes no fomento a programas de formação inicial e continuada. Dentre os objetivos da "Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica", destacamos os seguintes objetivos: a promoção da melhoria da qualidade da educação básica pública; o apoio à oferta e à expansão de cursos de formação inicial e continuada a profissionais do magistério pelas instituições públicas de educação superior; a promoção da equalização nacional das oportunidades de formação inicial e continuada dos profissionais do magistério em instituições públicas de educação superior; a identificação e o suprimento da necessidade das redes e sistemas públicos de ensino por formação inicial e continuada de profissionais do magistério; a promoção da valorização do docente mediante ações de formação inicial e continuada que estimulem o ingresso, a permanência e a progressão na carreira; a ampliação do número de docentes atuantes na educação básica pública que tenham sido licenciados em instituições públicas de ensino superior, preferencialmente na modalidade presencial; a promoção da atualização teórico-metodológica nos processos de formação dos profissionais do magistério, inclusive no que se refere ao uso das tecnologias de comunicação e informação nos processos educativos; a promoção da integração da educação básica com a formação inicial docente, assim como o reforço à formação continuada como prática escolar regular que responda às características culturais e sociais regionais (BRASIL, 2009).

No tocante às atribuições da Capes, o Decreto nº 6.755/09 prevê, dentre outras: o fomento a cursos de atualização, aperfeiçoamento e especialização, que deverão ser ofertados por instituições públicas de educação superior; promoção do desenvolvimento de projetos político-pedagógicos específicos voltados para formação continuada, em articulação com as instituições públicas de educação superior; disposição sobre requisitos, condições de participação e critérios de seleção de instituições e de projetos pedagógicos específicos a serem apoiados; incentivo à formação de profissionais do magistério para atuar na educação básica mediante fomento a programas de iniciação à docência e concessão de bolsas a estudantes matriculados em cursos de licenciatura de graduação plena nas instituições de educação superior; fomento a projetos pedagógicos que visem a promover novos desenhos curriculares ou percursos formativos destinados aos profissionais do magistério; fomento a projetos pedagógicos que visem à promoção de desenhos curriculares próprios à formação de profissionais do magistério para atendimento da educação do campo, dos povos indígenas e de comunidades remanescentes de quilombos; fomento à oferta emergencial de cursos de licenciaturas e de cursos ou programas especiais dirigidos aos docentes em exercício há pelo menos três anos na rede pública de educação básica, que sejam: a) graduados não licenciados; b) licenciados em área diversa da atuação docente; c) de nível médio, na modalidade Normal; fomento a projetos de revisão da estrutura acadêmica e curricular dos cursos de licenciatura; fomento a pesquisas destinadas ao mapeamento, aprofundamento e consolidação dos estudos sobre perfil, demanda e processos de formação de profissionais do magistério; fomento a programas de apoio a projetos educacionais e de pesquisa propostos por instituições e por profissionais do magistério das escolas públicas que contribuam para sua formação continuada e para a melhoria da escola; fomento a programas que promovam a articulação das ações de formação continuada com espaços de educação não formal e com outras iniciativas educacionais e culturais (BRASIL, 2009).

De acordo com o organograma da Capes, dois órgãos estão relacionados diretamente à educação básica, a saber: o “Conselho Técnico-Científico da Educação Básica” (CTC-EB) e a “Diretoria de Formação de Professores da Educação Básica” (DEB). O primeiro pertencente à esfera de colegiados e o segundo à esfera executiva. Das atribuições do “Conselho Técnico-Científico da Educação Básica”[16], destacamos as

[16]As demais atribuições do CTC-EB são: III - discutir diretrizes de longo prazo para a formação inicial e continuada dos professores da educação básica; IV - fixar parâmetros para avaliação da demanda por professores da educação básica, inclusive para subsidiar a instalação de polos de apoio presencial; V - acompanhar a avaliação dos cursos de formação inicial do professores nos processos conduzidos pelo Inep; VI - colaborar na elaboração de propostas relativas à formação inicial e continuada de professores da educação básica, para subsidiar e consolidar o PNE; VII - opinar sobre a programação anual da Capes, na área específica de formação de professores e valorização da educação básica; VIII - opinar sobre

seguintes: I - assistir a Diretoria Executiva na elaboração das políticas e diretrizes específicas de atuação da Capes no tocante à formação inicial e continuada de profissionais do magistério da educação básica e à construção de um sistema nacional de formação de professores; II - assistir as Diretorias de Formação de Professores da Educação Básica e de Educação a Distância no que diz respeito à consolidação do regime de colaboração entre todos os níveis de governo.

Já a “Diretoria de Formação de Professores da Educação Básica” atua em duas linhas de ação: a) na indução à formação inicial de professores para a educação básica, organizando e apoiando a oferta de cursos de licenciatura presenciais especiais, por meio do Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (Parfor) e b) no fomento a projetos de estudos, pesquisas e inovação, desenvolvendo um conjunto articulado de programas voltados para a valorização do magistério. Os programas desenvolvidos pela DEB são: o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid), o Programa de Consolidação das Licenciaturas (Prodocência), o Observatório da Educação (OBEDUC), o Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (Parfor), o Programa Novos Talentos, Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores (Life) e Programa de Apoio à Formação de Profissionais no Campo das Competências Socioemocionais.

O Pibid é um programa que concede bolsas a alunos de licenciatura participantes de projetos de iniciação à docência desenvolvidos por instituições de educação superior em parceria com escolas de educação básica da rede pública de ensino e, de acordo com o site da Capes[17], tem como objetivos: incentivar a formação de docentes em nível superior para a educação básica; contribuir para a valorização do magistério; elevar a qualidade da formação inicial de professores nos cursos de licenciatura promovendo a integração entre educação superior e educação básica; inserir os licenciandos no cotidiano de escolas da rede pública de educação proporcionando-lhes oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas

critérios e procedimentos para fomento a estudos e pesquisas relativos à orientação de políticas de formação e conteúdo curriculares dos cursos de formação de professores da educação básica; IX - estabelecer parâmetros para avaliação dos programas de fomento da Capes; X - propor a realização de estudos e programas para o aprimoramento das atividades da Capes na sua área de atuação; XI - opinar sobre assuntos que lhe sejam submetidos pelo Presidente da Capes; XII - eleger seu representante no Conselho Superior. Disponível em: http://www.capes.gov.br/conselho-tecnico-cientifico-da-educacao-basica. Acesso em: 30 nov. 2014.

[17] Disponível em: http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid. Acesso em: 30 nov. 2014.

identificados no processo de ensino-aprendizagem; incentivar escolas públicas de educação básica, mobilizando seus professores como coformadores dos futuros docentes e tornando-as protagonistas nos processos de formação inicial para o magistério; contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas nos cursos de licenciatura.

O primeiro edital do Pibid foi uma publicação conjunta do Ministério da Educação, por intermédio da Secretaria de Educação superior (SESu), a Capes e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Contudo, a partir de 2009, os editais passaram a ser publicados somente pela Capes, publicações que ocorreram nos anos de 2010, 2011, 2012 e 2013. O mais recente edital desse projeto, publicado pela Capes em 2013, previa a concessão de 72.000 bolsas para estudantes dos cursos de licenciatura, a professores das Instituições de Ensino Superior e das escolas da rede pública de ensino.

De acordo com os objetivos acima nominados, verifica-se que o Pibid tem como principal meta estabelecer uma forte relação entre as licenciaturas e a escola básica, buscando impactar a qualidade da formação inicial de professores, além de inserir os estudantes desses cursos em seu futuro ambiente de trabalho, a escola. O Pibid, dentro dessa perspectiva, é interpretado por nós como uma política pública, gestada e fomentada pelo governo federal, que pode se configurar como um cenário propício para o estabelecimento da relação entre a teoria e a prática desenvolvida na Licenciatura em Matemática e a escola em nível básico, contrubuíndo assim, por exemplo, com a superação do modelo “3+1”.

O Prodocência tem a finalidade de fomentar a inovação e a elevação da qualidade dos cursos de formação de professores para a educação básica na perspectiva de valorização da carreira docente. Esse projeto teve seu primeiro edital publicado no ano de 2007, uma publicação também conjunta com o Ministério da Educação, por intermédio da SESu/Departamento de Modernização e Programas da Educação Superior. A partir de 2008, no entanto, os editais passaram a ser publicados pela Capes, sendo o último publicado no ano de 2013.

O Programa Observatório da Educação e o Programa de Apoio à Formação de Profissionais no Campo das Competências Socioemocionais têm como objetivo principal o fomento à pesquisa e são direcionados a Programas de Pós-Graduação *stricto sensu,* tiveram os editais publicados pela Capes nos anos de 2006 e 2014, respectivamente. O OBEDUC visa ao fomento a estudos e pesquisas em educação, que utilizem a infraestrutura das Instituições de Ensino Superior (IES) e as bases de dados do Inep e que proporcionem articulação entre pós-graduação, licenciaturas e escolas de educação básica, além de estimularem a produção acadêmica e a formação de pós-graduados (em nível de mestrado e doutorado). Já o Programa de Apoio à Formação de Profissionais no Campo das Competências Socioemocionais apoia projetos em rede de pesquisa e de inovação que permitam a criação de estratégias para o desenvolvimento de competências socioemocionais aliadas à formação de profissionais do magistério, bem como a melhoria da educação básica na rede pública.

O Programa Novos Talentos, cujo primeiro edital foi publicado em 2010 pela Capes, tem o objetivo de apoiar propostas, submetidas por IES, que se propõem a realizar atividades extracurriculares para professores e alunos da educação básica, tais como cursos e oficinas, visando à disseminação do conhecimento científico, ao aprimoramento e à atualização do público-alvo e à melhoria do ensino de ciências nas escolas públicas do País. Já o Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores (Life), cujo primeiro edital foi publicado em 2012, objetiva a criação de laboratórios interdisciplinares de formação de educadores em Instituições Públicas de Ensino Superior que participem em pelo menos um dos seguintes programas: Parfor, Pibid, Prodocência, Obeduc, Novos Talentos, Projetos Especiais, Licenciaturas e Mestrados Profissionais em Rede apoiados pela Universidade Aberta do Brasil (UAB).

O Parfor é um programa emergencial implantado em regime de colaboração entre a Capes, os Estados, municípios, Distrito Federal e as IES, instituído para induzir e fomentar a oferta de educação superior gratuita para professores em exercício na rede pública de educação básica, para que estes profissionais possam obter a formação exigida pela Lei nº 9.394/96 e que contribuam para a melhoria da qualidade da educação básica no País. Esse programa visa ao fornecimento de titulação em nível superior em três contextos: **-** I. Obtenção do título de licenciado, destinado a docentes ou tradutores/intérpretes de Libras em exercício na rede pública da educação básica que não tenham formação superior ou que, mesmo a tendo, se disponham a realizar curso de licenciatura na etapa/disciplina em que atua em sala de aula; - II. Obtenção da segunda licenciatura**,** destinado a professores licenciados que estejam em exercício há pelo menos três anos na rede pública de educação básica e que atuem em área distinta da sua formação inicial, ou para profissionais licenciados que atuam como tradutor/intérprete de Libras na rede pública de educação básica; - III. Obtenção de formação pedagógica**,** destinado a docentes ou tradutores/intérpretes de Libras graduados e não licenciados que se encontram no exercício da docência na rede pública da educação básica.

Outro programa desenvolvido pela Capes vinculado à formação de professores é o Programa de Licenciaturas Internacionais (PLI) que, diferentemente dos programas sobre os quais discorremos anteriormente, está vinculado à Diretoria de Relações Internacionais. Esse programa visa à melhoria do ensino e da qualidade na formação inicial de professores por meio de parceria universitária entre cursos de licenciatura brasileiros e universidades portuguesas[18] e francesas[19] para realização de graduação sanduíche, com dupla diplomação, de estudantes brasileiros. O PLI – Portugal é direcionado às áreas de Química, Física, Matemática, Biologia, Português, Artes e Educação Física e, até o momento, teve a publicação de dois editais, em 2012 e 2013, enquanto que o PLI – França é direcionado às áreas de Letras, Biologia, Física, Matemática e Química e teve publicado apenas um edital, datado de 2014.

Ainda no bojo das políticas públicas para a formação de professores que estão sendo implementadas no Brasil com o fomento da Capes, inserem-se os *mestrados profissionais em rede*, oferecidos, a partir de 2011, por meio do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). O primeiro mestrado profissional implementado no Brasil e voltado única e exclusivamente para a formação continuada de professores foi o PROFMAT. Este programa de mestrado é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, e conta com um convênio entre a Capes e o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

De acordo com o documento intitulado “Avaliação Suplementar Externa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)”, publicado em 2013, este programa de mestrado está em consonância com o Decreto nº 6.755, de 29 de janeiro de 2009, que institui a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica, que disciplina a atuação da Capes no fomento a programas de formação inicial e continuada e dá outras providências

[18]As universidades portuguesas vinculadas aos Editais do Life são: Universidade Nova de Lisboa, Universidade da Beira Interior, Universidade do Algarve, Universidade de Aveiro, Universidade de Coimbra, Universidade de Évora, Universidade de Lisboa, Universidade do Minho, Universidade do Porto, Universidade Técnica de Lisboa e Universidade Trás-os-Montes.

[19] As francesas vinculadas ao Edital do Life são a Universidade Paris-Sorbonne e a Universidade Pierre et Marie CURIE.

(CAPES, 2013). Segundo divulgação no site do PROFMAT[20], o programa está em consonância com:

> A Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014 (Plano Nacional de Educação), que coloca em sua Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos(as) os(as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino. (CAPES, 2013, p. 01)

Ainda de acordo com o documento "Avaliação Suplementar Externa do Programade Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)", os objetivos do referido programa de mestrado são:

> 1. Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis; 2. Qualificar professores de Matemática que atuam na Educação Básica em nível de pós-graduação *stricto sensu*, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo, oferecendo um curso de formação profissional que contemple as necessidades advindas do trabalho cotidiano no espaço da escola; 3. Incentivar uma postura crítica acerca das aulas de Matemática nos níveis do Ensino Fundamental e Médio, que enfatize o papel central do conhecimento de matemática frente às exigências da sociedade moderna; 4. Buscar a valorização profissional do professor por meio do aprimoramento de sua formação. (CAPES, 2013, p. 01)

Com duração aproximada de dois anos (quatro semestres e dois verões - janeiro e fevereiro), o PROFMAT é um programa que atua em larga escala pois está presente nas 27 unidades da federação e pretende, a médio prazo, desenvolver um "[...]significativo impacto na realidade do ensino básico nacional que inclui cerca de 200 mil escolas, 2 milhões de professores e 54 milhões de alunos" (CAPES, 2013, p. 11).

Ainda no ano de 2011 foi publicada pela Capes a Portaria nº 209, de outubro de 2011, regulamentando o "Programa de Mestrado Profissional para Qualificação de Professores da Rede Pública da Educação Básica" (PROEB), que tem por objetivo conceder apoio à formação continuada em nível de pós-graduação *stricto sensu* a professores das redes públicas de educação básica. Este programa objetiva exclusivamente o fomento à manutenção e ao desenvolvimento dos programas de pós-

[20] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/organizacao/apresentacao. Acesso em: 28 jul. 2014.

graduação em Mestrado Profissional voltados para a qualificação de docentes do ensino básico das redes públicas e que são recomendados pela Capes.

O PROEB visa ao apoio financeiro às IES para atendimento ao custeio das atividades pertinentes à manutenção de seus alunos regularmente matriculados, sendo uma das principais ações o pagamento de bolsas de estudos a bolsistas que deverão continuar atuando, por um período não inferior a cinco anos após a diplomação, como professor da rede pública da educação básica, entre outros requisitos. Este requisito corrobora a intenção do projeto de que os professores participantes dos mestrados profissionais financiados pelo PROEB possam desenvolver, além das atividades docentes, outros trabalhos em temas de interesse público que busquem a melhoria da qualidade da educação básica nas escolas públicas (CAPES, 2011).

Adotando formato similar ao do PROFMAT, foram lançados o Programa de Mestrado Profissional em Letras (PROFLETRAS) e o Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), em 2013, e os Programas de Mestrado Profissional em Rede Nacional de Artes (PROFARTES), Administração Pública (PROFIAP) e Ensino de História (PROFHISTÓRIA), em 2014.

Ao estudarmos os objetivos e formato do PROFMAT, uma política pública inédita, tanto em seu formato quanto em seu objetivo, e ao considerarmos o histórico de algumas políticas públicas de formação de professores de amplitude nacional, o nosso interesse foi despertado e nos propusemos a investigar este Programa de Mestrado Profissional, clarificando de modo especial o processo de implementação do currículo deste curso de formação de Professores de Matemática, aspectos que serão explorados a seguir.

CAPÍTULO 3:O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Apresentaremos neste capítulo uma revisão de pesquisas que contemplam a temática "Conhecimento matemático do professor de Matemática". Iniciamos este texto com a teorização proposta por Lee Shulman, na década de 80 do século XX, já que é uma das mais influentes e respeitadas teorias a respeito dessa temática em âmbito internacional. Na sequência, apresentamos, considerando as datas das publicações das teorias, as pesquisas de Rainer Bromme, Deborah Ball, Jünger Baumert e José Carrillo, já que essas quatro teorias derivam da teorização de Shulman e destinam-se única e exclusivamente à formação de professores de Matemática. Posteriormente apresentamos, também considerando as datas das publicações dos resultados, as teorizações propostas por Liping Ma e Plínio Moreira. O trabalho elaborado por Ma foi orientado (em nível de doutorado) por Shulman, enquanto que a teoria proposta por Moreira apresenta uma diferenciação entre a Matemática Escolar e a Matemática Científica como uma alternativa para a reflexão em torno dos saberes associados à prática docente. Finalizamos este capítulo apresentando nossas considerações a respeito das teorizações apresentadas e dos saberes associados à prática docente, nos atendo de modo particular à formação matemática do professor de Matemática.

INTRODUÇÃO

Nosso objeto de estudo, o PROFMAT, é um curso de formação continuada de professores, em nível de pós-graduação, mestrado profissional, "alicerçado em sólida formação em Matemática" (BRASIL, 2010, p. 9), que busca contemplar única e exclusivamente a dimensão "matemática" da formação dos professores de Matemática que participam do referido programa e que este curso

> [...] visa contribuir para uma qualificação ampla do ensino de matemática na escola básica, indo desde um aprimoramento no processo de formação continuada de professores até mudanças efetivas da prática em sala de aula. Esta ação visa promover a construção de competências matemáticas no ensino básico por meio de um processo de ensino e aprendizado significativo, inserido de

> forma consistente em uma educação universal de qualidade. (CAPES, 2010, p. 9)

Por essa razão, abordaremos neste capítulo teorizações que abordam a temática “Dimensões do conhecimento de professores”, particularmente de professores de matemática, atentando-nos de modo especial para teorizações que contemplam a dimensão “formação matemática”.

3.1 A TEORIA DE LEE SHULMAN: A ÊNFASE NO CONTEÚDO E NO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO

No processo de elaboração do artigo “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching”, publicado em 1986, Lee Shulman e seus colaboradores se voltaram para o que denominaram de “paradigma perdido”: “The missing paradigm refers to a blind spot with respect to content that now characterizes most research on teaching and, as a consequence, most of our state level programs of teacher evaluation and teacher certification” (SHULMAN, 1986, p. 7-8).

No referido artigo, Shulman, com especial ênfase no conteúdo, apresenta uma categorização dos conhecimentos essenciais para o exercício da atividade docente: a) subject matter content knowledge; b) curricular knowledge; c) pedagogical content knowledge.

A teoria proposta por Shulman (1986) desencadeou discussões sobre as dimensões do conhecimento dos professores relacionadas ao conteúdo nas mais diversas áreas de formação de professores (História, Matemática, Farmácia, etc.). Neste contexto, Krauss e Blum (2012) discorrem que,

> However, with which knowledge should teachers be equipped? The theoretical structuring of the teachers’ knowledge into distinguishable categories is traced via so-called taxonomical approaches. One of the most influential knowledge taxonomies for teachers is the one of Lee Shulman (1986). Shulman introduced, among other categories, the domains of pedagogical knowledge, content knowledge and pedagogical content knowledge. These three categories form, seen from a contemporary point of view, the generally accepted core categories of the teachers’ professional knowledge. (KRAUSS; BLUM, 2012, p. 49)

De acordo com a taxonomia proposta por Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo (subject matter content knowledge) pode ser entendido como o conhecimento da matéria que o professor ministra. Associando a teorização deste autor à formação de professores de Matemática, o conhecimento do conteúdo pode ser interpretado como o conhecimento da matemática, que se desdobram em conhecimento dos conteúdos da Matemática a serem ensinados, o conhecimento das regras e processos intrínsecos a essa área do conhecimento, o conhecimento filosófico e epistemológico da Matemática (relacionado a sua natureza e significado).

O conhecimento curricular (curricular knowledge) está relacionado ao conhecimento apresentado nos programas de ensino (organização e divisão do conteúdo de ensino) e abarca também o conhecimento das ferramentas disseminadoras das propostas dos programas de ensino (currículos, livros didáticos) (SHULMAN, 1986).

O conhecimento pedagógico (ou didático-pedagógico) do conteúdo (pedagogical content knowledge) consiste nas diferentes maneiras para se formular e apresentar os tópicos de uma área de modo a torná-los mais compreensíveis para os alunos. O conhecimento de conteúdo pedagógico abarca a compreensão do que facilita ou dificulta aprendizagem de um tópico, bem como a de que alunos de diferentes faixas etárias de diferentes experiências de vida trazem conceitos que podem interferir na aprendizagem desse tópico (SHULMAN, 1986). Em síntese, poderíamos dizer que se trata da metodologia e da didática utilizada pelo professor de Matemática em sala de aula.

Que o professor necessita conhecer o conteúdo que vai trabalhar/ministram/ensinar, parece ser óbvio, e atualmente há um consenso na literatura de formação de professores que um forte conhecimento do assunto a ser ensinado é um componente essencial da competência do professor (BALL; HILL; BASS, 2005; BAUMERT *et al.*, 2010). No entanto, o grande avanço da teoria de Shulman é a inserção do “Pedagogical Content Knowledge”, porque além de abordar o tema “conhecimento de conteúdo”, o autor trata de uma forma particular de conhecimento do conteúdo, incorporando os aspectos do conteúdo pertinentes ao ato de ensinar o referido conteúdo.

> A central contribution of Shulman and his colleagues was to reframe the study of teacher knowledge in ways that attend to the role of content in teaching. This was a radical departure from research of the day, which focused almost exclusively on general aspects of teaching. Subject matter was little more than context. Although earlier studies were conducted in classrooms where mathematics, reading, or other subjects were taught, attention to the subject itself and to the role it played in teaching or teacher thinking was less prominent. In fact, so little attention was devoted to examining content and its role in instruction that Shulman dubbed this the “missing paradigm” in

> research on teaching and teacher knowledge (1986). (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 390)

O conhecimento pedagógico (ou didático-pedagógico) do conteúdo consiste nas diferentes maneiras para se formular e apresentar os tópicos de uma área de modo a torná-los mais compreensíveis para os alunos. Este conhecimento abarca a compreensão do que facilita ou dificulta aprendizagem de um tópico, bem como a de que alunos de diferentes faixas etárias de diferentes experiências de vida trazem conceitos que podem interferir na aprendizagem desse tópico. Assim, o PCK, para Shulman, é um conhecimento didático, porém, específico da didática da matemática.

Para Ball, Thames e Phelps (2008), na categorização de Shulman está o argumento de que o ensino de alta qualidade requer um conhecimento profissional sofisticado que vai além de simples regras e que está intimamente relacionado a um conhecimento profundo do conteúdo que o professor objetiva trabalhar/ensinar no ambiente escolar.

A pesquisa sobre "conhecimento pedagógico do conteúdo" é concebida na tradição de pesquisa clássica sobre a eficácia do professor e destina-se principalmente a uma reconstrução descritiva da sala de aula bem-sucedida. Por outro lado, o seu foco não está em uma descrição precisa do comportamento dos professores, mas na reconstrução da competência profissional (BROMME, 1995).

Em 1987, Shulman publica o artigo intitulado "Knowledge and teaching: Foundations of the new reform", onde amplia a categorização feita em "Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching", inserindo quatro categorias de cunho pedagógico e constituindo o que intitulou de "knowledge base". Por meio das sete categorias dessa base de conhecimento destaca o papel fundamental do conhecimento do conteúdo:

> 1) Content knowledge; 2) General pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter; 3) Curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade " for teachers; 4) Pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding; 5) Knowledge of learners and their characteristics; 6) Knowledge of educational contexts, ranging from workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; 7) Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds. (SHULMAN, 1987, p. 08)

A teorização elaborada por Shulman tem servido como base para pesquisas nas mais diversas áreas da formação do professor, especialmente na formação dos professores de Matemática. “La propuesta de Shulman há jugado um papel importante em el desarrollo de investigaciones e implementaciones curriculares para la formación de professores. Las categorias identificadas por este autor siguen vigentes, aún cuando las interpretaciones iniciales dadas a las mismas han ido cambiado” (GODINO, 2009, p. 15-16).

> There was immediate and widespread interest in the ideas presented by Shulman and his colleagues. In the two decades since these ideas were first presented, Shulman’s presidential address (1986) and the related *Harvard Education Review* article (1987) have been cited in more than 1,200 refereed journal articles. This interest has been sustained with no less than 50 citations to these two articles in every year since 1990. Perhaps most remarkable is the reach of this work, with citations appearing in 125 different journals, in professions ranging from law to nursing to business, and regarding knowledge for teaching students preschool through doctoral studies. Much of the interest has focused directly on pedagogical content knowledge. Thousands of articles, book chapters, and reports use or claim to study the notion of pedagogical content knowledge, in a wide variety of subject areas: science, mathematics, social studies, English, physical education, communication, religion, chemistry, engineering, music, special education, English language learning, higher education, and others. Such studies show no signs of abating. Rarely does an idea catch on so widely. (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p.392)

Neste contexto, apresentamos, na sequência, pesquisas que, a partir da taxonomia proposta por Shulman, propõem constructos teóricos sobre o Conhecimento Matemático necessário para o ensino – efetivo – deste conhecimento na escola básica.

3.2 A TOPOLOGIA DO CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE RAINER BROMME.

Rainer Bromme publicou, na década de 90 do século XX, o que intitulou de “A Psychological Topology of Teachers' Professional Knowledge” (BROMME, 1993), trabalho em que, a partir da taxonomia de Shulman (1986, 1987), apresenta uma decomposição analítica do conhecimento profissional dos professores buscando a compreensão das especificidades destes conhecimentos sob o argumento de que, à primeira vista, o conhecimento profissional parece estar suficientemente descrito por meio do conhecimento do conteúdo, da pedagogia e da didática específica. Contudo, para Bromme (1993) esses campos precisam ser decompostos ainda mais se a intenção é a compreensão das características especiais de conhecimento profissional.

A decomposição feita por este autor distingue-se da elaborada por Shulman pelo acréscimo do conceito de “filosofia da matemática escolar” e pela distinção entre os conceitos de “conhecimento da matemática escolar” e “conhecimento da matemática como disciplina acadêmica” (BROMME, 1993).

No referido trabalho, Bromme (1993) aponta que o Conhecimento Profissional dos Professores de Matemática é composto pelos seguintes campos: a) conhecimento da matemática como uma disciplina; b) conhecimento da matemática escolar; c) conhecimento da filosofia da matemática escolar; d) conhecimento sobre pedagogia geral (e psicologia); e) conhecimento pedagógico do conteúdo específico (matemática). Ressalta, porém, que o cerne do desenvolvimento profissional do professor de Matemática está no conhecimento da filosofia da matemática escolar e no conhecimento pedagógico do conteúdo específico (matemática).

O conhecimento da Matemática como uma disciplina é definido pelo autor como os conhecimentos aprendidos pelo professor durante os seus estudos na academia, e que é composto, dentre outras coisas, por proposições matemáticas, regras, métodos e formas do pensamento matemático.

Segundo Bromme (1993), o conhecimento da matemática escolar não se configura apenas como uma propedêutica da matemática acadêmica, estudada nas universidades, uma vez que:

> The school subjects have a "life of their own" with their own logic; that is, the meaning of the concepts taught cannot be explained simply from the logic of the respective scientific disciplines. Or, in student terms: Mathematics and "math," theology and "religious studies" are not the same. Rather, goals about school (e.g., concepts of general education) are integrated into the meanings of the subject-specific concepts. For the psychological analysis of professional knowledge, this is important, as these aspects of meaning are, in part, implicit knowledge. (BROMME, 1993, p. 74)

A Filosofia da Matemática Escolar é interpretada como as ideias sobre os fundamentos epistemológicos da matemática e da aprendizagem da matemática, além da relação entre a matemática e outros campos da vida humana e do conhecimento.

> The philosophy of the school subject is an implicit content of teaching as well, and it includes normative elements. Students, for instance, will learn whether the teacher adheres to the view that the "essential

> thing" in mathematics is operating with a clear, completely defined language, no emphasis being set on what the things used refer to, or whether the view is that mathematics is a tool to describe a reality, however it might be understood. (BROMME, 1993, p. 74)

O Conhecimento Pedagógico, diferentemente das demais dimensões, possui uma validade relativamente independente das disciplinas escolares. Refere-se, por exemplo, à introdução de padrões de comportamento úteis para a gestão do ambiente de sala de aula, para o relacionamento com os pais dos alunos (exposição dos resultados/comportamentos dos estudantes). Para Bromme (1993), a ética pedagógica dos professores no que diz respeito ao tratamento de seus alunos com justiça, por exemplo, está fortemente entrelaçada com os seus conhecimentos pedagógicos.

Para o autor, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo tem um caráter especial porque relaciona o conhecimento pedagógico com o conhecimento da matemática e a experiência do professor. Assim, é o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo que estabelece a estruturação lógica e temporal das aulas e o peso relativo dos conceitos e regras matemáticas.

> In my view a very interesting perspective follows from interpreting the concept of 'pedagogical content knowledge' strictly as a psychological construct of teachers' professional knowledge. Such a perspective leads us towards two intercorrelating features of expert cognition also found in other professions but rarely researched: **cognitive integration** of knowledge from different academic disciplines and the **contextualization** of knowledge. The selection and presentation of content knowledge for classroom teaching requires an examination of the respective fields of knowledge from a pedagogical point of view. Thus, it establishes relationships between fields of knowledge which, according to their development and foundation, as well as their cultural tradition, may be quite different from that of pedagogy. Teachers' work requires the selection and presentation of concepts and methods of the respective disciplines. Such decisions cannot be substantiated only through the logic of the given areas. (BROMME, 1995, p. 211, grifo do autor)

Para o autor citado, o Conhecimento Profissional dos Professores não é simplesmente um conglomerado de vários campos, mas configura-se como uma integração de distintos campos, integração esta que ocorre durante o curso de formação prática e ao longo da experiência profissional, uma vez que vários campos do Conhecimento Profissional estão relacionados à experiência prática. A fusão de conhecimentos provenientes de diferentes origens é a característica específica do conhecimento profissional dos professores, em comparação com o conhecimento codificado das disciplinas em que foram educados.

3.3 “MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING” DE DEBORAH BALL E SEUS COLABORADORES

Entre 1986 e 1990, o National Center for Research on Teacher Education (NCRTE), em parceria com a Michigan State University, desenvolveu um projeto intitulado “Teacher Education and Learning to Teach” (TELT), cujo objetivo era investigar o impacto que uma variedade de abordagens ou alternativas teriam sobre os conhecimentos, habilidades, ou disposições dos professores, bem como o papel da educação formal em relação a muitas outras influências sobre a aprendizagem dos professores (UNITED STATES, 1991). Dentre os pesquisadores participantes deste projeto estava Deborah Loewenberg Ball, que junto com Heather C. Hill e outros pesquisadores, compôs um dos mais consistentes e internacionalmente reconhecidos grupos de estudos a respeito do Conhecimento Matemático para o Ensino desta disciplina na escola básica.

A partir da taxonomia elaborada por Shulman (1986; 1987), Ball e seus colaboradores desenvolveram o conceito de “Mathematical Knowledge for Teaching” (MKT), voltando seus olhares especialmente para o “elementary school”[21] e o “middle school”[22](HILL, SCHILLING e BALL, 2004; HILL e BALL, 2004; HILL, ROWAN e BALL, 2005; HILL, 2007; HILL *et al.*, 2007; SCHILLING, BLUNK e HILL, 2007; HILL e LUBIENSKI, 2007; SCHILLING; HILL, 2007; HILL; LUBIENSKI, 2007; BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL, *et al.*, 2008).

Algumas das questões que norteavam as pesquisas de Ball, Hill e seus colaboradores eram: o que os professores precisam saber e serem capazes de fazer para poder ensinar a matemática de forma eficaz? Ou ainda, o que um ensino eficaz requer em termos de compreensão do conteúdo pelo professor que ministra aulas de matemática? (BALL, THAMES e PHELPS, 2008). Existe um corpo de conhecimento matemático para o ensino que é especial para o trabalho que os professores devem executar? E isso tem um efeito demonstrável sobre o desempenho do aluno? (BALL, HILL e BASS, 2005). Conforme se verifica nas questões acima, o ensino está no cerne das pesquisas desse grupo, sendo que,

[21] No Brasil é equivalente aos anos iniciais do Ensino Fundamental da Educação Básica.
[22] No Brasil é equivalente aos anos finais do Ensino Fundamental da Educação Básica.

> By “teaching,” we mean everything that teachers must do to support the learning of their students. Clearly we mean the interactive work of teaching lessons in classrooms and all the tasks that arise in the course of that work. But we also mean planning for those lessons, evaluating students’ work, writing and grading assessments, explaining the classwork to parents, making and managing homework, attending to concerns for equity, and dealing with the building principal who has strong views about the math curriculum. (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 395)

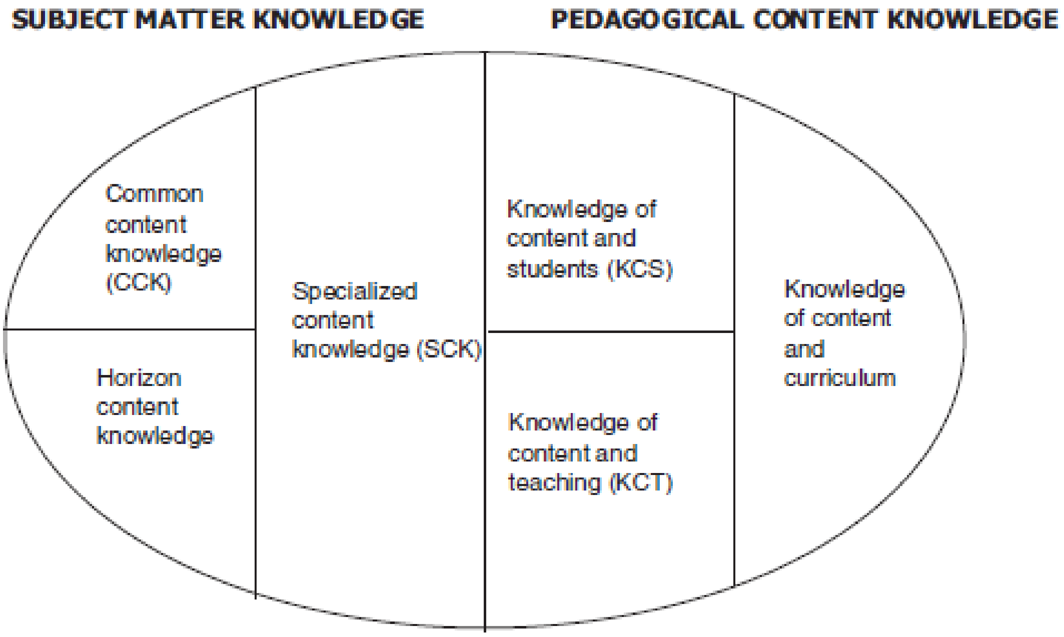
Colocando ênfase no conhecimento do conteúdo específico e em seu uso para o ensino e tirando o foco dos professores, Ball e seus colaboradores estudaram o trabalho implicado no processo de ensinar. Em outras palavras, apesar de examinarem o trabalho de professores e, particularmente, de estudantes em momentos de ensino no ambiente escolar, o foco das pesquisas é o processo de ensinar o conteúdo a partir de uma descrição detalhada do trabalho em sala de aula.

Ball, Thames e Phelps (2008) definem o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT):

> By “mathematical knowledge for teaching,” we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics. Important to note here is that our definition begins with teaching, not teachers. It is concerned with the tasks involved in teaching and the mathematical demands of these tasks. Because teaching involves showing students how to solve problems, answering students’ questions, and checking students’ work, it demands an understanding of the content of the school curriculum. Beyond these obvious tasks, we seek to identify other aspects of the work and to analyze what these reveal about the content demands of teaching. (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 395)

Para o estudo do MKT, Ball e seus colaboradores voltaram-se para os seguintes conhecimentos matemáticos: números (e operações), funções (identificação de padrões) e álgebra. A partir da análise das demandas matemáticas presentes no processo de ensino desta área, Ball e seus colaboradores identificaram os domínios do conhecimento matemático para o ensino que implicam em aprendizagem dos alunos. Este grupo de pesquisa propôs o seguinte esquema (Figura 2), no qual o Conhecimento Matemático para o Ensino se configura como uma composição entre o Conhecimento do Conteúdo – matemático – e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – matemático (HILL, SCHILLING e BALL, 2004).

Figura 2: Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino.



Fontes: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403); Hill, Ball e Schilling (2008, p. 377).

A partir da análise do trabalho dos professores, Ball, Hill e colaboradores definem dois grandes grupos de conhecimentos presentes no ensino da matemática (Figura 2): o Conhecimento do Conteúdo (Subject Matter Knowledge) e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK). A categoria Conhecimento do Conteúdo, por sua vez, subdivide-se em: Common Contente Knowledge (CCK), Specialized Content Knowledge (SCK) e Horizon Contente Knowledge (HCK). Já a categoria Conhecimento Pedagógico do Conteúdo subdivide-se em: Knowledge of content and students (KCS), Knowledge of Content and Teaching (KCT) e Knowledge of Contente and Curriculum (KCC) (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008).

O CCK é definido como o conhecimento matemático utilizado em uma ampla gama de configurações, além da atividade de ensinar matemática. É o conhecimento utilizado por adultos – não matemáticos – escolarizados na resolução de diversos problemas matemáticos. “By ‘common’, however, we do not mean to suggest that everyone has this knowledge. Rather, we mean to indicate that this is knowledge of a kind used in a wide variety of settings — in other words, not unique to teaching” (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 399).

O HCK é definido como uma consciência de como os temas matemáticos estão relacionados sobre a extensão de matemática incluída no currículo. Já o SCK é o conhecimento/habilidade matemático utilizado no processo de ensino e tipicamente não é necessário para outros fins além do de ensinar. Esse conhecimento é necessário, por exemplo, na procura de padrões nos erros dos estudantes ou na avaliação da abordagem do conteúdo em sala de aula, trabalho este que envolve uma espécie de descompactação da matemática que não é necessária - ou mesmo desejável - em outras configurações que não ensinar. Muitas das tarefas cotidianas de ensino são distintas para esse trabalho especial.

> Some might wonder whether this decompressed knowledge is equivalent to conceptual understanding. They might ask whether we would not want all learners to understand content in such ways. Our answer is no. What we are describing is more than a solid grasp of the material. We do not hold as a goal that every learner should be able to select examples with pedagogically strategic intent, to identify and distinguish the complete range of different situations modeled by 38 ÷ 4, or to analyze common erros (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 400-401)

O KCS é o conhecimento que combina conhecimento sobre os alunos e conhecimento sobre matemática. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o KCS é conhecimento do conteúdo entrelaçado com o conhecimento de como os estudantes pensam, sabem ou aprendem um determinado conteúdo em particular.

> In other words, recognizing a wrong answer is common content knowledge (CCK), whereas sizing up the nature of an error, especially an unfamiliar error, typically requires nimbleness in thinking about numbers, attention to patterns, and flexible thinking about meaning in ways that are distinctive of specialized content knowledge (SCK). In contrast, familiarity with common errors and deciding which of several errors students are most likely to make are examples of knowledge of content and students (KCS). (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 401)

Enquanto o KCC relaciona o conhecimento do conteúdo e do currículo escolar, o KCT combina conhecimento do conteúdo matemático com o conhecimento do ensino deste conteúdo. O domínio KCT inclui saber construir, a partir dos conhecimentos dos alunos e das estratégias utilizadas por eles, processos pertinentes para tratar e corrigir seus erros e concepções errôneas.

3.4 COACTIV: PROFESSIONAL COMPETENCE OF TEACHERS, COGNITIVELY ACTIVATING INSTRUCTION, AND THE DEVELOPMENT OF STUDENTS' MATHEMATICAL LITERACY

O Professional Competence of Teachers, Cognitively Activating Instruction, and the Development of Students' Mathematical Literacy (COACTIV) é um projeto de pesquisa cooperativa envolvendo o Instituto Max Planck para o Desenvolvimento Humano (Berlim), a Universidade de Kassel e a Universidade de Oldenburg, financiado pela German Research Foundation (DFG) como um componente do programa prioritário BIQUA (Escola de Qualidade), coordenado por Jürgen Baumert. Este projeto visava: "conceptualizing and assessing a broad spectrum of teacher competencies, personality variables, and work-related variables in the context of secondary mathematics instruction" (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008, p. 874-875).

O estudo realizado pelo COACTIV é caracterizado como extensão alemã da avaliação de Matemática realizada pelo **"**Programme for International Student Assessment"[23](PISA) no ano de 2003. O universo de pesquisa deste projeto abrangeu 198[24] professores (em serviço e já graduados), 194 turmas e 4.353 alunos (13 dos professores participantes ministravam aulas paralelas na mesma escola) e seu objetivo era estudar os conhecimentos dos professores de Matemática das turmas participantes – por meio de testes (questionários) elaborados pela equipe do COACTIV, que abordavam os temas: conhecimento profissional, qualidade de ensino e formação profissional, dentre eles o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo – buscando estabelecer relações entre o desempenho dos professores e o desempenho de seus estudantes no PISA. (BAUMERT *et al.*, 2010; BAUMERT; KUNTER, 2013).

---

[23] O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países e é organizado e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O objetivo do PISA é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea. As avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento – Leitura, Matemática e Ciências – havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas áreas. Em 2000, o foco foi em Leitura; em 2003, Matemática; em 2006, Ciências; em 2009, Leitura; em 2012, Matemática; em 2015, o foco será Ciências. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos. Acesso em: 06 jun. 2014.

[24] Dos 198 professores, 85 ministravam aula no ensino secundário destinado à preparação dos estudantes para o Ensino Superior – via acadêmica (Gymnasium) - e 113 em outros tipos de escola secundária – via não acadêmica. Sendo o ensino secundário em termos de *nível/grau* equivalente aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

As principais questões de pesquisa do projeto eram as seguintes[25]: a) Que aspectos da competência do professor podem ser identificados empiricamente e como eles se relacionam? b) Que aspectos da competência do professor influenciam a prática em sala de aula dos professores? c) Quais são as influências diretas e indiretas da competência do professor sobre os resultados da aprendizagem dos alunos?

A partir das perspectivas teóricas de Shulman (1986, 1987) e Bromme (1993), este projeto se propôs a estudar quais são as habilidades necessárias aos professores para que estes criem oportunidades para o sucesso da aprendizagem na sala de aula. O projeto COACTIV analisa a importância relativa dos diversos aspectos da competência do professor para a qualidade de ensino de aulas de matemática na Alemanha. Em 2007, o COACTIV foi expandido originando o COACTIV-R (COACTIV - Referenderiat) voltando-se para a formação inicial do professor de Matemática.

Tomando como subjacente a definição de conhecimento pedagógico do conteúdo elaborada por Shulman (1986, p. 9) de que este teria a função de "[...] tornar o conteúdo compreensível para os outros [...]", a equipe do COACTIV identificou três subdimensões que são especialmente importantes para o ensino da matemática: (1) Tasks play a central role in teaching mathematics (conhecimento de tarefas matemáticas); (2) Teachers need to work with students' existing conceptions and prior knowledge (conhecimentos de equívocos e dificuldades dos estudantes); (3) Students' construction of knowledge is often only successful with instructional support and guidance (conhecimento de estratégias de ensino da matemática - específicas) (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008, p. 875-876).

No COACTIV o Content Knowledge (CK) é definido como:

> Content knowledge describes a teacher's understanding of the structures of his or her subject. [...]Clearly, teachers' knowledge of the mathematical content covered in the school curriculum should be much deeper than that of their students. We conceptualized CK as a deep understanding of the contents of the secondary school mathematics curriculum. [...] Note that this conceptualization clearly distinguishes CK from other possible notions of content knowledge: (1) the everyday mathematical knowledge that all adults should have, (2) the school-level mathematical knowledge that good school students have, and (3) the university level mathematical knowledge that does not overlap with the content of the school curriculum (e.g., Galois theory or functional analysis). CK as conceptualized in

25 Disponível em: https://www.mpib-berlin.mpg.de/en/research/concluded-areas/educational-research/research-area-iv/coactiv. Acesso em: 06 jun. 2014.

> COACTIV lies between (2) and (3). (KRAUSS; BAUMERT; BLUM, 2008, p. 876)

Apesar de o CK estar posicionado entre a matemática em nível escolar e a matemática em nível universitário, Baumert *et al.* (2010) e Kleickmann *et al.* (2013) esclarecem que este domínio refere-se a uma compreensão matemática profunda do conteúdo curricular a ser ensinado na escola (contempla, por exemplo, as seguintes estruturas: aritmética, álgebra e geometria), contudo esse *aprofundamento* da matemática escolar diferencia-se da pesquisa acadêmica em matemática gerada em instituições de pesquisa e do conhecimento cotidiano matemático que os adultos retêm após deixar a escola.

Segundo Krauss, Baumert e Blum (2008), os dados de validação de construto COACTIV sugerem um aumento relativamente acentuado no conhecimento dos professores, especificamente o conhecimento do assunto (CK e PCK), desde o início até o fim da formação universitária, seguido de um aumento mais modesto no período de pós-qualificação chegando a uma estagnação. Ainda segundo os autores, esses dados podem ser justificados pela Teoria da Prática Deliberada[26], uma vez que, em geral, não são dadas no cotidiano escolar as condições necessárias para os professores superarem suas fraquezas (deficiências de conhecimento).

As pesquisas do COACTIV evidenciam que o PCK é um pré-requisito necessário para os professores serem capazes de criar ambientes de aprendizagem poderosos, que proporcionam a aprendizagem dos estudantes, mas essa relação era mais fraca para CK (KRAUSS *et al.*, 2008; KRAUSS; BLUM, 2012). Todavia, o CK é considerado como um pré-requisito necessário para o desenvolvimento do PCK. No entanto, um forte CK não leva necessariamente ao desenvolvimento de PCK (KLEICKMANN *et al.*, 2013). Além disso, o CK sozinho não é suficiente para os professores construírem ambientes de ativação cognitiva e não substitui o PCK (BAUMERT *et al.*, 2010).

> Our findings thus confirm that it is PCK that has greater predictive power for student progress and is decisive for the quality of instruction. These results do not imply that CK has no direct influence on instructional features, however. In fact, teachers with higher CK

[26]De acordo com a Teoria da Prática Deliberada, a perícia – tornando o sujeito especialista – não aumenta somente a partir da execução de uma dada atividade por um longo período de tempo (superior a 10 anos), uma vez que para que o sujeito torne-se especialista, alguns fatores são determinantes, como motivação, condições físicas e psicológicas, além de suporte de especialistas. (ERICSSON, KRAMPE, TESCH-ROMER, 1993, p. 38)

> scores are better able to align the material covered with the curriculum. But higher levels of CK have no direct impact either on the potential for cognitive activation or on the individual learning support that teachers are able to provide when learning difficulties occur. It is the level of PCK that is decisive in both these cases. Both PCK and CK vary independently of effective classroom management. (BAUMERT *et al.*, 2010, p. 164)

Conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) e conhecimento do conteúdo (CK) são os principais componentes da competência do professor que afetam o progresso do aluno. No entanto, pouco se sabe sobre como a formação de professores afeta o desenvolvimento do CK e PCK (KLEICKMANN *et al.*, 2013). Ainda no tocante à formação de professores, Krauss, Baumert e Blum (2008) ressaltam que:

> All these aspects suggest that it would not be justified at all to simply hire subject matter specialists for schools in the expectation that their content knowledge would automatically enable them to deliver high-quality teaching that would in turn foster student learning. Rather, the data support the hypothesis that it is a combination of content knowledge, general pedagogical knowledge, and the ability to actually apply this knowledge in the classroom that accounts for teachers' effectiveness. (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008, p. 886-887)

Os resultados do COACTIV evidenciam que há mais fatores, além de uma base de conhecimento específico sólida, que interferem na qualidade do ensino e na competência profissional[27] do professor e esses fatores estão relacionados a competências específicas da profissão docente, que compõem a "competência pedagógica", que é composta, dentre outros, por aspectos motivacionais (tanto do docente quanto do discente), pela capacidade de gestão da sala de aula, de autorregulação e resiliência (KUNTER *et al.*, 2013). Neste contexto, os autores salientam que,

> [...]our results indicate that teacher educators would be ill advised to focus exclusively on the transmission of content-specific knowledge. Strategies for coping with work-related demands and to maintain engagement over the career might be important additions to the teacher education curriculum. (KUNTER *et al*., 2013, p. 817)

[27]O termo "competência profissional" é a aplicação do conceito para a vida ativa, particularmente em profissões altamente complexas e exigentes, em que o domínio de situações é especialmente dependente da interação de conhecimentos, habilidades, atitudes e motivação. (KUNTER *et al*., 2013)

3.5 “MATHEMATICS TEACHER’S SPECIALISED KNOWLEDGE” DE JOSÉ CARRILLO E COLABORADORES

O Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge[28] (MTSK) é um modelo analítico proposto por José Carrillo e seus colaboradores, da Universidad de Huelva na Espanha, que emerge das dificuldades teóricas que o grupo enfrentou ao aplicar o modelo MKT, proposto por Deborah L. Ball e colaboradores.

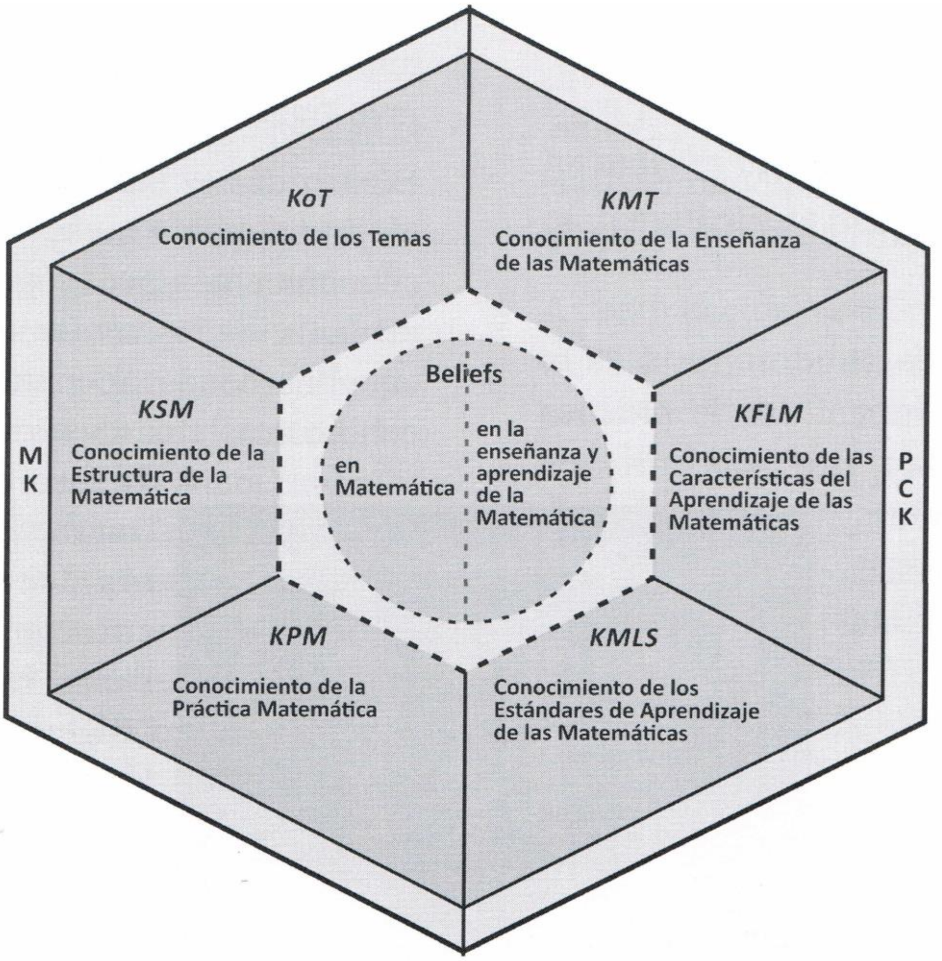
Os principais problemas apontados pelos autores do MTSK no tocante à utilização do MKT referem-se, especialmente, a dois aspectos: 1) A dificuldade em delimitar quando CCK acaba e quando SCK inicia, sendo que essa dificuldade é intrínseca à definição de CCK; 2) A dificuldade em delimitar SCK em relação à HCK, SCK em relação à KCS, sendo que essa dificuldade é intrínseca à definição de SCK (CARRILLO *et al.*, 2014). Assim, o grupo propõe o MTSK como uma alternativa ao MKT, sendo que o primeiro é composto pelos seguintes subdomínios: Mathematical Knowledge (MK) e Pedagogical Content Knowledge (PCK). O MK subdividi-se em: Knowlegde of Topics (KoT), Knowlegde of the Structure of Mathematics (KSM) e Knowlegde of the Practice of Mathematics (KPM), enquanto o PCK subdivide-se em: Knowledge of Mathematics Teaching (KMT), Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM) e Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS) (CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013; CARRILLO *et al.,* 2014).

O KoT é apresentado como solução ao problema da delimitação entre CCK e SCK, enquanto que o KFLM é apresentado como alternativa ao problema da delimitação entre KCS e SCK. O KMT substituiu o KCT, enquanto que o KMLS amplia noção de conhecimento do currículo, ao passo que contempla o conhecimento dos níveis de aprendizagem da matemática (CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013).

---

[28]Apesar da teoria ter origem espanhola, os autores, considerando a tradição acadêmica da área, optaram por adotar o inglês como sendo idioma de apresentação dos conceitos e de suas respectivas siglas.

Figura 3: Subdomínios do MTSK.



Fonte: Carrillo, Contreras e Flores (2013).

O subdomínio KoT inclui aspectos fenomenológicos, significados de conceitos e exemplos específicos que caracterizam aspectos concretos do tópico abordado, além de contemplar o conteúdo disciplinar da matemática abordado por livros didáticos e demais materiais de cunho pedagógico.

O KSM refere-se ao entendimento dos autores de que o conhecimento dos professores, além de incluir os conceitos como elementos isolados, deve integrá-los em um sistema de conexões, que permita ao professor compreender certos conceitos avançados desde uma perspectiva elementar e desenvolver certos conceitos elementares a partir de uma perspectiva avançada.

O KPM abarca aspectos relacionados ao pensamento matemático, como o conhecimento relativo às diferentes formas de definir, argumentar ou demonstrar em matemática, bem como o conhecimento da sintaxe matemática.

A ação de ensinar envolve o conhecimento de como esse ensino pode e deve ser desenvolvido, assim o KMT contempla conhecimentos como conhecer distintas estratégias de ensino que permitam ao professor fomentar o desenvolvimento das capacidades matemáticas procedimentais e conceituais. Da mesma forma, esse subdomínio prevê que o professor precisa conhecer exemplos que despertem no estudante a intuição a respeito de alguns conceitos, além de recursos que lhe permitam induzir seus alunos a conhecer, mediante manipulação, certos conceitos matemáticos.

Saber como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos é um conhecimento que, para os autores desta teoria, qualquer professor deveria possuir. Sendo assim, o KFLM abarca o conhecimento das características do processo de compreensão dos distintos conteúdos pelos estudantes, os erros, dificuldades e obstáculos associados a cada conceito e a linguagem usada pelos estudantes em relação ao conceito trabalhado em sala de aula.

O KMLS refere-se especialmente ao conhecimento, pelo professor, do currículo adotado pela instituição em todas as etapas/níveis de ensino. Esse conhecimento pode complementar-se com informações presentes nas produções originárias de pesquisas da área de educação matemática, com informações fornecidas por professores experientes a respeito da aprendizagem esperada em cada etapa.

3.6 COMPREENSÃO PROFUNDA DA MATEMÁTICA FUNDAMENTAL DE LIPING MA

Liping Ma lançou, em 1999, o livro *Knowing and Teaching Elementary Mathematics – teachers's understanding of fundamental mathematics in China and the United States*, cuja versão em português foi publicada em 2009, com o título *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, no qual relatava resultados de pesquisa iniciada em seu doutorado realizado na Universidade de Stanford sob a orientação de Lee Shulman e continuada durante seu pós-doutoramento na Universidade de Berkeley sob a orientação de Alan Schoenfeld.

Nesse livro, a autora discute o conhecimento matemático necessário para um ensino eficiente de matemática na educação básica a partir de uma pesquisa qualitativa que desenvolveu com professores chineses e norte-americanos que ensinam esta área do conhecimento. Na referida pesquisa, Ma utilizou as questões desenvolvidas por

Deborah L. Ball e seus colaboradores no projeto de investigação “Teachers mathematical knowledge for teaching” (TELT).

O interesse de Liping Ma pelo tema de sua pesquisa originou-se do seguinte paradoxo:

> Em comparações internacionais de competência matemática, os estudantes chineses geralmente ultrapassam o desempenho dos estudantes americanos. Paradoxalmente, os professores chineses aparentam ter muito menos educação matemática que os professores americanos. A maior parte dos professores chineses teve entre 11 e 12 anos de escolaridade – completam o nono ano e frequentam mais dois ou três anos na escola normal. Em contrapartida, a maioria dos professores americanos recebeu entre 16 e 18 anos de formação, correspondentes à licenciatura e, frequentemente, a mais um ou dois anos de estudos. (MA, 2009, p. 19)

A partir dessa constatação, a autora se propôs a identificar as diferenças no conhecimento e na compreensão do conteúdo da matemática entre professores americanos e chineses do ensino básico a partir de uma Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF) que enfatiza os aspectos do conhecimento que contribuiriam mais decisivamente para a capacidade do professor para explicar ideias da matemática importantes para os alunos.

O termo “Fundamental” presente no CPMF está relacionado aos conteúdos estudados por Ma (1999; 2009): os números inteiros, os números racionas, área e perímetro, ou seja, o conceito de “Compreensão Profunda da Matemática Fundamental” está relacionado ao ensino destes conteúdos na Escola Elementar e Média nos Estados Unidos e na Escola Primária na China[29]. O foco nestes conteúdos é justificado por Ma quando argumenta que “[...] de uma perspectiva de obtenção de competência matemática, ensinar matemática elementar não significa levar os alunos meramente até o final da aritmética ou ao início da ‘pré-álgebra’. Significa antes providenciar-lhes os alicerces sobre os quais se deverá construir a sua futura aprendizagem matemática”. (MA, 2009, p. 204).

Ainda de acordo com Ma (2009), o termo fundamental tem três significados relacionados: a) elementar, por alocar-se no início da aprendizagem matemática; b) primário, por conter os rudimentos de conceitos matemáticos mais avançados; c) básico, por providenciar uma base (fundação) para a futura aprendizagem matemática dos

[29]No Brasil, esses conteúdos estão contemplados nos currículos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental.

alunos. A partir desta concepção, a compreensão profunda da matemática fundamental (CPMF) é mais do que um sólido entendimento conceptual da matemática elementar, “[...] é a tomada de consciência da estrutura conceitual e das atitudes básicas em relação à matemática elementar e à capacidade de providenciar uma base para essa estrutura conceptual e incentivar as atitudes básicas nos alunos” (MA, 2009, p. 215).

Para a autora (2009), um entendimento profundo da matemática tem “alcance”, “profundidade” e “abrangência”, sendo o alcance do entendimento definido como a “[...] capacidade de relacionar um tópico com tópicos de poder conceptual similar ou menor”, a profundidade de entendimento definida como a “[...] capacidade de relacionar um tópico com aqueles de maior poder conceptual”, e a abrangência definida como a “[...] capacidade de relacionar todos os tópicos” (MA, 2009, p. 215).

O processo de ensino (que culminará na aprendizagem) conduzido por um professor que possui CPMF tende a ter, de acordo com Ma (2009), as seguintes propriedades: conectividade, perspectivas múltiplas, ideias básicas e coerência longitudinal.

A “conectividade” ocorre quando um professor tem uma intenção geral de estabelecer conexões entre conceitos e procedimentos matemáticos, desde conexões simples e superficiais entre elementos do conhecimento individuais até conexões complicadas e profundas entre diferentes operações e subdomínios matemáticos. Essa intenção, quando refletida no ensino, impede que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada e, em vez de aprenderem tópicos isolados, os alunos assimilarão um corpo de conhecimento unificado (MA, 2009).

As “perspectivas múltiplas” estão associadas à valorização – pelos professores – de diferentes facetas de uma ideia e de várias abordagens para uma solução, bem como de seus benefícios e inconvenientes. Os professores, com CPMF neste contexto, são capazes de elaborar explicações matemáticas destas várias facetas e abordagens, bem como de favorecer o desenvolvimento de uma compreensão flexível da matemática em seus alunos (MA, 2009).

A propriedade “ideias básicas” está associada à capacidade dos professores de reconhecer os “conceitos e princípios básicos da matemática simples mas poderosos” (por exemplo, a ideia de igualdade), além disso, tendem a revisar e reforçar estas ideias básicas. Os alunos, ao serem colocados perante estas ideias, são não apenas encorajados a abordar os problemas, mas também orientados no sentido de conduzir uma atividade matemática efetiva (MA, 2009, p. 211-212).

A coerência longitudinal é identificada nos professores quando estes não se limitam a conhecer os conteúdos que devem ser ensinados em determinado ano escolar, mas desenvolvem um entendimento fundamental de todo o currículo da matemática elementar. "Com CPMF, os professores estão prontos para explorar a qualquer momento uma oportunidade de rever conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente. Também sabem o que os alunos vão aprender mais tarde, e aproveitam para lançar as bases próprias dessa aprendizagem. (MA, 2009, p. 212).

O termo coerência longitudinal utilizado por Ma (2009) está relacionado com a dimensão conhecimento curricular da taxonomia de Shulman (1986). Além disso, estas quatro propriedades estão inter-relacionadas. Enquanto a primeira propriedade, conectividade, é uma característica geral do ensino da matemática por parte de um professor com CPMF, as outras três – perspectivas múltiplas, ideias básicas e coerência longitudinal – constituem ligações que conduzem a diferentes aspectos da compreensão significativa da matemática – alcance, profundidade e abrangência.

Especificamente sobre aos resultados de suas pesquisas em relação ao ensino da operação de subtração por reagrupamento de números naturais, Ma (2009) discorre que:

> A subtração com reagrupamento é tão elementar que é difícil a inexistência de conhecimento adequado dos professores sobre este tópico. Contudo, as entrevistas deste capítulo revelaram que era o caso de alguns professores americanos. 77% dos professores americanos e 14% dos professores chineses mostraram apenas o conhecimento procedimental do tópico. O seu entendimento era limitado a aspectos superficiais do algoritmo – os passos de tirar e transformar. Esta limitação restringiria as expectativas no que toca à aprendizagem dos alunos bem como a capacidade de promover uma aprendizagem conceitual. (MA, 2009, p. 70)

Em relação aos dados oriundos da análise referente à operação de multiplicação com números naturais, Ma (2009) comenta que grande parte do conhecimento dos professores americanos sobre este tópico era procedimental, em contrapartida, a maioria dos professores chineses demonstrava um entendimento conceitual.

Os dados oriundos dos testes sobre a realização da operação de divisão entre números racionais evidenciaram que o conhecimento dos professores americanos sobre a divisão por frações foi nitidamente inferior ao conhecimento que possuíam dos dois tópicos anteriores (subtração e multiplicação de números naturais). Embora 43% dos professores tivessem conseguido calcular corretamente uma resposta completa, nenhum demostrou entendimento da fundamentação lógica subjacente aos cálculos. Já o desempenho dos professores chineses ao efetuar a tarefa foi semelhante ao obtido nas tarefas anteriores, uma vez que todos os seus cálculos estavam corretos e alguns professores foram mais além ao debater a fundamentação lógica subjacente ao algoritmo e a "maioria dos professores criou pelo menos uma representação correta e apropriada" (MA, 2009, p. 154).

Com relação à análise dos dados oriundos dos testes que envolviam os conceitos de área e perímetro, Ma (2009) constatou que, igualmente aos professores chineses, os professores americanos não mostraram grandes dificuldades no conhecimento dos tópicos, contudo a maioria dos professores americanos agiu de forma "não matemática ao abordar a nova ideia e não a investigou de uma forma independente" (MA, 2009, p. 188).

Os dados de Ma tornam visível a distinção entre os conhecimentos matemáticos de professores chineses e americanos, distinção que é justificada pela autora em função da Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF) apresentada pelos professores chineses, além disso, "[...] o hiato de conhecimento entre professores americanos e chineses é paralelo ao hiato de aprendizagem entre alunos americanos e chineses revelado por estudiosos" (MA, 2009, p. 245)

> Dado que o paralelo dos dois hiatos não é mera coincidência, segue-se que, se quisermos trabalhar no aperfeiçoamento da educação matemática dos alunos, também precisaremos aperfeiçoar o conhecimento dos seus professores em matemática escolar. [...]A qualidade do conhecimento da matéria pelo professor afeta diretamente a aprendizagem dos alunos – e pode ser imediatamente alvo de intervenção. (MA, 2009, p. 246)

A partir desse resultado, a autora procurou investigar como os professores chineses desenvolveram a CPMF. Nas entrevistas desenvolvidas com eles, os professores se referiram à atividade de estudar materiais de ensino intensamente, especificamente, referiram-se "a três componentes principais – o Quadro de Referência do Ensino e Aprendizagem (*jiaoxue dagang*), manuais escolares (*keben*) e manuais do professor (*beike fudao cailiao*)" (MA, 2009, p. 225), que, na China, equivalem ao currículo escolar. O Quadro de Referência do Ensino e Aprendizagem é publicado pelo Departamento Nacional de Educação e estipula o que os alunos devem aprender em cada ano e os padrões para a sua aprendizagem. Os Manuais Escolares são equivalentes aos livros didáticos e os Manuais do Professor providenciam explicações sobre os fundamentos matemáticos nos manuais escolares correspondentes e sugestões de como ensinar (MA, 2009).

As entrevistas realizadas por Ma (2009, p. 232-233) evidenciaram que “estudar materiais de ensino de forma minuciosa era muito importante para eles [os professores de Matemática]. Estudar materiais de ensino ocupa um lugar significativo no trabalho dos professores chineses”. Evidenciaram ainda que o processo de formação dos professores inicia-se em sua passagem pela escola básica como alunos, porque estudam em instituições cujo ensino de matemática é de qualidade, e adquirem competência matemática. Amplia-se na formação inicial de professores, mas se consolida no decorrer de sua carreira de professor, à medida que desenvolvem o CPMF, dentre outras formas, estudando os materiais curriculares chineses – Quadro de Referência do Ensino e Aprendizagem, manuais escolares e manuais do professor – que utilizam para desempenharem seu trabalho em sala de aula.

> Além de uma cuidadosa investigação “do que ensinar”, os professores estudam “como ensinar”, ou, usando a sua linguagem, “como lidar com o material de ensino [chuli jiaocai]”. De fato, na investigação “do que o material é”, está sempre implícita e incluída a preocupação de “como ensinar”. Afinal, um manual escolar é composto com o propósito de ser ensinado. Indo direto ao problema de “como lidar com o material de ensino”, os professores consideram a melhor forma de ensinar com o manual escolar – como apresentar a matéria, explicar um tópico, conceber exercícios apropriados para os alunos, etc. – como promover o máximo de aprendizagem no mais curto espaço de tempo, como beneficiar o mais possível todos os alunos numa turma, tanto os adiantados como os atrasados. No processo de estudar o que vem no manual e de como lidar com ele, ocorrem interações entre “o que ensinar” e “como ensiná-lo”. É fácil de ver que, através de tais interações, o conhecimento de um professor sobre a matemática irá desenvolver-se, estimulado pela preocupação de como ensinar. (MA, 2009, p. 229)

De acordo com a teorização de Ma (2009), o conhecimento do conteúdo de matemática por parte de um professor, desenvolvido com a preocupação de ensinar e aprender, será relevante para ensinar e é provável que seja usado no ensino. A autora destaca ainda que o desempenho dos professores chineses nos testes está fortemente relacionado ao profundo conhecimento da matemática elementar que possuem e que, de acordo com a mesma autora, é desenvolvido no processo de preparação para as aulas, ensinando a matéria e refletindo sobre o processo de ensino, sendo todas essas fases associadas fortemente ao currículo nacional chinês.

3.7 A DIFERENCIAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA CIENTÍFICA E A MATEMÁTICA ESCOLAR PROPOSTA POR PLÍNIO MOREIRA

A perspectiva teórica apresentada por Moreira (2004) em sua tese de doutorado e, posteriormente, por Moreira e David (2008; 2010) em relação à formação matemática do professor de Matemática é originária de estudos teóricos e pesquisas empíricas relatados na literatura, e passa pela diferenciação entre a Matemática Científica – ou Matemática Acadêmica – e a Matemática Escolar, como argumentam os autores:

> [...] achamos conveniente ressaltar a operacionalidade da idéia de se reconhecer como distintos, embora inter-relacionados, os campos de saber correspondentes à matemática científica e à matemática escolar, tendo em vista a análise das relações entre a formação inicial na licenciatura e a prática docente na escola básica. A distinção é importante porque se a matemática escolar é concebida como mero subconjunto da matemática científica, a tendência é que a primeira seja reduzida à parte elementar da última, podendo se desenvolver uma desqualificação do conhecimento matemático escolar frente ao saber acadêmico. Nesse processo, a matemática escolar acaba se tornando apenas o componente fácil, simples e básico do complexo e sofisticado edifício da matemática científica. Essa concepção pode implicar ainda a idéia de que não há muito sobre o que investigar, questionar ou refletir em se tratando da matemática escolar, dotando-a sutilmente, assim, da condição de conhecimento naturalmente "dado", dentro do processo de formação profissional do professor. (MOREIRA, 2004, p 35-36)

Esta teorização originou-se da reflexão frente aos seguintes questionamentos: "Que relações existem entre o conjunto de significados que a comunidade científica dos matemáticos identifica com o nome de matemática e o conjunto de saberes especificamente associados à educação matemática escolar?" (MOREIRA, 2004, p. 10)

> Seria o segundo [a matemática escolar] um mero subconjunto do primeiro, apenas 'adaptado' ao público escolar? Neste caso, como se desenvolve esse processo de adaptação? Caso contrário, em que medida seria a matemática escolar uma construção histórica relativamente autônoma que se constitui no interior de uma *forma escolar* produtora de cultura? (MOREIRA, 2004, p.10, grifo do autor)

Para este autor, os conhecimentos classificados como "*envolvidos nas questões que se colocam para o professor em sua prática docente escolar"* não se identificam imediatamente com aqueles "<u>estritamente necessários</u> à prática do professor na escola básica" e nem se pode afirmar que eles sejam, em sua totalidade, efetivamente mobilizados na prática docente, pois isto seria "equivalente a postular que a prática do professor não pode passar por outros caminhos" e que a prática docente escolar seria uma instância auto-suficiente de formação profissional (MOREIRA, 2004, p. 11, grifos do autor).

A *matemática científica* – ou *matemática acadêmica* – é entendida como "um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais" (MOREIRA, 2004, p. 18) e que "com sua estética, suas necessidades e seus valores específicos, se apoia fundamentalmente numa percepção "transversal" do *matematicamente correto,* tomando como referência central o corpo de conhecimentos abstratos — conectados por uma lógica dedutiva rigorosa — que a constitui como ciência" (MOREIRA, p. 49, grifo do autor).

Já a *matemática escolar*[30] é entendida como um "conjunto dos saberes 'validados', associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática" (MOREIRA, 2004, p. 18) e que "parece conformar uma visão pedagógica do conhecimento matemático, a qual é essencialmente 'longitudinal', na medida em que compreende a apreensão de um conceito, por exemplo, como um *processo* que se desenvolve ao longo de vários anos de escolarização (MOREIRA, 2004, p. 49, grifo do autor).

> Com essa formulação, a matemática escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, como também resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos, etc. Dessa forma, distanciamo-nos, em certa medida, de uma concepção de matemática escolar que a identifica com uma disciplina "ensinada" na escola, para tomá-la como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente. (MOREIRA, 2004, p. 18)

A partir de uma perspectiva não reducionista e sem desconsiderar a trama de condicionamentos sociais e culturais que se prendem a qualquer elaboração com essa especificidade, Moreira (2004) e Moreira e David (2010) referenciam a matemática

---

[30] A elaboração teórica proposta por Moreira (2004) e Moreira e David (2010) distancia-se das perspectivas teóricas de Yves Chevallard e André Chervel, uma vez que Chevallard reduz a matemática escolar a uma adaptação da matemática científica e Chervel reduz a matemática escolar às práticas que se desenvolvem no interior da escola. (MOREIRA & DAVID, 2010)

acadêmica e a matemática escolar nas condições em que se realizam as práticas do matemático e do professor da matemática da escola.

Caracterizando as práticas desses profissionais, Moreira (2004) discorre que:

> A prática do matemático tem como uma de suas características mais importantes, a produção de resultados originais "de fronteira". Os tipos de objetos com os quais trabalha a matemática científica contemporânea, os níveis de abstração em que se colocam as questões em todos os seus ramos, atualmente, e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. (MOREIRA, 2004, p. 20)

Entretanto,

> [...] a prática do professor de Matemática da escola básica desenvolve-se num contexto *educativo*, o que coloca a necessidade de uma visão fundamentalmente diferente. Nesse caso, a natureza dos objetos matemáticos estudados está profundamente associada — e, muitas vezes, é o que dá sentido — aos princípios, às definições, às justificativas e argumentações, aos métodos e aos resultados da matemática escolar. (MOREIRA, 2004, p. 20)

Assim sendo, algumas ações relativas ao saber matemático escolar são fundamentais nas atividades profissionais dos professores de Matemática da escola básica, como: adoção de definições mais descritivas, adesão a formas alternativas de demonstrações, argumentações, apresentações de conceitos e resultados (mais acessíveis ao aluno em cada um dos estágios escolares) e uma reflexão profunda sobre as origens dos erros dos alunos, etc. (MOREIRA e DAVID, 2010).

No tocante aos erros, Moreira e David (2010, p. 32) argumentam que "para a matemática escolar, no entanto, é importante pensar o erro como um fenômeno psicológico que envolve aspectos diretamente relacionados ao desenvolvimento dos processos de aprendizagem" ao passo que "para a matemática científica, o erro é um fenômeno lógico que expressa uma contradição com algum fato já estabelecido como 'verdadeiro'".

Moreira e David (2010) apoiam-se ainda em estudos de natureza cognitiva que apontam diferenças importantes observadas na percepção de um determinado conceito como um objeto de trabalho dentro da matemática científica ou ainda como objeto de ensino na matemática escolar.

Na teorização feita por Moreira (2004) e Moreira e David (2010), as funções que as definições e provas possuem dentro da matemática acadêmica e da matemática escolar são objeto de estudo, uma vez que

> [...] a necessidade de bem caracterizar os respectivos objetos, de validar as afirmações a eles referidas e de explicar as razões pelas quais certos fatos são aceitos como verdadeiros e outros não, o papel que desempenham, de modo geral, as definições e as provas, em cada um dos contextos é, todavia, bastante diferente. (MOREIRA, 2004, p. 23)

Como a estruturação da matemática científica é axiomática, as definições, teoremas, postulados e conceito primitivos estabelecidos anteriormente formam a base de desenvolvimento de todas as provas. Como consequência, as definições devem ser precisas, uma vez que a teorização pode apresentar contradições em função de ambiguidades na caracterização de um objeto matemático (MOREIRA, 2004).

As definições formais e as demonstrações rigorosas são essenciais para a matemática científica, “tanto durante o processo de conformação da teoria — nos momentos em que a comunidade avalia e eventualmente acata um resultado novo, garantindo-se, então, a sua incorporação ao conjunto daqueles já aceitos como válidos — quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada” (MOREIRA, 2004, p. 24).

> No caso da matemática escolar, dois elementos fundamentais estão permanentemente em cena, os quais modificam significativamente o papel das definições e das provas. O primeiro elemento se refere ao fato de que a “validade” dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida, ao contrário, já está garantida, a priori, pela própria matemática acadêmica. [...] A questão fundamental para a matemática escolar — este é o segundo elemento, sempre presente no cenário educativo — refere-se à aprendizagem e, portanto, ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à *compreensão* do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extra-escolar. Há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições e conceitos primitivos da teoria e, por outro lado, promover entre os alunos da escola o desenvolvimento de uma convicção profunda a respeito da validade deste mesmo resultado. (MOREIRA, 2004, p. 24, grifo do autor)

O objetivo principal das demonstrações na matemática acadêmica refere-se à inserção de um determinado resultado entre o conjunto dos resultados validados pela comunidade científica, ao passo que na educação matemática escolar a demonstração exerce papéis fundamentalmente pedagógicos, como:

> a) contribuir para a construção de uma visão da disciplina na qual os resultados não sejam tomados como dados arbitrários, mas elementos de saber socialmente construídos e aceitos como válidos através de negociação e argumentação; b) desenvolver a capacidade de argumentação. Por exemplo, a atividade pedagógica que consiste em submeter à crítica dos outros alunos uma determinada cadeia de argumentos construída por um deles pode levar a um entendimento mais significativo do resultado que é objeto da argumentação; pode levar também a um refinamento dos próprios argumentos ou mesmo da linguagem utilizada para apresentá-los. (MOREIRA & DAVID, 2010, p. 28-29)

No tocante às distintas funções que a *definição* desempenha na matemática científica e na matemática escolar, Moreira (2004, p. 31) discorre que

> Esse conflito pode ser sintetizado nos seguintes termos: Na matemática científica a definição expressa *o que o objeto é* (como objeto matemático) enquanto, do ponto de vista do processo cognitivo, o conhecimento do objeto pelo estudante parece se desenvolver através da construção de uma espécie de mosaico de representações pessoais desse objeto (não necessariamente livre de inconsistências), o qual pode ou não conter a definição formal como uma de suas peças. (MOREIRA, 2004, p. 31)

A matemática escolar, para Moreira e David (2010), é entendida como uma construção de múltiplos condicionantes, sendo um deles o currículo prescrito e, outro, a prática escolar, especialmente a prática docente. No tocante à prescrição curricular, os autores discorrem que:

> É nessa dimensão prescrita da matemática escolar — mais objetivada, desenhada num terreno de disputas e conflitos, mas sob forte influência da comunidade matemática acadêmica, cuja legitimidade social para essa tarefa ainda se mostra incomparavelmente mais sólida do que aquela conquistada pela comunidade escolar — que se manifestam mais claramente os vínculos estreitos com a matemática científica. Contudo, a matemática escolar não fica totalmente definida pelos resultados dessa disputa que se desenvolve, fundamentalmente, fora dos muros da escola. (MOREIRA, DAVID, 2004, p. 38-39)

Ao referirem-se à prática docente, especificamente aos saberes associados à prática docente, os autores recorrem à taxonomia de Shulman (1987) associando a matemática escolar ao conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo*. Argumentando que “o conhecimento pedagógico do conteúdo não é algo que é produzido e regulado a partir do exterior da escola e que deva ser transladado para ela. Ao contrário, trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são as mesmas práticas", embora este conhecimento esteja estreitamente relacionado com as prescrições presentes nos currículos escolares (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 39).

Na perspectiva dos saberes associados à prática docente, esses autores voltam-se para a teorização de Tardif *et al.* (1991)[31] ao argumentarem que a matemática escolar sofre incorporações de conhecimentos oriundos de um processo de seleção, adaptação e produção de saberes no decorrer da prática docente, e que essa seleção passa pelos conhecimentos adquiridos no processo de formação inicial e nas prescrições escolares. Os autores apoiam-se ainda em Gauthier *et al.* (1998)[32] à medida que discorrem sobre os saberes da ação pedagógica, isto é, "conhecimentos, habilidades e competências dos professores, associados diretamente às atividades da sala de aula" que são agrupados em duas categorizações: "gestão da classe" e "gestão da matéria" (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 40).

Voltando-se para as lacunas deixadas pelo processo de formação inicial – Licenciatura em Matemática – e pelos processos de produção de conhecimentos na/pela prática, Moreira e David (2004, p. 42) apresentam o seguinte questionamento: "Mas será que a prática ensina tudo?".

> Coloquemos a questão, alternativamente, nos seguintes termos: o processo de formação na licenciatura em matemática veicula saberes que, eventualmente, podem ser considerados "inúteis" para a prática docente. Do mesmo modo, trabalha certos saberes "de forma inadequada", com referência a essa prática. E, além disso, muitas vezes se recusa — justificando-se de variadas formas, entre as quais a utilização tácita do argumento de que isso não é objeto da matemática universitária — a desenvolver uma discussão sistemática com os licenciandos a respeito de conceitos e processos que são fundamentais na educação escolar básica em matemática. Pode-se imaginar que, no caso de saberes inúteis, o problema seria contornado, na prática, através da eliminação criteriosa daquilo que fosse considerado abstrato demais ou sem sentido para a ação pedagógica na sala de aula da escola. Mas no caso em que saberes fundamentais à prática pedagógica escolar não são devidamente discutidos no processo de formação, a que tipo de recurso pode recorrer o professor? (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 42-43)

---

[31] TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. *In Teoria & Educação*, n.4, p. 215-233, 1991.

[32] GAUTHIER, C.; MARTINEAU, S.; DESBIENS, J. F.; MALO, A.; SIMARD, D. (1998) *Por uma teoria da pedagogia*: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí: Unijuí.

As lacunas a que nos referimos anteriormente, deixadas pelos processos de formação e de produção de conhecimento na/pela prática, são intituladas por Moreira e David como “não saberes” e são relacionados fundamentalmente à matemática escolar. Neste contexto, os autores entendem que os “não saberes” não podem ser reduzidos “a uma simples falha de formação em relação ao conhecimento matemático científico, abstrato e deslocado de contexto” (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 48), uma vez que isso caracterizaria um reducionismo que acabaria por “desviar a formação do professor para a discussão do ‘conteúdo’ em sua forma abstrata e acadêmica, secundarizando as questões concretas a serem efetivamente enfrentadas na prática docente escolar” (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 43). Além disso, os autores argumentam que “a literatura da área, quando examinada sob a perspectiva de análise dessa problemática, oferece ampla fundamentação à tese de que a prática docente escolar não pode ser considerada uma instância capaz de induzir à produção de todos os saberes associados à ação pedagógica do professor” (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 43).

3.8 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS DIMENSÕES DO CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Esta seção é destinada à discussão de alguns pontos que identificamos nas teorias estudadas nesta revisão bibliográfica que abordou a formação matemática de professores de Matemática. Os pontos que elencamos são: a) o conhecimento matemático é *uma* das dimensões do conhecimento do professor de Matemática; b) a dimensão matemática do conhecimento do professor de Matemática se configura como uma composição entre o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo*; c) a diferenciação entre a matemática que é objeto do trabalho do professor de Matemática na escola básica e a matemática que é objeto de trabalho dos matemáticos.

3.8.1 O conhecimento matemático como *uma* das dimensões do conhecimento do professor de Matemática

Na busca do “paradigma perdido”, em 1986, Shulman voltou-se para o conhecimento do conteúdo e o desmembrou em “conhecimento do conteúdo”, “conhecimento pedagógico (ou didático) do conteúdo” e “conhecimento curricular”.

Contudo, *em nenhum momento o autor nega a existência ou inferioriza qualquer das demais dimensões do conhecimento do profissional professor*. Tanto que, em 1987, o autor publica um artigo no qual acresce mais quatro dimensões ao arcabouço que havia proposto no ano anterior e insere os conhecimentos “pedagógicos”, conforme já discorremos neste texto.

Esta inserção feita pelo autor (a inserção das dimensões pedagógicas) é amplamente conhecida, aceita e pesquisada pela comunidade acadêmica voltada para o estudo da/sobre a formação de professores, ou seja, é um resultado consolidado que não basta o profissional conhecer apenas “o conteúdo” para desempenhar a função de professor, especialmente quando se almeja um ensino de qualidade, como evidenciou a pesquisa desenvolvida pelo COACTIV ao buscar indícios de como ela acontece. Ressaltamos os resultados do COACTIV na medida em que constatou que *o ensino de matemática de qualidade* depende de outras aspectos e conhecimentos, além do “conhecer o conteúdo” pelo professor (KRAUSS; BAUMERT; BLUM, 2008).

A grande inovação de Shulman não foi pura e simplesmente uma volta para o conhecimento do conteúdo, uma vez que é de senso comum que o professor precisa conhecer o conteúdo que vai ministrar (História, Matemática, Medicina, etc.). Sua grande inovação foi trazer à tona a temática “conhecer o conteúdo para ensinar” e isso se fez pela inserção do PCK no arcabouço (analítico) de conhecimentos do professor. Ao inserir o PCK o autor suscita a discussão (e pesquisas) em torno do entendimento da natureza dessa forma de conhecer o conteúdo que é particular do professor, que se diferencia da forma de conhecer o conteúdo de qualquer outro profissional, como o engenheiro, o farmacêutico, o matemático, o filósofo, etc.

A inovação proposta por Shulman foi adotada, na área do ensino da matemática, dentre outros, por Bromme, Ball, Baumert e Carrillo, que aprofundaram a taxonomia proposta pelo autor e a adaptaram às especificidades do ensino da matemática e da pesquisa sobre o ensino da matemática na escola. Os autores elaboraram, assim como Ma, *modelos analíticos* e *não propositivos* para o ensino da matemática. Assim, a *proposição* configura-se como um segundo momento das construções propostas pelos supracitados autores, embora apresentem indícios de quais características são essenciais para o ensino eficaz da matemática.

A literatura é unânime em apontar a incipiência de um constructo teórico que apresente (e represente) “toda” matemática necessária para o ensino de matemática na escola em nível básico. O objetivo dos modelos publicados na literatura é apresentar uma base teórica para a análise do trabalho de professores de Matemática no ambiente de sala de aula, para que em um momento posterior, a partir do *entendimento das demandas matemáticas do trabalho do professor ao ensinar* esse conhecimento na escola, seja construído um arcabouço que indique as demandas de formação matemáticas dos professores de Matemática. Contudo, tendo em vista que esses modelos foram construídos a partir de pesquisas cujos objetos eram as atividades dos professores em sala de aula, especialmente o modelo da Ball (precursor e influente), eles apresentam fortes indícios das características do conhecimento matemático do professor de Matemática da escola em nível básico, que são compostos pelas dimensões: Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, conforme discorreremos na sequência.

3.8.2 A dimensão matemática do conhecimento do professor de Matemática como composição entre o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo*

O primeiro aspecto que destacamos em relação às teorias propostas por Bromme, Ball, Baumert, Carrillo e por Ma (indiretamente), é que a matemática requerida pelo professor para ensinar esta área do conhecimento é composta por dois subdomínios: o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, ou seja, a formação do professor de Matemática, em relação ao *conteúdo* que vai ministrar em sua atividade profissional, deverá contemplar o *conhecimento do conteúdo específico* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo*.

Para Bromme (1993), a dimensão matemática da formação matemática do professor é composta pelo conhecimento da matemática (acadêmica), matemática escolar, da filosofia da matemática escolar e o conhecimento pedagógico do conteúdo, nos termos proposto por Shulman. No modelo desses pesquisadores, o cerne do conhecimento está no conhecimento da filosofia da matemática escolar e no conhecimento pedagógico do conteúdo, de modo que a distinção entre a matemática acadêmica e a escolar deve ser clara, uma vez que a segunda não se configura como uma simplificação da primeira.

Já para Ball e colaboradores, o conhecimento do conteúdo é constituído pelo: 1) conhecimento matemático que possui uma pessoa instruída ao final do processo de escolarização (CCK); 2) pelo conhecimento de como os temas matemáticos se inter-relacionam ao longo de todo o currículo e de estabelecer conexões com ideias da matemática estudada em graus (níveis) superiores de ensino (HCK), contudo esse conhecimento não deve limitar-se a essas questões, mas espera-se que vá além; 3) inclua a capacidade dos professores de explicar porque os procedimentos matemáticos, definições, propriedades, teoremas possuem essa forma, ou seja, espera-se que o professor possua a capacidade de explicar a procedência matemática das situações que ocorrem em sala de aula, especialmente os erros dos alunos (SCK). Ainda em relação ao SCK, quando Ball o define e o relaciona com o CCK menciona que o adulto escolarizado em geral possui o domínio dos procedimentos, por exemplo um adulto escolarizado é capaz de utilizar a fórmula $S=2\pi r$ para calcular o comprimento (S) de uma circunferência de raio r (CCK), contudo, o professor, além de ser capaz de realizar o procedimento do cálculo, deve ser capaz de explicar os conceitos nele envolvidos, como ser capaz de elucidar qual é o significado do número irracional π e qual é a relação deste número com o cálculo deste comprimento, discorrendo, por exemplo, sobre o conceito de comensurabilidade entre segmentos (SCK).

Ainda de acordo com a teoria proposta por Ball e colaboradores, o MKT é composto pela capacidade do professor: 1) estabelecer relações entre o conhecimento que possui sobre os estudantes e o conhecimento que possui sobre a matemática, como conhecer os erros que os estudantes cometem com maior frequência (KCS); 2) combinar o conhecimento matemático com o conhecimento sobre o ensino, de modo que favoreça a elaboração de aulas, optando, por exemplo, pelas representações mais adequadas à demanda daquela turma naquele determinado momento acadêmico (KCT). Além disso, o MKT contempla a capacidade de o professor conhecer e ser capaz de analisar as prescrições apresentadas nos currículos, livros didáticos e demais materiais didáticos que circulam e estão vigentes no meio educativo (KCC).

A perspectiva apresentada por Baumert e colaboradores também particiona o conhecimento matemático do professor entre conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo, sendo que o primeiro posiciona-se entre a matemática em nível escolar e a matemática em nível universitário e refere-se a uma compreensão matemática profunda do conteúdo curricular a ser ensinado na escola (contempla, por exemplo, aritmética, álgebra e geometria), contudo esse *aprofundamento* da matemática escolar diferencia-se tanto da pesquisa acadêmica em matemática gerada em instituições de pesquisa quanto do conhecimento cotidiano matemático que os adultos retêm após deixar a escola. Já o conhecimento pedagógico do conteúdo apresentado por esses autores amplia a noção de Shulman (1986), acrescendo a ela o conhecimento das tarefas/atividades matemáticas, o conhecimento dos equívocos e dificuldades dos estudantes, além do conhecimento de estratégias específicas para o ensino da matemática.

Já a teoria proposta por Carrillo e colaboradores aproxima-se fortemente da taxonomia de Ball e colaboradores, e se propõe a refiná-la. Assim, também apresenta as dimensões PCK e CK, sendo que a primeira contempla os conhecimentos sobre o ensino (KMT) e a aprendizagem (KFLM) da matemática, além do conhecimento a respeito do currículo e dos níveis de aprendizagem que devem/podem ser contemplados nos processos formais de ensino. Já a dimensão CK refere-se ao conhecimento dos temas (KoT) e estrutura da matemática (KSM) e da prática matemática, ou seja, das formas de conhecer, criar e produzir em matemática, além de aspectos relacionados à comunicação, raciocínio e prova em matemática (KPM). Na teoria de Carrillo, todos os subdomínios possuem um forte vínculo com o trabalho do professor em sala de aula e com a matemática trabalhada no nível escolar.

A perspectiva teórica proposta por Ma, apesar de não particionar o conhecimento matemático do professor entre PCK e CK, ao analisar o conhecimento dos professores chineses que culminam no desempenho de excelência dos estudantes deste país em avaliações externas, apresenta o termo Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF) para caracterizar o conhecimento destes professores e este termo refere-se a uma compreensão profunda da matemática que ocorre em sala de aula. Essa compreensão aproxima-se da definição apresentada por Ball de CK, quando discorre sobre as características do conhecimento dos professores chineses, que apresentam a compreensão conceitual e procedimental da matemática que ensinam nas escolas chinesas. No tocante à aproximação da teoria de Ma com o conceito de PCK, da mesma forma que Shulman ao definir essa dimensão, Ma compreende que a organização do currículo, materiais didáticos, das aulas e demais atividades envolvidas no ensino chinês estão fortemente relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da matemática pelos estudantes.

Conforme discorremos anteriormente, a formação do professor de Matemática, em relação ao *conteúdo* que vai ministrar em sua atividade profissional, deverá contemplar o *conhecimento do conteúdo específico* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo*. Além disso, conhecer pedagogicamente o conteúdo implica “conhecer o conteúdo”. Nesta conjuntura, alguns questionamentos são pertinentes: Conhecer qual “conteúdo”? Conhecer a “matemática escolar”? E/ou conhecer a “matemática acadêmica”? De acordo com as teorizações apresentadas neste capítulo, é possível afirmarmos que o “conhecimento da matemática”, a partir de uma perspectiva de seu ensino na educação básica, possui uma natureza diferente, por exemplo, da natureza da matemática acadêmica. Contudo, essse “conhecimento da matemática” supera o conhecimento matemático disseminado, por exemplo, pelos currículos escolares e livros didáticos. Na sequência, apresentaremos uma discussão entre a diferenciação da matemática que é objeto do trabalho do professor de Matemática da educação básica e a matemática que é objeto de trabalho dos matemáticos.

3.8.3 A diferenciação entre a matemática que é objeto do trabalho do professor de Matemática na educação básica e a matemática que é objeto de trabalho dos matemáticos

Iniciamos essa discussão recapitulando a diferenciação construída por Moreira (2004) em relação à prática do professor de Matemática da escola básica e à prática do matemático. De acordo com o referido autor, a prática do matemático:

> [...] tem como uma de suas características mais importantes, a produção de resultados originais “de fronteira”. Os tipos de objetos com os quais trabalha a matemática científica contemporânea, os níveis de abstração em que se colocam as questões em todos os seus ramos, atualmente, e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. (MOREIRA, 2004, p. 20)

Enquanto que a prática do professor de matemática da escola básica:

> [...] desenvolve-se num contexto *educativo*, o que coloca a necessidade de uma visão fundamentalmente diferente. Nesse caso, a natureza dos objetos matemáticos estudados está profundamente associada — e, muitas vezes, é o que dá sentido — aos princípios, às definições, às justificativas e argumentações, aos métodos e aos resultados da matemática escolar. (MOREIRA, 2004, p. 20)

O primeiro aspecto que destacamos refere-se ao objetivo da prática de ambos: os matemáticos objetivam a produção de resultados relevantes para a comunidade científica e essa relevância está associada, dentre outros fatores, à busca constante pela generalização dos resultados, ao rigor e precisão da linguagem e à lógica-dedutiva. O objeto de trabalho dos matemáticos é a *matemática acadêmica,* uma matemática que possui necessidades, valores e uma estética específica e "[...] se apoia fundamentalmente numa percepção 'transversal' do *matematicamente correto,* tomando como referência central o corpo de conhecimentos abstratos — conectados por uma lógica dedutiva rigorosa — que a constitui como ciência" (MOREIRA, p. 49, grifo do autor).

