

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA
A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA**

LUCIMAR DONIZETE GUSMÃO

**A ELABORAÇÃO DE UMA “EPISTEMOLOGIA DA IMAGINAÇÃO E
DA INTUIÇÃO” NO CAMPO DA MATEMÁTICA E IMPLICAÇÕES
PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DIÁLOGOS COM HENRI
POINCARÉ E GASTON BACHELARD**

**MARINGÁ-PR
2018**

LUCIMAR DONIZETE GUSMÃO

**A ELABORAÇÃO DE UMA “EPISTEMOLOGIA DA IMAGINAÇÃO E
DA INTUIÇÃO” NO CAMPO DA MATEMÁTICA E IMPLICAÇÕES
PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DIÁLOGOS COM HENRI
POINCARÉ E GASTON BACHELARD**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de pesquisa: História, Epistemologia e Ética da Ciência.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Coorientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

**MARINGÁ-PR
2018**

G982e Gusmão, Lucimar Donizete

A elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática e implicações para a educação matemática: diálogos com Henri Poincaré e Gaston Bachelard. / Lucimar Donizete Gusmão – Maringá (PR), 2018.

159 f. : il. [algumas color.]: 30 cm.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de PósGraduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Coorientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

1. Matemática. I. Franco, Valdeni Soliani. II. Cifuentes, José Carlos.

III. Título. IV. Universidade Estadual de Maringá.

CDD 510.7

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563

LUCIMAR DONIZETE GUSMÃO

**A elaboração de uma “Epistemologia da imaginação
e da intuição”, no campo da Matemática: *diálogos com
Henri Poincaré e Gaston Bachelard***

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em *Ensino de Ciências e Matemática*.

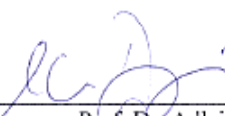
BANCA EXAMINADORA



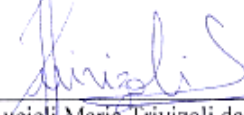
Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM



Profa. Dra. Cláudia Regina Flores
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Profa. Dra. Lucieli Maria Trivizoli da Silva
Universidade Estadual de Maringá – UEM



Prof. Dr. Luciano Carvalhais Gomes
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 26 de Fevereiro de 2018.

À minha família, meus pais, minhas irmãs e ao
meu grande filho Luís Felipe
por acreditarem que posso ir sempre mais
longe do que me proponho a ir.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir que a cada manhã eu possa recomeçar.

Aos meus pais, Nelson e Maria Aparecida Gusmão, por me aceitarem como filha, por sempre terem me ensinado a agir com respeito, simplicidade, honestidade e nunca desistir dos sonhos.

Às minhas irmãs, Rosângela, Ivone e Edna Gusmão, por serem minhas incentivadoras, minhas fãs incondicionais e por torcerem sempre pelas minhas conquistas.

Ao meu filho, Luís Felipe Gusmão Plefh, por me ensinar a ser uma pessoa melhor a cada dia e por entender minhas imperfeições, minhas constantes faltas, ausências, distâncias, reclusões.

Ao Agnaldo Plefh por, mesmo estando mais longe pelos caminhos tomados na vida, sempre apoiou as minhas decisões e me ajudou quando eu pedia socorro.

Aos meus amigos, todos e todas, de perto e de longe, que sempre torceram por mim, me incentivaram, me colocaram para cima nos momentos de desânimo, de tristeza e que depositaram em mim confiança para eu alcançar o horizonte sonhado.

Aos meus colegas de equipe de matemática do Departamento de Educação Básica – DEB/SEED/PR, Abimael Fernando Moreira e Narjara Boppré Philippi, pela parceria, amizade, companheirismo e por entenderem e tolerarem os meus muitos momentos de mau humor, impaciência, ansiedade, cansaços mental e físico.

Aos demais colegas do DEB por torcerem por mim, entenderem os meus muitos momentos de interiorização, de ranzince e por me darem “força” sempre que eu precisava.

Aos meus professores, desde os da primeira série do ensino fundamental até os da pós-graduação, por contribuírem, de alguma forma, com a minha formação.

Ao professor Gerhard Heinzmann, que me aceitou, me acompanhou e me orientou no período em que estive fazendo o estágio de doutorado sanduíche no *Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie*, na Universidade de Lorraine, em Nancy, França.

Aos meus colegas Daniela Prado, Viviane Pimenta, Luiza Lima e Mohammadreza Esmkhani, que em Nancy, França, foram minha família e pelos muitos momentos compartilhados, meus agradecimentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, quem, desde sua participação na minha banca de Mestrado, apontou a importância de aprofundar os conhecimentos sobre a contribuição de Bachelard na visão estética da matemática desenvolvida na dissertação e posterior sugestão da inclusão de Poincaré nessa pesquisa. Meu agradecimento por ter acreditado em mim e no projeto de pesquisa proposto e também por ter aceitado a parceria do Prof. Dr. José Carlos Cifuentes como coorientador nesta pesquisa.