O professor de Matemática da educação básica objetiva o *ensino* da matemática no ambiente escolar. A matemática desenvolvida na escola é intitulada por Moreira (2004) como *matemática escolar* e se configura como um "[...] conjunto dos saberes 'validados', associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática" (MOREIRA, 2004). A matemática escolar "[...] inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, como também resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos, etc." (MOREIRA, 2004, p. 18).

O processo de ensino da matemática na escola mobiliza distintos conhecimentos, que foram corporificados, por exemplo, no modelo MKT proposto por Ball, Thames e Phelps (2008) e no modelo MKST proposto por Carrillo, Contreras e Flores (2013) e essas dimensões de ambos os modelos distanciam-se consideravelmente das necessidades, valores e da estética da prática do matemático profissional. Para Baumert *et al.* (2010) e Kleickmann *et al.* (2013), o conhecimento matemático mobilizado no ensino da matemática e que é objeto de trabalho do professor de Matemática da escola básica refere-se a uma compreensão matemática profunda do conteúdo curricular a ser ensinado na escola (contempla, por exemplo, as seguintes estruturas: aritmética, álgebra e geometria), contudo esse *aprofundamento* da matemática escolar diferencia-se da pesquisa acadêmica em matemática gerada em instituições de pesquisa e do conhecimento cotidiano matemático que os adultos retêm após deixar a escola. Na mesma linha de Baumert *et al.* (2010) e Kleickmann *et al.* (2013), Ma (2009) associa o desenvolvimento da CPMF a uma compreensão profunda da matemática que ocorre em sala de aula, especialmente a atividade de estudar materiais de ensino (currículo escolar, livros didáticos, etc.) intensamente.

CAPÍTULO 4: A PESQUISA - UMA ANÁLISE DO CURRÍCULO DO PROFMAT A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA PROCESSUAL E DESCENTRALIZADORA

Neste capítulo, apresentaremos o delineamento metodológico deste trabalho, discorrendo particularmente sobre os objetivos que orientaram esta pesquisa e a perspectiva teórica de Sacristán (1998; 2013), teoria que fundamenta a discussão curricular realizada nesta tese.

INTRODUÇÃO

Ao nos remetermos a qualquer processo de ensino (escolar, em especial), somos obrigados a tomar como referência o sujeito que ensina – professor –, o sujeito que aprende – o estudante –, e o objeto de ensino – o conhecimento. A qualidade do ensino tem muita relação com o tipo de cultura que nele se desenvolve, que ganha significado educativo mediante as práticas e os códigos que a traduzem em processos de aprendizagem para os alunos (SACRISTÁN, 1998).

A partir deste panorama, e considerando que o nosso objeto de estudo, o PROFMAT, é um curso de formação – matemática – continuada de professores de Matemática, financiado pelo governo federal e construído na modalidade de pós-graduação em nível de mestrado profissional, sua aprovação pela CAPES requereu a submissão de um projeto do qual constam a Caracterização do Curso (Objetivos / Perfil profissional a ser formado, diretrizes), Descrição das Disciplinas (grade e ementário), Identificação da Proposta, Áreas de Concentração/Linhas de Pesquisa, Corpo Docente (titulação, produção acadêmica, experiência internacional de formação, instituição em que trabalha, etc.), Projetos (vinculados), etc.

Este projeto é interpretado por nós como o *currículo* do PROFMAT, uma vez que “o **currículo a ensinar** é uma seleção organizada dos conteúdos a aprender, os quais, por sua vez, regularão a prática didática” (SACRISTÁN, 2013, p. 17, grifo do autor) que se desenvolve durante o processo de instrução. Ao recorrermos à etimologia da palavra “currículo", contatamos que esta provém do latim *curriculum*, cuja “raiz é a mesma de *cursus* e *currere”* (SACRISTÁN, 2013, p. 16, grifo do autor) e que, segundo Silva (2009, p. 15), associava-se ao termo “pista de corrida”. Neste contexto, “podemos dizer que no curso dessa corrida que é o currículo acabamos por nos tornar o que somos" (SILVA, 2009, p. 15). Além disso, o currículo relaciona-se com a instrumentalização concreta que faz das instituições de ensino um determinado sistema social, pois é por meio dele que elas são dotadas de conteúdo (SACRISTÁN, 1998).

4.1 O OBJETIVO DA PESQUISA

A adoção da *teoria curricular* proposta por Sacristán como norteadora deste trabalho de deu porque ao invés de olharmos somente para a transmissão – pelo professor – do conhecimento (por meio das teorias tradicionais curriculares), ou somente para os meios – objetos, materiais – utilizados para a transmissão do conhecimento (por meio de teorias tecnicistas), ou somente para as tensões e relações de poder presentes na educação (por meio de teorias críticas e pós-críticas do currículo), esta teoria nos permite olhar o currículo do PROFMAT a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora, que propõe uma visão deste como algo que ocorre desde um plano – projeto – até sua conversão em práticas pedagógicas, em que os meios utilizados para essa transmissão (materiais) e as tensões presentes no campo da formação dos professores de Matemática se configuram como mediadores desse processo.

A partir do exposto, o nosso objetivo com este trabalho é:

Analisar o currículo do PROFMAT, um programa de formação continuada direcionado ao aprimoramento da formação matemática de professores que ministram essa disciplina na escola básica, a partir da perspectiva processual e descentralizadora de Sacristán (1998; 2013), adotando como referências pesquisas produzidas na área de Educação Matemática cujo objeto de estudo são os conhecimentos do professor que ensina matemática.

A adoção de pesquisas produzidas pela Educação Matemática como aporte teórico para esta análise se configura como uma opção dentre as que nos permitem pensar, discutir, criticar e realizar, na prática, a formação de professores de Matemática para a Educação Básica. Conforme o Capítulo 3 evidenciou, adotamos como referencial pesquisas originárias de grupos de pesquisa e/ou pesquisadores cujo objeto de estudo é a formação matemática do professor de Matemática, que destacam, especificamente, as dimensões do conhecimento dos professores de Matemática.

Essas pesquisas possuem diferentes metodologias e se originam em diferentes contextos, entretanto os dados analisados por elas relacionam-se fortemente com a atividade do professor de Matemática no ambiente escolar e com as necessidades relativas ao ensino da matemática na escola em nível básico. Buscamos ainda pesquisas que estabelecessem conexão entre a *efetividade* do ensino e da aprendizagem da matemática escolar, uma vez que um dos objetivos do PROFMAT é favorecer a aprendizagem da matemática nesse nível de ensino.

Para Apple (2006), os conhecimentos (aberto e oculto) encontrados nos ambientes de ensino e os princípios de seleção, organização e avaliação desse conhecimento são governados pelo seu valor (social e/ou econômico) e oriundos de um universo muito mais amplo de conhecimento e de princípios de seleção possíveis. Portanto, não devem ser aceitos como dados, mas devem ser problematizados de maneira que as ideologias (sociais e/ou econômicas) e os significados padronizados institucionalmente que estão por trás deles possam ser examinados com cuidado.

De acordo com Sacristán (2013, p. 20), desde sua origem "o currículo tem se mostrado uma invenção reguladora do conteúdo e das práticas envolvidas nos processos de ensino e aprendizagem" uma vez que "se comporta como um instrumento que tem a capacidade de estruturar a escolarização, a vida nos centros educacionais e as práticas pedagógicas", transmitindo e impondo regras, normas e ordenação. Nesse contexto, esse instrumento e sua potencialidade se mostram por meio de seus usos e hábitos, do funcionamento da instituição de ensino, na divisão do tempo, na especialização dos professores e, fundamentalmente, na ordem da aprendizagem.

Segundo Silva (2009, p. 15), a questão que serve de panorama para qualquer teoria do currículo é a de saber qual conhecimento deve ser ensinado, sinteticamente a "questão central é: o quê?" Como resposta a essa questão pode-se recorrer a discussões sobre a natureza da aprendizagem ou sobre a natureza do conhecimento, da cultura e da sociedade. Entretanto, ao final, tem-se que voltar à "questão básica: o que eles ou elas devem saber? Qual conhecimento ou saber é considerado importante ou válido ou essencial para merecer ser considerado parte do currículo?"

No tocante à composição de um currículo destinado à formação de professores, a complexidade em responder aos questionamentos levantados por Silva (2009) acentua-se. D'Ambrósio (2005, p. 20) salienta que "talvez a maior dificuldade inerente à formação de professores seja a determinação do conteúdo necessário para que se obtenha o melhor desempenho possível".

Para Moreira *et al*., (2004),

> A forma mais habitual de considerar este tema é através de uma lista de conhecimentos que o professor (ou futuro professores) supostamente deveria adquirir. Não é difícil produzir uma lista de disciplinas, correspondendo de modo mais ou menos direto ao plano de estudos de um curso. No entanto, tais listas deixam muitas questões em aberto: que competências matemáticas precisa realmente de ter um professor? O que é legítimo esperar-se de um jovem candidato a professor no momento em que termina sua formação inicial? Como poderá ele desenvolver essas competências? Que tipos de experiências matemáticas lhes devem ser proporcionadas pela formação? (MOREIRA; BROCARDO; BRAUMMAN; PONTE, 2004, p. 71-72)

Muitas pessoas ainda equacionam o currículo como um plano de estudos e, assim, limitam o seu planejamento por refletirem apenas sobre o conteúdo ou sobre um corpo de conhecimentos que se deseja transmitir (KELLY, 1999). Porém, essa ferramenta educacional adquire forma e significado educativo à medida que sofre uma série de processos de transformação dentro das atividades práticas que o tem mais diretamente por objeto, e "as condições de desenvolvimento e realidade curricular não podem ser entendidas senão em conjunto" (SACRISTÁN, 1998, p. 09).

Nas obras *O currículo: uma reflexão sobre a prática*, de 1998, e *O que significa o currículo*, de 2013, José Gimeno Sacristán discute as fases/processos fundamentais por meio dos quais o currículo se configura como prática realizada num contexto educacional/formativo, partindo da premissa de que "a teorização sobre o currículo deve ocupar-se necessariamente das condições de realização do mesmo, da reflexão sobre a ação educativa nas instituições escolares, em função da complexidade que se deriva do desenvolvimento e realização do mesmo" (SACRISTÁN, 1998, p. 16).

4.2 O CURRÍCULO A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA PROCESSUAL E DESCENTRALIZADORA: A TEORIA DE SACRISTÁN

Segundo Sacristán (2013), o conceito de currículo e a utilização que fazemos dele aparecem desde os primórdios relacionados à ideia de classificação dos conhecimentos, cuja seleção define o que será coberto pela ação de ensinar. A partir da perspectiva processual ou prática de currículo, Sacristán (1998, p. 101) discorre que o currículo se constrói no processo de "configuração, implementação, concretização e expressão de determinadas práticas pedagógicas e em sua própria avaliação, como resultado das diversas intervenções que nele se operam. Seu valor real para os alunos, que aprendem seus conteúdos, depende desses processos de transformação aos quais se vê submetido”, então “o currículo não pode ser entendido à margem do contexto no qual se configura e tampouco independente das condições em que se desenvolve” (SACRISTÁN, 1998, p. 107).

Para Sacristán (1998),

> Uma concepção processual do currículo nos leva a ver seu significado e importância real como o resultado das diversas operações às quais é submetido e não só nos aspectos materiais que contém, nem sequer quanto às ideias que lhe dão forma e estrutura interna: enquadramento político e administrativo, divisão de decisões, planejamento e modelo, tradução em materiais, manejo por parte dos professores, avaliação de seus resultados, tarefas de aprendizagem que os alunos realizam, etc. Significa também que sua construção não pode ser entendida separadamente das condições reais de seu desenvolvimento e, por isso mesmo, entender o currículo num sistema educativo requer prestar atenção às práticas políticas e administrativas que se expressam em seu desenvolvimento, às condições estruturais, organizativas, materiais, dotação de professorado, à bagagem de ideias e significado que lhe dão forma e que o modelam em sucessivos passos de transformação. (SACRISTÁN, 1998, p. 21)

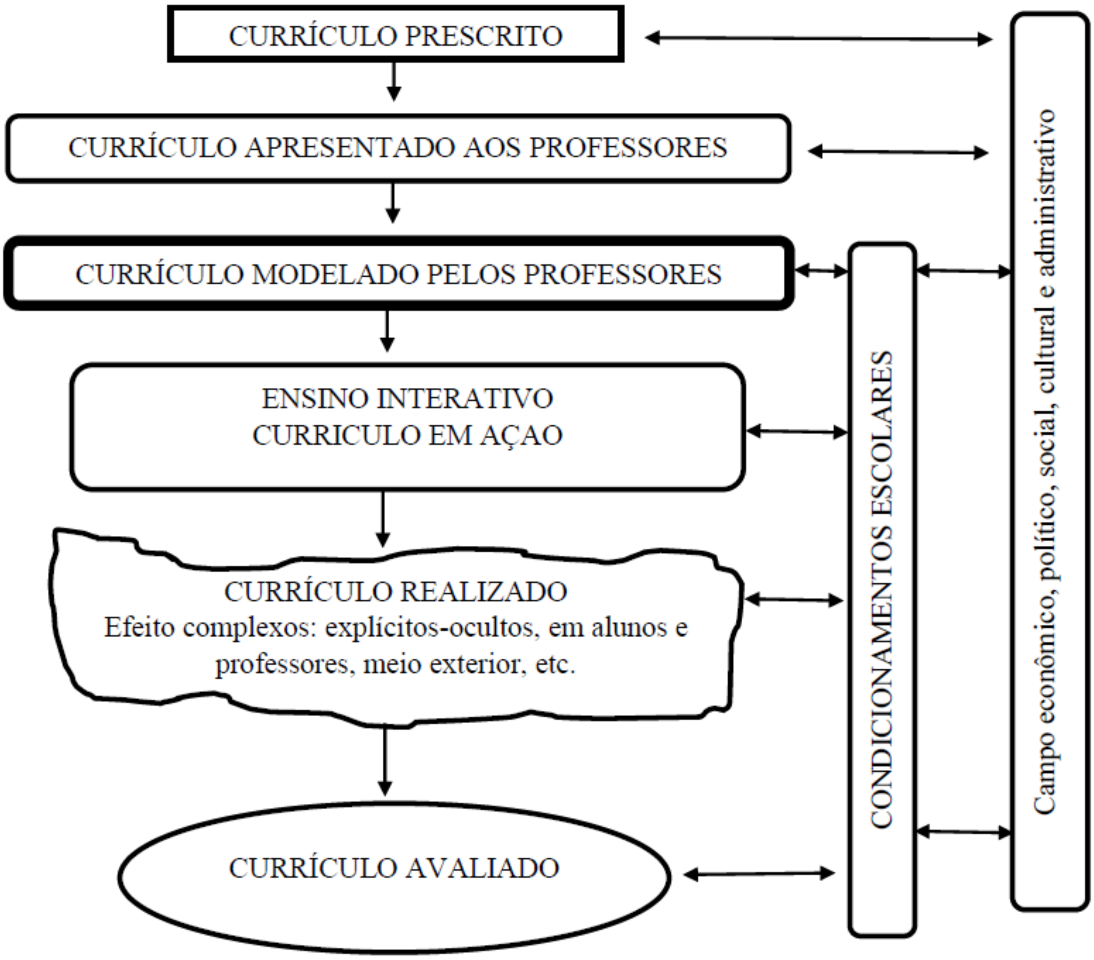
A partir desta perspectiva, o autor apresenta um modelo de interpretação do currículo como um construto do cruzamento de influências e campos de atividades diferenciados e inter-relacionados, que “na realidade, com diferente grau e força de influência entre elementos, trata-se de um modelo cujas fases têm inter-relações recíprocas e circulares entre si” e o fluxo de influências funciona em geral na direção vertical descendente (SACRISTÁN, 1998, p. 104).

Discorrendo sobre seu modelo, Sacristán (1998) argumenta:

> Acreditamos que é um modelo *explicativo* adequado, sobretudo para uma estrutura de gestão centralizada na qual os espaços de autonomia das instâncias intermediárias são bastante limitados *a priori*. Embora pareça um modelo de dependências lineares e hierarquizadas, nos servirá para demonstrar suas disfunções e esferas de autonomia que representam forças, como dizíamos, concorrentes. (SACRISTÁN, 1998, p. 104, grifo do autor)

O modelo proposto por Sacristán (1998), esquematizado na Figura 4 e que será apresentado detalhadamente na seção 4.3 deste capítulo, é composto pelas seguintes fases (momentos ou níveis): 1) o currículo prescrito; 2) o currículo apresentado aos professores; 3) o currículo moldado pelos professores; 4) o currículo em ação; 5) o currículo realizado; 6) o currículo avaliado. Tendo em vista que a teorização curricular proposta por Sacristán (1998; 2013) será a principal ferramenta metodológica desta pesquisa, adotaremos o modelo proposto pelo referido autor como delineador dessa investigação.

Figura 4: A objetivação do currículo no processo de seu desenvolvimento.



Fonte: Sacristán (1998, p. 105).

O *currículo prescrito* é a cristalização/corporificação dos conteúdos e das práticas a serem utilizadas no desenvolvimento desses conteúdos nos sistemas educativos e a seleção e a organização dos entes que compõem o currículo prescrito é feita a partir das regulações inexoráveis – sociais, culturais, econômicas, políticas e administrativas – às quais estão submetidos os sistemas educativos. "O currículo prescrito para o sistema educativo e para os professores, mais evidente no ensino obrigatório, é a sua própria definição, de seus conteúdos e demais orientações relativas aos códigos que o organizam, que obedecem às determinações que procedem do fato de ser um objeto regulado por instâncias políticas e administrativas” (SACRISTÁN, 1998, p. 109).

> O currículo prescrito, quanto a seus conteúdos e a seus códigos, em suas diferentes especialidades, expressa o conteúdo base da ordenação do sistema, estabelecendo a seqüência de progresso pela escolaridade e pelas especialidades que o compõem. Parcelas do currículo em função de ciclos, etapas ou níveis educativos, marcam uma linha de progressão dentro de um mesmo tipo de conteúdos ou assinalam aspectos diversos que é necessário abordar consecutivamente num plano de estudos. (SACRISTÁN, 1998, p. 113)

O currículo *apresentado* aos professores refere-se aos meios, elaborados por diferentes instâncias, que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, realizando uma interpretação deste, uma vez que as prescrições presentes no Currículo Prescrito costumam ser muito genéricas e, por isso mesmo, não são suficientes para orientar a atividade educativa nas aulas. Além disso, o “nível de formação do professor e as condições de seu trabalho tornam muito difícil a tarefa de configurar a prática a partir do currículo prescrito. O papel mais decisivo neste sentido é desempenhado, por exemplo, pelos livros-texto” (SACRISTÁN, 1998, p. 105).

> A necessidade de elaborações intermediárias do currículo para os professores, sendo uma necessidade conjuntural, não pode e nem deveria se converter numa prática de controle e desprofissionalização dos mesmos, mas ser um meio entre outros possíveis e necessários. Daí que a política curricular deveria se perguntar que tipos de meios seriam mais úteis para instrumentalizar um determinado currículo, que sejam ao mesmo tempo eficazes no auxílio aos professores e no desenvolvimento de sua profissionalização. Além disso, deveria abordar as consequências de manter um sistema indireto de controle sobre o currículo que, de fato, torna determinados meios, como os livro-texto, elementos quase obrigatórios para guiar e controlar a própria prática. (SACRISTÁN, 1998, p. 151)

Para Sacristán (1998), a origem deste mecanismo de controle está em propósitos e interesses que geralmente são difíceis de conciliar, como elaboração dos conteúdos do currículo, orientação dos professores, controle do currículo, política de implementação de certas inovações ou reformas e interesses econômicos.

O currículo *moldado pelos professores* é resultante da influência – recíproca – dos professores sobre o desenvolvimento dos currículos que lhe são fornecidos (currículo prescrito e currículo apresentado aos professores – por meio dos livros-texto). Para Sacristán (1998, 2013), o professor é um agente ativo e decisivo na concretização dos conteúdos e significados do currículo, e molda, a partir de sua cultura profissional, qualquer proposta que lhe é feita, seja através da prescrição administrativa, seja do currículo elaborado pelos materiais, guias, livros-texto, etc. E “independentemente do papel que consideremos que ele há de ter neste processo de planejar a prática, de fato é um ‘tradutor’ que intervém na configuração dos significados das propostas curriculares. O plano que os professores fazem do ensino, ou que entendemos por programação, é um momento de especial significado nessa tradução” (SACRISTÁN, 1998, p. 105).

> Se o currículo expressa o plano de socialização através das práticas escolares imposto de fora, essa capacidade de modelação que os professores têm é um contrapeso possível se é exercida adequadamente e se é estimulada como mecanismos contra-hegemônicos. Qualquer estratégia de inovação ou de melhora da qualidade da prática do ensino deverá considerar esse poder modelador e transformador dos professores, que eles de fato exercem num sentido ou noutro, para enriquecer ou para empobrecer as propostas originais. A mediação não é realizada intervindo apenas diretamente sobre o currículo, mas também através das pautas de controle dos alunos nas aulas, porque, com isso mediatizam o tipo de relação que os alunos podem ter com os conteúdos curriculares. (SACRISTÁN, 1998, p. 166)

Os professores podem atuar em nível individual ou como grupo que organiza conjuntamente o ensino, uma vez que a atividade dos professores é uma ação que se desenvolve dentro de uma instituição e, por essa razão, sua prática está inevitavelmente condicionada e “a ação observável é fruto da modelação que os professores realizam dentro de campos institucionais de referência” (SACRISTÁN, 1998, p. 166).

Do ponto de vista de Sacristán, “o valor de qualquer currículo, de toda proposta de mudança para a prática educativa, se comprova na realidade na qual se realiza, na forma como se concretiza em situações reais” (SACRISTÁN, 1998, p. 201), ou seja, *o currículoem ação* é a expressão do valor, já que é na prática educativa que todo projeto, toda ideia e intenção se cristaliza na realidade educativa, é neste momento que adquire significação e valor, “independente de declarações e propósitos de partida” (SACRISTÁN, 1998, p. 201).

O ensino interativo é o que filtra a obtenção de determinados resultados, a partir de qualquer proposta curricular e é o elemento no qual o currículo se transforma em método, e a análise desta fase é que dá o sentido real à qualidade do ensino, acima de declarações, propósitos, denotações de meios, etc. “A prática ultrapassa os propósitos do currículo, devido ao complexo tráfico de influências, às interações, etc. que se produzem na mesma” (SACRISTÁN, 1998, p.106).

> O ensino não é uma mera interação entre professores e alunos, cujas particularidades podem se relacionar com as aprendizagens dos alunos para deduzir um modelo eficaz de atuação, como se essa relação estivesse vazia de conteúdos que podem representar opções muito diversas, possibilidades de aprendizagens muito desiguais, desconsiderando que maneja instrumentos de aprendizagem muito diferentes e que se realiza em situações muito diversas. (SACRISTÁN, 1998, p. 202)

E as consequências das práticas nas instituições de ensino configuram-se no que Sacristán (1998) intitulou currículo *realizado*. As práticas produzem efeitos complexos dos mais diversos tipos - cognitivo, afetivo, social, moral, etc. – e aos que se presta atenção é porque são considerados rendimentos valiosos e proeminentes do sistema ou dos métodos pedagógicos. Entretanto, muitos outros efeitos ocorrem – além dos efeitos avaliados – e que

> [...] por falta de sensibilidade para com os mesmos e por dificuldade para apreciá-los (pois muitos deles, além de complexos e indefinidos, são efeitos a médio e longo prazo), ficarão como efeitos ocultos do ensino. As consequências do currículo se refletem em aprendizagens dos alunos, mas também afetam os professores, na forma de socialização profissional, e inclusive se projetam no ambiente social, familiar, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 106)

O currículo expressado pelos procedimentos avaliativos é o currículo mais valorizado – *currículo avaliado*. Pressões exteriores de tipos diversos nos professores – validações e títulos, cultura, ideologias e teorias pedagógicas – levam a ressaltar na avaliação aspectos do currículo, “talvez coerentes, talvez incongruentes com os próprios manifestos de quem prescreveu o currículo, de quem o elaborou, ou com os objetivos do próprio professor” (SACRISTÁN, 1998, p. 106). Conforme o autor,

> O currículo avaliado, enquanto mantém uma constância em ressaltar determinados componentes sobre outros, acaba impondo critérios para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos. Através do currículo avaliado se reforça um significado definido na prática do que é realmente. As aprendizagens escolares adquirem, para o aluno, desde os primeiros momentos de sua escolaridade, a peculiaridade de serem atividades e resultados valorizados. O controle do saber é inerente à função social estratificadora da educação e acaba por configurar toda uma mentalidade que se projeta inclusive nos níveis de escolaridade obrigatória e em práticas educativas que não têm uma função seletiva nem hierarquizadora. (SACRISTÁN, 1998, p. 106)

Em texto mais recente, onde apresenta uma nova – porém não distante da apresentada na obra *O currículo: uma reflexão sobre a prática* – subdivisão das fases do currículo, Sacristán argumenta que a cultura presente nos conteúdos do currículo é uma construção cultural particular/especial, "curricularizada" (SACRISTÁN, 2013, p. 20), uma vez que foi selecionada, ordenada, empacotada, lecionada e comprovada de acordo com moldes idealizados – "para produzir, para aplicar" (SACRISTÁN, 2013, p. 32). E entre a cultura mais elaborada (pelos especialistas, cientistas por exemplo) e a recepção do saber (pelos estudantes), existem agentes mediadores, como "os professores, os livros didáticos e demais materiais didáticos" (SACRISTÁN, 2013, p. 22). Como a "qualidade do conteúdo que se torna realidade" é resultante de um de "jogo de perspectiva entre a qualidade cultural e pedagógica dos professores e a dos textos e demais materiais como fontes de informação" (SACRISTÁN, 2013, p. 22), o currículo só pode de fato ser identificado/reconhecido no processo de seu desenvolvimento.

> As polêmicas em torno dos conteúdos dos processos de ensino constituem, sem dúvida, o debate por excelência na educação. Sobre esses conteúdos são feitas escolhas sobre o papel da escolarização nas sociedades atuais, junto ou competindo com a influência de outros agentes culturalizadores, a responsabilidade da instituição escolar perante a cultura, o tipo de participação que se deseja para os diferentes cidadãos em função da capacidade que lhes é oferecida e pela divisão do capital cultural entre os grupos sociais. (SACRISTÁN, 2013, p. 29)

Para Sacristán (2013, p. 25), "toda ação consciente para influir nos demais – especialmente o ensino/educação – tem sentido para quem a executa".

Caso contrário, ela não é mais do que uma "rotina ou uma conduta sem finalidade de comando. A ação de influir sobre o outro, ensinando o outro, seja de forma consciente ou inconsciente (rotineira ou mecânica), provoca e produz/estimula a elaboração de um significado em quem é sujeito às ações dessa influência". Contudo, os aspectos – o sentido para quem educa e o significado elaborado/construído por quem é educado – podem estar vinculados entre si por relações de causa e efeito, mas ambos pertencem a ordens de realidade distintas, já que "uma coisa é a intenção de quem deseja reproduzir e alcançar êxitos guiados por determinados fins, realizando determinadas atividades de ensino, outra coisa são os efeitos provocados (as elaborações subjetivas em quem recebe a influência) nos receptores que aprendem" (SACRISTÁN, 2013, p. 25).

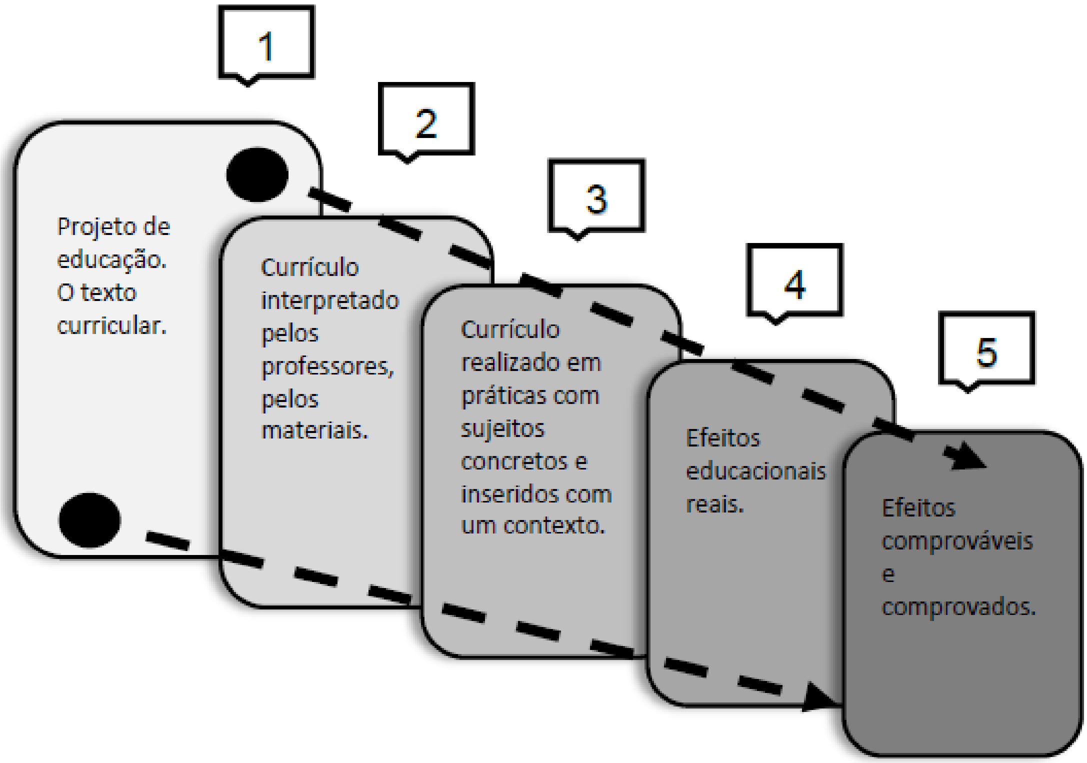
Assim sendo, os fins (*objetivos*), as ações, atividades e métodos desenvolvidos (*desenvolvimento*) e os resultados (*efeitos reais*) necessitam estar relacionados entre si porque*:*

> a) Os *fins*, *objetivos* ou *motivos* que nos orientam, que estão contidos no texto explícito do currículo e nos projetos concretos que desenvolvemos dentro dele. b) As ações e atividades que desenvolvemos, que constituem as práticas ou os métodos visíveis do ensino e podem contribuir em maior ou menor grau para a consecução do ponto anterior, aumentar ou não seu êxito, fazer com que ele acerte mais ou menos. Contudo, não é o currículo em si que constitui um plano escrito, mas o seu *desenvolvimento*. O primeiro é como se fosse a partitura, o segundo seria a música que é executada. Ambos guardam uma relação entre si, embora sejam coisas distintas. Com base na partitura, podem ser desenvolvidas ou executadas músicas diferentes. c) Os resultados ou efeitos reais provocados nos alunos são realidades que pertencem ao âmbito da subjetividade, mas que não são diretamente visíveis. Eles precisam ser inferidos por meio de nossa observação, exigindo manifestações dos sujeitos, provocando respostas, como as provas de avaliação. Com essas "aproximações", buscamos conhecer os resultados efetivos, mas também nesse caso não cabe pensar que os efeitos reais da aprendizagem sejam idênticos aos resultados constatados ou avaliados. Podemos dar como certo que haja uma relação, mas eles continuam sendo realidades diversas. Como consequência, é absolutamente impossível querer que os objetivos ou fins da educação e do ensino correspondam aos resultados de aprendizagem, como se fossem aspectos totalmente simétricos. (SACRISTÁN, 2013, p. 25-26)

Caso os *objetivos*, o *desenvolvimento* e os *efeitos reais* não se correspondem com exatidão, Sacristán (2013, p. 26) distingue fases do que considera como "uma visão processual do currículo". A primeira fase é composta por um projeto de educação contido no texto curricular ou currículo explicitamente almejado que também é chamado de currículo *oficial* (primeiro plano da Figura 5).

"As pesquisas demonstram que o currículo deixa de ser um plano proposto quando é interpretado e adotado pelos professores, o que também ocorre com os materiais curriculares (textos, documentos, etc.), autênticos tradutores do currículo como projeto e texto expresso por práticas concretas" e com isso origina-se a segunda fase do currículo processual, a fase: o currículo interpretado pelos professores e pelos materiais (segundo plano da Figura 5) (SACRISTÁN, 2013, p. 26).

Figura 5: Esquema de concepção do currículo como processo de práxis.

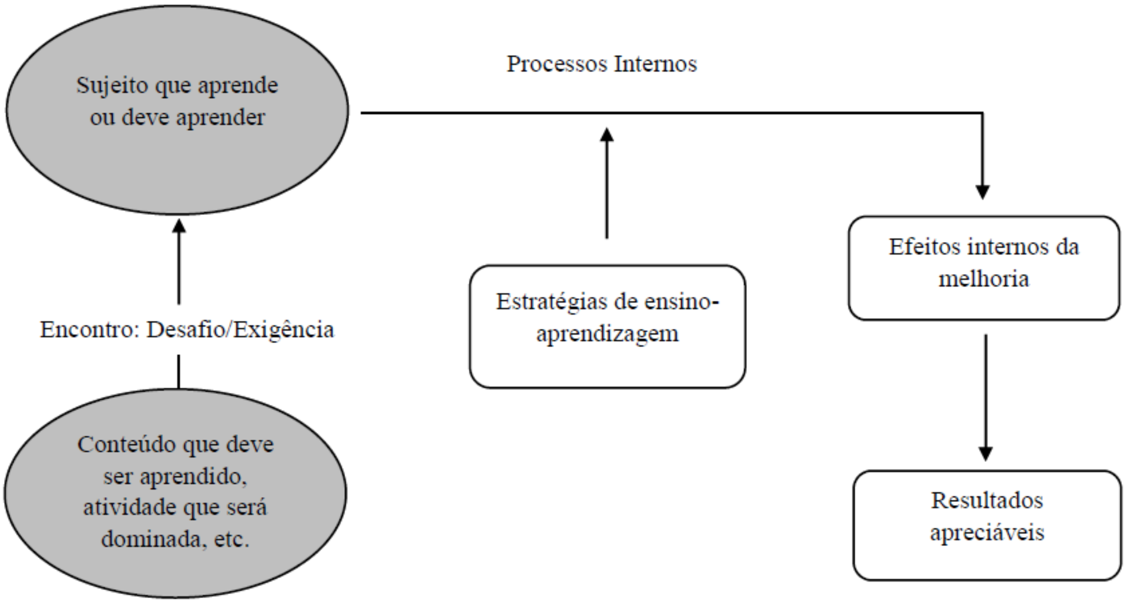


Fonte: Sacristán (2013, p. 26).

A terceira fase (terceiro plano) corresponde ao currículo realizado na prática - real, com sujeitos concretos e em um contexto determinado – que resulta nos efeitos reais da educação situados no plano subjetivo dos aprendizes, efeitos esses que se alocam na quarta fase do processo (quarto plano do esquema).

No tocante à dinâmica da subjetivação dos aprendizes, Sacristán (2013) defende que toda experiência pedagógica (ação didática) pressupõe o propósito de mediação, correção e estímulo da experiência do encontro entre o sujeito que exerce uma série de funções e o sujeito que detém um conteúdo, de modo que sejam transformadas e enriquecidas tais funções e capacidades, processo esse adjetivado pelo autor como *aprendizagem* (Figura 6).

Figura 6: A dinâmica da subjetivação do currículo.



Fonte: Sacristán (2013, p. 26).

Entretanto, para que esse encontro seja frutífero, o conteúdo dever ser significativo, relevante e desafiador (características que têm maior probabilidade de estarem presentes se o encontro também tiver sido adequadamente mediado). Do encontro entre o sujeito e o conteúdo, pode-se esperar – e desejar – que o sujeito desenvolva "determinados processos que podem ser denominados de diferentes maneiras e valorizados desigualmente conforme sua importância, sua densidade ou segundo nossas visões particulares sobre o que é desejável e possível; ou seja, de acordo com a orientação educativa que tivermos" (SACRISTÁN, 2013, p. 30), e serão esses processos internos e seus resultados que correspondem à fase decisiva de determinação do currículo.

A quinta e última fase seria o currículo expresso nos resultados educacionais comprováveis e comprovados que são refletidos no rendimento do estudante, momento em que se considerará o êxito ou fracasso do ensino (quinto plano). Essa fase é identificada como o

> Currículo avaliado, ou seja, o currículo formado pelos conteúdos exigidos pelas práticas de avaliação e que representa a dimensão visível, mas, ainda que haja outras experiências de aprendizagem não avaliáveis, não devemos nos deixar levar pelo reducionismo positivista para o qual somente conta o que pode ser medido, porque é observável. (SACRISTÁN, 2013, p. 26)

Nessas circunstâncias, o *currículo real* é composto pela proposição de um plano (texto) que é público e pela soma dos conteúdos e das ações que são empreendidas com o intuito de influenciar os aprendizes (ou seja, o ensino desse plano), o importante é o que tudo isso produz "nos receptores ou destinatários (seus efeitos), algo como aquilo que a leitura deixa como marca no leitor, que é quem revive seu sentido e obtém algum significado" (SACRISTÁN, 2013, p. 26).

Uma importante implicação do currículo processual (que origina um *currículo real* distinto do *currículo oficial*) é que, se a influência efetiva sobre os alunos é de natureza distinta do que é expresso pelas intenções e pelo conteúdo das ações do ponto de vista de quem as empreende, "então os resultados da educação devem ser vistos e analisados da maneira como são expressos (são reproduzidos e produzidos) seus efeitos nos receptores do currículo", uma vez que existe uma separação entre a prescrição de conteúdos no currículo e a sua organização pedagógica (professores e a produção de materiais) para provocar a experiência da qual serão extraídos os significados. (SACRISTÁN, 2013, p. 27).

> Há tempo sabemos que a proposição e a independência dos conteúdos e das intenções do ensino não implicam processos exatamente simétricos na aquisição das aprendizagens. O ponto de vista de uma teoria do currículo (no sentido não forte da *teoria*), se desejamos apreciar o que realmente se alcança, deve deslocar o centro de gravidade de nossa atenção do ensinar para o aprender, dos que ensinam para os que aprendem, do que se pretende para o que se consegue na realidade, das intenções declaradas para os fatos alcançados. Ou seja, é preciso nos orientar para a experiência do aprendiz, provocá-la, enriquecê-la, depurá-la, sistematizá-la. (SACRISTÁN, 2013, p. 27, grifo do autor)

Não obstante, apesar de o texto curricular não ser a realidade dos efeitos convertidos em significados aprendidos, este texto é importante "à medida que difunde os códigos sobre o que deve ser a cultura" nas instituições de ensino, tornando-os públicos. Além disso, é importante "determinar as competências dos agentes que elaboram e desenvolvem os textos curriculares não somente como uma maneira de assinalar quem tem o poder de fazê-lo, mas também como uma forma de esclarecer as responsabilidades de cada um" (SACRISTÁN, 2013, p. 27).

4.3 A METODOLOGIA, AS LIMITAÇÕES DA PESQUISA E A OPÇÃO PELOS "NÚMEROS NATURAIS" E PELOS "NÚMEROS RACIONAIS".

Em face da limitação temporal da nossa pesquisa e da quantidade e especificidade de material a ser examinado, fomos obrigados a optar, na análise das fases da pesquisa "Análise do *currículo apresentado aos professores*", "Análise do *currículo moldado pelos professores* [que ministram aula no PROFMAT e do *currículo em ação*", "Análise do *currículo realizado" e "*Análise do *currículo avaliado"*, por analisarmos o tratamento dado no currículo do PROFMAT aos conteúdos Números Naturais e Números Racionais.

A opção por esses conteúdos se deu, primeiro, por serem objeto de estudo dos professores da escola básica no PROFMAT; segundo, por esses conteúdos estarem, direta ou indiretamente, ligados à matemática abordada ao longo da educação básica. Além disso, de acordo com Ma (2009), de uma perspectiva de obtenção da competência matemática, ensinar esses conteúdos não significa somente levar os alunos até o final da aritmética ou início da pré-álgebra, mas sim, provê-los dos alicerces sobre os quais se deverá construir toda sua futura aprendizagem matemática.

Embora se tenha a impressão de que os números naturais são objeto de estudo apenas nos cinco primeiros anos do ensino fundamental, eles são também abordados no 6º ano do ensino fundamental, ou seja, são objeto de trabalho dos professores de Matemática, público alvo do PROFMAT. Ademais, as dificuldades em relação ao desenvolvimento dos cálculos com os números naturais ultrapassam o limite entre o 5º e o 6º ano do ensino fundamental. A esse respeito, Moreira e David (2010) discorrem que,

> [...] do ponto de vista da aprendizagem escolar, a aritmética dos naturais é um tema complexo, e sua apreensão em níveis considerados satisfatórios não se esgota no processo que se desenvolve ao longo das séries iniciais. Assim, o professor terá que lidar com dificuldades de aprendizagem desse tema que, muitas vezes, acompanham o aluno até o final do Ensino Fundamental. (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 49)

De acordo com pesquisa desenvolvida por Brown (1981 *apud* MOREIRA e DAVID, 2010) na Inglaterra, estudantes na faixa entre 12 e 15 anos ainda apresentam dificuldades em desenvolver cálculo de subtração, por exemplo. Os dados de Brown são corroborados pelos obtidos em pesquisa desenvolvida por Moren, David e Machado (1992) no Brasil, na qual constataram que estudantes do 8º ano apresentavam problemas com a operação de subtração, especialmente em relação à utilização do algoritmo.

Os dados obtidos por Brown (1981), na Inglaterra, e por Moren, David e Machado (1992), no Brasil, há mais de 20 anos, ressurgem constantemente em avaliações desenvolvidas no sistema de ensino brasileiro (SAEB[33] e PISA, por exemplo).

Destacamos alguns dados obtidos pelo "Indicador de Analfabetismo Funcional - Brasil"[34] relativos aos anos de 2011 e 2012 e referentes a brasileiros de idade entre 15 e 64 anos. O INAF-Brasil, por meio da Teoria da Resposta ao Item e das análises dos dados disponíveis, apresenta, por meio de uma escala única, o alfabetismo no Brasil, o "Analfabetismo" analisado integrando as habilidades de leitura e escrita (letramento) e as de matemática (numeramento). A escala construída define quatro níveis crescentes de analfabetismo: Analfabeto[35], Nível rudimentar[36], Nível básico[37] e Nível pleno[38].

De acordo com os dados obtidos pelo INAF, 6% dos pesquisados foram considerados analfabetos, 21% atingiram o nível rudimentar de alfabetização, enquanto 47% e 26% dos pesquisados encontravam-se, respectivamente, nos níveis básico e pleno de alfabetização, ou seja, 6% dos pesquisados não conseguem ler e escrever números usuais e realizar operações simples, como manusear dinheiro para o pagamento de pequenas quantias ou fazer medidas de comprimento usando a fita métrica. Pelo menos 27% dos pesquisados não conseguem ler números na casa dos milhões, resolver

---

[33] A sigla SAEB é abreviatura do Sistema de Avaliação da Educação Básica.

[34]O Indicador de Analfabetismo Funcional – Brasil (Inaf Brasil) é realizado por meio de entrevista e teste cognitivo aplicado a partir de amostra nacional de 2.000 pessoas representativas de brasileiros e brasileiras entre 15 e 64 anos de idade, residentes em zonas urbanas e rurais de todas as regiões do País.

[35]Analfabeto: corresponde à condição dos que não conseguem realizar tarefas simples que envolvem a leitura de palavras e frases ainda que uma parcela destes consiga ler números familiares (números de telefone, preços, etc.)(INSTITUTO PAULO MONTENEGRO - AÇÃO EDUCATIVA, 2012)

[36] Nível rudimentar: corresponde à capacidade de localizar uma informação explícita em textos curtos e familiares (como um anúncio ou pequena carta), ler e escrever números usuais e realizar operações simples, como manusear dinheiro para o pagamento de pequenas quantias ou fazer medidas de comprimento usando a fita métrica. (INSTITUTO PAULO MONTENEGRO - AÇÃO EDUCATIVA, 2012)

[37] Nível básico: as pessoas classificadas neste nível podem ser consideradas funcionalmente alfabetizadas, pois já leem e compreendem textos de média extensão, localizam informações mesmo que seja necessário realizar pequenas inferências, leem números na casa dos milhões, resolvem problemas envolvendo uma sequência simples de operações e têm noção de proporcionalidade. Mostram, no entanto, limitações quando as operações requeridas envolvem maior número de elementos, etapas ou relações. (INSTITUTO PAULO MONTENEGRO - AÇÃO EDUCATIVA, 2012)

[38]Nível pleno: classificadas neste nível estão as pessoas cujas habilidades não mais impõem restrições para compreender e interpretar textos em situações usuais: leem textos mais longos, analisando e relacionando suas partes, comparam e avaliam informações, distinguem fato de opinião, realizam inferências e sínteses. Quanto à matemática, resolvem problemas que exigem maior planejamento e controle, envolvendo porcentuais, proporções e cálculo de área, além de interpretar tabelas de dupla entrada, mapas e gráficos. (INSTITUTO PAULO MONTENEGRO - AÇÃO EDUCATIVA, 2012)

problemas envolvendo uma sequência simples de operações e não têm noção de proporcionalidade.

Os dados do INAF, expressos na Figura 7, evidenciam que o nível Rudimentar de analfabetismo atinge inclusive a população que possui o ensino médio e superior.

Figura 7: Níveis de analfabetismo da população por escolaridade.

Nível de alfabetismo da população de 15 a 64 anos por escolaridade da população em 2011

Níveis		Escolaridade				
		Nenhuma	Ensino Fundamental I	Ensino Fundamental II	Ensino Médio	Ensino Superior
BASES		*158*	*378*	*476*	*701*	*289*
Analfabeto		54%	8%	1%	0%	0%
Rudimentar		41%	45%	25%	8%	4%
Básico		6%	43%	59%	57%	34%
Pleno		0%	5%	15%	35%	62%
Analfabeto e Rudimentar	Analfabeto funcional	95%	53%	26%	8%	4%
Básico e Pleno	Alfabetizado funcionalmente	6%	48%	74%	92%	96%

Fonte: Instituto Paulo Montenegro - ação educativa (2012, p. 7).

Os dados do INAF levantados no período de 2000 e 2010 indicam que estes avanços no nível de escolaridade da população não correspondem a rendimentos equivalentes no domínio das habilidades relativas ao português e à matemática, uma vez que apenas 35% das pessoas com ensino médio completo e 62% das pessoas com ensino superior são qualificadas como plenamente alfabetizadas.

Como um dos objetivos do PROFMAT é contribuir para a melhoria da qualidade do ensino da matemática na educação básica e que, em pelo menos duas disciplinas é abordada a temática "Números Naturais", entendemos ser justificável nossa opção por ela.

Em relação à opção pela temática "Números Racionais", em especial, as frações e suas operações, o primeiro argumento assenta-se no fato de que ele é objeto de estudo (diretamente) no terceiro ciclo do ensino fundamental. O segundo aspecto relaciona-se à complexidade deste tópico escolar, que Ma (2009, p. 113) classifica como sendo um "tópico avançado da aritmética".

A referida autora comenta ainda que "os números fracionários são muitas vezes considerados os números mais complexos na matemática do ensino básico. A divisão por frações, a operação mais complicada com os números mais complexos, pode ser considerada um tópico cimeiro [de superior importância] da aritmética" (MA, 2009).

4.4 AS FASES DA PESQUISA E A PERSPECTIVA TEÓRICA DE SACRISTÁN

De acordo com Stylianides e Ball (2004), as metodologias adequadas para a investigação da dimensão matemática do conhecimento do professor são: a) análise de documentos de política educacional; b) análise dos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática; c) análise do conhecimento matemático dos professores, d) análise dos currículos de matemática dos alunos; e) análise do conhecimento matemático dos alunos; f) análise da matemática praticada na escola. Sendo assim, tendo em vista o objetivo desta pesquisa e a teorização proposta por Sacristán a respeito da implementação curricular em uma perspectiva processual e descentralizadora, esta pesquisa será apresentada por meio das seguintes fases[39]:

I. Análise do Projeto acadêmico do PROFMAT que, de acordo com a teoria de Sacristán (2013), foi classificado por nós como sendo o*currículo prescrito*;

II. Análise do *currículo apresentado aos professores* que ministram aula no PROFMAT. Em nosso caso serão: a matriz curricular do Curso, as ementas e suas respectivas bibliografias. A bibliografia analisada compõe a “Coleção PROFMAT”.

Com referência a essa bibliografia, Lima, Carvalho, Morgado e Wagner (2013) assinalam que “Esta coleção oferece textos didáticos relevantes para a formação do professor da Escola Básica, em todos os temas da Matemática, sua prática de ensino, sua história e suas aplicações. Em particular, as referências bibliográficas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional” (LIMA; CARVALHO; MORGADO; WAGNER, 2013).

Conforme já explicitado anteriormente, optamos por analisar nesta fase da pesquisa, assim como nas posteriores, disciplinas que contemplassem as temáticas Números Naturais e Números Racionais, uma vez que esses conteúdos pertencem tanto ao currículo escolar quanto ao currículo do PROFMAT. Assim, no processo de análise do *currículo apresentado aos professores* do PROFMAT, focaremos nosso estudo nas disciplinas “Números e Funções” e “Matemática Discreta”, as quais versam sobre os referidos temas.

---

[39] Tendo em vista a extensão do trabalho e as diferentes metodologias adotadas nas fases dessa pesquisa (análise de questionários, análise documental, análise de livros-texto, análise de observações em sala de aula), optamos por detalhar os procedimentos nos textos relativos a cada uma das fases da pesquisa.

I. Análise do *currículo moldado pelos professores* [que ministram aula no PROFMAT] e do *currículo em ação*

Nessa fase da análise, foram utilizados os dados coletados (por meio de um diário de bordo e de gravação em áudio) no decorrer de 21 horas, das quais 15 horas referem-se às aulas presenciais da disciplina de "Números e Funções Reais" e seis horas às aulas da disciplina de "Matemática Discreta".

Contudo, nossas observações e coleta de dados não se restringiram a essa carga-horária, uma vez que acompanhamos um total de 84 horas (relógio e referentes às aulas presenciais), que se desmembram da seguinte forma: 45 horas relativas à disciplina "Resolução de Problemas" que ocorreu no período letivo intitulado como "Verão" do ano de 2013; seis horas relativas à disciplina de "Matemática Discreta" ministrada no 1º semestre do ano letivo de 2013; 12 relativas à disciplina de "Números e Funções Reais" ministrada no 1º semestre do ano letivo de 2013; seis horas relativas à disciplina de "Matemática Discreta" ministrada no 1º semestre do ano letivo de 2014; 15 relativas à disciplina de "Números e Funções Reais" ministrada no 1º semestre do ano letivo de 2014.

As aulas presenciais que observamos no ano de 2013 ocorreram no polo que intitulamos como "Polo A", enquanto as aulas que observamos no ano de 2014 ocorreram no polo que intitulamos como "Polo B"[40], sendo que ambos os polos pertencem à Região Sul do País. Contudo, como optamos por delimitar temporalmente esta pesquisa aos dados coletados relativos ao ano de 2014, na análise que faremos referentes ao "C*urrículo Moldado pelos Professores* [que ministram aula no PROFMAT] e ao C*urrículo em Ação*" serão considerados os dados obtidos no referido ano.

A observação da prática de sala de aula se deu mediante a autorização do coordenador do polo, dos professores e alunos das respectivas disciplinas.

Ressaltamos que nosso objetivo nesta fase da pesquisa era, unicamente, entender se e em que medida o material bibliográfico referente a cada disciplina (livro-texto), o cronograma fixado pela Coordenação Acadêmica Nacional do PROFMAT e as

[40] Optamos por manter em sigilo todos os dados referentes às instituições que colaboraram com nossa pesquisa. Assim, serão omitidos os nomes das instituições (e serão identificadas como "Polo A" e "Polo B"), os nomes dos coordenadores dos polos, o nome e o sexo dos professores que ministram aula nos referidos polos (que serão identificados por nomes fictícios) e o nomes dos estudantes que colaboraram com esta pesquisa (que serão identificados no decorrer deste trabalho por nomes fictícios).

avaliações produzidas por esta influenciaram na moldagem do currículo pelos professores das disciplinas de “Matemática Discreta” e “Números e Funções Reais” ao abordarem os temas “Números Naturais” e “Números Racionais”, ou seja, nosso objetivo neste trabalho não foi analisar a dinâmica da sala de aula e nem a metodologia adotada pelo professor para o ensino dos temas comtemplados na ementa da disciplina a seu cargo.

Nesta fase da pesquisa, também objetivamos entender se a moldagem elaborada pelos professores do PROFMAT se altera no decorrer de sua implementação (*currículo em ação*), considerando que o PROFMAT se propõe a formar professores de Matemática contemplando as necessidades advindas do trabalho cotidiano destes profissionais.

II. Análise do *currículo realizado*

Nesse momento da pesquisa, são considerados os dados oriundos de três questionários por nós elaborados a partir das pesquisas de Ma (2009) e Ball, Thames e Phelps (2008) e aplicados a 21 estudantes do“Polo B” do PROFMAT. Destes três questionários, dois versavam sobre o tema Números Naturais e um sobre o tema Números Racionais.

III. Análise do *currículo avaliado*

Nessa fase de nosso trabalho foram consideradas três “Avaliações Presenciais” aplicadas no ano de 2014, no PROFMAT, das quais três avaliações presenciais destinavam-se ao processo avaliativo da disciplina de “Matemática Discreta” e três avaliações presenciais destinavam-se ao“Números e Funções Reais”.

4.5 INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES

O projeto de pesquisa que culminou na pesquisa ora apresentada foi submetido para apreciação do Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá (CEP), por meio da Plataforma Brasil[41] (Ministério da Saúde), em 05 de outubro de 2012.

[41]A Plataforma Brasil é uma base nacional e unificada de registros de pesquisas envolvendo seres humanos para todo o sistema CEP/Conep. Ela permite que as pesquisas sejam acompanhadas em seus

Na data de 23 de novembro de 2012, foi divulgado o parecer favorável (aprovação em primeira instância) autorizando a realização desta pesquisa em nível de doutorado, a partir das seguintes conclusões: "Face o exposto e considerando a apreciação do protocolo à luz da normativa ética vigente, este comitê de ética em pesquisa se manifesta por aprovar o protocolo na forma em que ora se apresenta".

Diante das alterações sugeridas pelo professor Dr. Dario Fiorentini [coorientador deste trabalho e orientador da doutoranda durante a realização do estágio sanduíche (SWP - CNPq) na Unicamp], o referido projeto de pesquisa foi novamente submetido ao CEP no formato de "emenda", em 10 de maio de 2014. Em 18 de junho de 2014 foi divulgado o parecer favorável (aprovação em primeira instância) autorizando a realização da referida alteração nesta pesquisa, a partir das seguintes conclusões: "O Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá é de parecer favorável à aprovação da emenda ao protocolo de pesquisa apresentado".

Na data de 03 de outubro de 2012, considerando que objetivávamos realizar nossa pesquisa na Região Sul do Brasil, entramos em contato com a professora Dra. Carmen Vieira Mathias, coordenadora da Região Sul do PROFMAT e membro da Comissão Acadêmica Nacional, solicitando autorização para a realização desta, obtendo a seguinte resposta:

> Cara Marlova!
>
> Enviei seu e-mail à coordenação geral do curso e fui orientada a lhe responder que no tocante as autorizações dos docentes e discentes do PROFMAT, cada Instituição Associada deve emitir sua autorização.
>
> Dessa forma, tente que cada coordenador de cada instituição lhe forneça uma autorização, visto que "na hierarquia das coordenações" não tenho "poderes" superiores aos dos meus colegas de coordenação e não me sinto à vontade em autorizar ou consentir algo que não diz respeito exclusivamente ao meu polo.

---

diferentes estágios - desde sua submissão até a aprovação final pelo CEP e pela Conep, quando necessário - possibilitando inclusive o acompanhamento da fase de campo, o envio de relatórios parciais e dos relatórios finais das pesquisas (quando concluídas). Disponível em: www.saude.gov.br/plataformabrasil. Acesso em: 02 out. 2012.

Acredito que nenhum deles irá se negar em participar e/ou autorizar seus colegas e alunos a fazer o mesmo.

Qualquer coisa, estou à disposição e desculpe não conseguir auxiliar da forma esperada.

Att,

Profa. Carmen Vieira Mathias
Coordenadora local do ProfMat
UFSM - Departamento de Matemática
http://www.ufsm.br/carmen

Mediante a recomendação da professora Carmem, solicitamos autorização aos coordenadores dos polos em que realizamos a referida pesquisa por meio de uma Carta de autorização, que se encontra arquivada com a pesquisadora, de modo a garantir o sigilo tanto em relação ao polo em que a pesquisa foi realizada quanto aos participantes desta. Além disso, todos os participantes assinaram o “Termo de consentimento Livre e Esclarecido” apresentado a seguir:

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa intitulada "**O PROFMAT CONTRIBUI PARA O DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA DOCENTE DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA ESCOLA BÁSICA?"**, que faz parte do curso de Pós – Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá e será desenvolvida pelas pesquisadoras Marlova Estela Caldatto (doutoranda) e Regina Maria Pavanello (orientadora), sendo esta última a coordenadora da pesquisa.

Esta pesquisa tem como objetivo: "Considerando-se que o objetivo de PROFMAT é proporcionar uma formação aprofundada em termos matemáticos aos professores de matemática que atuam na educação básica, esta pesquisa de doutorado tem por objetivo estudar se e em que termos este curso de formação contribui para o desenvolvimento do trabalho desses docentes no ambiente escolar".

Os benefícios esperados da pesquisa são: Contribuir para o processo de avaliação do PROFMAT, obtendo dados que possibilitem discussões em relação à efetividade do referido programa de formação de professores em nível nacional; Contribuir para as discussões em torno dos temas: currículo, formação de professores de matemática, políticas de formação de professores.

Levando-se em conta seu vínculo com o PROFMAT, sua participação é fundamental para o êxito da referida pesquisa.

Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e que seus dados pessoais serão mantidos em absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Com relação às entrevistas gravadas e aulas (áudio e imagem), posteriormente a transcrição destas, nos responsabilizamos em descartar todas estas.

Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UEM:

Regina Maria Pavanello
Endereço: Av. Colombo, 5790 – Bloco F67 – Sala 007
Maringá – Paraná – CEP: 87020-900
Telefone: (44) 3261-4827
Email: reginapavanello@hotmail.com

Marlova Estela Caldatto
Endereço: Rua Mandaguari, 370, apartamento 024.
Maringá – Paraná - CEP: 87020-230
Telefones: (44) 9138-6159 e (46) 9102-0680
Email: maracaldatto@yahoo.com.br

COPEP/UEM: Universidade Estadual de Maringá.
Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.
Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.
CEP 87020-900. Maringá-Pr. Tel: (44) 3261-4444
E-mail: copep@uem.br

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Eu,……………………………………………..declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar VOLUNTARIAMENTE da pesquisa coordenada pela Professora Regina Maria Pavanello.

_________________________________ Data:……………………..
Assinatura

Eu, Regina Maria Pavanello, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

___________________________________ Data:.............................
Assinatura do pesquisador responsável.

Eu, Marlova Estela Caldatto, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

___________________________________ Data:.............................
Assinatura do pesquisador

CAPÍTULO 5: O CURRÍCULO PRESCRITO

Neste capítulo discutimos o Projeto Acadêmico do PROFMAT, por nós entendido como o *Currículo Prescrito* nos termos de Sacristán (1998; 2013). Na perspectiva processual e descentralizadora proposta por Sacristán (1998; 2013), o currículo é visto como um processo que ocorre desde um plano – projeto – até sua conversão em práticas pedagógicas. O *currículo prescrito* é a primeira das fases desse processo de desenvolvimento curricular.

A discussão seguirá a estruturação do supracitado documento, além de abordar os tópicos nele mencionados.

INTRODUÇÃO

O Ofício n° 031_06/2010/CTC/CAAIII/CGAA/DAV/CAPES[42], datado de 08 de novembro de 2010 e assinado por Lívio Amaral, Diretor de Avaliação da CAPES/MEC, direcionado a Hilário Alencar da Silva, na época Presidente da SBM, comunicou oficialmente à SBM que o Conselho Técnico-Científico da Educação Superior (CTC-ES), após apreciação do parecer da consultoria científica externa, recomendou o Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, nível Mestrado Profissional, da SBM.

Anexado a este ofício estava o projeto acadêmico do PROFMAT, encaminhado pela SBM à CAPES para apreciação. As informações que constam do projeto acadêmico do curso são fundamentais para o processo de avaliação tanto da implementação quanto da manutenção do programa de pós-graduação pela Capes.

Dadas as características desse projeto (apresenta a caracterização do PROFMAT, seus objetivos, grade e ementário), entendemos que este se configura como o Currículo do PROFMAT, uma vez que expõe as pretensões que a instituição/projeto de ensino pretende alcançar (ALONSO, 2013).

Sobre o*currículo prescrito* Sacristán (1998) pondera que:

> Em todo sistema educativo, como conseqüência das regulações inexoráveis às quais está submetido, levando em conta sua

[42] Disponível em: http://www.capes.gov.br/images/stories/download/editais/PROFMAT_AnexoII_ProjetoAcademico.pdf. Acesso em: 20 jul. 2014.

> significação social, existe algum tipo de prescrição ou orientação do que deve ser seu conteúdo, principalmente em relação à escolaridade obrigatória. São aspectos que atuam como referência na ordenação do sistema curricular, servem de ponto de partida para a elaboração de materiais, controle do sistema, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 104)

Nossa caracterização do projeto acadêmico do PROFMAT como o currículo prescrito encontra respaldo em Saviani (2003, p. 43) quando este pondera que a noção de currículo "liga-se às ideias de: controle do processo pedagógico; estabelecimento de prioridades segundo as finalidades da educação, de acordo com o público a que se destina e com os interesses dos atores em disputa; ordenação, sequenciação e dosagem dos conteúdos de ensino". Além disso,

> O conceito de currículo, desde seu uso inicial, representa a expressão e a proposta da organização dos segmentos e fragmentos dos conteúdos que o compõem; é uma espécie de partitura que articula os episódios isolados das ações, sem a qual eles ficariam desordenados, isolados entre si ou simplesmente justapostos, provocando uma aprendizagem fragmentada. O currículo desempenha uma função dupla – organizadora e ao mesmo tempo unificadora – do ensinar e do aprender, por um lado, e por outro, cria um paradoxo, devido ao fato de que nele se reforçam as fronteiras (e muralhas) que delimitam seus componentes, como por exemplo, a separação entre as matérias ou disciplinas que o compõem. (SACRISTÁN, 2013, p. 17)

Tendo esses aspectos em mente, apresentamos a seguir uma discussão sobre o Projeto do PROFMAT, especialmente sobre os seguintes tópicos: Caracterização do Curso (Objetivos / Perfil profissional a ser formado, Diretrizes), Descrição das Disciplinas (grade e ementário), Identificação da Proposta, Áreas de Concentração/Linhas de Pesquisa, Corpo Docente (titulação, produção acadêmica, experiência internacional de formação, instituição em que trabalha, etc.), Projetos (vinculados), etc.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PROPOSTA: O NOME DO PROGRAMA, A ÁREA BÁSICA DO PROGRAMA E O NÍVEL DE MESTRADO PROFISSIONAL

A partir de sua recomendação, o referido Programa de Pós-Graduação passou a integrar o Sistema Nacional de Pós-Graduação (SNPG) e, consequentemente, passou a ser regularmente acompanhado e avaliado pela Capes por meio dos Aplicativos Coleta de Dados e Cadastro. Ao recomendar o PROFMAT como um curso de Pós-Graduação, a Capes atribuiu- lhe nota 3, que é o conceito atribuído em geral a todo curso iniciante.

Contudo, a partir de dezembro de 2014, com a publicação do resultado da primeira avaliação *ad hoc* da Capes relativa ao primeiro triênio de funcionamento do programa[43] (correspondente ao período de 2010 a 2012), o PROFMAT passou da nota 3 para a nota 5, considerada nota máxima para este nível de pós-graduação[44].

De acordo com os dados constantes no Projeto Acadêmico do PROFMAT e que estão incluídos atualmente em seu cadastro na Plataforma Sucupira[45], este programa é identificado como um projeto da Área Básica de Matemática pertencente à Área de Avaliação: Matemática/Probabilidade e Estatística e intitulado como "Matemática em Rede Nacional", com o nível de Mestrado Profissional, leva o acadêmico do programa à obtenção do título de *Mestre em Matemática*.

O Mestrado Profissional, de acordo com o Art. 3º, da Portaria Normativa nº 17, de 28 de dezembro de 2009, do MEC, é definido como uma modalidade de formação pós-graduada *stricto sensu* que possibilita:

> I - a capacitação de pessoal para a prática profissional avançada e transformadora de procedimentos e processos aplicados, por meio da incorporação do método científico, habilitando o profissional para atuar em atividades técnico-científicas e de inovação;
> II - a formação de profissionais qualificados pela apropriação e aplicação do conhecimento embasado no rigor metodológico e nos fundamentos científicos;

---

[43]De acordo com a Capes, os objetivos da Avaliação Trienal 2013 são: 1) contribuir para a manutenção da qualidade de desempenho da pós-graduação brasileira: a) identificação dos programas de pós-graduação *stricto sensu* que, por atenderem ao padrão mínimo de qualidade de desempenho exigido para cada nível de curso, tiveram a renovação de seu reconhecimento recomendada pela Capes; b) identificação dos programas de pós-graduação *stricto sensu* que, por não atenderem ao padrão mínimo de qualidade de desempenho, perderam sua condição de curso "recomendado" e integrante do Sistema Nacional de Pós-Graduação. 2) retratar a situação da pós-graduação brasileira no triênio de forma clara e efetiva, ao especificar: a) o grau diferencial de desenvolvimento alcançado pela pós-graduação nas diversas áreas; b) a hierarquia dos programas no âmbito de suas respectivas áreas, expressando as diferenças quanto à qualidade de desempenho que eles apresentaram no triênio; c) caracterização da situação específica de cada programa, mediante a apresentação de relatório detalhado sobre o desempenho do programa no triênio 2010-2012. 3) contribuir para o desenvolvimento de cada programa e área em particular e da pós-graduação brasileira em geral ao fornecer, a cada programa avaliado, as apreciações criteriosas sobre os pontos fortes e os pontos fracos de seu desempenho e antepor-lhes desafios e metas para o futuro. 4) fornecer subsídios para a definição de planos e políticas científico-acadêmicas de desenvolvimento e a realização de investimentos no Sistema Nacional de Pós-Graduação. Disponível em: http://www.avaliacaotrienal2013.capes.gov.br/home-page/objetivos. Acesso em: 15 jan. 2015.

[44]Os resultados da avaliação periódica dos Programas de Pós-graduação brasileiros são expressos em notas, que variam numa escala de 1 a 7, que são atribuídas após análise de indicadores referentes ao período avaliado.Segundo o sistema, as notas 1 e 2 descredenciam o programa, a nota 3 significa desempenho regular, (que atende aos padrões mínimos de qualidade), as notas 4 e 5 significam um desempenho entre bom e muito bom, sendo 5 a nota máxima para os programas só com mestrado, enquanto as notas 6 e 7 são reservadas exclusivamente para os programas com doutorado.

[45]A Plataforma Sucupira se configura como a base dados do Sistema Nacional de Pós-Graduação e disponibiliza as informações, processos e procedimentos que a Capes realiza no SNPG para toda a comunidade acadêmica. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/. Acesso em: 14 jan. 2014.

> III - a incorporação e atualização permanentes dos avanços da ciência e das tecnologias, bem como a capacitação para aplicar os mesmos, tendo como foco a gestão, a produção técnico-científica na pesquisa aplicada e a proposição de inovações e aperfeiçoamentos tecnológicos para a solução de problemas específicos. (BRASIL, 2009b, p. 20-21)

A referida legislação argumenta, por meio de um parágrafo único, que,

> Parágrafo único. A oferta de cursos com vistas à formação no Mestrado Profissional terá como ênfase os princípios de aplicabilidade técnica, flexibilidade operacional e organicidade do conhecimento técnico-científico, visando o treinamento de pessoal pela exposição dos alunos aos processos da utilização aplicada dos conhecimentos e o exercício da inovação, visando a valorização da experiência profissional. (BRASIL, 2009b, p. 21)

A definição de Mestrado Profissional pela Portaria Normativa nº 17, de 28 de dezembro de 2009, o caracteriza assim pela forte vinculação dos conhecimentos produzidos pela academia com a prática do profissional e com a experiência do acadêmico a ser formado, de modo que o rigor metodológico, os fundamentos científicos e a produção técnico-científica voltam-se para a solução de problemas específicos e estão vinculados estreitamente à prática do profissional.

Considerando o contexto apresentado pela legislação vigente e que o público alvo do PROFMAT é o professor que ministra matemática na escola de nível básico (ensino fundamental e médio), este curso necessariamente deve voltar-se para a prática do professor nesse nível de ensino e para a solução dos problemas específicos dessa prática.

Ainda no tocante à identificação do programa, a Capes recomenda aos interessados em implementar cursos de pós-graduação:

> A delimitação do campo de atuação de um Programa de Pós-Graduação e da formação correspondente aos cursos por ele oferecidos, dá-se por uma série de informações articuladas, cada qual se desdobrando em outras que melhor especificam o foco das atividades de ensino e pesquisa que ele promove. Uma primeira visão de qual é o campo de competência de um Programa é dado pelo seu nome e o dos cursos que oferece e pela identificação da *área básica* do conhecimento a que ele se vincula. (CAPES, 2012, p. 23)

O campo de atuação do PROFMAT, dado seu título e sua área básica de conhecimento, é a Matemática, uma vez que seu título é Matemática em Rede Nacional e sua área básica de atuação é a Matemática. Contudo, essa caracterização da área de atuação como sendo a Matemática é contraditória na medida em que este programa tem como objetivo a formação do professor de Matemática que, de acordo com a literatura internacional e nacional de formação de professores, se configura como uma composição de conhecimentos de diversas áreas (SHULMAN, 1986 e 1987; BROMME, 1993; NÓVOA, 1995; DAY, 1999; TARDIF, 2002; HILL, SCHILLING e BALL, 2004; MOREIRA, 2004; HILL e BALL, 2004; BALL, HILL e BASS, 2005; HILL, ROWAN e BALL, 2005; HILL, 2007; HILL *et al.*, 2007; HILL e LUBIENSKI, 2007; BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL *et al.*, 2008; KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008; KRAUSS, BRUNNER e KUNTER, 2008; MA, 2009; BAUMERT *et al.*, 2010; MOREIRA e DAVID, 2010; KRAUSS e BLUM, 2012; BAUMERT e KUNTER, 2013; CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013; CARRILLO *et al.*, 2014; FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013; KLEICKMANN *et al.*, 2013; MOREIRA e FERREIRA, 2013), além dos da própria matemática, por exemplo, de psicologia, antropologia, filosofia, sociologia, gestão educacional, comunicação e linguagem (SHULMAN, 1987; TARDIF, 2002; DAY, 1999; FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013).

O PROFMAT possui como IES proponente a “SBM/Sociedade Brasileira de Matemática” uma instituição que, em termos do Código Civil em vigor, caracteriza-se como uma Associação. Após a proposição desse Mestrado, voltado para a formação de professores, este formato disseminou-se de modo que o MNPEF e o ProfiAp são coordenados, respectivamente, pela Sociedade Brasileira de Física e pela Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior (Andifes).

No tocante à contextualização institucional e regional da proposta, o projeto apresenta o seguinte texto:

> O Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil (UAB), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Este curso visa alcance nacional e grande escala de atuação com o objetivo de, a médio prazo, incrementar a formação matemática do professor do ensino básico em todo o território nacional. Trata-se de uma forma de atuação consistente com os objetivos primários da SBM, que incluem "estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis". <u>O Programa visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação docente com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante ao ensino básico.</u> (CAPES, 2010, p. 6, grifo nosso)

A expansão prevista no projeto do PROFMAT vem se efetivando à medida que o programa, de acordo com a “Ficha de Avaliação Trienal da CAPES”[46], com a “Avaliação Suplementar do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)”[47]e com os editais do “Exames Nacionais de Acesso”[48], que havia iniciado suas atividades no ano de 2011, com 1.192 acadêmicos e 48 instituições (54 polos), teve esses números ampliados no ano de 2012 quando o curso passou a oferecer 1.575 vagas, distribuídas em 59 instituições (74 polos). No ano de 2013, no entanto, o programa contava com a adesão de 59 instituições associadas (71 polos) e ofertou 1.570 vagas e, em 2014, o curso, presente em 27 unidades da federação, ofertou 1.500 vagas distribuídas em 60 instituições (69 polos). Em 2015, foram ofertadas 1.575 vagas.

Contudo, esses dados não refletem literalmente o fluxo de alunos que o PROFMAT teve no período de sua implementação. De acordo com os dados divulgados pela Plataforma Sucupira e tabelados por nós, esse fluxo pode ser melhor visualizado na Tabela 1.

Tabela 1: Fluxo de alunos no PROFMAT entre os anos de 2010 e 2015.

Fluxo de alunos no PROFMAT	**Anos de funcionamento do PROFMAT**					
	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Vagas ofertadas		1.192	1.575	1.570	1.500	1.575
Alunos novos matriculados	0	921	1.183	1.389	1.298	40
Titulados	0	0	0	707	9	
Desligados	0	1	7	296	104	
Abandonou	0	0	1	37	8	
Alunos ao final do	0	920	2.095	2.444	3.619	3.659

[46] Disponível em: http://www.avaliacaotrienal2013.capes.gov.br/resultados/fichas-de-avaliacao , acesso em: 17/01/2015.
[47] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/Relatorio/PROFMAT_Av_Suplementar.pdf , acesso em: 21/07/2014.
[48] Disponíveis em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/documentos/editais, acesso em 17/01/2015.

ano corrente						

Fonte: dados foram extraídos da Plataforma Sucupira (em meados do mês de fevereiro de 2015) e dos editais do ENA do PROFMAT, contudo a tabela foi elaborada pela autora.

De acordo com os dados apresentados na Tabela 1, no ano de 2011 foram ofertadas 1.192 vagas e matriculados 921 alunos, o que significa que 271 vagas (aproximadamente 22,7% do total de vagas oferecidas) ficaram ociosas. No ano de 2012, foram ofertadas 1.575 vagas, mas somente 1.183 alunos foram matriculados, ou seja, 392 (aproximadamente 24,8% do total de vagas) ficaram ociosas. Para o ano de 2013, foram ofertadas 1.570 vagas e foram matriculados 1.389 alunos, totalizando 181 vagas sem matrículas, ou seja, aproximadamente 11,5% do total de vagas ficaram ociosas. Em 2014, foram ofertadas 1.500 vagas e foram matriculados 1.298 alunos, totalizando 202 vagas sem matrículas, ou seja, aproximadamente 13,5% do total de vagas ficaram ociosas. Assim sendo, podemos concluir que no período de 2011 a 2014 foram ofertadas 5.837 vagas e matriculados 4.791 alunos, totalizando 1.049 vagas ociosas, ou seja, aproximadamente 18% das vagas ofertadas pelo PROFMAT ficaram ociosas.

No período de 2011 a 2014 dos 4.791 acadêmicos que foram matriculados no PROFMAT, 408 foram desligados e 46 abandonaram o curso, de modo que aproximadamente 9% deles não concluíram o curso porque foram desligados e aproximadamente 1% deles desistiu. Os números relativos ao desligamento de alunos e ao abandono do curso, quando associados aos números referentes ao número de vagas ociosas no PROFMAT, refletem que pelo menos 25,7% das vagas ofertadas não culminaram na obtenção da titulação de mestre por estudantes do PROFMAT.

No tocante ao objetivo do programa de “atender professores de Matemática em exercício no ensino básico”, este também tem se efetivado na medida em que 80% das vagas do PROFMAT são destinadas a candidatos que possuem vínculo empregatício com instituições públicas do ensino básico. Contudo, em relação à afirmação “[...] que busquem aprimoramento em sua formação docente com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para o ensino básico”, a proposta da SBM apresenta, aparentemente, uma solução a um problema em aberto e em estudo pela comunidade acadêmica nacional e internacional que pesquisa a formação de professores de Matemática, que é a elaboração de um constructo teórico prescritivo para a formação matemática do professor.

Em relação ao Histórico do curso, o projeto acadêmico do PROFMAT expõe que:

> Não há histórico anterior deste curso junto à CAPES, mas a proposta se assenta na experiência do PAPMEM - Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) que vem sendo executado através de videoconferência via Internet, com muito êxito, pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), desde 2002, sob a coordenação do Prof. Elon Lages Lima. Este programa de complementação de formação já atendeu mais de 30.000 professores do ensino médio em todo o Brasil desde a sua criação. Atualmente, 26 universidades participam desta rede, a saber: Universidade Federal de Alagoas, Universidade Federal do Amapá, Universidade Federal do Amazonas, Universidade Federal da Bahia, Universidade de Brasília, Universidade Federal de Campina Grande, Universidade Estadual de Campinas, Universidade Federal do Ceará, Universidade Federal do Espírito Santo, Universidade Federal de Goiás, Universidade Federal do Maranhão, Universidade Federal do Mato Grosso, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Universidade Federal de Minas Gerais, Universidade Federal do Pará, Universidade Federal da Paraíba, Universidade Federal do Paraná, Universidade Federal de Pernambuco, Universidade Federal do Piauí, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Universidade Federal de Roraima, Universidade Federal de Santa Catarina, Universidade Federal de Sergipe, Universidade Federal do Tocantins e Universidade Federal de Uberlândia. Além disso, a SBM, em pareceria com o IMPA, possui a experiência de uma outra ação de grande escala sobre o ensino básico no Brasil que é a OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Inclusive em 2009 foram mais de 19 milhões de participantes da OBMEP. (CAPES, 2010, p. 6)

O **“**Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio” (PAPMEM) é um programa realizado desde 1990, que oferece “treinamento (*sic*) gratuito para os professores de Matemática do Estado do Rio de Janeiro” e atualmente “tem recebido apoio para sua realização da CAPES”[49]. Este curso transmite as aulas ao vivo via internet para as 61 instituições participantes. Deste programa resultou uma série de obras que compõem a “Coleção do Professor de Matemática” e que, segundo o site do PAPMEM, “é seguro afirmar que esta coleção representa a melhor referência disponível no Brasil para a formação de professores de Ensino Médio de Matemática”.

---

[49] Disponível em: http://www.impa.br/opencms/pt/programas/programa_ensino_medio/ensino_medio_2014_modulo1.html. Acesso em: 20 jun. 2014.

Em relação à adesão inicial das instituições de ensino, o projeto do PROFMAT ressalta que o programa já contava, naquele momento, com a adesão prévia formal de 21 instituições públicas de ensino superior e que, tão logo o curso fosse homologado, seria feita uma chamada pública de adesões visando a expandir a rede até sua dimensão pretendida, com cerca de 60 Instituições Associadas (CAPES, 2010)

Em relação ao quesito Cooperação e Intercâmbio, o texto do projeto do PROFMAT salienta que:

> O Programa irá se estruturar por meio de uma rede de Instituições de Ensino Superior amplamente distribuída pelo território nacional, com coordenação pela Sociedade Brasileira de Matemática em parceria com a Universidade Aberta do Brasil. A UAB fornece ao programa diversas formas de apoio - sua experiência em gestão de cursos a distância, disponibilização de ferramentas e materiais de apoio e de sua infraestrutura física, que consiste de uma rede de pólos de atuação amplamente distribuída pelo território nacional, com salas de aula, computadores e com acesso internet. A participação da SBM representa uma forma de organizar o engajamento de toda a comunidade acadêmica brasileira da área de matemática no Programa. (CAPES, 2010, p. 6)

5.2 CARACTERIZAÇÃO DO PROFMAT: AS ÁREAS DE CONCENTRAÇÃO E AS LINHAS DE PESQUISA

As áreas de concentração e as Linhas de pesquisa do PROFMAT, e suas respectivas descrições, são explicitadas pelas Tabelas 2 e 3, apresentadas na sequência.

Tabela 2 - Áreas de Concentração do PROFMAT.

Área de Concentração	Descrição
Análise Matemática	Estudo fundamentado no conceito de limite, que inclui desde a estrutura métrica dos números reais até o estudo sistemático da estrutura de espaços de funções, de soluções de equações diferenciais e dos conceitos de medida e de integral.
Geometria e Topologia	Área de estudo das propriedades métricas e invariantes por deformação dos espaços localmente modelados nos espaços Euclidianos.
Matemática	Estudo interdisciplinar das aplicações dos métodos e ideias matemáticas nas diversas áreas de interesse científico, tecnológico ou

Aplicada	social, por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos para situações de interesse, pelo estudo teórico ou computacional destes modelos e pelo desenvolvimento de métodos para o estudo sistemático destes modelos.
Ensino de Matemática	Trata-se do estudo das formas e estratégias de ensino-aprendizagem de conteúdo matemático.
Álgebra	Estudo das estruturas algébricas, ou seja, das propriedades induzidas por operações formais entre os elementos de conjuntos. Inclui, por exemplo, as propriedades dos números inteiros - teoria dos números e a geometria dos conjuntos definidos por sistemas de equações polinomiais - geometria algébrica.

Fonte: Ofício n° 031_06/2010/CTC/CAAIII/CGAA/DAV/CAPES.

Tabela 3 - Linhas do PROFMAT.

Linha de pesquisa	Área de Concentração	Descrição
Análise Funcional	Análise Matemática	Propriedades e estrutura dos espaços de funções.
Equações Diferenciais Parciais	Análise Matemática	Estudo da existência, unicidade, regularidade e propriedades de soluções de equações ou sistemas de equações a derivadas parciais.
Sistemas Dinâmicos	Geometria e Topologia	Estudo das propriedades qualitativas de sistemas descritos por processos evolutivos determinísticos.
Geometria Diferencial	Geometria e Topologia	Estudo das propriedades globais de espaços métricos localmente Euclidianos.
Otimização	Matemática Aplicada	Estudo de métodos computacionais ou teóricos para encontrar valores e pontos extremos de funcionais, sujeitos a restrições.
Análise Numérica	Matemática Aplicada	Estudo de métodos de aproximação de problemas com variáveis contínuas por processos discretos.
Ensino Básico de	Ensino de	Métodos e processos no

Matemática	Matemática	ensino/aprendizagem de matemática para crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental e médio.
Ensino Universitário de Matemática	Ensino de Matemática	Métodos e processos de ensino/aprendizagem para jovens adultos no contexto do ensino universitário.
Teoria dos Números	Álgebra	Estudos das propriedades dos números inteiros.
Geometria Algébrica	Álgebra	Estudo das propriedades de espaços definidos por sistemas de equações polinomiais.

Fonte: Ofício n° 031_06/2010/CTC/CAAIII/CGAA/DAV/CAPES.

A “Área de Concentração”[50] de um Programa de Pós-Graduação “[...]expressa a vocação inicial e/ou histórica do Programa. Neste sentido, ela deve indicar, de maneira clara, a área do conhecimento à qual pertence o Programa, os contornos gerais de sua especialidade na produção do conhecimento e na formação esperada” (CAPES, 2012, p. 23).

Já as “Linhas de Pesquisa” “[...] expressam a especificidade de produção de conhecimento dentro de uma área de concentração e são sustentadas, fundamentalmente, por docentes/pesquisadores do corpo permanente do programa (CAPES, 2012, p. 23). Contudo,

> [...] as linhas de pesquisa não representam um agregado desconexo, mas devem expressar um recorte específico e bem delimitado dentro da(s) área(s) de concentração <u>e ser em proporção adequada à dimensão e à área de competência acadêmica do corpo permanente de docentes</u>, devendo: (a) agregar, garantindo uma distribuição equilibrada entre os docentes, os projetos de pesquisa do Programa; (b) <u>assegurar a articulação de suas ementas com as temáticas de projetos e teses e dissertações</u>; (c) garantir proporção adequada entre o número de projetos de pesquisa e a dimensão do corpo docente. (CAPES, 2012, p, 23, grifos nossos)

Além disso, “[...] <u>considerando-se que a pós-graduação *stricto sensu* é o espaço da pesquisa e da produção de conhecimento, espera-se que linhas, orientações,</u>

[50]Um Programa de Pós-Graduação pode ter uma ou mais Áreas de Concentração. Além disso, é desejável que as Áreas de Concentração apresentem uma denominação/descrição abrangente, pois não se espera que os programas alterem sua(s) área(s) de concentração, a menos no caso de que venha a ser objeto de forte reestruturação. (CAPES, 2012)

disciplinas ministradas e produtos da pesquisa estejam em íntima articulação" (CAPES, 2012, p. 23, grifo nosso).

Conforme explicitado acima, os componentes do projeto acadêmico de um programa de pós-graduação "áreas de concentração", "linhas de pesquisa", "orientações" (dissertações e teses), "disciplinas" e "produtos de pesquisa" (artigos, livros, etc.) devem estar intimamente articulados, ou seja, são as áreas de concentração e as linhas de pesquisa que, além de estar de acordo com a competência acadêmica do corpo docente, devem nortear as atividades de ensino e pesquisa que são desenvolvidas na pós-graduação *stricto sensu.* Assim sendo, doravante discutiremos a (existência de) relação entre essas áreas de concentração, as linhas pesquisa e as atividades a serem desenvolvidas pelo PROFMAT, tendo em vista que este programa é um mestrado profissional – curso que objetiva a formação de profissionais para o exercício da prática profissional, visando atender demandas sociais, organizacionais ou profissionais e do mercado de trabalho (BRASIL, 2009b) – cujo público alvo são os professores que ministram aula de Matemática nos ensinos fundamental (anos finais) e médio.

Neste contexto, a discussão que apresentamos *tem o objetivo de expor alguns dos objetos de estudo dessas linhas de pesquisa* – de acordo com a descrição apresentada pelo projeto acadêmico do PROFMAT e bibliografias direcionadas para o estudo dessas áreas da matemática acadêmica – *relacionando-os e/ou contrapondo-os com o objetivo principal deste programa, com a matemática presente no currículo escolar* e com os *pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013) ao discorrerem sobre a "dimensão matemática" da formação de professores de Matemática.* Assim, é importante destacar que *o nosso objetivo não é discutir a gênese, a epistemologia, a história, a filosofia ou a dimensão de cada uma dessas linhas e áreas*, uma vez que temos a plena convicção da amplitude, da complexidade, do dinamismo e da especificidade da matemática como campo de pesquisa e de cada uma de suas áreas.

Adotamos como referencial para nossa discussão bibliográfica da área da matemática acadêmica, tendo em vista que os temas do projeto são exclusivamente dessa área.

5.2.1 Área de concentração "Análise Matemática"

Esta área é descrita, no projeto do PROFMAT, como o “Estudo fundamentado no conceito de limite, que inclui desde a estrutura métrica dos números reais até o estudo sistemático da estrutura de espaços de funções, de soluções de equações diferenciais e dos conceitos de medida e de integral” sendo delimitada nesse projeto por meio das linhas de pesquisa “Análise Funcional” e “Equação Diferencial Parcial”. Neste fragmento do trabalho, discutiremos as referidas linhas de pesquisa considerando a relevância que possuem dentro da estrutura do projeto acadêmico do PROFMAT de pós-graduação *stricto sensu*, de acordo com o documento CAPES (2012).

A linha de pesquisa “Análise Funcional” do PROFMAT é apresentada a partir da seguinte descrição: “Propriedades e estrutura dos espaços de Funções”.

Apresentamos a seguir alguns dos principais objetos de estudo da Análise Funcional, de acordo com a obra intitulada *Introdução à Análise Funcional*, de autoria de César R. de Oliveira e editada pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

A Análise Funcional está fundamentada no estudo das funções lineares contínuas entre espaços normados, ou seja, das funções munidas das propriedades de continuidade (I) e linearidade (II), cujo domínio e contra-domínio são espaços normados (III).

Tendo em vista que um dos principais objetos de estudo da Análise Funcional são as funções, temos que considerar o seu significado matemático. Assim, temos que:

Dados os conjuntos X,Y, uma função é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ a um elemento $y=f(x) \in Y$, onde o conjunto X é chamado domínio e o conjunto Y é chamado de contra-domínio (LIMA, 2013).

(III) Definição: Um *espaço normado* é um espaço vetorial munido de uma norma (OLIVEIRA, 2007).

Assim sendo, a definição de “espaço normado” suscita como pré-requisitos: a definição de espaço vetorial e a definição de norma. Contudo, a definição de espaço vetorial, por sua vez, suscita a definição de corpo. Na sequência, apresentaremos as definições citadas.

Definição: Um conjunto não vazio K é um *corpo* se em K pudermos definir duas operações, denotadas por + (adição) e (multiplicação), satisfazendo as seguintes propriedades:

(A1) a+b=b+a, $\forall$ a, b $\in$ K;

(A2) a+(b+c)=(a+b)+c, $\forall$ a,b,c $\in$ K;

(A3) Existe um elemento em K, denotado por 0 e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz 0+a=a+0=a, $\forall$ a $\in$ K;

(A4) Para cada a $\in$ K, existe um elemento em K, denotado por –a e chamado oposto de a tal que a+(-a)=0;

(M1) a.b=b.a, $\forall$ a,b $\in$ K;

(M2) a.(b.c)=(a.b).c, $\forall$ a,b,c $\in$ K;

(M3) existe um elemento em K, denotado por 1 e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que 1.a=a.1=a, $\forall$ a $\in$ K;

(M4) Para cada elemento não nulo $a$$\in$ K, existe um elemento $\in$ K, denotado por a^{-1}e chamado de inverso multiplicativo de a, tal que $a.\ a^{-1} = a^{-1}\ .\ a$ =1; (D) (a+b).c=a.c + b.c, $\forall$ a,b,c $\in$ K (COELHO, LOURENÇO, 2001).

Definição: Um conjunto não-vazio *V é um espaço vetorial sobre um corpo K* se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:

(A) A cada par u,v de vetores em V corresponde um único vetor u+v $\in$ V, chamado de soma de u e v tal que:

(A1) u+v=v+u, $\forall$ u, v $\in$ V;

(A2) (u+v)+w=u+(v+w), $\forall$ u,v,w $\in$ V;

(A3) exista em V um vetor, denominado de vetor nulo e denotado por 0, tal que 0+v=v, $\forall$ v $\in$ V;

(A4) a cada vetor v $\in$ V, exista um vetor em V, denotado por –v tal que v+(-v)=0; (M) A cada λ no corpo K e v $\in$ V, corresponde um vetor λ.v $\in$ V, denominado produto por escalar de λ e v tal que:

(M1) (α . β).v= α.(β.v), $\forall$ α, β $\in$ K e $\forall$ v $\in$ V;

(M2) 1.v=v, $\forall$ v $\in$ V.

Além disso, vamos impor que as operações dadas em (A) e (M) se distribuam, isto é, que valham as seguintes propriedades:

(D1) α. (u+v)= α.u + α.v, $\forall$ $\alpha$$\in$ K e $\forall$ u,v $\in$ V;

(D2) (α + β).v= α.v + β.v , $\forall$ α, β $\in$ K e $\forall$ v $\in$ V (COELHO, LOURENÇO, 2001).

Definição: Uma *norma em um espaço vetorial V* (real ou complexo) é uma aplicação $\|\cdot\|$:V → R que satisfaz:

i) $\|v\| \geq 0$, $\forall v \in$ V;

ii) $\|v\| = 0$ se, e somente se, v=0;

iii) $\|\alpha\, v\| = |\alpha| \,.\, \|v\|$, $\forall \alpha$ em K e $\forall v \in$ V e iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in$ V (OLIVEIRA, 2007).

(II) Definição: Sejam U e V espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Uma função f: U → V é linear quando:

i) f(u1+u2)= f(u1) + f(u2), ∀u1, u2 ∈ U;

ii) f (λ . u) = λ. f(u), ∀ λ ∈ K e ∀ u ∈ U (COELHO, LOURENÇO, 2001).

(I) Definição: Sejam M, N espaços métricos. Dizemos que a função *f: M → N é contínua no ponto a ∈ M* quando, para todo ε>0 dado, é possível obter δ >0 tal que d(x,a) < δ, implica que d(f(x), f(a)) <ε.

Dizemos que a função *f: M → N é contínua* quando ela é contínua em todos os pontos a ∈ M (LIMA, 2011).

Conforme se pode verificar, a definição de continuidade de função entre espaços métricos suscita como pré-requisito a definição de espaço métrico (a), que por sua vez suscita a definição de métrica (b), conforme apresentaremos na sequência.

(a) Definição: Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M (LIMA, 2011).

Sendo que, de acordo com Lima (2011), os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc.

(b) Definição: Uma *métrica em um conjunto M* é uma função d: M x M → R, que associa a cada par ordenado de elementos x,y ∈ M um número real d(x,y), chamado distância de x até y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x,y,z ∈ M: d1) d(x,x)=0;
d2) Se x é diferente de y, então d(x,y)>0;
d3) d(x,y)=d(y,x);

d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (LIMA, 2011).

Retomando nosso objeto de estudo, o PROFMAT, se considerarmos "esperar-se" que as linhas de pesquisa estejam intimamente articuladas com as atividades de ensino (disciplinas) e pesquisa (produção acadêmica, dissertações produzidas pelos acadêmicos) desenvolvidas no programa de pós-graduação (CAPES, 2012, p. 23), em tese a linha de pesquisa Análise Funcional deveria estar intimamente articulada com as disciplinas, dissertações produzidas, produção do corpo docente e com os objetivos do programa – em especial o que propõe "Qualificar professores de Matemática que atuam na Educação Básica em nível de pós-graduação stricto sensu, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo, oferecendo um curso de formação profissional que contemple as necessidades advindas do trabalho cotidiano no espaço da escola" (CAPES, 2013, p. 01, grifo nosso).

Neste cenário, à luz da caracterização das "dimensões da formação do docente de Matemática" que apresentamos em capítulo anterior, buscaremos estabelecer relações entre a descrição que fizemos para a linha de pesquisa "Análise Funcional" e conhecimentos que são objeto de trabalho do professor de Matemática da educação básica e são veiculados pelo currículo escolar brasileiro.