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas

Antoine de Saint-Exupéry

Ao meu coorientador, mestre, educador e, acima de tudo, meu grande amigo e parceiro nesse projeto de pesquisa, prof. Dr. José Carlos Cifuentes, meu eterno agradecimento. Sou privilegiada por ter tido a felicidade de conviver, rir, chorar, poetizar, sonhar com uma pessoa tão generosa, humana, dedicada, responsável e organizada como você: um sábio! E, nos meus momentos de angústias, que foram inúmeros, tinha sempre um jogo de palavras que me permitia encontrar um novo caminho para seguir adiante; que me deixava permanecer no “quarto escuro” o tempo suficiente para o meu aprendizado e crescimento pessoal, profissional e acadêmico. Muito obrigada!

GUSMÃO, L. D. **A Elaboração de uma “Epistemologia da Imaginação e da Intuição” no Campo da Matemática e Implicações para a Educação Matemática**: diálogos com Henri Poincaré e Gaston Bachelard. 2018. 159f. Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

RESUMO

Nesta tese, de natureza teórica, realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá – UEM, houve a proposta de reunir subsídios para colocar, em suas bases epistemológicas, o problema da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática, visando à educação (em) matemática. Este trabalho apoiou-se na epistemologia e na filosofia da ciência de Henri Poincaré e de Gaston Bachelard, pois ambos trouxeram muitas contribuições relevantes nesse campo e para a nossa pesquisa; suas concepções sobre a construção da ciência, a relação com a matemática e o papel da imaginação e da intuição entram em diálogo em suas obras. A imaginação e a intuição, em complemento à lógica, são motores do pensamento matemático, que, por meio de sua dinamicidade, favorece a criatividade na própria matemática e nas outras ciências. Na tese, muito mais que encontrar respostas, buscamos, a partir de uma discussão coerente, colocar em suas bases a questão da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática. Essa discussão, segundo nosso entendimento, deve ser feita por meio de exemplos do campo da matemática. Eles não são meras ilustrações da teoria, mas permitem colocar em movimento as noções que a imaginação e a intuição fazem emergir no pensamento matemático, constituindo-se, assim, como uma metodologia de pesquisa. Ao escolhermos esse percurso metodológico, procuramos dar visibilidade e sustentabilidade ao problema da elaboração dessa epistemologia. Estamos considerando a imaginação e a intuição em sua dimensão epistemológica, isto é, como processos de acesso ao conhecimento matemático, processos de descoberta e criação dentro da dinâmica interna do conhecimento matemático. No contexto apresentado, é importante esclarecermos que, para o início da pesquisa, elaboramos algumas ideias como ponto de partida da discussão e as chamamos de “hipóteses de trabalho”. Assim, associamos, inicialmente, a intuição (matemática) com a descoberta e a imaginação (matemática) com a criação, tornando-se esta um processo construtivo. Imaginar é criar e é um ato livre, mas não é arbitrário. Essa tese, além de trazer contribuições para o campo da própria filosofia e epistemologia da ciência e da matemática, tem implicações para a educação matemática pelo potencial formativo que a imaginação e a intuição imprimem no ensino da matemática, que possibilita trazer também esclarecimentos, reflexões, argumentações e ideias para os professores de matemática, em formação inicial e continuada, permitindo-lhes a elaboração de metodologias inovadoras para o ensino da matemática, no qual a imaginação, a intuição, a criatividade estejam presentes, além do puramente lógico e algorítmico.

Palavras-chave: Educação Matemática; Conhecimento Matemático; Epistemologia da Imaginação e da Intuição.

GUSMÃO, L. D. **The Elaboration of an "Epistemology of Imagination and Intuition" in the Field of Mathematics and Implications for Mathematics Education: dialogues with Henri Poincaré and Gaston Bachelard.** 2018. 159f. Doctorate. Postgraduate Program in Education for Science and Mathematics, State University of Maringá, Maringá, 2018.