A temática "funções" é contemplada, no currículo escolar[51], pelos seguintes conteúdos: função afim, função quadrática, função polinomial, função logarítmica, função exponencial, função modular e função trigonométrica. A partir de uma leitura superficial, somos tentados, inicialmente, a relacionar a linha de pesquisa Análise Funcional com a temática "funções" abordada na escola, uma vez que ambas estudam "funções". Contudo, ao serem abordadas nas escolas, as "funções" assumem como domínio e contra-domínio os "conjuntos numéricos", entendidos estes como os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Por outro lado, o domínio e o contra-domínio das funções estudadas na linha de pesquisa Análise Funcional são os espaços normados, conteúdo que não é objeto de trabalho do professor da educação básica ao ensinar a matemática nesse nível de ensino.

Poder-se-ia argumentar que alguns "conjuntos numéricos" se configuram como *casos particulares* de "espaços normados", ou seja, o domínio e o contra-domínio das

[51]Mais informações sobre os conteúdos curriculares contemplados pelo currículo da escola brasileira podem ser encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática), tanto para os anos finais do ensino fundamental quanto do ensino médio, além de currículos estaduais, como pelo currículo em vigor no Estado do Paraná (Diretrizes Curriculares da Educação Básica). Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/irati/arquivos/File/matematica.pdf. Acesso em: 23 jan. 2014.

funções estudadas em Análise Funcional são generalizações do domínio e do contra-domínio das funções estudadas na escola e, por isso, seria importante que os professores conhecessem a relação entre os "conjuntos numéricos" e os "espaços normados". Contudo, o primeiro apontamento que fazemos refere-se à quantidade e à natureza dos pré-requisitos que o objeto matemático "espaços normados" suscita em sua composição, que são manipulados geralmente em cursos de matemática universitária (bacharelado e pós-graduação em matemática) associados ás áreas de topologia, álgebra linear e análise matemática.

Embora essa associação entre "conjuntos numéricos" e "espaços normados" pudesse ser interpretada como um processo de aprofundamento da matemática escolar, esse aprofundamento ocorreria no sentido de a *matemática escolar* ampliar-se a ponto de transformar-se em *matemática acadêmica*, distanciando-se da prática do professor de Matemática da educação básica. A visão apresentada pelo projeto acadêmico do PROFMAT sobre o aprofundamento da matemática escolar distancia-se da visão apresentada por pesquisadores (BROMME, 1993; MOREIRA, 2004; MOREIRA e DAVID, 2010; BALL, THAMES e PHELPS, 2008; KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008; MA, 2009; CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013) que vêm estudando a prática do professor de Matemática e suas necessidades formativas para desenvolver um ensino de matemática de boa qualidade, conforme discutimos no Capítulo 3 desta tese.

Entretanto, na medida em que o PROFMAT se propõe a formar o professor de Matemática matematicamente atendendo às especificidades de seu trabalho na escola básica, algumas questões precisariam ser respondidas: de que forma o conhecimento "espaços normados" auxiliaria o trabalho do professor na exploração do tema "funções" na escola? Quais seriam os "porquês" respondidos pelos professoresao abordarem a temática "funções" na educação básica que envolveriam a conceituação de "espaços normados"? De que forma o conhecimento da definição de "espaços normados" e dos demais conhecimentos por ele requeridos auxiliaria o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem da temática "funções"? De que forma o conhecimento da definição de "espaços normados" auxiliaria o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Nesta perspectiva, como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (funções lineares entre espaços normados) seriam vinculadas às atividades dos docentes de matemática na escola básica? De que forma auxiliaria os professores da educação básica no exercício de sua profissão no cotidiano de sala de aula?[52]

Um dos problemas enfrentados pelos professores da escola básica é o ensino (que resulte em aprendizagem) da temática "conjunto numéricos" e suas respectivas operações. Neste sentido, de que forma os conhecimentos relacionados à temática "espaços normados" os auxiliaria neste processo? É visível o imenso distanciamento entre esses conhecimentos e os contemplados na prática do professor da educação básica ao ensinar a matemática nesse nível de ensino e a teorização referente à dimensão matemática da formação do professor de Matemática discutida neste trabalho no Capítulo 3.

Ainda em relação à caracterização das funções estudadas em Análise Funcional e a sua relação com a atividade do docente de Matemática ao ensinar a temática "funções" na escola básica, abordamos as definições de Continuidade de Função e Linearidade de Função. No que concerne à linearidade de funções, ao analisarmos as funções estudadas na escola básica (e já discriminadas por nós anteriormente) a condição $f(x+y) = f(x) + f(y)$, que apresentamos na definição de linearidade de função, ocorre somente na função afim[53] $f(x) = ax + b$, com $a\neq0$ e $b=0$. Ou seja, as funções quadrática, logarítmica, exponencial, modular e trigonométrica não são lineares, o que somente ocorre no caso particular da função afim, $f(x) = ax$, com $a\neq0$.

Isso posto, alguns questionamentos emergem: de que forma o conhecimento da definição de "linearidade de funções" auxiliaria o trabalho do professor ao explorar o tema "funções" na escola, uma vez que não se configura nem sequer como uma generalização das funções estudadas na escola e se associa somente a um caso particular de uma função nela estudada? Além disso, quais seriam os "porquês" respondidos pelos professores ao abordarem a temática "funções" na educação básica que envolveriam a definição de "linearidade de funções"? De que forma o conhecimento da definição de "linearidade de funções" e dos demais conhecimentos requisitados por ela auxiliaria o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem da temática "funções"? De que forma o conhecimento da definição de "linearidade de funções" auxiliaria o professor no

---

[52] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

[53] Uma função $f: R \rightarrow R$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in R$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$. (LIMA, 2013, p. 90, grifo do autor)

processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Nesta perspectiva, como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (linearidade de funções) seriam vinculadas às atividades dos docentes de Matemática na escola básica?[54]

No que se refere à “continuidade de funções”, ao analisarmos as funções que são objetos de estudo na escola básica e ao relacioná-las à definição de continuidade, observamos que a grande maioria delas é contínua. Contudo, esta caracterização perpassa pelo conceito de limite de função, conforme é explicitado pela definição de “função contínua”. Mas tanto a definição de continuidade quanto a de limite de uma função não são objetos de estudo do currículo da escola básica brasileira e distanciam-se da prática do professor de Matemática da educação básica.

De acordo com a discussão que apresentamos, constatamos existir um distanciamento entre os temas Espaços Normados, Continuidade de Função e Linearidade de Função e os conteúdos pertencentes à matemática escolar e às demandas formativas do professor. Este distanciamento é caracterizado pela natureza dos pré-requisitos suscitados para o entendimento e manipulação das definições relativas a estes temas, uma vez que os pré-requisitos suscitados são objeto de estudo da matemática universitária (nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear), da matemática em nível de pós-graduação (nas áreas de Álgebra, Análise e Topologia) e da pesquisa (Álgebra, Análise e Topologia). Nossa afirmação é corroborada por Oliveira (2007), no prefácio de seu livro, ao discorrer que

> Supõe-se que o(a) leitor tenha familiaridade com Álgebra Linear (vários resultados em espaços vetoriais de dimensão finita são propostos como exercício), Topologia Geral (incluindo espaços métricos) e Integração; é suposto que esses assuntos são tratados em disciplinas específicas. Resultados como os Teoremas de Stone-Weierstrass e Riesz-Fischer podem ser usados livremente. (OLIVEIRA, 2007, p. iv)

O autor argumenta ainda que “<u>Análise Funcional é uma disciplina semestral obrigatória para o Doutorado e optativa para o Mestrado [acadêmico] em Matemática</u> da Universidade Federal de São Carlos” (OLIVEIRA, 2007, p. iii, grifo nosso).

---

[54] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

Tendo em vista esperar-se a íntima articulação entre as linhas de pesquisa do PROFMAT e as atividades de "ensino" e "pesquisa" e considerando as indicações do autor sobre a necessidade de pré-requisitos para a leitura de uma obra destinada à "Introdução à Análise Funcional", questiona-se se o curso oferecerá condições para os acadêmicos desenvolverem as atividades de "ensino" e "pesquisa" voltadas para a linha de "Análise Funcional".

A linha de pesquisa "Equação Diferencial Parcial" (EDP) traz em sua descrição que se refere ao "estudo da existência, unicidade, regularidade e propriedades de soluções de equações ou sistemas de equações a derivadas parciais". Conforme evidenciado nesta descrição, o principal objeto de estudo desta linha são as equações derivadas parciais, que são definidas da seguinte forma:

Definição: uma equação diferencial que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de *equação diferencial parcial* (ZILL e CULLEN, 2001; IÓRIO, 2001; IÓRIO JUNIOR e IÓRIO, 2013).

Conforme evidenciado, a definição de equação diferencial parcial suscita a definição de equação diferencial, que apresentamos na sequência:

Definição: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de *equação diferencial* (ZILL e CULLEN, 2001).

De acordo com a definição, as equações diferenciais relacionam-se com a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas e podem ser classificadas de acordo com o tipo, ordem e linearidade.

As definições de equação diferencial e equação diferencial parcial assinalam os pré-requisitos necessários para o estudo das equações diferenciais parciais, que são: "Cálculo de uma ou mais variáveis" e "equações diferenciais ordinárias".

Ao retornarmos a nosso objeto de estudo, o PROFMAT, a linha de pesquisa "Equação Diferencial Parcial" deveria, em tese, estar intimamente articulada com as disciplinas, dissertações produzidas, produção do corpo docente e com os objetivos do programa. Neste cenário, à luz da caracterização das "dimensões da formação do docente de Matemática" que apresentamos em capítulo anterior, buscaremos estabelecer relações entre a descrição que fizemos para a linha de pesquisa "Equação Diferencial Parcial" e conhecimentos historicamente elencados no currículo escolar brasileiro.

A temática “equações” é contemplada no currículo escolar[55] pelo estudo, por exemplo, de equações lineares, equações logarítmicas, etc. A partir de uma leitura superficial somos tentados, inicialmente, a relacionar a linha de pesquisa “Equação Diferencial Parcial (EDP)” com a temática “equações” que é abordada na escola, uma vez que ambas estudam “equações”. Mas os tipos de equações e sistemas de equações historicamente estudadas nas escolas brasileiras[56] são equações e sistemas de equações cujas incógnitas são números Reais, enquanto que, nas EDPs (ou sistemas de EDPs), as incógnitas são funções de duas ou mais variáveis.

Buscando estabelecer relações entre a linha de pesquisa “Equação Diferencial Parcial” e os tipos de equações e sistemas de equações estudados na escola brasileira, assinalamos, a partir de alguns dos pré-requisitos que a primeira suscita em seu entendimento e manipulação, alguns conceitos relacionados às variáveis das EDPs: funções de duas ou mais variáveis, às quais estão associados, por exemplo, o entendimento e a manipulação de conceitos relacionados ao cálculo do limite de funções de duas ou mais variáveis, ao conceito de continuidade de funções de duas ou mais variáveis, ao cálculo da integral e da derivada de uma função de uma variável, bem como ao entendimento e manipulações que envolvem equações diferenciais ordinárias com uma variável.

Conforme a descrição apresentada no parágrafo anterior, o primeiro apontamento que fazemos refere-se à quantidade e à natureza dos pré-requisitos que o entendimento e a manipulação das variáveis das EDPs suscitam em sua composição, que são manipulados geralmente em cursos de matemática universitária (Licenciatura e Bacharelado em Matemática) e pós-graduação em matemática (associados à análise matemática). Embora essa associação entre as variáveis das EDPs e as das equações que são objeto do trabalho do professor da educação básica ao ensinar matemática nesse

---

[55]Mais informações sobre os conteúdos curriculares contemplados pelo currículo da escola brasileira podem ser encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática), tanto para os anos finais do ensino fundamental quanto do ensino médio, além de currículos estaduais, como pelo currículo em vigor no Estado do Paraná (Diretrizes Curriculares da Educação Básica). Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/irati/arquivos/File/matematica.pdf. Acesso em: 23 jan. 2014.

[56] Nossa afirmação é corroborada pelas indicações feitas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática), tanto para os anos finais do ensino fundamental quanto do ensino médio, além de currículos estaduais, como pelo currículo em vigor no Estado do Paraná (Diretrizes Curriculares da Educação Básica). Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/irati/arquivos/File/matematica.pdf. Acesso em: 23 jan. 2014.

.

nível de ensino pudesse ser interpretada como um processo de aprofundamento da matemática escolar, da mesma forma como ocorreu na análise que efetuamos para a linha de pesquisa “Análise funcional”, esse aprofundamento ocorreria no sentido da *matemática escolar* ampliar-se a ponto de transformar-se em *matemática acadêmica*, distanciando-se da prática do professor de Matemática da educação básica. A visão apresentada pelo projeto acadêmico do PROFMAT sobre o aprofundamento da matemática escolar distancia-se da visão apresentada por pesquisadores (BROMME, 1993; MOREIRA, 2004; MOREIRA e DAVID, 2010; BALL, THAMES e PHELPS, 2008; KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008; MA, 2009; CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013) que vêm estudando a prática do professor de Matemática e suas necessidades formativas para desenvolver um ensino de matemática de boa qualidade, conforme discutimos no Capítulo 3 desta tese.

Entretanto, na medida em que o PROFMAT se propõe a formar o professor de Matemática matematicamente atendendo às especificidades de seu trabalho na escola básica, algumas questões precisariam ser respondidas: de que forma os conhecimentos elencados na temática “Equação Diferencial Parcial” auxiliariam o trabalho do professor ao explorar o tema “equações” na escola, se as equações estudadas na escola não se configuram sequer como casos particulares de “Equações Diferenciais Parciais”? Quais seriam os “porquês” respondidos pelos professores ao abordar a temática “equações” que envolveriam a conceituação de “Equação Diferencial Parcial”? De que forma o conhecimento da definição de “Equação Diferencial Parcial” e de seus pré-requisitos auxiliaria o processo de entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem da temática “equações”? De que forma o conhecimento da definição de “Equação Diferencial Parcial” auxiliaria o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (Equação Diferencial Parcial) seriam vinculadas às atividades dos docentes de matemática na escola básica?[57]

Como exposto acima, o estudo das Equações Diferenciais Parciais necessita de vários pré-requisitos, tanto é que disciplinas que tratam deste assunto não são

[57] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir do pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

obrigatórias nem nos Bacharelados em Matemática[58] nem em diversos mestrados acadêmicos em matemática, uma vez que, em geral, são cursadas por acadêmicos que pretendem desenvolver sua pesquisa de mestrado (dissertação) na referida área de pesquisa, pois a EDP configura-se como uma das áreas do conhecimento da Matemática elencadas pelo CNPq[59].

Considerando que nosso objetivo neste fragmento do trabalho era apresentar uma análise sobre a área de concentração "Análise Matemática" que, de acordo com o documento CAPES (2012), é delimitada pelas linhas de pesquisa "Análise Funcional" e "Equações Diferenciais Parciais", entendemos que a área de concentração "Análise Matemática" distancia-se substancialmente da matemática escolar e das atividades centrais do programa de pós-graduação PROFMAT. Além disso, entendemos que embora esse distanciamento pudesse ser interpretado como um processo de aprofundamento da matemática escolar, *ele ocorre no sentido da matemática escolar ampliar-se a ponto de transformar-se em matemática acadêmica.* Neste contexto, o aprofundamento que poderia ser vislumbrado pela área de concentração "Análise Matemática" distancia-se também das necessidades formativas dos professores que ministram aulas de Matemática na educação básica.

5.2.2 A área de concentração "Geometria e Topologia"

A área de concentração "Geometria e Topologia" é descrita como sendo a "Área de estudo das propriedades métricas e invariantes por deformação dos espaços localmente modelados nos espaços Euclidianos" e é delimitada no projeto acadêmico do PROFMAT por meio das linhas de pesquisa "Geometria Diferencial" e "Sistemas Dinâmicos".

Neste fragmento do trabalho, discutiremos as referidas linhas de pesquisa considerando a relevância que possuem dentro da estrutura de um projeto acadêmico de pós-graduação *stricto sensu*, de acordo com o documento CAPES (2012).

---

[58] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

[59] Mais informações sobre as áreas do conhecimento discriminadas pelo CNPq podem ser obtidas no site do CNPq. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

A linha de pesquisa do PROFMAT Geometria Diferencial é apresentada a partir da seguinte descrição: "estudo das propriedades globais de espaços métricos localmente Euclidianos". Contudo, essa linha de pesquisa (Geometria Diferencial) é definida pelo IMPA, de acordo com o site dessa instituição, da seguinte forma:

> "A Geometria Diferencial consiste em aplicações dos métodos da Análise local e global a problemas de Geometria. Ela tem profundas interligações com outros domínios da Matemática tais como: Equações Diferenciais Parciais, Topologia, Funções Analíticas Complexas, Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Grupos. A linguagem e os modelos da Geometria Diferencial têm encontrado aplicações em domínios afins tais como a Relatividade e a Mecânica Celeste. Dado este caráter interdisciplinar, a Geometria Diferencial tem mostrado grande vitalidade e tem se desenvolvido em várias direções que apresentam um considerável volume de pesquisas nos dias atuais." (Disponível em: http://www.impa.br/opencms/pt/pesquisa/pesquisa_areas_de_pesquisa/pesquisa_areas_de_pesquisa_geometria_diferencial/index.html. Acesso em: 26 jan. 2015).

A partir de uma perspectiva introdutória da Geometria Diferencial, Manfredo Perdigão do Carmo elaborou um livro intitulado *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, no qual adota como principais objetos de estudo as curvas e as superfícies. O autor discorre que a geometria diferencial das curvas e superfícies tem dois aspectos,

> [...] O primeiro, que pode ser chamada de geometria diferencial clássica, teve início com os primórdios do Cálculo. A grosso modo, geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies. Por propriedades locais entendemos aquelas propriedades que dependem apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto. Os métodos que se revelaram adequados ao estudo de tais propriedades foram os métodos do cálculo diferencial. Por essa razão, as curvas e superfícies consideradas na geometria diferencial serão definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes. (CARMO, 2008, p. 1)

O segundo aspecto apontado por Carmo (2008, p. 1) refere-se à chamada geometria diferencial global, que estuda "[...] a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva ou superfície como um todo".

De acordo com Carmo (2008), o objeto *curva*, quando estudado pela geometria diferencial, é definido como *curva diferenciável parametrizada*, que é definida da seguinte forma:

Definição: Uma *curva diferenciável parametrizada* é uma aplicação diferenciável α : I → R^3 de um intervalo aberto I=(a,b) da reta real R em R^3 (CARMO, 2008, p. 2, grifo do autor).

Alguns dos estudos que tratam de curvas diferenciáveis abordam, dentre outros, regularidade de curvas, comprimento de arco de curva parametrizada, curvatura, vetor binormal, torção e triedro de Fernet.

A segunda definição que apresentamos refere-se ao objeto de estudo da geometria diferencial intitulado "superfície regular", que se configura como um caso particular do objeto "superfície".

Definição: Um subconjunto $S \subset R^3$ é uma *superfície* regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em R^3 e uma aplicação φ: U→ V∩S de um aberto U de R^2 sobre $V \cap S \subset R^3$ tal que:

1) φ é diferenciável. Isto significa que se escrevemos φ (u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), sendo $(u,v) \in U$, as funções x(u,v), y(u,v), z(u,v) têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U;

2) φ é um homeomorfismo. Como φ é contínua pela condição 1, isto significa que φ tem inversa φ^{-1}:V∩S → U que é contínua;

3) (condição de regularidade) Para todo q em U, a diferencial $d\varphi_q$: R^2 → R^3 é injetora (CARMO, 2008, p. 62).

A definição acima, em outras palavras, nos diz que uma superfície (independente do seu "formato"), é sempre localmente euclidiana na medida em que ela satisfaça os itens 1), 2) e 3) acima mencionados na definição, afirmação essa corroborada por Carmo (2008) ao discorrer que,

> A grosso modo, uma superfície regular em R^3 é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou autointerseções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A ideia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bi-dimensional e que seja suficientemente suave de forma que as noções usuais do Cálculo possam ser estendidas a tal conjunto. (CARMO, 2008, p. 62)

Associando as definições acima citadas às geometrias historicamente estudadas na escola básica brasileira[60] – geometria euclidiana plana e espacial – poderíamos afirmar que estas são casos particulares da geometria diferencial. Contudo, a pergunta que emerge relaciona-se ao processo de generalização da geometria euclidiana: quais seriam as características desse processo de generalização? Ou ainda, como sairmos do caso geral (geometria diferencial) para chegarmos ao particular, que é o objeto de estudo da escola? Além disso, outra pergunta pertinente seria: o conhecimento e domínio desses conceitos auxiliaria o ensino da geometria na escola básica? De que forma?

Na tentativa de estabelecermos relações entre conteúdos da matemática escolar com casos gerais da geometria diferencial, elegemos como objeto de estudo a "soma dos ângulos internos de um triângulo", de modo que, a partir de uma propriedade global de um espaço localmente euclidiano, discutiremos as características que esse objeto da geometria escolar assume quando abordado a partir da perspectiva diferencial, que apresentaremos doravante. Para isso, considere o Teorema de Gauss-Bonnet:

Teorema de Gauss-Bonnet (Local): Se φ: U → S uma parametrização ortogonal (isto é, F=0), de uma superfície orientada S, onde U⊂R² é homeomorfo a um disco aberto e φ é compatível com a orientação de S. Seja R⊂φ(U) uma região simples de S e seja α : I → S tal que ∂R = α (I). Suponha que α é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco s, e sejam α (s_0), ... ,α (s_k) vértices de α e θ_0, ..., θ_k as medidas dos seus respectivos ângulos externos em radianos. Então $\sum_{i=0}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{k}\theta_i = 2\pi$, onde $k_g(s)$ é a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K é a curvatura Gaussiana de S (CARMO, 2008, p. 322).

Considerandoo caso particular do teorema acima, que é restrito ao estudo de uma região limitada por 3 geodésicas, obtemos a seguinte expressão $\sum_{i=1}^{3}\varphi_i - \pi = \iint_R K\, d\sigma$, na qual φ_1, φ_2 e φ_3 são os ângulos internos do triângulo geodésico (CARMO, 2008, p. 317). Para o caso em que K = 0 a curvatura gaussiana é nula e a superfície que contém o triângulo geodésico é um plano de modo que o triângulo geodésico toma a forma estudada na matemática escolar (região delimitada no plano por três segmentos de reta).

[60]Mais informações sobre os conteúdos curriculares contemplados pelo currículo da escola brasileira podem ser encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática), tanto para os anos finais do ensino fundamental quanto do ensino médio, além de currículos estaduais, como pelo currículo em vigor no Estado do Paraná (Diretrizes Curriculares da Educação Básica). Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/irati/arquivos/File/matematica.pdf. Acesso em: 23 jan. 2014.

Dessa forma, obtemos a seguinte expressão: $\sum_{i=1}^{3} \theta_i - \pi = 0$ que nos leva à conclusão que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Quando K=1 a superfície em questão é uma esfera unitária (de raio igual a 1) e obtemos triângulos geodésicos nos quais a soma dos ângulos internos é maior que 180°. Quando K= -1 obtemos uma superfície chamada pseudo-esfera e os triângulos geodésicos obtidos possuem a soma dos ângulos internos menor que 180°.

Contudo, o tema "soma dos ângulos internos de um triângulo" suscita como pré-requisitos para o seu entendimento, a partir da forma como historicamente é abordado na escola básica, somente conceitos relacionados à temática "feixe de retas paralelas intersectado por uma transversal" (ângulos alternos-internos, ângulos alternos-externos, etc.).

Essa tentativa de relacionarmos a matemática escolar com Geometria Diferencial suscita alguns questionamentos: de que forma o "aprofundamento" da matemática abordada na escola aproximando-a da matemática acadêmica vai auxiliar o professor no ensino da geometria na escola básica? Será que esse aprofundamento é necessário, uma vez que a própria matemática escolar apresenta todas as ferramentas necessárias para a abordagem desse conteúdo nesse nível da escolarização?

Conforme se verifica nas definições apresentadas, o entendimento e manipulação das definições de curva (curva diferenciável parametrizada) e superfície, que são os objetos da geometria utilizados no processo de introdução da teoria da "geometria diferencial", requerem o domínio (pré-requisitos) das teorizações relacionadas à continuidade e à diferenciabilidade de funções de várias variáveis, evidenciando alguns dos pré-requisitos que a geometria diferencial suscita, por exemplo, álgebra linear, análise e topologia. Ainda nesta perspectiva, destacamos que essa área da matemática, a geometria diferencial, se configura como uma área da formação do bacharelado em matemática[61], da pós-graduação *stricto sensu* em matemática (acadêmica), além de figurar como uma das áreas do conhecimento da Matemática junto ao CNPq[62].

A linha de pesquisa do PROFMAT "Sistemas Dinâmicos" é apresentada a partir da seguinte descrição: "estudo das propriedades qualitativas de sistemas descritos por

---

[61] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

[62] Mais informações sobre as áreas do conhecimento discriminadas pelo CNP podem ser obtidas em seu site. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

processos evolutivos determinísticos". Mediante esta definição, um questionamento que emerge refere-se ao significado da palavra "sistema" na teoria de sistemas dinâmicos.

De acordo com Monteiro (2006), um *sistema* pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto (alguns exemplos: circuito elétrico de um rádio-telescópio, júpiter e seus satélites, o sistema nervoso de um canguru, a situação financeira de uma família, o ecossistema de um mangue). Já um sistema é *dinâmico* quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Nos exemplos anteriores, variam, respectivamente: a tensão entre as placas de um capacitor, a posição de Ganimedes, as atividades dos neurônios do córtex visual, os gastos com vestuário, o número de caranguejos fêmeas.

O objetivo destes estudos teóricos é prever o futuro (ou entender o passado) de modo científico. Para fazer isso, é necessário conhecer como as coisas são e compreender as regras que governam as mudanças que ocorrerão. Do cálculo sabe-se que a variação de uma grandeza x(t), num tempo contínuo t, é medida pela derivada. Assim, o estudo matemático de mudanças corresponde ao estudo de equações diferenciais. Se assumirmos que o tempo evolui de forma discreta, devemos estudar então as equações de diferenças, ou seja, os objetos matemáticos de estudo dos sistemas dinâmicos são equações diferenciais e equações de diferença.

De acordo com Palis Junior e Melo (1978), alguns dos pré-requisitos suscitados por essa área de estudo da matemática são: equações diferenciais, variedades diferenciáveis, álgebra linear, análise no R^n, espaços métricos e topologia. A partir dos pré-requisitos relacionados por estes autores, o primeiro apontamento que fazemos refere-se à quantidade e a natureza dos pré-requisitos que a área da matemática "sistemas dinâmicos" suscita em sua composição, que são manipulados geralmente em cursos de Matemática em nível universitário (Licenciatura e Bacharelado em Matemática) e Pós-Graduação em Matemática (associados à análise e topologia, por exemplo).

O segundo apontamento refere-se a dois dos principais objetos de estudo dos "sistemas dinâmicos", as equações diferenciais e as equações de diferença que, conforme já discorremos na linha de pesquisa "Equações Diferenciais Parciais", distanciam-se significativamente dos conteúdos estudados na escola em nível básico, inclusive de conteúdos como "equações" e "sistemas de equações lineares".

Nesta conjuntura, ao nos remetermos novamente ao objetivo do PROFMAT, um mestrado profissional para professores objetivando a formação matemática que "contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional" (CAPES, 2010, p. 9,) alguns questionamentos precisam ser respondidos: de que forma os conhecimentos elencados na temática "sistemas dinâmicos" auxiliaria o trabalho do professor ao explorar os temas contemplados pelo currículo escolar? De que forma o conhecimento dos demais conhecimentos que a área da matemática "sistemas dinâmicos" requisita auxiliaria o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem das diversas temáticas abordadas pelo currículo escolar? De que forma os conhecimentos abarcados pela área da matemática "sistemas dinâmicos" auxiliariam o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Nesta perspectiva, como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (sistemas dinâmicos) serão vinculadas às atividades dos docentes de Matemática na escola básica?[63]

Como exposto acima, o estudo dos "sistemas dinâmicos" necessita de vários pré-requisitos, tanto é que disciplinas que tratam deste assunto não são obrigatórias nem nos Bacharelados em Matemática[64] nem em diversos mestrados acadêmicos em Matemática, uma vez que, em geral, elas são frequentadas por acadêmicos que pretendem desenvolver sua pesquisa de mestrado (dissertação) na referida área de pesquisa, já que "sistemas dinâmicos" é uma das áreas do conhecimento da Matemática junto ao CNPq[65].

Recapitulando nosso objetivo com esse fragmento do trabalho, que era apresentar uma análise sobre a área de concentração "Geometria e Topologia" que, de acordo com o documento CAPES (2012) é delimitada pelas linhas de pesquisa "Geometria Diferencial" e "Sistemas Dinâmicos", entendemos que a área de concentração "Geometria e Topologia" distancia-se da matemática escolar. Além disso,

---

[63] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

[64] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

[65] Mais informações sobre as áreas do conhecimento discriminadas pelo CNP podem ser obtidas em seu site. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

entendemos que esse distanciamento poderia ser interpretado como um processo de aprofundamento da matemática escolar, *contudo esse aprofundamento ocorre no sentido da matemática escolar ampliar-se a ponto de transformar-se em matemática acadêmica*. Neste contexto, o aprofundamento que poderia ser vislumbrado pela área de concentração "Geometria e Topologia" distancia-se também das necessidades formativas dos professores que ministram aulas de Matemática na educação básica.

5.2.3 A área de concentração "Matemática Aplicada"

A área de concentração "Matemática Aplicada", descrita no projeto acadêmico do PROFMAT como o "Estudo interdisciplinar das aplicações dos métodos e idéias (*sic*) matemáticas nas diversas áreas de interesse científico, tecnológico ou social, por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos para situações de interesse, pelo estudo teórico ou computacional destes modelos e pelo desenvolvimento de métodos para o estudo sistemático destes modelos", é nele delimitada por meio das linhas de pesquisa "Otimização" e "Análise Numérica".

Neste fragmento do trabalho, discutiremos as referidas linhas de pesquisa considerando a relevância que possuem dentro da estrutura de um projeto acadêmico de pós-graduação *stricto sensu*, de acordo com o documento CAPES (2012).

A linha de pesquisa do PROFMAT "Otimização" é apresentada a partir da seguinte descrição: "estudo de métodos computacionais ou teóricos para encontrar valores e pontos extremos de funcionais, sujeitos a restrições".

Na "Otimização", o termo funcional assume, geralmente, o significado de uma função real de várias variáveis reais, ou seja, f: $R^n \rightarrow R$.

Conforme expressa a definição de funcional, este se configura como uma função cujo domínio e contra-domínio são, respectivamente, espaços vetoriais e corpos (base K), ou seja, um funcional pode ser interpretado como uma generalização de funções cujos domínio e contra-domínio são alguns conjuntos numéricos (Q, I, R, C). Assim, as funções estudadas na escola básica poderiam ser interpretadas como casos particulares de funcional linear, como é o caso das funções afins. Contudo, conforme já expressamos anteriormente, o *entendimento* e a *manipulação* de funções que são "transformações lineares", como é o caso dos funcionais lineares, perpassam pelo conhecimento e domínio de conhecimentos específicos pertencentes à matemática acadêmica, como álgebra linear, não sendo, portanto, objeto de estudo da matemática escolar.

No tocante aos métodos computacionais e teóricos - usados, por exemplo, para encontrar os pontos extremos de funcionais - eles utilizam-se do cálculo da derivada destas funções, de modo que o conceito de derivada se configura como um dos principais pré-requisitos para esta área de estudo e pesquisa. Contudo, o conceito de derivada, conforme já discutido anteriormente neste trabalho, não faz parte do currículo da escola básica.

Assim sendo, nos remetemos à quantidade e a natureza dos pré-requisitos que os principais objetos de estudo da "otimização" suscitam em sua composição, uma vez que são manipulados geralmente em cursos de Matemática universitária e pós-graduação em Matemática (associados, por exemplo, às áreas de álgebra linear e análise matemática). Embora essa associação entre os "funcionais" e as funções estudadas em âmbito escolar pudesse ser interpretada como um processo de aprofundamento da matemática escolar, esse aprofundamento ocorreria no sentido de a *matemática escolar* ampliar-se a ponto de transformar-se em *matemática acadêmica*. Não obstante, na medida em que o PROFMAT se propõe a formar o professor de Matemática matematicamente, atendendo às especificidades de seu trabalho na escola básica, algumas questões precisariam ser respondidas: de que forma os conhecimentos subjacentes aos "funcionais" auxiliaria o trabalho do professor ao explorar o tema "funções" na escola? Quais seriam os "porquês" respondidos pelos professores ao abordar a temática "funções" que envolveriam as definições "funcionais"? De que forma o conhecimento das definições de "funcional" e dos demais conhecimentos por ele requeridos auxiliaria o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem da temática "funções"? De que forma o conhecimento das definições dos distintos "funcionais" auxiliaria o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Nesta perspectiva, como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (funcionais) serão vinculadas às atividades dos docentes de Matemática na escola básica?[66] Como um dos problemas enfrentados pelos professores da escola básica é o de proporcionar um ensino (que

[66] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

resulte em aprendizagem) da temática “conjunto numéricos” e suas respectivas operações, de que forma os conhecimentos relacionados a temática “funcionais” auxiliaria neste processo?

Ou seja, tanto o objeto de estudo (funcionais) quanto os métodos (cálculo da derivada) utilizados nesse estudo não fazem parte do currículo escolar e seu *entendimento e domíni*o suscitam pré-requisitos que também não fazem parte da matemática estudada em nível escolar.

Contudo, há problemas que podem ser interpretados como objetos de estudo tanto da matemática escolar quanto da otimização, uma vez que a otimização é utilizada no estudo de problemas de diversas áreas, como: para maximizar lucro de uma empresa, minimizar o custo de um produto, estudar a pressão mínima necessária para realizar uma reação química, em problemas de dieta, de planejamento industrial e de logística, para maximizar a área de uma determinada região quando é conhecido o perímetro dessa região, etc. Assim, na sequência discutiremos as temáticas “Lançamento de projétil” e “Estudo da área máxima que pode ser obtida (maximização) a partir do comprimento do perímetro (fixo) de uma determinada região”.

No caso do estudo envolvendo a temática “Lançamento de projétil”, os problemas com esse formato, que também são estudados na física, são, com frequência, objeto de estudo da matemática escolar à medida que abordam o estudo de parábolas. Esses problemas são estudados sob o argumento de que é importante um estudante da escola básica saber que, ao lançar um projétil ou chutar uma bola (para cima), estes objetos vão descrever a trajetória parabólica e que a altura máxima (ponto) que este objeto vai atingir é o vértice da parábola percorrida pelo projétil ou pela bola. Contudo, o estudo desse problema pode ser feito de distintas formas. Esse estudo poderia ser feito por meio da otimização, por meio do cálculo do ponto extremal de um certo funcional, suscitando como pré-requisitos os conceitos de funcional e do cálculo da derivada. No caso da matemática escolar, esse estudo é feito a partir do cálculo do vértice de uma parábola[67] e nesse processo são utilizados conceitos específicos da matemática escolar que passam ao largo do cálculo diferencial, ou seja, a matemática escolar oferece todas as ferramentas necessárias para o estudo de problemas com esse formato, sem

[67] O cálculo do vértice de uma parábola (x_v, y_v) na matemática escolar é feito por meio das expressões $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, onde f: R → R é uma função quadrática da forma $f(x)=ax^2 + bx + c$ (com que a, b, c ϵ R e a ≠0) para todo x ϵ R. Essas expressões são construídas a partir do estudo da forma canônica do trinômio $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

precisarem ser introduzidos conceitos específicos da álgebra linear e do cálculo diferencial, como funcional e derivada.

No caso do "Estudo da área máxima que pode ser obtida (maximização) a partir do comprimento do perímetro (fixo) de uma determinada região", um problema com esse formato pode assumir um anunciado similar a ele: A partir do comprimento do perímetro de um retângulo, que é de 60 m, calcule qual é a maior área que um retângulo com esse perímetro pode obter.

Este problema poderia ser explorado por meio de ferramentas da matemática universitária, como por meio do cálculo da derivada da função $A(x) = 30x - x^2$, onde $A(x)$ representa a área do retângulo cuja área queremos maximizar.

Para o estudo de um problema com esse formato no âmbito escolar podemos utilizar conhecimentos pertencentes à matemática escolar, como a desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica, conforme mostra a resolução abaixo:

Se x e y indicam as medidas dos lados deste retângulo, como o perímetro mede 60 m, temos então que $2x+2y=60$, logo, $x+y=30$ e usando a desigualdade entre média aritmética e geométrica, obtemos que

$$15 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x\,.\,y} \;\Rightarrow x.y \leq 15^2 = 225,$$

Logo a área máxima é 225 que ocorre quando $x=y=15$.

Ou seja, o estudo apresentado não envolveu conceitos pertencentes nem à álgebra linear nem ao cálculo diferencial integral. Assim, as técnicas de otimização não precisam ser utilizadas no estudo dos problemas apresentados acima, uma vez que a matemática escolar oferece ferramentas para o estudo de problemas que possuem os referidos formatos.

Alguns dos tópicos estudados nos cursos de graduação (Licenciatura e Bacharelado), como o processo de obtenção de máximos e mínimos de funções Reais, podem ser interpretados como vinculados à Otimização. Contudo, como exposto acima, o estudo da linha de pesquisa Otimização, conforme descrita no projeto acadêmico do PROFMAT, necessita de vários pré-requisitos, tanto é que disciplinas que tratam deste assunto não são obrigatórias nos Bacharelados em Matemática[68] e em diversos

---

[68] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

mestrados acadêmicos em Matemática, sendo, em geral, frequentadas somente por acadêmicos que pretendem desenvolver sua pesquisa de mestrado (dissertação) na referida área de pesquisa.

A linha de pesquisa "Análise Numérica" é apresentada no projeto acadêmico do PROFMAT como o "estudo de métodos de aproximação de problemas com variáveis contínuas por processos discretos".

De acordo com a descrição apresentada, a linha de pesquisa "Análise Numérica" apresenta *aproximações* de soluções para problemas, ou seja, ela analisa problemas cujo objeto matemático em estudo (sistema linear, matrizes, equações diferenciais, funções, autovalores) apresenta, na maioria das vezes, soluções que não podem ser determinadas de maneira exata. Além disso, a grande maioria dos problemas estudados em análise numérica não fazem parte do escopo da matemática escolar e mais, distanciam-se dela significativamente, como o estudo da aproximação de autovalores de matrizes, o estudo de aproximação para solução de equações diferenciais ordinárias, o estudo de aproximação de integrais. Ao utilizarmos a expressão "distanciam-se significativamente do escopo da matemática escolar", estamos nos referindo ao fato de que esses problemas possuem como objeto de estudo conhecimentos pertencentes à matemática acadêmica, como os autovalores de matrizes, que são objeto de estudo da álgebra linear, e das equações diferenciais ordinárias, que são objetos de estudo do cálculo.

Buscando estabelecer uma relação entre a matemática que é objeto da prática do professor de Matemática da educação básica e a Análise Numérica, identificamos que dois dos conteúdos escolares que se relacionam com essa área de estudo são "sistemas lineares" e "zero de função"[69].

No que concerne à determinação do(s) zero(s) das funções estudadas na escola (função afim, função quadrática, funções polinomiais, funções trigonométricas, funções logarítmicas, funções modulares e funções exponenciais, sendo que essa última não possui zero), verifica-se que a matemática escolar apresenta todas as ferramentas para possibilitar esse procedimento. Analisemos o caso da determinação dos zeros das funções afim e quadráticas. Na escola, esses procedimentos são utilizados na resolução de equações do tipo $ax+b=0$ e $ax^2 +bx +c=0$, respectivamente. Se desejamos encontrar as raízes de uma função polinomial de grau maior do que 2, reduz-se esta equação para os casos conhecidos, com grau 2 e grau 1. Em relação às funções logarítmicas,

[69] O(s) zero(s) de uma função é(são) o(s) ponto(s) em que o gráfico da função intersecta o eixo das abscissas, ou seja, é o ponto x_0, tal que $f(x_0)=0$.

trigonométricas e modular, suas raízes (quando existirem) podem ser facilmente determinadas, por exemplo, por meio da translação de gráficos.

Ainda em relação à determinação das raízes de funções, por meio das técnicas da Análise Numérica, podemos encontrar uma aproximação, ou em alguns casos a solução exata, para raízes de funções. Entretanto, todos estes métodos precisam satisfazer condições que garantem o funcionamento do método. Para entender o funcionamento de tais métodos, o estudante precisa dominar conteúdos, como sequências de números reais, limites de funções, funções contínuas e derivada de funções reais de uma variável real.

Dentre os métodos utilizados[70], o considerado como mais simples é o Método da Bissecção, "bissectar" significando dividir (neste caso um intervalo) em duas partes (neste caso, iguais) (BURDEN e FAIRES, 2008). Doravante descreveremos tal método.

Suponha que f seja uma função *contínua* definida no intervalo $[a, b]$, com f(a) e f(b) de sinais opostos. De acordo com o *teorema do valor intermediário*[71], existe um número p em (a, b) com f(p)=0. Para simplificar o problema, suponhamos que a raiz no intervalo (a, b) seja única, apesar de o procedimento poder ser aplicado quando existir mais de uma raiz nesse intervalo. O método requer repetidas divisões (na metade) de subintervalos de $[a, b]$, a cada passo localizando a metade contendo p. Inicialmente, define-se $a_1 = a$ e $b_1 = b$, considerando p_1 como sendo o ponto médio de $[a, b]$, ou seja $p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$, se f($p_1$)= 0, então $p = p_1$ e resolve-se o problema. Se f(p_1)≠0, então tem mesmo sinal de f(a_1) ou f(b_1). Quando f(p_1) e f(a_1) possuem o mesmo sinal, $p \in (p_1, b_1)$ e define-se $a_1 = p_1$ e $b_2 = b_1$. Quando f(p_1) e f(a_1) possuem sinais opostos, $p \in (a_1, p_1)$, e define-se $a_2 = a_1$ e $b_2 = p_1$ e na sequência reaplica-se o processo descrito ao intervalo $[a_2, b_2]$ (BURDEN e FAIRES, 2008).

A descrição apresentada acima refere-se ao *procedimento* de determinação das raízes de uma função que, de uma forma *intuitiva*, poderia ser abordado na escola. Contudo, os *conceitos* envolvidos nesse procedimento passam ao largo da matemática escolar e da prática do professor da educação básica uma vez que o primeiro requisito para a aplicação desse método é que a função seja contínua[72], uma vez que se ela não

---

[70]Alguns dos métodos desenvolvidos pela análise numérica são: Método de Newton, Polinômio de Lagrange, Eliminação Gaussiana, Algoritmo simples, Método de Euler e Método do gradiente conjugado.

[71] Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e k $\in [f(a), f(b)]$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que k=$f(c)$.

[72]Definição: Sejam M, N espaços métricos. Dizemos que a função *f: M → N é contínua no ponto a ∈ M* quando, para todo ε >0 dado, é possível obter δ >0 tal que d(x,a) < δ, implica que d(f(x), f(a)) < ε.

for contínua o método falhará. Além da continuidade de funções, outro aspecto que limita consideravelmente sua abordagem no ambiente escolar refere-se à garantia de que tal método realmente vai se aproximar da exata solução do problema, e essa garantia é dada pelo teorema abaixo:

Teorema: Seja $f: [a, b] \longrightarrow R$ uma função contínua tal que $f(a).f(b) < 0$. O método da Bissecção gera uma sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge para um zero p_0 de f com

$$|p_n - p_0| \leq \frac{b-a}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

Conforme se verifica no enunciado do teorema, o método da bissecção suscita a necessidade de conhecimentos da área de cálculo, como limite, continuidade e o conhecimento de convergência de sequências, que não são objetos de estudo da matemática escolar.

Outra possibilidade de abordagem da "análise numérica" na escola seria por meio da resolução de equações não triviais, por exemplo, a equação $2^x = x^2$ ou $\log x = \frac{1}{x}$, de vez que nesses casos as manipulações algébricas ou fórmulas não são suficientes. Para resolver equações com esses formatos é possível, em alguns casos, usar um método para determinarmos os zeros de funções que é chamado Método do Ponto Fixo, que é útil apenas para funções que satisfazem o teorema do ponto fixo, ou seja, as funções precisam satisfazer a algumas condições.

Teorema do ponto fixo. Seja $g: [a, b] \longrightarrow R$ uma função contínua tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Além disso, que g' exista em (a, b) e que exista uma constante $0 < k < 1$ com

$$\| g'(x) \| < k, \ \forall\, x \in (a, b).$$

Então, para qualquer $p_0 \in [a, b]$, a sequência definida por

$$p_n = g(p_{n-1}), n \geq 1,$$

converge para o único ponto fixo $p \in [a, b]$.

Dizemos que a função *f: M → N é contínua* quando ela é contínua em todos os pontos a ∈ M (LIMA, 2011). Conforme é verificável, a definição de continuidade para funções entre espaços métricos suscita como pré-requisito a definição de espaço métrico, que por sua vez suscita a definição de métrica.

Ao nos remetermos ao objetivo do PROFMAT, um mestrado profissional de professores que visa à formação matemática que "contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional" (CAPES, 2010, p. 9), alguns questionamentos afloram: de que forma os conhecimentos atinentes aos métodos de aproximação estudados em "análise numérica" auxiliariam o trabalho do professor ao explorar os temas contemplados pelo currículo escolar? Quais seriam os "porquês" respondidos pelos professores ao abordar as temáticas contempladas pelo currículo escolar que envolveriam os conceitos envolvidos nos métodos de aproximação estudados em "análise numérica"? De que forma o conhecimento e domínio dos métodos de aproximação estudados em "análise numérica" e dos demais conhecimentos que ela requisita auxiliariam o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem das diversas temáticas abordadas pelo currículo escolar? De que forma os conhecimentos abarcados pela área da matemática "análise numérica" auxiliariam o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Nesta perspectiva, como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (análise numérica) serão vinculadas às atividades dos docentes de matemática na escola básica?[73]

Como exposto acima, o estudo dos métodos de aproximação propostos pela "análise numérica" necessita de vários pré-requisitos, tanto é que disciplinas que tratam deste assunto não são obrigatórias nem em cursos de Bacharelados em Matemática[74] ou em diversos mestrados acadêmicos em Matemática, uma vez que, em geral, são frequentadas unicamente por acadêmicos que pretendem desenvolver sua pesquisa de mestrado (dissertação) na referida área de pesquisa, já que "análise numérica", configura-se como uma das áreas do conhecimento da Matemática junto ao CNPq[75].

---

[73] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

[74] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

[75] Mais informações sobre as áreas do conhecimento discriminadas pelo CNP podem ser obtidas em seu site. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

Recapitulando o nosso objetivo com esse fragmento do trabalho, que era apresentar uma análise sobra a área de concentração “Matemática Aplicada” que, de acordo com o documento CAPES (2012), é delimitada pelas linhas de pesquisa “Otimização” e “Análise Numérica”, entendemos que, de certa forma, a área de concentração “Matemática Aplicada” distancia-se da matemática escolar. Além disso, entendemos que esse distanciamento poderia ser interpretado como um processo de aprofundamento da matemática escolar, *contudo esse aprofundamento ocorre no sentido da matemática escolar ampliar-se a ponto de transformar-se em matemática acadêmica*. Neste contexto, o aprofundamento que poderia ser vislumbrado pela área de concentração “Matemática Aplicada” distancia-se também das necessidades formativas dos professores que ministram aulas de Matemática na educação básica.

5.2.4 A área de concentração “Ensino de Matemática”

A área de concentração Ensino de Matemática é apresentada a partir da seguinte descrição: “Trata-se do estudo das formas e estratégias de ensino-aprendizagem de conteúdo matemático”. A área de concentração Ensino de Matemática é delimitada pelas linhas de pesquisa “Ensino Básico de Matemática” e “Ensino Universitário de Matemática”, que são descritas, respectivamente, da seguinte forma: “Métodos e processos no ensino/aprendizagem de matemática para crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental e médio” e “Métodos e processos de ensino/aprendizagem para jovens adultos no contexto do ensino universitário”.

No tocante à linha “Ensino Universitário de Matemática”, nosso primeiro questionamento refere-se ao principal objeto da linha, ou seja, ao “ensino universitário”. Tendo em vista que o PROFMAT afirma em seu projeto estar voltado para a formação de professores da escola em nível básico - ensino fundamental (3º e 4º ciclos) e ensino médio - visa a uma qualificação ampla do ensino da matemática (nesses dois níveis) da escola básica. Por que este curso possui uma linha de pesquisa voltada para o ensino superior? Por que os professores da escola básica devem estudar e produzir conhecimentos sobre o ensino da matemática em nível universitário? De que forma o conhecimento das especificidades do ensino da matemática no ensino superior vai auxiliar os professores em seu trabalho no ambiente da escola básica? Estudar o ensino da matemática no ensino superior implica no estudo da matemática universitária então.

os acadêmicos do PROFMAT estudarão a matemática abordada neste nível de ensino?

A partir dos questionamentos que apresentamos, a inclusão da linha de pesquisa "Ensino Universitário de Matemática" no projeto acadêmico de um curso de pós-graduação voltado estritamente para a formação de professores de Matemática da escola básica se configura com um claro distanciamento dos objetivos do curso, especialmente se considerarmos o *status* do ensino da matemática no Brasil e as especificidades do trabalho do docente de Matemática na escola em nível básico.

Em relação à linha de pesquisa "Ensino Básico de Matemática", o primeiro questionamento que apresentamos refere-se à polissemia do título desta linha. Qual o significado de "básico" no título da linha? Ou seja, o adjetivo "básico" se refere ao ensino ou à matemática ou à escola básica? Ou ainda ao ensino da matemática básica? Essa dubiedade da expressão que assinalamos é relevante quando se considera que as atividades de ensino e de pesquisa devem estar articuladas com as linhas de pesquisa do mestrado profissional, curso que, de acordo com a legislação visa "[...] à <u>formação de profissionais qualificados pela apropriação e aplicação do conhecimento embasado no rigor metodológico e nos fundamentos científicos</u>" (BRASIL, 2009b, p. 20, grifo nosso).

Por outro lado, métodos e processos se referem ao ensino/aprendizagem ou se referem à matemática? Ademais, a expressão "ensino/aprendizagem" também é polissêmica, além de não usual. Não usual porque não é adotada na literatura especializada. É polissêmica porque não deixa claro qual é o entendimento, no projeto de PROFMAT, das relações existentes entre ensino e aprendizagem.

A expressão ensino-aprendizagem, por exemplo, é comumente associada ao método tradicional do ensino por transmissão, uma vez que a aprendizagem é interpretada como uma consequência imediata desse ensino, na medida em que nessa concepção o ensino será convertido em aprendizagem a partir da imitação dos atos dos professores pelos alunos e da repetição das "atividades de fixação" (NOT, 1993, p. 19). Já a "Escola Nova" também se utiliza da expressão "ensino-aprendizagem", mas se contrapõe às concepções tradicionais, compreendendo que "[...] o ato de ensino não implica, para quem o recebe, o fato de aprender" (NOT, 1993, p. 19). Por outro lado, o método de ensino genético-estrutural, que também procura superar os métodos tradicionais, compreende que a aprendizagem está relacionada à construção das estruturas mentais do sujeito e, por isso, "[...] não separa esses dois processos e considera que, se o sujeito estrutura as informações que recebe, estas por sua vez o estruturam" (NOT, 1993, p. 30). Essa breve exposição sobre as relações entre ensino e aprendizagem que se cristalizam na expressão "ensino-aprendizagem" evidenciam a complexidade e a especificidade que assume a referida expressão em cada uma dessas teorias. Contudo, o projeto acadêmico de um Programa de Pós-graduação que tem como objetivo a formação de professores de Matemática deveria minimamente explicitar o seu entendimento conceitual (perspectivas teóricas) a respeito das expressões que utiliza, como é o caso das expressões "ensino/aprendizagem" e "ensino-aprendizagem".

A polissemia que permeia a descrição das linhas de pesquisa e que, consequentemente, permeia também a descrição desta área de concentração evidencia uma falta de perspectivas teóricas para a condução das discussões (e pesquisas) em torno da ação de ensinar/educar. Essa falta de perspectiva teórica é incomum na comunidade acadêmica (nacional e internacional) que discute o ensino, inclusive na comunidade que discute o ensino da matemática. Um exemplo disso pode ser evidenciado na discussão que apresentamos neste trabalho no capítulo "As Dimensões do Conhecimento do Professor de Matemática", em que os autores, com base na teorização proposta por Shulman (1986), se voltam para o trabalho do professor que obtém êxito ao ensinar a matemática aos estudantes e a partir disso elaboram taxonomias analíticas das dimensões do conhecimento dos professores.

Apesar de a polissemia permear o título e a descrições da linha de pesquisa "Ensino Básico de Matemática", objetos de pesquisa científica fixados para ela – "Métodos e processo no ensino/aprendizagem de matemática para crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental e médio" – a aproximam da educação básica e dos sujeitos dos processos de ensino desse nível de ensino: crianças e adolescentes. Assim, *parcialmente*, e em relação a esse tema, a área de concentração Ensino de Matemática pode ser caracterizada *próxima* dos objetivos e do público do PROFMAT.

5.2.5 A área de concentração "Álgebra"

Esta área é descrita, no projeto do PROFMAT, como o "Estudo das estruturas algébricas, ou seja, das propriedades induzidas por operações formais entre os elementos de conjuntos. Inclui, por exemplo, as propriedades dos números inteiros – teoria dos números e a geometria dos conjuntos definidos por sistemas de equações polinomiais – geometria algébrica", sendo, pois, delimitada nesse projeto por meio das linhas de pesquisa “Teoria dos Números” e “Geometria Algébrica”. Neste fragmento do trabalho, discutiremos as referidas linhas de pesquisa considerando a relevância que possuem dentro da estrutura de um projeto acadêmico de pós-graduação *stricto sensu*, de acordo com o documento CAPES (2012).

A linha de pesquisa “Teoria dos Números” é descrita como “estudo das propriedades dos números inteiros”. Os números inteiros são objetos de estudo, direta e indiretamente, da matemática desenvolvida no âmbito da escola básica, ou seja, de imediato é possível constatar a existência de alguma relação entre a linha de pesquisa e o público alvo do PROFMAT, os professores de Matemática da escola em nível básico.

Sobre a Teoria dos Números, a partir de uma perspectiva de pesquisa, Martinez *et al.* (2011) salienta que

> Não há dúvidas que o conceito de inteiro é um dos mais antigos e fundamentais da ciência em geral, tendo acompanhado o homem desde os primórdios de sua história. Assim, é de certa forma surpreendente que a Teoria dos Números seja atualmente uma das áreas de pesquisa mais efervescentes da Matemática e que, mais do que nunca, continue a fascinar e desafiar gerações de matemáticos. (MARTINEZ *et al.*, 2011, p. i)

Sobre a especificidade dessa linha de pesquisa, os mesmos autores ressaltam que:

> [...]Enquanto um analista utiliza-se de métodos analíticos para resolver seus problemas e um algebrista emprega métodos algébricos para atacar questões algébricas, em Teoria dos Números um mesmo problema requer para a sua solução a utilização simultânea de métodos algébricos, analíticos, topológicos, geométricos e combinatórios [...]. (MARTINEZ *et al.*, 2011, p. i)

A multiplicidade de conhecimentos que a Teoria dos Números envolve em seus estudos - álgebra, análise, geometria e topologia - apontada por Martinez *et al.* (2011) é corroborada por Sidki (1975), quando aponta como pré-requisitos para um estudo em nível “elementar” a álgebra e o cálculo diferencial e integral.

Arbieto, Matheus e Moreira (2007), referindo-se à especificidade dos problemas envolvendo os números inteiros, salientam que

> Problemas que envolvem simultaneamente as estruturas aditiva e multiplicativa dos números inteiros, em particular problemas aditivos sobre números primos, costumam ser extremamente difíceis, apesar de muitas vezes terem enunciados bastante simples. Não se sabe por exemplo se há infinitos pares de primos gêmeos, i.e., pares de primos cuja diferença é 2. Também continua em aberto a famosa conjectura de Goldbach: todo inteiro par maior ou igual a 4 é soma de dois primos. Outra conjectura clássica sobre primos que estava em aberto

> há muito tempo é a de que existem progressões aritméticas arbitrariamente longas formadas exclusivamente por primos. (ARBIETO; MATHEUS e MOREIRA, 2007, p. 3)

De acordo com a obra *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro* de Martinez, Moreira, Saldanha e Tengan, editada pelo IMPA e datada de 2011, por exemplo, alguns dos objetos de estudo dessa área de pesquisa são: Divisibilidade e Congruência (MDC, MMC, Algoritmo de Euclides, Teorema Fundamental da Aritmética, etc.), Equações Módulo m, Frações Contínuas, Equações Diofantinas, Funções Aritméticas, Inteiros Algébricos, Primos, Aproximações Diofantinas, Introdução às Curvas Elípticas. Já a obra *Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números* de Arbieto, Matheus e Moreira, também editada pelo IMPA e datada de 2007, debruça-se, dentre outros, sobre os seguintes objetos de estudo: conjectura dos primos gêmeos, conjectura de Goldbach, teorema de Van der Waerden, Conjuntos com Densidade Positiva e o Teorema de Szemerédi e Prova do teorema de Green-Tao-Szemerédi, destacando-se este último como objeto de estudo de um dos ganhadores da Medalha Fields do ano de 2006.

Voltando-nos para a matemática que é objeto de trabalho do professor da educação básica, destacamos alguns dos tópicos que são estudados nesse nível de ensino que também são contemplados pela linha de pesquisa "Teoria do Números", a saber: MDC, MMC, Algoritmo de Euclides e Teorema Fundamental da Aritmética.

Contudo, a Teoria dos Números pode ser relacionada com a matemática estudada na escola básica por meio do enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética, que é utilizado no cálculo do máximo divisor comum, por exemplo.

Neste contexto, voltar-nos-emos para o Teorema Fundamental na Aritmética, que na escola básica pode ser enunciado com o objetivo de responder questionamentos como: Os números naturais podem ser escritos na forma de produto de números primos? De quantas formas um número natural (maior do que 1) pode ser escrito a partir do produto de números primos? Entretanto, na matemática acadêmica, dele decorrem teoremas, proposições, corolários, etc. Um exemplo dessa decorrência é apresentado por Arbieto, Matheus e Moreira (2011, p. 28), cuja interpretação suscita, dentre outros conceitos, o de limite:

Proposição 1.21: Seja n = $p_1^{e_1}$... $p_m^{e_m}$ a fatoração de n em potências de primos distintos p_i e seja $\sigma_k(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{d|n,\ d>0} d^k$ a soma das k-ésimas potências dos divisores positivos de n; Então $\sigma_k(n) = \frac{p_1^{(e_1+1)-1}-1}{p_1^k-1} . \ . \ . \ . \ . \frac{p_m^{(e_m+1)-1}-1}{p_m^k-1}$.

Para k=0, a fórmula acima deve ser interpretada tomando-se o limite k → 0, de modo que a quantidade de divisores positivos de n é $\sigma_0(n)$ = $(e_1 + 1)$... $(e_m + 1)$.

Na medida em que o PROFMAT se propõe a formar o professor de Matemática matematicamente atendendo às especificidades de seu trabalho na escola básica, algumas questões precisariam ser respondidas: de que forma os conhecimentos veiculados na “proposição 1.21” auxiliariam o trabalho do professor ao explorar números inteiros na escola? Quais seriam os “porquês” respondidos pelos professores ao abordar a temática “números inteiros” que envolveriam o ensino dos “números inteiros”? De que forma o conhecimento sobre a “proposição 1.21” e dos demais conhecimentos que são seus pré-requisitos auxiliaria o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem da temática “números inteiros”? De que forma o conhecimento da “proposição 1.21” auxiliaria o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar?[76]

De acordo com o exposto até o momento, especialmente a respeito da relação entre os pré-requisitos que a linha de pesquisa “Teoria dos Números” suscita e os conteúdos pertencentes à matemática escolar e às demandas formativas do professor, constatamos que existe um distanciamento entre eles, distanciamento este caracterizado pela natureza dos pré-requisitos necessários a seu entendimento e manipulação, uma vez que alguns desses pré-requisitos são objeto de estudo tanto da matemática universitária (nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear), quanto da matemática em nível de pós-graduação (nas áreas de álgebra, análise e topologia) e pesquisa (álgebra, análise e topologia).

Como exposto acima, o estudo da “Teoria dos Números” necessita de vários pré-requisitos que não são objeto de trabalho do professor de Matemática da educação

---

[76] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

básica, além disso, disciplinas que tratam deste assunto não são obrigatórias nem nos Bacharelados em Matemática[77] nem em diversos mestrados acadêmicos em Matemática. Assim, esta área de pesquisa é objeto de estudo de acadêmicos que pretendem desenvolver sua pesquisa de mestrado (dissertação) na linha de "Teoria dos Números", que se configura como uma das áreas do conhecimento da Matemática junto ao CNPq[78].

A linha de pesquisa do PROFMAT "Geometria Algébrica" é apresentada a partir da seguinte descrição: "estudo das propriedades de espaços definidos por sistemas de equações polinomiais".

Como o nome sugere, esta linha explora a íntima relação entre a álgebra e a geometria, proporcionada pelo sistema de coordenadas criado a partir das ideias de Descartes com o objetivo de melhorar os defeitos da geometria com as qualidades da álgebra. Assim, esta linha está alicerçada no estudo do conjunto de soluções de um sistema de equações polinomiais – ferramenta algébrica – através do estudo de propriedades geométricas.

Alguns dos pré-requisitos para o entendimento da Geometria Algébrica são resultados oriundos da Álgebra Comutativa, que é estudada, em geral, em nível de pós-graduação em matemática pura. Entretanto, podemos estudar Geometria Algébrica nos restringindo aos resultados da Álgebra Comutativa que estão relacionados aos Anéis de Polinômios.

Em relação à descrição da linha de pesquisa "Geometria Algébrica", os espaços definidos por sistemas de equações polinomiais (descritos na linha) na verdade são conjuntos definidos como zeros de equações polinomiais.

Para desenvolver uma discussão introdutória a respeito da referida linha de pesquisa a partir da obra de Hartshorne (1992), iniciamos definindo o espaço ambiente desta linha de pesquisa:

Seja K um corpo qualquer e nϵN, temos que K^n possui uma estrutura de espaço vetorial, e como a Geometria Algébrica estuda subconjuntos de K^n, não seus subespaços vetoriais, consideramos K^n como espaço afim ignorando sua estrutura de espaço vetorial.

---

[77] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.
[78] Mais informações sobre as áreas do conhecimento discriminadas pelo CNP podem ser obtidas em seu site. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

Definição: O conjunto $K[x_1, \cdots, x_n]$ é o anel dos polinômios nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$.

Definição (conjuntos algébricos afins): Um conjunto algébrico afim, $Z(S)$, é um subconjunto do espaço afim que são zeros comuns dos polinômios $S \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$, ou seja, dado $S \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$, obtemos

$$Z(S) = \{x \in k^n : f(x) = 0, \forall f \in S\}.$$

Descreveremos agora algumas propriedades dos espaços definidos por sistemas de equações polinomiais. Considere-se, por exemplo, o ideal (tópico estudado em curso de estruturas algébricas em nível universitário) gerado por S, $I = < S > \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$, prova-se que $Z(S) = Z(I)$. Usando o Teorema da Base de Hilbert, temos que o ideal I é finitamente gerado, ou seja, existem polinômios $f_1, \cdots, f_m \in K[x_1, \cdots, x_n]$, que geram I. Assim,

$$Z(S) = Z(I) = Z(f_1, \cdots, f_m).$$

Dessa forma um conjunto algébrico afim é o conjunto dos zeros de um número finito de polinômios e pode-se estudar a geometria desse conjunto algébrico mediante propriedades algébricas de seus geradores. E quanto mais geradores e quanto maior o grau destes geradores, mais complicada se torna a geometria em estudo.

Um dos elementos mais básicos da geometria algébrica são as curvas algébricas planas, que definimos na sequência:

Definição: Uma curva algébrica plana é o lugar dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do tipo

$$f(x, y) = 0,$$

Em que f é um polinômio não constante (VAINSENCHER, 2009).

As curvas algébricas planas são objetos de estudo da matemática escolar por meio da geometria analítica, uma vez que, de acordo com Vainsencher (2009), a reta, a circunferência de raio r e centro (x_0, y_0) e a parábola são curvas algébricas planas, curvas expressas, respectivamente, por meio das seguintes equações:

$$ax + by - c = 0, \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0, \qquad y + dx^2 + e=0.$$

Outros exemplos comumente estudados, porém em nível universitário, de curvas algébricas são a elipse e a hipérbole (VAINSENCHER, 2009), que são expressas, respectivamente, por meio das seguintes equações:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $b^2=a^2-c^2$ e $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $b^2=c^2-a^2$

Contudo, o entendimento e manipulação dos conceitos reta, circunferência e parábola a partir da perspectiva escolar, suscita como pré-requisitos conceitos de geometria euclidiana plana, conhecimentos a respeito do plano cartesiano, de equações do primeiro e segundo graus e de geometria analítica escolar (distância ente um ponto e uma reta, distância entre pontos, etc.), ou seja, o estudo da reta, da circunferência e da parábola na geometria analítica escolar não suscita conhecimentos, por exemplo, a definição de espaço vetorial (álgebra linear), anel de polinômios (estruturas algébricas), conjunto algébrico afim (geometria algébrica), Teorema de Base de Hilbert (álgebra comutativa).

Poder-se-ia argumentar que a reta, a circunferência de raio r e centro (x_0, y_0) e a parábola, objetos estudados na escola básica, se configuram como *casos particulares* de "curvas algébricas planas" que são objeto de estudo da "Geometria Algébrica" e, por isso, seria importante que os professores conhecessem a relação entre os objetos estudados na escola básica e as "curvas algébricas" estudando-os a partir da perspectiva teórica apresentada pela "Geometria Algébrica". Entretanto, o primeiro apontamento que fazemos refere-se à quantidade e à natureza dos pré-requisitos que a "Geometria Algébrica" suscita em sua composição, que são manipulados geralmente em cursos de pós-graduação em Matemática (associados à álgebra comutativa, por exemplo). Embora a "Geometria Algébrica" pudesse ser interpretada como um processo de aprofundamento da matemática escolar, esse aprofundamento ocorreria no sentido de a *matemática escolar* ampliar-se a ponto de transformar-se em *matemática acadêmica*. Neste contexto, o aprofundamento que poderia ser vislumbrado pela área de concentração "Geometria Algébrica" distancia-se também das necessidades formativas dos professores que ministram aulas de Matemática na educação básica.

A partir da discussão que apresentamos e dos pré-requisitos que relacionamos acima, que podem ser adjetivados como bastante elementares em vista da complexidade matemática que esta linha de pesquisa requer para seu entendimento e manipulação, e remetendo ao objetivo do PROFMAT, um mestrado profissional que objetiva contemplar "as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional" (CAPES, 2010, p. 9), levantamos alguns questionamentos que entendemos estarem em aberto: de que forma os conhecimentos vinculados à "Geometria Algébrica" auxiliariam o trabalho do professor ao explorar os temas contemplados pelo currículo escolar? Quais seriam os "porquês" respondidos pelos professores ao abordar as temáticas contempladas pelo currículo escolar que envolveriam os conceitos estudados na área da matemática "Geometria Algébrica"? De que forma o conhecimento dos pré-requisitos suscitados pela "Geometria Algébrica" auxiliaria o entendimento dos professores sobre os erros cometidos comumente pelos estudantes da escola básica no processo de aprendizagem das diversas temáticas abordadas pelo currículo escolar? De que forma os conhecimentos abarcados pela área da matemática "Geometria Algébrica" auxiliariam o professor no processo de compreensão das relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos apresentados ao longo do currículo escolar? Nesta perspectiva, como as pesquisas desenvolvidas em torno desta temática (Geometria Algébrica) serão vinculadas às atividades dos docentes de Matemática na escola básica?[79]

Como exposto acima, o estudo da "Geometria Algébrica" necessita de vários pré-requisitos, tanto é que disciplinas que tratam deste assunto não são obrigatórias nem nos Bacharelados em Matemática[80] e em diversos mestrados acadêmicos em Matemática, uma vez que, em geral, são frequentadas por acadêmicos que pretendem desenvolver sua pesquisa de mestrado (dissertação) na referida área de pesquisa, já que "Geometria Algébrica" configura-se como uma das áreas do conhecimento da Matemática junto ao CNPq[81].

Recapitulando o nosso objetivo com esse fragmento do trabalho, que era apresentar uma análise sobre a área de concentração "Álgebra" que, de acordo com o documento CAPES (2010), é delimitada pelas linhas de pesquisa "Geometria Algébrica" e "Teoria dos Números", entendemos que de certa forma a área de

---

[79] As questões apresentadas neste parágrafo foram elaboradas a partir dos pressupostos teóricos apresentados por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Krauss, Baumert e Blum (2008), Ma (2009) e Carrillo, Contreras e Flores (2013).

[80] Mais informações sobre o currículo mínimo para os cursos de bacharelado podem ser encontradas nas "Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 23 jan. 2015.

[81] Mais informações sobre as áreas do conhecimento discriminadas pelo CNP podem ser obtidas em seu site. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 17 fev. 2015.

concentração “Álgebra” distancia-se da matemática escolar. Além disso, entendemos que esse distanciamento poderia ser interpretado como um processo de aprofundamento da matemática escolar, *contudo esse aprofundamento ocorre no sentido da matemática escolar ampliar-se a ponto de transformar-se em matemática acadêmica*. Neste contexto, o aprofundamento que poderia ser vislumbrado pela área de concentração “Álgebra” distancia-se também das necessidades formativas dos professores que ministram aulas de Matemática na educação básica.

5.3 CARACTERIZAÇÃO DO PROFMAT: OS OBJETIVOS DO PROGRAMA E O PERFIL DO PROFISSIONAL A SER FORMADO

No tocante aos objetivos e perfil do profissional a ser formado, o Projeto do PROFMAT discorre que:

> O curso proposto visa contribuir para uma qualificação ampla do ensino de matemática na escola básica, indo desde um aprimoramento no processo de formação continuada de professores até mudanças efetivas da prática em sala de aula. Esta ação visa promover a construção de competências matemáticas no ensino básico por meio de um processo de ensino e aprendizado significativo, inserido de forma consistente em uma educação universal de qualidade. (CAPES, 2010, p. 9)

Com isso,

> A meta é oferecer um curso de formação profissional alicerçado em sólida formação em Matemática, que contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional. (CAPES, 2010, p. 9)

Assim, este curso procurará contemplar:

> a) a busca de uma formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica;
> b) a afirmação do compromisso permanente com a qualidade do ensino e da aprendizagem na área de Matemática;
> c) uma postura crítica acerca do trabalho nas aulas de Matemática nos níveis fundamental e médio;
> d) o papel central da competência matemática frente às exigências da sociedade moderna;
> e) a valorização profissional do professor através do aprimoramento de sua formação. (CAPES, 2010, p. 9)

Para atingir os supracitados objetivos, o PROFMAT afirma que terá suas práticas alicerçadas nas seguintes diretrizes:

> a) executar um processo de formação complementar em matemática, baseado nos conteúdos curriculares do ensino básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da matemática;
> b) promover uma articulação eficaz entre conhecimentos e práticas das ciências matemáticas e do ensino básico, direcionada aos objetivos da educação básica;
> c) estimular e promover a independência do professor cursista, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional de forma autônoma e permanente;
> d) incentivar a pesquisa e produção de materiais e práticas pedagógicas diferenciadas para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, software, simulações, ambientes de aprendizagem, aulas inovadoras, etc.). (CAPES, 2010, p. 9)

Em relação ao perfil do profissional a ser formado, o projeto acadêmico do PROFMAT apresenta a seguinte descrição: "espera-se que tais profissionais, que lecionam Matemática no ensino básico tenham pleno domínio da matéria que ensinam, inclusive das suas aplicações mais imediatas, bem como uma noção da evolução histórica dos principais temas que constam do currículo escolar" (CAPES, 2010, p. 9).

Tanto os objetivos quanto as diretrizes e metas do PROFMAT apresentam frequentemente expressões relacionadas a uma formação matemática sólida/adequada/aprofundada para o exercício da docência e esse discurso é amplamente difundido e corroborado por diversos instrumentos vinculados ao referido programa, como o Regimento do PROFMAT que, no Artigo 1º discorre que:

> Artigo 1º - O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. (SBM, 2014, p. 1)

Quando o PROFMAT se propõe a "[...]*contribuir para a qualificação do ensino da Matemática na escola básica, abrangendo desde a formação continuada até mudanças efetivas da prática em sala de aula*" visando à promoção da "*construção de competências matemáticas no ensino básico por meio de um processo de ensino e aprendizado significativo, inserido de forma consistente em uma educação universal de qualidade*" (CAPES, 2010, p. 9), a proposta, aparentemente, pode ser classificada como coerente com algumas das necessidades da escola brasileira, como a necessidade de que sejam melhorados os índices e notas obtidos pelos estudantes em avaliações como o PISA, por exemplo, e, para tanto, a qualidade do ensino e da aprendizagem da matemática precisa ser melhorada neste nível escolar. Contudo, essa coerência não está presente em todas as proposições. Neste cenário, alguns questionamentos são pertinentes e os apresentaremos doravante.

No que se refere às afirmações expostas no parágrafo anterior, qual é o significado da expressão "ensino e aprendizado significativo"? Essa expressão associa-se à Teoria da Aprendizagem Significativa[82], de David Ausübel? Ou associa-se ao adjetivo da língua portuguesa "significativo", que possui como sinônimos "que tem significado", "expressivo", "relevante"? Neste contexto, o ensino, a partir da conclusão do PROFMAT pelos professores, passará a ser significativo, mas significativo para quem? Para os alunos da escola básica? Para os professores? Para os alunos e professores? Ou o ensino passará a ser significativo à medida que passará a se relacionar com o cotidiano dos alunos? Ou passará a ser significativo porque contemplará "as exigências da sociedade moderna" (CAPES, 2010, p. 9)?

No tocante à afirmação de que o PROFMAT possui como meta "*Oferecer um curso de formação profissional alicerçado em sólida formação em Matemática, que contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional*" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso), questionamos:

I) Qual é o significado da expressão "sólida formação em matemática", quando se trata de formar, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, o professor de Matemática da educação básica no Brasil?

II) Qual é o significado da expressão "contemplar as necessidades [dos professores brasileiros] amplas de desenvolvimento e valorização profissional", nesta conjuntura?

III) Em que termos serão contempladas as necessidades amplas de desenvolvimento profissional? Neste contexto, qual é o significado da expressão "desenvolvimento profissional"?

---

[82] De acordo com Moreira (2012), a aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressadas simbolicamente interagem (interatuam) de maneira substantiva e não arbitrária com o que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não literal, que não é ao "pé da letra", e não arbitrária significa que a interação não ocorre com qualquer ideia prévia, mas com um conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito aprendiz.

O pesquisador britânico Christopher Day, por exemplo, caracteriza o Desenvolvimento Profissional da seguinte forma:

> *O desenvolvimento profissional envolve todas as experiências espontâneas de aprendizagem e as actividades conscientes planificadas, realizadas para o benefício, directo ou indirecto, do indivíduo, do grupo ou da escola que contribuem, através destas, para a qualidade da educação na sala de aula. É o processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, revêem, renovam, e ampliam, individual ou colectivamente, o seu compromisso com os propósitos morais do ensino, adquirem e desenvolvem, de forma crítica, juntamente com as crianças, jovens e colegas, o conhecimento, as destrezas e a inteligência emocional, essenciais para uma reflexão, planificação e prática profissionais eficazes, em cada uma das fases das suas vidas profissionais*. (DAY, 1999, p. 20-21, destaque do autor)

Para Guérios, "desenvolvimento profissional" é "[...] um processo contínuo de permanente transformação resultante do movimento interior protagonizado pelo professor em sua dialógica relação com o campo de conhecimento que lhe é pertinente e com sua experiencialidade" (GUÉRIOS, 2005, p.136).

Sendo assim, entendemos que o seguinte questionamento é pertinente: O desenvolvimento profissional que é meta do PROFMAT tem quais características?

IV) Como se dará o processo de valorização profissional dos professores? Será por meio da remuneração destes profissionais? A titulação de mestre será "considerada" no plano de carreira dos docentes que concluírem o PROFMAT? Os professores que obtiverem o título de mestre (por meio da conclusão do PROFMAT) terão seus salários equivalentes aos demais profissionais que possuem a mesma titulação? Após a obtenção do título de mestre os professores de Matemática terão melhores condições de trabalho? Os direitos desses professores, como profissionais da educação, de acordo com a CLT[83], LDB[84] e as demais legislações pertinentes, serão garantidos com a obtenção da titulação[85]? Esses questionamentos que apresentamos em relação à temática "valorização profissional" estão fortemente associados ao "Documento Referência[86]" da Conferência Nacional de Educação (CONAE) que ocorreu em

---

[83]CLT - Consolidação das Leis do Trabalho.

[84]Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

[85]Esse questionamento é pertinente à medida que os direitos dos professores nem sempre são respeitados. Um exemplo disso é o não pagamento do piso salarial aos professores de diversos Estados, que é previsto na Lei nº 11.738, de 16de julho de 2008.

[86]O "Documento Referência" do CONAE discorre que "pensar a valorização dos profissionais, requer a discussão articulada entre formação, remuneração, carreira e condições de trabalho" (p.74). O referido

2014, cuja temática foi "O PNE na Articulação do Sistema Nacional de Educação: Participação Popular, Cooperação Federativa e Regime de Colaboração" e ao documento "Professores do Brasil: impasses e desafios", produzido pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO, 2009).

Em relação à afirmação de que o curso pretende "*executar um processo de formação complementar em matemática, baseado nos conteúdos curriculares do ensino básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da matemática*" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso), as perguntas que afloram são: o que significa "baseado" neste contexto? Seria "que toma como base"? Seria "que se restringe apenas ao trabalho com esses conteúdos curriculares"? Ou seria "que, tomando os conteúdos curriculares do ensino básico como ponto de partida, pretende tratá-los num nível mais avançado (e quão mais avançado?) de generalidade, formalismo, abstração, rigor e precisão"?

No que concerne à afirmação de que o PROFMAT contemplará "*a busca de uma formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica*" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso), o questionamento que emerge é: qual é a matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola em nível básico? Como ela foi determinada? Quais são as características dessa matemática?

Ainda neste contexto, o Artigo 1º do Regimento do programa argumenta que "*O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática"* (SBM, 2014, p. 1). No que diz respeito a esse fragmento, os questionamentos que afloram são: o que se entende por "matemática aprofundada", quando se trata de formar, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, o professor de Matemática da Educação Básica no Brasil? Qual é a matemática relevante para a docência no ensino básico? Em que medida dar-se-á este aprofundamento? No sentido de expansão da matemática escolar, na perspectiva de relacioná-la à matemática acadêmica? Ou no sentido de aprofundá-la

documento está disponível em site. Disponível em: file:///C:/Users/marlova/Desktop/pol%C3%ADticas%20p%C3%BAblicas/doc_referencia_conae2014.pdf Acesso em: 21 jan. 2015.

dentro dela mesma, objetivando, por exemplo, responder aos “porquês” conceituais e procedimentais?

Tais questionamentos não são respondidos ao longo do projeto acadêmico do PROFMAT, ou seja, os autores não elucidam o que entendem por “formação matemática relevante”, “formação matemática adequada”, “domínio dos conteúdos adequados”, “sólida formação em matemática” ou ainda por “formação matemática aprofundada”, expressões essas que não são bem definidas e deixam margem para mais de uma interpretação.

Tendo em vista que as atividades de ensino e pesquisa do programa de pós-graduação *stricto sensu* devem estar intimamente relacionadas às Áreas de Concentração[87] e Linhas de Pesquisa, um caminho para entendermos o contexto do questionamento “qual é a matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica?” são as características apresentadas por esses componentes do projeto acadêmico. Com exceção da área de concentração “Ensino de Matemática” e das Linhas de Pesquisa “Ensino Básico de Matemática”, as demais Áreas e Linhas do programa relacionam-se à matemática que, na perspectiva teórica adotada por Moreira (2004) e Moreira e David (2010), é classificada como acadêmica. No contexto destes questionamentos, Baumert *et al.* (2010) argumentam que:

> Our findings show that it is, in principle, justified to increase the attention paid to teachers’ subject matter knowledge. However, it is vital to specify from the outset exactly what is meant by subject matter knowledge — in terms of CK, PCK, and a balance between the two. It is clear that these knowledge components do not exhaust the spectrum of professional competence. Indeed, the substantial amount of unexplained variance in our structural equation model clearly shows that the choreography of teaching is not only dependent on CK and PCK. (BAUMERT *et al.*, 2010, p. 167-168)

Essa discussão nos remete à formação inicial de professores que, desde sua implantação no Brasil em meados da década de 30 do século passado, possui o formato “3+1, no qual as disciplinas de natureza pedagógica, com duração prevista de *um* ano, se justapõem às disciplinas de conteúdo específico [matemática], com duração de *três* anos” (DINIZ-PEREIRA, 2000, p. 54, grifo da autora). Mesmo depois de, na década de

[87] Maiores detalhes a respeito das caracterizações das linhas de pesquisa presentes no projeto do PROFMAT podem ser encontradas no site do IMPA. Disponível em: http://www.impa.br/opencms/pt/pesquisa/pesquisa_areas_de_pesquisa/pesquisa_areas_de_pesquisa_algebra/index.html. Acesso em: 10 jun. 2014.

80, terem sido inseridas disciplinas caracterizadas como "integradoras"[88] entre as disciplinas de conteúdo e as pedagógicas, as pesquisas têm evidenciado que

> O modelo original das licenciaturas, seguindo a "fórmula 3+1", ainda não foi totalmente superado pela maior parte das universidades brasileiras, uma vez que as disciplinas de conteúdo, de responsabilidade das unidades básicas, continuam precedendo e pouco articulando-se com as pedagógicas, que geralmente ficam a cargo apenas das faculdades ou dos centros de educação. (DINIZ-PEREIRA, 2000, p.75)

Nesta perspectiva, se os cursos de formação inicial de professores destinam grande parte da carga horária à formação matemática (distribuída em disciplinas da área de análise matemática, álgebra e, em menor quantidade, de geometria), seria importante averiguarmos se *a matemática adequada* para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica é contemplada nesses cursos. E caso não seja, seria importante voltarmo-nos para uma reestruturação da formação inicial de professores de Matemática e para as exigências presentes no processo de habilitação desses profissionais, uma vez que não nos parece ser prudente e viável – especialmente em termos de financiamento público – aguardarmos o professor formar-se e entrar no mercado de trabalho para somente então participar de uma seleção para ingressar em um curso de formação continuada que forneça *a matemática* necessária para o ensino deste conhecimento na escola básica.

Os questionamentos que apresentamos no parágrafo anterior são corroborados pelo Relatório Final da pesquisa "Formação continuada de professores: uma análise das modalidades e das práticas em Estados e municípios brasileiros" realizada pela Fundação Carlos Chagas ao propor que se deve:

> Investir maciçamente na formação inicial dos professores, de modo que a Formação Continuada não precise atuar retrospectivamente e, portanto, de forma compensatória, encarregando-se do desenvolvimento profissional dos docentes. Isso significa uma Formação Continuada prospectiva, por meio da qual o professor ganha em autonomia, inclusive para opinar em que aspectos e de que modo entende ser preciso aprimorar-se. Assim, torna-se possível articular a formação inicial com a continuada, a fim de que esta última, amparando-se na primeira, coloque os docentes, entre outras metas, em compasso com as mudanças ocorridas no campo educacional. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS, 2011, p. 104)

---

[88] São chamadas de "disciplinas integradoras" as disciplinas que fazem a transposição do conhecimento da área para o ensino fundamental e ensino médio: Prática de Ensino, Instrumentação para o Ensino, Didática Especial, etc. (DINIZ-PEREIRA, 2000)

Outro questionamento pertinente relaciona-se à demanda de um curso de formação com estas características: considerando que este projeto está sendo implementado em larga escala em nosso País e é financiado pelo governo federal, quais foram os indicadores[89] que subsidiaram as atividades de planejamento e da formulação do PROFMAT? Com base em quais e que tipo de pesquisas se fundamenta o PROFMAT? Quais foram as pesquisas que apontaram as demandas formativas dos professores de Matemática brasileiros e que estão alicerçando a referida proposta? Foi elaborado (por parte dos propositores do PROFMAT) um diagnóstico do corpo docente brasileiro em que foram elucidadas as demandas formativas desses professores? Sob quais argumentos (científicos) se estabelece a necessidade, por parte dos professores da escola básica brasileira, de uma formação alicerçada em uma "sólida" formação matemática?

Ao analisarmos documentos relacionados ao PROFMAT[90] não identificamos argumentos/dados científicos que alicercem a necessidade formativa dos professores de Matemática brasileiros. Ainda sob este aspecto, destacamos um trecho do documento "Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)", que apresenta uma entrevista de Marcelo Vianna e Hilário de Alencar, os quais em 19/01/2015, de acordo com o site do programa, ocupavam respectivamente os cargos de Presidente do Conselho Gestor do PROFMAT e Coordenador Acadêmico do PROFMAT, na qual argumentam que: "É sabido que a formação [de professores] é catastrófica e é preciso entender em quais dimensões ela é catastrófica, a fim de que possamos atuar mais e melhorar a situação" e apontam que uma das intenções subjacentes ao levantamento de perfis de candidatos e de ingressantes no PROFMAT é a de "[...] explicitar 'buracos negros' na formação de professores de Matemática nos Estados atualmente atendidos pelo programa; buscar subsídios para se entender qual é a origem dessa má formação[...]".

A partir do exposto acima, o seguinte questionamento é pertinente: se o perfil do corpo docente de professores de Matemática da escola básica é desconhecido pelos

---

[89]Os indicadores apontam, indicam, aproximam, traduzem em termos operacionais as dimensões sociais de interesse definidas a partir de escolhas teóricas ou políticas realizadas anteriormente. (JANNUZZI, 2005, p. 138)

[90]Dentre outros, destacamos o projeto acadêmico "Avaliação Suplementar do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional", o documento intitulado "Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)", Regimento do PROFMAT, editais e portarias publicados no site do PROFMAT, livros pertencentes à Coleção PROFMAT.

propositores do PROFMAT, como é que o PROFMAT vai corresponder às demandas formativas desses professores? Esse questionamento é pertinente dado que o projeto acadêmico deste programa afirma que vai "executar um processo de formação complementar em matemática, baseado nos conteúdos curriculares do ensino básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da matemática" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso) e que procurará contemplar "a busca de uma formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso).

O desconhecimento das demandas formativas dos professores de Matemática pelos propositores do PROFMAT quando o referido programa se propõe a responder essas demandas se configura como uma quebra do que é intitulado pela literatura como "ciclo de formulação e avaliação das políticas públicas", composto pelas seguintes etapas: diagnóstico, formulação, implementação e avaliação (JANNUZZI, 2006). A etapa diagnóstico permite, a partir do estudo e análise de indicadores (dados), a elaboração de um retrato amplo e detalhado (caracterização) da população a que se pretende atingir, o mapeamento de seus problemas e das demandas a serem sanadas pelas ações públicas. Além disso, os indicadores subsidiam as atividades de planejamento público e a formulação de políticas sociais nas diferentes esferas de governo. Na fase de implementação, os dados voltam-se ao monitoramento e ao direcionamento dos recursos (financeiros, físicos, humanos, etc.) e tomadas de decisão, enquanto que, na fase de avaliação, os dados assumem o caráter de mensuração da efetividade do programa/projeto. Os indicadores auxiliam ainda no processo de aprofundamento da investigação acadêmica sobre as mudanças ocasionadas e sobre os determinantes dos diferentes fenômenos que ocorrem com a população envolvida na ação (JANNUZZI, 2006; SOUZA, 2006; JANNUZZI; MIRANDA e SILVA, 2009).

Ainda em relação aos objetivos e diretrizes do programa, especificamente em relação à associação do "ensino de matemática de qualidade" com processos de formação de professores voltados exclusivamente para a dimensão "conhecimento do conteúdo", como é o caso do PROFMAT, as pesquisas conduzidas em diferentes países apontam, conforme já discorremos anteriormente, que o ensino de qualidade está associado aos diversos fatores que interferem nas atividades desenvolvidas no ambiente escolar (estruturais, administrativos, etc.), dos quais um é a formação do professor configurada esta como multidimensional (psicologia, antropologia, etc.) (SHULMAN,

1986; 1987; BROMME, 1993; NÓVOA, 1995; DAY, 1999; TARDIF, 2002; HILL, SCHILLING e BALL, 2004; MOREIRA, 2004; BALL, HILL e BASS, 2005; HILL, 2007; HILL *et al.*, 2007; BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL *et al.*, 2008; KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008; MA, 2009; BAUMERT *et al.*, 2010; MOREIRA e DAVID, 2010; BAUMERT e KUNTER, 2013; CARRILLO *et al*., 2013; CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013; FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013; KLEICKMANN *et al.*, 2013; MOREIRA e FERREIRA, 2013).

Em relação à associação do ensino de matemática de qualidade [ou seja, que culmina em uma aprendizagem de qualidade] com a formação de professores voltada exclusivamente para a dimensão “conhecimento do conteúdo”, destacamos os dados obtidos por Bromme (1993), Carrillo e colaboradores (CARRILLO *et al*., 2013; CARRILLO, CONTRERAS e FLORES, 2013) e, em especial, as teorias propostas por Ball e colaboradores (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL *et al.*, 2008), Ma (2009), Baumert e colaboradores (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008), uma vez que ao caracterizarem a dimensão matemática do conhecimento do professor, associam fortemente a matemática a ser trabalhada no processo de ensino ao conhecimento sobre os sujeitos da aprendizagem, ao conhecimento de e sobre o currículo escolar (e demais materiais didáticos e paradidáticos que permeiam a instrução nas instituições de ensino) e aos processos de ensino e aprendizagem.

A esse respeito, destacamos novamente os resultados obtidos no COACTIV, projeto cujo objeto de pesquisa era investigar as características de um ensino de matemática de boa qualidade e as competências profissionais dos professores de Matemática. Em relação ao conhecimento matemático, esses resultados apontam que: “[...]CK [conhecimento do conteúdo] is not a panacea, however. Findings show that CK remains inert in the classroom unless accompanied by a rich repertoire of mathematical knowledge and skills relating directly to the curriculum, instruction, and student learning” (BAUMERT *et al.*, 2010, p. 139).

Ainda nesta conjuntura, Ball, Thames e Phelps discorrem que

> Teachers must know the subject they teach. Indeed, there may be nothing more foundational to teacher competency. The reason is simple: Teachers who do not themselves know a subject well are not likely to have the knowledge they need to help students learn this

> content. At the same time, however, just knowing a subject well may not be sufficient for teaching. One need only sit in a classroom for a few minutes to notice that the mathematics that teachers work with in instruction is not the same mathematics taught and learned in college classes. In addition, teachers need to know mathematics in ways useful for, among other things, making mathematical sense of student work and choosing powerful ways of representing the subject so that it is understandable to students. It seems unlikely that just knowing more advanced math will satisfy all of the content demands of teaching. (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 404)

Além disso, ainda segundo Ball, Thames e Phelps (2008), infelizmente, cursos voltados estritamente para o “conteúdo” e que são direcionados à formação de professores tendem a ser acadêmicos, em ambos os sentidos da palavra, no pior e no melhor sentido: erudito e irrelevante. Entretanto, em qualquer dos casos, distanciam-se das demandas originárias da atividade de ensino da matemática no ambiente de sala de aula.

5.4 CARACTERIZAÇÃO DO PROFMAT: AS DISCIPLINAS

As disciplinas do PROFMAT e suas respectivas ementas, bibliografia e área, de acordo com o projeto acadêmico, estão expressas na Tabela 5 e distribuem-se no período acadêmico do curso de acordo com a Matriz Curricular do PROFMAT, expressa na Tabela 4.

Tabela 4– Matriz curricular do PROFMAT.

	Verão	**1º Período**	**2º Período**
1º Ano	**MA01** Temas e Problemas **MA02** Informática Básica	**MA11** Números e Conjuntos **MA12** Matemática Discreta	**MA13** Geometria I **MA14** Aritmética I
2º Ano	**MA21** Resolução de Problemas **MA3X** Eletiva I	**MA22** Equações Algébricas e Noções de Cálculo **MA 3X** Eletiva II	**MA 23** Geometria II **MA 3X** Eletiva III
3º Ano	**MA24** Trabalho de Conclusão		

	de Curso		

Fonte: CAPES (2010).

As disciplinas “MA01:Temas e Problemas” e “MA02: Informática Básica” são definidas como disciplinas de nivelamento e, diferentemente da abordagem dada às demais disciplinas, o projeto acadêmico do PROFMAT não apresenta descrição dessas disciplinas. As disciplinas obrigatórias do PROFMAT e suas respectivas ementas e bibliografias são[91]:

Tabela 5: Disciplinas obrigatórias e suas respectivas ementas e bibliografias

- ARITMÉTICA I

Área(s) de Concentração: Álgebra

Ementa: Divisão. O algoritmo de Euclides. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Números primos. Fatoração. Teorema Fundamental da Aritmética. Equações diofantinas lineares. Congruências e aritmética módulo n. Números invertíveis módulo n. A função phi de Euler. O Teorema de Euler e o Pequeno Teorema de Fermat. Aplicações a Criptografia RSA. O Teorema Chinês dos Restos.

Bibliografia:

1. J. P. O. Santos. Introdução à Teoria dos Números. IMPA.

2. A. Hefez. Elementos de Aritmética. SBM.

3. C. G. Moreira. Divisibilidade, congruências e aritmética módulo n, Revista Eureka! n. 2, p. 41-52.

4. A. Caminha. Equações diofantinas, Revista Eureka! n. 7, p. 39-48.

5. F. E. Brochero Martinez; C. G. Moreira; N. C. Saldanha; E. Tengan - Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Projeto Euclides, IMPA, 2010.

- EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E NOÇÕES DE CÁLCULO

[91] Na descrição das disciplinas que faremos, doravante, adotamos a mesma formatação utilizada no projeto acadêmico do PROFMAT.

Área(s) de Concentração: Análise Matemática/Álgebra

Ementa: Números complexos; interpretação geométrica, forma trigonométrica e transformações conformes (semelhança e inversão no plano). Breve apresentação dos quatérnios. Polinômios; divisibilidade, equações algébricas; equações do terceiro e quarto graus, relações entre coeficientes e raízes, o Teorema Fundamental da Álgebra. Noção de derivada; cálculo das derivadas de funções elementares; regra da cadeia, Teorema do Valor Médio; uso da derivada para obter o gráfico de uma função: gráficos de polinômios e das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Problemas de máximo e mínimo. Séries de Taylor das funções elementares; seu uso para estimativas simples. Noção de integral; Teorema Fundamental do Cálculo. Áreas e volumes obtidos mediante integrais.

Bibliografia:

1. E. Lima, P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. A Matemática do Ensino Médio, vol. 3. SBM.

2. G. Ávila, Cálculo das funções de uma variável, vol. 1. LTC.

3. C. G. Moreira. Uma solução das equações do terceiro e do quarto graus, Revista do Professor de Matematica, n. 25, p. 23-28.

- GEOMETRIA I

Área(s) de Concentração: Geometria e Topologia

Ementa: Ângulos; bissetrizes, perpendiculares, ângulos retos. Retas paralelas; soma dos ângulos internos de um triângulo, casos de igualdade de triângulos. Paralelogramos, polígonos regulares. Círculo e circunferência, ângulos inscritos, tangentes. Semelhança de figuras planas. Áreas, Teorema de Pitágoras. Comprimento da circunferência, número, Retas e planos no espaço. Volumes dos sólidos. Princípio de Cavalieri.

Bibliografia:

1. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. A Matemática do Ensino Médio, 2. SBM.

2. E. Lima. Medida e Forma em Geometria. SBM.

3. J. L. M. Barbosa. Geometria Euclidiana Plana. SBM.

4. E. Wagner, com colaboração de J. P. Q. Carneiro. Construções Geométricas. SBM.

5. P. C. P. Carvalho. Introdução à Geometria Espacial. SBM.

6. O. Dolce; J.;N. Pompeo. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10 - Geometria Plana. Atual.

7. O. Dolce; J. N. Pompeo. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10 - Geometria Espacial: Posição e Métrica. Atual.

- GEOMETRIA II

Área(s) de Concentração: Geometria e Topologia

Ementa: Geometria Analítica Plana: coordenadas, equações da reta e das cônicas. Vetores no plano. Coordenadas no espaço; equação do plano, interpretação geométrica dos sistemas lineares com 3 incógnitas. Cálculo vetorial no espaço; produtos interno e vetorial. Determinantes 3X3; volume do paralelepípedo. Quádricas; formas quadráticas e obtenção dos eixos principais.

Bibliografia:

1. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. A Matemática do Ensino Médio, vol. 3. SBM.

2. E. Lima. Geometria Analítica e Álgebra Linear. IMPA.

3. E. Lima. Coordenadas no Plano. SBM.

4. E. Lima. Coordenadas no Espaço. SBM.

- MATEMÁTICA DISCRETA

Área(s) de Concentração: Álgebra

Ementa: Princípios básicos da Combinatória. O Teorema de Ramsey. Conceitos elementares de Probabilidade. Probabilidade condicional. Progressões aritméticas e geométricas. Sequências recorrentes. Noções sobre juros e descontos. Taxas equivalentes. Vários problemas de matemática financeira.

Bibliografia:

1. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. A Matemática do Ensino Médio, vol. 2. SBM.

2. A. Morgado; E. Wagner; S. Zani. Progressões e Matemática Financeira. SBM.

3. C. G. Moreira. O Teorema de Ramsey, Revista Eureka! n. 6, p. 23-29.

4. C. G. Moreira. Sequências Recorrentes, Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina, n. 4, p. 53-69.

- NÚMEROS E CONJUNTOS

Área(s) de Concentração: Ensino de Matemática

Ementa: Conjuntos. Números naturais. Números Cardinais. Números reais. Funções afins. Funções Quadráticas. Funções Polinomiais. Funções Exponenciais e Logarítmicas. Funções Trigonométricas.

Bibliografia:

1. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. A Matemática do Ensino Médio, vol. 1. SBM.

2. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. A Matemática do Ensino Médio, vol. 4. SBM.

3. M. do Carmo; Augusto César Morgado; Eduardo Wagner. Trigonometria e Números Complexos, SBM.

- RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Área(s) de Concentração: Análise Matemática/Geometria e Topologia/Matemática Aplicada/Ensino de Matemática/Álgebra.

Ementa: Estratégias para resolução de problemas. Problemas de Combinatória. Problemas de Teoria dos Números. Problemas envolvendo desigualdades. Problemas envolvendo Indução. Problemas envolvendo sequências. Problemas envolvendo polinômios. Problemas envolvendo equações funcionais. Problemas de Geometria. Problemas de Cálculo. Problemas envolvendo jogos. Análise de exames e testes: PISA, SAEB, ENEM e afins. Estudo de provas de olimpíadas: OBM, OBMEP, Olimpíada do Cone Sul, Olimpíada Internacional de Matemática, Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Concurso Canguru sem fronteiras.

Bibliografia:

1. A. Caminha. Convite à Matemática Elementar. UFC/SECITECE, 2009.

2. D. Fomin. Mathematical circles. AMS, 1996 (em tradução para o português pela SBM).

3. C. Moreira; E. Motta; E. Tengan; L. Amâncio; N. Saldanha, P. Rodrigues. Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª - Problemas e resoluções. SBM

4. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. Temas e Problemas. SBM

5. E. Lima; P. C. Carvalho; A. Morgado; E. Wagner. Temas e Problemas Elementares.SBM

6. C. Moreira; E. Motta (editores). Revista Eureka! SBM

7. Páginas da OBM (www.obm.org.br) e da OBMEP (www.obmep.org.br).

- TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO.

Ementa: Cada aluno matriculado na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso receberá um tema específico pertinente ao currículo acima (disciplinas obrigatórias) para desenvolver em um projeto escrito sob orientação docente. Este projeto incluirá um apanhado histórico sobre o tema, uma análise crítica sobre as fontes disponíveis para o tema, um planejamento de aula, desenvolvimento didático do tema e um conjunto de exercícios resolvidos, que ilustre o processo de aprendizado e domínio do tema. O trabalho de conclusão será apresentado na forma de uma aula expositiva sobre o tema do projeto e de um trabalho escrito, com a opção de apresentação produção técnica relativa ao tema. A nota final é baseada no conjunto apresentado.

Fonte: CAPES (2010)

As disciplinas eletivas do PROFMAT e suas respectivas ementas são:

Tabela 6: Disciplinas eletivas e suas respectivas ementas e bibliografias,

- HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Área(s) de Concentração: Ensino de Matemática

Ementa: Origem da ideia de número e a escrita primitiva dos mesmos; sistemas de numeração. A Geometria no Egito, na Babilônia e na Grécia. O nascimento do método dedutivo: Tales, Pitágoras e Euclides. A Matemática no Renascimento: as equações do terceiro e do quarto graus. Cardano, Tartaglia, Bombelli e o surgimento da Álgebra. Descartes e Fermat: uma Matemática nova. Newton, Leibniz e o Cálculo. Estudo das raízes históricas dos conceitos básicos: equação do segundo grau na Babilônia; trigonometria na Grécia, números complexos com Bombelli e depois com Gauss; a Geometria dos Elementos. Os logaritmos com Neper e Briggs. As cônicas com Apolônio. Números complexos com Gauss, Euler e Cauchy. Cálculo com Newton.

Bibliografia:

1. A. Aaboe. Episódios da História Antiga da Matemática. SBM.

2. D. J. Struik. História Concisa das Matemáticas. Gradiva.

3. H. Eves. Introdução à História da Matemática. Editora da UNICAMP.

4. C. Boyer. História da Matemática. Edgard Blucher.

- ARITMÉTICA II

Área(s) de Concentração: Álgebra

Ementa: Equações diofantinas de grau 2. Triplas pitagóricas. Ordens e raízes primitivas. Resíduos quadráticos. Reciprocidade quadrática. Funções multiplicativas e as fórmulas de inversão de Möbius. Frações contínuas e aproximações de números reais por números racionais. A equação de Pell.

Bibliografia:

1. J. P. O. Santos. Introdução à Teoria dos Números. IMPA.

2. A. Hefez. Elementos de Aritmética. SBM.

3. F. E. Brochero Martinez; C. G. Moreira; N. C. Saldanha; E. Tengan - Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Projeto Euclides, IMPA, 2010.

4. C. G. Moreira. Divisibilidade, congruências e aritmética módulo n, Revista Eureka! n. 2, p. 41-52.

5. A. Caminha. Equações diofantinas, Revista Eureka! n. 7, p. 39-48.

6. C. G. Moreira; N. C. Saldanha. Reciprocidade quadrática, Revista Eureka! n. 15, p. 27-30.

7. C. G. Moreira; N. C. Saldanha. Funções multiplicativas e a função de Möbius, Revista Eureka! n. 8, p. 43-46.

8. C. G. Moreira. Frações contínuas, representações de números e aproximações, Revista Eureka! n. 3, p. 44-55.

- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM SEGUNDO CURSO

Área(s) de Concentração: Análise Matemática

Ementa: Derivadas parciais. Regra da cadeia. Gradiente e seu significado. Pontos críticos de uma função de n variáveis. Integral múltipla. Noção de equação diferencial. Equação diferencial linear com coeficientes constantes.

Bibliografia:

1. S. Lang. Calculus of Several Variables. Springer.

2. E. Lima. Curso de Análise, vol. II. IMPA.

- INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Área(s) de Concentração: Álgebra

Ementa: Espaço vetorial. Dependência linear, base. Transformação linear; matriz de uma transformação linear. Operações com matrizes. Determinantes, Transformações ortogonais. Matrizes simétricas. Diagonalização.

Bibliografia:

1. E. Lima. Álgebra Linear. IMPA.

- MATEMÁTICA E ATUALIDADE

Área(s) de Concentração: Matemática Aplicada

Ementa: Esta disciplina tem seu foco na divulgação científica em Matemática. As atividades propostas buscam aproximar, transformar e unir os avanços científicos com o conhecimento matemático ensinado nas escolas. Através de ações especialmente planejadas, almeja-se evitar o efeito vitrine que coloca a Matemática e suas conexões como trabalho apenas de cientistas, incompreensível ao cidadão comum. Os objetivos da disciplina são: a) despertar/incrementar o interesse dos estudantes pelas ciências, particularmente pela Matemática; b) mostrar a importância e a força das teorias matemáticas nas descobertas tecnológicas; c) promover a divulgação da cultura científica, unindo atividades teóricas e experimentais; d) incentivar a apresentação didática de materiais para o ensino de Matemática, como meio de transformação do conhecimento; ampliar a experimentação de materiais e métodos para o ensino de Matemática como fonte de pesquisa para o professor. Matemática e música. Sons. Compactação de arquivos de sons. Senhas usadas em bancos e na Internet. Códigos. A Geometria do globo terrestre. Funcionamento do GPS. A matemática dos códigos de barra. Aplicações de cônicas. Os logaritmos, escalas. Outros temas vinculados a inovações tecnológicas.

Bibliografia:

1 - P. C .P. Carvalho; L. Velho; M. Cicconet; S. Krakowski. Métodos matemáticos e computacionais em música. VISGRAF IMPA, SBMAC 2009.

2 - S. Alves. A Geometria do Globo Terrestre. PIC OBMEP, vol 6.

3 - F. P. Millies. A Matemática dos Códigos de Barra. PIC OBMEP vol 6.

4 - S. Coutinho. Criptografia. PIC OBMEP vol 7.

5 - Minicursos da Bienal da SBM

6 - Revista do Professor de Matemática.

- MODELAGEM MATEMÁTICA

Área(s) de Concentração: Matemática Aplicada

Ementa: A filosofia científica da modelagem matemática de problemas do mundo real. A modelagem matemática na sala de aula e seus principais desafios. Exploração das principais etapas da modelagem de problemas que utilizam ferramentas matemáticas do Ensino Médio. Observação de problemas reais, identificação das componentes variáveis e dos parâmetros importantes inerentes ao modelo e as suas interações. Estratégias de modelagem e construção de modelos matemáticos de problemas reais: Hipóteses para o modelo. Formulação e resolução matemática do problema. Interpretação da solução. Validação do modelo. Uso do modelo para explicar e prever os fenômenos associados ao modelo. Aperfeiçoamento de modelos. Coleta de dados e estimativa dos parâmetros a serem usados no modelo. Ferramentas matemáticas e estatísticas para tratamento de dados. Variações simples, média e relativa. Ajustes. Modelos discretos. Equações discretas. Solução teórica, gráfica e numérica de equações discretas.

Bibliografia:

1 - R. C. Bassanezi. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

2 - L. E. Edelstein-Keshet. Mathematical Models in Biology. The Randon House Ed., Toronto. 1988.

3 - J. D. Murray. Mathematical Biology. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

- RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Área(s) de Concentração: Matemática Aplicada/Ensino de Matemática

Ementa: Apresentação e discussão de programas computacionais para o ensino de matemática em ambientes de sala de aula e de laboratório didático. Softwares livres. Planejamento de aulas nas escolas fundamental e média em ambiente informatizado.

Uso de calculadoras no ensino de matemática. Pesquisa eletrônica, coleta e disponibilização de material didático na rede. Processadores de texto e hipertexto. Planilhas eletrônicas, pacotes estatísticos, banco de dados. Ambientes gráficos. Ambientes de geometria dinâmica. Sistemas de computação simbólica (CAS). Critérios e instrumentos para avaliação de softwares educativos. Ensino a distância, em modalidades síncrona e assíncrona.

Bibliografia:

1 - Geogebra. http://www.geogebra.org.br

2 - Maxima. http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main Page

3 - Octave. http://www.gnu.org/software/octave

4 - Scilab. http://www.scilab.org

5 - TabulæColaborativo. http://www.tabulae.net

6 - Winplot. http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

- TÓPICOS DE MATEMÁTICA

Área(s) de Concentração: Análise Matemática/Geometria e Topologia/Matemática Aplicada/Ensino de Matemática/Álgebra

Ementa: Disciplina sem ementa fixa, com programa a ser proposto por iniciativa individual das Instituições Parceiras.

Bibliografia: Disciplina sem bibliografia fixa.

Fonte: CAPES (2010).

5.4.1 A relação entre as disciplinas e suas respectivas áreas de concentração

O documento Capes (2012, p. 23, grifo nosso) recomenda que “considerando-se que a pós-graduação *stricto sensu* é o espaço da pesquisa e da produção de conhecimento, espera-se que linhas, orientações, disciplinas ministradas e produtos da pesquisa estejam em íntima articulação”. Assim sendo, doravante discutiremos a (existência de) relação entre as disciplinas, as Áreas de Concentração e as Linhas de Pesquisa do PROFMAT, considerando que as linhas de pesquisa "[...] expressam a especificidade de produção de conhecimento dentro de uma área de concentração [...]" (CAPES, 2012, p. 23).

Expomos, por meio da Tabela 7 abaixo, a partir do projeto acadêmico do PROFMAT, a distribuição das disciplinas (eletivas e obrigatórias) em relação às áreas de concentração:

Tabela 7: Área de concentração x disciplinas.

Área de Concentração	**Disciplina**
Análise Matemática	Equações Algébricas e Noções de Cálculo (obrigatória) Cálculo Diferencial e Integral: Um segundo curso (eletiva) Resolução de Problemas (obrigatória)
Álgebra	Aritmética I (obrigatória) Aritmética II (eletiva) Equações Algébricas e Noções de Cálculo (obrigatória) Matemática Discreta (obrigatória) Introdução à Álgebra Linear (eletiva) Resolução de Problemas (obrigatória)
Geometria e Topologia	Geometria I (obrigatória) Geometria II (obrigatória) Resolução de Problemas (obrigatória)
Ensino de Matemática	Números e Conjuntos (obrigatória) História da Matemática (eletiva) Recursos Computacionais no Ensino de Matemática

	Resolução de Problemas (obrigatória)
Matemática Aplicada	Matemática e Atualidade (eletiva) Modelagem Matemática (eletiva) Recursos Computacionais no Ensino de Matemática (eletiva) Resolução de Problemas (obrigatória)

Fonte: produção da autora a partir dos dados disponibilizados no projeto acadêmico do PROMAT.

5.4.2 A área de concentração Análise Matemática e as Linhas de Pesquisa Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais

A área de concentração “Análise Matemática”, que se vincula às disciplinas “Equações Algébricas e Noções de Cálculo”, “Cálculo Diferencial e Integral: Um Segundo Curso” e “Resolução de Problemas” é delimitada no projeto acadêmico do PROFMAT por meio das linhas de pesquisa “Análise Funcional” e “Equação Diferencial Parcial”.

A “Análise Funcional” é apresentada a partir da seguinte descrição: “Propriedades e estrutura dos espaços de Funções”, ou seja, fundamenta-se no estudo das funções lineares contínuas (funcionais lineares) entre espaços normados. Já a linha de pesquisa “Equação Diferencial Parcial” (EDP) é descrita como o “estudo da existência, unicidade, regularidade e propriedades de soluções de equações ou sistemas de equações a derivadas parciais”, ou seja, seu principal objeto de estudo são equações diferenciais parciais (ou sistemas de equações).

Ao nos reportarmos às ementas e bibliografia das disciplinas “Equações Algébricas e Noções de Cálculo”, “Cálculo Diferencial e Integral: Um Segundo Curso” e “Resolução de Problemas”, pode-se facilmente verificar que versam sobre conteúdos comumente abordados em cursos de Cálculo em nível universitário (de graduação em Matemática – licenciatura e bacharelado –, além de cursos do intitulado “ciclo básico” de cursos como Engenharia, Física, Química, Geologia, etc.), ou seja, podem ser interpretadas como pertencentes à área da análise matemática, contudo não se vinculando às Linhas de Pesquisa “Análise Funcional” e “Equações Diferenciais Parciais”.

Especificamente em relação à linha de pesquisa Equações Diferenciais Parciais, ao relacioná-la com as disciplinas, verifica-se que as “equações diferenciais parciais” ou os “sistemas de equações a derivadas parciais” não figuram nas ementas ou bibliografias das três disciplinas.

No que concerne à linha de pesquisa “Análise Funcional”, o mesmo ocorre, uma vez que nenhuma das ementas ou de suas respectivas bibliografias debruçam-se sobre o estudo de funcionais lineares sobre espaços normados.

5.4.3 A área de concentração Geometria e Topologia e as linhas de pesquisa Geometria Diferencial e Sistemas Dinâmicos

A área de concentração “Geometria e Topologia”, à qual as disciplinas “Geometria I”, “Geometria II” e “Resolução de Problemas” estão vinculadas, é delimitada pelas linhas de pesquisa “Geometria Diferencial” e “Sistemas Dinâmicos”.

A linha “Geometria Diferencial” é definida como o “estudo das propriedades globais de espaços métricos localmente Euclidianos”, enquanto a linha “Sistemas Dinâmicos” é definida como o “estudo das propriedades qualitativas de sistemas descritos por processos evolutivos determinísticos”.

Ao serem analisadas a ementa e a bibliografia das disciplinas “Geometria I” e “Geometria II” novamente não se encontram relações diretas entre elas e as linhas de pesquisa “Geometria Diferencial” ou “Sistemas Dinâmicos”.

A disciplina “Geometria I” versa sobre conteúdos da geometria euclidiana plana e espacial, em nível de ensino médio e de cursos de nível universitário (graduação), sendo que no primeiro desses níveis os conceitos são usualmente abordados a partir de uma perspectiva procedimental/prática e, no segundo, a partir de uma abordagem axiomática.

A disciplina “Geometria II” apresenta em sua ementa e indicação bibliográfica conteúdos que comumente fazem parte de cursos de Geometria Analítica em nível de ensino médio e de nível universitário, ou seja, em nenhum momento são abordados nessas disciplinas conceitos como diferenciabilidade de função, topologia, equações diferenciais, todos fundamentais no trabalho dentro das linhas de pesquisa “Geometria Diferencial” e “Sistemas Dinâmicos”.

A ementa da disciplina “Resolução de Problemas” apresenta como um de seus tópicos “Problemas de Geometria”, ou seja, o tópico é genérico, o que nos induz a relacioná-lo às referidas linhas de pesquisa, mas, ao nos reportarmos a sua bibliografia novamente não o situam nas Linhas de Pesquisa "Geometria Diferencial" e "Sistemas Dinâmicos".

5.4.4 A área de concentração Matemática Aplicada e suas respetivas linhas de pesquisa e disciplinas

A área de concentração "Matemática Aplicada", que é vinculada às disciplinas "Matemática e Atualidade", "Modelagem Matemática", "Recursos Computacionais no Ensino de Matemática" e "Resolução de Problemas", é delimitada no projeto acadêmico do PROFMAT por meio das linhas de pesquisa "Otimização" e "Análise Numérica".

A linha de pesquisa "Otimização" é apresentada a partir da seguinte descrição: "estudo de métodos computacionais ou teóricos para encontrar valores e pontos extremos de funcionais, sujeitos a restrições", enquanto a linha "Análise Numérica" é descrita como o "estudo de métodos de aproximação de problemas com variáveis contínuas por processos discretos".

Ao nos reportarmos às ementas e bibliografias das disciplinas "Matemática e Atualidade", "Modelagem Matemática", "Recursos Computacionais no Ensino de Matemática" e "Resolução de Problemas", a primeira observação suscitada refere-se aos textos adotados na descrição das suas ementas. Nestes não são especificados os conteúdos matemáticos a serem abordados nessas disciplinas, o que compromete sua associação com as linhas de pesquisa vinculadas, no projeto acadêmico do PROFMAT, à área de concentração "Matemática Aplicada".

Ao levarmos em consideração essas ementas verificamos, assim, que em nenhum momento elas se reportam aos conhecimentos veiculados pelas linhas de pesquisa "Otimização" e "Análise Numérica", especialmente se levarmos em consideração a discussão que apresentamos na seção 2.3 deste capítulo.

5.4.5 A área de concentração Ensino de Matemática e suas respetivas linhas de pesquisa e disciplinas

A área de concentração "Ensino de Matemática" é vinculada às seguintes disciplinas: "Números e Conjuntos", "História da Matemática", "Resolução de Problemas" e "Recursos Computacionais no Ensino de Matemática". Esta área de concentração é delimitada pelas linhas de pesquisa "Ensino Básico de Matemática" e "Ensino Universitário de Matemática", que são apresentadas, respectivamente, por meio das seguintes descrições, “Métodos e processos no ensino/aprendizagem de matemática para crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental e médio” e “Métodos e processos de ensino/aprendizagem para jovens adultos no contexto do ensino universitário”.

No que concerne à linha de pesquisa “Ensino Universitário de Matemática”, destacamos o fato de ela não se configurar como objeto da formação dos professores que são o público alvo do PROFMAT, os professores de Matemática do ensino fundamental (anos finais) e do ensino médio. Já em relação à linha “Ensino Básico de Matemática”, destacamos o fato de ela não deixar claro seu objetivo, ou seja, o que ela objetiva estudar: 1) métodos e processos que favoreçam o ensino e/ou a aprendizagem da matemática por crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental (anos finais) e médio; ou 2) métodos e processos que estão presentes no ensino e na aprendizagem da matemática por crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental (anos finais) e médio; ou ainda 3) métodos e processos intrínsecos à matemática e que figuram no ensino e na aprendizagem da matemática por crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental (anos finais) e médio. Os problemas que apontamos dificultam consideravelmente a análise da relação destas com as disciplinas que são vinculadas a ela no projeto acadêmico do PROFMAT, porque não estão claros os objetivos das linhas.

Contudo, se fixarmos uma das interpretações possíveis para “Ensino Básico de Matemática” como objetivando estudar métodos e processos que favoreçam o ensino e a aprendizagem da matemática por crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental e médio e ao recorrermos à ementa da disciplina “Números e Conjuntos”, verificamos que ela elenca um conjunto de conteúdos matemáticos, mas em nenhum momento reporta-se aos termos “métodos de ensino”, “processos de ensino”, “crianças” ou “adolescentes” – a saber a ementa é descrita da seguinte forma: Conjuntos, Números naturais, Números Cardinais, Números reais, Funções afins, Funções Quadráticas, Funções Polinomiais, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Trigonométricas – como se sua abordagem de cada um desses temas na escola não tivesse que levar em consideração as características dos sujeitos aos quais se deve ensinar esses temas e o nível de ensino em que estes se encontram.

Os conteúdos elencados na ementa da disciplina “Números e Conjuntos” estão presentes tanto no currículo escolar quanto no da Licenciatura em Matemática. Nesta conjuntura, somos tentados a relacioná-la de imediato com a referida linha, uma vez que elenca conteúdos pertencentes ao currículo do ensino fundamental e do ensino médio. Entretanto, ao ser consultada a bibliografia, verifica-se que a abordagem nela indicada é estritamente matemática e muitas vezes desvinculada do ensino destes conteúdos na escola. Tome-se, como exemplo, a abordagem dada aos Números Naturais no livro *A matemática do Ensino Médio*, volume 1, de autoria de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, editado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Nesse livro, Lima *et al.* (1998, p. 30) expõem que “N é um conjunto, cujos elementos são chamados números naturais. A essência da caracterização de N reside na palavra ‘sucessor’. Intuitivamente, quando n, n’ϵ N, dizer que n’ é o sucessor de n significa que n’ vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n’”. Os autores discorrem ainda que essa explicação, que substitui simplesmente “sucessor” por “logo depois”, não se configura como uma definição. Na sequência, discorrem que “O termo primitivo ‘sucessor’ não é definido explicitamente. Seu uso e propriedades são regidos por algumas regras”, que são os Axiomas de Peano. Após apresentarem os referidos Axiomas, os autores argumentam que “tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas” (LIMA *et al.*, 1998, p. 30).

Os autores discorrem ainda que “um engenhoso processo, chamado *sistema de numeração decimal*, permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9” (LIMA *et al.*, 1998, p. 30, grifo dos autores). Lima *et al.* (1998, p. 30-31) argumentam que “[...] os primeiros números naturais têm nomes: o sucessor do número um chama-se ‘dois’, o sucessor de dois chama-se ‘três’, etc. A partir de um certo ponto, esses nomes tornam-se nomes muito complicados, sendo preferível abrir mão deles e designar os grandes números por sua representação decimal”.

Entretanto, em nenhum momento os autores explicitam se e como os Axiomas de Peano podem ser abordados no ensino dos Números Naturais no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Os autores também não discutem como os números naturais superiores ao 9 são formados no sistema de numeração decimal e nem como isso se reflete no processo de ensinar esse conteúdo na escola, ou seja, os autores nem sequer explicitam o significado matemático da expressão "sistema de numeração decimal". Essa explicitação é fundamental, especialmente porque o entendimento das características dos números naturais pelos alunos da escola (ensino fundamental) passa pelo entendimento das propriedades do sistema de numeração decimal, propriedades que são também fundamentais para o entendimento dos processos intrínsecos às operações e aos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão.

Na abordagem dada por Lima *et al.* (1998), as operações de subtração e divisão não são definidas para os números naturais, somente a adição e a multiplicação, o que se dá da seguinte forma:

"Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a adição, que aos números n, p $\in$ N faz corresponder a soma n+p e a multiplicação, que lhes associa o produto np" (LIMA *et al.*, 1998, p. 33).

Sendo que "a soma n + p é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Em particular, n+1 é o sucessor de n, n+2 é o sucessor do sucessor de n+1, etc. Por exemplo, tem-se 2 + 2 = 4 simplesmente porque 4 é o sucessor do sucessor de 2 (LIMA *et al.*, 1998, p. 33)". Já o produto é definido da seguinte forma "põe-se n.1=1 por definição e, quando p$\neq$1, np é a soma de p parcelas iguais a n" (LIMA *et al.*, 1998, p. 33). Na sequência, os autores definem as operações fundamentais (adição e multiplicação) por meio da indução matemática.

Os autores não explicitam como abordar as definições que apresentaram para as operações de adição e multiplicação no ambiente escolar e muito menos as relacionam com as operações de subtração e divisão. Além disso, em nenhum momento os autores relacionam essas operações com os algoritmos historicamente abordados na escola para realizar essas operações, ou seja, os autores fazem uma abordagem estritamente matemática e desvinculada das atividades do professor no ambiente escolar.

No que concerne à disciplina "Recursos Computacionais no Ensino de Matemática", sua ementa é bastante próxima do texto que fixamos para a linha de "Ensino Básico de Matemática" à medida que se propõe: a apresentar e discutir programas computacionais para o ensino de matemática em ambientes de sala de aula e de laboratório didático; *Softwares* livres; a discutir o planejamento de aulas nas escolas fundamental e média em ambiente informatizado e uso de calculadoras no ensino de matemática; a abordar a pesquisa eletrônica, a coleta e a disponibilização de material didático na rede, os processadores de texto e hipertexto, as planilhas eletrônicas, os pacotes estatísticos, o banco de dados, além de abordar ambientes gráficos, ambientes de geometria dinâmica, sistemas de computação simbólica, critérios e instrumentos para avaliação de softwares educativos e o ensino a distância, em modalidades síncrona e assíncrona.

Já a disciplina “História da Matemática” é apresentada por meio de uma sequência de conteúdos específicos da história da matemática como área de pesquisa e não como metodologia de ensino. Esses conteúdos são: Origem da ideia de número e a escrita primitiva dos mesmos; sistemas de numeração; A Geometria no Egito, na Babilônia e na Grécia; O nascimento do método dedutivo: Tales, Pitágoras e Euclides; A Matemática no Renascimento: as equações do terceiro e do quarto graus; Cardano, Tartaglia, Bombelli e o surgimento da Álgebra; Descartes e Fermat: uma Matemática nova; Newton, Leibniz e o Cálculo; Estudo das raízes históricas dos conceitos básicos: equação do segundo grau na Babilônia, trigonometria na Grécia, números complexos com Bombelli e depois com Gauss, a Geometria dos Elementos; Os logaritmos com Neper e Briggs; As cônicas com Apolônio; Números complexos com Gauss, Euler e Cauchy; Cálculo com Newton.

Conforme se verifica, em nenhum momento são veiculados nessa ementa os termos “métodos de ensino”, “processos de ensino”, “crianças” ou “adolescentes”. Ao nos reportarmos aos quatro compêndios indicados como referências para a disciplina, todos são destinadas ao estudo da história da matemática a partir de uma perspectiva narrativa, que é descrita por D’Ambrósio (1999, p. 79) como “[...]a narrativa de fatos, datas e nomes associados à geração, à organização intelectual e social e à difusão do conhecimento -- no nosso caso conhecimento matemático -- através das várias culturas ao longo da evolução da humanidade”. Ou seja, essas bibliografias não são destinadas ao estudo da história matemática a partir de uma perspectiva metodológica que vincule a história da matemática à prática do professor. Algumas perspectivas metodológicas elaboradas a partir da utilização da história da matemática no ambiente de sala de aula são discutidas, por exemplo, por Miguel e Miorim (2004), a saber: 1) na discussão de problemas de natureza histórica; 2) na apresentação de diferentes métodos históricos; 3) como elemento orientador da sequência de trabalho com um tema específico.

5.4.6 A área de concentração Álgebra e suas respetivas linhas de pesquisa e disciplinas

A área de concentração “Álgebra” é vinculada às disciplinas “Aritmética I”, “Aritmética II”, “Equações Algébricas e Noções de Cálculo”, “Matemática Discreta”, “Introdução à Álgebra Linear” e “Resolução de Problemas”. Além disso, conforme já discorremos anteriormente, é delimitada pelas linhas de pesquisa "Geometria Algébrica" e "Teoria dos Números".

A linha de pesquisa "Teoria dos Números" é descrita como o "estudo das propriedades dos números inteiros" e a linha de pesquisa "Geometria Algébrica" como o "estudo das propriedades de espaços definidos por sistemas de equações polinomiais".

A ementa da disciplina "Aritmética I" apresenta uma forte vinculação com a linha de pesquisa "Teoria dos Números", especialmente se considerarmos a discussão que apresentamos na seção 2.5 deste capítulo. Essa afirmação é válida também para a disciplina de Aritmética II.

No que concerne à disciplina "Equações Algébricas e Noções de Cálculo", ela particiona-se, conforme o próprio título explicita, entre conteúdos comuns a disciplinas pertencentes a cursos universitários da área de análise matemática (cálculo e variáveis complexas, por exemplo) e álgebra (estruturas algébricas). Contudo não está articulada intimamente às linhas de pesquisa "Teoria dos Números" e "Geometria Algébrica", conforme recomenda o documento Capes (2012).

Em relação à disciplina "Matemática Discreta", seu ementário apresenta um emaranhado de conteúdos pertencentes a distintas áreas[92]: alguns comuns à área de "Matemática Aplicada" - especificamente à subárea Matemática Discreta e Combinatória, como é o caso do conteúdo "Princípios Básicos da Combinatória" e "Teorema de Ramsey" - outros pertencentes à área do Conhecimento "Probabilidade e Estatística", especificamente à área de Probabilidade, como é o caso dos conteúdos "conceitos elementares de probabilidade" e "probabilidade condicional".

Já a ementa da disciplina "Introdução à álgebra linear" comporta, conforme o próprio nome evidencia, conteúdos que comumente são contemplados por disciplinas de cursos em nível universitário cujo objeto de estudo é a álgebra linear. Contudo, se considerarmos a descrição que apresentamos na seção 2.5 para as linhas de pesquisa "Geometria Algébrica" e "Teoria dos Números" e a recomendação feita pelo documento Capes (2012), verificamos que não existe uma íntima articulação entre a disciplina e as referidas linhas de pesquisa.

---

[92]De acordo com a Tabela das Áreas do Conhecimento proposta pelo CNPq. Disponível em: http://www.cnpq.br/documents/10157/186158/TabeladeAreasdoConhecimento.pdf. Acesso em: 17 fev. 2015.

5.5 DO CORPO DOCENTE PERMANENTE DO PROFMAT

O projeto acadêmico do PROFMAT apresenta como integrantes do corpo docente permanente do programa os(as) seguintes professores(as): Abramo Hefez; Afonso Henriques; Amauri Da Silva Barros; Antonio Caminha Muniz Neto; Bianca Morelli Rodolfo Casalvara; Carlos Gustavo Tamm De Araujo Moreira; Carlos Henrique Dos Santos; Celso Melchiades Doria; Claudianor Oliveira Alves; Cristiano Torezzan; Daniel Cordeiro De Morais Filho; Daniel Marinho Pellegrino; Doherty Andrade; Ediel Azevêdo Guerra; Elisabete Sousa Freitas; Elon Lages Lima; Enaldo Silva Vergasta; Fábio Dos Santos; Flávia Morgana De Oliveira Jacinto; Flavia Zechineli Fernandes; Francisco Roberto Pinto Mattos; Ivan De Azevedo Tribuzy; João Eloir Strapasson; João Marcos Bezerra Do Ó; João Peres Vieira; João Xavier Da Cruz Neto; Jorge Herbert Soares De Lira; José Barbosa Gomes; Lilian Akemi Kato; Marco Antonio Nogueira Fernandes; Maria Inez Cardoso Gonçalves; Mário Olivero Marques Da Silva; Marta Cilene Gadotti; Maxwell Mariano De Barros; Milton Da Costa Lopes Filho; Nivaldo Costa Muniz; Olimpio Hiroshi Miyagaki; Patrícia Nunes Da Silva; Paulo Alexandre Araújo Sousa; Paulo Cezar Carvalho; Paulo De Souza Rabelo; Paulo Ricardo Da Silva; Pedro Luiz Aparecido Malagutti; Rúbia Barcelos Amaral Zulatto; Rubia Mara De Oliveira Santos(engenharia elétrica); Sebastião Marcos Antunes Firmo; Sérgio Luiz Silva; Sérgio Mota Alves; Suzinei Aparecida Siqueira Marconato; Tatiana Marins Roque; Vanderlei Minori Horita; Victor Augusto Giraldo; Yuan Jinyun (CAPES, 2010).

Em relação aos docentes do corpo permanente, o projeto apresenta uma descrição da titulação, experiência internacional de formação, vínculo institucional, número de orientações e produção acadêmica de cada um dos professores supracitados.

De acordo com o Currículo Lattes dos 53 professores mencionados no projeto acadêmico do PROFMAT, com exceção de oito, todos os demais possuem o título de doutorado na área de Matemática (pura ou aplicada). Dos oito que não possuem doutorado em matemática, quatro possuem o título de doutor em “Engenharia de Sistemas e Computação”, um em “Operations Research”, um em “Engenharia da Produção”, um em “Engenharia Elétrica” e um em “Educação Matemática”. A titulação do corpo docente permanente do PROFMAT está associada fortemente à *matemática acadêmica*, pois aproximadamente 85% do corpo docente possui doutorado em matemática.

O documento em vigor que “define, para efeitos de enquadramento nos programas e cursos de pós-graduação, as categorias de docentes dos programas desse nível de ensino" é a Portaria Capes nº 191, de 4 de outubro de 2011[93]. Essa Portaria define o corpo docente permanente como "o núcleo principal de docentes do programa" e prevê por meio do Art. 2º que:

> Integram a categoria de docentes permanentes os docentes assim enquadrados, declarados e relatados anualmente pelo programa, e que atendam a todos os seguintes pré-requisitos: I - desenvolvam atividades de ensino na pós-graduação e/ou graduação; II - participem de projetos de pesquisa do programa; III - orientem alunos de mestrado ou doutorado do programa, sendo devidamente credenciados como orientador pelo programa de pós-graduação e pela instância para esse fim considerada competente pela instituição; IV - tenham vínculo funcional-administrativo com a instituição ou, em caráter excepcional, consideradas as especificidades de áreas, instituições e regiões, se enquadrem em uma das seguintes condições especiais: a) quando recebam bolsa de fixação de docentes ou pesquisadores de agências federais ou estaduais de fomento; b) quando, na qualidade de professor ou pesquisador aposentado, tenham firmado com a instituição termo de compromisso de participação como docente do programa; c) quando tenham sido cedidos, por acordo formal, para atuar como docente do programa. (CAPES, 2011)

No ano da aprovação do projeto acadêmico do PROFMAT, estavam em vigor as Portarias Capes nº 68, de 03 de agosto de 2004 e Capes nº 03 de 07 de janeiro de 2010, que previam, por meio do artigo Art. 2º**,** que**:**

> Integram a categoria de ***docentes permanentes*** os docentes assim enquadrados pelo programa e que atendam a todos os seguintes pré-requisitos: **I –** desenvolvam atividades de ensino – na pós-graduação e/ou graduação; **II** – participem de projeto de pesquisa do programa; **III – orientem** alunos de mestrado ou doutorado do programa, sendo devidamente credenciados como orientador pela instância para esse fim considerada competente pela instituição; **IV** – tenham vínculo funcional com a instituição ou, em caráter excepcional, consideradas as especificidades de áreas ou instituições, se enquadrem em uma das seguintes condições especiais: **a)** recebam bolsa de fixação de docentes ou pesquisadores de agências federais ou estaduais de fomento; **b)** na qualidade de professor ou pesquisador aposentado, tenham firmado com a instituição termo de compromisso de participação como docente do programa; **c)** tenham sido cedidos, por convênio formal, para atuar como docente do programa. **V** – mantenham regime de dedicação integral à instituição – caracterizada pela prestação de quarenta horas semanais de trabalho – admitindo-se que parte não majoritária desses docentes tenha regime de dedicação parcial, dentro do disciplinado pelo § 2o deste artigo. (CAPES, 2004, grifos contantes no documento)

---

[93]Disponível em: https://www.capes.gov.br/images/stories/download/legislacao/PORTARIA-N-191-DE-4-DE-OUTUBRO-DE-2011.pdf. Acesso em: 10 fev. 2014.

Tendo em vista as regulamentações da Capes, não está claro, tanto no projeto quanto na implementação do currículo do curso, qual é o papel do corpo docente permanente na estrutura do PROFMAT. Por exemplo, ao levarmos em consideração o Art. 2º, o requisito II da supracitada portaria, que prevê a necessidade participação dos professores em projetos de pesquisa do programa, é possível verificar que uma parcela dos professores citados na lista do corpo docente permanente não figura na descrição dos participantes dos projetos de pesquisa vinculados ao PROFMAT pelo próprio projeto acadêmico, ferindo a regulamentação vigente. Conforme se observa na descrição dos projetos acadêmicos vinculados ao PROFMAT pelo projeto acadêmico do curso:

Título do projeto: INCTMat - Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira Linha de pesquisa: Ensino Universitário de Matemática Descrição do projeto: O INCTMat tem por finalidade mobilizar a comunidade matemática brasileira com a proposta de promover vigorosamente a expansão da efetividade, da integração e do alcance científico da área no País, como também a de promover sua maior interação com a América Latina, com foco na América do Sul, onde ocupa hoje destacada posição de liderança. Docentes: Abramo Hefez; Amauri da Silva Barros; Antonio Caminha Muniz Neto; Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira; Claudianor Oliveira Alves; Daniel Cordeiro de Morais Filho; Daniel Marinho Pellegrino; Ediel Azevêdo Guerra; Elon Lages Lima; Enaldo Silva Vergasta; Ivan de Azevedo Tribuzy; João Marcos Bezerra do Ó; João Xavier da Cruz Neto; Jorge Herbert Soares de Lira; Maxwell Mariano de Barros; Nivaldo Costa Muniz; Olimpio Hiroshi Miyagaki; Paulo Cezar Carvalho; Paulo de Souza Rabelo; Paulo Ricardo da Silva; Sebastião Marcos Antunes Firmo; Vanderlei Minori Horita; Yuan Jinyun.
Título do projeto: OBMEP Linha de pesquisa: Ensino Básico de Matemática Descrição do projeto: A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP) é um projeto que vem criando um ambiente

estimulante para o estudo da Matemática entre alunos e professores de todo o País. Voltada para a escola pública, seus estudantes e professores, a OBMEP tem o compromisso de afirmar a excelência como valor maior no ensino público. Suas atividades vêm mostrando a importância da Matemática para o futuro dos jovens e para o desenvolvimento do Brasil. Dentre as realizações da OBMEP destacam-se: a produção e distribuição de material didático de qualidade, também disponível neste site; o Estágio dos Professores Premiados, um momento de reconhecimento à competência e dedicação desses profissionais em um ambiente de estudo estimulante e enriquecedor. Realizada nas edições 2005-2006-2007-2008 da OBMEP, a atividade passa por uma reformulação e um novo modelo deverá ser implementado nos próximos anos; o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), para os medalhistas da OBMEP estudarem Matemática por um ano, com bolsa de estudos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq); o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), para medalhistas da OBMEP que estejam cursando graduação com bolsas do CNPq (IC) e Capes (Mestrado); a Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI). Direcionada a aproximadamente 30 medalhistas de ouro selecionados pela excepcionalidade de seus talentos para a matemática, esta atividade visa prepará-los para participação de competições internacionais na área; a mobilização de Coordenadores Regionais para a realização de atividades como seminários com professores, cerimônias de premiação e encontros com diretores de escolas; os encontros dos Medalhistas de Ouro da OBMEP, uma semana com muita Matemática e diversão, e uma ótima oportunidade para fazer amigos que também gostam de Matemática. Com sua primeira edição em 2005, a OBMEP vem crescendo a cada ano. Em 2009, mais de 19 milhões de alunos se inscreveram na competição e cerca de 99% dos municípios brasileiros estiveram representados.

Docentes: Amauri da Silva Barros; Celso Melchiades Doria; Daniel Cordeiro de Morais Filho; Ediel Azevêdo Guerra; Elisabete Sousa Freitas; Enaldo Silva Vergasta; Flávia Morgana de Oliveira Jacinto; João Xavier da Cruz Neto; Maxwell Mariano de Barros; Nivaldo Costa Muniz; Paulo Cezar Carvalho; Paulo de Souza Rabelo; Vanderlei Minori Horita; Yuan Jinyun

Nome do projeto: PAPMEM

Linha de pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Descrição do projeto: O Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio é uma realização do Instituto do Milênio Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira (IM-AGIMB), levada a efeito com a participação do IMPA, da RNP, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e, sobretudo da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP). No período 2002-2008 participaram deste programa do IM-AGIMB, 22.957 professores do ensino médio, como mostra a figura abaixo. Este programa passa agora a fazer parte do Projeto Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática (INCTMat). Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira. A metodologia empregada é basicamente a seguinte: cada etapa do programa dura uma semana, com atividades diárias durante oito horas, perfazendo assim 40 horas de trabalho ao todo. A equipe de professores é formada por Elon Lages Lima (coordenador), Paulo Cezar P. Carvalho, Eduardo Wagner e Luiz Henrique de Figueiredo. Durante cinco manhãs, esses professores se revezam em 20 horas de aula, originadas no IMPA e transmitidas via Internet para os pontos de presença da RNP localizados nos vários Estados. Aí, os grupos locais assistem às aulas nos telões, tendo oportunidade de formular, via e-mail, questões, contando ainda com a presença da equipe local, formada por professores universitários previamente selecionados pelo IMPA. As atividades da tarde são divididas em duas partes. Na primeira metade, os participantes, separados em grupos de 10 ou 12, trabalham na resolução de problemas que lhes são propostos logo após as aulas da manhã. Na segunda metade, todos se reúnem no auditório para a apresentação das soluções, que são acompanhadas de discussões animadas, sob a supervisão dos professores locais. O material das aulas consta de textos organizados pelos professores Elon Lima, Paulo Cezar Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Morgado. Esses textos são previamente distribuídos gratuitamente aos participantes que recebem ainda, no último dia, a lista completa das soluções dos problemas propostos. Além disso, todas as aulas são gravadas e ficam disponibilizadas no sítio do IMPA e podem ser copiadas gratuitamente pelos interessados sob forma de DVD. Esses DVDs vêm sendo utilizados em diversas escolas do País, em atividades de treinamento de professores ou

apenas para estudos particulares. Docentes: Amauri da Silva Barros; Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira; Daniel Cordeiro de Morais Filho; Ediel Azevêdo Guerra; Elon Lages Lima; Enaldo Silva Vergasta; Ivan de Azevedo Tribuzy; João Xavier da Cruz Neto; Marco Antonio Nogueira Fernandes; Paulo Cezar Carvalho.
Título do projeto: Projeto Klein em Língua Portuguesa Linha de pesquisa: Ensino Básico de Matemática Descrição do projeto: O Projeto Klein em Língua Portuguesa vai coordenar e organizar a contribuição do Brasil ao Klein Project for the 21st Century (http://www.kleinproject.org/), além de articular a colaboração nesta área com pesquisadores, professores e educadores dos demais países de língua portuguesa, para ampliar de forma substancial o alcance dos resultados. Outro objetivo central do projeto é a produção de material bibliográfico em língua portuguesa que seja de efetiva utilidade para o ensino da matemática em todos os níveis. O público alvo do projeto será múltiplo: professores dos cursos universitários de licenciatura em Matemática; professores em exercício no ensino fundamental e médio; pesquisadores de Educação Matemática; pesquisadores dos cursos de pós-graduação em Ensino de Matemática; alunos de cursos de Licenciatura. Os resultados deverão ser acessíveis a todos que têm interesse na Matemática, especialmente a todos aqueles que são responsáveis por transmitir a Matemática para novos aprendizes. Docentes: Abramo Hefez; Antonio Caminha Muniz Neto; Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira; Claudianor Oliveira Alves; Daniel Cordeiro de Morais Filho; Daniel Marinho Pellegrino; Elon Lages Lima; Enaldo Silva Vergasta; João Marcos Bezerra do Ó; João Peres Vieira; Milton da Costa Lopes Filho; Paulo Cezar Carvalho; Tatiana Marins Roque; Vanderlei Minori Horita; Victor Augusto Giraldo.

Ainda em relação ao corpo docente permanente, verifica-se que este alterou-se na medida em que foram inseridos os professores que compõem o corpo docente do programa pertencentes a cada polo do PROFMAT. Assim, de acordo com os dados constantes na “Ficha de Avaliação” (trienal 2013), este programa conta em seu corpo docente com “cerca de 700 professores” não subdivididos entre docentes permanentes e colaboradores, como é comum em programas de pós-graduação, conforme pode ser verificado nas fichas de avaliação de outros mestrados profissionais da área de Matemática, como é o caso do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional da Unicamp[94] e do Mestrado Profissional em Matemática Universitária da Unesp[95], câmpus de Rio Claro.

5.6 DAS “INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES”

Em relação à Estrutura da Rede de composição do PROFMAT, está previsto no projeto que a coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática pela SBM seria realizada mediante um Conselho Gestor, uma Comissão Acadêmica e Comissões Acadêmicas Locais em cada Instituição Associada. A estruturação da rede de Instituições Associadas seria regulada pelo Regimento do programa. Essa estruturação alterou-se na medida em que foram inseridas no organograma os Coordenadores Regionais.

O Conselho Gestor era inicialmente composto pelos seguintes membros: Celso Costa (UFF e UAB/CAPES); Elon Lages Lima (IMPA, coordenador acadêmico); Jacob Palis (IMPA, personalidade da comunidade); Luiz Davidovich (UFRJ, personalidade da comunidade); Marcelo Viana (IMPA, representando a SBM). Entretanto, de acordo com o site do PROFMAT[96], o Conselho Gestor é atualmente composto por: Marcelo Viana (Presidente), Celso Costa (UFF - representante da CAPES), Hilário Alencar (UFAL-Coordenador Acadêmico), Jacob Palis (IMPA - Representante da Comunidade) e Luiz Davidovich (UFRJ - Representante da Comunidade)

No tocante à organização do programa, o projeto previa ainda que “A SBM, na sua qualidade de coordenadora da rede de Instituições de Ensino Superior integradas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática, estabelecerá mecanismos de uniformização da qualidade de todo o processo pedagógico”, dentre os quais figuram: o Exame Nacional de Acesso; o Exame Nacional de Qualificação presencial ao final do curso; a formulação das avaliações presenciais de algumas disciplinas e a Produção de

---

[94]Universidade Estadual de Campinas
[95]Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
[96]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/organizacao/coordenacao. Acesso em: 24 jul. 2014.

material didático impresso e virtual a ser "disponibilizado gratuitamente ao estudante" (CAPES, 2010, p. 80).

> Para tal, a SBM com o apoio da rede de Instituições Associadas integrantes do Programa manterá uma equipe multidisciplinar, pedagógica e técnica de alto nível para auxiliar na elaboração de material didático, no acompanhamento tutorial nas formas presencial e a distância e no processo de avaliação. O material didático estará disponível em diferentes formatos e suportes, garantindo múltiplas alternativas de acesso à informação. Dessa forma, os conteúdos básicos de materiais impressos e CD-ROM serão postos à disposição dos alunos nos polos da UAB e nos câmpus das instituições, enquanto que os materiais didáticos virtuais, como vídeos, simuladores, aulas virtuais, ficarão disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem. (CAPES, 2010, p. 80-81)

O Exame Nacional de acesso ocorre anualmente e sua realização, cronograma e demais disposições são tornados públicos por meio de edital publicado pelo Presidente do Conselho Gestor do PROFMAT. De acordo com a RETIFICAÇÃO II DO EDITAL Nº 06, PUBLICADO EM DE 15 DE JULHO DE 2014[97], o objetivo do Exame Nacional de Acesso é "aferir o domínio matemático necessário para cursar as disciplinas que compõem o PROFMAT, servindo como processo seletivo dos candidatos ao ingresso no PROFMAT". Os Exames Nacionais de Acesso de 2011, 2012, 2013 e 2014 tinham o formato de prova escrita, sendo as provas dos três primeiros anos compostas por 35 questões de múltipla escolha e 3 discursivas e, a de 2014 composta por 40 questões de múltipla escolha.

O objetivo do Exame Nacional de Acesso do PROFMAT evoca alguns questionamentos: se, para ingressar no PROFMAT, um curso de formação continuada de professores de Matemática que objetiva fornecer aos professores a "*formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica*" (CAPES, 2010, p. 09, grifo nosso) o professor precisa comprovar ter o conhecimento matemático necessário para cursar as disciplinas, o que se pretende fazer com os professores que não possuem o domínio da matemática exigida para ingresso no PROFMAT e que, por isso mesmo, seriam os que mais teriam a lucrar com o programa? Além disso, como poderíamos classificar/adjetivar os conhecimentos dos professores que não possuem o conhecimento matemático necessário para participar de uma formação continuada que fornecerá "*a matemática adequada para o exercício*

---

[97] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/Edital_06_Exame_Nacional_Acesso_2015_RETIFICAO_II.pdf Acesso em: 24 jul. 2014.

profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica" (CAPES, 2010, p. 09, grifo nosso)? Qual seria a solução para esses professores, uma vez que eles não possuem condições matemáticas nem para acessar a formação "*matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino da matemática na escola básica*" (CAPES, 2010, p. 09, grifo nosso)? Será que os professores de Matemática da escola básica precisam fazer um curso preparatório[98] para ingressarem no curso de formação que fornecerá a "*matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino da matemática na escola básica*" (CAPES, 2010, p. 09, grifo nosso)? Como esses professores podem atuar na escola básica se não possuem condições de participar de uma formação continuada que fornecerá a "*matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino da matemática na escola básica*" (CAPES, 2010, p. 09, grifo nosso)?

Esses questionamentos nos remetem novamente à formação inicial dos professores para perguntar "qual foi a matemática vista por esses professores na formação inicial (Licenciatura em Matemática) que não os capacitou nem para poder cursar uma formação continuada que fornecerá a "*matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino da matemática na escola básica*" (CAPES, 2010, p. 09, grifo nosso)?

Diferentemente do que estava previsto no Projeto Acadêmico do PROFMAT, o Regimento do PROFMAT[99], datado de 07 de abril de 2014, dispõe que está apto a "prestar o Exame de Qualificação o discente que tenha sido aprovado em todas as Disciplinas Básicas". E, ainda de acordo com o Artigo 23 deste mesmo regimento, "O Exame de Qualificação consiste numa única avaliação escrita, ofertada duas vezes por ano, versando sobre o conteúdo das Disciplinas Básicas", sendo estas entendidas como as de cunho obrigatório e que são ministradas nos dois primeiros semestres do curso. Atualmente essas disciplinas são: MA 11 – Números e Funções Reais, MA 12 - Matemática Discreta, MA 13 – Geometria e MA 14 – Aritmética. O item "formulação das avaliações presenciais de algumas disciplinas" também relaciona-se com as obrigatórias que apresentamos na frase anterior.

---

[98] O site é intitulado "Vencer no PROFMAT". Disponível em: http://www.vencernoprofmat.com.br/Index.php. Acesso em: 22 jan. 2015. Ele divulga a realização de *Workshops* destinados à preparação de estudantes para a realização do exame nacional de acesso ao PROFMAT e de acordo com o referido site são "uma oportunidade para os colegas candidatos ao PROFMAT 2015 prepararem-se de forma ativa para o exame de acesso".

[99]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/regimento. Acesso em: 24 jul. 2014.

O exame de qualificação na modalidade de “avaliação escrita” versando sobre disciplinas cursadas pelo pós-graduando no decorrer do curso é comum em programas de pós-graduação em Matemática e diferencia-se substancialmente da modalidade adotada, por exemplo, em programas das áreas de ensino e educação, onde este exame versa sobre os resultados parciais obtidos pelo pós-graduando em sua pesquisa que originará a dissertação.

As avaliações para essas disciplinas são elaboradas pela Gestão Nacional do PROFMAT e corrigidas a partir de gabaritos que são encaminhados aos polos juntos com as provas. Essas avaliações ocorrem em datas e horários também definidos pela Comissão Acadêmica Nacional, de modo que as avaliações devem ocorrer (e ocorrem) simultaneamente em todos os polos (tornaremos a abordar a temática avaliação em análises posteriores).

Ainda no tocante ao processo de avaliação, o projeto do PROFMAT previa que:

> A avaliação de cada disciplina é parte integrante dos processos de ensino e aprendizagem e pode variar em função das orientações dos professores responsáveis pela disciplina, ou de necessidades contextuais vigentes. Para cada disciplina executada durante um semestre, o processo avaliativo deve ser composto por, no mínimo, duas avaliações presenciais (AP1 e AP2) e uma terceira avaliação presencial final (AP3), apenas para alunos que não atingiram a nota de aprovação e necessitam de uma nova chance de recuperação dos estudos. Além disso, poderão ser realizadas avaliações a distância, de acordo com o previsto no programa da disciplina. Em cada disciplina, as avaliações presenciais devem representar um peso de pelo menos 80% da avaliação da disciplina. Avaliações presenciais (AP1, AP2 e APV) - São aplicadas, basicamente, nos finais da oitava e da décima-quarta semanas do período letivo e no final da sexta semana no período de verão. Essas avaliações têm planejamento temporal rígido e são definidas no guia de cada disciplina, entregue ao aluno no início do período letivo. Realizadas nos pólos da UAB ou nos campus das IES, as avaliações presenciais são portanto realizadas em dias e horários preestabelecidos. Tais avaliações seguem o rigor próprio dos exames presenciais realizados pelas Instituições Associadas, tanto no que se refere à fiscalização, quanto à elaboração, aplicação e correção das provas. As provas presenciais devem ser elaboradas pelo docente responsável pela disciplina, nacionalmente, ou localmente conforme for o caso, e corrigidas localmente. Avaliação Presencial de Reposição (AP3) - Acontece após as avaliações presenciais AP1 e AP2 e após as avaliações a distância, e tem o objetivo de fornecer uma nova chance para o aluno que não conseguiu nota suficiente para aprovação nas avaliações anteriores. (CAPES, 2010, p. 83)

No tocante à obtenção do título de mestre o projeto previa que:

> Os requisitos para conclusão do programa e obtenção do grau de mestre são: 1. aprovação nas disciplinas do programa, conforme grade

> curricular acima. 2. aprovação no Exame Nacional de Qualificação, que será oferecido em julho e dezembro, examinando a aquisição de formação matemática consistente com os objetivos do programa, envolvendo o conteúdo das disciplinas MA 11, MA 12, MA 13 e MA 14. (CAPES, 2010, p. 83)

O Exame Nacional de Qualificação tem sido aplicado em meses diferentes dos previstos no projeto acadêmico do PROFMAT, em março e setembro. Além disso, atualmente os Requisitos para Obtenção do Grau que estão previstos no Regimento do PROFMAT são:

> Artigo 27- Para conclusão do PROFMAT, e obtenção do respectivo grau, o discente precisa: a) Ter sido aprovado em pelo menos 9 (nove) disciplinas, incluindo todas as disciplinas obrigatórias definidas no Catálogo de Disciplinas; b) Ter sido aprovado no Exame de Qualificação; c) Ter sido aprovado no Trabalho de Conclusão de Curso; d) Ter enviado a versão final do seu Trabalho de Conclusão de Curso à Comissão Acadêmica Nacional para publicação na internet; e) Satisfazer todos os requisitos da sua Instituição Associada para emissão do diploma. Parágrafo 1º - O prazo máximo para integralização do PROFMAT é definido pela Comissão Acadêmica Institucional em cada Instituição Associada, respeitadas suas normas internas. Parágrafo 2º – A Comissão Acadêmica Nacional emite certificado de cumprimento das exigências nacionais referidas nos incisos b) e d), o qual é requisito prévio para a emissão do diploma. (http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/regimento, Acesso em: 20 jun. 2014).

Nos textos "O currículo Apresentados aos Professores" e "O Currículo Avaliado" que apresentaremos a seguir neste capítulo, detalharemos a grade (disciplinas, ementas e bibliografias) que está em vigor, a "Produção de material didático impresso e virtual disponibilizado gratuitamente ao estudante" e o processo de avaliação.

O projeto previa ainda que:

> Antes de cada período letivo, o aluno receberá uma programação acadêmica do período, que detalhará a proposta das disciplinas a ser oferecidas, os recursos disponibilizados, o cronograma e local das atividades presenciais das disciplinas, os procedimentos e horários de avaliação. Esta programação acadêmica será organizada e divulgada pela Instituição Associada, em consonância com as atividades programadas de forma sincronizada para toda a rede pela Coordenação Acadêmica. (CAPES, 2010, p. 81)

Conforme previsto no projeto acadêmico do PROFMAT, os acadêmicos recebem um cronograma (nacional) para cada disciplina no qual estão previstos os conteúdos a serem nela desenvolvidos, o período[100] em que deve ser desenvolvido o conteúdo, as Referências a serem utilizadas e as datas das provas.

Abaixo, apresentaremos uma Tabela, a título de ilustração, com o cronograma previsto para a disciplina de Números e Funções Reais para o ano letivo de 2014, sendo U = Unidade (Em cada semana haverá duas unidades a serem estudadas para cada disciplina) e P = Aula Presencial.

Tabela 8: Programação das aulas presenciais da disciplina MA11 para o primeiro semestre do ano letivo de 2014.

Programação das Aulas de 2014 – Semestre 1

Turma 2014

Disciplina: MA11

Números e Funções Reais

- **Semana 24/fevereiro a 02/março**

U1 - Conjuntos: A noção de conjunto. A relação de inclusão. O complementar de um conjunto

U2 - Conjuntos: Reunião e interseção. Comentário sobre a noção de igualdade

P- Aula + oficina de problemas

- **Semana 03/março a 9/março**

U3 - Números Naturais: O conjunto dos números naturais. Destaque para o Axioma da Indução. Adição, multiplicação e ordem. Algumas demonstrações

U4 - Números Cardinais: Funções. A noção de número cardinal. Conjuntos finitos. Sobre conjuntos infinitos

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 10/março a 16/março**

U5 - Números Reais: Segmentos comensuráveis e incomensuráveis. A reta real

U6 - Números Reais: Expressões decimais

[100] O cronograma apresenta um período porque os polos possuem liberdade para deliberar o(os) dia(s) em que serão ministradas as aulas. Por exemplo, os polos que estamos acompanhando ministraram essa disciplina aos sábados, no período da manhã.

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 17/março a 23/março**

U7 - Números Reais: Desigualdades. Intervalos. Valor Absoluto
U8 - Números Reais: Sequências e progressões. Sequências monôtonas
P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 24/março a 30/março**

U9 - Funções Afins: O plano numérico $\mathbb{R}2$. A função afim. A função linear.
U10 -Funções Afins: Caracterização da função afim. Funções poligonais.
P - Revisão geral + oficina de problemas

- **Semana 31/março a 06/abril**

Preparação para a AV I
Avaliação I: 05 de abril de 2014
10h-13h horário de Brasília

- **Semana 07/abril a 13/abril**

Atividades de Revisão

- **Semana 14 /abril a 20/abril**

Atividade Especial (não haverá aula presencial)

- **Semana 21/abril a 27/abril**

U1 - Funções Quadráticas: Definição e preliminares. Um problema muito antigo. A forma canônica do trinômio.
U12 - Funções Quadráticas: O gráfico da função quadrática. Uma propriedade notável da parábola. O movimento uniformemente variado
P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 28 abril a 04/maio**

U13 - Funções Polinomiais: Funções polinomiais vs polinômios. Determinando um polinômio a partir de seus valores. Gráficos de polinômios

U14 - Funções Exponenciais e Logarítmicas: Potências de expoente racional. A função exponencial

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 05/maio a 11/maio**

U15 - Funções Exponenciais e Logarítmicas: Caracterização da função exponencial. Funções Exponenciais e progressões

U16 - Funções Exponenciais e Logarítmicas: Função inversa. Funções logarítmicas. Caracterização das funções logarítmicas

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 12/maio a 18/maio**

U17 - Funções Exponenciais e Logarítmicas: Logaritmos naturais. A função exponencial de base *e*

U18 - Funções Trigonométricas: A função de Euler e a Medida de Ângulos. As funções trigonométricas

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 19/maio a 25/maio**

U19 - Funções Trigonométricas: As fórmulas de adição

U20 - Funções Trigonométricas: A lei dos Cossenos e a lei dos Senos

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 26/maio a 01/junho**

Atividades de Revisão

P - Aula + oficina de problemas

- **Semana 02/junho a 08/junho**

Preparação para a AV II

Avaliação II: 07 de junho de 2014

10h-13h horário de Brasília

- **21/junho**

Avaliação III: 21 de junho de 2014 10h-13h horário de Brasília
Referência: • *Elon Lages Lima. Números e Funções Reais.* Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT). • Material disponível na plataforma; • Resumos; • Vídeos.

Fonte: Site do PROFMAT.

O projeto previa ainda que:

> As Instituições Associadas são responsáveis pela organização das atividades presenciais do Programa, com flexibilidade para acomodar esta organização às condições específicas dos diferentes polos de atividade do Programa. Dadas as características do programa, as atividades presenciais do programa deverão ocorrer aos sábados, e cada disciplina do curso terá pelo menos um encontro presencial a cada duas semanas. A programação acadêmica de cada período letivo deve ser acompanhada dos Guias Didáticos de cada disciplina, a ser preparado em conjunto pela Coordenação Acadêmica do programa e pelas Comissões Acadêmica Local de cada Instituição Associada. Nesse Guia o aluno encontrará orientações sobre: cada unidade e cada aula do material impresso; tempo mínimo recomendado ao estudo de cada aula; como ter contato com o professor daquela disciplina e com o seu tutor. (CAPES, 2010, p. 81)

Nos dois polos do PROFMAT que temos acompanhado, a organização das atividades presenciais é de fato gerida pela coordenação de cada polo, porém necessita estar em consonância com a Programação Nacional. Além disso, contrariamente ao que estava previsto no projeto acadêmico, nem todas as aulas presenciais são ministradas aos sábados e ocorrem semanalmente. Em consulta aos acadêmicos do PROFMAT, nos foi relatado que não foram disponibilizados os Guias Didáticos a que se refere o projeto acadêmico.

Ainda no contexto da gestão acadêmica, o projeto acadêmico do curso discorre que:

> Em qualquer sistema de ensino, seja na modalidade presencial ou a distância, a comunicação entre alunos e professores é fundamental para que a aprendizagem ocorra. Daí que a eficiência de um sistema educacional depende basicamente do sistema de comunicação que assegure esta interatividade, o que se dará na medida em que exista uma infra-estrutura de suporte para que se desenvolva uma metodologia de ensino que promova a aprendizagem ativa. Em um

> curso na modalidade semipresencial, em que o aluno está fisicamente distante do professor, importantes elementos deverão estar envolvidos para que a interação aluno/professor ocorra de fato. A tutoria se destaca como um dos principais componentes para que essa comunicação se estabeleça. (CAPES, 2010, p. 81)

No tocante à tutoria, o texto argumenta que:

> À tutoria compete o acompanhamento e a orientação acadêmica dos alunos. Cabe ao tutor, seja no que diz respeito ao conteúdo das disciplinas, a assuntos relacionados à organização e administração do curso ou a problemas de ordem pessoal. Orientar os alunos no sentido de buscar as soluções cabíveis em cada caso. Também é tarefa da tutoria promover o trabalho colaborativo e cooperativo entre alunos, estimular o estudo em grupos e procurar motivar o estudante durante o curso para evitar a evasão do sistema. (CAPES, 2010, p. 81)

Com isso, “O Programa de Mestrado Profissional em Matemática equaciona seu sistema de tutoria, provendo entre as Instituições Associadas e os polos de apoio presencial da UAB uma infraestrutura de atendimento ao aluno que consiste de duas modalidades de tutoria: Tutoria local e Tutoria a distância” (CAPES, 2010, p. 81).

> A tutoria local é realizada presencialmente nos pólos [*sic*]da UAB e nos câmpus das instituições, onde os alunos contam com pelo menos um encontro quinzenal aos sábados, com tutores e professores, para cada disciplina, com duração mínima de três horas. (CAPES, 2010, p. 81)

No desenvolvimento do projeto do PROFMAT, as atribuições do tutor passaram a ser diferentes das propostas acima e o tutor passa a ser intitulado como “Professor Assistente”, a ele cabendo a função de discutir e sanar as dúvidas (em torno do conteúdo), além de auxiliar os estudantes no processo de resolução de exercícios/atividades. É disponibilizada uma carga horária semanal de três horas para os alunos para encontrarem com o professor assistente presencialmente, sendo que cada disciplina conta com um professor assistente e cada professor assistente, desde a implementação do PROFMAT, recebe um pró-labore da Capes, por intermédio da SBM/IMPA no valor aproximado de R$ 3.200,00 por semestre trabalhado.

Existe ainda a figura do “Docente Responsável Institucional” da disciplina, ao qual é atribuída a função de ministrar a disciplina em uma carga horária presencial de três horas semanais. De acordo com as “Normas Acadêmicas do PROFMAT”[101]**:**

[101] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/normas. Acesso em: 20 jul. 2014.

> O docente Responsável Institucional, auxiliado pelo docente Assistente, é responsável pelo bom funcionamento de todas as atividades da disciplina em sua Instituição, incluindo o cumprimento integral da ementa, a assistência acadêmica aos discentes na forma presencial e no Ambiente Virtual de Aprendizagem (http://moodle.profmat-sbm.org.br), a aplicação e correção das avaliações e a atribuição do conceito final.

E, desde a implementação do PROFMAT, cada professor responsável recebe um pró-labore da Capes, por intermédio da SBM/IMPA, no valor aproximado de R$ 4.500,00 por semestre trabalhado. Considerando-se que cada disciplina do PROFMAT possui um docente Responsável Institucional e um docente assistente – ambos indicados pela Comissão Acadêmica da Instituição – podemos afirmar que é investido semestralmente em cada disciplina – de cada polo – um montante aproximado de R$ 8.000,00.

Entendemos que a apresentação dos valores financeiros é relevante na medida em que evidencia o ineditismo do programa PROFMAT, uma vez que os demais programas de mestrado profissional gestados pela Capes não recebem verba deste órgão para o pagamento dos professores que ministram aula nos referidos cursos.

Ainda de acordo com o projeto do PROFMAT,

> A tutoria a distância é realizada por meio da Internet e por telefone 0800. Cada aluno é acompanhado a distância, em cada disciplina, por tutores e docentes de reconhecida competência e que compõem o quadro docente do Programa. Esta força tarefa assegura aos estudantes, um sistema de consulta capaz de esclarecer as dúvidas em tempo real. A seleção de tutores para uma Instituição Associada será liderada pela coordenação acadêmica local. (CAPES, 2010, p. 81)

De acordo com nossas observações, a tutoria a distância ocorre por meio de fóruns na plataforma *moodle* e e-mail, as questões dos alunos sendo respondidas tanto pelo professsores assistentes quanto pelo professor responsável pela disciplina. No tocante à tutoria pelo telefone 0800, ela não está ativa, sendo o único telefone disponível para contato na página do PROFMAT o seguinte: (21) 2717-9496.

> Outro elemento de fundamental importância no projeto pedagógico da tutoria do curso é a capacitação dos tutores. Esta capacitação é realizada pelas Coordenações Acadêmicas Locais, com apoio da Coordenação Acadêmica do programa, que irá organizar e operacionalizar a capacitação dos tutores. Essa capacitação se processará em três níveis: capacitação em educação a distância; capacitação nas mídias que serão utilizadas no curso; capacitação em conteúdo, utilizando o material didático específico do curso. (CAPES, 2010, p. 81)

Ainda de acordo com nossas observações, não ocorreu e nem ocorre capacitação para os tutores.

O projeto argumenta ainda que "Finalmente deve-se enfatizar como destaque que cada disciplina do curso está sob a coordenação de um professor integrante do corpo docente do Programa. Este docente é responsável pelo controle, efetividade e qualidade dos processos de ensino e aprendizagem da disciplina" (CAPES, 2010, p. 81).

CAPÍTULO 6: O CURRÍCULO APRESENTADO AOS PROFESSORES

Este capítulo é destinado ao estudo do Currículo apresentado aos professores que ministram aula no PROFMAT por meio da ementa das disciplinas e sua respectiva bibliografia. Como assinalado no capítulo destinado à descrição da pesquisa, abordamos aqui as disciplinas “Números e Funções Reais” e “Matemática Discreta” que compõem a grade do PROFMAT e contemplam as temáticas “Números Naturais” e “Números “Racionais”. Além disso, analisaremos as alterações que essas disciplinas sofreram da passagem do currículo prescrito para o currículo apresentado aos professores.

INTRODUÇÃO

O currículo *apresentado* aos professores refere-se aos meios, elaborados por diferentes instâncias, que realizam uma interpretação do currículo prescrito traduzindo para os professores o significado e os conteúdos deste, uma vez que as prescrições presentes no Currículo Prescrito costumam ser muito genéricas e, por isso mesmo, insuficientes para orientar a atividade nas aulas (SACRISTÁN, 1998),

Segundo Sacristán (1998), uma série de razões – de ordem diversas – farão com que, de forma inevitável, o professor dependa, no desenvolvimento de seu trabalho, de elaborações dos *currículos prescritos*, realizadas fora de sua prática, mais concretas e precisas. Essas razões são:

a) a necessidade da instituição de ensino responder, por meio do currículo, a uma série de necessidades de ordem social e cultural (SACRISTÁN, 1998). No caso do PROFMAT, o currículo precisa responder à [suposta] necessidade dos professores de Matemática da educação básica brasileira: uma “*formação profissional alicerçada em sólida formação em Matemática”* (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso);

b) a competência profissional dos professores abrange a posse de conhecimentos e habilidades profissionais muito diversas (SACRISTÁN, 1998). No caso do PROFMAT, por exemplo, os professores que ministram aulas nesse programa de pós-graduação precisam conhecer, em tese, as “*as necessidades advindas tanto do trabalho* *cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional*" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso), uma vez que vão conduzir um processo de ensino que, supostamente, vai sanar essas necessidades;

c) a formação dos professores não costuma ser a mais adequada quanto ao nível e à qualidade para que estes possam abordar com autonomia o plano de sua prática em sala de aula (SACRISTÁN, 1998). Na perspectiva de relacionarmos esta afirmação de Sacristán com o contexto em que o PROFMAT está sendo realizado, mesmo tendo em vista que *nosso objetivo neste trabalho não é questionar e analisar a formação dos docentes que ministram aula no PROFMAT*, alguns questionamentos são pertinentes na medida em que este curso objetiva formar professores da escola básica. Em geral, os professores que compõem o corpo docente do PROFMAT são doutores em Matemática e possuem uma formação que os habilita a desenvolver *pesquisa em matemática.* Assim sendo, como estes profissionais vão promover um processo formativo que contemple "*as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional*" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso) se sua formação não está vinculada com as práticas de ensino da matemática da escola básica e nem com a matemática escolar? Como esses profissionais vão promover este processo formativo se a sua prática cotidiana (como professor de Matemática em nível universitário), não se vincula nem se relaciona, em geral, com a prática dos professores de Matemática da educação básica?

d) as condições nas quais se realiza o trabalho dos professores da escola básica não são, em geral, as mais adequadas para desenvolver sua iniciativa profissional (precisa atender um grande número de alunos; prender (chamar) a atenção destes; corrigir as atividades; desenvolver atividades burocráticas inerentes às instituições de ensino) (SACRISTÁN, 1998).

É por essas razões, segundo Sacristán (1998, p. 149, grifo do autor), que as "*pré-elaborações do currículo para seu ensino*" são apresentadas (fornecidas) aos professores, uma vez que "não está ao alcance das possibilidades de todos os professores planejar sua prática curricular partindo de orientações muito gerais". A aproximação das prescrições curriculares contidas no currículo oficial (currículo prescrito) dos professores é feita, de acordo com o referido autor, por meio dos "guias didáticos" e "livros-texto", ou seja, esses meios didáticos "são os autênticos responsáveis da aproximação das prescrições curriculares aos professores"

(SACRISTÁN, 1998, p. 149). Assim, o "nível de formação do professor e as condições de seu trabalho tornam a tarefa de configurar a prática a partir do currículo prescrito muito difícil, de modo que o papel mais decisivo neste sentido é desempenhado, por exemplo, pelos livros-texto" (SACRISTÁN, 1998, p. 105).

A partir do contexto apresentado, este capítulo é destinado ao estudo das bibliografias das disciplinas "Matemática Discreta" e "Números e Funções Reais" do PROFMAT, uma vez que versam sobre as temáticas "números naturais" e "números racionais", objetos de estudo nesta pesquisa.

6.1 A GRADE EM VIGÊNCIA NO PROFMAT

A grade vigente nos anos de 2014 e 2015 no PROFMAT é composta por sete disciplinas obrigatórias (Números e Funções Reais, Matemática Discreta, Geometria, Aritmética, Resolução de Problemas, Fundamentos de Cálculo, Geometria Analítica) e duas eletivas (a serem definidas a partir de um rol de 14 disciplinas, dentre as quais figura a disciplina "Trabalho de Conclusão de Curso" que, apesar de possuir o caráter eletivo, é um dos pré-requisitos para a obtenção do título de mestre pelo PROFMAT). A disposição das disciplinas no decorrer do curso respeita o formato apresentado na Tabela 9:

Tabela 9:Matriz curricular do PROFMAT.

	Verão	**1º Período**	**2º Período**
1º Ano		**MA11** Números e Funções Reais **MA12** Matemática Discreta	**MA13** Geometria **MA14** Aritmética
2º Ano	**MA21** Resolução de Problemas	**MA22** Fundamentos de Cálculo **MA XX** Eletiva I	**MA 23** Geometria Analítica **MA YY** Eletiva II
3º Ano	**MA24** Finalização do Trabalho de Conclusão de Curso / Dissertação		

Fonte: site do PROFMAT. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/matriz. Acesso em: 20 jun. 2014.

O site do PROFMAT apresenta também uma descrição[102] de todas as disciplinas do PROFMAT, composta pela ementa e bibliografia de cada uma, conforme apresentamos na sequência.

Tabela 10: Disciplinas contantes na matriz curricular do PROFMAT.

- MA 01 - TEMAS e PROBLEMAS ELEMENTARES

Esta disciplina tem como objetivo oferecer treinamento adequado para os candidatos ao Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT.

Ementa: Proporcionalidade e Porcentagem. Equações do Primeiro Grau. Equações do Segundo Grau. O Teorema de Pitágoras. Áreas. Razões Trigonométricas. Métodos de Contagem. Probabilidade. Noções de Estatística.

Referência Bibliográfica: E. Lima, P. C. Carvalho, A. Morgado e E. Wagner. **Temas e Problemas Elementares**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- MA 02 - INTRODUÇÃO AO *MOODLE*

Esta disciplina tem como objetivo instrumentalizar professores e alunos do PROFMAT no uso do ambiente *Moodle* como ambiente de aprendizagem colaborativa e no uso de suas ferramentas.

Ementa: Ambientes de aprendizagem. Ambiente *Moodle*. Criação e configuração de cursos. Disponibilização de materiais no *Moodle*. Uso das principais atividades: fórum, chat, lição, questionário e tarefas. Avaliação no *Moodle*; *plug ins* do *Moodle*: Latex e Geogebra.

Fonte: site do PROFMAT. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/matriz. Acesso em: 20 jun. 2014.

Ao se comparar a grade do PROFMAT presente no projeto acadêmico com a atual constata-se que as disciplinas “MA01: Temas e Problemas” e “MA02: Informática Básica”, apesar de figurarem no “Catálogo de Disciplinas do PROFMAT” no projeto acadêmico do PROFMAT, não fazem mais parte da matriz curricular do programa. Entretanto, o texto presente no site do PROFMAT indica que “Estas disciplinas não fazem parte da matriz curricular do programa, mas o material didático será disponibilizado aos interessados e cada Instituição Associada poderá oferecer

[102] Na descrição das disciplinas que faremos doravante adotamos a mesma formatação utilizada no site do PROFMAT.

atendimento presencial, a seu critério". Nos dois polos em que desenvolvemos esta pesquisa, no período entre os anos de 2012 e 2015 essas disciplinas não foram ministradas, além de não ter ocorrido o atendimento presencial e não ter sido disponibilizado o material didático referente a elas.

O livro LIMA, E.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Temas e Problemas Elementares*. (Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: SBM, 2013, indicado na bibliografia da disciplina MA01 que faz parte da "Coleção PROFMAT" foi utilizado na versão do "Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio" (PAPMEM) ocorrida no mês de julho de 2014[103].

As disciplinas obrigatórias e suas respectivas ementas e bibliografias, disponíveis no "Catálogo de Disciplinas do PROFMAT[104]", estão relacionadas na Tabela 11, que apresentamos na sequência:

Tabela 11: Relação de disciplinas obrigatórias do PROFMAT e suas respectivas ementas e bibliografias.

- MA 11 – NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS

Ementa: Conjuntos. Números Naturais. Números Cardinais. Números Reais. Funções Afins. Funções Quadráticas. Funções Polinomiais. Funções Exponenciais e Logarítmicas. Funções Trigonométricas.

Referência Bibliográfica: Elon Lages Lima. **Números e Funções Reais.** SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- MA 12 - MATEMÁTICA DISCRETA

Ementa: Números Naturais. O Método da Indução. Progressões. Recorrências. Matemática Financeira. Análise Combinatória. Probabilidade. Médias e Princípio das Gavetas.

Referência Bibliográfica: Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto

[103]Nesta edição, os participantes receberem uma ajuda de custo no valor de R$ 100,00 por dia de evento participado (como foram 4 dias de evento, o participante que esteve presente no evento durante todo o período recebeu uma ajuda de custo no valor de R$ 400,00), além de uma cópia do supracitado livro de forma gratuita. Este evento recebe verba ainda para pagamento de *Coffee Break* para todos os dias do evento, além de pró-labore para os professores tutores da atividade.

[104]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/matriz. Acesso em: 29 jan. 2015.

César Morgado. **Matemática Discreta.** SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- MA 13 – GEOMETRIA

Ementa: Conceitos Geométricos Básicos. Congruência de Triângulos. Lugares Geométricos. Proporcionalidade e Semelhança. Áreas de Figuras Planas. Trigonometria e Geometria. Conceitos Básicos em Geometria Espacial. Alguns Sólidos Simples. Poliedros Convexos. Volume de Sólidos.

Referência Bibliográfica: Antônio Caminha Muniz Neto. **Geometria**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- MA 14 - ARITMÉTICA

Ementa: Os Números Inteiros. Aplicações da Indução. Divisão nos Inteiros. Representação dos Números Inteiros. Algoritmo de Euclides. Aplicações do Máximo Divisor Comum. Números Primos. Números Especiais. Congruências. Os Teoremas de Euler e Wilson. Congruências Lineares e Classes Residuais. Congruências Quadráticas. Noções de Criptografia.

Referência Bibliográfica: Abramo Hefez. **Aritmética.** SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- MA 21 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ementa: Estratégias para Resolução de Problemas. Técnicas de Matemática Básica e Raciocínio Lógico: Redução ao Absurdo, Princípio da Indução, Análise de casos iniciais, Princípio da casa dos Pombos, Princípio do caso Extremo. Problemas envolvendo Números e Funções Reais: Matemática Discreta, Geometria, Aritmética e Álgebra. Análise de exames e testes: ENEM, Vestibulares, Olimpíadas e afins.

Referências Bibliográficas: K. I. Oliveira e A. J. Corcho. **Iniciação à Matemática*:* um curso com problemas e soluções**. SBM, 2010 (Coleção Olimpíada de Matemática).

C. Y. Shine. **21 Aulas de Matemática Olímpica.** SBM, 2010 (Coleção Olimpíada de Matemática).

T. Tao. **Como Resolver Problemas Matemáticos**. SBM, 2013 (Coleção Professor de Matemática).

Banco de Questões da OBMEP (*http://www.obmep.org.br/*)

Revista Eureka!, Olimpíada Brasileira de Matemática (*http://www.obm.org.br/*)

- MA 22 – FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Ementa: Sequências de Números Reais. Limite de Funções. Funções Contínuas. Derivação.Integração.

Referência Bibliográfica: G. Ávila. **Cálculo das Funções de uma Variável**, vol. 1. São Paulo: LTC, 2003.

- MA 23 - GEOMETRIA ANALÍTICA

Ementa: Coordenadas no Plano. Vetores no Plano. Equações da Reta no Plano. Posição Relativa entre Retas e Círculos e Distâncias. Elipse. Hipérbole. Parábola. Equação Geral do Segundo grau no Plano. Curvas Planas Parametrizadas. Coordenadas e Vetores no Espaço. Produto Interno e Produto Vetorial no Espaço. Produto Misto, Volume e Determinante. A Reta no Espaço. O Plano no Espaço. Sistemas de Equações Lineares com três Variáveis. Distancia e Ângulos no Espaço.

Referência Bibliográfica: Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Crissaff. **Geometria Analítica**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

Fonte: construída pela autora a partir dos dados constantes no site do PROFMAT.

As disciplinas eletivas e suas respectivas ementas e bibliografias, que estão disponíveis no "Catálogo de Disciplinas do PROFMAT[105]", estão relacionadas na Tabela 12, que apresentamos na sequência:

[105]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/matriz. Acesso em: 29 jan. 2015.

Tabela 12: Relação de disciplinas eletivas do PROFMAT e suas respectivas ementas e bibliografias.

- MA 24 – TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Disciplina dedicada a apoiar a elaboração de trabalho sobre tema específico pertinente ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenha impacto na prática didática em sala de aula. Cada trabalho é apresentado na forma de uma aula expositiva sobre o tema do projeto e de um trabalho escrito, com a opção de apresentação de produção técnica relativa ao tema.

- MA 31 – TÓPICOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Ementa: A Matemática na Babilônia e antigo Egito. A Matemática Grega até Euclides. A Matemática Grega após Euclides. Al-Khwarizmi, Cardano, Viète e Neper. A nova Matemática do Século XVII. Funções, Números Reais e Complexos.

Referência Bibliográfica: Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

- MA 32 – TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS

Ementa: Fundamentos. Potências e Congruências. Funções Multiplicativas e as Fórmulas de Inversão de Möbius. Frações Contínuas. Equações Diofantinas não Lineares.

Referência Bibliográfica: Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, Fábio Enrique Brochero Martínez e Nicolau Corção Saldanha. **Tópicos de Teoria dos Números**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

- MA 33 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Ementa: Sistemas Lineares e Matrizes. Transformação de Matrizes e Resolução deSistemas.Espaços Vetoriais. O Espaço R^3. Transformações Lineares. Transformações Lineares e Matrizes. Espaços com Produto Interno. Determinantes. Diagonalização de Operadores.

Referência Bibliográfica: Abramo Hefez e Cecília de Souza Fernandez. **Introdução à Álgebra Linear**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

- MA 34 - TÓPICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Ementa: Séries de Números Reais. Polinômios de Taylor. Funções de *n* Variáveis. Derivadas parciais e Gradiente. Pontos Críticos de uma Função de *n* Variáveis. Integral Múltipla.

Referências Bibliográficas: E. Lima. **Análise Real**, volume 2. IMPA, 2004 (Coleção Matemática Universitária).

J. Stewart. **Cálculo,** volume 2. 5ª Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

S. Lang. **Calculus of Several Variables.** Springer Verlag, 2005 (Undergraduate Texts).

- MA 35 – MATEMÁTICA E ATUALIDADE

Ementa: Esta disciplina deve apresentar um panorama da presença e utilidade da Matemática na vida quotidiana. Algumas sugestões de tópicos a serem estudados: Matemática e Música. Sons e Compactação de Arquivos de Sons. Senhas usadas em Bancos e na I*nternet.* Códigos. A Geometria do Globo Terrestre. Funcionamento do GPS. A Matemática dos Códigos de Barra. Aplicações de Cônicas. Outros temas vinculados a inovações tecnológicas.

Referências Bibliográficas: C. Rousseau, Y. Saint-Aubin. **Mathematics and Technology. Springer** Verlag, 2008(tradução para português em curso).

P. C. Carvalho, Luiz Velho, Marcelo Cicconet, Sergio Krakowski. **Métodos Matemáticos e Computacionais em Música.** São Paulo: SBMAC, 2009 (VISGRAF IMPA).

S. Alves. **A Geometria do Globo Terrestre**. PIC/OBMEB, vol 6

(*http://www.obmep.org.br/*).

F. P. Millies. **A Matemática dos Códigos de Barra**. PIC/ OBMEP, vol 6(http://www.obmep.org.br/*)*.

S. Coutinho. Criptografia. **PIC/ OBMEP**, vol 7 (*http://www.obmep.org.br/*).

Minicursos da Bienal da SBM (*http://www.sbm.org.br*).

- MA 36 – RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Ementa: O uso da Calculadora no Ensino de Matemática. Planilhas Eletrônicas. Ambientes gráficos. Ambientes de Geometria Dinâmica. Sistemas de Computação Algébrica. Ensino a Distância. Pesquisas Eletrônicas, Processadores de Texto e Hipertexto. Critérios para Seleção de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.

Referência Bibliográfica: Victor Giraldo, F. R. Pinto Mattos, P. A. Silvani Caetano. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática.** SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).

- MA 37 – MODELAGEM MATEMÁTICA

Ementa: Aspectos Conceituais de Modelagem. Otimização em Modelagem Matemática. Equações Diferenciais e de Diferenças em Modelagem Matemática. Probabilidade e Estatística em Modelagem Matemática. Teoria dos Grafos em Modelagem Matemática. Modelagem Matemática no Ensino.

Referências Bibliográficas: R. Bassanezi. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*: *uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2004.

F. R. Giordano, W. P. Fox, S. B. Horton, and M. D.

Weir. **A First Course in MathematicalModeling**. Brooks Cole, 2008.

M.M. Meerschaert. **Mathematical Modeling**. Academic Press, 2007.

W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn and M. Niss, (Eds). **Modelling and Applications inMathematics Education.** The 14th ICMI Study. Springer Verlag, 2007.

- MA 38 – POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Ementa: Os Números Complexos. A Geometria do Plano Complexo.Propriedades Básicas dosPolinômios. Fatoração de Polinômios. Equações Algébricas. Construções com Régua e Compasso. Os Números Hipercomplexos.

Referência Bibliográfica: Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela. **Polinômios e Equações Algébricas.** SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

- MA 39 - GEOMETRIA ESPACIAL

Ementa: Incidência. Ângulos e Posições Relativas entre Retas e Planos no Espaço. Ângulos no Espaço. Ângulos Diedros, Triedros e Poliédricos. Prismas, Cilindros, Pirâmides, Cones e Esferas. Poliedros. Poliedros de Platão. Fórmula de Euler. Volumes.

Referências Bibliográficas: Paulo Cezar Carvalho. **Introdução à Geometria Espacial.** SBM, 1993 (Coleção do Professor de Matemática).

Elon lages Lima. **Medida e Forma em Geometria**. SBM, 1997 (Coleção do Professor de Matemática).

Elon lages Lima. **Coordenadas no Espaço**. SBM, 1988 (Coleção do Professor de Matemática).

Elon lages Lima, Paulo Cezar Carvalho, Augusto Morgado e Eduardo Wagner. **A Matemática do Ensino Médio - vol. 3**. SBM, 2012 (Coleção Professor de Matemática).

- MA 40 – TÓPICOS DE MATEMÁTICA

Disciplina sem ementa fixa, com programa a ser proposto por iniciativa de cada

Instituição Associada.

- MA 41 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Ementa: A Natureza da Estatística. Tratamento da Informação. Distribuições de Frequência e Gráficos. Medidas. Conceitos Básicos em Probabilidade. Probabilidade condicional e Independência. Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas. Função de Distribuição Acumulada. Esperança e Variância de Variáveis Aleatórias. Modelos Bernoulli, Binomial e Geométrico. Modelo Uniforme e Modelo Normal. Distribuição Assintótica da Média Amostral. Introdução à Inferência Estatística.

Referências Bibliográficas: A. Morgado, P. C. Carvalho e P. Fernandez. **Análise Combinatória e Probabilidade**(Capítulo 5). SBM, 2004.

W. Bussab and W. Morettin. **Estatística Básica**. Editora Saraiva, 2010.

R. Pinheiro e G. Cunha. **Probabilidade e Estatística***:* Q**uantificando a Incerteza.** Editora Campus, 2012.

- MA 42 - AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Ementa: Os Exames Nacionais de Avaliação Educacional. O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior. O que é a Teoria de Resposta ao Item? Estimação dos Parâmetros e Proficiências na TRI. A Engenharia de Construção de Itens. Avaliação como meio para Regular a Aprendizagem

Referência Bibliográfica: Mauro Rabelo. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

- MA 43 - CÁLCULO NUMÉRICO

Ementa: Introdução à Modelagem Matemática. Construção de modelo. Exemplos de Modelos com Diferenças Finitas e Modelo de Crescimento. Raízes de Equações. Métodos de Bisseção. Ponto Fixo e Newton. Ajuste de curvas. Aproximações Lineares e Quadráticas. Interpolação Polinomial. Ajuste por Mínimos Quadrados.

Derivação e Integração Numérica. Referências Bibliográficas: M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Lopes. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2a. Ed. Makron Books, 1997. N. B. Branco. **Cálculo Numérico**. Prentice Hall, 2006. D. Sperandio, J. Mendes e L. Silva. **Cálculo Numérico- Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos.** Prentice Hall, 2003. F. R. Giordano, W. P. Fox, S. B. Horton, and M. D. Weir. **A First Course in MathematicalModeling.**Brooks Cole, 2008. M.M. Meerschaert. **Mathematical Modeling.** Academic Press, 2007. W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn and M. Niss, (Eds). **Modelling and Applications in Mathematics Education.** The 14th ICMI Study. Springer Verlag, 2007. S.Conte and D. Boor. **Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach**. Third Edition, Mc Graw-Hill, 1981

Fonte: construída pela autora a partir dos dados constantes no site do PROFMAT.

Ao ser comparada a grade presente no projeto acadêmico do PROFMAT com a atual, constata-se que ocorreram alterações significativas no rol das disciplinas, na medida em que, por exemplo, as disciplinas obrigatórias “Números e Conjuntos”, “Geometria I”, “Aritmética I”, “Equações Algébricas e Noções de Cálculo”, “Geometria II” foram substituídas pelas disciplinas “Números e Funções”, “Geometria”, “Aritmética”, “Fundamentos de Cálculo”, “Geometria Analítica”. No tocante ao rol de disciplinas eletivas, foram mantidas somente as disciplinas “Introdução à Álgebra Linear”, “Matemática e Atualidade”, “Recursos Computacionais no Ensino de Matemática”, “Modelagem Matemática” e “Tópicos de Matemática”, conforme a Tabela abaixo expressa:

Tabela 13: Quadro comparativo entre as grades atual e do projeto acadêmico do PROFMAT.

DISCIPLINAS DA GRADE ATUAL DO PROFMAT	DISCIPLINAS DA GRADE DO PROJETO ACADÊMICO DO

	PROFMAT
Disciplinas Preparatórias	*Disciplinas Preparatórias*
	Temas e problemas elementares Introdução ao *moodle*
Disciplinas obrigatórias	*Disciplinas obrigatórias*
1. Números e funções reais 2. Aritmética 3. Matemática discreta 4. Geometria 5. Resolução de problemas 6. Fundamentos de cálculo 7. Geometria analítica	1. Números e conjuntos 2. Aritmética I 3. Matemática discreta 4. Geometria I 5. Resolução de problemas 6. Equações algébricas e noções de cálculo 7. Geometria II *8.* Trabalho de conclusão de curso.
Disciplinas eletivas	*Disciplinas eletivas*
1. Trabalho de conclusão de curso. 2. Tópicos de história da matemática 3. Introdução à álgebra linear 4. Tópicos de cálculo diferencial e integral 5. Matemática e atualidade 6. Recursos computacionais no ensino de matemática 7. Modelagem matemática 8. Tópicos de matemática 9. Polinômios e equações algébricas 10. Geometria espacial	1. História da matemática 2. Introdução à álgebra linear 3. Cálculo diferencial e integral: um segundo curso 4. Matemática e atualidade 5. Recursos computacionais no ensino de matemática 6. Modelagem matemática 7. Tópicos de matemática 8. Aritmética II

11. Probabilidade e estatística
12. Tópicos de teoria dos números
13. Avaliação educacional
14. Cálculo numérico

Fontes: CAPES (2010) e site do PROFMAT. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/disciplinas. Acesso em: 20 jun. 2014.