ABSTRACT

In this thesis, of a theoretical nature that was carried out in the Postgraduate Program in Education for Science and Mathematics of the State University of Maringá - UEM, there was the proposal gathering subsidies to place, in its epistemological basis, the problem of the elaboration of a "Epistemology of imagination and intuition" in the field of mathematics, aiming at (mathematical) education. This work was based on the epistemology and philosophy of science of Henri Poincaré and Gaston Bachelard, because both brought many relevant contributions in this field and for our research; his conceptions of the construction of science, his relation to mathematics, and the role of imagination and intuition establish dialogue in his works. Imagination and intuition, in addition to logic, are the engines of mathematical thinking, which, through its dynamicity, promote creativity in mathematics itself and in other sciences. In the thesis, much more than finding answers, we seek, from a coherent discussion, to put in its basis the question of the elaboration of an "epistemology of imagination and intuition" in the field of mathematics. This discussion, according to our understanding, must be made through examples from the field of mathematics. They are not mere illustrations of theory, but they allow to put in motion the notions that imagination and intuition do emerge in mathematical thought, constituting itself as a research methodology. When choosing this methodological path, we seek to give visibility and sustainability to the problem of the elaboration of this epistemology. We are considering imagination and intuition in its epistemological dimension, that is, as processes of access to mathematical knowledge, discovery and creation processes within the internal dynamics of mathematical knowledge. In the presented context, it is important to clarify that, for the beginning of the research, we elaborate some ideas as starting point of the discussion and we call them "working hypotheses". Thus, we associate, initially, the intuition (mathematics) with the discovery and the imagination (mathematics) with the creation, becoming this a constructive process. To imagine is to create and it is a free act, but it is not arbitrary. This thesis, besides bringing contributions to the field of philosophy and epistemology of science and mathematics itself, has implications for mathematical education by the formative potential that imagination and intuition give to the teaching of mathematics, which makes it possible to bring clarifications, reflections, arguments and ideas for teachers of mathematics in initial and continuing formation. This will allow them to develop innovative methodologies for teaching mathematics in which imagination, intuition and creativity are presented, in addition to the purely logical and algorithmic.

Keywords: Mathematics Education; Mathematical Knowledge; Epistemology of Imagination and Intuition.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 1 - A IMAGINAÇÃO E A INTUIÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA POR MEIO DE EXEMPLOS: TRAÇOS DE UMA EPISTEMOLOGIA	29
1.1 A intuição generalizante: um exemplo.....	34
1.2 Uma descoberta por intuição: o teorema generalizado de Pitágoras	37
1.3 O hipercubo e a hiperesfera como produtos da imaginação	40
1.3.1 A hiperesfera.....	41
1.3.2 O hipercubo	43
1.4 Relação entre imaginação e intuição: outros exemplos.....	46
1.4.1 O modelo de Klein.....	48
1.4.2 O modelo de disco de Poincaré	49
1.5 As descobertas de Arquimedes: extrapolação do finito para o infinito.....	52
1.6 A Intuição dos números naturais	54
1.7 A intuição do contínuo	57
1.8 Cosmos: um novo olhar sobre a imaginação e a intuição	58
CAPÍTULO 2 - A IMAGINAÇÃO E A INTUIÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO: ALGUMAS CONCEPÇÕES	60
2.1 Sobre a imaginação.....	60
2.1.1 Características da imaginação	60
2.1.2 Baudelaire e a imaginação na dinâmica do pensamento	62
2.1.3 A imaginação e a criação científica.....	63
2.2 Sobre a intuição	66
2.3 Sobre uma filosofia da imaginação em Bachelard.....	69
2.3.1 A imaginação produtora e a imaginação reprodutora em Bachelard.....	76
2.4 A intuição e a lógica em Poincaré.....	78
2.5 Invenção em Poincaré	81
2.6 Algumas contribuições de Kant	84
CAPÍTULO 3 - IMAGINAÇÃO E INTUIÇÃO: UMA REVISITAÇÃO NO PERCURSO DA POÉTICA PARA A EPISTEMOLOGIA.....	87
3.1 Retomando os primeiros passos na elaboração de uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática.....	90

3.2 A síntese, principal instrumento da imaginação e da intuição na constituição do conhecimento.....	93
3.3 A analogia na imaginação e na intuição como forma de raciocínio.....	94
3.4 A racionalidade da imaginação e da intuição	96
CAPÍTULO 4 - POINCARÉ E BACHELARD: DIÁLOGOS PARA UM MARCO NA ELABORAÇÃO DE UMA EPISTEMOLOGIA DA IMAGINAÇÃO E DA INTUIÇÃO	99
4.1 O pensamento de Henri Poincaré sobre o “fazer matemático” e a “filosofia matemática” em interlocução com as ciências	99
4.2 O pensamento de Gaston Bachelard sobre a ciência e a matemática.....	104
4.3 A matemática e a física numa concepção de matemática para a “epistemologia da imaginação e da intuição”	111
4.4 Poincaré e Bachelard em diálogo sobre a relação ciência e realidade.....	117
CAPÍTULO 5 - CONFIGURANDO UMA EPISTEMOLOGIA DA IMAGINAÇÃO E DA INTUIÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA	125
CAPÍTULO 6 - O ENSINO DA MATEMÁTICA PELA IMAGINAÇÃO E A INTUIÇÃO: ASPECTOS FORMATIVOS	129
6.1 Características “formativas” da matemática.....	130
6.2 Visualização em matemática como um recurso epistemológico.....	134
6.3 A criatividade em matemática, um recurso pedagógico	138
6.4 Sobre a pedagogia de Poincaré e de Bachelard	141
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	145
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	153