Ao serem comparadas as disciplinas obrigatórias que constavam no projeto acadêmico do PROFMAT com as disciplinas que atualmente estão em vigência, verifica-se que, por exemplo, enquanto a disciplina “Aritmética I” era voltada para o estudo dos números naturais, a disciplina “Aritmética” é destinada ao estudo dos números inteiros. Além disso, a disciplina “Aritmética I” possui como um de seus objetos de estudo a “função phi de Euler”, conteúdo que não é abordado na ementa da disciplina “Aritmética”. Destaca-se ainda a inserção dos conteúdos “Aplicação de indução” e “Números Especiais”.

No tocante à disciplina “Matemática Discreta”, verifica-se que a única alteração significativa no rol de conteúdos que figuravam na ementa dessa disciplina no projeto acadêmico do PROFMAT foi a inserção dos conteúdos “Números Naturais” e “Indução Matemática”. Ou seja, a disciplina “Matemática Discreta”, que atualmente está em vigor no PROFMAT, diferentemente do que ocorria com a disciplina incluída no projeto acadêmico do curso, estuda os “números naturais” e a “Indução Matemática”.

As disciplinas “Números e Conjuntos” e “Números e Funções Reais”, bem como as disciplinas “Geometria II” e “Geometria Analítica” continuam com o mesmo ementário com que apareciam no projeto do curso. Quanto às disciplinas de “Geometria” e “Geometria I”, elas diferenciam-se pelo fato de a primeira contemplar o estudo da trigonometria e a segunda não.

Já as disciplinas “Equações Algébricas e Noções de Cálculo” e “Fundamentos de Cálculo” diferenciam-se substancialmente, uma vez que a primeira elencava uma série de conteúdos que podem ser classificados como pertencentes à área de álgebra, fato que não ocorre mais na disciplina “Fundamentos de Cálculo”. Além disso, a disciplina “Fundamentos de Cálculo” destina-se ao estudo de “Sequências de Números Reais”, “Limite de Funções”, “Funções Contínuas”, “Derivação” e “Integração”, enquanto a disciplina “Equações Algébricas e Noções de Cálculo” voltava-se somente ao estudo da “Noção de Derivada” e da “Noção de Integral”.

No tocante à ementa da disciplina “Resolução de Problemas”, verifica-se que na passagem do projeto acadêmico para a ementa que atualmente encontra-se em vigor, ela sofreu alterações substanciais em seu rol de conteúdos. No projeto acadêmico, seu objetivo era o estudo de problemas de combinatória e teoria dos números, problemas envolvendo desigualdades, indução, sequências, polinômios e equações funcionais, além da análise de exames e testes como o PISA[106], o SAEB[107] e o ENEM[108] e o estudo de provas de olimpíadas (OBM[109], OBMEP[110]). A disciplina “Resolução de Problemas” que figura no “Catálogo de Disciplinas” do PROFMAT e que está em vigor atualmente, é composta pelos seguintes conteúdos: Técnicas de Matemática Básica e Raciocínio Lógico: Redução ao Absurdo, Princípio da Indução, Análise de casos iniciais, Princípio da casa dos Pombos, Princípio do caso Extremo; Problemas envolvendo Números e Funções Reais: Matemática Discreta, Geometria, Aritmética e Álgebra. Análise de exames e testes: ENEM, Vestibulares, Olimpíadas e afins.

Além da alteração no rol de disciplinas, verificamos que o referencial bibliográfico das disciplinas vigentes na atual grade foi alterado em relação ao que estava previsto no projeto acadêmico do PROFMAT, de modo que das 23 disciplinas que compõem a grade do PROFMAT, 12 possuem como referencial bibliográfico único um livro pertencente à “Coleção do PROFMAT”, conforme se verifica na Tabela 14.

A referida coleção é descrita na capa dos livros que a compõem da seguinte forma: “Esta coleção oferece textos didáticos relevantes para a formação do professor da Escola Básica, em todos os temas da Matemática, sua prática de ensino, sua história e suas aplicações. Em particular, as referências bibliográficas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional” (LIMA; CARVALHO; MORGADO; WAGNER, 2013, s. p.).

Ainda em relação à Coleção PROFMAT, entendemos que alguns comentários são necessários ao considerarmos que o projeto acadêmico do programa (currículo oficial) previa que:

> A SBM, na sua qualidade de coordenadora da rede de Instituições de Ensino Superior integradas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática, estabelecerá mecanismos de uniformização da qualidade de todo o processo pedagógico, entre os quais figuram [...] a produção

---

[106]Programme for International Student Assessment.
[107]Sistema de Avaliação da Educação Básica.
[108]Exame Nacional do Ensino Médio
[109]Olimpíada Brasileira de Matemática.
[110]Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

> de material didático impresso e virtual que será disponibilizado gratuitamente ao estudante. (CAPES, 2010, p. 80, grifo nosso)

E mais.

> O material didático estará disponível em diferentes formatos e suportes, garantindo múltiplas alternativas de acesso à informação. Dessa forma, os conteúdos básicos de materiais impressos e CD-ROM serão postos à disposição dos alunos nos pólos da UAB e nos campus das instituições, enquanto que os materiais didáticos virtuais, como vídeos, simuladores, aulas virtuais, ficarão disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem. (CAPES, 2010, p. 80-81)

Diferentemente do que estava previsto no Currículo Oficial – o projeto acadêmico do PROFMAT – o material didático não é disponibilizado gratuitamente, uma vez que os livros da Coleção PROFMAT precisam ser adquiridos pelos acadêmicos na loja da SBM (http://loja.sbm.org.br/index.php/), de acordo com os valores apresentados na Tabela 14, de modo o estudante gastará um valor total de R$ 975,00 se adquirir todos os livros da coleção.

Tabela 14: Livros da Coleção PROFMAT disponíveis para compra no site da SBM e seus respectivos valores (R$).

Disciplina	**Título da obra:**	**Valor**	**Valor para Associado da SBM**
Temas e Problemas Elementares	E. Lima, P. C. Carvalho, A. Morgado e E. Wagner. Temas e Problemas Elementares. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$65,00	R$48.75
Tópicos de História da Matemática	Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).	R$84,00	R$63.00
Polinômios e Equações Algébricas	Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela. Polinômios e Equações Algébricas. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).	R$55,00	R$41.25

Tópicos de Teoria dos Números	Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, Fábio Enrique Brochero Martínez e Nicolau Corção Saldanha. Tópicos de Teoria dos Números. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).	R$63,00	R$47.25
Introdução à Álgebra Linear	Abramo Hefez e Cecília de Souza Fernandez. Introdução à Álgebra Linear. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).	R$69,00	R$51.75
Geometria Analítica	Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Cri ssaff. Geometria Analítica. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$115,0 0	R$86.25
Matemática Discreta	Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado. Matemática Discreta. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$89,00	R$66.75
Avaliação Educacional	Mauro Rabelo. Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$51,00	R$38.25
Geometria	Antônio Caminha Muniz Neto. Geometria. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$100,0 0	R$75.00
Aritmética	Abramo Hefez. Aritmética. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$89,00	R$66.75
Números e Funções Reais	Elon Lages Lima. Números e Funções Reais. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).	R$ 55,00	R$41.25

Recursos Computacionais no Ensino de Matemática	Victor Giraldo, F. R. Pinto Mattos, P. A. Silvani Caetano. Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).	R$140,00	R$105.00

Fonte: Site da loja da SBM. Disponível em: http://loja.sbm.org.br/index.php/colecao-profmat.html?p=1. Acesso em: 27 jul. 2014. Também no site do PROFMAT. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/disciplinas. Acesso em: 20 jun. 2014.

Tendo em vista que objetivamos analisar, particularmente, a abordagem dada pelo PROFMAT aos “números naturais” e aos “números racionais”, voltar-nos-emos doravante para o estudo das bibliografias das disciplinas obrigatórias “Números e Funções Reais” e “Matemática Discreta”. Isso porque a disciplina “Números e Funções Reais” apresenta como objetos de estudo, dentre outros, os “Números Naturais”, os “Números Inteiros”, os “Números Racionais”, os “Números Irracionais” e os “Números Reais”, enquanto que a disciplina de “Matemática Discreta” aborda, dentre outros, os “Números Naturais”.

O foco nestas disciplinas se deu porque, além de abordarem os conteúdos que são nossos objetos de estudo, elas são disciplinas classificadas como “básicas”[111] e assim a avaliação de rendimento acadêmico do discente nestas disciplinas, diferentemente do que ocorre com as eletivas, obedece aos seguintes critérios:

> a) Duas avaliações presenciais (designadas AV1 e AV2) que devem contribuir com pelo menos 70% da nota final do discente. A elaboração e definição de datas e horários de aplicação destas avaliações são da competência da Comissão Acadêmica Nacional, com a colaboração do docente Responsável Nacional, preservada a autonomia do docente Responsável Institucional na correção e avaliação dos discentes.
> b) Exames orais, listas de exercícios, palestras ou outras atividades, inclusive atividades online no Ambiente Virtual de Aprendizagem, a critério do docente Responsável Institucional. (http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/normas).

[111]As disciplinas básicas do PROFMAT são as disciplinas obrigatórias ofertadas nacionalmente durante os dois primeiros semestres regulares do programa, cuja denominação e ementa estão definidas no Catálogo de Disciplinas (http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento).

Conforme especificado nas “Normas Acadêmicas do PROFMAT”, essas disciplinas são comuns a todos os polos e o procedimento de avaliação (composição da nota, formato das avaliações presenciais) é o mesmo em todos os polos. Assim, os dados analisados neste capítulo podem ser expandidos para os demais polos do PROFMAT, uma vez que os conteúdos, a bibliografia e as avaliações são comuns a todos os polos.

Ressaltamos ainda que o recorte teórico que optamos por fazer se faz necessário na medida em que objetivamos fazer uma *análise detalhada* dos fragmentos destas disciplinas que versam sobre as temáticas “Números Naturais” e “Números Racionais”. Além disso, considerando que uma análise detalhada de toda a grade (em vigência) do PROFMAT por si só configurar-se-ia como pesquisa de grande extensão e que objetivamos analisar diversas fases do currículo do PROFMAT, desenvolvemos o referido corte. Assim, doravante voltar-nos-emos para o estudo das ementas e bibliografias das disciplinas “Matemática Discreta” e “Números e Funções Reais”, materiais esses que, de acordo com Sacristán (1998; 2013), se configuram como o *currículo apresentado aos professores*.

6.2 A DISCIPLINA “MATEMÁTICA DISCRETA”

Considerando que o *currículo apresentado aos professores* refere-se aos meios, elaborados por diferentes instâncias, que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, discorreremos doravante sobre o livro–texto (impresso) indicado na grade como a única bibliografia da disciplina Matemática Discreta, a saber: MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

A disciplina de Matemática Discreta, até o ano de 2013, não abordava a temática “Números Naturais”, que só passou a figurar nesta disciplina a partir de 2014. Nesse ano também foi implementado o livro MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

Ao compararmos a obra de Morgado e Carvalho – *Matemática Discreta* – com outra obra também de autoria desses autores[112] – *A Matemática do Ensino Médio* - volume 2 – encontramos uma similaridade muito grande, uma vez que a primeira parte do livro *A Matemática do Ensino Médio* - volume 2 é dedicada à Matemática Discreta,

[112]Obra de autoria dos seguintes autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar de Oliveira Morgado.

contendo o estudo de Progressões (com aplicações à Matemática Financeira), Análise Combinatória e Probabilidade enquanto a segunda parte do livro é dedicada à Geometria Espacial. Essa similaridade é expressa na aba do livro *Matemática Discreta* por meio do seguinte texto:

> Este livro apresenta uma versão estendida dos capítulos relativos a Matemática Discreta de “A Matemática do Ensino Médio, volume 2”, preparada para atender alunos da disciplina de mesmo nome do programa PROFMAT. Nesta versão, além de novos capítulos sobre números naturais e indução finita, foram incluídos novos exercícios, muitos provenientes de exames e avaliações do PROFMAT. (MORGADO; CARVALHO, 2014)

Esta obra é composta por capa, sumário, prefácio, corpo (oito capítulos), bibliografia e índice remissivo. Ao observarmos a Tabela 15, onde apresentamos uma comparação entre as subdivisões do livro *Matemática Discreta* e a primeira parte do livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 2, constatamos que as grandes diferenças são a existência dos capítulos 1 e 2, cujas temática são, respectivamente, Número Naturais e O método da Indução.

Tabela 15: Quadro comparativo entre os livros *Matemática Discreta* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 2.

Subdivisão do Livro “Matemática Discreta”	Subdivisão do livro “A Matemática do Ensino Médio – volume 2”
Prefácio	**Prefácio**
1 Capítulo: Número Naturais 1.1 Introdução 1.2 Números Ordinais 1.3 Adição, multiplicação e ordem Exercícios 1.4 Números Naturais e Contagem Exercícios	
2 Capítulo: O método da Indução 2.1 Introdução 2.2 Definições por indução ou recorrência 2.3 Demonstrando igualdades 2.4 Demonstrando desigualdades 2.5 Aplicações em Aritmética 2.6 Resolvendo problemas com o método da indução	

Exercícios 2.7 Outras formas do Princípio da Indução Exercícios	
3 Capítulo: Progressões 3.1 Progressões Aritméticas 3.2 Termo geral de uma Progressão Aritmética 3.3 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética 3.4 Progressões Aritméticas de Ordem Superior 3.5 Somas Polinomiais Exercícios 3.6 Progressões Geométrica 3.7 Termo Geral de um (sic) Progressão Geométrica 3.8 A Fórmula das Taxas Equivalentes 3.9 A Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Exercícios	**1 Capítulo: Progressões** 1.1 Progressões Aritméticas 1.2 Progressões Geométricas 1.3 Sobre o Ensino de Progressões
4 Capítulo: Recorrências 2.1 Introdução Exercícios 2.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Exercícios 2.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Exercícios	**3 Capítulo: Recorrência** 3.1 Seqüências Definidas Recursivamente 3.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem 3.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem
5 Capítulo: Matemática Financeira 5.1 Introdução 5.2 Juros Compostos 5.3 A Fórmula das Taxas Equivalentes 5.4 Séries uniformes Exercícios 5.5 Sistemas de Amortização Exercícios	**2 Capítulo: Matemática Financeira**
6 Capítulo: Análise Combinatória 6.1 O Princípio Fundamental da Contagem Exercícios 6.2 Permutações e Combinações	**4 Capítulo: Combinatória** 4.1 Princípios Básicos 4.2 Permutações e Combinações 4.3 O Triângulo Aritmético

Exercícios 6.3 Outras fórmulas combinatórias Exercícios 6.4 Triângulo Aritmético 6.5 O Binômio de Newton Exercícios 6.6 Revisão Exercícios	4.4 O Binômio de Newton 4.5 Sobre o Ensino de Combinatória
7 Capítulo: Probabilidade 7.2 Conceitos Básicos Exercícios 7.3 Probabilidade Condicional Exercícios 7.4 Espaço amostral infinito Exercícios	**5 Capítulo: Probabilidade** 5.1 Conceitos Básicos 5.2 Probabilidade Condicional
8 Capítulo: Médias e Princípio das Gavetas 8.2 Médias Exercícios 8.3 A Desigualdade das Médias Exercícios	**6 Capítulo: Médias e o Princípio das Gavetas** 6.1 Médias 6.2 A Desigualdade das Médias 6.3 Desigualdade

Fonte: elaboração da autora.

Apesar da similaridade entre os conteúdos dos livros, os valores cobrados por esses livros na “loja da SBM” são distintos, uma vez que o livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 2 está disponível para compra[113] pelos valores de R$ 30, 00, para não sócio da SBM, e a R$ 22,50 para sócios da SBM, enquanto o livro *Matemática Discreta* está à disposição para compra[114] pelo valor de R$ 89,00, para não sócio da SBM, e a R$ 66,75 para sócios da SBM.

Destacamos essa discrepância porque o projeto acadêmico do PROFMAT previa que o material didático impresso e virtual seria “disponibilizado gratuitamente ao estudante” (CAPES, 2010, p. 80), o que não ocorre uma vez que os livros da Coleção PROFMAT são disponibilizados para os estudantes única e exclusivamente por meio de

[113] Site da Loja da SMB: <http://loja.sbm.org.br/DetProduto.aspx?id=57>. Acesso em: 13 mar. 2014.
[114] Site da Loja da SBM: <http://loja.sbm.org.br/DetProduto.aspx?id=219>. Acesso em: 13 mar. 2014.

aquisição na Loja da SBM[115]. Além disso, nos dois polos em que acompanhamos a implementação do currículo do PROFMAT, a Coleção PROFMAT não está disponível no acervo das bibliotecas institucionais.

De acordo com a Programação[116] das Aulas de 2014 – Semestre 1 – da Turma 2014, para a disciplina de Matemática Discreta, os "números naturais" deveriam ser trabalhados a partir da seguinte esquematização:

Semana 24/fevereiro a 02/março
- Aulas presenciais que abordassem os seguintes conteúdos: "Números Naturais: Números ordinais. Adição, multiplicação" e ordem e "Números Naturais: Números naturais e contagem". - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 1 do livro: MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

Na sequência, apresentaremos a descrição do capítulo 1 desse livro.

6.2.1 O livro *Matemática Discreta*

6.2.1.1 O Capítulo "Números Naturais'

O Capítulo "Números Naturais" é iniciado com um texto intitulado "Introdução", em que os autores discorrem rapidamente sobre contagem. Na sequência, apresenta os seguintes textos: "Números Ordinais", "Adição, Multiplicação e Ordem", "Números Naturais e Contagem", além de apresentar duas listas de exercícios. Doravante apresentaremos uma descrição detalhada desses textos.

6.2.1.1.1 A seção "Introdução"

[115] Disponível em: http://loja.sbm.org.br/index.php/colecao-profmat.html?p=2. Acesso em: 25 abr. 2015.
[116] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/programa%C3%A7%C3%A3o/2014/Programao_MA12_2014_1_Turma_2014.pdf. Acesso em: 26 jul. 2014.

Os autores iniciam o texto “1.1 Introdução” discorrendo que “a primeira experiência que a maior parte de nós tem com a Matemática é por meio do processo de *contagem”* (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 2, grifo dos autores).

Continuando sua exposição na introdução de seu livro, Morgado e Carvalho salientam: “É importante observar que aprender a contar tem duas etapas bem distintas, com graus de complexidade também distintos”, sendo que “na primeira etapa, aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (um, dois, três, ...), sem atribuir significado a elas” (MORGADO, CARVALHO, 2013, p. 2) e que

> Algum tempo depois, aprendemos a usar esta sequência para *contar* os elementos de um conjunto, ou seja, estabelecer uma correspondência entre os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números. Algo notável, que não custamos a observar, é que, não importa como façamos a correspondência, o número final é sempre o mesmo – a ele, denominamos o número de elementos do conjunto. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 2, grifo dos autores).

Apesar de os autores esboçarem uma discussão sobre a contagem e sua relação com a aprendizagem dos números naturais (objetos de estudo do capítulo), esse esboço é superficial na medida em que os autores não elucidam, por exemplo, como ocorre a construção do número [pelo ser humano] como uma entidade abstrata, e como ela se relaciona como as faculdades “senso numérico” e “capacidade numérica”, uma vez que esta última refere-se aos números e à capacidade de contar que, de acordo com Devlin (2004, p. 28), “são adquiridas”. A ausência desta discussão é comprometedora na medida em que o trabalho do professor ao abordar o ensino dos naturais suscita o conhecimento (ou pelo menos indícios) de como este conteúdo é aprendido.

Dando sequência, Morgado e Carvalho (2013, p. 2) argumentam que “A mesma tarefa em duas etapas deve ser empreendida ao se estabelecer a fundamentação matemática apropriada para os números naturais”. Esta frase dos autores é vaga e passível de alguns questionamentos: qual é o significado de uma fundamentação adequada? Essa fundamentação é adequada para que tipo de situação? Para o ensino dos números naturais no ambiente escolar ou para o estudo deste conteúdo a partir do ponto de vista acadêmico? Ou ainda, ambos os casos suscitam uma mesma fundamentação matemática?

Finalizando, esses autores acrescentam: “Ao olhar os números naturais como uma simples sequência, estamos diante do que chamamos de *números ordinais*”, “enquanto seu uso como instrumento de contagem remete à noção de *número cardinal*” (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 2, grifos dos autores).

6.2.1.1.2 A seção "Números Ordinais"

A seção 1.2 intitulada "Números Ordinais" é iniciada com o seguinte questionamento: "Como descrever matematicamente a estrutura do conjunto dos números naturais, no sentido de números ordinais?".

Como resposta, os autores discorrem que:

> Como em outros ramos da Matemática, isto é feito por meio de uma lista de propriedades essenciais, chamadas de axiomas, que caracterizam a estrutura da sequência, sem ambiguidades ou propriedades supérfluas, isto é, que possam ser obtidas das demais. Giuseppe Peano (1858 - 1932) propôs uma lista de axiomas, baseado na noção de sucessor de um número natural (intuitivamente, o que vem logo depois dele na lista dos números naturais). A construção de Peano caracteriza o conjunto dos números naturais N por meio dos [...] 4 axiomas. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 2, grifo dos autores)

Axiomas de Peano:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então X=N.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 2).

Segundo Morgado e Carvalho (2013, p. 3), "a noção de sucessor de um número natural está intimamente relacionada à ideia de adição" uma vez que "tomar o sucessor é equivalente a somar uma unidade".

Na sequência os autores apresentam uma segunda versão dos axiomas de Peano, reescrevendo-os a partir da representação de n+1 como o sucessor de n, conforme apresentamos abaixo:

1. Todo número natural n tem um sucessor, representado por n+1.
2. Se m+1=n+1, então m=n.
3. Existe um único número natural, designado por 1, tal que n+1 ≠ 1, para todo n ∈ N.
4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, X ⊂N). Se 1∈ X e se, além disso, n+1 ∈ X, para cada n ∈ X, então X=N.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 3).

A caracterização do conjunto dos números naturais feita por Morgado e Carvalho (2013) é muito similar à caracterização feita por Lima nas obras *Curso de Análise* e *Análise Real*:

> Toda a teoria dos números naturais pode ser deduzida dos três axiomas abaixo, conhecidos como *Axiomas de Peano*.
> São dados, como objetos não-definidos, um conjunto N, cujos elementos são chamados *números naturais*, e uma função s: N □□□□□□□□□□□□□□□□□□∈ N, o número s(n), valor que a função s assume no ponto n, é chamado o *sucessor den*. (LIMA, 2002, p. 26)

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

P1. s: N → N é injetiva. Em outros termos: dados m, n ∈ N, s(m)=s(n) ⇒ m=n. Ou em outras palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

P2. N – s(N) consta de um só elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama “um” e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja n ∈ N, tem-se 1≠ s(n). Por outro lado, se n ≠ 1 então existe um único n_0∈ N, tal que s(n_0) = n.

P3. (Princípio da Indução) Se X ⊂N é um subconjunto tal que 1∈ X e, para todo, n ∈ X tem-se também s(n) ∈ X, então X=N.

Fonte: Lima (2002, p. 26).

O que diferencia as abordagens feitas pelos autores é que Morgado e Carvalho (2013) enunciam quatro Axiomas de Peano, enquanto Lima (2002) enuncia três, suprimindo do rol dos axiomas o que faz referência direta ao conceito *sucessor*, uma vez que Lima definiu o conceito de sucessor em momento anterior de seu texto.

Ambas as obras de Lima figuram frequentemente entre o rol de bibliografias trabalhadas nos cursos de Licenciatura em Matemática, de acordo com Reis (2001) na obra *Análise Real*: "atualmente, o livro de Lima é um dos livros de autoria nacional que mais vem sendo utilizado como referência em programas das disciplinas de Análise oferecidas nos cursos de Matemática do Brasil" (REIS, 2001, p. 133). Além disso, conforme Lima destaca, o livro *Curso de Análise*, volume 1, é destinado aos leitores que desejam uma "apresentação mais completa", já que trata de matéria semelhante ao *Análise Real*, contudo de forma mais abrangente, e o livro *Curso de Análise* é aproximadamente duas vezes mais longo que o *Análise Real* (LIMA, 2004).

Ou seja, a abordagem dada para o estudo dos Números Naturais na disciplina "Matemática Discreta" não pode ser interpretada como uma *nova* abordagem deste conteúdo na formação de professores de Matemática, uma vez que é muito similar à que, em geral, os licenciados em Matemática brasileiros estudaram em sua formação inicial.

Considerando a ordenação da obra, na sequência, Morgado e Carvalho (2013) apresentam a seguinte observação:

> O terceiro axioma estabelece 1 como sendo o único número natural que não é o sucessor de nenhum outro e que, portanto, representa o "ponto de partida" no conjunto N = {1, 2, 3, ...} dos números naturais. É comum, também, adotar-se 0 como o ponto de partida, levando a N={0, 1, 2, 3, ...}. A opção por uma ou outra alternativa é uma questão de gosto ou conveniência. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 3)

Após elencarem os Axiomas de Peano, Morgado e Carvalho (2013, p. 3) argumentam que:

> Embora todos os quatro axiomas sejam fundamentais para a caracterização dos números naturais, o último, chamado de *Axioma da Indução*, se destaca. Ele fornece um mecanismo para garantir que um dado subconjunto X de N inclui, na verdade, todos os elementos de N. Por esta razão, é um instrumento fundamental para construir definições e demonstrar teoremas relativos a números naturais (as definições e provas por *indução* ou *recorrência*). (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 3, grifo dos autores)

Conforme a citação acima evidencia, para os autores da obra *Matemática Discreta* o axioma que se destaca é o da “indução matemática”, uma vez que é um instrumento fundamental para a construção de *definições formais* e para as *demonstrações de teoremas* que versam sobre os números naturais. Esse destaque feito pelos autores apresenta indícios da natureza da abordagem que farão no decorrer da obra, em que o principal objetivo é apresentar definições formais, teoremas e propriedades, de modo que estas últimas sejam provadas a partir de uma perspectiva lógico-formal.

Ainda na sequência, os autores argumentam que:

> Suponhamos que desejamos provar que uma propriedade P(n) relativa ao número natural n seja válida para todos os valores naturais de N. Ou seja, desejamos provar que o conjunto X={n|P(n)}, que é um subconjunto de N é, na verdade, igual ao próprio N. Pelo axioma da Indução basta mostrar que 1∈ X e que o sucessor de cada elemento de X também está em X. Em termos da propriedade P(n), isto equivale a mostrar que: i) P (1) é válida; ii) Para todo n ∈ N, a validez de P(n) implica a validez de P(n+1). Verificados estes dois fatos, conclui-se a validez de P(n) para todos os valores de n. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 3, grifo dos autores)

O axioma da indução, reescrito pelos autores ao adotarem a “linguagem de propriedades”, é intitulado como “Princípio da Indução Finita” ou “Indução Matemática”:

4’. Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) P(1) é válida.

ii) Para todo n ∈ N, a validez de P (n) implica na validez de P(n+1),

Então, P(n) é válida para todo n ∈ N.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 3-4).

Em seguida, os autores apresentam dois exemplos, no primeiro expõem a seguinte igualdade P(n): $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2$ e discutem sua validade por meio de uma prova por indução, concluindo que é válida para todo n ∈ N. O segundo exemplo apresenta a seguinte igualdade $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2+1$, e também se propõem a discutir sua validade para todo n ∈ N, que é feita da seguinte forma:

Exemplo 2: Consideremos a igualdade P(n): $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 + 1$. Supondo que P(n) é verdadeira para algum n, temos $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 1 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Portanto, a implicação $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ é verdadeira para todo $n \in N$, embora P(n) seja **falsa** para todo n (já que, no exemplo anterior, mostramos que a soma é igual a n^2 e não n^2+1). Isso ilustra o fato de que no passo em que provamos a implicação $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ não estamos usando o resultado que desejamos demonstrar. Naturalmente, a prova por indução falha por não ser possível mostrar o caso base (P(1) é falsa) (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 5, grifo dos autores).

Ao relacionarmos a prática do professor que ensina matemática no ambiente escolar com a abordagem dada aos Números Naturais pela obra *Matemática Discreta*, o primeiro aspecto a ser elencado refere-se à utilização dos axiomas de Peano no contexto de sala de aula. Conforme a descrição que desenvolvemos até o momento, a abordagem feita pelo livro-texto destes axiomas deu-se a partir de uma “apresentação” dos anunciados de cada axioma, sem relacioná-los com a prática do professor ao abordar o conteúdo na escola. Tomemos alguns exemplos.

Os autores não discutem como o ensino dos números naturais, ou seja, não discutem, por exemplo: 1) Como os axiomas de Peano podem ser abordados no ambiente escolar; 2) Os autores não apresentam sugestões que auxiliem a abordagem de demonstrações por indução matemática no ambiente escolar; 3) Não comentam se a linguagem adotada por eles (autores), ao abordarem esta propriedade, é adequada para o ensino dos números naturais no ensino fundamental e médio ou se ela precisa ser adaptada à faixa etária dos estudantes que frequentam estes níveis de ensino; e se essa linguagem não é adequada, os autores não apresentam sugestões que auxiliem o professor nesta adequação; 4) A elaboração de exemplos e atividades que explorem o ensino destes axiomas no ambiente escolar; 5) Como estes axiomas relaciona-se com os demais conteúdos escolares (por exemplo, se ela é aplicável a outros conjuntos numéricos).

Consideremos, ainda, os enunciados dos axiomas 1 e 2 apresentados por Morgado e Carvalho (2013).

1. Todo número natural n tem um sucessor, representado por n+1.
2. Se m+1=n+1, então m=n.

Conforme é explicitado por estes enunciados, os autores definem o conceito de sucessor a partir da operação da adição, contudo, em nenhum momento, os autores definem essa operação, ou seja, os enunciados apresentados pelos autores são incompletos na medida em que seu entendimento suscita o conhecimento de uma operação que ainda não havia sido definida na obra.

No tocante aos exemplos apresentados no decorrer das seções “Introdução” e “Números Ordinais”, sobressai o fato de os autores objetivarem única e exclusivamente discutir o quarto axioma Peano [Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, $n+1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X=N$] a partir de uma utilização dele como um *instrumento* para a construção de definições e demonstração de teoremas relativos aos números naturais. Em nenhum momento discutem como esse teorema vincula-se ao trabalho do professor de Matemática da educação básica e muito menos se os exemplos explorados no decorrer do texto são adequados para o ensino dos números naturais no ambiente escolar.

Consideremos agora a seguinte afirmação de Morgado e Carvalho (2013):

> O terceiro axioma estabelece 1 como sendo o único número natural que não é o sucessor de nenhum outro e que, portanto, representa o “ponto de partida” no conjunto N = {1, 2, 3, ...} dos números naturais. É comum, também, adotar-se 0 como o ponto de partida, levando a N={0, 1, 2, 3, ...}. A opção por uma ou outra alternativa é uma questão de gosto ou conveniência. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 3)

Ao discorrem sobre o terceiro axioma [“*Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro*”], inicialmente, os autores fixam o número 1 como sendo o “*ponto de partida dos números naturais*”, mas na sequência afirmam que comumente o 0 é adotado como ponto de partida e que a opção pelo 0 ou pelo 1 como sendo ponto de partida do conjunto é uma “*questão de gosto ou conveniência*”. Este argumento utilizado pelos autores é comum na matemática acadêmica em que, dependendo das características do problema em estudo, “opta-se” pela utilização ou não do 0 como ponto de partida do referido conjunto. Contudo, as perguntas que emergem são: e como esta “*questão de gosto ou conveniência*” ocorre no ensino deste conteúdo no ambiente escolar? Quais são os fatores que o professor deverá levar em consideração neste processo de “optar” pelo 0 ou pelo 1? Será que simplesmente é uma questão de *gosto* do professor? Ou é uma questão de gosto dos alunos? Ou seja, se os sujeitos *gostam* do 0 então ele será agregado ao conjunto dos números naturais? Ademais, qual é o significado da expressão “ponto de partida”? Significa o primeiro elemento do conjunto? Qual é o significado do número 0? Significa *nada*? Se ele significa nada como será o ponto de partida? Essas duas últimas perguntas permeiam constantemente o ensino deste número na escola e não são respondidas na obra *Matemática Discreta*.

Outro tema que é apresentado de forma superficial é a noção de infinito. Conforme o anteriormente mencionado, os autores apresentam o conjunto dos números naturais a partir da seguinte representação N={0, 1, 2, 3, ...} sem explicitar o significado dos três pontos colocados depois da última vírgula. Comumente, os professores de Matemática conhecem esse símbolo relacionando ao *infinito*, contudo qual é o significado da característica do conjunto dos números naturais de ser *infinito?* De acordo com Caraça (2002, p. 10), esse símbolo (...) sinaliza "reticência em matemática" e esses três pontos "[...] querem dizer que não estão lá escritos todos os números naturais, faltam números naturais" e o autor questiona: "Mas 'quantos' números não estão lá? Onde "acaba" a sucessão dos números naturais? Ou ainda, qual é o maior número natural, o número natural além do qual não pode pensar-se que exista mais algum?"Essas perguntas são de extrema relevância na medida em que permeiam constantemente o ensino da matemática na escola básica. A elas podemos agregar mais a seguinte questão: as respostas a essas questões são únicas ou variam de acordo com as características do público com quem está sendo discutido este tema? As respostas para estas perguntas variam de acordo com o público a que se destina o ensino. Por exemplo, ao considerarmos o caso de uma criança de três anos, temos que o maior número que ela conhece é o 5, assim, qual abordagem o professor deve dar aos três pontos colocados depois da última vírgula? Já para o caso de um adulto que nunca frequentou a escola, qual seria a resposta ideal? E para o caso de um estudante do ensino médio? Em nenhum momento do texto são apresentadas discussões que permeiem este tipo de questionamento, que são comuns ao trabalho do professor de Matemática.

Outro apontamento relevante refere-se à ausência de discussões sobre os diferentes aspectos do conhecimento matemático subjacente à construção e uso do sistema decimal, como [...] a noção de agrupamento, a linguagem envolvida na leitura dos números, a ideia de valor relativo do algarismo tendo em vista a sua posição (de modo especial o caso do zero)" (MOREIRA, 2004, p. 86). Esta citação de Moreira novamente nos remete à discussão em torno do zero. Suponhamos que o professor de Matemática *opte* por não considerar este número como pertencente ao conjunto dos números naturais, assim, como ele explicará a composição de um número natural como o 307? Caso ele opte por agregar ao conjunto dos números naturais o zero como ponto de partida, como ele explicará a composição de um número natural como o 307, considerando que o zero é o ponto de partida? Ou melhor dizendo, qual é a relação entre o zero como ponto de partida e o zero que compõe o número 307? No decorrer da referida obra em nenhum momento aborda-se esse tipo de discussão.

Ainda no tocante à ausência de discussão nesta disciplina sobre a construção e o uso do sistema de numeração decimal, é importante ressaltar que ela é fundamental para o trabalho do docente de Matemática na escola básica, uma vez que influencia fortemente seu trabalho, por exemplo, de ensino das operações de adição, multiplicação, subtração e divisão e da associação delas com seus respectivos algoritmos.

As discussões apresentadas pela obra *Matemática Discreta* em relação à caracterização do conjunto dos números naturais é semelhante às discussões apresentadas nos cursos de licenciatura que, conforme já discutido por Moreira (2004), não contemplam as demandas formativas dos professores de Matemática da educação básica. Essa similaridade é problemática, especialmente se considerarmos que o PROFMAT é um curso de formação – matemática – *continuada* de professores que é propalado por meio de um discurso que sugere que será ministrado aos professores participantes uma formação matemática que comtemple suas necessidades formativas, visando ao desenvolvimento de seu trabalho no ambiente escolar.

6.2.1.1.3 A seção "Adição, multiplicação e ordem".

Os autores iniciam a seção "Adição, multiplicação e ordem" discorrendo que as propriedades conhecidas da adição e multiplicação com números naturais "podem ser demonstradas formalmente, usando o Princípio da Indução. Para isto, no entanto, é preciso definir apropriadamente a adição e a multiplicação. Para isto, recorremos novamente ao mecanismo da indução" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 5), que é explicado pelos autores da seguinte forma:

> Seja a(n) um atributo relativo ao número natural n. Se definimos a(1) e estabelecemos como a(n+1) pode ser obtido a partir de a(n), para n ∈ N arbitrário, o Axioma da Indução garante que o atributo a(n) estará definido para cada n ∈ N. Definições construídas desta forma são chamadas de definições por *indução* ou *recorrência.* (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 5, grifo dos autores)

Na sequência os autores definem a soma m + n, com m, n ∈ N, por recorrência do seguinte modo:

Definição 1.3

i) m+1 é definido, como fizemos antes, como sucessor de m.

ii) m + (n+1) é definido como o sucessor de m+n, ou seja, como (m+n)+1.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 5)

Morgado e Carvalho (2013, p. 6) complementam a definição discorrendo que “a definição acima corresponde à ideia intuitiva de que o valor de m+n é obtido acrescentando-se n vezes uma unidade a m”.

A definição de adição apresentada pelos autores, quando relacionada com o ensino deste conteúdo na educação básica pode ser classificada como cíclica, na medida em que os autores, ao definirem a soma de números naturais, assumem que o leitor já conhece o significado da operação de adição, o que se evidencia tanto no item “i” quanto no item “ii” da definição 1.3. Os autores definem m+1 como sendo o sucessor de m, sem antes explicar o significado da adição m+1. Na sequência, os autores definem m + (n+1) como sendo o sucessor de m+n, ou seja, como (m+n)+1 novamente sem explicitar o significado da referida operação. Ou seja, os autores definem a operação de adição utilizando-se da adição +1, sem terem explicado o significado desta adição. Formalmente a abordagem desenvolvida pelos autores está correta, na medida em que a definição é construída a partir do conceito primitivo de sucessor, contudo esta abordagem distancia-se do ensino deste conteúdo na educação básica.

A definição de adição de números naturais apresentada por Morgado e Carvalho (2013) é semelhante à apresentada por Lima (2002) na obra *Curso de Análise*, conforme se evidencia no seguinte trecho: “Usando as iteradas da função s: N $\rightarrow$ N, definiremos a adição de números naturais” (LIMA, 2002, p. 27-28).

Dados m, n $\in$ N, sua soma m+n $\in$ N é definida por

$$m + n = s^n(m)$$

Assim, somar m com 1 é tomar o sucessor de m enquanto que, em geral, somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor. Em outras palavras, temos por definição:

$$m + 1 = s(m)$$

$$m + s(n) = s(m+n).$$

Assim, se quisermos, poderemos dispensar a notação s(n) para indicar o sucessor de n e usar a notação definitiva n + 1 para representar esse sucessor. Que com a notação definitiva, a última das igualdades acima lê-se $m + (n+1) = (m+n) + 1$.

Fonte: Lima (2002, p. 28).

Dando sequência à apresentação da obra de Morgado e Carvalho (2013), expomos a definição de multiplicação que os autores apresentam:

Definição 1.4

i) $m.1 = m$.

ii) $m.(n+1) = m.n + m$

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 6).

A definição de multiplicação apresentada pelos autores quando relacionada com o ensino deste conteúdo na educação básica pode ser classificada como cíclica, na medida em que os autores, ao definirem a operação de multiplicação com números naturais, assumem que o leitor já conhece o significado da operação de multiplicação, o que se evidencia no item “ii” da definição 1.4. Os autores definem m.(n+1) como sendo igual a m.n+m, sem antes explicar o significado da multiplicação m.n. Formalmente, a abordagem desenvolvida pelos autores está correta, na medida em que a definição é construída a partir do conceito primitivo de sucessor, contudo esta abordagem distancia-se do ensino deste conteúdo na educação básica.

A definição apresentada por Morgado e Carvalho para a operação de multiplicação entre números naturais é também similar à apresentada por Lima (2002), já que para esse último autor o “produto m.n está definido indutivamente pelas propriedades abaixo” (p. 29):

$$m \,.1 = m,$$

$$m \,.\, (n+1) = m \,.\, n + m$$

Fonte: Lima (2002, p. 29).

Na sequência, Lima (2002, p. 30) argumenta que "a última igualdade acima já sugere que o produto deve gozar da propriedade distributiva", que é apresentada e demonstrada pelo autor.

Propriedade distributiva: m . (n+p) = m . n + m . p

Demonstração:

Seja X o conjunto dos números $p \in N$ tais que (m + n) . p = m . p + n . p sejam quais forem m, $n \in N$. Acabamos de observar que $1 \in X$. Além disso, se $p \in X$, concluiremos que:

$$(m + n).(p + 1) = (m + n).p + m + n = m . p + n . p + m + n =$$

$$= m . p + m + n . p + n = m . (p + 1) + n. (p + 1)$$

(Na igualdades acima usamos, sucessivamente, a definição de produto, a hipótese de que $p \in X$, a associatividade e a comutatividade da adição e, novamente, a definição de produto).

Segue-se que $p + 1 \in X$. Assim, X = N, ou seja (m + n).p = m . p + n . p, quaisquer que sejam m, n, $p \in N$.

Fonte: Lima (2002, p. 30).

Como Lima (2002), Morgado e Carvalho (2013), após apresentarem a definição de multiplicação, expõem a propriedade distributiva da multiplicação e justificam que "a partir dessas definições [de adição e multiplicação], podem ser **demonstradas** as propriedades usuais da adição e multiplicação" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 6, grifo nosso). Esta fala dos autores novamente evidencia que a abordagem dada aos números naturais na obra *Matemática Discreta* possui como um dos principais objetivos "demonstrar" as propriedades e teoremas relativos aos números naturais. Contudo, essa abordagem não os vincula ao trabalho do professor de Matemática da escola básica, o que pode ser constatado na exploração feita pelos autores da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

Teorema 1.5. Para quaisquer números naturais m, n, e p, vale **(m+n).p=m.n+m.p**.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 6, grifo nosso).

A demonstração proposta pelos autores para o Teorema 1.5 apresenta o seguinte formato:

Demonstração:

Vamos utilizar a indução em p.

i) A propriedade é válida para p=1, já que (m+n). 1 = m + n e m.1 + n.1 = m +n.

ii) Suponhamos que a propriedade seja válida para um certo p, ou seja, **(m+n).p =m.n + m.p**. Temos, pela definição indutiva da multiplicação: (m+n).(p+1) = (m+n).p + (m+n). Mas, pela hipótese de indução, (m+n).p = m.p + n.p. Portanto, (m+n).(p+1) = (m.p+n.p)+(m+n) = m.p + m + n.p + n (aqui, usamos as propriedades comutativa e associativa da adição, que deveriam ter sido provadas previamente). Mas, pela definição de multiplicação, temos m.p+m =m.(p+1) e n.p+n = n.(p+1). Logo, (m+n).(p+1) =m.(p+1) + n.(p+1). Assim, a afirmativa é válida também para p+1.

Portanto, pelo Princípio da Indução, a propriedade é válida para quaisquer m,n e p naturais.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 6, grifo nosso).

Tanto no enunciado quanto na demostração propostas pelos autores para o Teorema 1.5 verificamos que a igualdade **(m+n).p=m.n+m.p**. está incorreta, uma vez que a escrita correta deveria estar no seguinte formato: **(m+n).p=m.p+n.p**.

Morgado e Carvalho (2014) argumentam que a partir das definições 1.3 e 1.4 podem ser demonstradas as propriedades usuais da adição e da multiplicação e que este fato é ilustrado com a “[...] demonstração da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição” (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 6), quando de fato a abordagem dada pelos autores a esta propriedade restringe-se à enunciação do Teorema

1.5 e de sua demonstração por meio da indução matemática. Assim, não discutem, por exemplo: 1) Como este conhecimento pode ser abordado no ambiente escolar; 2) Se essa demonstração (por indução matemática) é adequada ou não para o ensino dos números naturais no ensino fundamental e médio e, se não for, os autores não apresentam sugestões que auxiliem a abordagem desta propriedade no ambiente escolar; 3) Se a linguagem adotada por eles ao abordarem esta propriedade é adequada para o ensino dos números naturais no ensino fundamental e médio ou se ela precisa ser adaptada à faixa etária dos estudantes que frequentam estes níveis de ensino, e se essa linguagem não é adequada, os autores não apresentam sugestões que auxiliem o professor nesta adequação da linguagem; 4) A elaboração de exemplos e atividades que explorem o ensino deste conteúdo no ambiente escolar; 5) Como esta propriedade relaciona-se com os demais conteúdos escolares (por exemplo, se ela é aplicável a outros conjuntos numéricos).

Na sequência da obra, os autores discorrem que "a introdução das operações aritméticas permite tornar precisa uma outra noção fundamental para números naturais: a de *ordem*" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 6, grifo do autor), que é expressa pelos autores por meio da Definição 1.6. Tal afirmação faz emergir os seguintes questionamentos: por que a noção de ordem é fundamental para os números naturais? Em que essa noção se relaciona (ou complementa) as noções apresentadas por meio dos axiomas de Peano e das definições de adição e multiplicação com números naturais? Além disso, essa precisão (apresentada na sequência) acrescenta algo às práticas pedagógicas escolares em matemática?

Definição 1.6

Sejam m e n números naturais. Dizemos que $m<n$ quando existe um número natural p tal que $m+p=n$.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 6).

Segundo os autores do livro, a partir da definição 1.6, "podem ser obtidas as propriedades usuais de ordem" (CARVALHO; MORGADO, 2013, p. 7), que são apresentadas por meio do teorema 1.7.

Teorema 1.7

a) Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.
b) Dados $m, n \in N$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.
c) Se $m < n$ então, para qualquer $p \in N$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 7).

A definição 1.6 e o Teorema 1.7 da obra de Carvalho e Morgado (2013) são similares às propriedades apresentadas por Lima (2002):

Dados os números naturais m, n dizemos que m é menor do que n, e escrevemos

$$m < n,$$

para significar que existe $p \in N$ tal que $n = m + p$.

Fonte: Lima (2002, p. 29).

Na sequência, Lima afirma que a relação $<$ goza das seguintes propriedades:

Transitividade: se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Tricotomia: dados $m, n \in N$, exatamente uma das alternativas seguintes pode ocorrer: ou $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Monotonicidade da adição: se $m < n$ então, para todo $p \in N$ tem-se $m + p < n + p$.

Monotonicidade da multiplicação: $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$

Fonte: Lima (2002, p. 29-30).

Além das propriedades de ordem classificadas pelos autores como "usuais" (Teorema 1.7), Carvalho e Morgado apresentam a *Propriedade da Boa Ordenação* que, de acordo com eles, é uma característica da ordem nos números naturais (Teorema 1.8).

Teorema 1.8

Todo subconjunto não vazio X $\subset$ N possuí um menor elemento. Isso significa que existe um elemento $n_0 \in$ N que é menor do que todos os demais elementos de X.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 7).

O "Teorema 1.8" apresentado por Carvalho e Morgado (2013, p. 7) é intitulado por Lima (2002, p. 31) como "TEOREMA 1 (Princípio da Boa Ordenação)" e é enunciado e demonstrado.

TEOREMA 1 (Princípio da Boa Ordenação). Todo subconjunto não-vazio A $\subset$ N possuí um elemento mínimo.

Fonte: Lima (2002, p. 31).

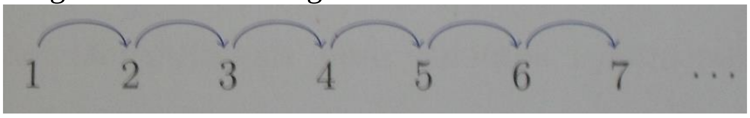
A seção 1.3 é finalizada com Morgado e Carvalho argumentando que "a Propriedade da Boa Ordenação não vale para a ordem definida em outros conjuntos numéricos; por exemplo, o conjunto dos números reais e o dos numeros (*sic*) reais positivos são não vazios, mas não possuem um menor elemento" (CARVALHO; MORGADO, 2013, p. 7).

Ao discutirem a noção de ordem para os números naturais (Definição 1.6, Teorema 1.7, Teorema 1.8) os autores novamente não discutem, por exemplo: 1) Como estes conteúdos podem ser abordados no ambiente escolar; 2) Se a linguagem adotada por eles na obra *Matemática Discreta* é adequada para o ensino dos números naturais no ensino fundamental e médio ou se ela precisa ser adaptada à faixa etária dos estudantes que frequentam os ensinos fundamental e médio, e, caso essa linguagem não seja adequada os autores não apresentam sugestões que auxiliem o professor em sua adequação; 3) A não proposição de exemplos e atividades que explorem o ensino deste conteúdo no ambiente escolar; 4) Como esta propriedade relaciona-se com os demais conteúdos escolares (por exemplo, se ela é aplicável a outros conjuntos numéricos).

6.2.1.1.4 Seção Exercícios

Na sequência da obra, os autores apresentam uma seção intitulada “Exercícios”. Esta seção é composta por cinco exercícios, o primeiro dos quais apresenta cinco diagramas que relacionam um a um os números naturais de 1 a 7. De acordo com os autores, o primeiro diagrama “[...] representa a estrutura dos números naturais imposta pelos axiomas de Peano” (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 8):

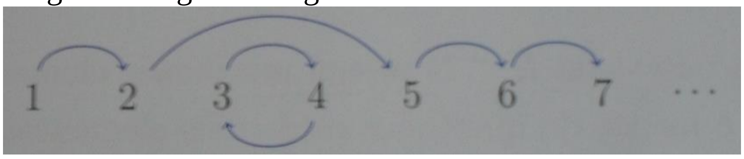
Figura 8: Primeiro diagrama ilustrado no exercício 1.1.



Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 8).

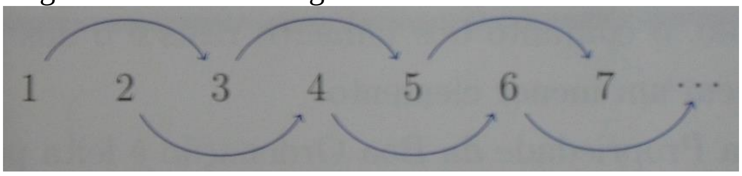
Os quatro diagramas subsequentes presentes no livro violam, de acordo com os autores, “exatamente um dos axiomas de Peano”.

Figura 9: Segundo diagrama ilustrado no exercício 1.1.



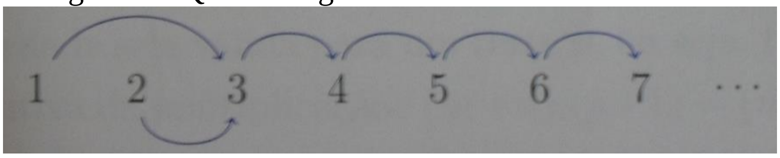
Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 8).

Figura 10: Terceiro diagrama ilustrado no exercício 1.1.



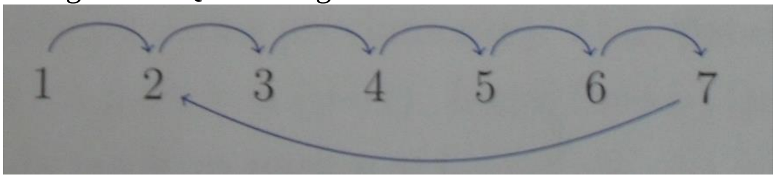
Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 8).

Figura 11: Quarto diagrama ilustrado no exercício 1.1.



Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 8).

Figura 12: Quinto diagrama ilustrado no exercício 1.1.



Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 8).

Assim, os autores solicitam que seja identificado qual dos axiomas de Peano é violado em cada um dos diagramas apresentados. Este exercício apresenta uma abordagem dos axiomas de Peano que poderia ser utilizada em um momento de ensino da matemática no ambiente escolar na medida em que apresenta uma coleção de números [1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7] e os relaciona por meio de setas, sendo que estas relações estão intimamente articuladas com os axiomas de Peano.

No entanto, o referido exercício apresenta um problema em seu enunciado porque, ao contrário do que este afirma: "Em cada um dos diagramas a seguir, exatamente um dos axiomas de Peano é violado. Diga qual ele é (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 8)". Os quatro diagramas violam mais de um axioma. Consideremos, por exemplo, o quarto diagrama (Figura X). Ao analisá-lo, pode-se verificar que ele fere o segundo e o terceiro axiomas de Peano, simultaneamente. O segundo axioma é apresentado por Morgado e Carvalho (2013, p. 2) por meio do seguinte anunciado "Se m+1=n+1, então m=n". Então, ao associarmos este enunciado ao referido no diagrama, observamos que este diagrama afirma que os números 1 e 2 possuem o mesmo sucessor, que se s(1)=s(2), então o número 1 deveria ser igual ao número 2, o que é falso. Ou seja, temos que s(1)=s(2), então 1≠2. Já o terceiro axioma é apresentado por meio do seguinte enunciado: "Existe um único número natural, designado por 1, tal que n+1 ≠ 1, para todo n ∈ N" "(MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 2). Ao associá-lo ao mencionado diagrama, é facilmente verificável que o axioma é violado na medida em que, além do número 1, o número 2 também não é sucessor de nenhum outro número natural.

O segundo exercício figura com frequência na literatura da matemática universitária, inclusive em obras utilizadas em cursos de Licenciatura em Matemática, como MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de Álgebra.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978; ROMANO, R. *Cálculo Diferencial e Integral: Funções de uma Variável.* São Paulo: Atlas, 1983; DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna.*

São Paulo: Atual, 1982; HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. SBM: Rio de Janeiro, 2006.

Ele solicita que seja provada, por indução, a seguinte igualdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Entretanto, o enunciado não especifica o conjunto a que pertence o n.

O terceiro exercício proposto apresenta uma demonstração (por meio da Indução Matemática) para a seguinte igualdade: $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$, a qual, de acordo com os autores, está errada, sendo então solicitado que seja identificado o erro. A igualdade, objeto de estudo deste exercício, também figura com frequência em materiais destinados ao ensino superior, inclusive naqueles disponíveis em sites na internet[117].

O quarto e o quinto exercícios solicitam que sejam demonstradas, respectivamente, a “Lei do Corte”[118] e a “Propriedade Transitiva da Ordem”[119], lei e propriedade estas que são também abordadas, por exemplo, por Lima (2002), nas páginas 28 e 29 de sua obra, respectivamente.

Conforme a descrição acima, das cinco questões, somente uma delas apresenta um enunciado que não suscita a *prova por indução matemática*. Além disso, estes quatro enunciados são objeto de estudo da literatura de matemática utilizada frequentemente em cursos de nível superior, especialmente na Licenciatura em Matemática. Ou seja, estes exercícios não se configuram como uma proposta inovadora para a formação matemática de professores de Matemática, uma vez que são comumente apresentados nos cursos de formação inicial de professores de Matemática.

Nesta conjuntura, temos o seguinte cenário, a abordagem dada aos números naturais pelos autores nesta seção da obra é, em princípio, trabalhada nas licenciaturas e o PROFMAT está replicando esta abordagem na formação continuada de professores. Assim sendo, ou a Licenciatura em Matemática não forneceu a formação matemática adequada para a prática do professor de Matemática – e neste caso, por que a repetição

---

[117] Por exemplo, nas seguintes páginas: a) http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_4SequenciaEInducaoMatematica.pdf. Acesso em: 22 abr. 2015; b) http://www.mat.uc.pt/~mat0615/FolhasDelfos/Inducao.pdf. Acesso em: 22 abr. 2015.

[118] Enunciado da “lei do corte”: Se m, n e p são números naturais tais que m + p = n + p, então m = n (CARVALHO; MORGADO, 2013, p. 9).

[119] Enunciado da propriedade transitiva da ordem: Se m, n e p são números naturais tais que m < n, e n < p, então m < p (CARVALHO; MORGADO, 2013, p. 9).

desta formação fornecerá? – ou então a formação que o PROFMAT está proporcionando – neste fragmento da disciplina – é inócua. Entretanto, como mostrado em Moreira e David (2010), o mais provável é que esta formação tenha sido inócua na Licenciatura em Matemática e novamente será inócua no PROFMAT, pois esse conhecimento não se está relacionado às questões que a literatura indica como sendo relevantes para a prática docente escolar.

6.2.1.1.5 A seção "Números Naturais e Contagem"

A seção 1.4, "Números Naturais e Contagem", é iniciada com a seguinte citação: "A primeira habilidade que dominamos no uso dos números naturais é a de contar, ou seja, a de determinar o número de elementos de um conjunto" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p.10).

Entretanto, de acordo com Devlin (2004, p. 63), "contar não é o mesmo que dizer quantos elementos há num conjunto. O número de elementos de um conjunto é apenas um fato sobre este conjunto". De acordo com este autor, a contagem dos elementos de um conjunto "[...]é um processo que envolve ordenar o conjunto de algum modo e, depois, aproveitando essa ordenação, contar todos os elementos, um por um. Uma vez que contar nos informa, na realidade, o número de elementos de um conjunto, nós frequentemente confundimos as duas coisas" (DEVLIN, 2004, p. 63).

Para Kamii (1990, p. 18), o número é a "[...] relação criada mentalmente por cada indivíduo" e é uma "[...] síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva[120]). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica"(KAMII, 1990, p. 21).

> Por exemplo, depois de contar oito objetos arranjados numa relação ordenada, uma criança geralmente diz que há oito. Se lhe pedirmos então que nos mostre os oito, às vezes ela aponta para o último (o oitavo objeto). Esse comportamento indica que, para essa criança, as palavras *um, dois, três* etc. são nomes para elementos individuais de uma série, como *João, Maria, Suzaninha... Pedro*. Portanto quando lhe perguntamos quantos são, a criança responde o que chega até Pedro. O nome Pedro serve para o último indivíduo da série não para o grupo todo. Para quantificar os objetos como um grupo, a criança tem que colocá-los numa relação de inclusão hierárquica. Esta relação significa que a criança incluiu mentalmente *um* em *dois, dois* em *três,*

[120] De acordo com Kamii (1990, p. 20), a abstração reflexiva envolve a construção de relações entre os objetos, contudo "[...]As relações não têm existência na realidade externa. A diferença entre uma ficha e outra não existe em uma ficha ou outra, nem em nenhuma outra parte da realidade externa. A relação entre os objetos existe somente nas mentes daqueles que podem criá-la. O termo abstração construtiva poderia ser mais fácil de entender do que abstração reflexiva, para indicar que esta abstração é uma construção feita pela mente, em vez de representar apenas o enfoque sobre algo já existente".

> *três* em *quatro* etc. Quando lhes apresentam os oito objetos, ela só consegue quantificar o conjunto numericamente se puder colocá-los todos numa única relação que sintetiza ordem e inclusão hierárquica. (KAMII, 1990, p. 21-22, grifo da autora)

Voltando ao texto de Morgado e Carvalho (2013), os autores apresentam na sequência a seguinte definição para o processo de *contar* os elementos de um conjunto:

Definição 1.9

Contar um conjunto X significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os de um subconjunto de N da forma I_n = {x ∈ N| x ≤ n} = {1, 2, ..., n}. Quando é possível estabelecer tal correspondência biunívoca, dizemos que X é um conjunto finito e que n é um *número cardinal* ou *número de elementos* de X.

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 10, grifo dos autores).

Os autores complementam a definição 1.9, por meio da observação 1.10.

Observação 1.10

Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma função bijetiva f: X→ Y, ou seja, uma regra que associa a cada elemento de X um elemento de Y de modo que cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X (isto equivale a dizer que f é uma função simultaneamente injetiva e sobrejetiva).

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 10).

A definição de Conjunto finito apresentada por Morgado e Carvalho novamente assemelha-se à apresentada por Lima (2002):

Neste parágrafo, indicaremos pelo símbolo I_n o conjunto {1, ... , n} dos números naturais desde 1 até n. Mais precisamente, dado n ∈ N, temos

$$I_n = \{p \in N;\ 1 \leq p \leq n\}$$

Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum n ∈ N, uma bijeção

$$\varphi : I_n \to \mathbb{N}.$$

No primeiro caso, diremos que X tem zero elementos. No segundo caso, diremos que n ∈ N é o *número de elementos de* X, ou seja, que X possui n elementos.

Fonte: Lima (2002, p. 33, grifo do autor).

Conforme a descrição acima evidencia, a abordagem dada pela obra *Matemática Discreta* ao processo de contagem dos elementos de um conjunto é baseada no conceito matemático de função, especificamente no conceito de função bijetora, e na manipulação algébrica de grandezas (quantidades) finitas. Considerando que os números naturais e a contagem são alguns dos objetos com que temos contato desde os anos iniciais do ensino fundamental e que o entendimento do conceito de número e sua manipulação – por meio de cálculos, por exemplo – é progressivo no decorrer da escolarização, alguns questionamentos são pertinentes: de que forma esta definição de contagem dos elementos de um conjunto pode auxiliar o trabalho dos professores do ensino fundamental ao abordarem os números naturais nesse nível escolar? De que forma esta manipulação estritamente algébrica auxiliaria o trabalho do professor ao ensinar os números naturais para estudantes que ainda não tiveram contato com a álgebra? É possível utilizarmos a definição 1.9 para trabalhar os números naturais no ensino fundamental, especialmente se considerarmos que o público alvo deste nível de ensino só terá contato com algumas “noções” de função afim e quadrática no nono ano (último ano do ensino fundamental)? Como esta definição poderia ser trabalhada no contexto do ensino fundamental? Desta definição poderiam ser gerados exemplos acessíveis aos estudantes da educação básica?

Estas perguntas são pertinentes na medida em que o PROFMAT é destinado à formação matemática dos professores de Matemática do ensino fundamental e se propõe a trabalhar a matemática adequada para o ensino desta área do conhecimento na educação básica (anos finais do ensino fundamental e médio).

Dentro do encadeamento proposto pelos autores, é apresentado em seguida o Teorema 1.11, que apresenta as propriedades básicas da contagem:

Teorema 1.11

a) *O resultado da contagem (ou seja, o número cardinal de X) é sempre o mesmo, não importando a contagem que seja feita.*

b) *Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e n(Y) ≤ n (X). Tem-se n(Y) = n(X) somente quando Y=X.*

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 10, grifo dos autores).

Dando continuação, os autores argumentam que

> A primeira propriedade justifica podermos falar em número de elementos de um conjunto finito: podemos contá-lo de vários modos, mas o resultado final é sempre o mesmo. A segunda relaciona inclusão entre conjuntos e desigualdades entre números cardinais. A demonstração de ambas se faz por indução. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 10)

O item b do teorema 1.11 apresentado por Morgado e Carvalho (2013) assemelha-se ao Teorema 4 apresentado por Lima (2002) na obra *Curso de Análise*:

Teorema 4. Se X é um conjunto finito então todo subconjunto Y⊂ X é finito. O número de elementos de Y não excede o de X e só é igual quando X=Y.

Fonte: Lima (2002, p. 35).

Assemelha-se também ao Teorema 2 apresentado por Lima (2004):

Teorema 2. Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Fonte: Lima (2004, p. 05).

Conforme a descrição apresentada acima evidencia, a explicação apresentada por Morgado e Carvalho (2013) ao Teorema 1.11, além de assemelhar-se às abordagens utilizadas por Lima (2002; 2004), faz uma breve explanação sobre o resultado da contagem e o número de elementos de um conjunto, e volta-se novamente para sua demonstração por meio da indução matemática.

Em seguida, os autores definem conjunto infinito da seguinte forma: “Um conjunto é infinito quando não é finito” (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 10) e discorrem que, “por exemplo, N é infinito: dada qualquer função f:I_n→ N, não importa qual n se fixou, pomos k= f(1) + f(2) + ... + f(n) e vemos que, para todo x ∈ I_n, tem-se f(x) < k, logo não existe x ∈ $I_n$tal que f(x)=k. Assim, f não pode ser uma correspondência biunívoca. Assim, f não pode ser uma correspondência biunívoca" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 10).

A definição apresentada por Morgado e Carvalho (2013) é idêntica à apresentada por Lima (2004): "Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim X é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for n ∈ N, uma bijeção f: I_n→ N".

A definição de conjunto infinito apresentada pelos autores (MORGADO; CARVALHO, 2013; LIMA, 2004) reporta-se à definição de conjunto finito, sendo que esta última é elaborada a partir da utilização de métodos algébricos de manipulação de grandezas. Assim, da mesma forma como ocorre com a definição de conjunto finito, a de conjunto infinito é reduzida à manipulação algébrica, contudo de grandezas infinitas. Ambas as abordagens reduzem-se ao tratamento lógico-formal de conjunto finito e conjunto infinito.

Mas, conforme já discutido anteriormente, o trabalho do professor de Matemática da educação básica não se restringe ao tratamento lógico-formal desta área do conhecimento, pelo contrário, demanda o domínio de um arsenal de representações que se adequem ao público a que o ensino é destinado. Desta forma, a abordagem dada pelos autores aos conceitos de conjunto finitos e conjunto infinito distancia-se do trabalho do professor de Matemática da educação básica, na medida em que, por exemplo, foca sua abordagem em métodos algébricos de manipulação de grandezas.

Dentro do encadeamento da obra, os autores apresentam a definição 1.12:

Definição 1.12

Dizemos que dois conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e Y (isto é, existe uma função bijetiva f: X → Y).

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 11).

Na sequência, (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 11) argumentam que "É claro que a definição acima faz sentido para conjuntos finitos: conjuntos finitos de mesma cardinalidade são aqueles que têm o mesmo número de elementos, ou seja, podem ser postos em correspondência biunívoca com o mesmo I_n = {1, 2, ..., n}. Mas ela também se aplica a conjuntos infinitos”.

Posteriormente, os autores apresentam dois exemplos (exemplo três e exemplo quatro), dos quais o exemplo três versa sobre a cardinalidade do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números naturais que são pares, concluindo que esses conjuntos possuem a mesma cardinalidade. O exemplo quatro compara dois conjuntos, o conjunto N e o conjunto C de todas as sequências infinitas em que todos os termos são iguais a 0 ou 1, e conclui que esses conjuntos não possuem a mesma cardinalidade e que C é “‘mais infinito’ do que N” (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 11).

Em seguida, os autores classificam o conjunto C (de todas as sequências infinitas em que todos os termos são iguais a 0 ou 1) como um “exemplo de conjunto infinito *não enumerável*”, que é definido como um conjunto “[...] que não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais” (CARVALHO; MORGADO, 2013, p. 12, grifo dos autores). Os autores mencionam os conjuntos dos números reais e dos números irracionais como exemplos de conjuntos não enumeráveis. O exemplo quatro de Morgado e Carvalho (2013) é o mesmo utilizado por Lima (2004, p. 8) e Lima (2002, p. 42-43) em sua discussão sobre conjuntos não-enumeráveis.

Morgado e Carvalho (2013) finalizam a seção 1.4 com a observação 1.13:

Observação 1.13

Uma função de domínio igual a N é chamada de uma *sequência*. É conveniente pensar em uma sequência a: N $\rightarrow$X como uma lista de valores (a(1), a(2), a(3), ...), que muitas vezes preferimos representar por $(a_1, a_2, a_3, ...)$.

Conjuntos infinitos e conjuntos enumeráveis podem ser caracterizados em termos das propriedades das sequências de elementos destes conjuntos, como se segue:

- Um conjunto X é infinito se, e somente se, é possível construir uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ em que os termos são os elementos **distintos** de X (ou seja, quando há uma função injetiva de N em X).
- Um conjunto infinito X é enumerável se, e somente se, é possível construir uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ incluindo **todos** os elementos de X (ou seja, quando há uma função sobrejetiva de N em X).

Fonte: Morgado e Carvalho (2013, p. 12, grifos dos autores).

6.2.1.1.6 A seção "Exercícios"

E finalizam o Capítulo 1 do livro *Matemática Discreta* com uma seção intitulada "Exercícios", composta por nove exercícios, sendo que a resolução das cinco primeiras atividades (1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10) suscitam o emprego do método da prova por indução matemática.

O exercício 1.11 apresenta cinco conjuntos e solicita que cada um seja classificado como finito ou infinito. Os conjuntos são: a) O conjunto de todas as pessoas que já viveram na Terra; b) O conjunto de todos os múltiplos de 7 cuja representação decimal termina com 3578; c) O conjunto de todos os números naturais cuja representação decimal tenha apenas algarismos diferentes de zero, cuja soma seja menos que 1.000; d) O conjunto de todos os números racionais que podem ser escritos como fração com denominador menor que 1.000; e) O conjunto de todos os números primos.

O exercício 1.12 apresenta dois conjuntos infinitos enumeráveis, X e Y, sugere que existem as sequências $(x_1, x_2, x_3, ...)$ e $(y_1, y_2, y_3, ...)$ incluindo todos os elementos de X e Y respectivamente e solicita que seja explicado como se constrói uma sequência incluindo todos os elementos de $X \cup Y$ e que seja mostrado que $X \cup Y$ também é enumerável.

O exercício 1.13 solicita que seja considerado o conjunto N^2 de todos os pares ordenados de números naturais e que seja encontrada uma sequência que inclua todos os elementos de N^2, mostrando assim que N^2 é enumerável. Segundo os autores, "isto mostra que o conjunto dos números racionais também é enumerável. Por quê?" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 14).

E o exercício 1.14 solicita que seja mostrado que "o conjunto de todos os subconjuntos de N é não enumerável" (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 14).

No decorrer da seção 1.4 (Números Naturais e Contagem), assim como ocorreu nas seções 1.1 (Introdução), 1.2 (Números Ordinais), 1.3 (Adição, multiplicação e ordem), observa-se que a abordagem dada aos Números Naturais tem por objetivo apresentar as ferramentas matemáticas, em especial a indução matemática, utilizadas no estudo de progressões, matemática financeira, análise combinatória, probabilidade de sequências e médias. Ou seja, o estudo dos números naturais nesta disciplina está reduzido ao estudo das ferramentas necessárias – especialmente para as provas de propriedades e teoremas – para a construção matemática de uma parte das teorizações: progressões, matemática financeira, análise combinatória, probabilidade de sequências e médias. Tal afirmação é corroborada por Carvalho no prefácio desta obra, ao afirmar que ela se baseia,

> [...] principalmente, nos capítulos escritos por Augusto César Morgado para o volume 2 de A Matemática para o Ensino Médio, publicado pela Coleção do Professor de Matemática da SBM. O principal acréscimo foi a inclusão dos capítulos relativos ao conjunto dos números naturais e ao Princípio da Indução Finita, com o duplo propósito de fornecer a base teórica apropriada para o assunto e atender à ementa da disciplina de MA12 – Matemática Discreta do Profmat. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. IX)

Além disso, neste processo de redução do estudo dos números naturais, a linguagem adotada é basicamente a lógico-formal, comum às disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática. Esta afirmação é evidenciada pelo fato de que grande parte das definições, teoremas, axiomas, propriedades, exemplos e exercícios constam nas obras *Curso de Análise* - vol. 1 e *Análise Real*, ambas de Elon Lages Lima, que figuram com grande frequência nas bibliografias dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Nesta conjuntura de redução da abordagem dos números naturais ao estudo de ferramentas necessárias para o estudo de outros conteúdos, diversos conceitos, definições, etc. (como sobre as características de composição dos números naturais a partir da base e do significado da expressão "valor posicional") são deixados de lado, na medida em que se entende que estes conhecimentos são elementares e se considera que o futuro professor de Matemática (para o caso da formação inicial) e o professor de Matemática (para o caso da formação continuada) já os *conhece* e *domina*. Este procedimento de redução é comum na Licenciatura em Matemática e está ocorrendo também no PROFMAT, de acordo com Moreira (2004, p. 78)

> Nesse sentido, pode-se considerar a hipótese de que essa abordagem formal dos números naturais esteja sendo veiculada como a abordagem *natural* para a formação do professor da escola básica. Os riscos de uma naturalização desse tipo são as eventuais conseqüências no processo de estruturação e estabilização de concepções a respeito da matemática e do seu ensino, as quais poderão se refletir de forma limitadora na futura prática profissional do licenciado. (MOREIRA, 2004, p. 78)

Moreira (2004), discorrendo sobre as necessidades formativas dos professores de Matemática da escola básica em relação aos "números naturais", argumenta que:

> O fato mais importante, no entanto, é que o licenciado em matemática, a partir do início do segmento do ensino básico em que atua (quinta

> série do Ensino Fundamental), estará retomando e ampliando todo o trabalho com os números naturais desenvolvido nos ciclos anteriores, considerando esses números agora como elementos de um conjunto (que, por exemplo, contém a soma e o produto de quaisquer dois deles, mas não contém, sempre, a diferença ou a divisão), promovendo a percepção de relações entre eles (números primos e compostos, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum etc.) e eventualmente estendendo — num processo pedagógico extremamente complexo [...] — as operações, seus significados e suas propriedades para os inteiros negativos, para os racionais e, a partir destes, para os reais. (MOREIRA, 2004, p. 84)

Ainda segundo o autor (MOREIRA, 2004):

> No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que conhecer profundamente, de um ponto de vista relevante para a sua prática, aquilo que os alunos consideram como o universo numérico nos diferentes estágios da vida escolar. O professor terá que lidar também com dúvidas e concepções incorretas que vão se referir tanto ao novo conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente conhecido, que está sendo ampliado. Essas dúvidas e falhas conceituais que aparecem freqüentemente entre os alunos podem ser associadas a dois aspectos do processo de aprendizagem escolar dos sistemas numéricos, os quais tendem a se sobrepor. (MOREIRA, 2004, p. 84-84)

A descrição que apresentamos evidencia que as necessidades formativas do professor de Matemática elencadas por Moreira (2004) não são contempladas na discussão feita pela obra *Matemática Discreta* sobre os números naturais, de modo que a abordagem problemática que é feita na Licenciatura em Matemática a respeito deste conteúdo está sendo repetida no PROFMAT.

6.3 A DISCIPLINA "NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS"

Considerando que o *currículo apresentado aos professores* refere-se aos meios, elaborados por diferentes instâncias, que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, discorreremos doravante sobre o livro–texto (impresso) indicado na grade como a única bibliografia da disciplina, a saber: LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Embora a disciplina Números e Funções Reais tenha tido sempre a mesma ementa, a partir de 2013 sua bibliografia foi, no entanto, alterada, este livro passando a ser a única obra bibliográfica indicada para esta disciplina.

A referida obra é composta por capa, sumário, prefácio, corpo (10 capítulos), bibliografia e índice remissivo. Ao compararmos com outra obra – também de autoria de Elon Lages Lima, mas em parceria com Paulo Cezar Pinto de Carvalho, Eduardo

Wagner e Augusto César Morgado – intitulada *A Matemática do Ensino Médio* (volume 1), encontramos uma similaridade muito grande. Essa similaridade é expressa por Lima no prefácio da obra *Números e Funções Reais*:

> Este livro é uma versão modificada do "Matemática do Ensino Médio, volume 1". As modificações, que consistem em algumas omissões e vários acréscimos, procuram adaptá-lo ao programa PROFMAT, cujos alunos têm um compromisso maior de adquirirem domínio da matéria que ensinam, inclusive das justificativas lógicas das regras que utilizam na prática do dia a dia. (LIMA, 2013, p. X)

Conforme o próprio autor discorre, a obra *Números e Funções Reais* origina-se de um livro destinado unicamente à formação dos professores do ensino médio, enquanto o PROFMAT, em seu projeto, indica que seu objetivo é a formação de professores da escola básica, o que inclui tanto ensino médio como o fundamental (anos finais).

Ao analisar a Tabela 16, que compara as subdivisões do livro *Números e Funções Reais* com as do livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1, constatamos que a grande diferença é a inclusão, no primeiro, de um Capítulo 10, onde se encontram as soluções dos exercícios propostos no livro, enquanto a solução dos exercícios apresentados no livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 está disponível no livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 4"[121].

Tabela 16: Quadro comparativo entre os livros *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1.

Subdivisão do Livro "Números e Funções Reais"	Subdivisão do livro "A Matemática do Ensino Médio – volume 1"
Prefácio	**Prefácio**
Capítulo 1: Conjuntos	**Capítulo 1: Conjuntos**
1.1 Noções de Conjunto	1 A noção de Conjunto
1.2 A Relação de Inclusão	2 A Relação de Inclusão
1.3 O complementar de um Conjunto	3 O complementar de um Conjunto
1.4 Reunião e Interseção	4 Reunião e Interseção
1.5 Comentário Sobre a Noção de	5 Comentário Sobre a Noção de

[121]Disponível em: http://loja.sbm.org.br/index.php/colecao-do-professor-de-matematica/a-matematica-no-ensino-medio-volume-4.html. Acesso em: 25 abr. 2015.

Igualdade	Igualdade
1.6 Recomendações Gerais	6 Recomendações Gerais
Exercícios	Exercícios
Capítulo 2: Números Naturais	**Capítulo 2: Números Naturais**
2.1 Introdução	1 Introdução
2.2 Comentário: Definições, Axiomas, etc.	2 Comentário: Definições, Axiomas, etc.
2.3 O Conjunto dos Números Naturais	3 O Conjunto dos Números Naturais
2.4 Destaque para o Axioma da Indução	4 Destaque para o Axioma da Indução
2.5 Adição, Multiplicação e Ordem	5 Adição e Multiplicação
2.6 Algumas Demonstrações	6 Ordem entre os números naturais
Exercícios.	Exercícios.
Capítulo 3: Números Cardinais	**Capítulo 3: Números Cardinais**
3.1 Funções	1 Funções
3.2 A Noção de Número Cardinal	2 A Noção de Número Cardinal
3.3 Conjuntos Finitos	3 Conjuntos Finitos
3.4 Sobre Conjuntos Infinitos	4 Sobre Conjuntos Infinitos
Exercícios.	Exercícios.
Capítulo 4: Números Reais	**Capítulo 4: Números Reais**
4.1 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis	1 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis
4.2 A Reta Real	2 A Reta Real
4.3 Expressões Decimais	3 Expressões Decimais
4.4 Desigualdades	4 Desigualdades
4.5 Intervalos	5 Intervalos
4.6 Valor Absoluto	6 Valor Absoluto
4.7 Sequências e Progressões	7 Sequências e Progressões
4.8 Sequências Monótonas	Exercícios.
Exercícios.	

Capítulos 5: Funções Afins	**Capítulos 5: Funções Afins**
5.1 O Plano Numérico R^2	0. O Produto Cartesiano
5.2 A Função Afim	1. O Plano Numérico R^2
5.3 A Função Linear	2. A Função Afim
5.4 Caracterização da Função Afim	3. A Função Linear
5.5 Funções Poligonais	4. Caracterização da Função Afim
Exercícios.	5 Funções Poligonais
	Exercícios.
Capítulo 6: Funções Quadráticas	**Capítulo 6: Funções Quadráticas**
6.1 Definição e Preliminares	1 Definição e Preliminares
6.2 Um Problema Muito Antigo	2.Um Problema Muito Antigo
6.3 A Forma Canônica do Trinômio	3. A Forma Canônica do Trinômio
6.4 O Gráfico da Função Quadrática	4. O Gráfico da Função Quadrática
6.5 Uma Propriedade Notável da Parábola	5. Uma Propriedade Notável da Parábola
6.6 O Movimento Uniformemente Variado	6. O Movimento Uniformemente Variado
	7. Caracterização das funções quadráticas
Exercícios.	Exercícios.
Capítulo 7: Funções Polinomiais	**Capítulo 7: Funções Polinomiais**
7.1 Funções Polinomiais vs Polinômios	1. Funções Polinomiais vs Polinômios
7.2 Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores	2. Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores
7.3 Gráficos de Polinômios	3. Gráficos de Polinômios
Exercícios.	Exercícios.
Capítulo 8: Funções Exponenciais e Logarítmicas	**Capítulo 8: Funções Exponenciais e Logarítmicas**
8.1 Introdução	1. Introdução
8.2 Potências de Expoente Racional	2. Potências de Expoente Racional
8.3 A Função Exponencial	3. A Função Exponencial
8.4 Caracterização da Função	4. Caracterização da Função Exponencial

Exponencial 8.5 Funções Exponenciais e Progressões 8.6 Função Inversa 8.7 Funções Logarítmicas 8.8 Caracterização das Funções Logarítmicas 8.9 Logaritmos Naturais 8. 10 A Função Exponencial de Base *e* 8.11 Alguns Exemplos Clássicos Exercícios.	5. Funções Exponenciais e Progressões 6. Função Inversa 7. Funções Logarítmicas 8. Caracterização das Funções Logarítmicas 9. Logaritmos Naturais 10. A Função Exponencial de Base *e* 11. Como verificar que f(x+h)/f(x) depende apenas de h. Exercícios.
Capítulo 9: Funções Trigonométricas 9.1 Introdução 9.2 A Função de Euler e a Medida de Ângulos 9.3 As Funções Trigonométricas 9.4 As Fórmulas de Adição 9.5 A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos Exercícios.	**Capítulo 9: Funções Trigonométricas** 1. Introdução 2. A Função de Euler e a Medida de Ângulos 3. As Funções Trigonométricas 4. As Fórmulas de Adição 5. A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos Exercícios.
Capitulo 10: Soluções de Exercícios 10.1 Conjuntos 10.2 Números Naturais 10.3 Números Cardinais 10.4 Números Reais 10.5 Funções Afins 10.6 Funções Quadráticas 10.7 Funções Polinomiais 10.8 Funções Exponenciais e Logarítmicas 10.9 Funções Trigonométricas.	

Fonte: elaboração da autora a partir de Lima (2013) e Lima (1998).

Apesar da similaridade entre os conteúdos dos livros, uma discrepância que chamou nossa atenção é que os valores cobrados por eles na “loja da SBM” são distintos, uma vez que o livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 está disponível para compra[122] pelo valor de R$ 30, 00, para não sócio da SBM, e a R$ 22,50 para sócios da SBM, enquanto o livro *Números e Funções Reais* está à disposição para compra[123] pelo valor de R$ 55,00, para não sócio da SBM, e a R$ 41,25 para sócios da SBM.

Essa discrepância é destacada por nós porque o projeto acadêmico do PROFMAT previa que o material didático impresso e virtual seria “disponibilizado gratuitamente ao estudante” (CAPES, 2010, p. 80), o que não ocorre uma vez que os livros da Coleção PROFMAT são disponibilizados para os estudantes única e exclusivamente por sua aquisição na Loja da SBM[124]. Além disso, nos dois polos em que acompanhamos a implementação do currículo do PROFMAT, a Coleção PROFMAT não está disponível no acervo das bibliotecas institucionais.

De acordo com a Programação[125] das Aulas de 2014 – Semestre 1 – da Turma 2014, para a disciplina de Números e Funções, os “números naturais” e Racionais deveriam ser trabalhados a partir da seguinte esquematização:

Semana 24/fevereiro a 02/março:
- Aulas presenciais que abordassem o conteúdo: “Conjuntos”. - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 1 do livro: LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
Semana 03/março a 09/março:
- Aulas presenciais que abordassem os conteúdos: “Funções”, “Números Reais -

[122]Site da Loja da SMB: http://loja.sbm.org.br/index.php/colecao-do-professor-de-matematica/a-matematica-no-ensino-medio-volume-1.html. Acesso em: 25 abr. 2015.
[123]Site da Loja da SBM: http://loja.sbm.org.br/index.php/colecao-profmat/numeros-e-funcoes-reais.html. Acesso em: 25 abr. 2015.
[124] Disponível em: http://loja.sbm.org.br/index.php/colecao-profmat.html?p=2. Acesso em: 25 abr. 2015.
[125]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/programa%C3%A7%C3%A3o/2014/Programao_MA11_2014_1_Turma_2014.pdf. Acesso em: 26 jul. 2014.

Comensurabilidade".   - Realização de oficina de problemas   Bibliografia: - Capítulos 3 e 4 do livro: LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
Semana 10/março a 16/março:
- Aulas presenciais que abordassem os conteúdos: "Funções - Completeza", "Números Reais – Descrição Formal".   - Realização de oficina de problemas   Bibliografia: - Capítulo 4 do livro: LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
Semana 17/março a 23/março:
- Aulas presenciais que abordassem os conteúdos: "Números Reais – Representação Decimal", "Números Reais – Desigualdades, Intervalos e Valor Absoluto".   - Realização de oficina de problemas   Bibliografia: - Capítulo 4 do livro: LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

Conforme o cronograma acima evidencia, o estudo dos números naturais não é contemplado pelo cronograma da disciplina "Números e Funções Reais" apesar de, tanto a ementa quanto a bibliografia, trazerem em seu bojo o estudo desta temática. Conforme veremos no Capítulo 6 deste trabalho, este conteúdo não foi abordado nas aulas presenciais do ano de 2014 no polo em que acompanhamos a implementação do cronograma desta disciplina. Apesar disso, na sequência apresentaremos a descrição dos capítulos 2, 3 e 4 – que versam sobre os números naturais, negativos, racionais, irracionais e reais – do livro: LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

6.3.1 O livro "Números e Funções Reais"

6.3.1.1 O Capítulo "Números Naturais"

6.3.1.1.1 Seção "Introdução"

Lima (2013) inicia a introdução do capítulo "Números Naturais" assinalando que "Enquanto os conjuntos constituem um meio de auxiliar, os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a Matemática. (O outro é o espaço, junto com as figuras geométricas nele contidas.)" (p. 22). Na sequência, o autor descreve números como sendo "[...] entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza (LIMA, 2013, p. 22).

No encadeamento da obra, Lima critica as definições de número apresentadas em "compêndios tradicionais" e em um dicionário, segundo ele o mais "conhecido e festejado" (LIMA, 2013, p. 22) – sem, contudo, identificá-los. Segundo o autor, os "compêndios tradicionais" dizem que: "Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma *contagem* e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real" (LIMA, 2013, p. 22).

De acordo com a análise de Lima,

> Nos padrões atuais de rigor matemático, o trecho acima não pode ser considerado como uma definição matemática, pois faz uso de ideias (como grandeza, unidade, discreta, contínua) e processo (como comparação) de significado não estabelecido. Entretanto, todas as palavras que nela aparecem possuem um sentido bastante claro na linguagem do dia – a – dia. Por isso, embora não sirva para demonstrar teoremas a partir dela, a definição tradicional tem o grande mérito de nos revelar para que servem e por qual motivo foram inventados os números. (LIMA, 2013, p. 22)

Por isso, Lima (2013, p. 22) argumenta que " isto é muito mais do que se pode dizer sobre a definição que encontramos no nosso dicionário mais conhecido e festejado", que "define" número da seguinte forma: "Número. Do LAT. *numeru*. *S. m.* 1. *Mat.* O conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado (LIMA, 2013, p. 22)".

Esta seção da obra apresenta a mesma estrutura e o mesmo texto apresentados por Lima na seção “Introdução” da obra *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1, conforme o fragmento abaixo evidencia:

> Nos padrões atuais de rigor matemático, o trecho acima não pode ser considerado como uma definição matemática, pois faz uso de ideias (como grandeza, unidade, discreta, contínua) e processo (como comparação) de significado não estabelecido. Entretanto, todas as palavras que nela aparecem possuem um sentido bastante claro na linguagem do dia – a – dia. Por isso, embora não sirva para demonstrar teoremas a partir dela, a definição tradicional tem o grande mérito de nos revelar para que servem e por qual motivo foram inventados os números. (LIMA, 1998, p. 25)

A seção “introdução” está disponível nas páginas 25 e 26 da obra *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1.

6.3.1.1.2 Seção “Comentário: Definições, Axiomas, etc.”

Lima (2013, p. 23) inicia esta seção nomeando “definição matemática” como sendo “[...] uma convenção que consiste usar um nome, ou uma sentença breve, para designar um objeto ou uma propriedade, cuja descrição normalmente exigiria o emprego de uma sentença mais longa” (LIMA, 2013, p. 23). Posteriormente, o autor apresenta exemplos de definições: a de ângulo como sendo uma “[...] figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem”; a de primos entre si que “[...] são dois ou mais números naturais cujo único divisor comum é a unidade”; a de linha como sendo “[...] um comprimento sem largura”; a de superfície como “[...] o que possui comprimento e largura somente” e a de ângulos retos e retas perpendiculares a partir do seguinte texto “Quando uma reta corta outra formando ângulos adjacentes iguais, cada um desses ângulos chama-se *reto* e as retas se dizem *perpendiculares*” (LIMA, 2013, p. 23). As últimas três definições, de acordo com autor, extraídas dos *Elementos* de Euclides.

> As definições de ângulo e de números primos entre si, dadas acima, bem como as definições de ângulos reto e retas perpendiculares dadas por Euclides, são corretas. Elas atendem aos padrões atuais de precisão e objetividade. Por outro lado, nas definições de linha e superfície, Euclides visa apenas oferecer ao seu leitor uma imagem intuitiva desses conceitos. Elas podem servir par ilustrar o pensamento geométrico mas não são utilizáveis nos raciocínios matemáticos porque são formuladas em termos vagos e imprecisos. (LIMA, 2013, p. 23)

Na sequência, Lima (2013, p. 23) apresenta uma descrição do método axiomático. Ao introduzir esta discussão, ressalta que “[...] Na apresentação de uma teoria matemática, toda definição faz uso de termos específicos, os quais foram definidos usando outros termos, e assim, sucessivamente", processo iterativo este que, de acordo com o autor, leva a três possibilidades:

> a) Continua indefinidamente, cada definição dependendo de outras anteriores, sem nunca chegar ao fim.
> b) Conduz a uma circularidade, como nos dicionários (onde se vê por exemplo: compreender → perceber, perceber → entender e entender → compreender.)
> c) Termina numa palavra, ou num conjunto de palavras (de preferência dotadas de conotações intuitivas simples) que não são definidas, isto é, que são tomadas como representativas de conceitos primitivos. Exemplos: ponto, reta, conjunto. (LIMA, 2013, p. 23)

Salienta que as alternativas a) e b) acima citadas não convém à Matemática, sendo que a alternativa adotada é a c). Na sequência, o autor faz uma analogia entre esta última alternativa e o processo de aprendizagem da fala, arguindo que "Se prestarmos atenção, veremos que foi assim que aprendemos a falar. Numerosas palavras nos foram apresentadas sem definição e permaneceram até hoje em nosso vocabulário como conceitos primitivos, que aprendemos a usar por imitação e experiência" (LIMA, 2013, p. 24).

Em seguida, o autor define axioma por meio do seguinte enunciado:

> Para poder empregar os conceitos primitivos adequadamente, é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Tais princípios são chamados *axiomas* ou *postulados*. Assim como os conceitos primitivos são objetos que não se definem, os axiomas são proposições que não se demonstram. (LIMA, 2013, p. 24)

De acordo com o autor, a partir da fixação do rol de conceitos primitivos e axiomas relativos a uma teoria matemática "[...] todas as demais noções devem ser definidas e as afirmações seguintes devem ser demonstradas" (LIMA, 2013, p. 24), esta elaboração consistindo no método axiomático. Neste, "As proposições a serem demonstradas chamam-se *teoremas* e suas consequências imediatas são denominadas *corolários*. Uma proposição auxiliar, usada na demonstração de um teorema, é chamado um *lema*" (LIMA, 2013, p. 24). Ainda segundo Lima (2013, p. 24), a caracterização de uma proposição como sendo um axioma ou um teorema "[...] não é uma característica intrínseca de uma proposição", uma vez que depende da "[...] preferência de quem organiza a apresentação da teoria".

Ao relacionar o método axiomático com a exposição da matemática no *Ensino Médio*, Lima (2013, p. 24) argumenta que "[...] não tem cabimento expor a Matemática sob forma axiomática. Mas é necessário que o professor saiba que ela pode ser organizada sob a forma acima delineada". Conforme este fragmento evidencia, o autor argumenta que é necessário que o professor saiba que a matemática pode ser organizada sob a forma axiomáticoa, contudo Lima (2013) não elucida, por exemplo, por que é necessário que o professor conheça essa forma de exposição da matemática e nem de que forma esse conhecimento auxiliária/favorecerá o trabalho do professor da educação básica em seu trabalho no ambiente escolar.

Na sequência, Lima (2013) argumenta ser necessário que uma linha de "equilíbrio" seja seguida na sala de aula, sendo que esta linha deve basear-se nos seguintes preceitos:

> 1. Nunca dar explicações falsas sob o pretexto de que os alunos ainda não têm maturidade para entender a verdade. (Isto seria como dizer a uma criança que os bebês são trazidos pela cegonha). Exemplo: "infinito é um número muito grande" Para outro exemplo, vide RPM 29, págs 13-19.
> 2. Não insistir em detalhes formais para justificar afirmações que, além de verdadeiras, são intuitivamente óbvias e aceitas por todos sem discussão nem dúvidas. Exemplo: o segmento de reta que une um ponto interior a um ponto exterior de uma circunferência tem exatamente um ponto em comum com essa circunferência. (LIMA, 2013, p. 24-25)

O autor argumenta que fatos cuja veracidade não é evidente, como o Teorema de Pitágoras ou a Fórmula de Euler para poliedros convexos, devem ser demonstrados. Contudo, demonstrações longas, elaboradas, ou que se utilizam de resultados "acima do alcance dos estudantes" do ensino médio devem ser excetuados, como é o caso do Teorema Fundamental da Álgebra (LIMA, 2013, p. 25).

Na sequência, o autor discorre que:

> Provar o óbvio transmite a falsa impressão de que a Matemática é inútil. Por outro lado, usar argumentos elegantes e convincentes para demonstrar resultados inesperados é uma maneira de exibir sua força e sua beleza. As demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas. (LIMA, 2013, p. 25)

Dando encadeamento ao texto, Lima (2013, p. 25) apresenta o terceiro preceito a ser seguido em sala de aula por meio do seguinte enunciado: "3. Ter sempre em mente que, embora a Matemática possa ser cultivada por si mesma, como um todo coerente, de elevado padrão intelectual, formado por conceitos e proposições de natureza abstrata, sua presença no currículo escolar não se deve apenas ao valor dos seus métodos para a formação mental dos jovens". De acordo com o autor, a importância social da Matemática se deve ao fato de ela fornecer "modelos" empregáveis na análise de situações da "vida real".

> Assim, por exemplos, conjuntos são o modelo para disciplinar o raciocínio lógico, números naturais são o modelo para a contagem e números reais são o modelo para medida; funções afins servem de modelo para situações, como o movimento uniforme, em que os acréscimos da função são proporcionais aos acréscimos da variável independente. E assim por diante. (LIMA, 2013, p. 25)

O autor finaliza esta seção destinada a "comentários" argumentando que todos os tópicos do livro *Números e Funções Reais* serão abordados a partir do seguinte lema: "a Matemática fornece modelos abstratos para serem utilizados em situações concretas, do dia a dia e das Ciências. Para poder empregar estes modelos, é necessário verificar, em cada caso, que as hipóteses que lhe servem de base são satisfeitas" (LIMA, 2013, p. 25-26).

Da mesma forma como ocorreu na seção "introdução", esta seção da obra apresenta tanto a estrutura quanto o texto iguais aos apresentados na seção "2. Comentário: Definições, Axiomas, etc." da obra *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1. A seção "Introdução" está disponível nas páginas 26, 27, 28 e 29 do livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1.

6.3.1.1.3 Seção o "Conjunto dos Números Naturais"

Lima inicia esta seção de sua obra vinculando os números naturais a aspectos históricos ao discorrer que "Lentamente, na medida em que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro, ...) que são os números naturais" (LIMA, 2013, p. 26).

Na sequência, o autor argumenta que "[...] tribos mais rudimentares contam apenas *um, dois, muitos*" (LIMA, 2013, p. 26) e resquícios deste modelo ainda são identificados em idiomas como o inglês, francês, o italiano e o alemão. Lembra que "A linguagem inglesa ainda guarda um resquício desse estágio na palavra *thrice*, que tanto pode significar 'três vezes' como 'muito' ou 'extremamente'", e que "Algo parecido ocorre com o idioma francês, onde as palavras *très* (muito) e *trop* (demasiado) são claramente vocábulos cognatos de *trois* (três), bem como em italiano, onde *tropo* (excessivamente) deriva de *tre* (três)" e que, diferentemente do que ocorre com estes idiomas, no "[...] alemão, o fenômeno se dá como *viel* que significa "muito" enquanto *vier* quer dizer quatro". Ao final da explanação o autor questiona se seria coincidência, "ou os germânicos estavam um passo à frente dos bretões, gauleses e romanos" (LIMA, 2013, p. 26).

Na sequência, o autor discorre que atualmente o conjunto N dos números naturais pode ser descrito "concisa" e "precisamente" por meio da síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no início do Século XX (LIMA, 2013, p. 26), que apresentamos na sequência:

> N é um conjunto, cujos elementos são chamados *números naturais*. A essência da caracterização de N reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n, n\` ∈ N, dizer que n\` é o sucessor de n significa que n\` vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n\`. Evidentemente, esta explicação apenas substitui "sucessor" por "logo depois", portanto não é uma definição. O termo primitivo "sucessor" não é definido explicitamente.
>
> Fonte: Lima (2013, p. 26).

De acordo com Lima (2013), tudo o que se sabe sobre os números naturais "pode ser demonstrado" a partir dos Axiomas de Peano, apresentados pelo autor do seguinte modo:

> a) Todo número natural tem um único sucessor;
> b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
> c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
> d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, X ⊂ N). Se 1 ∈ X e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então X=N.
>
> Fonte: Lima (2013, p. 27).

Em sua obra *Análise Real*, volume 1, Lima (2004) apresenta em conjunto os axiomas de Peano a partir de uma abordagem muito similar a que adotou na obra *Números e Funções*, conforme o fragmento abaixo evidencia:

1. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.
2. Existe um único número natural 1 que não é chamado sucessor de nenhum outro;
3. Seja um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Fonte: Lima (2004, p. 1).

A diferença entre os enunciados apresentados pelo autor nestas obras é que, na datada do ano de 2004, o autor condensa os axiomas a) e b) constantes na obra de 2013 em um único enunciado, originando assim, o axioma 1 presente na obra de 2004.

Na sequência, discorre, superficialmente, sobre o sistema de numeração decimal:

> Um engenhoso processo, chamado *sistema de numeração decimal*, permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Além disso, os primeiros números naturais têm nomes: o sucessor do número um chama se (sic) “dois”, o sucessor de dois chama-se “três”, etc. A partir de um certo ponto, esses nomes tornam-se muito complicados, sendo preferível abrir mão deles e designar os grandes números por sua representação decimal. (Na realidade, os números muito grandes não possuem nomes. Por exemplo, como se chamaria o número 10^{1000}?)

Consideramos esta apresentação como superficial, porque o autor furtou-se a discutir os diferentes aspectos do conhecimento matemático subjacente à construção e uso do sistema decimal, como “[...] a noção de agrupamento, a linguagem envolvida na leitura dos números, a ideia de valor relativo do algarismo tendo em vista a sua posição (de modo especial o caso do zero)” (MOREIRA, 2004, p. 86), uma discussão fundamental para o ensino, por exemplo, das operações entre os elementos que compõem este conjunto.

Em seguida, Lima argumenta que

> Deve ficar claro que o conjunto N={1, 2, 3, ...} dos números naturais é uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significado. Cada um desses objetos (um número natural) possui apenas um lugar determinado nesta sequência. Nenhuma outra propriedade lhe serve de definição. Todo número tem um sucessor (único) e, com exceção de 1, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor). Vistos desta maneira, podemos dizer que os números naturais são *números ordinais*: 1 é o primeiro, 2 é o segundo, etc. (LIMA, 2013, p. 27)

Apesar de o autor reconhecer que os objetos da sequência dos números naturais são abstratos e que, em princípio, são vazios de significado, o autor não discute, por exemplo, como poderia ser o trabalho do professor ao abordar este conteúdo no ambiente escolar, além de, da mesma forma como ocorreu com a obra de Morgado e Carvalho (2013), o símbolo de "reticência matemática" (...) ser colocado na representação do conjunto dos números naturais, mas sem fazer nenhum comentário a respeito do significado desse símbolo. O autor também não apresenta indicativos de como os axiomas de Peano poderiam ser abordados no ambiente de sala de aula, ou seja, de como o professor poderia dar significado ao enunciado dos referidos axiomas aos estudantes do ensino fundamental e médio.

Esta seção, com exceção de um único parágrafo[126], apresenta ordenação e texto igual ao apresentado por Lima (1998) no livro *A Matemática do Ensino Médio* – Volume 1 no texto intitulado "3. O conjunto dos Números Naturais" apresentado às páginas 29, 30 e 31 da referida obra.

6.3.1.1.4 Seção "Um Pequeno Comentário Gramatical"

O autor inicia esta seção argumentando que as palavras um, dois, três ao serem empregadas em frases como "o número um", "o número dois", "o número três" estão sendo utilizadas como substantivos, porque "são nomes de objetos". O autor discorre ainda sobre o emprego destas palavras em frases como "um ano, dois meses e três dias", em que, de acordo com ele, estão associadas à ideia de número cardinal – representam o resultado de contagens –não sendo substantivos (LIMA, 2013). Na sequência, Lima compara a classificação feita pelos gramáticos brasileiros e portugueses com a feita pelos gramáticos de outros idiomas (especificamente inglês, francês e alemão) ao discorrer que as palavras um, dois e três na frase "um ano, dois meses e três dias" "pertencem a uma categoria gramatical que, noutras línguas (como francês, inglês e alemão, por exemplo) é chamada *adjetivo numeral* e que os gramáticos brasileiros e portugueses, há um par de décadas, resolveram chamar de *numeral* apenas" (LIMA, 2013, p. 27).

---

[126]O parágrafo apresenta o seguinte texto: "Algo parecido ocorre com o idioma francês, onde as palavras *très* (muito) e *trop* (demasiado) são claramente vocábulos cognatos de *trois* (três), bem como em italiano, onde *tropo* (excessivamente) deriva de *tre* (três). É curioso observar que, em alemão, o fenômeno se dá como *viel* que significa "muito" enquanto *vier* quer dizer quatro. Coincidência, ou os germânicos estavam um passo à frente dos bretões gauleses e romanos?" (LIMA, 2013, p. 26). Ele consta somente na obra *Números e Funções Reais*.

O autor finaliza esta seção arguindo que ela objetiva "salientar a diferença entre os números naturais, olhados como elementos do conjunto N, e o seu emprego como número cardinais", e destaca que apresentará na sequência uma discussão sobre o significado de número cardinal (LIMA, 2013, p. 27-28).

Esta seção apresenta ordenação e texto igual ao apresentado por Lima (1998) na obra *A Matemática do Ensino Médio* – Volume 1, com o titulo "Um pequeno comentário Gramatical" apresentado na página 31 da referida obra.

6.3.1.1.5 Seção "Destaque para o Axioma da Indução"

Conforme o título desta seção indica, ela é destinada ao Axioma da Indução que, de acordo com Lima (2013, p. 28) "[...] é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais". Na sequência, o autor o enuncia a partir de propriedades:

Seja P (n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) P (1) é válida;
ii) Para todo $n \in$ N, a validez de P (n) implica a validez de P (n\`), onde n\`é o sucessor de *n*.

Então P (n) é válida qualquer que seja o número natural *n*.

Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais P (n) é válida, veremos que 1 $\in$ X em virtude de i) e que *n* e X $\rightarrow n$\` $\in$ X em virtude de ii). Logo, pelo axioma da indução, concluímos que X = N.

Fonte: Lima (2013, p. 28).

A apresentação feita por Lima (2013) do axioma da indução é similar à que ele apresenta na obra *Curso de Análise*, volume 1 (LIMA, 2002) na página 27.

Em seguida, o autor argumenta que:

> O axioma da indução é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural *n* pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. Ele está presente (pelo menos da forma implícita) sempre que, ao afirmarmos a veracidade de uma proposição referente aos números naturais, verificamos que ela é verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e dizemos "e assim por diante...". Mas é preciso ter cuidado com

> esta última frase. Ela pressupõe que P (n) → P (n`) para todo $n \in$ N. (LIMA, 2013, p. 29, grifo nosso)

Este parágrafo grifado se constitui na única diferença entre esta seção do livro *Números e Funções Reais* e a seção “4. Destaque para o Axioma da Indução” (páginas 32 e 33) da obra *A Matemática do Ensino Médio* – Volume 1. E a seção é finalizada com o autor chamando a atenção do leitor para a utilização inadequada do axioma da indução.

6.3.1.1.6 Seção “Adição, Multiplicação e Ordem”

Esta seção é destinada à definição de duas das operações “fundamentais” entre os números naturais: “a adição, que aos números n, $p \in$ N faz corresponder a *soma* $n + p$ e a multiplicação, que lhes associa o *produto* np” (LIMA, 2013, p. 29, grifo do autor). Lima (2013) reelabora os enunciados acima de modo a apresentar a soma $n + p$ como “o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor”, de modo que “n+1 é o sucessor de n, n+2 é o sucessor do sucessor de n, etc” (LIMA, 2013, p. 29). E apresenta, como exemplo, a adição de 2 + 2 = 4, em que “4 é o sucessor do sucessor de 2”. Já para o produto, Lima (2013, i. ibid.) inicia fixando, por definição, que $n.1 = n$ e, quando $p \neq 1$, tem-se que “np é a soma de p parcelas iguais a n”.

No encandeamento do texto, Lima (2013) argumenta que:

> Em última análise, a soma $n + p$ e o produto np têm mesmo os significados que lhes são atribuídos pelas explicações dadas acima. Entretanto, até que saibamos utilizar os números naturais para efetuar contagens, não tem sentido falar em “p vezes” e “p parcelas”. Por isso, as operações fundamentais devem ser definidas por indução. (LIMA, 2013, p. 29, grifos nossos)

Na sequência, Lima reapresenta as definições adição e multiplicação, contudo agora elaboradas a partir da indução matemática:

Adição: $n + 1$ = sucessor de n e $n + (p + 1) = (n + p) + 1$. Esta última igualdade diz que se sabemos somar p a todos os números naturais n, sabemos também somar $p + 1$: a soma $n + (p + 1)$ é simplesmente o sucessor $(n + p) + 1$ de $n + p$. O axioma da indução garante que a soma $n + p$ está definida para quaisquer $n,p \in$ N.

Fonte: Lima (2013, p. 29, grifo do autor).

Multiplicação: $n.1 = n$ e $n (p + 1) = np + n$. Ou seja: multiplicar um número n por 1 não o altera. E se sabemos multiplicar todos os números n por p, sabemos também multiplicá-los por p+1: basta tomar $n (p+1) = np + n$. Por indução, sabemos multiplicar todo n por qualquer p.
Fonte: Lima (2013, p. 29, grifo do autor).

No tocante à abordagem de Lima das operações de adição e multiplicação, o principal problema que se identifica é que o autor não vincula essas operações com a prática do professor de Matemática da educação básica, especialmente do professor do ensino fundamental, o que se evidencia na seguinte afirmação: *"Em última análise, a soma n + p e o produto np têm mesmo os significados que lhes são atribuídos pelas explicações dadas acima. Entretanto, até que saibamos utilizar os números naturais para efetuar contagens, não tem sentido falar em "p vezes" e "p parcelas". Por isso, as operações fundamentais devem ser definidas por indução" (LIMA, 2013, p. 29).*

Ou seja, de acordo com este autor, não é possível interpretarmos a operação $n + p$ como sendo "o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor" porque até que não saibamos efetuar contagens, não tem sentido falar em p vezes. Assim, o autor entende que a operação de adição deve ser definida por meio da indução matemática. Ao definir adição desse modo, o autor recai em uma definição que pode ser classificada como cíclica ao ser abordada no ambiente escolar, uma vez ele define adição por meio da própria adição, conforme a afirmação abaixo evidencia: "Seja $n + 1$ = sucessor de n e $n + (p + 1) = (n + p) + 1$. Esta última igualdade diz que se sabemos somar p a todos os números naturais n, sabemos também somar $p + 1$". (LIMA, 2013, p. 29). Além disso, o autor não discute como esta definição pode ser abordada no ambiente escolar, nem, por exemplo, qual seria o formato dos exercícios que poderiam ser utilizados pelo professor ao abordar este conteúdo no ambiente escolar.

A afirmação "até que saibamos utilizar os números naturais para efetuar contagens" suscita o seguinte questionamento: qual é o entendimento do autor sobre o procedimento de "contar" elementos de uma coleção? Nas seções seguintes do trabalho, Lima vincula a contagem de elementos de um conjunto ao conceito de função, especificamente ao conceito de bijeção. Conforme veremos doravante, ambas as abordagens propostas por Lima (2013) para o estudo dos números naturais não estão diretamente vinculada com o trabalho do professor do ensino fundamental, seja a definição por indução matemática (que vimos agora) ou a definição via bijeção (que será vista na seção referente aos números cardinais). Tais comentários são válidos também para o caso da operação de multiplicação.

Além disso, o autor faz uma construção do conjunto dos números naturais e de apenas duas de suas operações (adição e multiplicação), omitindo a definição das operações de subtração e divisão entre números naturais, sendo que elas também são objeto de trabalho do professor da educação básica. O autor também não vincula as definições de adição e multiplicação (e consequentemente de subtração e divisão) aos algoritmos comumente veiculados pela matemática escolar e utilizados no cálculo dessas operações. Outra observação relevante refere-se à não vinculação desta obra com uma das principais práticas do professor de Matemática, a de dar sentido às operações entre os naturais por meio de situações-problema e problemas-história.

A descrição que apresentamos até o momento sobre o conjunto dos números naturais, estabelecendo um paralelo entre outras duas obras do autor, *Curso de Análise*, volume 1 e *Análise Real*, volume 1, evidencia sua estreita relação entre a abordagem feita pelo autor no livro *Números e Funções Reais*, uma vez que estes dois últimos livros são objeto de estudo em diversos cursos de ensino superior (matemática universitária), especialmente em cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Sendo assim, a abordagem proposta pelo autor também não apresenta inovações para o ensino da matemática escolar, uma vez que os números naturais (e as operações de adição e multiplicação) são estudados na formação inicial de professores dessa disciplina.

Em seguida, Lima (2013) apresenta a relação de ordem entre os números naturais em termos da adição:

> Dados $m,n \in \mathbb{N}$, diz-se que m é menor do que n, e se escreve $m<n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.
>
> Fonte: Lima (2013, p. 29).

Ainda no tocante à relação de ordem $m<n$, Lima (2013) apresenta as seguintes propriedades:

Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

Tricotomia: Dados $m,n \in$ N, vale uma, e somente uma, das alternativas $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in$ N, tem-se $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$.

Boa-ordenação: Todo subconjunto não vazio X ⊂ N possui um menor elemento.

Fonte: Lima (2013, p. 29).

Em relação à propriedade de boa-ordenação, Lima (2013) a reinterpreta da seguinte forma: “Isto significa que existe um elemento $m_0 \in$ X que é menor do que todos os demais elementos de X. A boa-ordenação pode muitas vezes substituir com vantagem a indução como método de prova de resultados referentes a número naturais” (LIMA, 2013, p. 30).

Esta abordagem de Lima (2013) à relação de ordem entre números naturais é igual à abordagem feita por ele na obra *Curso de Análise* - volume 1– e já explicitado anteriormente neste trabalho (ver páginas 244, 245 e 246) – conforme apresentamos abaixo:

Dados os números naturais *m, n* dizemos que *m* é *menor do que n*, e escrevemos

$$m < n,$$

para significar que existe algum $p \in$ N tal que $n = m + p$.

Fonte: Lima (2002, p. 29, grifo do autor).

Logo na sequência, o autor argumenta que a relação < goza das seguintes propriedades:

Transitividade - se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

Tricotomia - dados m,n, exatamente uma das alternativas seguintes pode ocorrer: $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$.

Monotonicidade da adição - se $m < n$ então, para todo $p \in$ N, tem-se $m + p < n + p$.

Monotonicidade da multiplicação - $m < n \rightarrow m.p < n.p$.

Fonte: Lima (2002, p. 29 – 30).

Já a propriedade “Boa-ordenação” é apresentada por Lima (2002) na forma de Teorema:

Teorema 1 (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não vazio* $A \subset N$ *possui um elemento mínimo.*

Fonte: Lima (2002, p. 31, grifo do autor).

A abordagem de Lima (2013) à relação de ordem entre números naturais é igual à abordagem feita por ele na obra *Análise Real* - volume 1, e consta da página 3 da referida obra.

A seção é finalizada pelo autor com dois exemplos, ambos objetivando a exploração da “demonstração matemática”. O primeiro exemplo versa sobre a prova por indução matemática:

Exemplo 2.1. Queremos provar a validez, para todo número natural n, da igualdade

$$P(n): 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Usaremos indução. Para n=1, P (1) se resume a afirmar que 1=1. Supondo P (n) verdadeira para um certo valor de n, somamos $2n+1$ a ambos os membros da igualdade acima, obtendo

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

ou seja:

$$1 + 3 + 5 + ... + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2$$

Mas esta última igualdade é P (n + 1). Logo P (n) $\rightarrow$ P (n + 1). Assim, P (n) vale para todo $n \in$ N. Podemos então afirmar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n.

Fonte: Lima (2013, p. 30).

O enunciado deste exemplo também é objeto de discussão na obra *Análise Real* - volume 1, (página 9) e na obra *Elementos de Aritmética* de Abramo Hefez, datada do ano de 2006.

O segundo exemplo apresentado por Lima no livro *Números e Funções Reais* objetiva explorar a utilização da propriedade "Boa-ordenação":

Lembremos que um número natural p chama-se primo quando não pode ser expresso como produto $p = mn$ de dois número naturais, a menos que um deles seja igual a 1 (e o outro igual a p); isto equivale a dizer que os fatores m,n não podem ser ambos menores do que p. Um resultado fundamental em Aritmética diz que todo número natural é primo ou é um produto de fatores primos. Provaremos isto por boa ordenação (*sic*). Usaremos a linguagem de conjuntos. Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos. Observemos que se m e n pertencem a X então o produto mn pertence a X. Seja Y o complementar de X. Assim, Y é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Queremos provar que Y é vazio. Isto será feito por redução ao absurdo (como sempre se dá nas demonstrações por boa-ordenação). Com efeito, se Y não fosse vazio, haveria um menor elemento $a \in$ Y. Então todos os número menores do que a pertenceriam a X. Como a não é primo, ter-se-ia $a = m.n$, com $m < a$ e $n < a$, logo $m \in$ X e $n \in$ X. Sendo assim, $mn \in$ X. Mas mn=a, o que daria $a \in$ X, uma contradição.

Segue-se que Y=∅, concluindo a demonstração.

Fonte: Lima (2013, p. 31).

O problema dos exemplos apresentados por Lima é que eles se reduzem a explorar o emprego da indução matemática e da propriedade "Boa-ordenação" em demonstrações matemáticas. O autor não apresenta qualquer discussão sobre a relação entre esses exemplos com a prática do professor de Matemática da educação básica. O autor não discute, por exemplo, qual é o significado da igualdade P (n): $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, se esta demonstração é acessível aos estudantes da educação básica, se ela precisa ser adaptada para tornar-se acessível aos estudantes da educação básica, em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível utilizar esta igualdade e a referida demonstração. No tocante ao segundo exemplo, o problema é semelhante, na medida em que o autor não discute qual é o significado matemático do Teorema Fundamental da Aritmética, se este teorema – e sua demonstração por meio da Boa-ordenação – pode ser abordado na educação básica e quais seriam as características desta abordagem, se ela precisa ser adaptada para tornar-se acessível aos estudantes da educação básica, em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível utilizar esta igualdade e a referida demonstração.

6.3.1.1.7 Seção "Algumas demonstrações"

O autor dedica esta seção à demonstração de propriedades do conjunto dos números naturais, a saber: Associatividade da Adição, Comutatividade da Adição, Distributividade, Comutatividade da Multiplicação, Lei do corte para a Adição, Transitividade da Relação de Ordem, Tricotomia, Monotonicidade, Lei do Corte para Desigualdades e o Princípio da Boa-Ordenação.

De acordo com Lima (2013, p. 31), as propriedades demonstradas por ele são "[...] alguns fatos básicos sobre números naturais, que são utilizados com muita frequência, na maioria das vezes sem que nos detenhamos a indagar como prová-los". Argumenta ainda que o "[...] objetivo é mostrar de que modo tais fatos resultam dos axiomas de Peano. Não há raciocínios criativos ou métodos elaborados para prová-los. Em todas as demonstrações, o papel central é desempenhado pelo Axioma da Indução" (LIMA, 2013, p. 31).

O autor começa pela demonstração da propriedade Associativa da Adição, demonstração apresentada da seguinte forma:

Associatividade da adição: Para quaisquer números naturais *m*, *n*, *p* tem-se

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $m, n \in \mathrm{N}$ e provamos que, para todo $p \in \mathrm{N}$, vale $m + (n + p) = (m + n) + p$. Para isto, usaremos indução em p. Quando $p=1$, a igualdade $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ é parte da definição de adição. Supondo o resultado válido para um certo p, temos

$$m + [n + (p + 1)] =^{1} m + [(n + p)+1] =^{2} [m + (n + p)] + 1$$

$$=^3 [(m + n) + p] + 1 =^4 (m + n) + (p + 1),$$

onde as igualdades 1, 2 e 4 estão na definição de adição e a igualdade 3 deve-se à hipótese de indução. Assim, tem-se

$$m + [n + (p + 1)] = (m + n) + (p + 1)$$

E a indução está completa.

Fonte: Lima (2013, p. 31-32).

Na sequência, aborda as propriedades Comutatividade da Adição e Distributividade, cujos enunciados são apresentados pelo autor em seguida. Ambas as propriedades são demonstradas por meio da indução matemática:

Comutatividade da adição: Para quaisquer $m, n \in$ N, tem-se

$$m + n = n + m.$$

Fonte: Lima (2013, p. 32).

Distributividade: Para quaisquer $m, n, p \in$ N, tem-se

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Fonte: Lima (2013, p. 33).

Em seguida, o autor apresenta a propriedade Comutativa da Multiplicação:

Comutatividade de multiplicação: Para quaisquer $m, n \in$ N, tem-se

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Demonstração: Fixando arbitrariamente $m \in$ N, mostraremos, por indução, que se tem $m \cdot n = n \cdot m$ para qualquer $n \in$ N.

Para n = 1, usaremos indução a fim de provar que vale $m \,.\, 1 = 1 \,.\, m$ seja qual for $m \in$ N. Como sabemos que m.1= m, devemos mostrar (por indução) que $1 \,.\, m = m$. Isto é claro quando m=1 e, se for verdadeiro para um certo m, teremos $1.\,(m + 1) = 1.m + 1$, pela definição de multiplicação. Em seguida, suponhamos $m \,.\, n = n \,.\, m$ e provemos que isto leva a $m \,.\, (n + 1) = (n + 1).\, m$. Com efeito,

$$m \,.\, (n + 1) =^{1} m \,.\, n + m =^{2} \boldsymbol{n \,.m + 1} =^{\mathbf{3}} (n + 1).\, m$$

onde 1 é a definição de multiplicação, 2 a hipótese de indução e 3 a distributividade.

Fonte: Lima (2013, p. 32, grifo nosso).

Ao nos atermos à demonstração apresentada por Lima (2013), especialmente à igualdade

$$m \,.\, (n + 1) =^{1} m \,.\, n + m =^{\mathbf{2}} \boldsymbol{n \,.m + 1} =^{\mathbf{3}} (n + 1).\, m$$

verificamos que ela apresenta um erro na passagem da igualdade 2 para a 3, em que o autor substitui o m da expressão $m \,.\, n \,\boldsymbol{+}\, \boldsymbol{m}$ por 1 na medida em que iguala esta expressão a $\boldsymbol{n \,.m + 1}$. A igualdade correta deveria apresentar o seguinte formato:

$$m \,.\, (n + 1) =^{1} m \,.\, n + m =^{\mathbf{2}} \boldsymbol{n \,.m + m} =^{\mathbf{3}} (n + 1).\, m$$

Na sequência, o autor apresenta e demonstra as propriedades Lei do Corte e Transitividade da Relação de Ordem, sendo que a primeira é demonstrada por indução matemática:

Lei do Corte para a Adição: Se $m, n, p \in$ N e $m + p = n + p$, então $m = n$.

Fonte: Lima (2013, p. 34).

A Lei do Corte é demonstrada a partir da definição da Relação de ordem em termos da adição:

Transitividade da Relação de Ordem: Dados $m, n, p \in$ N se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

As hipóteses $m < n$ e $n < p$ significam que existe $q, r \in$ N tais que $n = m + q$ e $p = n$

+ r, logo $p = m + (q + r)$ e daí $m<p$

Fonte: Lima (2013, p. 34).

Na sequência da obra, Lima se propõe a demonstrar a Tricotomia e para isto apresenta o seguinte enunciado e demonstração:

Tricotomia: Dados m, n, $p \in$ N, há três possibilidades, as quais se excluem mutuamente: 1) $m = n$; 2) $m < n$; 3) $n < m$.

Mostraremos inicialmente que dois números naturais m, n são sempre comparáveis, isto é, ou $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$. (Contraste com a relação de inclusão A ⊂ B, entre conjuntos, que a transitiva mas não goza da comparabilidade.)

Fixemos então $m \in$ N e provemos que todo número $n \in$ N é comparável com m. Notemos que 1 é comparável com todo número natural pois todo número natural $n \neq 1$ é sucessor de outro, logo é da forma $n = p + 1$ e assim $1 < n$. Portanto, podemos supor $m \neq 1$.

Seja X o conjunto dos números naturais comparáveis com m. Vamos provar, por indução, que X = N. Já vimos que 1 ∈ X. Mostraremos agora que $p \in$ X $\rightarrow p + 1 \in$ X.

De fato, sendo $p \in$ X, teremos $m = p$; $m < p$ ou $p < m$. Se for $m = p$ ou $m < p$ então $m < p + 1 \in$ X. **Se, entretanto, $p < m$ então $m = p + r$ com $r \in$ N. Caso se tenha $r = 1$ então $r = 1 + x$ e $m = p + 1 + x$ logo $p + 1 > m$ e daí $p+1$ é comparável com m, isto é, p + 1 ∈ X.** Se, entretanto, tivermos $r \neq 1$ então $r = 1 + x$ e $m = p + 1 + x$, donde $p + 1 < m$ e novamente $p+1$ é comparável com m, ou seja, $p + 1 \in$ X. Concluímos, por indução, que X = N. Isto significa que, dados $m \neq n \in$ N, tem-se $m < n$ ou $n < m$. Finalmente, não se pode ter ao mesmo tempo $m < n$ e $n < m$ pois isto nos daria $n = m + p$ e $m = n + q$, logo $n = n + p + q$. (Como não dispomos do zero, não podemos cortar n.) Daí $n+1 = n + p + q + 1$ e (agora) cortando n, vem $1 = p + q + 1$ e seria sucessor de $p + q$, um absurdo.

Fonte: Lima (2013, p. 34-35, grifo nosso).

Considerando o grifo que fizemos no texto apresentado imediatamente acima, ao analisarmos as afirmações de Lima, temos que: Se *p* for igual ou maior que *m*, então o sucessor de *p* é maior do que *m*, assim temos que *p+1* é comparável com *m*, logo p+1 ∈ *X*. Contudo se *p* for menor que *m*, teremos $m = p + r$ *com* $r \in N$ fixo. Na sequência Lima afirma que "*Caso se tenha* $r = 1$ *então* $r = 1 + x$ *e* $m = p + 1 + x$ *logo* $p + 1 > m$ *e daí* $p+1$ *é comparável com m, isto é,* $p + 1 \in X$". Entretanto a conclusão de que $p + 1 > m$ é resultante da implicação *"*Se $p < m$ então $m = p + r$ e caso $r = 1$, então teríamos que $m = p + 1 + x$*"(LIMA, 2013)*está equivocada.Na medida em que é fixado que $p < m$ implica em $m = p + r$, temos que o número natural *r* também é fixo, ou seja, o valor de *r* depende do valor de *p* e *m*. Neste caso teríamos apenas duas possibilidades, a de $r=1$ e a de $1< r$. No caso $r=1$, temos que $m=p+1$, de modo que $p+1$ é comparável com *m*, conforme se queria provar. Já se $1< r$, deve existir um $x \in N$, tal que $r= 1 + x$, então teríamos que $m=p+1+x = (p+1)+ x$ e assim, $p+1< m$ e $p+1$ também é comparável com *m* porque ele é menor do que *m*, conforme se desejava provar.

No encadeamento da obra, Lima (2013), apresenta um enunciado que é vinculado à propriedade Monotonicidade e o demonstra a partir da relação de ordem que é definida em termos da adição. O enunciado possui o seguinte formato:

Monotonicidade: Se $m, n \in$ N são tais que $m < n$ então $m + p < n + p$ e$\boldsymbol{m \,.\, n < n \,.\, p}$para quaisquer $p \in$ N.

Fonte: Lima (2013, p. 35, grifo nosso).

O enunciado apresentado por Lima (2013) no tocante à monotonicidade em relação à multiplicação apresenta um erro ao indicar que $m \,.\, n < n \,.\, p$ ao invés de $m \,.\, p < n \,.\, p$, sendo $m, n, p \in$ N.

No decorrer da seção, o referido autor apresenta e demonstra um enunciado vinculado à Lei do Corte para desigualdades entre números naturais e a demonstra, conforme apresentamos a seguir:

Lei do Corte para desigualdades: Se $m + p < n + p$ ou $m \,.\, p < n \,.p$ então $m < n$.

Demonstração: Pela tricotomia, tem-se $m = n$, $n < m$ ou $m < n$. As duas primeiras alternativas, em virtude da monotonicidade, são incompatíveis com a hipótese, logo $m < n$.

Fonte: Lima (2013, p. 35).

Tanto o enunciado quanto a demonstração apresentadas pelo autor não definem se *m, n, p*∈ N.

Na sequência da obra, Lima ressalta que:

> Um importante fato básico sobre o conjunto N dos números racionais é que ele é *bem-ordenado* isto é, todo subconjunto não-vazio A ⊂ N contém um menor elemento. Isto contrasta, por exemplo, com o conjunto Q dos números racionais. De fato, se p/q é um número racional positivo então p/(q+1) é um número racional positivo menor do que p/q. Logo o conjunto A ⊂ Q dos números racionais positivos não contém um menor elemento. Assim, Q não é bem-ordenado. (LIMA, 2013, p. 35, grifo do autor)

Ao nos atermos de modo particular à afirmação de Lima – pertencente ao parágrafo acima – "Um importante fato básico sobre o conjunto N dos números racionais é que ele é *bem-ordenado* isto é, todo subconjunto não vazio A C N contém um menor elemento", constatamos que o autor associa o símbolo N ao conjunto dos números racionais Q.

Antes de provar que N é bem-ordenado, Lima (2013) optou por demonstrar um resultado considerado por ele "elementar", mas que, de acordo com este autor, "frequentemente usamos, mas raramente (ou nunca) provamos":

Se $n \in$ N, não existe um número natural p tal que $n < p < n + 1$.

Demonstração: Se tal p existisse, teríamos $p = n + q$ e $n+1 = p + r$, com $q, r \in$ N. então $n+1 = n + q + r$ e, cortando n, viria $1 = q + r$, um absurdo.

Fonte: Lima (2013, p. 36).

E o autor finaliza a seção enunciando e demonstrando o Princípio da Boa-Ordenação:

Princípio da Boa-Ordenação: Todo conjunto não vazio A ⊂ N contém um elemento mínimo.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $1 \notin$ A pois 1 é o menor número natural; se pertencesse a A seria o elemento mínimo desse conjunto.

Consideremos o conjunto X ⊂ N, formado pelos números naturais n tais que I_n ⊂ N – A, ou seja, todos os elementos de A são maiores do que n. Temos 1 ∈ X pois 1 ∉ A. Por outro lado, não se tem X=N porque A não é vazio: se p ∈ A então $p \notin$ X. Pelo Axioma da Indução, concluímos que existe algum n ∈ X tal que n+1 ∉ X. Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que n porém nem todos são maiores do que n + 1. Portanto existe p ∈ A tal que p ≤ n + 1. Deve ser $p = n + 1$, pois se fosse p < n + 1 teríamos n < p < n +1, um absurdo. Assim, o número natural p = n + 1 pertence a A. Mais ainda: p é o menor elemento de A. De fato, se existisse $q \in$ A com q < p, teríamos outra vez o absurdo $n < q < n + 1$.

Fonte: Lima (2013, p. 36).

Conforme discorremos no início da descrição da seção, “Algumas demonstrações”, o único objetivo do autor neste segmento da obra é demonstrar algumas propriedades do conjunto dos números naturais. De acordo com a nossa descrição, em nenhum momento o autor apresenta qualquer discussão, ou mesmo comentário, que vincule estes exemplos com a prática do professor de Matemática da educação básica. O autor não discute, por exemplo, se estas demonstrações são acessíveis aos estudantes da educação básica, se elas precisam ser adaptadas para se tornarem acessíveis aos estudantes da educação básica, em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível utilizá-las.

A seção “Algumas Demonstrações” não consta na obra *A matemática do Ensino Médio* – volume 1, contudo, tanto os enunciados apresentados quanto suas demonstrações constam em diversas obras voltadas ao ensino superior, utilizadas inclusive nas Licenciaturas em Matemática. Destacamos, dentre elas, as obras de Lima, *Análise Real* – volume 1 e *Curso de Análise* – volume 1, *Elementos de Aritmética* de Abramo Hefez e *Elementos de Álgebra* de Jaci Monteiro.

6.3.1.1.8 Seção “Exercícios”

O primeiro exercício apresentado pelo autor nesta seção possui o seguinte enunciado: “Dado o número natural a, seja Y ⊂ N um conjunto com as seguintes propriedades: (1) a ∈ Y; (2) n∈ Y →n + 1 ∈ Y. Prove que Y contém todos os números naturais maiores do que ou iguais a a. (Sugestão: considere o conjunto X = I_a∪ Y, onde

I_a é o conjunto dos números naturais ≤ a, e prove, por indução, que X=N)" (LIMA, 2013, p. 37). Este exercício consta na página 44 da obra *Curso de Análise* – volume 1 desse mesmo autor como exercício ao leitor.

O segundo exercício solicita que o leitor, a partir do exercício anterior, prove que 2n+1≤ 2^npara todo n ≥ 2 e, em seguida, prove também que n² <2^n para todo n ≥ 5.

O terceiro exercício solicita que seja provado por indução "que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n$para todo n≥3 e conclua daí que a sequência 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$... é decrescente a partir do terceiro termo" (LIMA, 2013, p. 37). Elementos deste enunciado são discutidos por Lima (2002, p. 81-82-83).

O quarto exercício solicita ao leitor que seja provada por indução a seguinte igualdade: 1 + 2² + 3² + ... + n² = $\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$. Este exercício figura em diversas obras como: Monteiro (1978, p. 99), Romano (1983, p. 21), Domingues e Iezzi (1982) e Gonçalves (2009, p. 18).

O quinto exercício apresenta o seguinte enunciado: "Critique a seguinte argumentação: Quer-se provar que todo número natural é pequeno. Evidentemente, 1 é um número pequeno. Além disso, se n for pequeno, n+1 também será, pois não se torna grande um número pequeno simplesmente somando-lhe uma unidade. Logo, por indução, todo número natural é pequeno" (LIMA, 2013, p. 37).

O sexto exercício solicita que seja utilizada a propriedade da distributividade para calcular (m + n)(1 + 1) de duas maneiras diferentes e que, em seguida, seja usada a Lei do Corte para concluir que m + n = n + m.

O sétimo exercício solicita que seja provado que X = N, sendo que X ⊂ N é um conjunto não vazio, com a seguinte propriedade: "para qualquer n ∈ X, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X então n ∈ X (Sugestão: boa ordenação)" (LIMA, 2013, p. 37). O enunciado deste exercício é apresentado por Lima (2002, p. 31-32) na obra *Curso de Análise* – volume 1 sob o título de Teorema do Segundo Princípio da Indução, teorema este demonstrado pelo autor.

O oitavo exercício solicita que seja provado que P (n) é verdadeira para todo n ∈ N, sendo P (n) uma propriedade relativa ao número natural n e supondo que P (1), P (2) são verdadeiras e que, para qualquer n ∈ N, a verdade de P (n) e P (n + 1) implica a verdade de P (n + 2).

O nono e último exercício desta seção solicita que seja utilizada a indução matemática para provar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n + 1)^2$. Este é um enunciado comum na literatura universitária, constando, por exemplo, das obras de Monteiro (1978, p. 98) e Romano (1983, p. 23).

A descrição que apresentamos evidencia que todos os exercícios propostos pelo autor objetivam explorar a "prova", a "demonstração matemática", sete dos nove exercícios propostos versando sobre a prova por indução matemática. Pudemos observar que cinco deles estão presentes na literatura universitária. A análise realizada mostra que em nenhum momento o autor apresenta qualquer discussão, ou mesmo comentário, que vincule estes exercícios com a prática do professor de Matemática da educação básica. O autor não discute, por exemplo, se estes exercícios são acessíveis aos estudantes da educação básica, se eles precisam ser adaptados para se tornarem acessíveis aos estudantes da educação básica, ou em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível utilizá-las.

6.3.1.2 O Capítulo "Números Cardinais"

O capítulo é iniciado com o autor argumentando que a importância dos números naturais decorre do fato de que eles compõem o modelo matemático que torna possível a contagem, ou seja, que respondem a perguntas do tipo: "quantos elementos tem este conjunto?" (LIMA, 2013, p. 40). O autor argumenta ainda que na contagem de elementos de um conjunto utiliza-se da noção de "correspondência biunívoca, ou bijeção", que é um caso particular de função.

6.3.1.2.1 A seção "Funções"

Esta seção é dedicada ao estudo de conceitos inerentes ao objeto matemático "função". Como, conforme apontado nos parágrafos imediatamente anteriores, na contagem dos elementos de um conjunto utiliza-se do conceito de função bijetora, o autor discute nesta seção os conceitos de função (e os elementos que a compõem), função injetora e função sobrejetora.

Dados os conjuntos X, Y, uma *função* f : X → Y (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento x ∈ X um elemento y = f (x) ∈ Y (leia-se "y igual a f de x"). O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada x ∈ X, o elemento f(x) ∈ Y chama-se *imagem* de x pela função f, ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$.

Fonte: Lima (2013, p. 40).

Na sequência, o autor apresenta dois exemplos que ele considera "particularmente simples *de funções*" (LIMA, 2013, p. 40) que são a função identidade($f : X \rightarrow X$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$) e as funções constantes "($f : X \rightarrow Y$, onde se toma um elemento $c \in Y$ e se põe $f(x)= c$ para todo $x \in X$)".

Lima (2013) ressalta que f(x) é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função f no ponto $x \in X$, enfatizando a linguagem associada à função em face da utilização de uma linguagem inexata por "[...] livros antigos, bem como alguns atuais, principalmente os de Cálculo", que costumam dizer "'a função f(x)' quando deveriam dizer 'a função f'". De acordo com Lima, como esta linguagem inexata torna a comunicação mais rápida, torna-se difícil resistir à tentação de usá-la, "[...] mas é indispensável a cada momento ter a noção precisa do que se está fazendo" (LIMA, 2013, p. 40). Tendo em vista que o Cálculo não é objeto de estudo da educação básica – consequentemente a bibliografia pertinente ao Cálculo também não é objeto de trabalho dos professores deste nível – e que o PROFMAT é destinado à formação de professores deste nível de ensino, seria importante que o autor apresentasse e analisasse também a linguagem adotada em livros de matemática voltados para o ensino da função na educação básica.

O autor segue o texto comentando a linguagem utilizada na abordagem de funções. Segundo ele, há algumas funções com as quais é simples e natural lidar usando a terminologia correta, como as funções sen: $R \rightarrow R$ e log : $R^+ \rightarrow R$. Já quando se trata de uma função polinomial, (LIMA, 2013, p.40), "[...] o bom-senso nos leva a dizer 'a função $x^2 – 5x + 6$' em vez da forma mais correta e mais pedante 'a função p: $R \rightarrow R$ tal que $p(x) = x^2 – 5x + 6$ para todo $x \in R$'". Conforme ainda o autor, o mesmo ocorre com a função exponencial e^x, mesmo tendo atualmente se tornado "[...]cada vez mais frequente escrever $\exp(x) = e^x$ e assim poder falar da função exp : $R \rightarrow R$" (LIMA, 2013, p. 41).

Considerando que uma função é composta por domínio, contra-domínio e a lei de correspondência entre estes conjuntos, o autor argumenta que quando é dito "a função f” ficam implícitos seu domínio X e seu contra-domínio Y, mas sem que eles sejam especificados, a função não existe. “Assim sendo, uma pergunta do tipo ‘Qual é o domínio da função f(x) = 1/x?’ não faz sentido estritamente falando. A pergunta correta seria: ‘qual é o maior subconjunto X ⊂ R tal que a fórmula f (x) = 1/x define uma função f : X → R’? Novamente, a pergunta incorreta é mais simples de formular. Se for feita assim, é preciso saber seu significado” (LIMA, 2013, p. 41).

Como consequência da discussão apresentada por Lima (2013, p. 41) nesta seção, ele afirma que: “[...]as funções f: X → Y e g: X’ → Y’ são iguais se, e somente se X = X’, Y=Y’ e f(x) = g (x) para todo x ∈ X”. Este comentário também está presente na obra de Lima (2002) intitulada *Curso de Análise* – volume 1 em sua página 11.

Na sequência, o autor apresenta três exemplos de funções. O primeiro (exemplo 1) versa sobre uma função f: X → R, com X sendo o conjunto dos triângulos do plano π e R o conjunto dos números reais, onde a cada t ∈ X se faz corresponder o número real f(t) = área do triângulo t. Exemplo muito similar ao “exemplo 10” presente na página 11 da obra de Lima (2002) intitulada *Curso de Análise* – volume 1.

O segundo exemplo (exemplo 2) apresenta um conjunto S dos segmentos de reta do plano π e Δ o conjunto das retas desse mesmo plano e a regra que associa a cada segmento AB ∈ S sua mediatriz g (AB) define uma função g: S →Δ.

O terceiro exemplo (exemplo 3) apresenta uma função s: N → N, que associa a cada número natural n ao seu sucessor n + 1, com s (n) = n + 1. O autor comenta, logo em seguida, que este último exemplo representa uma função injetiva, enquanto que o segundo exemplo representa uma função sobrejetiva, funções estas que Lima (2013) define, respectivamente, da seguinte forma:

Uma função f : X → Y chama-se *injetiva* quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando

$$x \neq x' \text{ em } X \rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Esta condição pode também ser expressa em sua forma contrapositiva:

$$f(x) = f(x') \rightarrow x = x'.$$

Fonte: Lima (2013, p. 41-42).

Diz-se que uma função f : X → Y é *sobrejetiva* quando, para qualquer elemento y ∈ Y, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento x ∈ X tal que f(x) = y.

Fonte: Lima (2013, p. 42).

No tocante à função sobrejetiva, o autor discorre ainda que: "Mais geralmente, chama-se *imagem* do subconjunto A⊂X pela função f : X → Y ao subconjunto f (A) ⊂ Y formado pelos elementos f (x), com x ∈ A. A função f : X → Y é sobrejetiva quando f(X)=Y. O conjunto f (X), imagem do domínio X pela função f, chama-se também a *imagem* (ou conjunto dos valores) da função f" (LIMA, 2013). Comentário este muito similar ao apresentado por Lima na página 14 de sua obra *Curso de Análise* – volume 1.

Na sequência, Lima associa a definição de conjunto imagem aos exemplos 1, 2 e 3 apresentados por ele anteriormente, ressaltando que "[...] a imagem da função f [pertencente ao exemplo 1] é o conjunto dos números reais positivos, a imagem de g [pertencente ao exemplo 2] é todo o conjunto Δ e a imagem de s [pertencente ao exemplo 3] é o conjunto dos números naturais ≥ 2" (LIMA, 2013, p. 42).

No tocante à identificação dos elementos do conjunto imagem de uma função, Lima (2013, p. 42) discorre que "Dada a função f : X → Y, para saber se um certo elemento b ∈ Y pertence ou não à imagem f (X), escrevemos a "equação" f(x) = b e procuramos achar algum x ∈ X que a satisfaça". Em relação a uma função sobrejetiva, o autor argumenta que "[...] para mostrar que f é sobrejetiva deve-se provar que a equação f (x)=y possui uma solução x ∈ X, seja qual for y ∈ Y dado" (LIMA, 2013, p. 42).

Lima (2013) salienta que, em diversos exemplos de funções f: X →Y, "principalmente na matemática Elementar", X e Y são conjuntos numéricos e a regra x → f (x) exprime o valor f (x) por meio de uma fórmula que envolve x. Contudo, para o autor, "em geral não precisa ser assim" (LIMA, 2013, p. 42), ou seja, apesar de o autor deixar isto implícito em seu discurso, seu objetivo é argumentar que uma função nem sempre precisa ser – ou é – expressa por uma fórmula.

Consideramos o comentário do autor relevante na medida em que no estudo de funções no ambiente escolar é comum ocorrer uma redução do conceito de função ao estudo de casos em que a regra é expressa por "fórmulas" [entenda-se fórmula como sendo, por exemplo, funções com o formato similar a p: R → R tal que $p(x) = x^2 – 5x + 6$ para todo x ∈R]. Um exemplo de uma função em que a regra não é expressa por meio de uma fórmula e que é acessível ao estudo de funções no ambiente escolar é apresentado por Lima (2013, p. 41), por meio do exemplo um que apresentamos anteriormente.

De acordo com Lima (2013, p. 42), “A natureza da regra que ensina como obter f (x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições”, a saber: a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado; b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in Y$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y” (LIMA, 2013, p. 43).

Este mesmo parágrafo consta do texto apresentado por Lima na obra *Curso de Análise* – volume 1, conforme o fragmento abaixo evidencia:

> A natureza da regra que ensina como obter f (x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições: a) Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado; b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in Y$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y. (LIMA, 2013, p. 43)

Lima (2013, p. 43) finaliza a seção “Funções” em “Números e Funções Reais” apresentando dois exemplos de regras que não definem funções. O primeiro (exemplo 4) versa sobre a tentativa de se definir uma função $f : N \rightarrow N$, estipulando-se que, para todo $n \in N$, o número natural $p = f(n)$ deve ser tal que $p^2 + 3 = n$. Entretanto, o número $p = f(n)$ só pode ser encontrado se n for igual a 4, 7, 12, 19, ... uma vez que nem todos os números naturais são da forma $p^2 + 3$. E o autor conclui esta tentativa assinalando que “[...] esta regra não define uma função com domínio N, porque tem exceções (LIMA, 2013, p. 43). O segundo exemplo (exemplo 5 do capítulo) - que aparece como “exemplo 12” nas páginas 11 e 12 da obra de Lima (2002) *Curso de Análise* – volume 1 - apresenta o conjunto X dos números reais positivos e o conjunto Y composto por triângulos do plano, de modo que para cada $x \in X$, seja colocado f(x) = t, sendo t um triângulo de área x. O autor conclui assinalando que “esta regra não define uma função $f : X \rightarrow Y$ porque é ambígua: dado o número $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos diferentes com área x”(LIMA, 2013, p. 43).

Conforme anunciamos no início da descrição desta seção e como se evidencia no decorrer dela, o objetivo desta parte do texto do Lima era apresentar as definições de função, função injetora, função sobrejetora e função bijetora. A partir disso, o autor apresenta cinco exemplos de funções que são passíveis de serem explorados no ambiente escolar (no ensino médio) e "recomendações", algumas especialmente voltadas para uma das linguagens adotadas na abordagem de funções.

O termo recomendações foi adotado por nós a partir da apresentação da seção "Funções" na obra *A matemática do Ensino Médio* – volume 1. As seções "Funções" de ambas as obras apresentam textos idênticos com apenas uma diferença: dois subtítulos com a forma de "Recomendações" foram suprimidos, o texto referente a cada subtítulo sendo agregado ao texto anterior. Assim, quando o autor discorre sobre a linguagem adotada no tratamento da função polinomial, função seno e função logarítmica, ele abria subseções e as titulava como "Recomendações", como pode ser constatado em consulta às páginas 38, 39, 40, 41 e 42 da obra Lima (1998) e às páginas 40, 41, 42 e 43 de outra obra sua (2013).

Além da similaridade existente entre as obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio* – volume 1, conforme já apresentamos por meio de alguns fragmentos no decorrer da descrição, identificamos uma similaridade com a apresentação dada por Lima ao tema funções na obra *Curso de Análise* – volume 1, afirmação que se refere de modo particular às definições de função (presente em LIMA, 2002, p. 10-11), função injetora (presente em LIMA, 2002, p. 12)] e função sobrejetora (presente em LIMA, 2002, p. 12). Assim sendo, a grosso modo, é possível afirmar que existe uma similaridade grande entre as abordagens dadas pelas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio* – volume 1 ao tema funções.

6.3.1.2.2 A seção "A noção de Número Cardinal"

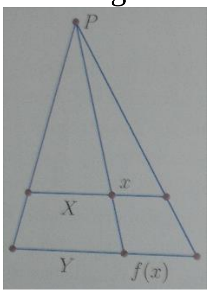
Nesta seção do capítulo 3 da obra *Números e Funções Reais*, Lima, além de definir função bijetora, apresenta cinco exemplos dela, conforme mostraremos a seguir:

Uma função f : X → Y chama-se uma *bijeção,* ou uma *correspondência biunívoca* entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.
Fonte: Lima (2013, p. 43, grifo do autor).

O primeiro exemplo (exemplo 6 do capítulo) presente nesta seção apresenta dois conjuntos, X = { 1,2,3,4,5} e Y = {2,4,6,8,10} e define f : X → Y pela regra f (n) = 2n, e conclui que se tem aí uma correspondência biunívoca, em que f(1) = 2, f (2) =4, f(3)=6, f(4)=8 e f(5)=10. O segundo exemplo versa sobre a correspondência biunívoca que ocorre entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos números naturais que são pares – um subconjunto do próprio de N . Sendo P = {2,4,6,...,2n,...}, obtém-se uma correspondência biunívoca f : N → P pondo-se f(n) = 2n para todo n ∈ N, correspondência esta "particularmente curiosa" que, de acordo com Lima (2013, p. 294), foi "descoberta pelo físico Galileu Galilei".

O terceiro exemplo (exemplo 8 do capítulo) apresenta um triângulo com Y sendo sua base X um segmento paralelo a Y que intercepta (e une) os demais lados do referido triângulo e o ponto P é o vértice oposto à base Y (de acordo com a Figura abaixo). Conforme Lima (2013, p. 44), "Obtém-se uma correspondência biunívoca f : X → Y associando a cada x ∈ X o ponto f (x) onde a semi-reta [*sic*] Px intersecta a base Y".

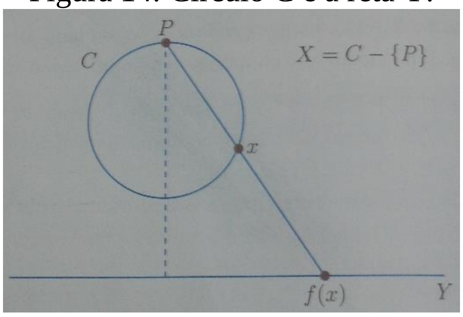
Figura 13: Triângulo de base Y.



Fonte: Lima (2013, p. 44).

O quarto exemplo (exemplo 9 do capítulo) apresenta uma projeção estereográfica, por meio de um conjunto X = C — {P}, que é o conjunto obtido retirando-se da circunferência C o ponto P, e Y é uma reta perpendicular ao diâmetro que passa por P, conforme a Figura abaixo evidencia:

Figura 14: Círculo C e a reta Y.



Fonte: Lima (2013, p. 44).

O autor define uma correspondência biunívoca f: X → Y em que "[...] para cada x ∈ X, f(x) = interseção da semi-reta [*sic*] Px com reta Y" (LIMA, 2013, p. 44).

Na sequência, Lima (2013) expõe que "[...] dois conjuntos X e Y têm o *mesmo número cardinal* quando se pode definir uma correspondência biunívoca f : X →Y" e conclui que "Cada um dos quatro exemplos acima exibe um par de conjuntos X,Y com o mesmo número cardinal" (LIMA, 2013, p. 44).

A seção é finalizada pelo autor por meio de um exemplo em que apresenta dois conjuntos X = {1} e Y= {1, 2} e conclui não poder "[...] existir uma correspondência biunívoca f : X →Y" e que, portanto, "[...] X e Y não têm o mesmo número cardinal" (LIMA, 2013, p. 43).

Como ocorreu com as seções anteriores, as seções "A Noção de Número Cardinal" presentes nas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio* – volume 1 são iguais, o que pode ser constatado a partir de uma rápida consulta e comparação entre as páginas 43, 44 e 45 da primeira obra e as páginas 42, 43 e 44 da segunda obra mencionada. Além disso, identificamos uma similaridade com a apresentação dada por Lima ao tema funções na obra *Curso de Análise* – volume 1 com referência, de modo particular, à definição de função bijetora (presente em LIMA, 2002, p. 13) e à afirmação "Diz-se que dois conjuntos X e Y têm o *mesmo número cardinal* quando se pode definir uma correspondência biunívoca f : X →Y" (LIMA, 2013, p. 44), também discutida por Lima (2002, p. 41).

6.3.1.2.3 A seção "A palavra 'número' no dicionário"

Esta seção é destinada pelo autor a uma crítica à definição apresentada pelo "dicionário mais vendido do país" (LIMA, 2013, p. 45). Ela é iniciada com o autor discorrendo que às vezes diz-se que "[...] os conjuntos X e Y são (numericamente) *equivalentes* quando é possível estabelecer urna correspondência biunívoca f : X → Y, ou seja, quando X e Y têm o mesmo número cardinal" (LIMA, 2013, p. 45). Segundo o autor, este fato explica, embora não justifique, a definição apresentada pelo referido dicionário para Número ["o conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado" (LIMA, 2013, p. 22)]. Para Lima, a mencionada definição de número apresenta um conjunto de defeitos, sendo os três "mais graves" os seguintes:

> 1. Um dicionário não é um compêndio de Matemática, e muito menos de Lógica. Deve conter explicações acessíveis ao leigo (de preferência, corretas). As primeiras acepções da palavra "número"

> num dicionário deveriam ser "quantidade" e "resultado de uma contagem ou de uma medida". 2. A definição em causa só se aplica a números cardinais, mas da ideia de número deveria abranger os racionais e, pelo menos, os reais. 3. O "conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado" é um conceito matematicamente incorreto. A noção de conjunto não pode ser usada indiscriminadamente, sem submeter-se a regras determinadas, sob pena de conduzir a paradoxos, ou contradições. Uma dessas regras proíbe que se forme conjuntos a não ser que seus elementos pertençam a, ou sejam subconjuntos de um determinado conjunto-universo. Um exemplo de paradoxo que resulta da desatenção a essa regra é "o conjunto X de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos." Pergunta-se: X é ou não é um elemento de si mesmo? Qualquer que seja a resposta, chega-se a uma contradição. (LIMA, 2013, p. 45-46)

Esta seção, assim como a discussão proposta por Lima (2013) na página 22 do livro *Números e Funções Reais*, suscita alguns questionamentos: por que, além de analisar a definição de número apresentada por um dicionário (que o autor não identificou qual é), o autor também não analisou as definições de número que estão presentes em livros didáticos, por exemplo, uma vez que este é o principal objeto de trabalho da esmagadora maioria dos professores de Matemática da educação básica e não os dicionários? Por que o autor não analisou as definições de número que são veiculadas por professores de Matemática da educação básica? Além disso, conforme ocorreu com as seções anteriores, as seções "A palavra 'número' no dicionário" presente nas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio* – volume 1 são iguais, como pode ser constatado a partir de uma rápida consulta e comparação entre as páginas 45 e 46 da primeira obra e as páginas 44 e 45 da segunda obra mencionada.

6.3.1.2.4 Seção "Conjuntos Finitos"

Esta seção é destinada pelo autor à discussão sobre "conjuntos finitos" e "conjuntos infinitos", e nela é apresentada uma sequência de definições e propriedades julgadas como necessárias nesta discussão, conforme veremos na sequência.

Lima (2013) inicia a seção definindo e exemplificando o conjunto I_n dos números naturais de 1 até n, onde $n \in N$ de modo que $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,2\}$, $I_3 = \{1,2,3\}$ e, mais geralmente, um número natural k pertence a I_n se, e somente se, $1 \leq k \leq n$.

Na sequência o autor define conjunto finito, número cardinal e contagem partir do seguinte enunciado:

Seja X um conjunto. Diz-se que X é *finito*, e que X tem n elementos quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f : I_n \rightarrow X$. O número natural n chama-se então o *número cardinal* do conjunto X ou, simplesmente, o número de elementos de X. A correspondência $f : I_n \rightarrow X$ chama-se uma *contagem* dos elementos de X. Pondo $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$ podemos escrever $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Para todo n, o conjunto I_n é finito e seu número cardinal é n. Assim, todo número natural n é o número cardinal de algum conjunto finito.

Fonte: Lima (2013, p. 46, grifo do autor).

Como consequência dessa definição, Lima (2013) caracteriza o conjunto vazio $\varnothing$ como sendo um conjunto finito que possuí zero elementos e, consequentemente, zero é o número cardinal do conjunto vazio.

As definições apresentadas por Lima (2013) de conjunto finito e contagem são similares às apresentadas por ele nas páginas 33 e 34 da obra *Curso de Análise* – volume 1.

Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou quanto existe, para algum $n \in N$, uma bijeção $\varphi : I_n \rightarrow X$. No primeiro caso diremos que X tem zero elementos. No segundo caso, diremos que $n \in N$ é o *número de elementos de* X, ou seja, que X possui n elementos.

Intuitivamente, uma bijeção $\varphi : I_n \rightarrow X$ significa uma *contagem* dos elementos de X. Pondo $\varphi(1) = x_1$, $\varphi(2) = x_2$,..., $\varphi(n) = x_n$ temos que $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Fonte: Lima (2002, p. 31-32, grifos do autor).

A partir da definição de conjunto finito, Lima (2013) define conjunto infinito:

Diz-se que um conjunto X é *infinito* quando ele não é finito. Isto quer dizer que X não é vazio e que, não importa qual seja $n \in N$, não existe correspondência biunívoca $f : I_n \rightarrow X$.

Fonte: Lima (2013, p. 46, grifo do autor).

Do mesmo modo como ocorreu com a definição de conjunto finito, a definição de conjunto infinito apresentada por Lima (2013) é similar à apresentada por ele na página 36 da obra *Curso de Análise* – Volume 1:

> Um conjunto X chama-se *infinito* quando não é finito. Mais explicitamente, X é infinito quando não é vazio e além disso, seja qual for $n \in N$, não existe a bijeção $\varphi: I_n \rightarrow X$.
>
> Fonte: Lima (2002, p. 36, grifo do autor).

Na sequência, o autor associa as definições de conjunto finito e de conjunto infinito, ao exemplo 6 (que foi apresentado por ele na página 43 desta obra) e ao conjunto dos números naturais, respectivamente. A associação com o exemplo 6 é apresentada por Lima por meio do seguinte texto: “No Exemplo 6 acima [contudo o exemplo não se encontra acima, mas na página 43 da obra], temos $X = I_5$ e $f : X \rightarrow Y$ é uma contagem dos elementos de Y. Assim, Y é um conjunto finito, com 5 elementos” (LIMA, 2013, p. 46). A associação com o conjunto dos números naturais é feita por meio do seguinte fragmento: “O conjunto N dos números naturais é infinito. Com efeito, dada qualquer função $f : I_n \rightarrow N$, não importa qual n se fixou, pomos $k = f(1) + f(2) + ... + f(n)$ e vemos que, para todo $x \in I_n$, tem-se $f(x) < k$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim, é impossível cumprir a condição de b) da definição de correspondência biunívoca” (LIMA, 2013, p. 46). Este último exemplo do autor consta na página 36 da obra *Curso de Análise* – volume 1, também de sua autoria.

Em seguida, Lima apresenta propriedades, caracterizadas por ele como “básicas”, do número cardinal de um conjunto finito X, indicado pelo autor como n(X):

1. O *número de elementos de um conjunto finito é o mesmo, seja qual for a contagem que se adote.* Isto significa que se $f : I_m \rightarrow X$ e $g: I_n \rightarrow X$ são correspondências biunívocas então $m=n$
2. *Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e $n(Y) \leq n(X)$. Tem-se $n(Y) = n(X)$ somente quando $Y=X$.*
3. *Se* X *e* Y *são finitos então* X U Y *é finito e tem-se n* $(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$.
4. *Sejam* X, Y *conjuntos finitos. Se* $n(X) > n(Y)$, *nenhuma função* $f: X \rightarrow Y$ *é*

injetiva e nenhuma função g : Y → X *é sobrejetiva.*

Fonte: Lima (2013, p. 47, grifo do autor).

Segundo Lima (2013), as demonstrações destas propriedades são feitas por indução matemática ou por boa-ordenação e para tanto o autor indica como referência o livro *Curso de Análise* – volume 1. E, de fato, as propriedades trabalhadas pelo autor constam da referida obra. Por exemplo, o item 1 mencionado imediatamente acima é cristalizado (e demonstrado) no Corolário 1 (LIMA, 2002, p. 34):

COROLÁRIO 1. Se existir uma bijeção f: $I_m \to I_n$ então m=n. Consequentemente, se existem duas bijeções $\psi: I_n \to X$ e $\varphi: I_m \to X$, deve-se ter m=n.

Fonte: Lima (2002, p. 34).

Da mesma forma que o item 2 é cristalizado (e demonstrado) no Teorema 4, conforme o fragmento:

TEOREMA 4. Se X é um conjunto finito então todo subconjunto $Y \subset X$ é finito. O número de elementos de Y não excede o de X e só é igual quando Y=X.

Fonte: Lima (2002, p. 35).

E o item 3 é discutido (e demonstrado) pelo teorema 6:

TEOREMA 6. Sejam X, Y conjuntos finitos disjuntos, com m e n elementos respectivamente. Então X U Y é finito e possui m+n elementos.

Fonte: Lima (2002, p. 37).

O autor associa o item 4 da relação de propriedades ao Princípio das Casas de Pombos[127] por meio de dois exemplos:

Tomemos um número natural de 1 a 9. Para fixar as idéias, seja 3 esse número. Vamos provar que todo número natural m possui um múltiplo cuja representação decimal contém apenas os algarismos 3 ou 0. Para isso, consideremos o conjunto X = {3, 33, ..., 33...3}, cujos elementos são os m primeiros números naturais representados somente por algarismos iguais a 3. Se algum dos elementos de X for múltiplo de m, nosso trabalho acabou. Caso contrário, formamos o conjunto Y = { 1,2,...,m -1} e definimos a função f : X → Y pondo, para cada x ∈ X, F(x)=resto da divisão de x por m. Como X tem mais elementos do que Y, o princípio das casas de pombos assegura que existem elementos $x_1 < x_2$ no conjunto X tais que $f(x_1)= f(x_2)$. Isto significa que x_1 e x_2, quando divididos por m, deixam o mesmo resto. Logo $x_2 - x_1$ é múltiplo de m. Mas claro que se x_1 tem p algarismos e x_2 tem p + q algarismos então a representação decimal de $x_2 - x_1$ consiste em q algarismos iguais a 3 seguidos de p algarismos iguais a 0.

Fonte: Lima (2013, p. 47-48).

O segundo exemplo utiliza-se do Princípio das Gavetas:

Vamos usar o princípio das gavetas para provar que, numa reunião com n pessoas (n ≥ 2), há sempre duas pessoas (pelo menos) que têm o mesmo número de amigos naquele grupo. Para ver isto, imaginemos n caixas, numeradas com 0,1,...,n – 1. A cada uma das n pessoas entregamos um cartão que pedimos para depositar na caixa correspondente ao número de amigos que ela tem naquele grupo. As caixas de números 0 e n -1 não podem ambas receber cartões pois se houver alguém que não tem amigos ali, nenhum dos presentes pode ser amigo de todos, e vice-versa. Portanto temos, na realidade, n cartões para serem depositados em n -1 caixas. Pelo princípio das gavetas, pelo menos uma das caixas vai receber dois ou mais cartões. Isso

---

[127]*Princípio da casa dos Pombos:* se há mais pombos do que casas num pombal, qualquer modo de alojar os pombos deverá colocar pelo menos dois deles na mesma casa. Às vezes, o mesmo fato é chamado *o princípio das gavetas: se m > n,* qualquer maneira de distribuir m objetos em n gavetas deverá pôr ao menos dois desses objetos na mesma gaveta. (LIMA, 2013, p. 47)

significa que duas ou mais pessoas ali têm o mesmo número entre os presentes.

Fonte: Lima (2013, p. 48).

Conforme ocorrido com as seções anteriores, as seções "Conjuntos Finitos" presentes nas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio* – volume 1 são iguais, como se constata em uma rápida consulta e comparação entre as páginas 46, 47 e 48 da primeira obra e as páginas 45, 46 e 47 da segunda obra mencionada.

6.3.1.2.5 Seção "Sobre Conjuntos Infinitos"

Esta seção é destinada à discussão de algumas contribuições de Cantor para o estudo dos conjuntos infinitos e sobre funções $f : X \rightarrow X$ de um conjunto em si mesmo.

De acordo com Lima (2013), as maiores contribuição de Cantor foram suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos, na medida em que ele foi o primeiro a descobrir que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades – ao provar que não pode haver uma correspondência biunívoca entre N e o conjunto R dos números reais e que nenhum conjunto X pode estar em correspondência biunívoca com o conjunto P(X) cujos elementos são os subconjuntos de X. Além disso, ainda de acordo com Lima, Cantor mostrou que a reta, o plano e o espaço tri-dimensional (além de espaços com dimensão superior a três) têm o mesmo número cardinal. "Estes fatos, que atualmente são considerados corriqueiros entre os matemáticos, causaram forte impacto na época (meados do século dezenove)" (LIMA, 2013, p. 48).

No tocante a funções $f : X \rightarrow X$ de um conjunto em si mesmo, Lima (2013) diz que quando X é finito, f é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva, o que, contudo, não é verdadeiro para X infinito. Ele exemplifica dizendo que se definirmos a função $f : N \rightarrow N$ colocando, para cada $n \in N$, f(n) = números de fatores primos distintos que ocorrem na decomposição de n, se verifica que f é sobrejetiva mas não é injetiva pois para cada $b \in N$ existe uma infinidade de números n tais que f(n) = b. Pondera, além disso, que as funções $f : N \rightarrow N$, $g : N \rightarrow N$, $h: N \rightarrow N$ e $\varphi : N \rightarrow N$ definidas por $f(n) = n+1$, $g(n) = n+30$, $h(n) = 2n$, $\varphi(n) = 3n$ são injetivas mas não sobrejetivas.

Conforme ocorreu com as seções anteriores, as seções "Sobre Conjuntos Infinitos" presentes nas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino*

Médio – volume 1 são iguais, como pode ser constatado pela consulta e comparação entre as páginas 48 e 49 da primeira obra e as páginas 47 e 48 da segunda obra mencionada.

6.3.1.2.6 Seção "Fantasia Matemática"

Nesta seção o autor apresentou uma história com o objetivo de discutir o tema "conjunto infinito":

O grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim-de-semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um viajante. A recepcionista vai logo dizendo: "Sinto muito, mas não há vagas". Ouvindo isto, o gerente interveio: "Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhora". E ordena: "Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim em diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto n +1. Isto manterá todos alojados e deixará o quarto 1 para o recém chegado". Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. A recepcionista tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n para o quarto n + 30 e acolheu assim todos os passageiros do ônibus. Mas ficou sem saber o que fazer quando, horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Desesperada, apelou para o gerente que prontamente resolveu o problema dizendo: "Passe cada hóspede do quarto n para o quarto 2n. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais poremos os novos hóspedes. Pensando melhor: mude quem está no quarto n para o quarto 3n. Os novos hóspedes, ponha-os nos quartos de número 3n+2. Deixaremos vagos os quartos de número 3n+1. Assim, sobrarão ainda infinitos quartos vazios e eu poderei ter sossego por algum tempo.

Lima ressalta não se dever confundir o conjunto infinito com aquele que tem um número muito grande (porém finito) de elementos porque na frase "Já ouvi isto uma infinidade de vezes" usada na linguagem comum, a ideia de infinito aí posta tem a mera força de expressão. Lembra que não há distâncias infinitas (mesmo entre duas galáxias bem afastadas) e até o número de átomos do universo é finito. E acrescenta ser importante ter sempre em mente que nenhum número natural n é maior que todos os demais: tem-se sempre n < n +1.

Conforme ocorreu com as seções anteriores, as seções "Fantasia Matemática" presentes nas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio – volume 1* são iguais isso podendo ser constatado em consulta e comparação entre as páginas 49 e 50 da primeira obra e as páginas 48 e 49 da segunda obra mencionada.

6.3.1.2.7 Seção "Exercícios"

O exercício 3.1 constante desta seção da obra "Números e Funções Reais" apresenta o seguinte enunciado:

> Seja f: X → Y uma função. A imagem inversa por f de um conjunto B ⊂ Y é o conjunto f^{-1}(B) = {x∈X; f (x) ∈ B}. Prove que se tem sempre f^{-1}(f (A)) ⊃ A para todo A ⊂ X e f(f^{-1}(B)) ⊂ B para todo B ⊂ Y. Prove também que f é injetiva se, e somente se, f^{-1}(f (A)) = A para todo A ⊂ X. Analogamente, mostre que f é sobrejetiva se, e somente se, f(f^{-1}(B)) = B para todo B ⊂ Y. (LIMA, 2013, p. 51)

Este exercício é equivale aos exercícios 14 e 15 da obra *Curso de Análise* – volume 1 de Lima (2002, p. 24). Já os exercícios 3.2 ["Prove que a função f: X → Y é injetiva se, e somente, se existe uma função g: Y → X tal que g (f (x))=x para todo x ∈ X" (LIMA, 2013, p. 51)], 3.3 ["Prove que a função f: X → Y é sobrejetiva se, e somente, se existe uma função h: Y → X tal que f(h(y))=y para todo y ∈ Y" (LIMA, 2013, p. 51)] e 3.4 ["Dada a função f: X → Y, suponha que g, h: Y → X são funções tais que g (f (x))=x para todo x ∈ X e f(h(y))=y para todo y ∈ Y. Prove que g=h" (LIMA, 2013, p. 51)] são também discutidos por Lima (2002, p. 18-19) na obra *Curso de Análise* – volume 1.

Os exercícios 3.5 ["Defina uma função sobrejetiva f: N → N tal que, para todo n ∈ N, a equação f (x)=n possuí uma infinidade de raízes x∈ N" (LIMA, 2013, p. 51)] e 3.6 ["Prove, por indução, que se X é um conjunto finito com n elementos então existem n! bijeções f: X →X" (LIMA, 2013, p. 51)] estão presentes também, como exercícios 15 e 8, na página 44 fa obra *Curso de Análise* – Volume 1 de Lima (2002).

O exercício 3.7 apresenta o seguinte enunciado:

> Ache o erro da seguinte demonstração por indução: **Teorema** Todas as pessoas têm a mesma idade. **Prova:** Provaremos por indução que se X é um conjunto de n (n ≥ 1) pessoas, então todos os elementos de X têm a mesma idade. Se n = 1 a afirmação é evidente verdadeira pois se X é um conjunto formado por uma única pessoa, todos os elementos de X têm a mesma idade. Suponhamos agora que a afirmação seja

> verdadeira para todos os conjuntos de n elementos. Consideremos um conjunto com n + 1 pessoas, $\{a_1,a_2,...,a_{n+1}\}$. Ora $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ é um conjunto de n pessoas, logo $a_1,a_2,...,a_n$ têm a mesma idade. Mas $\{a_1,a_2,...,a_{n++1}\}$ também é um conjunto de n elementos, logo todos os seus elementos, em particular a_n e a_{n+1} têm mesma idade. Mas se $\{a_1,a_2,...,a_n$ têm a mesma idade de a_n e a_{n+1} todos os elementos $\{ a_1, a_2,...,a_n, a_{n+1} \}$ têm mesma idade, conforme queríamos demonstrar. (LIMA, 2013, p. 51, grifo do autor)

O exercício 3.8 solicita que seja provado, por indução, que um conjunto com n elementos possui 2^n sub-conjuntos. Este exercício é também discutido por Lima (2002) na página 44 na obra *Curso de Análise* – Volume 1 como "exercício 14".

Os exercícios 3.9, 3.10 e 3.11 apresentam, respectivamente, os seguintes enunciados:

"Dados n ($n \geq 2$) objetos de pesos distintos, prove que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo 2n – 3 pesagens em uma balança de dois pratos. É esse o número mínimo de pesagens que permite determinar o mais leve e o mais pesado?" (LIMA, 2013, p. 52).

"Prove que, dado um conjunto com n elementos, é possível fazer uma fila com seus subconjuntos de tal modo que cada subconjunto da fila pode ser obtido a partir do anterior pelo acréscimo ou pela supressão de um único elemento" (LIMA, 2013, p. 52).

"Todos os quartos do Hotel Georg Cantor estão ocupados, quando chegam os trens $T_1,T_2,...,T_N$,....(em quantidade infinita), cada um deles com infinitos passageiros. Que deve fazer o gerente para hospedar todos? " (LIMA, 2013, p. 52).

Conforme a descrição que apresentamos evidencia, todos os exercícios propostos pelo autor objetivam explorar a "prova", a "demonstração matemática", e dos 11 exercícios propostos, sete estão presentes na literatura universitária. Além disso, em nenhum momento o autor apresenta qualquer discussão, ou mesmo comentário, que vincule estes exercícios à prática do professor de Matemática da educação básica. O autor não discute, por exemplo, se estes exercícios são acessíveis aos estudantes da educação básica, se eles precisam ser adaptados para se tornarem acessíveis para eles, ou em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível utilizá-los.

Analogamente ao ocorrido com as seções anteriores, as seções "Exercícios" presentes nas obras *Números e Funções Reais* e *A matemática do Ensino Médio* – volume 1 são similares, como pode ser constatado a partir da comparação entre as páginas 51 e 52 da primeira obra e as páginas 49, 50 e 51 da segunda obra mencionada, o fator que as difere é o exercício 11, que consta somente na obra *Números e Funções Reais*.

No que concerne à discussão apresentada por Lima (2013) no capítulo “Números Cardinais”, a estruturação proposta pelo autor – e apoiada em bibliografias utilizadas comumente no ensino superior – e que visa à discussão sobre a contagem de elementos de um conjunto é feita a partir da noção de correspondência biunívoca (função bijetiva). Assim, Lima (2013) apresenta uma relação de definições, propriedades, exemplos e exercícios que versam sobre os temas: função, função injetora, função sobrejetora e função bijetora. Apresentados estes temas, o autor expõe uma relação de definições, propriedades, exemplos e exercícios com o objetivo de discutir os temas “conjuntos finitos”, “conjuntos infinitos”, “contagem” e “número cardinal”. E finaliza o capítulo com dois textos, um dedicado a alguns feitos matemáticos – e históricos – de Cantor, especialmente os voltados para a área de “Análise Matemática”, e outro (em formato de estória), dedicado à discussão sobre a indução matemática, conjuntos finitos e conjuntos infinitos.

O problema da abordagem do autor é que boa parte do capítulo não está vinculado diretamente à prática do professor de Matemática da educação básica, ou seja, o autor apresenta uma relação de definições, propriedades e exemplos sem elucidar se, como e em que nível (ano) esta relação pode ser trabalhada. Um exemplo disso é o fato de que, por exemplo, o autor apresenta a noção de contagem *unicamente* a partir da definição de função bijetora, um conteúdo – função bijetora – que é objeto de estudo da matemática escolar somente no ensino médio. Assim, as perguntas que emergem são: como o ensino dos números naturais, considerando o encadeamento proposto por Lima (2013), pode e deve ser feito no ensino fundamental? As definições, propriedades e exemplos apresentados por Lima no tocante à contagem devem ser abordados no ensino fundamental? Se sim, como seria feita esta abordagem? Como a definição de contagem poderia ser adaptada de modo a ser trabalhada no ensino fundamental? Além disso, como o objetivo do autor em relação à abordagem dos números naturais não está clara, o seguinte questionamento é suscitado: seria um dos objetivos de Lima (2013) alterar a ordem do currículo escolar e inserir a noção de função bijetora no ensino fundamental de modo a ele ser abordado anteriormente à contagem?

Tais perguntas são pertinentes na medida em que a apresentação de uma sequência de conteúdos matemáticos, provavelmente, só afetará a prática do professor de Matemática se ela for vinculada ao seu cotidiano profissional. Assim, na medida em que o PROFMAT "[...] visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação docente com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante ao ensino básico" (CAPES, 2010, p. 6, grifo nosso), estas perguntas deveriam ser respondidas pelo autor no decorrer da obra, com discussões sobre possíveis adaptações das definições, propriedades, exemplos e exercícios tornando-as acessíveis aos diversos níveis de ensino da educação básica e explicitando para os leitores da obra (os professores de Matemática da educação básica) se e de que forma este encadeamento está relacionado com sua prática de ensinar a matemática nos ensinos fundamental e médio.

Entendemos que o estudo da matemática é sempre relevante para o professor dessa disciplina, por isso o problema não reside no fato de os professores estudarem uma sequência de definições, propriedades e exemplos vinculados fortemente com a matemática universitária, mas no fato deste estudo não ser vinculado diretamente à prática do professor de Matemática no ambiente escolar. Nossa crítica reside, pois, no fato de o PROFMAT, que se propôs a formar o professor matematicamente de modo a contemplar "[...] as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional" (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso), adotar, ao explorar os conteúdos pertencentes à matemática escolar (como é o caso dos números naturais) uma abordagem muito similar à matemática universitária desvinculando-a das práticas escolares. Esta nossa última afirmação é corroborada pelo fato de boa parte das definições, propriedades, exemplos e exercícios serem comuns a (e extraídas de) obras pertencentes a cursos do ensino superior, como é o caso das obras *Análise Real* – volume 1 e *Curso de Análise* – volume 1. Especificamente em relação à elaboração e a finalidade da obra *Análise Real* – volume 1, Reis (2001) discorre que sua elaboração "[...] aconteceu devido à necessidade do Prof. Elon em ministrar um curso de Análise para alunos de Mestrado em Economia da Fundação Getúlio Vargas – RJ, onde o professor ministrava aulas havia sete anos. Este mestrado é considerado "muito matematizado" pelo Prof. Elon [...]" (REIS, 2001, p. 147).

Nossa afirmação de que a abordagem feita pelo autor está fortemente vinculada com a matemática universitária é corroborada por Lima (2013) que, ao invés de criticar e discutir a linguagem adotada por livros didáticos submetidos, por exemplo, ao

PNLD[128], opta por criticar a linguagem adotada pelos livros de cálculo ao abordarem o tema “funções” (página 40 do livro *Números e Funções Reais*). Esta afirmação refere-se também ao fato de o autor dedicar uma seção para uma discussão histórica sobre as contribuições de Cantor para a “análise matemática”. Afinal, qual é o objetivo desta seção? Em quê e de que forma o trabalho do professor de **M**atemática da educação básica vai ser impactado pelo estudo deste fragmento da história da matemática?

No que concerne especificamente à discussão apresentada por Lima (2013) sobre o tema “funções” – função, função injetora, função sobrejetora e função bijetora – apesar deste tema não ser nosso objetivo direto de discussão, entendemos que ele está vinculado com o trabalho do professor de Matemática do ensino médio. Contudo, esta nossa afirmação refere-se às definições e aos cinco exemplos apresentados pelo autor e não aos exercícios, uma vez que estes últimos objetivam explorar unicamente os aspectos formal e lógico-dedutivo da matemática (por meio de demonstrações) que não são acessíveis ao público do ensino fundamental. A abordagem feita pelo autor sobre os temas “conjuntos finitos” e “conjuntos infinitos” também não supera a apresentação formal e lógico-dedutiva dos conceitos em tela.

6.3.1.3 Capítulo “Números Reais”

A noção de número real apresentada por Lima (2013) parte do processo de medição de grandezas contínuas, especificamente a determinação do comprimento de um segmento de reta, culminando na representação do conjunto dos números reais por meio da reta real.

6.3.1.3.1 Seção “Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis”

Lima (2013), tendo por objetivo medir um segmento de reta AB, inicia a seção fixando um segmento-padrão *u*, chamado *segmento unitário* e estabelece, por definição, que a medida desse segmento é igual a 1. Para medir *u*, o autor estipula que segmentos congruentes possuem a mesma medida e que se “[...] n – 1 pontos interiores decompuserem AB em *n* segmentos justapostos, então a medida de AB será igual à soma das medidas desses *n* segmentos” (LIMA, 2013, p. 54). Assim, se os *n* segmentos parciais forem congruentes a *u*, será dito que *u* cabe n vezes em AB e a medida de AB

---

[128]Programa Nacional do Livro Didático. Mais detalhes podem ser encontrados na seguinte página: http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article. Acesso em: 04 mai. 2015.

(representada por $\overline{AB}$) será igual a *n*. Contudo, pode ocorrer que o segmento unitário *u* não caiba um número "exato" de vezes em AB. Assim, a medida de AB não será um número natural, situação esta que nos conduz à ideia de fração (LIMA, 2013, p. 54).

Ainda objetivando medir o segmento de reta AB, o autor procura um segmento de reta *w*, que caiba *n* vezes no segmento unitário *u* e *m* vezes em AB, de modo que este segmento *w* será uma *medida comum* de *u* e AB. Encontrado *w*, diz-se que AB e *u* são "*comensuráveis"* (LIMA, 2013, p. 54), sendo que a medida de *w* será a fração 1/*n* e a medida de AB será *m* vezes 1/*n*, ou seja, igual a *m/n*.

Na sequência, Lima (2013, p. 54-55) apresenta uma sequência histórica sobre o desenvolvimento do conceito de fração:

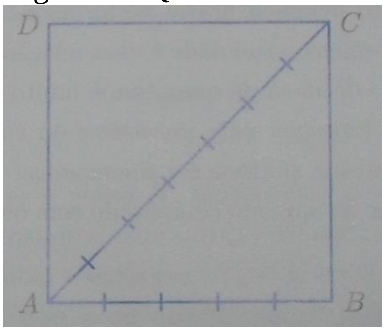
> Relutantes em admitir como número qualquer objeto que não pertence ao conjunto {2,3,4,5,...}, os matemático gregos à época de Euclides não olhavam para a fração m/n como um número e sim como uma razão entre dois números, igual à razão ente os segmentos AB e u. Na realidade, não é muito importante que eles chamassem m/n de número ou não, desde que soubessem, como sabiam, raciocinar com esses símbolos. (Muito pior eram os egípcios que, com exceção de 2/3, só admitiam frações de numerador 1. Todas as demais, tinham que ser expressas como somas de frações de numerador 1 e denominadores diferentes. Por exemplo, 7/10 no Egito era escrito como 1/3 + 1/5 + 1/6.). (LIMA, 2013, p. 54 - 55)

Ainda com o objetivo de apresentar aspectos históricos em relação ao desenvolvimento do conceito de fração, o autor argumenta que o problema mais sério residia no fato de por muito tempo se pensar que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis, ou seja, sejam quais fossem AB e CD, aceitava-se que sempre haveria um segmento EF que caberia um número "exato" *n* de vezes em AB e um número "exato" *m* de vezes em CD. Esta crença, segundo Lima (2013, p. 55), "[...] talvez adviesse da Aritmética, onde dois números naturais quaisquer têm sempre um divisor comum (na pior hipótese, igual a 1)".

> A ilusão da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo. Naquela época, em Crotona, sul da Itália, havia uma seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema " Os números governam o mundo". (Lembremos que números para eles eram números naturais, admitindo-se tomar razões entre esses números, formando as frações.) Uma enorme crise, que abalou os alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, toda a estrutura da Matemática grega, surgiu quando, entre os próprios discípulos de Pitágoras, alguém observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis. (LIMA, 2013, p. 55)

Considerando a Figura disposta na sequência, Lima (2013) apresenta o problema da incomensurabilidade entre a medida do lado e a medida da diagonal de um quadrado:

Figura 15: Quadrado ABCD.



Fonte: Lima (2013, p. 55).

Supondo que houvesse um segmento de reta *u* que coubesse *n* vezes no lado AB e *m* vezes na diagonal AC do quadrado ABCD então, tomando-se AB como unidade de comprimento, a medida de AC seria igual a *m/n* enquanto, naturalmente, a medida de AB seria 1. Assim, pelo Teorema de Pitágoras teríamos $(m/n)^2 = 1^2 + 1^2$ do que se segue que $m^2 / n^2 = 2$ e $m^2=2n^2$. Contudo, esta última igualdade conduz a um absurdo, pois na decomposição de m^2 em fatores primos o expoente do fator 2 é par enquanto que em $2n^2$ é ímpar (LIMA, 2013).

De acordo com o autor, a existência de segmentos incomensuráveis significa que somente os números naturais e as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. Assim, a solução seria a de

> [...]ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais*, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica. Quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número *racional* (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. (LIMA, 2013, p. 56, grifos do autor)

A partir do exemplo da incomensurabilidade entre os segmentos de reta que representam a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal do quadrado, Lima (2013) argumenta que para o caso da medida do lado do quadrado ser igual a 1, a medida da diagonal será o número irracional $\sqrt{2}$.

Lima conclui a seção tecendo críticas à utilização feita da palavra incomensurável pelos meios de comunicação e por pessoas com “limitado conhecimento matemático” (LIMA, 2013, p. 56):

> Nos meios de comunicação e entre pessoas com limitado conhecimento matemático, a palavra incomensurável é muitas vezes

> usada em frases do tipo: havia um número incomensurável de formigas em nosso piquenique. Isto não é correto. Incomensurabilidade é uma relação entre duas grandezas da mesma espécie; não dá ideia de quantidade muito grande. Uma palavra adequada no caso das formigas será incontável ou enorme. Noutros casos, como um campo gigantesco, poderia ser imensurável ou imenso. Mas nada e incomensurável, a não ser quando comparado a outro objeto (grandeza) da mesma espécie. (LIMA, 2013, p. 56)

Assim como ocorreu com seções anteriores, as seções “Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis” constantes tanto na obra *Números e Funções Reais* quanto na obra *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são iguais, fato este facilmente verificável em uma rápida consulta às páginas 54, 55 e 56 da primeira obra e 52, 53, 54 e 55 da segunda obra.

6.3.1.3.2 Seção “Reta Real”

Esta seção é destinada pelo autor à apresentação da Reta Real, imaginada, de acordo com Lima (2013, p. 56), com o objetivo de “[...] ganhar uma ideia mais viável dos novos números, que denominamos irracionais e, em particular, situá-los em relação aos racionais”.

Para tanto, o autor solicita que seja imaginada uma reta, em que foram fixados um ponto O, chamado origem, e um ponto A, diferente de O, de modo que o segmento OA seja tomado como unidade de comprimento. Assim, a reta OA receberá o nome de reta real ou eixo real, de modo que o ponto O divide a reta em duas semirretas, sendo que a semirreta “[...]que contém A, chama-se a semi-reta [*sic*] positiva. A outra é a semi-reta [*sic*] negativa. Diremos que os pontos da semi-reta [*sic*] positiva estão à *direita* de O e os da semi-reta [*sic*] negativa à *esquerda* de O” (LIMA, 2013, p. 57, grifos do autor).

O problema da construção da reta proposta por Lima (2013) reside no fato de que, ao iniciar a construção, ele não fixou a posição de A em relação a O, de modo que todas as demais afirmações são comprometidas, uma vez que o ponto A poderia ser fixado à esquerda do ponto O.

Na sequência, o autor associa os pontos pertencentes à reta real aos números reais. E inicia este processo associando os números naturais e os inteiros negativos com alguns pontos da referida reta, chamando-os de abcissas, a partir do seguinte enunciado: “Seja X um ponto qualquer da reta OA. Se o segmento de reta OA couber um número exato *n* de vezes em OX, diremos que a abcissa de X é o número natural *n* ou o número negativo *–n*, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem. Se X coincidir com a origem, sua abcissa será 0 (zero)" (LIMA, 2013, p. 57).

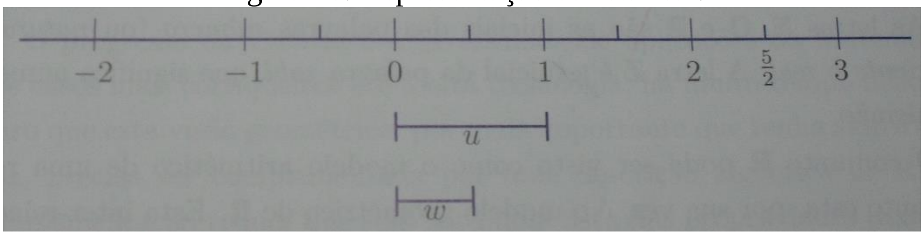
E, a partir dessa associação, o autor define o conjunto Z,

O conjunto Z, formado pelo número zero e pelas abcissas dos pontos X do eixo real, tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes em OX, chama-se o conjunto dos *números inteiros*. Ele é a reunião Z = N∪{0}∪(-N), dos números naturais com o zero e o conjunto –N dos números negativos.

Fonte: Lima (2013, p. 57).

No encadeamento da obra, o autor apresenta a seguinte figura:

Figura 16: Representação da reta real.



Fonte: Lima (2013, p. 57).

De uma forma geral, se o ponto X, pertencente à reta real, é tal que segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, com algum segmento *w* cabendo *n* vezes em OA e *m* vezes em OX, diz-se que a abcissa do ponto X é *m/n* ou *–m/n*, dependendo da posição de X em relação à origem. Se o segmento OA couber um número "exato" de vezes em OX, tem-se então que *n* = 1 e a abcissa de X pertence a Z. E, como consequência, o autor define o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números irracionais e finalmente o conjunto dos números reais:

O conjunto Q, formado pelas abcissas dos pontos X de eixo real tais que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, chama-se o conjunto dos *números racionais*. Tem-se N⊂Z⊂Q. Como vimos acima, os números racionais são representados por frações m/n, onde m ∈ Zen ∈ N.

Fonte: Lima (2013, p. 57-58).

Se, agora, tomarmos um ponto X no eixo real de tal modo que os segmentos OX e OA sejam incomensuráveis, inventaremos um número x, que chamaremos de *número irracional*, e diremos que x é a *abcissa* do ponto X. O número x será considerado positivo ou negativo, conforme o ponto X esteja à direita ou à esquerda da origem, respectivamente. Quando X está à direita da origem, x é, por definição, a medida do segmento OX. Se X está à esquerda da origem, a abscissa x é essa medida precedida do sinal menos.

Fonte: Lima (2013, p. 58, grifos do autor).

O conjunto R, cujos elementos são os números racionais e os números irracionais chama-se o conjunto dos *números reais*. Existe uma correspondência biunívoca entre a reta OA e o conjunto R, a qual associa a cada ponto X dessa reta sua abcissa, isto é, a medida do segmento OX, ou esta medida precedida do sinal menos.

Fonte: Lima (2013, p. 58, grifo do autor).

Como consequência das definições acima, o autor apresenta a seguinte representação da relação entre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais: $N \subset Z \subset Q \subset R$, de modo que “As letras N, Q e R são as iniciais das palavras número (ou natural), quociente e real. A letra Z é a inicial da palavra ZAHL, que significa número em alemão” (LIMA, 2013, p. 58).

Continuando sua exposição, o autor argumenta que o conjunto dos números reais pode ser interpretado como o modelo aritmético de uma reta enquanto a reta, por sua vez, pode ser concebida como o modelo geométrico de R. Segundo Lima (2013, p. 58), “esta inter-relação entre Geometria e Aritmética, entre os pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática atual”.

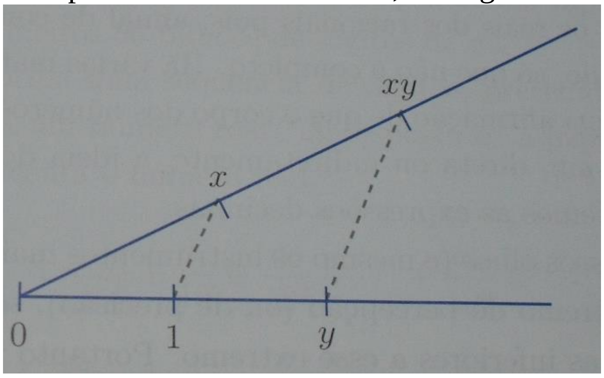
Lima (2013) argumenta ainda que a interpretação dos números reais como abcissas dos pontos de uma reta “fornece uma visão intuitiva bastante esclarecedora” sobre a soma de $x+y$ e sobre a relação de ordem $x < y$, com $x,y \in R$:

> Com efeito, se X e Y são os pontos dos quais x e y respectivamente são abcissas, diz-se que x é o menor que y, e escreve-se $x < y$ quando

> X está à esquerda de Y, isto é, quando o sentido de percurso de X para Y é o mesmo de O para A. Quanto à soma, x+y é a abcissa do ponto Y' tal que o segmento XY' tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido de percurso de OY. (LIMA, 2013, p. 58)

Além disso, o produto xy, em que x, y ∈ R, pode ser "definido geometricamente", e essa definição, para o caso de x > 0 e y >0, ocorre de acordo com a Figura abaixo:

Figura 17: O produto de números reais, visto geometricamente.



Fonte: Lima(2013, p. 59).

Como o esquema apresentado acima é válido quando x > 0 e y >0, segundo Lima (2013, p. 59) "nos demais casos, é só mudar o sinal de xy convenientemente".

Em seguida, o autor argumenta que as construções geométricas que fornecem interpretações visuais para a soma e para o produto de números reais já eram conhecidas desde Euclides (300 a. C.), embora elas apenas representassem operações sobre grandezas (no caso, segmentos de reta), não sobre números reais.

> O progresso da Ciência e a diversidade de aplicações da Matemática, dos casos mais corriqueiros até a alta tecnologia, há muito tempo deixaram claro que esta visão geométrica, por mais importante que tenha sido e ainda seja, precisa ser complementada por uma descrição algébrica de R. Tal complementação requer que seja feita uma lista das propriedades (axiomas) do conjunto R, a partir das quais todos os fatos sobre números reais possam ser demonstrados. Algo parecido com axiomas de Peano para os números naturais. Só que, naturalmente, uma estrutura mais elaborada, pois R é uma concepção bem mais rica e mais sutil do que N. (LIMA, 2013, p. 59)

E a descrição mais simples de R, de acordo com Lima, consiste em dizer tratar-se este conjunto de um *corpo ordenado completo*, caracterização cujos detalhes, de acordo com o supracitado autor, "[...] não são difíceis, mas escapam aos nossos objetivos aqui", de modo que o "leitor interessado" é direcionado a consultar o capítulo

2 do livro *Análise Real* – volume 1. Contudo, o autor apresenta a seguinte explicação para a afirmação de que R é um corpo ordenado completo:

Diremos apenas que R é um *corpo* porque estão definidas aí as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. E um corpo *ordenado* por que existe a relação x < y, que está interligada com a adição e a multiplicação pelas leis conhecidas de monotonicidade. E, finalmente, a *completeza* de R equivale à continuidade da reta. É ela que garante a existência de $\sqrt[n]{a}$ e, mais geralmente, de a^x para todo a> 0 e todo x ∈ R.

Fonte: Lima (2013, p. 58-59, grifo do autor).

A definição dada por Lima (2013) do conjunto dos números reais como sendo um corpo ordenado completo é apresentada pelo mesmo autor na obra *Curso de Análise* – volume 1 por meio de um axioma:

AXIOMA: Existe um corpo ordenado completo, R, chamado o corpo dos números reais.

Fonte: Lima (2002, p. 64).

De acordo com Lima (2013), é a completeza de R que o diferencia de Q, uma vez que este último também é um corpo ordenado, mas não completo. Essa completeza de R pode ser formulada de várias maneiras e “todas elas envolvem, direta ou indiretamente, a ideia de aproximação, ou limite”, o autor tendo optado por fazê-la (na seção posterior da obra) a partir de expressões decimais (LIMA, 2013, p. 60).

O autor finaliza a seção arguindo sobre as limitações da visão do ser humano e da relação desta limitação com os processos de medição e da determinação dos números racionais e irracionais:

> Na prática, nossos olhos (e mesmo os instrumentos mais delicados de aferição) têm um extremo de percepção (ou de precisão), sendo incapazes de distinguir diferenças inferiores a esse extremo. Portanto nenhuma medição experimental pode oferecer como resultado um número irracional. Deve-se entretanto lembrar que, quando o raciocínio matemático assegura a incomensurabilidade, o número racional obtido experimentalmente é apenas um valor aproximado; o valor exato é um número irracional. (LIMA, 2013, p. 60)

Do mesmo modo que ocorreu com seções anteriores, as seções “A Reta real” constantes tanto na obra *Números e Funções Reais* quanto na obra *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são muito similares, fato que é facilmente verificável em consulta às páginas 56, 57, 58, 59 e 60 da primeira obra e 55, 56, 57, 58 e 59 da segunda obra.

No que concerne à discussão apresentada por Lima (2013) sobre os números reais, feita a partir da noção de comensurabilidade como norteadora da discussão da ampliação N ⊂Z ⊂ Q ⊂ R, apresenta indícios de uma superação da abordagem comumente veiculada nos cursos de formação inicial de professores, quando, em geral, é feita a partir dos “Cortes de Dedekind” ou das “classes de equivalência de sequências de Cauchy” (LIMA, 2002; LIMA, 2004). Nossa afirmação é corroborada por Moreira e David (2010, p. 83-84).

> O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos no trabalho com a ideia de incomensurabilidade e sua vinculação com o significado dos números irracionais pode ser essencial no desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção, adaptação ou mesmo a construção e a implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema “números reais.” (MOREIRA;, DAVID, 2010, p. 83-84)

Entretanto, ainda não existe um consenso sobre a conveniência de um trabalho com a incomensurabilidade com os alunos da escola básica, uma vez que “[...] estudos realizados no Brasil e no exterior mostram que, mesmo entre os alunos universitários, inclusive estudantes do curso de Matemática, predominam ideias bastante confusas a respeito da noção de incomensurabilidade e suas relações com o significado da irracionalidade” (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 84). Há que se observar também que nem toda abordagem a partir da ideia da incomensurabilidade entre segmentos será adequada para o ensino da matemática na escola, uma vez que existem várias formas de se trabalhar com esta noção, dentre elas algumas que privilegiam o formalismo, desenvolvido a partir de definições e demonstrações formais.

Além disso, ao vislumbramos os objetivos do PROFMAT e a complexidade do ensino dos números inteiros, racionais, irracionais e reais na educação básica, essa abordagem configura-se como, no mínimo, limitada e aquém das necessidades formativas dos professores de Matemática, motivo pelo qual apresentamos abaixo alguns apontamentos.

Ao se referir ao conjunto dos números inteiros, Lima (2013) limita-se a defini-lo como sendo Z = N∪{0}∪(-N) não discutindo, por exemplo, as operações definidas para este conjunto – adição, subtração, multiplicação e divisão – furtando-se a discutir conteúdos que são de extrema relevância para a prática do professor de Matemática da educação básica. Assim, não basta para o professor de Matemática deste nível de ensino saber que o conjunto dos números inteiros é composto pelo número zero, pelos números naturais e pelos números que possuem a forma "– n" em que "–n" representa a abcissa de um ponto X pertencente à reta real que está posicionado à esquerda da origem O, e tal que o segmento OA (unidade de comprimento) cabe um número exato *n* de vezes em OX. O professor precisa ter claro em que o conjunto dos números naturais difere do conjunto dos números inteiros negativos, como ocorrem as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre os números que compõem estes conjuntos. O professor precisa conhecer os "porquês" inerentes às regras de sinais comumente veiculadas no ambiente escolar que estão vinculadas às operações com os números inteiros (BALL; HILL; BASS, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008). O conhecimento destes aspectos fornece um arcabouço de conhecimentos para que o professor pense cenários de ensino que favoreçam a abordagem deste conteúdo na educação básica, com exemplos e exercícios que superem a estratégia do "decorar" e aplicar as regras de sinais (BALL; HILL; BASS, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

A apresentação do conjunto dos números racionais feita por Lima (2013) também é limitada, especialmente ao vislumbrarmos a do professor de Matemática da escola básica. O autor não discute, por exemplo: 1) as concepções com as quais os números racionais são veiculados no ambiente escolar: concepção parte-todo, a concepção de quociente, a concepção de razão e a concepção de operador (SILVA, 2005); 2) diferentes formas de representação dos números que compõem o conjunto Q; 3) as operações definidas para este conjunto; 4) os conceitos e procedimentos envolvidos nos cálculos das operações entre os números que compõem o conjunto dos números racionais Q – adição, subtração, multiplicação e divisão (MA, 2009; BALL, HILL e BASS, 2005; BALL, THAMES e PHELPS, 2008); 5) a elaboração de enunciados e exemplos que representem os números que pertencem a Q e as operações definidas para este conjunto (MA, 2009; BALL, HILL e BASS, 2005; BALL, THAMES e PHELPS, 2008).

No que se refere à extensão dos números naturais, tal como descritas por Lima ao definir o conjunto Q dos racionais, em que $N \subset Z \subset Q$, Moreira e David (2010) defendem que a natureza desta extensão na matemática acadêmica e na escola são completamente diferentes, uma vez que o conjunto e a estrutura que resultam do processo de extensão apresentam-se como um universo *novo* para o aluno. Especialmente,

> [...] no caso da ampliação dos naturais aos racionais positivos, o professor tem que levar em conta que a criança, até certa altura da sua vida escolar, apenas reconhece como números os inteiros positivos. Assim, a aquisição da noção abstrata de número racional está associada a um longo processo de elaboração e reelaboração, quase que elemento a elemento. O professor da escola básica tem que trabalhar com os significados concretos das frações e outros subconstrutos para que o aluno alcance, eventualmente, a ideia abstrata de número racional, mas esse processo de construção da abstração não tem como resultado apenas a demonstração da possibilidade de se exibir formalmente um conjunto com as características ***essenciais*** (e já concebidas) dos racionais. Ao contrário, este conjunto numérico ampliado, assim como as relações entre seus elementos (os ***novos*** números), as ***novas*** formas de representação, a ***nova*** ordem, as ***novas*** operações e suas ***novas*** propriedades, são conhecimentos ***novos*** a serem processados e, eventualmente, assimilados. (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 61, grifos dos autores)

Essas novidades constituem-se como elementos fundamentais para a prática docente e interferem decisivamente no tratamento didático-pedagógico das várias etapas desse processo.

6.3.1.3.3 Seção "Expressões Decimais"

O autor opta por discorrer sobre as expressões decimais pelo fato de considerar que, para efetuar cálculos, "[...] a forma mais eficiente de representar os números reais é por meio de expressões decimais". Contudo, o autor considera apenas os números reais positivos, uma vez que "para tratar de números negativos, simplesmente se acrescenta o sinal menos" (LIMA, 2013, p. 60).

Uma expressão decimalé um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1\, \boldsymbol{a_1} \ldots a_n \ldots,$ onde a_0é um número inteiro ≥ 0 e $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in$ N, tem-se um dígito $a_n$chamado o *n-ésimo dígito* da expressão decimal α. O número natural a_0 chama-se a parte inteira de α. Fonte: Lima (2013, p.60, grifo nosso).

Conforme grifado por nós acima, o enunciado proposto por Lima (2013) apresenta um pequeno erro na exposição dos dígitos do símbolo que representa uma expressão decimal: $\alpha = a_0, a_1$ **a_1**...a_n...

A seguir, o autor apresenta três números como exemplos de expressões decimais, a saber α = 13,428000..., β =25,121212..., π=3,14159265..., sendo que para os números α e β pode-se perceber facilmente como são obtidos os dígitos não explicitados. Já para o caso de π, os dígitos explicitados não permitem saber qual seria a regra a ser utilizada na determinação dos demais dígitos da expressão. Contudo, de acordo com Lima (2013, p. 61), "[...] existem processos bem definidos e eficientes para calculá-los. Recentemente, com auxílio de algoritmos especialmente concebidos e computadores rápidos, foi possível determinar os primeiros 56 bilhões de dígitos de π".

Na sequência, o autor questiona: "Mas de que forma uma sequência de dígitos, precedida de um número inteiro, representa um número real?" Lima responde a essa questão dizendo que a expressão decimal α representa o número real $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Assumindo que $\bar{\alpha}$ é equivalente a α, o autor argumenta que tal igualdade significa que o número real α tem por valores aproximados os números racionais:

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Lima (2013) salienta que, quando se substitui α por α_n o erro cometido não é superior a $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$, do que decorre que a_0é o maior número natural contido em α, a_1 é o maior digito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$, a_2 é o maior digito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha$, etc (LIMA, 2013). "Deste modo, tem-se uma sequência não decrescente de números racionais $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_n \leq ...$, que são valores (cada vez mais) aproximados do número real α. Mais precisamente, tem-se $0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$ para cada n=0,1,2,3,4,..." (LIMA, 2013, p. 61).

Diz-se então que o número real α é o limite desta sequência de números racionais.

O fato de que existe sempre um número real que é limite desta sequência (isto é, que tem os α_n como seus valores aproximados) é a forma que adotaremos para dizer que *o corpo ordenado dos números reais é completo.*

Fonte: Lima (2013, p. 62, grifo do autor).

Na sequência, o autor apresenta uma discussão sobre situações particulares.

A primeira refere-se ao caso em que todos os dígitos a_n se tornam iguais a zero a partir de certo ponto: $\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \ldots, a_n000\ldots$,. Neste caso $\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ é um número racional – mais especificamente, uma fração decimal. E, como exemplo, Lima apresenta o número 13,42800... = $13 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{13428}{1000}$.

A segunda situação explorada pelo autor refere-se ao estudo da expressão decimal periódica $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$, que também pode representar um número racional. Para a exploração desta situação o autor opta pelo número real

$$\alpha = 0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Lima (2013) afirma também que $\alpha=1$ e explica essa afirmação apresentando os valores aproximados de α como sendo $\alpha_1 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,99$, $\alpha_3 = 0,999$, etc. Comenta ser possível reescrever essas igualdades obtendo-se $1 - \alpha_1 = 0,1$, $1 - \alpha_2 = 0,01$, $1 - \alpha_3 = 0,001$, ... , $1 - \alpha_n = 10^{-n}$, de modo que, “[...] tomando *n* suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Noutras palavras, os números racionais $\alpha_n = 0,99\ldots99$ são valores cada vez mais aproximados de 1, ou seja, têm 1 como limite” (LIMA, 2013, p. 62).

Lima (2013, p. 62 - 63) observa que a igualdade 1=0,999... “costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente paradoxo é esclarecer que o símbolo 0,999... na realidade significa o número cujos valores aproximados são 0,9, 0,99, 0,999, etc. E esse é o número 1”.

Lima observa em seguida que, uma vez estabelecido que 0,999...= $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 1$, ao dividirmos essa igualdade por 9, resulta que 0,111...= $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9}$ e, como consequência da construção acima, a seguinte igualdade, que é válida para todo dígito a, multiplicando por a tem-se que:

$$0, aaa... = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \cdots + \frac{a}{10^n} + \cdots = \frac{a}{9}$$

O autor explora a seguir os exemplos 0, 777...= $\frac{7}{9}$ e 0,3737... = $\frac{37}{99}$ e define dízima periódica:

> Uma expressão decimal $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ chama-se *dízima periódica simples*, de período $a_1a_2 \ldots a_p$, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem.
>
> Fonte: Lima (2013, p. 62, grifo do autor).

Assim, associando esse enunciado aos números 0,777 ... e 0,373737... Lima (2013) conclui que elas são dízimas periódicas simples com períodos, respectivamente, 7 e 37. Ainda do enunciado acima, o autor conclui que toda dízima periódica simples representa um número racional, e este número racional é chamado de fração geratriz.

> *A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.*
>
> Fonte: Lima (2013, p. 64, grifo do autor).

Na sequência, o autor discorre sobre as dízimas periódicas ditas compostas, aquelas que têm depois da vírgula uma parte que não se repete seguida por uma parte periódica. O autor explora o processo de obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica composta a partir do seguinte exemplo:

$\alpha = 0{,}35172172...$

$100\ \alpha = 35,\ 172172... = 35\frac{172}{999} = \frac{35 \text{ x } 999 + 172}{999} =$

$= \frac{35\ (1000-1) + 172}{999} = \frac{35000 + 172 - 35}{999} = \frac{35172-35}{999}$

Assim, $\alpha = \frac{35172-35}{99900}$

Como consequência da referida apresentação, o autor apresenta a regra:

> *A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à*

parte não periódica (35) seguida de um período (172) menos a parte não periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica.

Fonte: Lima (2013, p. 65, grifo do autor).

Tendo em vista que as expressões decimais periódicas (simples ou compostas) representam números racionais e que, reciprocamente, todo número racional é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica, Lima (2013, p. 65) observa que "Para obter a expressão decimal do número racional p/q, faz-se a 'divisão continuada' de p por q, acrescentando-se zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não-nulo"

O autor explora a seguir, como exemplo, o número racional $\frac{14}{27}$ =0,518518... e conclui dizendo que "Como nas divisões sucessivas só podem ocorrer os restos 0,1,2,...,q-1, após no máximo q divisões um resto vai repetir-se e, a partir daí, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, logo tem-se uma expressão periódica" (LIMA, 2013, p. 65). E chama a atenção do leitor para a possibilidade de encontrar um estudo mais detalhado dessa questão nas págs. 158-172 do livro *Meu professor de Matemática*.

Lima (2013, p. 65) ressalta que a correspondência que associa a cada expressão decimal um número real é uma função sobrejetiva e "quase" injetiva. No que concerne à sobrejetividade da função, Lima afirma que isso significa que, "dado arbitrariamente um número real α, existe uma expressão decimal $a_0, a_1a_2...a_n...$ tal que $a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + ... + a_n \cdot 10^{-n} + ... = \alpha$", de modo que considerando α >0, obtém-se a expressão decimal de α tomando sucessivamente: a_0 = o maior inteiro ≥ 0 contido em α (isto é, menor do que ou igual a); a_1 = o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$; a_2 = o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq \alpha$ e assim por diante. Na sequência, o autor exemplifica com o número π = 3,14159265..., esta escrita significando que 3 < π < 4; 3,1 < π <3,2; 3,14 < π < 3,15 etc.

Quanto à "quase" injetividade da correspondência: "Expressão decimal → número real", Lima (2013) argumenta que ela significa que, se $0 \leq a_n \leq 8$, então as expressões decimais $a_0,a_1...a_n999...$ e $a_0, a_1...(a_n+1)000...$ definem o mesmo número real. Como, por exemplo, 3,275999... = 3,276000... e 0,999... = 1,000... . O autor adverte ainda que a afirmação de que “[...] uma correspondência é ‘quase’ injetiva não tem sentido algum em geral. No presente caso, estamos querendo dizer que a situação acima descrita é a única em que há quebra de injetividade. Isto pode ser provado mas não haveria muita vantagem em fazê-lo aqui” (LIMA, 2013, p. 66).

Concluindo a seção, o autor argumenta que a obtenção de uma correspondência biunívoca entre as expressões decimais e os números reais se dá a partir do descarte das expressões que terminam por uma sequência de noves, tema que será abordado na seção seguinte.

Do mesmo modo que nas seções anteriores, as seções “Expressões Decimais” constantes nas obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são muito similares, fato facilmente verificável nas páginas 60, 61, 62, 63, 64, 65 e 66 da primeira obra e 59, 60, 61, 62, 63, 64 e 65 da segunda.

No que concerne à abordagem dada por Lima (2013) ao tema “expressões decimais”, entendemos que ela apresenta discussões pertinentes à prática do professor de Matemática da educação básica, especialmente em relação ao processo de determinação da fração geratriz de uma dízima periódica e da diferenciação de expressões decimais que representam números racionais e de expressões que representam números irracionais.

6.3.1.3.4 Seção “Operações com expressões decimais”

Nesta seção, o autor discute a impossibilidade de efetuarmos as quatro operações com as expressões decimais usando-as na íntegra, uma vez que elas são organizadas da esquerda para a direita, ao passo que as operações são normalmente desenvolvidas da direita para a esquerda. Explica que, sendo dados $\alpha = a_0, a_1a_2...$ e $\beta = b_0, b_1b_2...$, para se calcular $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha.\beta$ e α/β (se $\beta \neq 0$) deve-se tomar $n \in N$ e, considerando-se os valores aproximados $\alpha_n = a_0,a_1 ...b_n$, $\beta_n = b_0,b_1 ... b_n$, os números racionais $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n- \beta_n$, $\alpha_n.\beta_n$ e α_n/β_n correspondem a aproximações para os resultados que se deseja obter.

Como ocorrido com seções anteriores, as seções “Operações com expressões decimais” constantes nas obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são muito similares, como se verifica pela consulta às páginas 66 e 67 da primeira obra e 66 da segunda.

6.3.1.3.5 Seção “Uma descoberta de George Cantor”

Nesta seção, o autor argumenta que Cantor foi a primeira pessoa que provou existirem diferentes números cardinais infinitos e que a cardinalidade de N é estritamente menor do que a de R. Esse matemático mostrou que R não é enumerável e que o conjunto Q dos números racionais é enumerável e, como R = Q ∪ Q^c resulta daí que o conjunto Q^c dos números irracionais é não enumerável , o que “[...] significa que existem muito mais números irracionais do que racionais” (LIMA, 2013, p. 67).

Como ocorreu em outros casos, as seções “Uma descoberta de George Cantor” constantes das obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são muito similares, o que se verifica em uma consulta às páginas 67 da primeira obra e 66 e 67 da segunda.

6.3.1.3.6 Seção “Desigualdades”

Lima (2013) inicia esta seção justificando a opção em abordar a relação de desigualdade x < y entre números reais, por ser esta uma relação fundamental, motivo pelo qual é de bom alvitre destacar algumas de suas propriedades “[...] a fim de que saibamos o que estaremos fazendo quando operarmos com essa relação” (LIMA, 2013, p. 68). Contudo, o autor não argumenta porque essa relação é fundamental.

Partindo da premissa de que todas essas propriedades derivam de duas “básicas” e que se referem aos números reais positivos[129] - cujo conjunto é representado por R^+= {x ∈ R; x > 0} -, o autor inicia a discussão apresentando as referidas propriedades básicas:

P1) Dado o número real x, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou x é positivo, ou x = 0 ou -x é positivo.

P2) A soma e o produto de números positivos são ainda números positivos.

Fonte: Lima (2013, p. 68).

Com relação à propriedade P1, o autor destaca ainda que -x é, por definição, o único número real tal que -x + x = 0 e que, quando -x é positivo, diz-se que x é um número negativo e escreve-se x < 0.

A partir do exposto ,o autor apresenta as “propriedades essenciais” da relação x < y:

[129]“A desigualdade entre números reais reduz-se ao conhecimento dos números positivos pois a afirmação x < y significa que a diferença y - x é um número positivo” (LIMA, 2013, p. 68).

1) *Tricotomia*: dados $x, y \in R$ vale uma, e somente uma, das alternativas seguintes: $x < y$, $x=y$ ou $y<x$.

2) *Transitividade*: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

3) *Monotonicidade da adição*: se $x < y$ então, para todo $z \in R$ tem-se $x+z<y+z$.

4) *Monotonicidade da multiplicação*: se $x < y$ e z é positivo então $xz < yz$.

Fonte: Lima (2013, p. 68, grifos do autor).

Na sequência, o autor demonstra as quatro propriedades enunciadas (omitiremos essas demonstrações, mas elas podem ser encontradas na página 69 da obra *Números e Funções Reais*) e reelabora os enunciados da monotonicidade da adição e da monotonicidade da multiplicação reapresentando-os por meio dos seguintes enunciados:

3') Se $x<y$ e $x'<y'$ então $x+x' < y+y'$.

4') Sejam x, y, x', y' números positivos. Se $x < y$ e $x' < y'$ então $xx' < yy'$.

Fonte: Lima (2013, p. 69).

No encadeamento da obra, o autor também demonstra estes enunciados e argumenta que "[...] As pessoas atentas a detalhes observarão que, para ser válida a propriedade 4'), basta que apenas três dos quatro números x, x', y e y' sejam positivos", uma vez que a demonstração desta propriedade requer apenas que x' e y sejam positivos mas, como $x' < y'$, decorre daí que $y' > 0$ (LIMA, 2013. p. 69).

Em decorrência das propriedades P1 e P2 Lima (2013) enuncia e demonstra as seguintes propriedades:

5) Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$. (Todo quadrado, exceto 0, é positivo.)

6) Se $0 < x < y$ então $0 < 1/y < 1/x$. (Quanto maior for um número positivo, menor será seu inverso.)

7) Se $x < y$ e z é negativo então $xz > yz$. (Quando se multiplicam os dois membros de

uma desigualdade por um número negativo, o sentido dessa desigualdade se inverte.)

Fonte: Lima (2013, p. 70).

Após demonstrá-las, Lima (2013) argumenta que a resolução de uma inequação com uma incógnita fundamenta-se na aplicação sucessiva das propriedades apresentadas na seção com o objetivo de simplificá-la a ponto de chegar a uma expressão do tipo $x < c$ ou $x > c$.

E, para encerrar a seção "Desigualdades", apresenta três possibilidades de interpretação da afirmação $x < y$, a primeira das quais é a geométrica:

Geometricamente: $x < y$ significa que, num eixo orientado, o ponto de abcissa y está a direita do ponto de abcissa x.

Fonte: Lima (2013, p. 70, grifo do autor).

A segunda possibilidade apresentada pelo autor é a Numérica:

Numericamente: Sejam: $x=a_0, a_1...a_n...$ e $y=b_0, b_1...b_n...$ números reais positivos, dados por suas expressões decimais. Como se pode reconhecer que $x < y$? Certamente tem-se $x < y$ quando $a_0 < b_0$ (Lembre-se que estamos descartando as expressões decimais que terminam com uma sequência de noves.). Ou então quando $a_0 = b_0$ e $a_1 < b_1$. Ou quando $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ mas $a_2 < b_2$. E assim por diante. É como a ordem segundo a qual as palavras estão dispostas num dicionário. Tem-se $x < y$ se, e somente se, $a_0 < b_0$ ou então existe um inteiro $k > 0$ tal que $a_0 = b_0, a_1 = b_1 ,..., a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k < b_k$. Caso se tenha $x \leq 0 < y$, a relação $x < y$ é automática. E, finalmente, se x e y forem ambos negativos, tem-se $x < y$ se, e somente se, o número positivo $-y$ for menor do que o número positivo $-x$ segundo o critério acima.

Fonte: Lima (2013, p. 70-71, grifo do autor).

E a terceira e última possibilidade apresentada pelo autor é a algébrica:

Algebricamente: (Supondo conhecido o conjunto dos números positivos, gozando das propriedades P1) e P2) acima enunciadas.) Tem-se $x < y$ se, e somente se, a diferença $d = y – x$ é um número positivo. Noutras palavras, vale $x < y$ se, e somente se, existe um número real positivo d tal que $y = x + d$.

Fonte: Lima (2013, p. 70-71, grifo do autor).

A seção é finalizada pelo autor argumentando que as três interpretações (geométrica, numérica e algébrica) para o significado da desigualdade $x < y$ são adequadas, mas que “as circunstâncias é que determinam qual é a mais conveniente” (LIMA, 2013, p. 71).

Como nas seções anteriores, as seções “Desigualdades” constantes das obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são iguais, como se pode verificar em uma consulta às páginas 68, 69, 70 e 71 da primeira obra e 67, 68, 69 e 70 da segunda. A discussão apresentada nesta seção sobre o tema “desigualdades” também é muito similar às apresentadas pelo autor nas obras *Análise Real* – volume 1 e *Curso de Análise* – volume 1, similaridade que se refere tanto ao encadeamento das propriedades quanto à linguagem e ao formato das demonstrações, o que se verifica consultando as páginas 13 e 14 da primeira obra e 52 e 53 da segunda.

O problema desta seção refere-se novamente à abordagem feita pelo autor ao tema, na medida em que reduz a discussão sobre a desigualdade entre números reais à enunciação e demonstração de uma sequência de propriedades. Além disso, com exceção de um comentário em que vinculou as propriedades apresentadas com a resolução de uma inequação, em nenhum outro momento o autor apresenta qualquer discussão, ou mesmo comentário, que vincule estas propriedades à prática do professor de Matemática da educação básica. O autor não discute, por exemplo, se as demonstrações realizadas são acessíveis aos estudantes da educação básica, se elas precisam ser adaptadas para se tornarem acessíveis aos estudantes da educação básica, ou em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível utilizá-las. O autor também não discute possíveis adaptações da linguagem que adotou ao demonstrar as referidas propriedades aos conhecimentos já elaborados pelos estudantes desses níveis do ensino.

6.3.1.3.7 Seção “Intervalos”

Conforme o próprio título evidencia, o objeto de discussão de Lima (2013) nesta seção são os intervalos, tema este cuja discussão o autor inicia chamando de intervalos a nove subconjuntos de R nos quais a, b são números reais, com a ≤ b:

$[a,b]=\{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$,	$(-\infty,b]=\{x \in R;\ a \leq b\}$,
$(a,b] = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$,	$(-\infty,b) = \{x \in R;\ x < b\}$,
$(a,b) = \{x \in R;\ a < x < b\}$,	$[a,+\infty) = \{x \in R;\ a \leq x\}$,
$[a,b) = \{x \in R;\ a \leq x < b\}$,	$(a,+\infty) = \{x \in R;\ a < x\}$,
	$(-\infty, +\infty) = R$

De acordo com o autor, os quatro intervalos da esquerda são limitados, com extremos a e b. Assim, [a, b] é um intervalo fechado, (a, b) é aberto, [a, b) é fechado à esquerda, (a,b] é fechado à direita. Os cinco intervalos da direita são ilimitados. o intervalo (-∞, b], por exemplo, representando a semirreta à esquerda, fechada, com origem em b, os demais sendo analogamente denominados. Além disso, quando a = b, o intervalo fechado [a, b] fica reduzido a um único elemento e recebe a denominação de *intervalo degenerado*, de modo que os outros três intervalos da esquerda seriam, neste caso, vazios (LIMA, 2013).

Na sequência, Lima enfatiza que "+∞ e -∞ não são números reais" uma vez que "são apenas partes da notação de intervalos ilimitados". Além disso, os intervalos são – com exceção de N, Z e Q – os subconjuntos de R mais comumente encontrados (LIMA, 2013, p. 72).

Ainda no encadeamento da obra, Lima apresenta e demonstra a seguinte propriedade:

Todo intervalo não-degenerado contém números racionais e números irracionais
Fonte: Lima (2013, p. 72, grifo do autor).

E o autor finaliza a seção argumentando que esta propriedade é essencial para provar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, teorema cuja demonstração será feita na disciplina "Números e Funções Reais".

As seções "Intervalos", constantes das obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são, como ocorreu em outros casos, muito similares, como é possível verificar comparando as páginas 71 e 72 da primeira obra e 70, 71 e 72 da segunda. Além disso, a discussão apresentada nesta seção para o tema "intervalos" também é muito similar às discussões apresentadas pelo mesmo autor nas obras *Análise Real* – volume 1 e *Curso de Análise* – volume 1, uma similaridade que se encontra tanto no encadeamento das propriedades quanto na linguagem e formato da demonstração, fato contatável pelo exame das páginas 15 e 19 da primeira obra e 55 e 69 da segunda.

O problema desta seção refere-se ao fato de que a discussão proposta pelo autor se restringe a apresentar e definir os intervalos que são subconjuntos de R. Contudo, conforme discutimos no Capítulo 3 deste trabalho, o trabalho do professor não se resume a apresentar (expor) definições, teoremas e propriedades, mas sim em elaborar cenários com múltiplas representações de um mesmo conteúdo (geométrica, por exemplo), elaborar exercícios e problemas que o abordem de forma coerente com o processo de aprendizagem dos alunos, em tornar demonstrações de propriedades e teoremas acessíveis aos estudantes dos diversos anos da educação básica, em adaptar a linguagem matemática tornando-a compreensível aos estudantes aos quais as aulas são destinadas. Ou seja, as necessidades dos professores são muito complexas e extrapolam a apresentação de uma relação de definições e proposições (e suas demonstrações).

Além disso, o saber profissional do professor é muito mais do que conhecer definições, teoremas e demonstrações, porque se refere aos processos de ensinar e aprender e a pessoas que ensinam e que aprendem numa instituição escolar. Em suma, refere-se a uma *educação básica*.

6.3.1.3.8 Seção "Valor Absoluto"

Conforme o título da seção evidencia, seu objeto de estudo é a noção de "valor absoluto", definida por Lima (2013, p. 73) do seguinte modo:

> O *valor absoluto (ou módulo)* de um número real x, indicado pela notação |x|, é definido pondo-se
>
> $$|x| = \begin{cases} x, se\ x\ \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Outra maneira de definir o valor absoluto consiste em pôr:

|x| = max {x, -x}

Fonte: Lima (2013, p. 73, grifo do autor)+

Reinterpretando a definição, Lima (2013) expõe que o valor absoluto de x é o maior dos números x e –x e que quando x = 0 tem-se, que x = -x = |x| = 0. Assim, por exemplo, ao utilizar a definição acima apresentada para a resolução de uma equação da forma |x - 3| = 0, o autor apresenta a seguinte resposta: |x - 3| = x - 3 se x ≥ 3 e | x - 3| = 3 - x quando x < 3.

No tocante ao estudo de questões que envolvem o valor absoluto, Lima (2013) explica que, em princípio, somos obrigados a fazer as "inevitáveis considerações de casos", analisando separadamente as situações de acordo com o sinal de cada expressão inscrita no interior das barras verticais | |. Contudo, em alguns casos, este procedimento pode ser evitado uma vez que se pode utilizar a seguinte caracterização de valor absoluto: |x| = $\sqrt{x^2}$, procedimento adotado, segundo o autor, a partir da "[...] convenção que regula o uso do símbolo √: para todo *a* ≥ 0, $\sqrt{a}$ é o número *não-negativo* cujo quadrado é *a*"(LIMA, 2013, p. 73).

A seguir, o autor apresenta mais uma interpretação do valor absoluto:

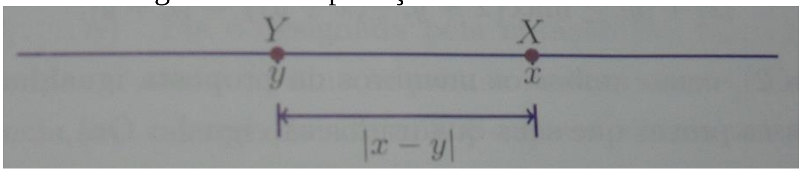
Se x e y são respectivamente as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo R então

|x –y | = distância do ponto X ao ponto Y.

Fonte: Lima (2013, p. 73).

E acompanha esta interpretação com a seguinte figura:

Figura 18: Interpretação do valor absoluto.



Fonte: Lima (2013, p. 73).

No tocante à interpretação do valor absoluto como distância, Lima (2013) argumenta que:

> A interpretação do valor absoluto $|x - y|$ como a distância, no eixo real, entre os pontos de coordenadas *x* e *y*, permite que se possa enxergar intuitivamente o significado e a resposta de algumas questões envolvendo módulos. Por exemplo, a igualdade $|x - 2| = 3$ significa que o número *x* (ou o ponto que a ele corresponde no eixo) está a uma distância 3 do número 2. Logo, deve ser $x = 5$ (se *x* estiver à direita de 2) ou $x = -1$ (se estiver à esquerda). Se tivermos uma desigualdade, como $|x - a| < \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, isto significa que a distância de *x* ao ponto a é menor do que ε, logo *x* deve estar entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. Portanto o conjunto $\{x \in R; |x - a| < \varepsilon\}$ é o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. (LIMA, 2013, p. 74)

O autor finaliza a seção apresentando e demonstrando duas propriedades do valor absoluto que ele considera as "mais úteis" sob o ponto de vista das manipulações algébricas, a saber:

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$ e

2) $|x . y| = |x| . |y|$

válidas para quaisquer $x, y \in R$.

Para demonstrar 1), observamos que $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$, logo $x + y \leq |x| + |y|$. Além disso, tem-se também $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$, logo $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Assim, temos $|x| + |y| \geq \max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y|$.

Quanto a 2), como ambos os membros da proposta igualdade são não-negativos, basta provar que seus quadrados são iguais. Ora, $|x . y|^2 = (x . y)^2 = x^2 . y^2 = |x|^2 . |y|^2$.

Fonte: Lima (2013, p. 74).

Estas propriedades são enunciadas por Lima na obra *Análise Real* – volume 1, por meio do seguinte teorema:

Teorema 1. Se $x, y \in R$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x . y| = |x| . |y|$.

Demonstração: Somando membro a membro as desigualdades $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$ vem $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente, de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ resulta que $|x| + |y| \geq -(x + y)$. Logo, $|x| + |y| \geq |x + y| = max\{x + y, -(x + y)\}$. Para provar que $|x . y| = |x| . |y|$, basta mostrar que estes dois números têm o mesmo quadrado, já que ambos são ≥ 0.Ora, o quadrado de $|x.y|$ é $(x \,.\, y)^2 = x^2 \,.\, y^2$, enquanto $(|x| \,.\, |y|)^2 = |x|^2 \,.\, |y|^2 = x^2 \,.\, y^2$.

Fonte: Lima (2004, p. 14).

Do mesmo modo como ocorreu com seções anteriores desta mesma obra, as seções “Valor Absoluto” constantes das obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são muito similares, como se verifica comparando as páginas 73 e 74 da primeira obra e 72, 73 e 74 da segunda.

Diferentemente do que ocorreu em boa parte das seções anteriores desta obra, nesta seção o autor apresenta distintas abordagens para o tema “valor absoluto” que são acessíveis, por exemplo, aos estudantes do ensino médio, e explora dois exemplos comumente veiculados na matemática escolar. Entretanto, ao apresentar as duas propriedades e suas respectivas demonstrações, o autor novamente não discute a relevância delas para o trabalho do docente da escola básica, com que objetivo as demonstrações foram apresentadas na referida obra, se essas demonstrações são acessíveis à educação básica, se elas demandam adaptações – e quais seriam as adaptações possíveis – para serem abordadas no ambiente escolar e se é necessário ao professor adaptar a linguagem matemática tornando-a compreensível aos estudantes aos quais as aulas são destinadas.

No encadeamento do capítulo “Números Reais”, o autor apresenta as seções “Sequências e Progressões” e “Sequências Monótonas”. Contudo, como ambas possuem como objeto de estudo funções cujo contra-domínio é o conjunto dos números reais, ou seja, funções de N em R, e tendo em vista que nosso objetivo era analisar a abordagem desenvolvida por Lima (2013) em relação aos conjuntos numéricos, especialmente, a relativa ao conjuntos dos números naturais e ao conjunto dos números racionais, omitiremos as análises das tais seções deste capítulo, uma vez que os temas que abordam fogem do escopo desta pesquisa. Assim, passaremos agora para a descrição e análise da seção intitulada como “exercícios”.

6.3.1.3.9 Seção “Exercícios”

O primeiro exercício da seção apresenta cinco intervalos, A = [– 1, 3), B = [1, 4], C = [2, 3), D= (1,2] e E = (0,2] e solicita que o leitor diga se número 0 pertence ao seguinte conjunto: ((A – B) – (C ∩ D)) – E.

O segundo exercício apresenta inequações e atribui a elas duas resoluções, respectivamente, e solicitando que o leitor diga se os passos desenvolvidos nessas soluções estão corretos. Essas inequações (e suas respectivas soluções) são:

a) $\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \quad \rightarrow \quad 5x + 3 > 4x + 2 \quad \rightarrow \quad x > -1$

b) $\frac{2x^2+x}{x^2+1} < 2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + x < x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad x < 2$

O terceiro exercício apresenta a, b, c, d > 0 tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ e solicita que a desigualdade $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ seja provada. Solicita também que o leitor interprete este resultado para o caso em que a, b, c e d sejam inteiros positivos, "isto é, o que significa somar numeradores e denominadores de duas frações?"

O quarto exercício solicita que o leitor determine "qual é a aproximação da raiz cúbica de 3 por falta com uma casa decimal?". Já o quinto exercício apresenta o seguinte questionamento: "Ao terminar um problema envolvendo radicais, os alunos normalmente são instados a racionalizar o denominador do resultado obtido. Por que isso?" (LIMA, 2013, p. 79).

O sexto exercício solicita que sejam considerados todos os intervalos da forma $[0, \frac{1}{n}]$, sendo *n*∈ N e questiona se "Existe um número comum a todos estes intervalos? E se forem tomados os intervalos abertos?" (LIMA, 2013, p. 79).

O sétimo exercício solicita que seja considerado um número racional *m/n*, em que *m* e *n* são primos entre si. A partir disso, pergunta: "Sob que condições este número admite uma representação decimal finita? Quando a representação é uma dízima periódica simples?" (LIMA, 2013, p. 79). O oitavo exercício apresenta o número 0,123456789101112131415... e questiona se ele é racional ou irracional.

O nono exercício solicita que o leitor resolva as equações e inequações apresentadas na sequência utilizando a interpretação geométrica de módulo:

a) |x — 1| = 4;

b) |x + 1| <2;

c) |x — 1| < |x — 5|;

d) |x — 2|+ |x + 4| = 8;

e) $|x - 2| + |x + 4| = 1$.

O décimo exercício solicita que sejam considerados os números reais não negativos a e b e que, a partir disso, o leitor mostre que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}$ e que interprete geometricamente a desigualdade.

O décimo primeiro exercício apresenta o seguinte enunciado:

> Sabendo que os números reais *x*, *y* satisfazem as desigualdades 1,4587 <*x*< 1,4588 e 0, 1134 <*y*<0,1135, têm-se os valores exatos de *x* e *y* até milésimos. Que grau de precisão, a partir daí, podemos ter para o valor de *xy*? Determine esse valor aproximado. Como procederíamos para obter um valor aproximado de *x/y* ? Qual o grau de precisão encontrado no caso do quociente? (LIMA, 2013, p. 80)

O décimo segundo exercício solicita que se prove que, quaisquer que sejam x, y ∈ R, então $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Como ocorrido com seções anteriores desta mesma obra, as seções “Exercícios” constantes nas obras *Números e Funções Reais* e *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1 são muito parecidas. O que as diferencia é que o décimo segundo exercício presente na obra *Números e Funções Reais* não consta da relação de exercícios do livro *A Matemática do Ensino Médio* – volume 1. Essa afirmação pode ser verificada pelo exame das páginas 79 e 80 da primeira obra e 76 e 77 da segunda. Contudo, diferentemente das demais listas de exercícios analisadas, desta lista somente o terceiro e o décimo segundo exercícios figuram na obra *Curso de Análise* – volume 1, páginas 58 e 71, respectivamente.

Outro aspecto que difere esta seção das demais seções destinadas à exploração de exercícios é o fato de que somente três (o terceiro, o décimo e o décimo segundo exercícios) dos 12 exercícios solicitam que o leitor prove alguma afirmação, apesar de que em nenhum momento o autor apresenta qualquer discussão, ou mesmo comentário, que vincule estes exercícios com a prática do professor de Matemática da educação básica. O autor não discute, por exemplo, se estes exercícios são acessíveis aos estudantes da educação básica, se eles precisam ser adaptados para se tornarem acessíveis a estes, ou em quais anos (dos ensinos fundamental e médio) é possível apresentá-los

Um terceiro aspecto que difere esta seção das demais é que pelo menos a metade dos exercícios apresentados (o primeiro, o segundo, o quinto, o oitavo, o nono e o décimo primeiro) podem ser relacionados estreitamente à prática do professor de Matemática na escola.

CAPÍTULO 7: O CURRÍCULO MODELADO PELOS PROFESSORES E O CURRÍCULO EM AÇÃO

Este capítulo é dedicado ao Currículo Moldado pelos professores e ao Currículo em Ação. Nosso objetivo nele era, unicamente, entender se e em que medida o material bibliográfico referente a cada disciplina (livro-texto), a programação fixada pela Coordenação Acadêmica Nacional do PROFMAT e as avaliações produzidas por esta influenciaram na moldagem do currículo pelos professores das disciplinas de “Matemática Discreta” e “Números e Funções Reais” ao abordarem os temas “Números Naturais” e “Números Racionais”. Objetivamos também entender se a moldagem elaborada pelos professores do PROFMAT se altera no decorrer de sua implementação (*currículo em ação*), considerando que o PROFMAT se propõe a formar professores de Matemática contemplando as necessidades advindas do trabalho cotidiano destes profissionais.

INTRODUÇÃO

Ao reconhecer o currículo como algo que se configura como uma prática desenvolvida por meio de múltiplos processos e na qual se entrecruzam diversos subsistemas, Sacristán (1998) credita ao professor – por meio de sua atividade pedagógica relacionada ao currículo – o *status* de elemento de primeira ordem nos processos de concretização do currículo.

A configuração do currículo ocorre num processo dialético de modelação, em que ao mesmo tempo em que o professor modela o currículo, vislumbrando sua prática em sala de aula, por meio de ações que buscam adaptá-lo/adequá-lo ao ambiente de uma sala de aula em específico, o currículo molda os professores. Sacristán (1998) assinala que, na medida em que a atividade dos professores é uma ação que transcorre dentro de uma instituição, sua prática está inevitavelmente condicionada. Neste sentido, o *currículo moldado pelos professores* é resultante da influência – recíproca – entre os professores e o desenvolvimento dos currículos que lhe são fornecidos (currículo prescrito e currículo apresentado aos professores) – por meio dos livros-texto, programações, etc., de modo que a *ação* observável é fruto da modelação que os professores realizam dentro dos campos institucionais de referência. Além disso, *o currículo em ação* é a expressão do seu valor já que é na prática educativa que todo projeto, toda ideia e intenção se cristaliza na realidade educativa, é neste momento que adquire significação e valor, "independente de declarações e propósitos de partida" (SACRISTÁN, 1998, p. 201).

Deste modo, a ação docente não é apenas algo eminentemente pessoal e criativo, sujeito às possibilidades da formação e ao desenvolvimento do pensamento profissional autônomo dos professores, mas é desempenhada também num campo que predetermina, em grande parte, o sentido, a direção e a instrumentação técnica de seu conteúdo (SACRISTÁN, 1998). Neste contexto,

> O professor costuma se encontrar com alunos selecionados pela própria estrutura do sistema educativo, a política curricular ordena-os em níveis aos quais atribui critérios de competência intelectual, habilidades diversas, etc., o sistema lhe proporciona meios, uma estrutura de relações dentro da instituição escolar, um horário compartimentado, a distribuição de um espaço, uma forma de se relacionar com seus companheiros, exigências mais ou menos precisas para considerar na avaliação e promoção de alunos, um currículo pré-elaborado em materiais, etc. O professor ativo reage frente a situações mais do que cria-las *ex novo*. Mas, na realidade, ninguém pode escapar da estrutura, e uma grande maioria aprende logo, e com certas facilidades, a conviver com ela até assimilá-la. (SACRISTÁN, 1998, p.167)

Sacristán (1998) argumenta ainda que

> O professor não decide sua ação no vazio, mas no contexto da realidade de um local de trabalho, numa instituição que tem suas normas de funcionamento marcadas às vezes pela administração, pela política curricular, pelos órgãos de governo de uma instituição ou pela simples tradição que se aceita sem discutir. Esta perspectiva deveria ser considerada quando se enfatiza demasiado a importância dos professores na qualidade do ensino. (SACRISTÁN, 1998, p. 166–167)

Isso significa que, para Sacristán (1998), o desenvolvimento do currículo sofre diversos condicionamentos, especialmente oriundos de instâncias externas ao ambiente de sala de aula. Assim,

> Se o currículo é ponte entre teoria e ação, entre intenções ou projetos e realidade, é preciso analisar a estrutura da prática onde fica moldado. Uma prática que responde não apenas às exigências curriculares, mas está, sem dúvida, profundamente enraizada em coordenadas prévias a qualquer tem sentido colocando-a desde a ótica do currículo concebido como processo em ação. (SACRISTÁN, 1998, p. 202)

E é sob esta perspectiva que nos debruçaremos sobre os dados coletados (por meio de um diário de bordo e de gravação em áudio) no decorrer de 21 horas, 15 das quais se referem às aulas presenciais da disciplina “Números e Funções Reais” e 6 às destinadas à disciplina “Matemática Discreta”, aulas estas que ocorreram no polo do PROFMAT intitulado por nós “Polo B”. As aulas se referem a essas disciplinas porque esta carga horária é relativa ao estudo dos “Números Naturais” e dos “Números Racionais”, que constituem o recorte que fizemos em nosso objeto de estudo.

Ressaltamos que nosso objetivo neste capítulo era, unicamente, entender se e em que medida o material bibliográfico referente a cada disciplina (livro-texto), a programação fixada pela Coordenação Acadêmica Nacional do PROFMAT e as avaliações produzidas por esta influenciaram na moldagem do currículo pelos professores das disciplinas de “Matemática Discreta” e “Números e Funções Reais” ao abordarem os temas “Números Naturais” e “Números Racionais”. Ou seja, nosso objetivo neste trabalho não foi analisar a dinâmica da sala de aula e nem a metodologia adotada pelo professor para o ensino dos temas comtemplados na ementa da disciplina a seu cargo.

Neste capítulo, objetivamos também entender se a moldagem elaborada pelos professores do PROFMAT se altera no decorrer de sua implementação (*currículo em ação*), considerando que o PROFMAT se propõe a formar professores de Matemática contemplando as necessidades advindas do trabalho cotidiano desses profissionais.

7.1 A DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA MATEMÁTICA DISCRETA

Conforme já discorremos no Capítulo “O Currículo apresentado aos Professores”, a Programação[130] das Aulas de 2014 – Semestre 1 – da Turma 2014, para a disciplina “Matemática Discreta” previa que o tema “Números Naturais” deveria ser abordado a partir da seguinte esquematização:

Semana 24/fevereiro a 02/março
- Aulas presenciais que abordassem os seguintes conteúdos: “Números Naturais:

[130]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/programa%C3%A7%C3%A3o/2014/Programao_MA12_2014_1_Turma_2014.pdf. Acesso em: 26 jul. 2014.

Números ordinais. Adição, multiplicação” e ordem e “Números Naturais: Números naturais e contagem”. - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 1 do livro: MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P; Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
Semana 03/março a 09/março
- Aulas presenciais que abordassem o seguinte conteúdo: “Indução Matemática” - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 2 do livro: MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P; Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

As aulas que acompanhamos ocorreram, parcialmente, de acordo com a prescrição da programação proposta pela Comissão Acadêmica Nacional e que apresentamos acima. Ou seja, o conteúdo “Números Naturais” foi abordado no período de 27 de fevereiro a 02 de março, mais especificamente no dia 1º de março de 2014, uma vez que as aulas da disciplina “Matemática Discreta” deste polo ocorreram aos sábados (período da tarde), com uma carga horária equivalente a 3 horas (relógio) diárias.

Objetivávamos, inicialmente, acompanhar apenas as 3 horas de atividades presenciais cujo objeto de estudo eram os “Números Naturais”, contudo, tendo em vista que o professor Jean[131] alterou a programação de apresentação dos conteúdos, optamos por assistir a aula que o professor ministrou no dia 08 de março de 2014.

[131] Conforme já discorremos anteriormente, este nome é fictício. O professor que ministrou aula nesta disciplina possuía a titulação de doutor, sendo que tanto sua atuação profissional quanto sua formação são na área de estatística. Este professor possui experiência docente no ensino superior há mais de 15 anos.

Conforme nos foi relatado pelo professor e se evidenciou no decorrer das referidas aulas, as aulas foram preparadas considerando o livro MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P; *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT) e a programação estipulada pela Coordenação Acadêmica Nacional do PROFMAT.

O professor iniciou as aulas no dia 1º de março de 2014 se apresentando, uma vez que essa aula foi a primeira da disciplina daquele semestre. Na sequência, o professor expôs que adotaria como material bibliográfico a supracitada obra e que o processo avaliativo dos estudantes seria composto por duas provas elaboradas pela Coordenação Nacional do PROFMAT cujo peso na composição da nota final (que define se o estudante é considerado aprovado na disciplina ou não) era equivalente a 70% e que os demais 30% da referida composição seriam obtidos a partir da realização de um trabalho que versaria sobre exercícios referentes aos conteúdos estudados na disciplina “Matemática Discreta”.

Na sequência, o professor iniciou a exposição dos conteúdos, começando com os “Axiomas de Peano”. A abordagem feita pelo autor era similar à desenvolvida por Morgado e Carvalho (2013) que vamos omitir nesta descrição uma vez que já a descrevemos e discutimos no capítulo desta tese intitulado “O Currículo apresentado aos Professores”. Na sequência, o professor abordou as “Operações com Números Naturais” e a noção de “Ordenação dos Números Naturais”, também a partir da obra *Matemática Discreta*.

Posteriormente, o professor enunciou e demonstrou as propriedades “Transitividade”, “Tricotomia”, “Monotonicidade” e “Boa-ordenação” relativas à ordenação dos números naturais, além de discutir a noção de “Número Cardinal” e de “Contagem”. Novamente o professor apoiou-se na obra *Matemática Discreta* ao abordar os referidos temas.

No terceiro momento da aula, destinado à discussão de conteúdos matemáticos, o professor Jean se dedicou à abordagem do “Método da Indução”. O professor expôs o referido método de demonstração a partir do encadeamento proposto por Morgado e Carvalho e resolveu os exemplos de prova por indução, ambos constantes na referida obra. Ao finalizar a aula, o professor solicitou que os estudantes resolvessem as atividades constantes no livro-texto.

Considerando que o professor Jean trabalhou o conteúdo que estava previsto para o dia 08 de março no dia 03 do mesmo mês –o conteúdo era indução matemática –, optamos por assistir também à aula do dia 08 de março, com o objetivo de entendermos se o professor iria abordar novamente o conteúdo "Números Naturais". Contudo, neste dia o professor trabalhou conteúdos referentes ao tema "Progressões", motivo pelo qual omitiremos os dados referentes a este dia de aula.

7.2 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS

Conforme já discorremos no Capítulo "O Currículo apresentado aos Professores", a Programação[132] das Aulas de 2014 – Semestre 1 – da Turma 2014, para a disciplina "Números e Funções Reais" previa que os temas "Números Naturais" e "Números Racionais" deveria ser abordado a partir da seguinte esquematização:

Semana 24/fevereiro a 02/março:
- Aulas presenciais que abordassem o conteúdo: "Conjuntos". - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 1 do livro: LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
Semana 03/março a 09/março:
- Aulas presenciais que abordassem os conteúdos: "Funções", "Números Reais - Comensurabilidade". - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulos 3 e 4 do livro: LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[132]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/programa%C3%A7%C3%A3o/2014/Programao_MA11_2014_1_Turma_2014.pdf. Acesso em: 26 jul. 2014.

Semana 10/março a 16/março:
- Aulas presenciais que abordassem os conteúdos: “Funções - Completeza”, “Números Reais – Descrição Formal”. - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 4 do livro: LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
Semana 17/março a 23/março:
- Aulas presenciais que abordassem os conteúdos: “Números Reais – Representação Decimal”, “Números Reais – Desigualdades, Intervalos e Valor Absoluto”. - Realização de oficina de problemas Bibliografia: - Capítulo 4 do livro: LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

As aulas que acompanhamos ocorreram, parcialmente, de acordo com a prescrição da programação proposta pela Comissão Acadêmica Nacional que apresentamos acima. Doravante, discorreremos sobre as aulas presenciais que ocorreram nos dias 1º, 08, 15, 22 e 29 de março, uma vez que as aulas da disciplina “Números e Funções Reais” desse polo ocorreram aos sábados (período da manhã), com uma carga horária equivalente a 3 horas (relógio) diárias.

Conforme nos foi relatado pelo professor e se evidenciou no decorrer das referidas aulas, estas foram preparadas considerando o livro LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT) e a programação estipulada pela Coordenação Acadêmica Nacional do PROFMAT.

Apesar de as aulas previstas para o dia 1º de março de 2014 serem destinadas ao estudo do tema “Conjunto”, tendo em vista a possibilidade do professor José[133] alterar a ordenação da apresentação do conteúdo em relação às datas previstas na programação, optamos por assistir à aula ministrada na referida data.

O professor iniciou a aula do dia 1º de março de 2014 se apresentando, uma vez que essa foi a primeira aula da disciplina daquele semestre, e expondo que adotaria como material bibliográfico a supracitada obra. Na sequência, discorreu que o processo avaliativo dos estudantes seria composto por duas provas elaboradas pela Coordenação Nacional do PROFMAT e cujo peso na composição da nota final (que define se o estudante é considerado aprovado na disciplina ou não) era equivalente a 80% e que os demais 20% da referida composição seriam obtidos a partir da realização de um trabalho que versaria sobre exercícios referentes aos conteúdos estudados na disciplina de “Números e Funções Reais”.

Na sequência, o professor iniciou a discussão sobre o tema “Conjuntos”. Tendo em vista que toda a aula foi destinada à discussão do referido tema, omitiremos os dados referentes a este dia de aula.

As aulas desenvolvidas no dia 08 de março de 2014 tiveram como objeto de trabalho o tema “Funções”. Inicialmente, o professor trabalhou com a noção de “função” enfatizando que este tema não se reduz ao estudo de “fórmulas”, além de explorar esta noção por meio de exemplos. Na sequência, o professor abordou as definições de função injetora, de função sobrejetora e de função inversa. No decorrer da explanação, o professor explorou sete exemplos, todos constantes da obra *Números e Funções Reais*. O segundo momento da aula foi destinado pelo professor à discussão sobre o tema “Cardinalidade de Conjuntos”, sua explanação se iniciando com a definição de “função bijetora”. Na sequência, o professor abordou as quatro “propriedades básicas de número cardinal” (LIMA, 2013, p. 46). Todos os temas, definições, noções, propriedades e exemplos abordados pelo professor constam na obra *Números e Funções Reais*.

As aulas desenvolvidas no dia 15 de março de 2014 abordaram, em um primeiro momento, o tema “Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis”. A discussão foi

---

[133] Conforme já discorremos anteriormente, este nome é fictício. O professor que ministrou aula nesta disciplina possuía a titulação de doutor, sendo que tanto sua atuação profissional quanto sua formação são na área de Matemática (especificamente, Análise). Este professor possui menos de cinco anos de experiência na docência do ensino superior.

iniciada pelo professor a partir da noção de "comensurabilidade" entre segmentos de reta e da relação desta noção com os números naturais e racionais. No segundo momento da aula, o professor José abordou a noção de "incomensurabilidade" entre segmentos de reta a partir da razão entre a medida do comprimento do lado de um quadrado e a medida do comprimento da diagonal deste mesmo quadrado (LIMA, 2013, p. 55-56), sendo que, ao final, o professor vinculou a noção de incomensurabilidade entre segmentos de reta ao conjunto dos números irracionais. No terceiro momento da aula, o professor José abordou o tema "Reta Real", argumentando, particularmente, que $Z = N \cup \{0\} \cup (-N)$, que $N \subset Z \subset Q \subset R$ e que o conjunto dos números irracionais é um subconjunto de R. Ainda em relação ao tema "Reta Real", o professor José argumentou que o conjunto R é um corpo ordenado completo. Todas as discussões propostas pelo professor constam na obra *Números e Funções Reais*.

As aulas desenvolvidas no dia 22 de março de 2014 abordaram, em um primeiro momento, o tema "expressão decimal". O professor iniciou a aula expondo que uma "expressão decimal é um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, onde a_0é um número inteiro ≥ 0 e $a_1 a_2 ... a_n ...$ são dígitos (LIMA, 2013, p. 60). Na sequência, o professor apresentou e construiu a igualdade que origina a fração geratriz de uma dízima periódica (tanto para a dízima periódica simples quanto para a dízima periódica composta). No segundo momento da aula, o professor abordou o tema "Desigualdades" e iniciou esta discussão a partir das "propriedades básicas" P1 e P2 constantes da página 68 da obra *Números e Funções Reais*. Na sequência, o professor enunciou e demonstrou as propriedades "Triconomia", "Transitividade", "Monotonicidade da adição" e "Monotonicidade da multiplicação". O terceiro momento da aula foi destinado pelo professor ao tema "Intervalos", e definiu nove subconjuntos de R que são chamados de intervalo (LIMA, 2013, p. 71), finalizando a aula com a definição de intervalo degenerado. Todas as discussões propostas pelo professor constam da obra *Números e Funções Reais*.

As aulas desenvolvidas no dia 29 de março de 2014 abordaram os temas "Valor absoluto", "Sequências e Progressões", "Funções Afins" e, como os dois últimos temas fogem do escopo definido para esta pesquisa, omitiremos os dados referentes a eles. No primeiro momento da aula, o professor apresentou a definição de valor absoluto e a explorou por meio da resolução de um exemplo (LIMA, 2013, p. 73). No segundo momento, o professor José apresentou a interpretação do valor absoluto a partir da noção de distância entre pontos e finalizou sua abordagem do tema apresentando e demonstrando as propriedades do valor absoluto constantes na página 74 da obra *Números e Funções Reais*. Na sequência, o professor passou a trabalhar o tema "Sequência e Progressões". Todas as discussões propostas pelo professor constam na obra *Números e Funções Reais*.

7.3 O CURRÍCULO MODELADO PELOS PROFESSORES E O CURRÍCULO EM AÇÃO: A INFLUÊNCIA DA PREDETERMINAÇÃO NA IMPLEMENTAÇÃO DO CURRÍCULO DO PROFMAT

O condicionamento e a predeterminação que comumente ocorrem no processo de implementação de um currículo, conforme aponta Sacristán (1998), acentuam-se consideravelmente nos processos de m*oldagem do currículo do PROFMAT pelos professores* que ministram aula neste curso e no *currículo em ação*.

Conforme a descrição que apresentamos acima evidenciou, a abordagem dos conteúdos matemáticos desenvolvida pelos professores Jean e José no decorrer das disciplinas de "Matemática Discreta" e "Números e Funções Reais" é similar à apresentação desenvolvida por Morgado e Carvalho (2013) e Lima (2013) nas obras *Matemática Discreta* e *Números e Funções Reais*. Contudo, o encadeamento e o formato da apresentação dos conteúdos "Números Naturais" e "Números Racionais" desenvolvidos pelos professores Jean e José não foram moldados por eles somente sob a influência dos referidos livros, mas especialmente pelas avaliações presenciais, pelo exame nacional de qualificação e pela programação pré-fixada pela Comissão Acadêmica Nacional.

Estes instrumentos elencados por nós influenciam não somente as disciplinas "Matemática Discreta" e "Números e Funções Reais", mas todas as disciplinas do PROFMAT intituladas como "básicas"[134], uma vez que diversos dos fatores que intervêm no processo de ensino dessas disciplinas são fixados pela Comissão Acadêmica Nacional do PROFMAT e não pelos professores que ministram essas disciplinas. Assim, para estas disciplinas são predeterminados(as): o ementário; o

[134]As disciplinas básicas do PROFMAT são as disciplinas obrigatórias ofertadas nacionalmente durante os dois primeiros semestres regulares do programa, cuja denominação e ementa estão definidas no Catálogo de Disciplinas. A saber estas disciplinas são: Números e Funções Reais, Matemática Discreta, Aritmética e Geometria. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento. Acesso em: 09 abr. /2015.

material bibliográfico; as avaliações presenciais (escrita); a programação das disciplinas; e o Exame Nacional de Qualificação.

I) No tocante à predeterminação estabelecida pelo ementário, ela é comum nos mais diversos sistemas de ensino e necessária quando se objetiva a fixação de uma unidade, que, no caso do PROFMAT, são os conteúdos matemáticos adjetivados por este programa como “necessários para a formação matemática do professor de Matemática da escola básica”.

II) No que concerne à predeterminação estabelecida pelo material bibliográfico, ressaltamos dois aspectos que se inter-relacionam, o primeiro aspecto dos quais é a fixação de uma <u>única</u> bibliografia para a grande maioria das disciplinas (e comum a todos os polos) em um curso de formação de professores de abrangência nacional. O segundo aspecto que ressaltamos refere-se aos objetivos do PROFMAT e a fixação de uma bibliografia única para boa parte das disciplinas. Conforme já discutimos, este curso busca contemplar: a) “[...] as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional” e b) “a busca de uma formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica” (CAPES, 2010, p. 9).

Na medida em que este curso visa contemplar às necessidades advindas do trabalho cotidiano dos professores, os primeiros questionamentos que emergem são: será que as necessidades formativas, especialmente em relação aos conteúdos matemáticos escolares, dos professores de Matemática da escola básica são comuns aos professores de todos os Estados brasileiros? Será que as necessidades advindas do cotidiano dos professores de Matemática da educação básica são comuns em todos os Estados brasileiros? Respostas negativas a estas perguntas são prováveis, especialmente se considerarmos aspectos como a dimensão do Brasil, as distinções entre as formações iniciais e continuadas que cada Estado e região proporciona aos professores e, especialmente, a distinção entre os currículos escolares em desenvolvimento em cada Estado.

Para tanto, consideremos o caso do currículo em vigor atualmente no Estado do Paraná, as "Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática"[135] (DCE). Este currículo prevê que sejam trabalhados conteúdos, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, pertencentes a uma área da geometria nominada pelos propositores deste currículo como "Geometrias Não Euclidianas". Contudo, conforme constatado por Caldatto e Pavanello (2014), os professores de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná em geral não possuem oportunidades de formação (tanto inicial quanto continuada) em relação a este conteúdo matemático e, quando possuem, é uma formação precária. O que este contexto evidencia é que os professores de Matemática deste Estado carecem de formação, especialmente matemática, em relação a este tema que está presente no currículo da educação básica, mas esta formação não está sendo fornecida pelo PROFMAT – uma afirmação que pode ser constatada tanto nas ementas das disciplinas da área de geometria do referido curso quanto em suas bibliografias. Uma pergunta decorrente deste cenário é: mas o PROFMAT deveria contemplar em seu currículo as Geometrias Não Euclidianas conforme preveem as DCEs? A resposta a este questionamento é "Sim" – pelo menos no Paraná – na medida em que este curso se propõe a "[...]uma formação matemática adequada para o exercício profissional qualificado do ensino de matemática na escola básica" (CAPES, 2010, p. 09). Uma segunda questão decorrente deste contexto é: os professores de todas as regiões do Brasil devem estudar as "Geometrias Não Euclidianas" por meio do PROFMAT? A resposta a este questionamento é "Não", porque esta demanda formativa é específica dos professores de Matemática que ministram aula no Paraná.

O que buscamos evidenciar com a discussão apresentada sobre as necessidades formativas dos professores do Estado do Paraná é que, quando se fixa uma única bibliografia (um único livro-texto) em um curso que tem por objetivo atender às demandas formativas dos professores brasileiros e às necessidades advindas do cotidiano dos referidos profissionais, pressupõe-se que tal bibliografia contemplará essas necessidades, o que não nos parece ser o caso.

III) Em relação à fixação de um processo avaliativo, especificamente das avaliações escritas (e presenciais), comum a todos os polos do referido curso, também emergem algumas questões. Poder-se-ia pensar em um "padrão de qualidade do curso" e na

---

[135] As DCEs estão disponíveis no site: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 10 mai. 2014.

“homogeneidade” formativa do curso que se estendem a todos os Estados do Brasil, contudo esta tentativa de fixação de um padrão também se contrapõe aos objetivos do PROFMAT que já elencamos neste capítulo. Na medida em que se fixam alguns conteúdos como sendo prioritários no processo de avaliação de todos os polos do PROFMAT, pode-se cair na situação de, neste processo de seleção, os conteúdos que não foram nele atendidos serem exatamente os conteúdos demandados, em termos de formação, para os professores de uma região específica do País.

IV) A fixação de uma programação para a aplicação das avaliações presenciais e de conteúdos é decorrente da fixação de um processo avaliativo (especialmente das avaliações presenciais) comum a todos os polos. Entretanto, a fixação de uma programação para aplicação das avaliações presenciais e desenvolvimento dos conteúdos limita o tempo que o professor que ministra a disciplina possui para trabalhar os conteúdos. Este aspecto ficou claro em nossas observações da prática dos professores em sala de aula, em especial das aulas ministradas pelo professor José referentes à disciplina “Números e Funções Reais”. As aulas ministradas por este professor, de acordo com a “Programação[136] das Aulas de 2014 – Semestre 1 – da Turma 2014”, e acompanhadas por nós, versavam sobre os conteúdos que foram abordados na avaliação escrita aplicada – em nível nacional – no período das 10h00min às 13h00min (horário de Brasília) do dia 05 de abril de 2014. Ou seja, o professor José possuía exatamente 36 dias para esgotar suas discussões com os alunos sobre os temas “Conjuntos”, “Números Naturais”, “Números Cardinais” “Números Reais” e “Funções afins” de modo a contemplar o conteúdo que seria abordado na avaliação presencial. Neste contexto, o principal fator que interferiu na moldagem desenvolvida pelo professor José e no processo de desenvolvimento do currículo em sala de aula (currículo em ação) foi a programação proposta pela Comissão Acadêmica Nacional do PROFMAT, uma vez que o professor precisou “selecionar” conteúdos – definições, propriedades, exemplos, etc. – com o objetivo de abarcar minimamente todos os temas que poderiam ser objeto da avaliação que ocorreria no dia 05 de abril de 2014. Assim, os principais fatores que interferiram nestes dois processos – moldagem do currículo e currículo em ação – foram a avaliação escrita e a programação, propostas por uma instância externa ao ambiente de sala de aula.

[136]Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/programa%C3%A7%C3%A3o/2014/Programao_MA11_2014_1_Turma_2014.pdf. Acesso em: 26 jul. 2014.

Apesar de nos termos voltado, neste momento de nossa discussão, para o desenvolvimento do currículo da disciplina “Números e Funções Reais” pelo professor José, no “Polo B”, no ano de 2014, a influência destes dois objetos (livros-texto e a programação pré-fixada pela Comissão Acadêmica Nacional) foi constatada nas observações que efetuamos das cinco disciplinas, três desenvolvidas no ano de 2013, no “Polo A” (“Números e Funções Reais”, “Matemática Discreta” e “Resolução de Problemas”[137]), e duas desenvolvidas no ano de 2014, no “Polo B” (“Números e Funções Reais” e “Matemática Discreta”).

No tocante à descrição que apresentamos das disciplinas “Matemática Discreta” e “Números e Funções Reais” ressaltam-se ainda dois aspectos que reiteram essa influência da programação fixada pela “Comissão Acadêmica Nacional” e pelas “avaliações presenciais” também elaboradas por essa comissão: 1) o professor José, em atendimento à referida programação, não abordou o tema “Números Naturais”, mesmo ele constando do ementário da disciplina e da bibliografia indicada para a disciplina de “Números e Funções Reais”; 2) o professor Jean apresentou uma ênfase considerável na abordagem que deu ao tema “Indução Matemática” em detrimento dos demais aspectos pertinentes ao tema “Números Naturais”, uma decisão que, de acordo com o que nos foi relatado pelo professor, ele adotou tendo em vista que o método da indução matemática é bastante visado no decorrer da disciplina em face da gama elevada de demonstrações que os alunos precisam desenvolver no decorrer da disciplina de “Matemática Discreta”.
V) Quanto ao Exame Nacional de Qualificação, conforme já discorremos anteriormente neste trabalho, ele é uma avaliação escrita e presencial que versa sobre os conteúdos das disciplinas “básicas” do PROFMAT. Sendo assim, o trabalho desenvolvido no decorrer das aulas presenciais também sofre influência deste exame na medida em que a aprovação dos acadêmicos nele é um pré-requisito para a obtenção do grau de mestre pelo PROFMAT. Tal fato foi constatado por nós no decorrer da observação que desenvolvemos das cinco disciplinas.

Conforme a discussão que apresentamos evidencia, diversos dos fatores que, em geral, em outros sistemas de ensino (educação básica, ensino superior, cursos de pós-graduação), são de responsabilidade e atribuição do professor da disciplina, no PROFMAT são deliberados e definidos pela Comissão Acadêmica Nacional,

[137] A preocupação dos professores responsáveis por esta disciplina em relação ao processo avaliativo referia-se ao Exame Nacional de Qualificação, que versa sobre os conteúdos matemáticos veiculados por ela.

fragilizando e intervindo mais decisivamente nos processos de *moldagem do currículo pelos professores* e no processo de desenvolvimento do referido documento (*currículo em ação*).

A esse respeito destacamos uma fala de Sacristán (1998, p. 167), ao discorrer que

> O professor, em suma, não seleciona as condições nas quais realiza seu trabalho e, nessa medida, tampouco pode escolher muitas vezes como desenvolvê-lo; embora, para ele, sempre caberá imaginar a situação e definir para si o problema e atuar de diversas formas possíveis dentro de certas margens, considerando que os determinantes possíveis quase nunca são totalmente inexoráveis nem sem possibilidades de moldamento. O caráter radicalmente indeterminado da prática sempre colocará a responsabilidade do professor e sua capacidade para "fechar" situações, ainda que estas não sejam definidas por ele. (SACRISTÁN, 1998, p. 167)

CAPÍTULO 8: O CURRÍCULO REALIZADO

Este capítulo é dedicado à dimensão *Currículo Realizado* do PROFMAT. Considerando que o PROFMAT se propõe a formar professores de Matemática contemplando as necessidades advindas do trabalho cotidiano dos professores, nos propusemos a analisar neste capítulo os argumentos matemáticos adotados pelos estudantes do PROFMAT ao explicarem e abordarem no contexto da sala de aula na educação básica os conteúdos operações com números naturais e operações com números fracionários.

INTRODUÇÃO

As consequências das práticas nas instituições de ensino, em nosso caso no ensino proposto pelo PROFMAT, configuram-se no que Sacristán (1998) intitulou como *currículo realizado*.

O *currículo realizado* integra o *currículo real*, que é composto pela proposição de um plano que é público – que nesta pesquisa é o projeto acadêmico do PROFMAT – e pela soma dos conteúdos e das ações que são empreendidas com o intuito de influenciar os aprendizes (ou seja, o ensino deste plano). O importante nessa discussão é que tudo isso produz "nos receptores ou destinatários (seus efeitos), algo como aquilo que a leitura deixa como marca no leitor, que é quem revive seu sentido e obtém algum significado" (SACRISTÁN, 2013, p. 26).

De acordo com Sacristán (1998), as práticas educativas produzem efeitos complexos e de diversos tipos (cognitivo, afetivo, social, moral, etc.). Efeitos estes em que se pode prestar ou não atenção, dependendo do que se considera relevante, uma vez que os rendimentos do sistema ou dos métodos pedagógicos considerados valiosos e proeminentes se cristalizam no *currículo avaliado*. Assim, o currículo avaliado não reflete todos os resultados que o processo de ensino produz, assim muitos outros efeitos ocorrem – além dos efeitos avaliados – e que

> [...] por falta de sensibilidade para com os mesmos e por dificuldade para apreciá-los (pois muitos deles, além de complexos e indefinidos, são efeitos a médio e longo prazo), ficarão como efeitos ocultos do ensino. As consequências do currículo se refletem em aprendizagens dos alunos, mas também afetam os professores, na forma de socialização profissional, e inclusive se projetam no ambiente social, familiar, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 106)

Vislumbrando entendermos o currículo real, neste capítulo nos debruçaremos no estudo do currículo realizado. Tendo em vista a complexidade abordada por Sacristán em relação à sensibilidade e à dificuldade de entendermos os efeitos das atividades envolvidas em um processo formativo, voltamo-nos, no caso do PROFMAT, para o principal objetivo do programa, expresso, por exemplo, no fragmento abaixo:

> A meta é oferecer um curso de <u>formação profissional</u> alicerçado em <u>sólida formação em Matemática</u>, <u>que contemple as necessidades advindas</u> tanto <u>do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola</u> quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e <u>que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional</u>. (CAPES, 2010, p. 9, grifo nosso)

Conforme expresso no fragmento, o principal objetivo do curso é fornecer aos professores participantes do PROFMAT um curso que alicerce a sua formação profissional – portanto voltada para a profissão dos participantes: professores do ensino fundamental (anos finais) e ensino médio – no tocante à formação matemática e que contemple as necessidades provenientes da prática desses profissionais na escola.

Com tal objetivo, nos propusemos a entender os efeitos provocados pelo PROFMAT em seus participantes por meio da aplicação de questionários, que foram elaborados a partir das pesquisas de Deborah L. Ball e Liping Ma realizados com a finalidade de entender as dimensões do conhecimento do professor de Matemática, conforme já discorremos em capítulo anterior.

Esses questionários abordaram conteúdos pertencentes ao currículo escolar e ao currículo do PROFMAT: Números Naturais e Números Racionais. Conteúdos que compunham também o *currículo prescrito,* o *apresentado aos professores* e o *currículo em ação* do PROFMAT.

A opção por esses conteúdos se deu, primeiro, por serem eles objeto de estudo dos professores da escola básica no PROFMAT, e segundo, por esses conteúdos serem, direta ou indiretamente, objetos de estudo dos alunos da escola básica durante todo o currículo escolar. O terceiro aspecto que embasou nossa opção foi que, de acordo com

Ma (2009), de uma perspectiva de obtenção da competência matemática, ensinar esses conteúdos não significa somente levar os alunos até o final da aritmética ou o início da pré-álgebra, mas sim provê-los dos alicerces sobre os quais se deverá construir a sua futura aprendizagem matemática (MA, 2009).

O quarto aspecto determinante para a escolha desses conteúdos é o fato de já terem sido objeto de estudo do projeto TELT, coordenado por Deborah Ball, e também do estudo que Liping Ma desenvolveu com professores norte-americanos e chineses. As questões utilizadas no questionário e empregadas como parâmetro analítico foram questões testadas e analisadas por essas autoras.

Foram aplicados três questionários nos meses de setembro e outubro de 2014, identificados neste texto como Questionário 1, Questionário 2 e Questionário 3, e apresentados na sequência.

Questionário 1:

1) Considere a diferença 52-25, que pode ser expressa por meio de (*):

a) Calcule a subtração expressa por (*) e justifique/explique os passos que adotou ao desenvolver esse cálculo.

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array} (*)$$

b) Justificativa/explicação dos passos desenvolvidos:

c) Se fosse abordar este conteúdo em um momento de ensino da matemática na educação básica, como faria essa abordagem?

Questionário 2:

1) Considere a diferença expressa por (∗):

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 168 \\ \hline \end{array} (*)$$

a) Ao desenvolver o cálculo expresso por (*) o aluno João apresentou a seguinte resolução (**):

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline 261 \end{array}\text{(**)}$$

Analise a resolução (**) apresentada pelo aluno João:

b) Ao desenvolver o cálculo expresso por (*) o aluno Rodrigo apresentou a seguinte resolução (***):

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline 169 \end{array}\text{(***)}$$

Analise a resolução (***) apresentada pelo aluno Rodrigo:

Questionário 3

1) Elabore o enunciado de um problema-história que represente a divisão apresentada no item 1a ($1\frac{3}{4}: \frac{1}{2}$) e que possa ser utilizado em uma aula de matemática na educação básica.

8.1 DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Nesta fase da pesquisa, contamos com a participação de 21 acadêmicos do PROFMAT, que no decorrer deste texto serão identificados com nomes fictícios[138]. Inicialmente, pode-se pensar que o número é irrelevante tendo em vista a dimensão do programa, contudo estes acadêmicos, no momento da coleta de dados (meses de setembro e outubro de 2014), representavam *todo o corpo discente* de um dos polos em que desenvolvemos a pesquisa e que está alocado em uma instituição pública de ensino superior da Região Sul do Brasil.

Dos 21 participantes, 12 estudantes estavam cursando o segundo semestre do curso (1ª ano) e 9 cursavam o 4º período do curso (2º ano)[139]. A opção por recrutarmos

[138] Os participantes de nossa pesquisa pertencentes ao primeiro ano do PROFMAT no ano letivo de 2014 são designados pelos seguintes nomes fictícios: Gabriel, Bruno, Nestor, Orlando, Beatriz, Daiana, Bárbara, Queiróz, Samuel, Bento, Nelson e Bruna. E os participantes do segundo ano do PROFMAT no ano letivo de 2014 são designados por: Wesley, Dalton, Fabiana, Bernardo, Quésia, Xavier, Otávio, Bianca e Janice.

[139] Ainda sobre o polo, cabe assinalar que para o ano letivo de 2013 foram ofertadas 15 vagas e para o ano letivo de 2014 foram ofertadas 20 vagas, considerando-se que em setembro de 2015 estavam frequentando as aulas 13 estudantes referentes ao segundo semestre do curso (1ª ano) e 9 referentes ao 4º período do curso (2º ano), isso sinaliza um índice de evasão em torno de 40%.

tanto estudantes do primeiro quanto do segundo ano do PROFMAT ocorreu para podermos analisar se os desempenhos de sujeitos que possuíam, no momento da pesquisa, trajetórias distintas no curso - uma vez que uma turma estava prestes a concluir o curso, enquanto que a outra estava cursando o segundo semestre do primeiro ano - seriam diferentes e, portanto, se houve influência do curso em seu desempenho.

Em relação ao perfil[140], dos 21 participantes da pesquisa, aproximadamente, 53% deles possuíam entre 25 e 29 anos de idade, 14% possuíam entre 30 e 34 anos, 14% possuíam entre 35 e 40 anos e 19% entre 41 e 46 anos de idade. Esses 21 participantes residem em 17 municípios (de 2 Estados) que estão distribuídos em um raio de 500 km de distância do polo.

Todos os participantes cursaram o ensino superior na modalidade presencial, sendo que 52% cursou este nível de ensino em instituições de ensino públicas (estaduais ou federais). Além disso, 90% dos participantes possuíam graduação em Licenciatura em Matemática, ou seja, apenas 10% dos estudantes não haviam cursado Licenciatura em Matemática (1 participante cursou Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática, 1 participante cursou Tecnologia em Processamento de Dados).

Do total de participantes, na data da coleta dos dados (agosto de 2014), 23% haviam concluído o curso superior há menos de cinco anos, 38% haviam concluído o curso superior entre seis e dez anos, 28% haviam concluído o curso entre 11 e 15 anos, 5% entre 16 e 20 anos e 5% entre 20 e 25 anos.

Do total de participantes, na data coleta dos dados (agosto de 2014), 19% possuíam entre 1 e 5 anos de experiência como professor da educação básica, 48% possuíam entre 6 e 10 anos de experiência como professor da educação básica, 19% possuíam entre 11 e 15 anos de experiência como professor da educação básica, e 14 % possuíam entre 16 e 20 anos de experiência como professor da educação básica.

8.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS POR MEIO DOS QUESTIONÁRIOS 1 E 2: A OPERAÇÃO DE SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS.

8.2.1 A operação de subtração de números naturais: o algoritmo da subtração

[140] Este perfil foi elaborado por nós a partir de um questionário respondido pelos participantes da pesquisa, no qual foram questionados a respeito de seus dados pessoais (idade e local de residência), sua formação acadêmica (IES, curso superior, modalidade do curso, ano de conclusão do curso) e tempo de experiência como professor da educação básica.

O questionário 1 constou de três questões relacionadas ao conteúdo matemático "algoritmo da subtração com números naturais". Ele foi respondido por 18 participantes, dos quais 11 estavam no primeiro ano do curso e 7 no segundo.

A questão do questionário 1 - elaborada a partir da teoria proposta por Ma (2009) - solicitava que os participantes da pesquisa calculassem a diferença 52-25 expressa por meio de (*).

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array} \quad (*)$$

Ao calcularem a diferença 52-25, expressa por (*), os 18 participantes chegaram à resposta 27, como era esperado pela pesquisadora, uma vez que o domínio deste *procedimento* matemático é comum aos professores que ministram aula de Matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Solicitamos também que os participantes justificassem/explicassem os passos que desenvolveram ao realizar a diferença expressa por (*). Ao apresentarem as explicações, dos 18 participantes desta fase da pesquisa, 16 apresentaram suas explicações por meio de dois passos específicos*: tirar uma dezena da posição das dezenas e transformá-la em 10 unidades.* Destes 16 participantes: 11 pertenciam ao primeiro ano e cinco ao segundo ano do PROFMAT. A explicação abaixo, que foi apresentada pelo acadêmico Orlando corrobaora nossa afirmação:

> *Como nosso sistema de numeração é de base 10, temos dois números com algarismos das unidades e das dezenas. Na subtração não é possível tirar 5 de 2 na casinha das unidades por isso usamos <u>uma dezena que vai retirar dos 50 ou de 5 dezenas</u>, ficando com 12 unidades que agora pode ser retirado 5. Na casa das dezenas ficamos com 4 que subtraindo 2 nos resta outras 2.* (Orlando, grifo nosso)

Questionamos também nossos participantes sobre como abordariam esse conteúdo em sala de aula em seu processo de ensino na escola básica. Com exceção de um acadêmico, todos os demais (17, dos quais 11 estavam no primeiro ano e 6 no segundo ano do PROFMAT) basearam sua atividade de ensino nos passos de *tirar uma dezena da posição das dezenas e transformá-la em 10 unidades.*

O ensino do cálculo da subtração entre dois números naturais por meio do algoritmo da subtração expresso por (*) baseado nestes dois passos – a retirada de uma dezena da posição das dezenas e sua transformação em 10 unidades – é associado por Ma (2009) a palavras como “emprestar”, “tirar” e “transformar”.

As descrições desenvolvidas pelos participantes de nossa pesquisa também usaram estas palavras (e seus respectivos sinônimos). Fabiana, acadêmica do 2º ano do PROFMAT, assim como outros oito participantes adotaram a expressão “emprestar”:

> *Com não é possível subtrair 5 de 2 unidades, <u>foi pego uma dezena emprestada do 5</u>, tendo então 12, 12-5=7, <u>como o 5 emprestou uma dezena para o 2</u> ficou 4 dezenas, 4-2=2, obtendo assim, 27. Com os alunos perguntava se é possível subtrair 5 de 2, justificando a necessidade de emprestar uma dezena do 5, fazendo isso, explicava que como o <u>5 emprestou uma dezena para o 2</u>, ficou com 4 dezenas, fazendo a subtração 4-2=2.* (Fabiana, grifo nosso)

A ideia equivocadamente sugerida pela explicação do “empréstimo” é que o valor de um número não tem de manter-se constante no cálculo, mas pode ser mudado arbitrariamente – se um número é “demasiado pequeno” e precisa ficar maior por qualquer razão, pode simplesmente “pedir emprestado” um determinado valor a outro número (MA, 2009, p.35). Além disso, a expressão “empresta 1” sugere que os algarismos que compõem os números são independentes, ao invés de duas partes de um só número.

Outro problema associado por Ma (2009) à utilização do “empresta 1” é a sua desvinculação da operação da adição, uma vez que adição e subtração são operações inversas. A ação de pedir uma unidade emprestada e transformá-la num 10 é arbitrária, uma vez que, conforme descreve uma participante da pesquisa de Ma (2009),

> [...] Os meus alunos podem perguntar-me como podemos pedir alguma coisa emprestada, devemos devolvê-la mais tarde. Como e o que vamos devolver? Além disso, ao pedir emprestado, temos que encontrar uma pessoa com disposição para emprestar. Então, e se a posição das dezenas não quiser emprestar à posição das unidades? Não saberemos responder estas questões que os alunos podem colocar. (MA, 2009, p. 34)

Já o participante Wesley, pertencente ao 2º ano do PROFMAT, assim como outros três participantes de nossa pesquisa, apoiaram sua explicação no termo "transformar":

> *Como não é possível subtrair 5 unidades de 2 unidades assim, transformamos 1 das 5 dezenas em unidades assim ficamos com 4 dezenas e 12 unidades, logo 12-5=7 e 4-2 obtendo então 27.* (Wesley, grifo nosso)

As explicações pautadas no termo "transformar", assim como em seus sinônimos, também podem ser interpretadas como arbitrárias, na medida em que também sugerem que cada algarismo de um número não precisa manter-se constante, e pode ser alterado a partir do acréscimo ou decréscimo de quantidades originárias dos demais algarismos que compõem o número.

O procedimento de "tirar uma dezena", tal como descrito pelos participantes de nossa pesquisa, se configura como um processo em que um número pode obter mais valor a partir de outro número, sem mencionar que se trata de um *rearranjo* dentro do mesmo número (MA, 2009).

O acadêmico Nestor, quando questionado a respeito de como abordaria o ensino deste conteúdo em sala de aula, apropriou-se também da palavra "emprestar", contudo apoiou-se na analogia do emprestar do vizinho:

> *Perguntaria a eles se eles conseguem emprestar cinco reais quando tem somente dois no bolso. Depois falaria para eles pedirem emprestado do "vizinho mais rico" (que seria a casa das dezenas) um (que para quem paga vale dez) e perguntaria se é possível emprestar cinco quando tem doze e dois quando se tem quatro.* (Nestor, grifo nosso)

De acordo com Ma (2009, p. 34), "tratar os dois algarismos do aditivo como dois amigos, ou vizinhos que vivem lado a lado, é matematicamente enganador noutro sentido, pois sugere que esses algarismos são dois números independentes em vez de duas partes de um só número".

Ainda em relação ao questionamento de como abordariam o ensino deste conteúdo em sala de aula, dois participantes afirmaram que utilizariam problemas práticos do dia a dia e analogias, conforme os fragmentos evidenciam:

> *Para abordagem dos cálculos me basearia no método do "empresta 1". Iniciaria com cálculos mais simples que não necessitariam do "empréstimo". Em seguida trabalharia com objetos e outras questões práticas do dia a dia dos alunos.* (Samuel)

> *Costumo dizer aos meus alunos que uma maneira de trabalhar as contas de adição e subtração é usar os valores como se fossem dinheiro, pois eles assimilam de maneira mais concreta.* (Bárbara)

O problema da utilização de problemas do dia a dia refere-se ao fato de que em geral esses problemas não estão atrelados à fundamentação lógica do algoritmo da subtração. Pensemos na diferença 52-25, expressão por meio de uma dívida, no qual o estudante possui um montante de 52 reais, cristalizado por meio de uma nota de R$ 50,00 e outra de R$ 2,00, e uma dívida no valor de 25 reais. Na perspectiva de aproximarmos o problema com a fundamentação lógica do algoritmo da subtração, suponhamos que o estudante *trocasse* essa nota de R$ 50,00 por 5 notas de R$ 10,00 e que na sequência *trocasse* 1 das notas de R$ 10,00 por 10 notas de R$ 1,00. Assim o estudante teria 4 notas de R$ 10,00, 10 notas de R$ 1,00 e uma nota de R$ 2,00 e, a partir disso, separasse essas notas em duas quantidades de R$ 25,00 e R$ 27,00 com o objetivo de pagar a referida dívida. O primeiro apontamento que fazemos é que, ao manipularmos dinheiro não necessitamos fazer, em geral, essa quantidade de *trocas* de cédulas ao pagarmos uma dívida. Em segundo lugar, não reflete a fundamentação lógica do algoritmo, uma vez que *separa*, literalmente, as cédulas, objetos que objetivam a cristalização dos valores, enquanto que os números que compõem a subtração não são separados e sim *decompostos* (rearranjados).

Retornando aos dados que obtivemos, apenas dois participantes apresentaram perspectivas para a resolução do cálculo 52-25 que não estavam fundamentadas nos passos*: tirar uma dezena da posição das dezenas e transformá-la em 10 unidades.*

> *Acrescentei 3 ao 2 (algarismos das unidades) para a diferença ser zero. Isso levou a resposta 30. Depois basta descontar o 3 inicial: 30-3=27.* (Bernardo)

Como pretendia subtrair 52 de 25, Bernardo acrescentou 3 unidades dispersas ao minuendo e com isso obteve uma nova subtração, 55-25, cujo resultado é 30. Como havia adicionado 3 unidades dispersas ao minuendo, ao final subtraiu este valor de 30 (30-3) obtendo assim 27. Ao responder ao questionamento a respeito de como abordaria esse conteúdo em sala de aula, Bernardo argumentou que utilizaria essa abordagem somente com alunos do ensino médio, uma vez que

> *Para um aluno que está numa classe inicial eu iria mostrar a composição do número, neste caso, dezenas e unidades para que o mesmo possa perceber a relação existente entre os dois números. Após isso eu ensinaria o método tradicional (“emprestar” ou não “empresta”), coisas do gênero.* (Bernardo)

Ou seja, apesar de apresentar uma perspectiva para a resolução da subtração diferente da perspectiva dos demais 18 participantes de nossa pesquisa, ao voltar-se para o processo de seu ensino na educação básica, iria recorrer ao método do “empresta”1.

Já o participante Otávio optou por operar inicialmente com os algarismos alocados na posição das dezenas, subtraindo 50 de 20, obtendo como resposta 30. Na sequência, o estudante operou este valor (30) com as unidades dispersas, subtraiu 5 unidades dispersas de 30, obtendo como resultado 25, e finalmente adicionou a este valor as 2 unidades dispersas, obtendo 27.

> *Fazendo o cálculo, utilizo os inteiros nas dezenas, ou seja, 50 subtrai 20, resultado 30, trinta subtrai 5, resultado 25, de 25 adiciono 2, resultado 27.* (Otávio)

Os procedimentos adotados por estes acadêmicos, embora se configurem como alternativas para a abordagem desse tipo de problema, o que é importante em termos do ensino da matemática, desvinculam-se da fundamentação lógica do algoritmo da subtração, e consequentemente desvinculam-se também de sua inversa, a adição.

8.2.2 A operação de subtração de números naturais: o algoritmo da subtração e os erros comumente desenvolvidos pelos estudantes da educação básica

As questões do Questionário 2 foram elaboradas a partir do artigo “Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?” de Ball, Thames e Phelps (2008). De acordo com esses autores, um dos conhecimentos que compõem o conhecimento especializado do professor de Matemática é, por exemplo, o conhecimento da natureza dos erros cometidos pelos alunos ao desenvolverem atividades.

Assim, o questionário estava estruturado da seguinte forma:

Considere a diferença expressa por (∗):

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-\,168} \end{array} (*)$$

a) Ao desenvolver o cálculo expresso por (*) o aluno João apresentou a seguinte resolução (**). Analise a resolução apresentada pelo estudante.

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-\,168} \\ 261 \end{array} (**)$$

b) Ao desenvolver o cálculo expresso por (*) o aluno Rodrigo apresentou a seguinte resolução (***). Analise a resolução apresentada pelo estudante.

$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-\,168} \\ 169 \end{array} (***)$$

8.2.2.1 Os dados e análises referentes ao erro: 307-168=261

O erro expresso por (**), segundo Ball, Thames e Phelps (2008), evidencia que o aluno calculou a diferença entre os algarismos que compõem os números 307 e 168, subtraindo os algarismos menores dos maiores que estavam em posições equivalentes no algoritmo da subtração.

De acordo com a descrição apresentada por Ball, Thames e Phelps (2009), ao analisarmos as respostas fornecidas pelos participantes de nossa pesquisa ao erro cometido pelos alunos (**), apenas nove dos 18 participantes de nossa pesquisa conseguiram identificar a natureza matemática do erro cometido pelo aluno, sendo que três desses participantes pertenciam ao 2º ano e seis ao 1º ano do PROFMAT, conforme o fragmento abaixo exemplifica:

> *O aluno João por saber que não subtrai um valor maior de um menor, efetuou da seguinte maneira: subtraiu o menor do maior sem respeitar a ordem dos valores, ou seja, 8-7, ao invés de 7-8 e assim por diante.* (Bárbara)

Esse tipo de erro é comumente apresentado pelos estudantes da escola básica e está associado ao falso argumento matemático utilizado pelos professores de que "não é possível subtrair um número maior de um menor" e conforme verificamos nas questões anteriores esse argumento foi utilizado por 16 dos 18 participantes de nossa pesquisa.

Quanto aos estudantes que não identificaram as características matemáticas do erro cometido pelo aluno, apresentaram distintos argumentos em suas análises. O estudante Nelson associou o erro do aluno ao não entendimento do conceito de número:

> *Ao fazer o cálculo o aluno não deve ter se apropriado da construção do número e não fez a transformação das centenas e dezenas em dezenas ou unidades convenientemente.* (Nelson)

Argumento do mesmo tipo foi apresentado pelo acadêmico Dalton, que, contudo, relacionou o erro ao não entendimento dos números inteiros, conjunto numérico que não estava envolvido no problema.

> *O aluno João ainda não conhecia os números relativos, por isso inverteu a ordem para que o resultado fosse um número natural. Ou seja, <u>João ainda não consegue trabalhar com números inteiros.</u>* (Dalton, grifo nosso)

O participante Bruno aproximou-se consideravelmente da origem do erro, contudo associou o procedimento desenvolvido pelo aluno – ao subtrair 307-168 – ao cálculo da diferença 368-107. O estudante também associou o erro a um problema de aprendizagem da matemática de origem neurológica conhecido como discalculia.

> *João subtraiu os algarismos menores dos maiores em cada classe, seria o equivalente a dizer que resolveu 368-107. Logo*

> *não tinha os conceitos bem desenvolvidos ou apresenta possível quadro de discalculia.* (Bruno)

O acadêmico Nestor utilizou o argumento de que o aluno efetuou o cálculo “de baixo para cima”, embora seja facilmente verificável que ele não se aplica à situação, uma vez que a diferença 3-1 “foi feita de cima para baixo”:

> *O aluno efetuou a subtração de baixo para cima. É necessário explicar para o referido aluno que o número de cima representa a quantia em dinheiro que ele tem em mãos e o número debaixo a quantia ele pretende emprestar.* (Nestor)

O participante Bento argumentou que o estudante “efetuou as diferenças em várias direções”, o que parcialmente é verdadeiro uma vez que o aluno efetuou diferenças tanto “de cima para baixo” como “de baixo para cima”, contudo ele não a relacionou à regra “maior menos o menor”:

> *O aluno efetuou as diferenças em sentidos diversos. Sabemos que o sentido da operação é único, uma vez que esteja correta a montagem da conta.* (Bento)

O aluno Xavier não identificou a origem do erro e também não indicou uma possível origem, somente afirmou que o aluno apresentou inconsistência na resolução do problema.

> *É inconsistente pois caso alegue ter feito “de baixo para cima” veja que 8-7=1, 6-0=6, mas 1-3=-2.* (Xavier)

Fabiana e Wesley não identificaram a utilização da regra “maior menos o menor” e também não associaram o erro a uma regra específica:

> *Acredito que ele tenha feito a diferença entre 68 e 07 que é 61 e em seguida a diferença entre 3 e 1 que é 2, obtendo 261.* (Fabiana)

> *O aluno João inicia subtraindo inversamente, ou seja, 168-307 e finaliza subtraindo 307-168, somente para o algarismo das centenas.* (Wesley)

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), um professor que mistifica a natureza do erro que produziu 261 como resposta será, sem dúvida, mais lento e menos preciso no processo de correção do problema do aluno.

8.2.2.2 Os dados e análise referentes ao erro 307-168=169

O item b do questionário 2 apresentava, por meio da expressão (***), o número 169 como resultado da diferença 307-168. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), neste caso, em contraste com o primeiro exemplo, a solução baseia-se no "emprestando" 1 a partir da coluna de centenas, levando este 1 emprestado para a casa das unidades, de modo que se subtrai 8 de 17, dando origem ao 9 e o processo segue com a "derrubada" do 6 e com o cálculo 2 - 1 = 1. Ou seja, este erro assenta-se no (não) entendimento do valor posicional dos algarismos de cada número no momento da decomposição das unidades de ordem superior. Além disso, está associado fortemente ao método do “empresta 1” em subtrações que possuem zeros no subtraendo.

De acordo com a descrição feita por Ball, Thames e Phelps (2008) a respeito da natureza matemática do erro, os dados que obtivemos por meio do questionário 2 evidenciam que, dos 18 participantes de nossa pesquisa que analisaram a resolução errônea do estudante, apenas três identificaram as características matemáticas do referido erro (um participante do primeiro ano e os outros dois de segundo ano do PROFMAT), oito participantes (cinco do primeiro ano e três do segundo ano do PROFMAT) identificaram as características do erro parcialmente, seis participantes (cinco do primeiro ano e um do segundo ano do PROFMAT) identificaram as características do erro equivocadamente e apresentaram análises não condizentes com o procedimento realizado pelo aluno, um participante, do 2º ano do PROFMAT, argumentou que “não conseguiu identificar o que o aluno fez na resolução”.

Os três participantes que identificaram as características matemáticas do referido erro apresentaram descrições próximas da apresentada por Ball, Thames e Phelps (2008) e basearam suas explicações no método do “empresta 1”, conforme o fragmento abaixo exemplifica:

> *O aluno viu que o 0 “não vale nada” e “emprestou” 1 do 3, ou seja, com isso o 07 ficou 17 e o 3 ficou valendo 2. Assim 17-8=9 e 2-1=1 e como 0 “não tem nada” ele fez 6-0=6, então 307-168=169.* (Quésia)

Diferentemente dos participantes anteriores, Nestor, além de analisar o erro corretamente, sugeriu uma explicação para a correção do erro do aluno. Contudo, essa explicação apresenta o problema de associar o procedimento de "decomposição de uma unidade de ordem superior" ao "empréstimo do vizinho":

> *O aluno percebeu que a subtração é feita de cima para baixo, porém ele pulou o zero e pegou emprestado do 3 e fez 6 menos 0. É preciso explicar ao aluno que deve-se pegar "emprestado do vizinho próximo" e quando este não tem nada ele se encarrega de pedir para o "vizinho mais próximo".* (Nestor)

Os oito participantes que categorizamos como os que "identificaram as características do erro parcialmente" apontaram que o erro estava baseado no "empréstimo" de uma centena diretamente para a casa das unidades, ou seja, Rodrigo "emprestou" uma dezena do algarismo 3 diretamente para o 1, mas não apresentaram análise referente ao processo de "escorregar" o 6, conforme o fragmento abaixo exemplifica:

> *Rodrigo operou como se o algarismo 0 em 307 não tivesse valor posicional e, por isso, usou errado o processo de "emprestar um", interpretando que o 7 "emprestou" uma dezena do 3.* (Dalton)

Dos seis participantes que identificaram as características do erro equivocadamente e apresentaram análises não condizentes com o procedimento realizado pelo aluno, um afirmou que o estudante efetuou o procedimento do cálculo conforme as regras estabelecidas:

> *Este aluno efetuou o processo de retirada das unidades, dezenas e centenas conforme as regras estabelecidas (unidade com unidade, dezena com dezena, centena e centena).* (Nelson)

Dos seis participantes que identificaram as características do erro equivocadamente e apresentaram análises não condizentes com o procedimento realizado pelo aluno, quatro argumentaram que o estudante fez o procedimento de "empresta 1" corretamente, ou seja, que ao resolver a atividade o aluno emprestou ao 0 uma centena do 3, assim o 0 passou a ter o valor de 10 dezenas e, na sequência, o estudante emprestou uma dessas dezenas ao 7, ficando o número 307 com o seguinte formato: 2 centenas, 9 dezenas e 17 unidades. Assim, o erro que o estudante cometeu foi não levar em consideração as 9 dezenas e considerando que nesta casa continuava o 0, assim a subtração do aluno foi: 17-8=9, 6-0=6 e 3-2, obtendo-se como resultado da subtração 307-168=169. O fragmento abaixo mostra a argumentação de um desses mestrandos:

> *O aluno deslocou corretamente 10 dezenas do 3 e 10 unidades para o 7 mas ao efetuar 9-6, esqueceu-se do 9, considerando o valor original 0. E somente isso. Acertou parcialmente as operações.* (Bernardo)

Dos seis participantes que identificaram as características do erro equivocadamente e apresentaram análises não condizentes com o procedimento realizado pelo aluno, um participante argumentou que o estudante "emprestou" 1 centena do 3 para o 7 (algarismo posicionado na casa das unidades dispersas), que de acordo com participante Bruno, originou o valor 17, que culminou na diferença 17-8=9. Contudo, na realidade esse "empréstimo" originaria o valor 107, tendo-se assim a subtração 107-9=99, o que contradiz a afirmação do participante Bruno, que afirmou que o cálculo efetuado para as dezenas e centenas estava correto.

> *Rodrigo se saiu um pouco melhor, mas "emprestou" direto "1 do 3" o que resulta 17-8=9, acertou as unidades e centenas, no entanto não fez o procedimento correto que seria centena → dezena → unidade.* (Bruno)

Conforme assinalam Ball, Thames e Phelps (2008), os professores precisam ser capazes de realizar esse tipo de análise sobre os erros matemáticos de forma eficiente e fluente. Por isso, a interpretação das duas respostas simplesmente como erros, sem evidenciar a origem matemática destes, evidencia que os professores não estão equipados com a necessária compreensão matemática detalhada para um tratamento hábil dos problemas que os alunos enfrentam.

Este tipo de análise dos erros caracteriza a prática do professor como uma manipulação da matemática distinta da manipulação desenvolvida pelos adultos escolarizados e não professores da área, uma vez que estes últimos não precisam identificar a origem dos erros porque lhes basta conhecerem o processo de desenvolvimento do algoritmo da subtração, por exemplo.

A análise de erro é uma prática comum entre os matemáticos no curso de seu trabalho (por exemplo, na análise de provas fracassadas), contudo a tarefa do professor de Matemática de analisar os erros dos alunos difere substancialmente da atividade do matemático na medida em que o professor precisa entender, por exemplo, quais ideias matemáticas estavam sendo utilizadas pelos alunos e por que os alunos as utilizaram, além de associá-las as suas práticas futuras com o objetivo de sanar esses erros. Além disso, enquanto os professores devem processar tais análises frequente e rapidamente, não existe demanda para que matemáticos realizem essa tarefa rapidamente (BALL, THAMES e PHELPS, 2008).

8.3 A OPERAÇÃO DE DIVISÃO DE FRAÇÕES.

A questão que será objeto de nossa discussão doravante foi elaborada a partir da teoria do MKT elaborada por Deborah L. Ball e seus colaboradores e do trabalho de Ma (2009). Ma (1999; 2009) propôs aos participantes – americanos e chineses – de sua pesquisa que elaborassem o enunciado de um problema-história que representasse a divisão $1\frac{3}{4}: \frac{1}{2}$ e que pudesse ser utilizado em uma aula de matemática na educação básica.

Tal como Ma (1999; 2009), solicitamos que os colaboradores de nossa pesquisa elaborassem o enunciado de um problema-história que representasse a divisão $1\frac{3}{4}: \frac{1}{2}$ e que pudesse ser utilizado em uma aula de matemática na educação básica. O termo "problema-história"[141] refere-se a uma história em formato de problema matemático que representa um determinado tema/conteúdo, em nosso caso, o problema-história deveria representar a de $1\frac{3}{4}$por $\frac{1}{2}$.

Essa questão foi elaborada a partir da teoria do MKT proposta por Ball e colaboradores, em que argumentam que a dimensão "Specialized Content Knowledge" é composta, por exemplo, pela capacidade do professor elaborar problemas e selecionar exemplos condizentes com o conteúdo matemático que está sendo abordado (BALL,

[141]Ao entregarmos o questionário aos participantes, esclarecemos a que se referia o termo problema-história.

THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008). Também consideramos neste processo a teorização proposta por Ma (2009), quando argumenta que o entendimento do significado da divisão por frações determina a capacidade do professor de criar uma representação adequada ao conteúdo.

De acordo com Ma (2009), os elementos base que se relacionam com o processo de dar significado à divisão por frações são: o conceito de fração, o conceito da divisão como operação inversa da multiplicação, os modelos da divisão com números inteiros, o significado da multiplicação com frações, o conceito da divisão com números inteiros e o significado da multiplicação com números inteiros, sendo que o “[...] elemento-chave é o significado da multiplicação de frações” (MA, 2009, p. 152). Vislumbrando o ensino da divisão por frações na escola básica, não basta ao professor conhecer os elementos mencionados por Ma a partir de uma perspectiva lógico-dedutiva, mas precisa relacioná-los entre si ao longo do currículo escolar e com os problemas que são estudados na escola básica, além de conseguir elaborar representações (enunciados de problemas e representações geométricas, por exemplo) que abordem esta temática no ambiente da sala de aula da educação básica.

Esta questão foi respondida por 20 participantes, sendo 11 deles alunos do primeiro ano do PROFMAT e nove do segundo ano do referido curso. Destes 20 participantes, sete apresentaram o enunciado de um problema-história em que, ao invés de dividir o número $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, na realidade o enunciado referia-se à divisão do $1\frac{3}{4}$ por 2; um participante apresentou o enunciado de um problema-história em que, ao invés de se relacionar à divisão do número $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, na realidade referia-se à multiplicação do número $1\frac{3}{4}$ por 2; um participante não respondeu à solicitação; dois participantes apresentaram um enunciado que se referia a operações com números naturais; três participantes apresentaram enunciados que não se configuraram como problemas-histórias; seis participantes apresentaram enunciados que podem ser classificados como problemas-história que representem a divisão $1\frac{3}{4}: \frac{1}{2}$ e podem ser utilizados em uma aula de matemática na educação básica.

8.3.1 Confundir a divisão por $\frac{1}{2}$ com a divisão por 2

Dos sete participantes (quatro eram do segundo ano e três do primeiro ano do PROFMAT) que apresentaram o enunciado de um problema-história no qual o enunciado, ao invés referir-se à divisão do número $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, na realidade referia-se a divisão do $1\frac{3}{4}$ por 2.

O enunciado apresentado por Bárbara, por exemplo, evidencia esse fato, uma vez que para ser resolvido, no problema-história proposto por ela, bastaria que dividíssemos $1\frac{3}{4}$ de xícara de farinha em duas partes iguais e usássemos uma dessas partes para fazer o bolo.

> *Maria pretende fazer um bolo, utilizando uma receita antiga de sua avó. Nesta receita iria 1 ¾ de xícara de farinha. Mas Maria quer fazer apenas metade da mesma. Quanto de farinha irá utilizar?* (Bárbara)

O problema-história proposto por Dalton, conforme o enunciado apresentado na sequência evidencia, suscita em sua resolução que dividamos 1 real e 75 centavos em duas partes iguais, de modo que cada um dos amigos teria de contribuir com um valor similar a uma dessas partes, uma vez que são iguais. O enunciado de Dalton apresenta um segundo problema: de acordo com o sistema monetário brasileiro, não é possível dividirmos 1 centavo ao meio, o que impossibilita a divisão de 1 real e 75 centavos em duas partes iguais, não sendo possível representarmos (fisicamente) a quantidade de 85,5 centavos por meio de uma moeda inexistente em nosso sistema monetário.

> *Imagine que dois amigos querem juntar 1 real e 75 centavos, sendo que cada um deve contribuir igualmente. Quanto cada um deve desembolsar para obterem o dinheiro?* (Dalton)

Os enunciados propostos por Fabiana e Bernardo suscitam em sua resolução que dividamos igualmente a quantidade de $1\frac{3}{4}$ de pizza [no caso do problema proposto por Fabiana] e de $1\frac{3}{4}$ de bolo [no caso do problema proposto por Bernardo] entre duas pessoas.

> *Certo dia, Pedro e Paulo chegaram em casa e encontraram um bilhete de sua mãe que dizia o seguinte: tem uma pizza inteira e*

> *¾ de outra no fogão, quero que as dividam igualmente entre os dois. Quanto de pizza Pedro e Paulo ganharão?* (Fabiana)

> *Tenho $1\frac{3}{4}$ de bolo e quero dividir igualmente entre duas crianças, qual é a fração de bolo que cada criança irá receber?* (Bernardo)

Outros três dos sete participantes que exploraram a divisão de $1\frac{3}{4}$ por 2 ao invés da divisão de $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, apresentaram também enunciados com problemas de coerência textual, como é o caso do enunciado apresentado por Nestor:

> *Marcelo tem um bolo inteiro e 3 quartos de outro. Resolve dividir os pedaços ao meio para distribuir para cada um de seus filhos. Quantos filhos ele tem? Qual fração representa essa nova divisão do bolo? (*Nestor*)*

O primeiro problema que elencamos refere-se à seguinte frase: "*Resolve dividir os pedaços ao meio para distribuir para cada um de seus filhos",* ou seja, quais pedaços o pai vai dividir? O bolo inteiro é um pedaço? 3 quartos de um bolo é um pedaço? O pai pretende dividir o bolo inteiro e os 3 quartos do segundo ao meio? Além disso, o pai não menciona se pretende distribuir igualmente os pedaços entre os filhos. O segundo problema que apontamos refere-se à pergunta: "*Quantos filhos ele tem?"*, a pergunta é vaga, na medida em que o problema menciona que o pai pretende dividir os pedaços ao meio para distribuir para cada um dos filhos, sem argumentar se essa divisão será igualitária entre os filhos, ou seja o enunciado não apresenta indícios concretos que permitam determinar quantos filhos o pai tem. O terceiro problema refere-se à pergunta: "*Qual fração representa essa nova divisão do bolo?*", tendo em vista que o enunciado não evidencia claramente como o bolo inteiro e os 3 quartos do bolo serão divididos igualmente ao meio, não é possível responder esta pergunta.

Daiana, assim como Nestor, apresenta um problema que se refere à divisão por 2. Além disso, não menciona se os pedaços das pizzas possuem mesmo formato e tamanho e não explicita se a divisão que o pai solicitou que fizessem era igualitária:

> *Papai comprou duas pizzas pequenas cada uma com 4 pedaços de sabores diferentes. Depois de comer um pedaço ele deu o restante para que eu e meu irmão dividíssemos. Decidimos*

> *dividir cada pedaço ao meio. Qual é a fração que representa a nova divisão dos pedaços restantes das pizzas?* (Daiana)

Outro problema apresentado pelo enunciado de Daiana relaciona-se a "*Qual é a fração que representa a nova divisão dos pedaços restantes das pizzas?",* uma vez que ela é ambígua, no sentido de que não está claro se Daiana objetiva saber "qual é a fração de pizza que cada um dos irmãos recebeu?" ou se ela quer saber "quantos pedaços de pizza esse fracionamento em partes iguais originou?", uma vez que correspondem, respectivamente, às seguintes frações: $\frac{7}{8}$ e $\frac{14}{8}$.

O enunciado apresentado por Otávio, também emprega a ideia da divisão por 2:

> *Pedro sabe que para cada cabeça de gado de sua propriedade ele necessita diariamente dar um pacote de proteína mais três quartos desse pacote. Sendo que a metade é no período da manhã e metade no período da tarde. Ele alimentou o boi soberano de manhã e foi a cidade. Seu filho tem que dar a proteína à tarde. Como Pedro não deixou separado, qual a quantidade, em valor fracionário que seu filho precisa dar ao boi?* (Otávio)

O segundo problema presente no enunciado elaborado por Otávio refere-se à frase: "*Pedro sabe que para cada cabeça de gado de sua propriedade ele necessita diariamente dar um pacote de proteína mais três quartos desse pacote*". De acordo com a referida frase, não está clara a quantidade de proteína que ele dá para cada cabeça de gado, uma vez que ele dá um pacote de proteína e mais três quartos desse pacote, a pergunta que emerge é: se Pedro dá um pacote inteiro de proteína, como que na sequência ele dá três quartos desse mesmo pacote? Mas o pacote inteiro já não havia sido dado ao gado? O correto seria que o participante Otávio enunciasse o início do problema da seguinte forma: "Pedro sabe que para cada cabeça de gado de sua propriedade ele necessita diariamente dar um pacote de proteína e mais três quartos de outro pacote, sendo que ambos os pacotes comportam a mesma quantidade de ração".

8.3.2 Trocar a divisão por $\frac{1}{2}$ com a multiplicação por 2

Dos 20 participantes, um apresentou o enunciado de um problema-história em que o enunciado, ao invés de requerer a divisão do número $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, solicitava na realidade a multiplicação do número $1\frac{3}{4}$ por 2, conforme se constata no enunciado a seguir:

> *Maria tinha uma pizza inteira dividida em 4 pedaços e mais ¾ de outra pizza de mesmo tamanho e formato. Ela pretendia comer todos os pedaços em um dia e no dia seguinte comer a mesma quantia do dia anterior. Qual a fração que representa o total de pedaços de pizza comida por Maria nos dois dias?* (Bianca)

O enunciado proposto pela participante Bianca também apresenta o problema de não especificar se a pizza está dividida em pedaços iguais. Apesar de o enunciado chegar ao mesmo resultado da divisão de $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, a resolução do problema proposto não requer o da divisão de $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$. O problema ora proposto pode ser resolvido a partir da adição de frações ou ainda pela multiplicação de um número natural (no caso o número 2) pelo $1\frac{3}{4}$: Se no primeiro dia Maria comeu $1\frac{3}{4}$ de pizza e no dia seguinte ela comeu a mesma quantia de pizza então em 2 dias Maria comeu $2.\left(1\frac{3}{4}\right) = 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}$.

8.3.3 Confundir a divisão por $\frac{1}{2}$ com operações com números naturais.

Dos 20 participantes, dois apresentaram enunciados que se referiam a operações com números naturais, ao invés de apresentarem a divisão por fração $\left(1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)$.

Vejamos o enunciado proposto pela participante Quésia:

> *Considere duas pizzas cada uma com 4 pedaços, sendo 1 pedaço de calabresa e os outros 7 de frango, Maria quer dividir cada um dos 7 pedaços na metade, feito isso, com quantos pedaços de frango Maria ficou? Ou seja, com quantas metades Maria ficou?* (Quésia)

Conforme é verificável, Quésia também não mencionou se os pedaços de pizza são iguais (em termos de dimensão). Além disso, apesar de Quésia iniciar o enunciado relacionando o todo (as pizzas) com as partes (pedaços da pizza), ao apresentar o questionamento ela volta-se estritamente para as partes, desvinculando-as do todo, conforme o fragmento evidencia: "*Maria quer dividir cada um dos <u>7 pedaços na metade</u>, feito isso, <u>com quantos pedaços de frango</u> Maria ficou?*", ou seja, Quésia questiona qual é o número de pedaços com que Maria ficou depois de particionar ao meio cada um dos 7 pedaços. Assim, se Maria possuía inicialmente 7 pedaços de pizza de frango, ao dividi-los ao meio, cada pedaço de pizza gerou 2 pedaços iguais de pizza. Assim tínhamos inicialmente:

1 pedaço de pizza de frango + 1 pedaço de pizza de frango + 1 pedaço de pizza de frango + 1 pedaço de pizza de frango + 1 pedaço de pizza de frango + 1 pedaço de pizza de frango + 1 pedaço de pizza de frango = 7 pedaços de pizza de frango;

E a partir da divisão ao meio de cada um dos pedaços de pizza de frango temos que 1 pedaço de pizza gerou 2 pedaços iguais de pizza, temos:

2 pedaços de pizza de frango + 2 pedaços de pizza de frango + 2 pedaços de pizza de frango + 2 pedaços de pizza de frango + 2 pedaços de pizza de frango + 2 pedaços de pizza de frango + 2 pedaços de pizza de frango = 7.2 = 14 pedaços de pizza de frango;

Em relação à pergunta "*Ou seja, com quantas metades Maria ficou?*" a resposta é: Maria ficou com 14 metades de pedaço de pizza.

Já o participante Orlando apresentou o seguinte enunciado:

> *Tibursinho adquiriu um pacote com 40 bolinhas e outro contendo ¾ de 40, ou seja, 30 bolinhas. E se este total estaria em 1 de dois pacotes, qual era o total de bolinhas que Tibursinho tinha?* (Orlando)

Conforme o enunciado evidencia, o problema não se refere à divisão de $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ e sim à adição de números naturais, uma vez que Orlando inicia mencionando que Tibursinho adquiriu 2 pacotes de bolinhas, um contendo 40 bolinhas e outro contendo 30, e na sequência questiona qual é o número de bolinhas que Tibursinho teria se colocasse todas as bolinhas em um único pacote, o que significaria que Tibursinho teria 70 bolinhas alocadas em um mesmo pacote.

8.3.4 Enunciados que não se configuram como problemas-história que explorem a divisão por frações.

Dos 20 participantes, três apresentaram enunciados que não se configuram como problemas-história, como é o caso enunciado da participante Beatriz:

> *Certo loteamento apresenta lotes divididos em 4 terrenos. João comprou 1 lote inteiro e mais 4 terrenos de um outro lote. O total da área adquirida João dividiu por ½.* (Beatriz)

Conforme o fragmento acima evidencia, o número $1\frac{3}{4}$ não é abordado no referido enunciado. Além disso, o enunciado apresenta somente afirmações e nenhum questionamento, o que inviabiliza a sua utilização no ambiente de sala de aula com o objetivo de incitar o estudante a produzir soluções originadas da divisão de $1\frac{3}{4}$por $\frac{1}{2}$. Ademais, de acordo com o enunciado: "*O total da área adquirida João dividiu por ½"*, ou seja, João dividiu a área total referente aos 8 terrenos por ½, sem especificar qual é o significado do ½ dentro do contexto do problema-história.

Da mesma forma como Beatriz, o participante Xavier, não especificou o significado do ½ dentro do contexto do problema-história:

> *Joãozinho tem uma barra de chocolate inteira e mais outra igual, porém já comeu um dos 4 pedaços. Pretende dividir o que tem por ½.* (Xavier)

Já a participante Janice, apesar de apresentar um enunciado que reflete, matematicamente, a divisão de $1\frac{3}{4}$por $\frac{1}{2}$, não apresentou uma história que ilustrasse essa divisão: restringiu-se a elaboração de um enunciado do tipo exercício:

> *A metade de um certo número corresponde a um inteiro e três quartos. Qual é esse número?* (Janice)

8.3.5 Enunciados que se configuram como problemas-história que exploram a divisão por frações.

Dos 20 participantes, seis apresentaram enunciados que podem ser classificados como problemas-história que representam a divisão $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ e que podem ser utilizados em uma aula de matemática na educação básica.

Destes seis enunciados, cinco podem ser classificados como relacionados ao "modelo de agrupamento da divisão", uma vez que este modelo se refere ao ato de "encontrar quantos $\frac{1}{2}$ há em $1\frac{3}{4}$" (MA, 2009, p. 138), conforme os fragmentos abaixo evidenciam:

> *Um bule de café possui $1\frac{3}{4}$ litros de café. João quer completar copos descartáveis com a capacidade ½ litro. <u>Quantos copos cheios João terá? Se restar um copo não cheio que quantidade de café esse copo terá?</u>* (Bento, grifo nosso)

> *Joana possui uma jarra com capacidade igual a 13/4 litros, completa com suco, e quer dividir o conteúdo desta jarra em copos com capacidade de ½ litro. <u>Quantos copos ela precisará? Todos serão preenchidos por completo?</u> Justifique.* (Bruna, grifo nosso)

Conforme se verifica nos enunciados, tanto Bento quanto Bruna exploravam o modelo "encontrar quantos $\frac{1}{2}$ existem em $1\frac{3}{4}$", na medida em que os questionamentos propostos em seus problemas-história suscitariam nos alunos a reflexão e a elaboração da resposta "$\frac{1}{2}$ cabe $3\frac{1}{2}$ vezes em $1\frac{3}{4}$".

Os enunciados propostos por Gabriel e Bruno, apesar de refletirem o modelo de "encontrar quantos $\frac{1}{2}$s existem em $1\frac{3}{4}$", apresentam um enunciado incompleto:

> *Pafuncia possui um copo de leite completamente cheio e outro do mesmo tamanho com ¾ de leite. Ela pretende distribuir todo o leite em copos de mesma medida, de modo que cada copo seja enchido até a metade. <u>Quantas medidas de meio copo ela vai obter?</u>* (Gabriel, grifo nosso)

> *Um pacote cheio de açúcar e outro com ¾ de sua capacidade serão divididos em pacotes com a metade da capacidade inicial. <u>Quantos pacotes com esta nova capacidade teremos?</u>* (Bruno, grifo nosso)

Conforme se verifica, os enunciados propostos por Gabriel e Bruno estão incompletos na medida em que não provocam a reflexão e resposta em relação a quantas vezes o $\frac{1}{2}$ cabe em $1\frac{3}{4}$, já que o "$\frac{1}{2}$ cabe $3\frac{1}{2}$ vezes em $1\frac{3}{4}$". Por exemplo, Gabriel questiona "*<u>Quantas medidas de meio copo ela vai obter?</u>*" e a resposta para essa questão é 3, uma vez que a Pafuncia vai encher 3 copos até sua metade e 1 copo será cheio até o limite de $\frac{1}{4}$ de seu volume. O enunciado proposto por Bruno questiona "*<u>Quantos pacotes com esta nova capacidade teremos?</u>"*, considerando que a nova capacidade é metade da capacidade inicial, temos que a resposta é 3 pacotes, porque <u>3 pacotes serão cheios</u> e um será completado até o limite da $\frac{1}{2}$ da metade de sua capacidade.

O enunciado proposto por Queiróz também explora corretamente o modelo "encontrar quantos $\frac{1}{2}$ existem em $1\frac{3}{4}$", contudo apresenta um pequeno problema em seu texto:

> *Pedro tem dois recipientes, onde no primeiro cabe <u>$1\frac{3}{4}$ (1759) ml</u> de líquido e um 2º com capacidade de 1 litro, na qual tem líquido até a metade. Quantas quantidades do 2º recipiente é necessário para encher o 1º?* (Queiróz, grifo nosso)

Conforme grifamos, o problema no enunciado proposto por Queiróz refere-se ao termo *"<u>$1\frac{3}{4}$ (1759) ml</u>"*, já que o enunciado não explicita se a fração $1\frac{3}{4}$ refere-se à medida de volume litro ou à medida ml.

Dos seis enunciados que podem ser classificados como problemas-história que representam $1\frac{3}{4}$: $\frac{1}{2}$ e podem ser utilizados em uma aula de matemática na educação básica, um pode ser classificado como relacionado ao "modelo de repartição da divisão", uma vez que este modelo refere-se ao ato de "encontrar um número tal que $\frac{1}{2}$ dele seja $1\frac{3}{4}$" (MA, 2009, p. 140),

> *João tem 1 ¾ de real e isso corresponde à metade do dinheiro que retirou do seu cofrinho. Quanto dinheiro tinha no cofrinho de João?* (Nelson)

Ou seja, o enunciado proposto por Nelson solicita um valor em dinheiro (número), sendo que metade deste valor (número) é 1 ¾ de real, assim este valor é R$ 3, 50, porque $\left(\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$ é igual a $3\frac{1}{2}$ de real.

CAPÍTULO 9: O CURRÍCULO AVALIADO

Este capítulo é destinado ao estudo do *Currículo Avaliado*. Sendo assim, nos debruçaremos sobre o estudo das avaliações realizadas no PROFMAT, no ano de 2014, referentes às disciplinas Números e Funções Reais e Matemática Discreta. Nesta análise, nos ateremos, particularmente, aos conteúdos "Números Naturais" e "Números Racionais".

INTRODUÇÃO

Voltando-nos para o nosso objeto de estudo, o PROFMAT, em especial aos procedimentos de avaliação adotados por este programa de pós-graduação, verificamos que, de acordo com oRegimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional[142], "Capítulo IX – Requisitos para Obtenção do Grau", Art. 27, para conclusão do PROFMAT e obtenção do grau de mestre, o discente precisa, dentre outras atribuições, "a) Ter sido aprovado em pelo menos 9 (nove) disciplinas, incluindo todas as disciplinas obrigatórias definidas no Catálogo de Disciplinas; b) Ter sido aprovado no Exame de Qualificação".

A aprovação nas disciplinas básicas ("Números e Funções", "Matemática Discreta", "Aritmética" e "Geometria") está vinculada à obtenção de um conceito final[143] (nota) em cada uma dessas disciplinas, construído a partir das notas obtidas por cada mestrando em duas avaliações escritas. De acordo com as "Normas acadêmicas do PROFMAT", disponíveis no site do programa, no caso das disciplinas básicas, a "avaliação de rendimento acadêmico" do discente está baseada em:

> a) Duas avaliações presenciais (designadas AV1 e AV2) que devem contribuir com pelo menos 70% da nota final do discente. A elaboração e definição de datas e horários de aplicação destas

[142] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/regimento. Acesso em: 29 set. 2014.

[143] O conceito mínimo (ou nota mínima) que o mestrando necessita obter para ser considerado aprovado em uma disciplina do PROFMAT é definido pelo regulamento institucional de cada uma das IES parceiras, por exemplo, se o regulamento institucional prevê que a nota mínima necessária para aprovação em uma disciplina é 6,0, então o polo do PROFMAT nesta IES adotará este valor em seu processo de avaliação. Já se o regulamento da IES prever, por exemplo, o conceito C como mínimo a ser obtido pelo mestrando para obter aprovação, então, esse será o conceito adotado.

> avaliações são da competência da Comissão Acadêmica Nacional, com a colaboração do docente Responsável Nacional, preservada a autonomia do docente Responsável Institucional na correção e avaliação dos discentes.
> b) Exames orais, listas de exercícios, palestras ou outras atividades, inclusive atividades online no Ambiente Virtual de Aprendizagem, a critério do docente Responsável Institucional.
> O discente que após a conclusão da disciplina não tiver sido aprovado, poderá realizar uma avaliação final presencial de substituição (designada AV3) elaborada, aplicada, corrigida e avaliada nos moldes descritos no item (a). A Comissão Acadêmica Institucional (Colegiado do PROFMAT na Instituição Associada) poderá, a seu critério, facultar aos discentes aprovados na disciplina a possibilidade de realizar a respectiva AV3 para efeito de melhoria da nota final (Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/normas. Acesso em: 02 mar. 2015).

Conforme já mencionamos, além das provas escritas, faz parte do processo de avaliação o Exame de Qualificação, que também consiste em uma avaliação escrita, que, entretanto, versa sobre os conteúdos das quatro disciplinas básicas. O discente obtém o grau de *aprovado* ou *reprovado* no Exame de Qualificação e possuií duas oportunidades de realização deste. Esse exame é ofertado duas vezes ao ano. Tanto as provas (inclusive os Exames de Qualificação), quanto os gabaritos estão disponíveis para consulta na página do PROFMAT (http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/memoria/provas).

O currículo abarcado pelos procedimentos avaliativos, intitulado por Sacristán (1998; 2013) como o *currículo avaliado*, é o currículo mais valorizado, além de ser a última concretização de seu significado para professores e alunos. Ou seja, dentre o rol de conteúdos e conhecimentos veiculados no processo de ensino proporcionado por uma instituição de ensino – por meio do currículo prescrito, do currículo apresentado aos professores, do currículo moldado pelos professores (materiais didáticos) e do currículo em ação (no ambiente de ensino) –, da perspectiva de quem elabora as avaliações, os conteúdos e conhecimentos selecionados e abordados nos processos avaliativos se configuram como os mais relevantes. A avaliação, além de evidenciar os conhecimentos que são interpretados como os mais relevantes, evidencia a modelação que os conteúdos sofrem no processo de seu ensino e apropriação pelos estudantes (SACRISTÁN, 1998; 2013).

A partir da teorização proposta por Sacristán (1998; 2013) a respeito do status dos conhecimentos veiculados pelo processo de ensino e pelos procedimentos avaliativos adotados pelo PROFMAT, é possível afirmarmos que as disciplinas

"Números e Funções", "Matemática Discreta", "Aritmética" e "Geometria" são consideradas as mais relevantes do programa, na medida em que a obtenção do título de mestre pelo referido programa está condicionada à aprovação nas referidas disciplinas e no Exame Nacional de Qualificação, que é uma avaliação escrita que versa sobre os conteúdos veiculados pelas disciplinas.

Sem desconsiderar os condicionantes que interferem na implementação curricular (políticos, sociais, econômicos, etc.), pode-se afirmar que, em geral, os elaboradores dos procedimentos avaliativos são os professores. Os professores desenvolvem os procedimentos a partir de *uma de ponderação estreitamente relacionada com o processo de ensino* (SACRISTÁN, 1998). Contudo, a elaboração e definição de datas e horários de aplicação das avaliações presenciais das disciplinas básicas ("Números e Funções", "Matemática Discreta", "Aritmética" e "Geometria"), são de atribuição da Comissão Acadêmica Nacional, com a colaboração do Docente Responsável Nacional, de modo que seja "[...] preservada a autonomia do Docente Responsável Institucional na correção e avaliação dos discentes [...]" (Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/normas. Acesso em: 02 mar. 2015).

Considerando-se a autonomia docente em relação à elaboração dos procedimentos avaliativos (em todos os aspectos, perpassando desde a delimitação dos conteúdos, o formato da avaliação e a fixação das datas a serem aplicadas), a importância do *currículo avaliado* – currículo mais valorizado – alguns questionamentos são pertinentes: por que as avaliações são elaboradas pela Comissão Acadêmica Nacional e não pelo professor da disciplina de cada polo? Como serão contempladas as necessidades advindas do cotidiano dos professores se a prova é realizada pela Comissão Acadêmica Nacional e não pelo professor da disciplina, que é quem, de fato, pode conhecer as necessidades daquele grupo de estudantes do PROFMAT? É possível contemplar as necessidades de praticamente 1.500 professores somente em duas avaliações escritas? Como serão contempladas as necessidades advindas de cada um dos acadêmicos do PROFMAT no processo avaliativo do PROFMAT?

Esses questionamentos são relevantes especialmente porque o PROFMAT se propõe a contemplar as necessidades advindas "[...] do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola [...]" (CAPES, 2010, p. 9) e a [...] proporcionar formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico [...] (SBM, 2014, p.1). Além disso, conforme ressalta a literatura voltada para a formação continuada de professores (por exemplo, Cochran-Smith e Lytle (1999), Day (1999) e Tardif (2002)), um processo de formação continuada de professores que visa contemplar as necessidades advindas do cotidiano dos professores constrói-se coletivamente com os professores alvo da formação, motivo pelo qual autores como Cochran-Smith e Lytle (1999) e Crecci e Fiorentini (2013) apresentam como possibilidades formativas a construção de *grupos colaborativos.*

De acordo com Sacristán, pressões exteriores e de tipos diversos nos professores – validações e títulos, cultura, ideologias e teorias pedagógicas – levam a ressaltar na avaliação aspectos do currículo, “[...] talvez coerentes, talvez incongruentes com os próprios manifestos de quem prescreveu o currículo, de quem o elaborou, ou com os objetivos do próprio professor” (SACRISTÁN, 1998, p. 106).

> O currículo avaliado, enquanto mantém uma constância em ressaltar determinados componentes sobre outros, acaba impondo critérios para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos. Através do currículo avaliado se reforça um significado definido na prática do que é realmente. As aprendizagens escolares adquirem, para o aluno, desde os primeiros momentos de sua escolaridade, a peculiaridade de serem atividades e resultados valorizados. O controle do saber é inerente à função social estratificadora da educação e acaba por configurar toda uma mentalidade que se projeta inclusive nos níveis de escolaridade obrigatória e em práticas educativas que não têm uma função seletiva nem hierarquizadora. (SACRISTÁN, 1998, p. 106)

Tendo em vista que as disciplinas “Números e Funções” e “Matemática Discreta” são objetos de estudo desta pesquisa, especificamente a abordagem dada pelo PROFMAT ao estudo dos conjuntos numéricos, é que nos propomos a analisar o “Currículo Avaliado” do PROFMAT. Estabeleceremos como objetos de análise nesta seção da pesquisa as provas realizadas no ano letivo de 2014 nessas disciplinas.

De acordo com o Regimento do PROFMAT[144] e conforme já discorremos neste trabalho, a “avaliação do rendimento do acadêmico” está baseado em:

> a) Duas avaliações presenciais (designadas AV1 e AV2) que devem contribuir com pelo menos 70% da nota final do discente. A elaboração e definição de datas e horários de aplicação destas avaliações são da competência da Comissão Acadêmica Nacional, com a colaboração do docente Responsável Nacional, preservada a autonomia do docente Responsável Institucional na correção e avaliação dos discentes; b) Exames orais, listas de exercícios, palestras ou outras atividades, inclusive atividades online no

[144] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/normas. Acesso em: 10 jan. 2015.

> Ambiente Virtual de Aprendizagem, a critério do docente Responsável Institucional; O discente que após a conclusão da disciplina não tiver sido aprovado, poderá realizar uma avaliação final presencial de substituição (designada AV3) elaborada, aplicada, corrigida e avaliada nos moldes descritos no item (a). A Comissão Acadêmica Institucional (Colegiado do PROFMAT na Instituição Associada) poderá, a seu critério, facultar aos discentes aprovados na disciplina a possibilidade de realizar a respectiva AV3 para efeito de melhoria da nota final. (http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/normas)

Tendo em vista que a realização das avaliações AV1 e AV2 é de cunho obrigatório para os estudantes do PROFMAT, mas que existe a possibilidade (e a opção) de eles também realizarem a avaliação AV3, na sequência descreveremos e analisaremos estas três avaliações realizadas nas disciplinas “Matemática Discreta” e “Números e Funções Reais”, totalizando a descrição e análise de seis avaliações. Ressaltamos ainda que neste processo de análise nos ateremos às questões que versam diretamente sobre os temas “Números Naturais” e “Números Reais” e consideraremos o gabarito para cada uma das referidas avaliações, apresentado pela Comissão Acadêmica Nacional.

9.1 DESCRIÇÃO DAS AVALIAÇÕES REALIZADAS NO PROFMAT NO ANO DE 2014 E RELACIONADAS À DISCIPLINA “NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS”

A *primeira avaliação presencial (AV1)*[145] aplicada no ano de 2014 referente à disciplina “Números e Funções Reais” foi composta por cinco questões, tal como descrevemos na sequência.

A primeira questão solicitava que fossem considerados os conjuntos A, B e C e que na sequência fossem provadas as seguintes igualdades:

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

A segunda questão solicitava que fosse provado que $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção.

145 Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA11_AV1_2014.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

A terceira questão solicitava que fosse provado que $\log_{10} 2$ não é um número racional.

A quarta questão apresentava o seguinte enunciado:

> Apesar do “grau Celsius" (°C) ser a medida mais usada para a temperatura, alguns países, como os Estados Unidos, usam outra medida de temperatura, o “grau Fahrenheit” (°F). Sabendo que os pontos de fusão e ebulição da água são 0°C e 100°C, respectivamente, e 32°F e 212°F, respectivamente, determine uma função afim que relaciona as temperaturas medidas em graus Celsius e graus Fahrenheit.

A quinta e última questão solicitava que fosse considerado o conjunto dos números racionais diáticos D= $\left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in Z, n \geq 0\right\}$*. Por meio do item (a), solicitava que o acadêmico provasse que se a e b são números reais tais que a < b, então existe d ∈ D tal que a < d < b. E, por meio do item (b), se solicitava que o acadêmico concluísse – considerando o item (a) – que em qualquer intervalo (a, b) existem infinitos números racionais diádicos.*

A *segunda avaliação presencial (AV2)*[146] aplicada no ano de 2014 referente à disciplina “Números e Funções Reais” era composta por cinco questões, tal como descrevemos na sequência.

A primeira questão apresentava o seguinte enunciado

> Divide-se um arame de comprimento L em duas partes. Uma das partes estará destinada para construir um quadrado e a outra parte para construir um triângulo equilátero. Qual é o comprimento de cada parte para que a soma das áreas das figuras obtidas seja a menor possível? É possível encontrar uma divisão tal que a soma das áreas do quadrado e do triângulo equilátero seja máxima? Justifique.

A segunda questão, por meio do item (a), solicitava que fosse provado, usando o fato de que $x^4 = (x^4 + 1) - 1$, que $x^{2014} = ((x^4 + 1) - 1)^{503} . x^2 = [(x^4 + 1). q(x) + (-1)^{503}]x^2$ para algum polinômio $q(x)$. Este item solicitava ainda que o acadêmico concluísse que o resto da divisão de x^{2014} por $x^4 + 1$ é $-x^2$. Já o item (b) desta questão pedia que fosse determinado o resto da divisão do polinômio *p(x)* = $2x^{2014} + 15x^5 + 9x - 2014$ pelo polinômio *d(x)* = $x^4 + 1$. No tocante ao item (b), o

146 Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA11_AV2_2014.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

enunciado da questão apresentava a seguinte sugestão: “Use o fato que o resto da divisão de $p_1(x)$ + $p_2(x)$ por *d(x)* é igual à soma r_1 (x) + r_2 (x) dos restos r_1 (x) e r_2 (x) das divisões de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por *d(x)*, respectivamente.”

A terceira questão apresentava uma função crescente f: R^+ → R tal que $f(x.y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, $y\in R^+$ e pedia que se mostrasse existir a > 0 tal que $f(x) = \log_a x$ para todo x ∈ R^+.

A quarta questão, a partir do texto “Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população de uma cidade fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo-se que a população de uma cidade era de 750 mil habitantes em 1990 e 1 milhão de habitantes em 2010”, solicitava que o acadêmico calculasse: “(a) A população estimada para 2020; (b) Em que ano a população da cidade alcançará a marca de 2 milhões de habitantes?”

A quinta e última questão da referida prova solicita que o acadêmico resolvesse a seguinte equação: $arctg\left(\frac{1+x}{2}\right) + arctg\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

A *terceira avaliação presencial (AV3)*[147] aplicada no ano de 2014 referente à disciplina “Números e Funções Reais” era composta por cinco questões, tal como descrevemos na sequência.

A primeira questão apresentava dois números primos p e q e solicitava que se provasse que $\sqrt{pq}$ é irracional (item a) e que $\sqrt{p}$ + $\sqrt{q}$ é irracional (item b).

A segunda questão apresentava dois conjuntos arbitrários X e Y e uma função f : X → Y. e solicitava que fosse provado que, se A, B ⊂ X então: (item a) f(A ∪ B) = f(A) ∪f(B); (item b) f(A ∩ B) ⊆f(A) ∩f(B). Era solicitado também que fosse dado um exemplo para o qual a igualdade de conjuntos no item (b) não ocorria.

A terceira questão apresentava o seguinte enunciado: “João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00 cada caixa. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Considerando-se apenas valores inteiros de caixas e reais, quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?”.

Já a quarta questão apresentava o seguinte enunciado:

[147] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA11_AV3_20141.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

> Uma pessoa tomou 60 mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que a meia-vida do medicamento era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra meia-vida, foi a um site de busca e encontrou a seguinte definição: Meia-vida: tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial. (a) Após 12 horas da ingestão do remédio, qual é a quantidade do remédio ainda presente no organismo? (b) E após 3 horas? (c) Quanto tempo após a ingestão a quantidade de remédio no organismo é igual a 20 mg?

A quinta e última questão solicitava por meio do item (a) que o acadêmico encontrasse "uma expressão para *sen 3x* como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de *sen x"*. E, por meio do item (b), solicitava que se provasse que *sen 10°* é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros e que se usasse este fato para concluir que *sen 10°* é irracional.

9.2 ANÁLISE DAS QUESTÕES QUE COMPUSERAM AS AVALIAÇÕES REALIZADAS NO PROFMAT NO ANO DE 2014 E RELACIONADAS À DISCIPLINA "NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS"

Conforme a descrição acima evidenciou, das quinze questões que apresentamos, duas versaram (diretamente) sobre o conjunto dos números racionais e uma versou sobre o conjunto dos números irracionais, conforme apresentaremos na sequência:

Terceira questão da AV1: Solicitava que fosse provado que $\log_{10} 2$ não é um número racional.

De acordo com o gabarito publicado pela Comissão Acadêmica Nacional[148], a prova desta questão se baseava no método da redução ao absurdo. Para tanto, se deveria supor que $\log_{10} 2$ é um número racional, de modo que $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$, tal que $p, q \in$ Z e são diferentes de zero e primos entre si.

Se $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$, segue-se daí que $10^{p/q} = 2 \Leftrightarrow 10^p = 2^q \Leftrightarrow 2^p 5^p = 2^q \Leftrightarrow 5^p = 2^{q-p}$ e como p e q são diferentes de zero, chega-se a uma contradição.

[148] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/AV1_MA11_com_gabarito.pdf. Acesso em: 11 nov. 2014.

Quinta questão da AV1: Nela se considerava o conjunto dos números racionais diáticos D= $\left\{\frac{\mathrm{m}}{2^{\mathrm{n}}} : \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}, \mathrm{n} \geq 0\right\}$ e se solicitava, no item (a), que se provasse que se a e b são números reais tais que a < b, então existe d ∈ D tal que a < d < b. No item (b) se solicitava que se concluísse – considerando o item (a) – que em qualquer intervalo (a, b) existem infinitos números racionais diádicos.

De acordo com o gabarito publicado pela Comissão Acadêmica Nacional[149], a prova apresentada para o item (a) desta questão supõe $n \in$ N, tal que 0 $<\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}<b-a$. Como consequência dessa suposição se conclui que $2^{\mathrm{n}}b - 2^{\mathrm{n}}a > 1$, sendo que esta desigualdade representa que a distância entre 2^{n}b e 2^{n}a é maior que 1 e dessa afirmação segue-se que existe $m \in$ Z tal que 2^{n}a $<m<2^{\mathrm{n}}$b. Com isso conclui-se a demonstração com a seguinte desigualdade: a $<\frac{\mathrm{m}}{2^{\mathrm{n}}}<$ b.

Para o item (b), o referido gabarito apresenta a seguinte resposta: Seja n_0 um número natural tal que 0 $<\frac{1}{2^{n_0}}<b-a$, e, a partir do item (a), supõe-se que existe um número diádico $\frac{m}{2^{n_0}} \in (a,\ b)$. Assim, tomando-se $n > n_0$ tem-se 0 $<\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}<\frac{1}{2^{n_0}}<b-a$ e, desta forma, seguindo a construção do item (a), para cada $n > n_0$ existe um número diádico que pertence ao intervalo *(a, b).* E assim, existem infinitos números diádicos no intervalo *(a, b)*

Primeira questão da AV3: Apresentava dois números primos *p* e *q* e se solicitava que se provasse que $\sqrt{pq}$ é irracional (item a) e que $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é irracional (item b).

De acordo com o gabarito publicado pela Comissão Acadêmica Nacional[150], a prova apresentada para o item (a) desta questão é baseada no método da redução ao absurdo, de modo que inicialmente se supõe que $\sqrt{pq}$ é racional e assim $\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$ tal que *a, b*∈ Z e são diferentes de zero e primos entre si. Tem-se então que $pq = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = b^2pq$ $\Rightarrow p|a$ e $q|a \Rightarrow p^2|a$ e $q^2|a \Rightarrow a^2 = p^2q^2r,\ r \in \mathrm{Z}\backslash\{0\} \Rightarrow p^2q^2r = b^2pq \Rightarrow pqr = b^2 \Rightarrow p|b$ e $q|b$.

---

[149] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/AV1_MA11_com_gabarito.pdf. Acesso em: 11 nov. 2014.

[150] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/AV3_MA11_com_gabarito.pdf. Acesso em: 11 nov. 2014.

E, como a e b são primos entre si, chega-se a um absurdo, concluindo-se assim que $\sqrt{pq}$ é irracional .

A prova apresentada para o item (b) é similar à apresentada para o item (a), assim supõe-se que $\sqrt{p}$ + $\sqrt{q}$ é racional de modo que $\sqrt{p}$ + $\sqrt{q}$ = $\frac{a}{b}$tal que a, b∈ Z e são diferentes de zero e primos entre si. Tem-se então que ($\sqrt{p}$ + $\sqrt{q}$)^2 = $\frac{a^2}{b^2}$⇒p + 2 $\sqrt{pq}$ + p = $\frac{a^2}{b^2}$⇒$\sqrt{pq}$= $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} - p - q\right)$ $\in Q$, o que é um absurdo, uma vez que $\sqrt{pq}$ é irracional como foi provado no item (a), concluindo-se, assim, que$\sqrt{p}$ + $\sqrt{q}$ é irracional.

A descrição dos enunciados e de suas respectivas resoluções evidenciam que o objetivo das questões era explorar a *demonstração de enunciados* referentes aos números racionais e aos números irracionais. Duas destas provas referentes aos números irracionais, apesar de os enunciados (ou seja, os resultados que expressam) serem passíveis de manipulação pelos estudantes, as provas destes enunciados são efetuadas por meio da técnica de demonstração intitulada como “método de redução ao absurdo”, que não é abordado na educação básica, e exploram a ideia de que se um número não pode ser escrito por meio da razão de dois números inteiros, este número é classificado como irracional. O terceiro enunciado se refere ao conjunto dos números reais (densidade em R) e ao conjunto dos números racionais diáticos.

No tocante às demonstrações desenvolvidas, destaca-se o fato de que elas não são utilizáveis de forma imediata (tal qual os enunciados e soluções evidenciam) no ambiente escolar. Tendo em vista que se solicita que os acadêmicos apenas “resolvam”, “demonstrem” os referidos resultados, a questão não suscita reflexões nos professores cursando o PROFMAT sobre “se” e “como” ocorreria a utilização destas questões e suas respectivas resoluções no ensino fundamental e no ensino médio. É plausível afirmar que estas questões foram inseridas nas avaliações com o único objetivo de demonstrar enunciados matemáticos que envolvem conteúdos que, de alguma forma, pertencem ao currículo da educação básica. Além disso, tais questões priorizam demonstrações matemáticas formais em detrimento de outras formas de argumentação que são mais próximas do ambiente escolar.

Na medida em que o PROFMAT, por meio de seu projeto acadêmico, se propõe a formar matematicamente seus alunos, contemplando “[...] as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional [...]" (CAPES, 2010, p. 09), e considerando as taxonomias propostas por Ball e colaboradores (BALL; THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL *et al.*, 2008), Ma (2009), Baumert e colaboradores (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008), sobre as dimensões que compõem o conhecimento matemático do professor de Matemática, esperar-se-ia que as avaliações propostas por este programa de pós-graduação vinculasse suas atividades avaliativas com a prática do professor. Assim, o problema do formato das provas realizadas no PROFMAT não reside no fato de explorarem demonstrações, mas no fato de que elas não fomentam qualquer tipo de discussão sobre se os enunciados podem ser abordados no ensino fundamental e médio, se precisam ser adaptados, se a linguagem suscitada em seu processo de prova é acessível aos estudantes da educação básica, se esta linguagem precisa ser adaptada, se existem demonstrações e provas alternativas para os referidos enunciados acessíveis aos estudantes da educação básica.

9.3 DESCRIÇÃO DAS AVALIAÇÕES REALIZADAS NO PROFMAT NO ANO DE 2014 E RELACIONADAS À DISCIPLINA "MATEMÁTICA DISCRETA"

A *primeira avaliação presencial (AV1)*[151] aplicada no ano de 2014 referente à disciplina "Matemática Discreta" era composta por cinco questões, tal como descrevemos na sequência.

A primeira questão era composta por quatro itens. O item (a) solicitava que o acadêmico definisse uma progressão geométrica cujo primeiro termo era a e razão q ($q\neq0$ e $q\neq1$). O item (b) solicitava que o acadêmico conjecturasse uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e q, e, também que ele provasse essa fórmula por indução em n. O item (c) solicitava que se considerasse $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e que a partir disso se conjecturasse uma fórmula para S_n em função de a, n e q e que ele provasse essa fórmula por indução em n. O item (d) solicitava que, a partir dos itens (b) e (c), o acadêmico obtivesse uma fórmula para S_n em função a, a_n e q.

A segunda questão apresentava o seguinte enunciado:

> Um comerciante contraiu um empréstimo de R$ 8000,00 a juros semestrais de 10%. O pagamento foi realizado em duas parcelas, uma

151 Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA12_AV1_2014.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

> de R$ 5808,00 após um ano da contratação do empréstimo e a outra seis meses após a primeira. (a) Calcule o valor da segunda parcela do empréstimo. (b) Caso o comerciante optasse por quitar a dívida em 3 parcelas semestrais fixas, a primeira a partir do 1º semestre após a contratação do empréstimo, qual seria o valor das parcelas?

A terceira questão solicitava que o acadêmico resolvesse a equação de recorrência $T_n = 4T_{n-1} + 2^n$, $T_0 = 9$.

A quarta questão solicitava que se considerasse a sequência $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$ e que a partir disso se provasse, por indução em *n*, que: (a) $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para todo $n \geq 1$; (b) $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para todo $n \geq 4$

A quinta questão solicitava que o acadêmico determinasse quantas soluções inteiras e positivas ($x > 0$ e $y > 0$) possui a equação $2x + 3y = 2014$.

A *segunda avaliação presencial (AV2)*[152] aplicada no ano de 2014 referente à disciplina "Matemática Discreta" era composta por cinco questões, tal como descrevemos a seguir.

A primeira questão solicitava que se calculasse a velocidade média para cada uma das seguintes situações: (a) "Um carro percorre metade de uma certa distância a uma velocidade de 100 km/h e a outra metade da distância a 60 km/h; (b) Um carro percorre uma estrada por um certo tempo t a uma velocidade de 100 km/h e depois durante o mesmo tempo t a uma velocidade de 60 km/h"

A segunda questão solicitava que se encontrasse o valor do número natural *n* que satisfaz a seguinte igualdade: $\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} 8 + ... + \log_{\sqrt{2}} 2^n = 110$.

A terceira questão solicitava que de um grupo de 12 mulheres, em que Paula é uma delas, e de um grupo de 10 homens, sendo Felipe um deles, o acadêmico determinasse quantas comissões poderiam ser formadas com: (a) 4 mulheres e 3 homens; (b) 5 pessoas, sendo pelo menos 3 mulheres; (c) 6 pessoas, sendo 3 de cada sexo e de modo que Paula e Felipe façam parte.

A quarta questão solicitava, por meio do item (a), que se mostrasse que todo número natural *n* tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 3. E,

---

152 Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA12_AV2_2014.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

por meio do item (b), se solicitava que se mostrasse que se *n* é relativamente primo com 10, então *n* tem um múltiplo com todos os algarismos iguais a 3.

A quinta questão apresentava o seguinte enunciado:

> Duas máquinas A e B produzem 5.000 peças por dia. A máquina A produz 3.000 peças, das quais 2% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2.000, das quais 1% são defeituosas. (a) Se uma peça for escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ser defeituosa? (b) Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A?

A *terceira avaliação presencial (AV3)*[153] aplicada no ano de 2014 referente à disciplina “Matemática Discreta” era composta por cinco questões, tal como descrevemos na sequência.

A primeira questão apresentava o seguinte enunciado: “Duas retas *r* e *s* são paralelas. Na reta *r* marcamos 8 pontos e na reta *s* marcamos 9. Usando os pontos marcados como possíveis vértices: (a) quantos triângulos podemos formar? (b) quantos quadriláteros convexos podemos formar?”

A segunda questão solicitava, por meio do item (a), que se mostrasse que se x é um número real não nulo e k é um inteiro positivo, então vale seguinte a igualdade: $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$. E, por meio do item (b), era solicitado que se provasse – usando o item (a) – por indução em *n*, que se $x + \frac{1}{x}$ é inteiro, então $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro para todo $n \geq 1$.

O terceiro enunciado era o seguinte:

> Existem dois tipos de anos bissextos: aqueles que são múltiplos de 4, mas não são de 100 e aqueles que são múltiplos de 400. Por exemplo, serão anos bissextos 2024, 2052 e 2400; não serão anos bissextos 2038, 2075 e 2100. (a) O matemático Martin Gardner nasceu no ano de 1914 e faleceu em 2010. Durante a vida desse grande recreacionista matemático, quantos anos foram bissextos? (b) Sabendo que 26 de janeiro de 2014 foi domingo, qual o primeiro ano após 2014 em que 26 de janeiro será novamente num domingo? (c) Baseado na convenção acima, se escolhermos um ano ao acaso, num ciclo de 400 anos, qual a probabilidade dele ser bissexto?

---

[153] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA12_AV3_2014.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

O quarto enunciado argumentava que “em um programa de televisão, um candidato deve responder 10 perguntas. A primeira pergunta vale 2 pontos, a segunda vale 4 pontos, a terceira vale 8 pontos, e assim sucessivamente, dobrando sempre. O candidato responde a todas as perguntas e ganha os pontos correspondentes às respostas que acertou”. A partir do referido enunciado, por meio do item (a), se questionava “Qual o número de pontos que o candidato fará se acertar todas as perguntas?” e por meio do item (b), questionava “Quantas e quais perguntas que o candidato acertou se o número de pontos obtidos foi 1.356?”.

A quinta e última questão solicitava que se considerasse a sequência $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$, para n≥1 e que a partir dela, por meio do item (a), se provasse que $a_n^2 > 3$, para todo $n \geq 1$. Por meio do item (b), se solicitava que se mostrasse, usando o item (a), que $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \geq 1$.

9.4 ANÁLISE DAS QUESTÕES QUE COMPUSERAM AS AVALIAÇÕES REALIZADAS NO PROFMAT NO ANO DE 2014 E RELACIONADAS À DISCIPLINA “MATEMÁTICA DISCRETA”

Conforme a descrição acima evidenciou, das quinze questões que apresentamos, somente uma versa (diretamente) sobre o conjunto dos números naturais e outra sobre o conjunto dos números irracionais, conforme apresentaremos na sequência:

Quarta questão da AV2: Solicitava-se, por meio do item (a), que o acadêmico mostrasse que todo número natural *n* tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 3. E, por meio do item (b), que se mostrasse que se *n* é relativamente primo com 10, então *n* tem um múltiplo com todos os algarismos iguais a 3.

De acordo com o gabarito publicado pela Comissão Acadêmica Nacional[154], a solução para o item (a) é a seguinte: Sendo *n* um número natural, considere os *n + 1* primeiros números da sequência 3, 33, 333, 3333, . . ., na sequência divida-os por *n* e se considerando os restos dessas divisões. Assim, os restos dessa divisão só podem ser iguais a 0, 1, 2, . . . , *n − 1*. Associando o enunciado com o Princípio das Gavetas e interpretando *n + 1* como sendo objetos e os *n* possíveis restos como gavetas, tem-se mais objetos do que gavetas. Considerando que o Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, há dois números da lista que dão o

[154] Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/AV2_MA12_com_gabarito.pdf. Acesso em: 11 nov. 2014.

mesmo resto quando divididos por n, digamos 33 . . . 3 (p algarismos) e 33 . . . , 3 (q algarismos), com $p < q$. A diferença desses números é um múltiplo de n e se escreve 33 . . . 30 . . . 0, com p algarismos iguais 0 e $q - p$ algarismos 3. No tocante ao item (b) é apresentada a seguinte resposta: Suponha que n é relativamente primo com 10, assim pelo item (a) sabe-se que n possui um múltiplo da forma 33 . . . 30 . . . 0 = 33 . . . 3 · 10^p . Como mdc (n, 10) = 1, segue o resultado.

Segunda questão da AV3: Solicitava-se, por meio do item (a), que se mostrasse que se x é um número real não nulo e k é um inteiro positivo, então valia a seguinte igualdade: $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$. Já por meio do item (b), era solicitado que se provasse – usando o item (a) – por indução em n, que se $x + \frac{1}{x}$ é inteiro, então $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro para todo $n \geq 1$.

De acordo com o gabarito publicado pela Comissão Acadêmica Nacional[155], a prova para o item (a) é apresentada por meio dos seguintes cálculos:

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) = x^{k+1} + \frac{x^k}{x} + \frac{x}{x^k} + \frac{1}{x^k.x} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}.$$

Para o item (b), que a resposta é dada da seguinte forma: Para n = 1 o resultado é óbvio. Na sequência se supõe que $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro para n=1, 2, ..., $k-1$, k, e como $x^k + \frac{1}{x^k}$, $x + \frac{1}{x}$ e $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ são números inteiros é imediato que $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$ também é um número inteiro e assim segue o resultado para $n = k + 1$.

Conforme a descrição aqui feita, os enunciados e suas respectivas resoluções evidenciam que o objetivo das questões era explorar a *demonstração de resultados* referentes aos números naturais e aos números inteiros. Nesta conjuntura, destaca-se novamente o fato de que elas não são utilizáveis de forma imediata (tal qual os enunciados e soluções evidenciam) no ambiente escolar. Tendo em vista que se solicita

---

155 Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/AV3_MA12_com_gabarito.pdf. Acesso em: 11 nov. 2014.

que os acadêmicos apenas “resolvam”, “demonstrem” os referidos resultados, não suscitando reflexões nos acadêmicos sobre “se” e “como” ocorreria a utilização destas questões e suas respectivas resoluções no ensino fundamental e no ensino médio, é plausível afirmar que estas questões foram inseridas nas avaliações com o único objetivo de “demonstrar” resultados matemáticos que envolvem conteúdos que, de alguma forma, pertencem ao currículo da educação básica.

Assim, na medida em que o PROFMAT, por meio de seu projeto acadêmico, se propõe a formar matematicamente seus alunos, contemplando “[...]as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional[...]” (CAPES, 2010, p. 09), e considerando as taxonomias propostas por Ball e colaboradores (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL *et al.*, 2008), Ma (2009), Baumert e colaboradores (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008), sobre as dimensões que compõem o conhecimento matemático do professor de Matemática, esperar-se-ia que as avaliações propostas por este programa de pós-graduação vinculassem essas atividades avaliativas com a prática do professor. Assim, o problema do formato das provas realizadas no PROFMAT não reside no fato de explorarem demonstrações, mas de elas não fomentarem qualquer tipo de discussão sobre se os enunciados podem ser abordados no ensino fundamental e médio, se precisam ser adaptados, se a linguagem suscitada em seu processo de prova é acessível aos estudantes da educação básica, se esta linguagem precisa ser adaptada, se existem demonstrações e provas alternativas para os referidos enunciados que são acessíveis aos estudantes da educação básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objeto de análise deste trabalho foi o PROFMAT, um programa de formação continuada direcionado ao aprimoramento da formação matemática de professores que ministram essa disciplina na escola básica. Nesta análise, nos detivemos particularmente no currículo deste curso, visualizando-o a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora. Assim, o currículo do PROFMAT foi analisado por nós como algo que ocorre desde um plano – projeto acadêmico – até sua conversão em práticas pedagógicas, em que os meios utilizados para essa transmissão (materiais) e as tensões presentes no campo da formação dos professores de Matemática se configuram como mediadores desse processo.

Esta análise ocorreu à luz de pesquisas produzidas na área de Educação Matemática cujo objeto de estudo são os conhecimentos do professor que ensina matemática e da perspectiva teórica construída por Sacristán (1998; 2013). Desmembramos nossas análises em cinco fases: 1) o currículo proposto; 2) o currículo apresentado aos professores; 3) o currículo moldado pelos professores e o currículo em ação; 4) o currículo realizado; 5) o currículo avaliado. Apesar de as apresentarmos desmembradas, estas fases se inter-relacionam no processo de *composição docurrículo do PROFMAT*.

- A análise que desenvolvemos na fase "currículo proposto" demonstrou a existência de uma *desarticulação* entre os entes que compõem o projeto acadêmico do PROFMAT.

A primeira desarticulação que evidenciamos refere-se aos objetivos, metas e diretrizes do PROFMAT. Os objetivos, metas e diretrizes deste curso concentram seu discurso na oferta de um curso de formação para professores de Matemática da educação básica – formação esta que, de acordo com o projeto acadêmico do PROFMAT, é estritamente direcionada à dimensão matemática da formação desses profissionais – vinculando-o à educação universal de qualidade. Contudo, conforme discutimos no Capítulo 3 desta tese, não basta o profissional conhecer o conteúdo – de uma perspectiva da matemática acadêmica – para desempenhar a função de professor da educação básica, especialmente quando se almeja um ensino de qualidade, como evidenciou, por exemplo, a pesquisa desenvolvida pelo COACTIV ao buscar indícios de como ela acontece. Ressaltamos os resultados do COACTIV na medida em que estes constataram que *o ensino de matemática de qualidade* depende de outras aspectos e conhecimentos, além do “conhecer o conteúdo” pelo professor (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008).

A segunda desarticulação que elencamos refere-se às áreas de concentração – e suas respectivas linhas de pesquisa – e os objetivos, metas e diretrizes do PROFMAT. Enquanto estes últimos reiteram que o curso desenvolverá um processo de capacitação que comtemplará as necessidades advindas do contexto profissional dos professores da educação básica e os conteúdos curriculares desse nível de ensino, com exceção de uma linha de pesquisa – a saber, a linha intitulada como “Ensino Básico de Matemática” –, as demais linhas e suas correspondentes áreas de concentração possuem como objeto de pesquisa conteúdos que são estudados somente nos cursos de bacharelado e/ou pós-graduação na área de Matemática. Destaca-se, neste contexto, a linha de pesquisa “Ensino Universitário de Matemática” e sua evidente desarticulação com o principal foco do PROFMAT, o ensino da matemática que tem como cenário a escola básica.

O terceiro apontamento que fizemos refere-se à desarticulação existente entre as disciplinas do PROFMAT e as áreas de concentração – e suas respectivas linhas de pesquisa – que, com exceção da área de concentração “Ensino de Matemática” que se associa à disciplina“Recursos Computacionais no Ensino de Matemática”, todas as demais não se vinculam diretamente às disciplinas a elas associadas.

O quarto apontamento refere-se à desarticulação entre a produção acadêmica do corpo docente permanente do programa e os objetivos do PROFMAT. A grande maioria dos pesquisadores nominados no projeto acadêmico desse curso desenvolve suas pesquisas na área da matemática acadêmica, enquanto que o projeto é voltado para a educação básica.

Ao nos voltarmos aos dados presentes na “Ficha de Avaliação” – etapa “Avaliação Trienal 2013” –, produzida pela Capes, contatamos que algumas das desarticulações que apontamos nesta tese também foram elencadas pela comissão (*ad hoc)* que avaliou o PROFMAT, mesmo esse programa de pós-graduação tendo obtido nota 5 nessa avaliação. Nesta conjuntura, tal nota nos parece contraditária na medida em que 5 é a nota máxima que pode ser obtida por programas de pós-graduação que não possuem o curso de doutorado.

- A análise que desenvolvemos na fase "currículo apresentado aos professores", mais especificamente sobre a bibliografia elaborada exclusivamente para o PROFMAT e utilizada neste curso (a saber: Morgado e Carvalho, 2013 e Lima, 2013) evidenciou que:

A abordagem dada aos "Números Naturais" é similar à desenvolvida em livros que são comumente utilizados em cursos de nível superior, inclusive nos cursos de Licenciatura em Matemática, ou seja, os professores que ministram aulas de matemática na escola básica e que se graduaram como licenciados em matemática muito provavelmente já tiveram contato com esta abordagem. Esta afirmação pode ser estendida, com algumas exceções, à abordagem dada aos "Números reais" – e consequentemente aos "Números Racionais". Assim, é possível inferir que existe uma grande similaridade entre a formação matemática realizada nas licenciaturas em matemática e no PROFMAT.

O segundo apontamento a ser feito refere-se à desvinculação das abordagens desenvolvidas nas obras *Números e Funções Reais* e *Matemática Discreta* e os conteúdos "Números Naturais" e "Números Racionais" comumente trabalhados na educação básica. Tal afirmação refere-se particularmente aos conteúdos que constam do currículo escolar de Matemática adotado para a educação básica nas diferentes unidades da federação (por exemplo, o significado dos algoritmos da adição, multiplicação, subtração e divisão entre números naturais e as operações entre números racionais) e que não são contemplados pelas referidas obras.

O terceiro apontamento relevante neste contexto refere-se à ênfase excessiva dada pelas supracitadas bibliografias às técnicas de *demonstração* matemática. Conforme se evidenciou, ambas as obras fomentam a realização de uma quantidade considerável de demonstrações, tanto de teoremas e propriedades quanto de exercícios. Entretanto, o problema não reside somente nesta face da matemática para ser explorada em grande quantidade, mas no fato de que os autores não vinculam estas demonstrações à prática do professor de Matemática da educação básica e às necessidades advindas do trabalho destes profissionais nas escolas, como promete o projeto curricular do PROFMAT.

- A análise que desenvolvemos na fase "currículo moldado pelos professores e o currículo em ação" evidenciou que:

O processo de moldagem do currículo pelos professores é fortemente influenciado e controlado pela Comissão Acadêmica Nacional do PROFMAT, controle este exercido principalmente por meio das avaliações presenciais a que seus alunos devem se submeter e pela fixação de uma programação das aulas nos semestres letivos que deve ser obedecida pelos professores das diferentes disciplinas em todos os polos em que existe esse mestrado (tanto em termos da fixação de datas quanto de conteúdos isso é válido tanto para as aulas presenciais quanto para as avaliações presenciais). Este controle é prejudicial a este programa destinado à formação de professores de Matemática, na medida em que os docentes responsáveis pelas disciplinas acabam preparando suas aulas mais sob a influência desta programação e da preocupação em abarcar uma quantidade máxima de conteúdo para não comprometer o desempenho dos estudantes nas avaliações presenciais do que pelas demandas formativas dos acadêmicos do PROFMAT – ou seja dos professores de Matemática da educação básica – e pelas necessidades advindas do cotidiano de trabalho desses profissionais aos quais o curso é destinado.

Neste contexto, é possível inferir que este controle exercido pela Comissão Acadêmica Nacional do PROFMAT nos processos de moldagem do currículo e de sua implementação no ambiente de sala de aula (currículo em ação) não favorece a efetivação de alguns dos objetivos a que este curso se propõe, especialmente no que se refere à efetivação da seguinte meta desse programa:

> A meta é oferecer um curso de formação profissional alicerçado em sólida formação em Matemática, que contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional. (CAPES, 2010, p. 9)

- A análise que desenvolvemos na fase “currículo realizado” evidenciou que os acadêmicos do PROFMAT, mesmo após terem cursado disciplinas em que os conteúdos contemplados foram os “Números Naturais” e “Números Racionais” apresentam dificuldades relativas ao processo de ensino destes conteúdos no ambiente escolar.

Considerando tanto a complexidade que caracteriza essa fase do desenvolvimento de um currículo (SACRISTÁN, 1998) quanto a complexidade intrínseca do processo de investigação sobre a formação matemática do professor, apoiamos esse momento de nossa pesquisa nas pesquisas produzidas por Ball e seus colaborados (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008) e Ma (1999; 2009).

Assim, por mais que estes estudantes tenham tido contato com os "Números Naturais" e "Números Racionais" no PROFMAT, quando colocados frente a questões que comumente se apresentam no cotidiano dos professores de Matemática e que foram extraídas da literatura referente a pesquisas sobre a formação matemática do professor de Matemática (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; MA, 2009), os acadêmicos apresentaram dificuldades acentuadas e cometeram equívocos diversos. Para efeito de exemplificação, destacamos os dados obtidos em torno da divisão de $1\frac{3}{4}$por $\frac{1}{2}$. Ao serem convidados a elaborar um problema-história que representasse a divisão do número $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ e que pudesse ser utilizado em uma aula de matemática na educação básica, sete participantes apresentaram o enunciado de um problema-história em que, ao invés disso, referia-se à divisão do $1\frac{3}{4}$ por 2; um participante apresentou o enunciado de um problema-história que, ao invés de se relacionar à divisão do número $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, na realidade referia-se à multiplicação do número $1\frac{3}{4}$ por 2; um participante não respondeu à solicitação; dois participantes apresentaram um enunciado que se referia às operações com números naturais; três apresentaram enunciados que não se configuram como problemas-histórias e apenas seis dos participantes apresentaram enunciados que podem ser classificados como problemas-história que representem a divisão $1\frac{3}{4}$: $\frac{1}{2}$ e podem ser utilizados em uma aula de matemática na educação básica. Em suma, 70% dos participantes dessa fase da pesquisa não conseguiram realizar a tarefa corretamente.

- A análise que desenvolvemos na fase "currículo avaliado" que, de acordo com Sacristán (1998), é a fase mais valorizada pelos que propõem e desenvolvem um currículo, evidenciou novamente uma ênfase excessiva nas técnicas de *demonstração* matemática.

Destaca-se também o fato de que as demonstrações exploradas nas avaliações presenciais em análise não são utilizáveis de forma imediata (tal qual os enunciados e soluções evidenciaram) no ambiente escolar.

Tendo em vista que as questões solicitavam aos acadêmicos que apenas "resolvessem", "demonstrassem" os referidos resultados, não suscitando neles reflexões sobre "se" e "como" ocorreria a utilização destas questões e suas respectivas resoluções no ensino fundamental e no ensino médio, é plausível afirmar que as questões em tela foram inseridas nas avaliações com o único objetivo de demonstrar resultados matemáticos que envolvem conteúdos de alguma forma pertencente ao currículo da educação básica.

Assim, na medida em que o PROFMAT, por meio de seu projeto acadêmico, se propõe a formar matematicamente seus alunos, contemplando "[...] as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional [...]" (CAPES, 2010, p. 09), e considerando as taxonomias propostas por Ball e colaboradores (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008; HILL *et al.*, 2008), Ma (2009), Baumert e colaboradores (KRAUSS, BAUMERT e BLUM, 2008), sobre as dimensões que compõem o conhecimento matemático do professor de Matemática, esperar-se-ia que as avaliações propostas por este programa de pós-graduação vinculassem essas atividades avaliativas com a prática do professor. Deste modo, o problema com o formato das avaliações realizadas no PROFMAT não reside no fato de explorarem demonstrações, mas de elas não fomentarem qualquer tipo de discussão sobre se os enunciados podem ser abordados no ensino fundamental e médio, se precisam ser adaptados, se a linguagem e argumentos utilizados no processo de demonstração são acessíveis aos estudantes da educação básica, se esta linguagem precisa ser adaptada, se existem demonstrações e provas alternativas para os referidos resultados que são acessíveis aos estudantes da educação básica.

Tendo em vista a opção metodológica que assumimos neste trabalho, concluímos que não existe uma vinculação entre os elementos que compõem o currículo do PROFMAT na medida em que os objetivos a que ele se propõe não se cristalizam no material didático utilizado nas disciplinas, nem no processo de modelação do currículo pelos docentes que nele atuam e de seu desenvolvimento, uma vez que ele não dá margem a que os alunos discutam suas necessidades formativas – que ficaram bem visíveis quando solicitados a analisarem os erros comumente cometidos por estudantes da educação básica, a explicarem os conceitos envolvidos em procedimentos habitualmente empegados na resolução de problemas matemáticos envolvendo os "números naturais" e os "números racionais", a elaborarem enunciados de problemas-história destinados à exploração de operações com esses números – e/ou as questões decorrentes das dificuldades que encontram em sua prática docente na escola básica. Este comentário estende-se também à fase “currículo avaliado”, uma vez que ele também não se vinculou à prática do professor de Matemática da educação básica.

REFERÊNCIAS

ALONSO, R. F. O sentido do currículo na educação obrigatória. In: SACRISTÁN, J. G. (org.) **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, p. 316-335, 2013.

APPLE, M. W. **Ideologia e Currículo**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ARBIETO, A.; MATHEUS, C.; MOREIRA, C. G. Aspectos Ergódicos da teoria dos números. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

BALL, D. L.; HILL, H. C.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, v. 29, n. 1, p. 14-17, 20-22, 43-46, 2005.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education, v. 59 n.** 5, p. 389-407, 2008.

BARDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Análise Numérica. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

BAUMERT, J.; KUNTER, M.; BLUM, W.; BRUNNER, M.; VOSS, T.; JORDAN, A.; KLUSMANN, U.; KRAUSS, S.; NEUBRAND, M.; TSAI, Y.-M. Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. **American Educational Research Journal**, v. **47**, n. 1, p. 133-180, 2010.

BAUMERT, J.; KUNTER. M. The COACTIV Model of Teachers' Professional Competence. In: KUNTER, M. *et al.* (eds.) **Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers, Mathematics Teacher Education**. Nova York: Springer US. p. 25-48, 2013.

BLANCO, M. M. G. A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de um curriculum. In: FIORENTINI, D. (org.) **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares.** Campinas: Mercado das Letras, p. 51-86, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Diário Oficial da República Federativa do Brasil. Brasília, 1961.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Diário Oficial da República Federativa do Brasil. Brasília, 1971.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.**Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Diário Oficial da República Federativa do Brasil. Brasília, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano Nacional de Educação.** Brasília, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução nº 2/1997, de 26 de junho de 1997. Dispõe sobre os programas especiais de formação pedagógica de docentes para as disciplinas do currículo do ensino fundamental, do ensino médio e da educação profissional em nível médio.** Brasília: Conselho Nacional de Educação, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução CNE/CP nº. 1, de 18 de fevereiro de 2002. Institui diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.** Brasília: Conselho Nacional de Educação, 2002a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução CNE/CP nº. 2, de 19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior.** Brasília: Conselho Nacional de Educação, 2002b.

BRASIL. Senado Federal. **Constituição: República Federativa do Brasil.** Brasília: Centro Gráfico, 1988.

BRASIL. **Ministério da Educação. Decreto nº 5.800, de 8 de junho de 2006. Dispõe sobre o Sistema Universidade Aberta do Brasil - UAB**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei nº 11.502, de 11 de julho de 2007. Modifica as competências e a estrutura organizacional da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, de que trata a Lei nº 8.405, de 9 de janeiro de 1992; e altera as Leis nºs 8.405, de 9 de janeiro de 1992, e 11.273, de 6 de fevereiro de 2006, que autoriza a concessão de bolsas de estudo e de pesquisa a participantes de programas de formação inicial e continuada de professores para a educação básica.** Diário Oficial da República Federativa do Brasil. Brasília, 2007a.

BRASIL. Ministério da Educação. Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação. **Escassez de professores no Ensino Médio: Propostas Estruturais e Emergenciais**. Brasília, 2007b.

BRASIL. Ministério da Educação**. Decreto nº 6.755, de 29 de janeiro de 2009. Institui a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica, disciplina a atuação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES no fomento a programas de formação inicial e continuada, e dá outras providências**. Brasília, 2009a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portaria Normativa nº 17, de 28 de dezembro de 2009. Dispõe sobre o mestrado profissional no âmbito da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES**. Diário Oficial da República Federativa do Brasil.Brasília, 2009b.

BROMME, R. Beyond subject matter: a psychological topology of teachers' professional knowledge. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄßER, R.; WINKELMANN, B. **Mathematics didactics as a scientific discipline. The state of the art**. Dordrecht: Kluwer, p. 73-88, 1993.

BROMME, R. What exactly is pedagogical contente knowledge'? – Critical remarks regarding a fruitful research program. In HOPMANN, S. & RIQUARTS, K. (orgs.) **Didaktik and/or Curriculum.** Kiel: IPN, p. 205-216, 1995.

BROMME, R. The teacher as an expert: Everyday concepts and some facts about the knowledge base of the teaching profession. In W. BÜNDER; K. REBEL (eds.) **Teacher education - Theoretical requirements and professional reality.** Kiel: IPN Materialien. p. 23-40, 1997.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. O processo de inserção das geometrias não euclidianas no currículo da escola paranaense: a visão dos professores participantes. **Bolema.** Boletim de Educação Matemática. (Unesp. Rio Claro.), v. 28, n. 48, p. 42-63, 2014.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 4. ed. Lisboa: Gradiva, 2002

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira da Matemática, 2008.

CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; PETERSON, P. L.; CAREY, D. A. Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education.** v. 19, n. 5, p. 385-401, 1988.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. **Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching.** Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8). Anais do CERME 8. Antalya: Middle East Technical University, 2013. Disponível em: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acesso em: 22 set. 2014.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L .C.; FLORES, P. Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. In: RICO, L.; CAÑADAS, M. C.; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (orgs.) **Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro**. Granada: Comares, p. 193-200, 2013.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Avaliação Suplementar Externa do Programade Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).** Brasília, 2013.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). Diretoria de Avaliação. **APLICATIVO PARA PROPOSTAS DE CURSOS NOVOS (APCN - 2012): Manual do Usuário.** Brasília, 2012.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Ofício n° 031_06/2010/CTC/CAAIII/CGAA/DAV/CAPES**. Brasília, 2010.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Portaria nº 068, de 03 de agosto de 2004**. Define, para efeitos da avaliação da pós-graduação realizada pela Capes, as categorias de docentes dos programas desse nível de ensino. 2004.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Portaria nº 191, de 4 de outubro de 2011**. Define, para efeitos de enquadramento nos programas e cursos de pós-graduação, as categorias de docentes dos programas desse nível de ensino. Diário Oficial da União. 18 out. 2011.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Portaria nº 209, de 21 de outubro de 2011.** Diário Oficial da União. 26 out. de 2011.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA - EDITAL nº 061/2013.** Brasília, 2013.

COCHRAN-SMITH, M. A Tale of Two Teachers: Learning to Teach Over Time. **Kappa Delta Pi Record.** v. 48, n. 3, p.108-122, 2012.

COCHRAN-SMITH, M.; ZEICHNER, K. M. Teacher education. **The report of the AERA Panel on Research and Teacher Education**. NJ: Lawrence Erlbaum, 2005.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationship of knowledge and practice: Teacher learning in the communities. **Review of Research in Education.** v. 24, p. 249 – 305, 1999.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

COSTA, C. J.; DURAN, M. R. C. A Política Nacional de Formação de Professores entre 2005 e 2010: a nova Capes e o Sistema Universidade Aberta do Brasil. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, Brasília, v. 9, n. 16, p. 263 – 313, 2012.

CRECCI, V. M.; FIORENTINI, D. Desenvolvimento Profissional de Professores em Comunidades com Postura Investigativa. **Acta Scientiae**, v. 15, n.1, p. 9-23, 2013.

D´AMBRÓSIO, B. Conteúdo e Metodologia na Formação de Professores. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (orgs.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: Musa Editora, p. 20-32, 2005.

D’AMBROSIO, U. A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 1999, p. 97-115.

DAY, C. **Desenvolvimento Profissional de Professores**. Porto: Porto Editora, 1999.

DEVLIN, K. **O Gene da Matemática: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DIAS, A. L. M. Da bossa das matemáticas à educação matemática. **História & Educação Matemática**, Rio Claro, v. 2, n.2, p. 191-226, 2002.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

ERICSSON, K. A.; KRAMPE, R. T.; TESCH-ROMER, C. The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. **Psychological Review**, v.100, n.3, p. 363–406, 1993.

FERREIRA, A. C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: Dario Fiorentini (org.). **Formação de professores: explorando novos caminhos com outros olhares**. 1. ed.Campinas: Mercado das Letras, v. 1, p. 19-50, 2003.

FIORENTINI, D.; Castro, F. C. Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. In: DARIO FIORENTINI (org.). **Formação de Professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares**. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, v. 1, p. 121-156, 2003.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação da PUC-Campinas**, Campinas, nº 18, p. 107-115, junho de 2005.

FIORENTINI, D. A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, Ano 21, nº 29, p. 43-70, 2008.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

FREITAS, H. C. L. A (nova) política de formação de professores: A prioridade postergada. **Educ. Soc**., Campinas, v. 28, n. 100, p. 1.203 – 1.230, 2007.

FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS (FCC). **Formação Continuada de Professores: Uma Análise das Modalidades e das Práticas em Estados e Municípios Brasileiros – Relatório Final**. São Paulo: FCC, 2011.

GARCÍA, C., M. A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In: NÓVOA, A.(coord.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

GARNICA, A. V. M. Educação Matemática e políticas públicas: currículos, avaliação, livros didáticos e formação de professores. **ANPED GT19: Educação Matemática**. 2006.

GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. Rio Janeiro: IMPA, 2009.

GODINO, J. D. Categorías de Análisis de los conocimientos del Professor de Matemáticas**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 20, p. 13-31, 2009.

GUÉRIOS, E. Espaços intersticiais na formação docente: indicativos para a formação continuada de professores que ensinam matemática. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (orgs.). **Cultura, Formação e Desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.** Campinas: Musa Editora, 2005.

HARTSHORNE, R. **Algebraic Geometry**. Springer-Verlag, 1992.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. SBM: Rio de Janeiro, 2006.

HILL, H.C.; SCHILLING, S.G.; BALL, D. L. Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. **Elementary School Journal,** v. 105, p. 11-30, 2004.

HILL, H. C.; BALL, D. L. Learning mathematics for teaching: results from California's Mathematics Professional Development Institutes. **Journal of Research in Mathematics Education,** v. 35, p. 330-351, 2004.

HILL, H.C.; ROWAN, B.; BALL, D. L. Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. **American Educational Research Journal,** v. 42, p. 371-406, 2005.

HILL, H. C. Mathematical knowledge of middle school teachers: Implications for the No Child Left Behind Policy initiative. **Educational Evaluation and Policy Analysis,** v. 29, p. 95-114, 2007.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SLEEP, L.; LEWIS, J. M. Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts? In LESTER, F. (Ed.), **Handbook for Research on Mathematics Education** (2. ed), p. 111-155. Charlotte: Information Age Publishing, 2007.

HILL, H. C.; LUBIENSKI, S. T. Teachers' mathematics knowledge for teaching and school context: A study of California teachers. **Educational Policy**, v. 21, n.5, p. 747-768, 2007.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking "Pedagogical Content Knowledge". **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 39, n. 4, p. 372-400, 2008.

HILL, H. C.; BLUNK, M.; CHARALAMBOUS, C.; LEWIS, J.; PHELPS, G. C.; SLEEP, L.; BALL, D. L. Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. **Cognition and Instruction,** v. 26, p. 430-511. 2008.

JACOBS, J. K.; MORITA, E. Japanese and American Teachers' Evaluations of Videotaped Mathematics Lessons. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 33, n. 3, p. 154–175, 2002

JANNUZZI, P. M. Indicadores para Diagnóstico, Monitoramento e Avaliação de Programas Sociais no Brasil. **Revista do Serviço Público**, Brasília, v. 56, n. 2, p. 137-159, 2005.

JANNUZZI, P. M.; MIRANDA, W. L.; SILVA, D. G. Análise multicritério e a tomada de decisão em Políticas Públicas: aspectos metodológicos, aplicativo operacional e aplicações. **IP** (Belo Horizonte), v. 11, p. 69-87, 2009

KELLY, A. V. **The Curriculum: Theory and Practice**. 4. ed. London: Paul Chapman Publishing Ltd., 1999.

KLEICKMANN, T.; RICHTER, D.; KUNTER, M.; ELSNER, J.; WISE, M.; KRAUSS, S.; BAUMERT, J. Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge. The role of structural differences in teacher education. **Journal of Teacher Education**, v. **64**, n. 2, p. 90-106, 2013.

KRAUSS, S.; BAUMERT, J.; & BLUM, W. Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: Validation of the COACTIV constructs. **ZDM**, v. 40, p. 873-892, 2008.

KRAUSS, S.; BLUM, W. The conceptualisation and measurement of pedagogical content knowledge and content knowledge in the COACTIV study and Their impact on student learning. **Journal of Education**, v. 56, n.1, p. 45-65. 2012.

KRAUSS, S.; BRUNNER, M.; KUNTER, M. *et al.* Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. **Journal of Educational Psychology**, v. 100, n. 3, p. 716–725, 2008.

INSTITUTO PAULO MONTENEGRO - AÇÃO EDUCATIVA. **Indicador de Alfabetismo Funcional - Brasil**. São Paulo, 2012.

IÓRIO, V. M. **EDP: Um Curso de Graduação**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

IÓRIO JUNIOR, R.; IÓRIO, V. M. **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução.** Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. vol. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LIMA, E. **Números e Funções Reais** (Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. *et al.* **Temas eProblemas Elementares.** (Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MA, L. **Knowing and Teaching Elementary Mathematics – teachers's understanding of fundamental mathematics in China and the United States**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

MA, L. **Saber e Ensinar Matemática Elementar**. Lisboa: Gradiva, 2009.

MA, L. A Critique of the Structure of U. S. Elementary School Mathematics. **Journal of Mathematics Education.** v. 21, n. 4, p. 1–15, 2012.

MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MARTINS, C. B. O Ensino Superior Brasileiro nos Anos 90. **São Paulo em Perspectiva**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 41–60, 2000.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios**.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

MOREIRA, D.; BROCARDO, J.; BRAUMMAN, C.; PONTE, P. J. A Matemática e Diferentes Modelos de Formação. In: BORRALHO, A.; MONTEIRO, C.; ESPADEIRO, R. **A Matemática na Formação do Professor.** Porto: SPCE- Secção de Educação e Matemática, p. 61-86, 2004.

MOREIRA, P. C. **O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da UFMG. Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (in)variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1.137-1.150, 2012.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **ZETETIKÉ**, Campinas, v.13. n. 23, p. 11-42, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente**. (Coleção Tendências). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 981-1.005, 2013.

MOREIRA, M. A. Al final, que és aprendizaje significativo? **Qurriculum** (La Laguna), v. 25, p. 29-56, 2012.

MOREN, E. B. S.; DAVID, M. M. M. S.; MACHADO, M. P. L.; Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo ensino-aprendizagem.**Cad. Pesqui**. [online]. n. 83, p. 43-51, 1992.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014

NASCIMENTO, T. C. A Criação das Licenciaturas Curtas no Brasil. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, n. 45, p. 340-346, mar. 2012.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

NOT, L. **Ensinando e Aprendendo: Elementos de psicodidática geral**. São Paulo: Summus, 1993.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A.(org.) **Os professores e a sua formação.** Lisboa: Dom Quixote, 1995.

OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA (UNESCO). **Professores do Brasil: impasses e desafios**. Coordenado por Bernadete Angelina Gatti e Elba Siqueira de Sá Barreto. Brasília: UNESCO, 2009.

PALIS JUNIOR, J.; MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1978.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica. Campinas.** Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1989.

PERRENOUD, P. **Construir competências desde a escola**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PERRENOUD, P. **Novas Competências para Ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

REIS, F. S. A tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

ROMANO, R. **Cálculo Diferencial e Integral: Funções de uma Variável**. São Paulo: Atlas, 1983.

SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática.** 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SACRISTÁN, J. G. O que significa o currículo. In: SACRISTÁN, J. G. (org.). **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, p. 16-38, 2013.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, C.; SAIZ, I. *et al.* **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, p. 11-25, 1996,

SAVIANI, N. **Saber Escolar, Currículo e Didática: Problemas da unidade conteúdo/método no processo pedagógico.** 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2003.

SIDKI, S. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Da prática do matemático para a prática do professor: mudando o referencial da formação matemática do licenciando. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 5, n. 7, p. 7-23, 1997.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Rio de Janeiro, 2014.

SCHILLING, S.G.; BLUNK, M.; HILL, H. C. Test Validation and the MKT Measures: Generalizations and Conclusions. **Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives**, v. 5, n. 2, p. 118-127, 2007.

SCHILLING, S. G. & HILL, H. C. Assessing Measures of Mathematical Knowledge for Teaching: A Validity Argument Approach. **Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives,** v. 5. n. 2-3, p. 70-80, 2007.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (org.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1997. p. 79-91.

SCHÖN, D. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher,** v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. *57*, p. 1-22, 1987.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, 2005.

SILVA, T. T. **Documentos de identidade: Uma introdução às teorias do currículo.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SOUZA, C. Políticas Públicas: uma revisão da literatura. **Sociologias**. Porto Alegre, ano 8, n. 16, jul/dez, p. 20-45, 2006.

STYLIANIDES, A. J.; BALL, D. L. Studying the mathematical knowledge needed for teaching: The case of teachers' knowledge of reasoning and proof. **Annual Meeting of the American Educational Research Association,** San Diego, 2004.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional.** Petrópolis: Vozes, 2002.

TRIBUNAL DE CONTAS DA UNIÃO (TCU). **Relatório de Auditoria (Fiscalização nº 177/2013)**. Brasília, 2013.

UNITED STATES. Department of Education. National Center for Research on Teacher Learning. **Final Report: The National Center for Research on Teacher Education**. East Lansing, 1991.

VAINSENCHAR, I. **Introdução às curvas algébricas planas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

VILELA, D. Tendência Profissionalizante da Universidade: o caso da licenciatura em matemática da UFSCar. **Bolema.** Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 955-980, 2013.

ZAIDAN, S. Breve panorama da formação de professores que ensinam Matemática e dos professores de Matemática na UFMG. **ZETETIKE**, Campinas, v. 17, Número Temático, p. 37-56, 2009.

ZIL, D. G.; CULLEN, M., R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Makron Books, 2001.