INTRODUÇÃO

*Há uma lógica colorida,
o pintor só a ela deve obedecer e
nunca à lógica do cérebro.*

Cézanne

Parafraseando Cézanne, podemos dizer que “há uma lógica no devaneio e a imaginação deve sempre obedecer a ela e nunca à lógica da razão”. Essa paráfrase faz referência às duas formas que Gaston Bachelard (1884-1962) contrapõe na procura e fundamentação do conhecimento: a da razão no campo da epistemologia e a do devaneio, no campo da poética.

Ao começar este trabalho, citando e parafraseando Cézanne, queremos mostrar o tom em que a tese foi desenvolvida no campo da matemática, ou seja, há uma alegria na rigidez e uma harmonia na lógica, assim como há uma ordem no devaneio produzido pela imaginação e a intuição e, é nesse espírito, que fomos envolvidos. O poder colorido na variedade da paisagem matemática deve sua existência principalmente ao poder criador das mais variadas construções e demonstrações, nas quais a imaginação e a intuição são as forças propulsoras.

A motivação para esta tese partiu da dissertação de Gusmão (2013), na qual foi realizada a defesa de uma educação matemática que valorize o sensível, uma educação da sensibilidade, uma forma de pensar capaz de desenvolver e refinar as percepções acerca do mundo e das coisas do mundo, inclusive do mundo racional, percepções que também podem envolver a própria matemática, quando enfocada do ponto de vista estético.

Essa dissertação teve a finalidade de trazer subsídios teóricos para fortalecer a relação interdisciplinar entre matemática e arte, ou melhor, entre matemática e estética (entendida esta como a ciência do conhecimento sensível). Nela enfatizou-se a importância de se ascender ao conhecimento matemático por meio dos processos que envolvem, além da razão, também a sensibilidade no campo da matemática e que estão relacionados com a imaginação, a intuição, a espontaneidade, a liberdade e a criatividade.

A apreensão estética na relação da matemática com a arte e outras ciências, apreensão intimamente ligada com a “experiência matemática”, reside na “percepção” dos padrões, da disposição, da ordem, da elegância e da harmonia dos “objetos” em estudo em suas relações mútuas. Essa harmonia ajuda a interpretar matematicamente a natureza e a realidade estudada por essas ciências e, para interpretá-las, é fundamental compreender a matemática de uma forma

mais abrangente, uma matemática em que sejam relevantes, além da lógica, a imaginação e a intuição para a constituição do conhecimento.

A dissertação mencionada aponta para a compreensão da própria arte como uma forma de conhecimento, portanto, susceptível de uma abordagem epistemológica. A partir disso, destacamos que a própria matemática tem uma face estética, ao revelar suas relações com a imaginação, a intuição e a criatividade, capacidades próprias do campo da arte. Segundo nosso entendimento, a matemática, nessa forma alargada de compreensão, também permitiria uma abordagem epistemológica vinda dessa epistemologia da arte, dessa poética transformada em epistemologia.

Nessa perspectiva, entra Bachelard com suas duas vertentes, a “diurna” e a “noturna”, para nos fornecer subsídios para começar a pensar na problemática da pesquisa, pois um dos desafios da tese, o primeiro que nos propusemos, consiste na elaboração de uma “epistemologia da imaginação” no campo da matemática, traduzindo a força da epistemologia “diurna” de Bachelard para a análise da sua poética “noturna”. São as ideias do Bachelard noturno que nos interessam nesta pesquisa, tratando de identificar traços de sua epistemologia científica (o Bachelard diurno) nessa face poética para traduzi-los ao campo da matemática.

Na dissertação ainda, um dos autores mencionados foi Herbert Read (1893-1968) que propõe o “método estético”, uma espécie de razão poética, a qual valoriza a espontaneidade, a liberdade, a sensibilidade no processo de construção de conhecimentos em contraponto à razão científica. Esse método, então, incorpora certos mecanismos da imaginação e da criação, próprios da arte, principalmente o mecanismo ou recurso de “síntese”, para atingir um conhecimento mais integrado, como também Bachelard procura.

Nesse caminhar, tornam-se imprescindíveis os trabalhos do matemático e filósofo Henri Poincaré (1854-1912) para subsidiar esta pesquisa. Do campo da matemática, ele traz para discussão a intuição como forma de acesso ao conhecimento matemático, contribuindo para o entendimento dessa concepção alargada de matemática. A visão de Poincaré está centrada na investigação científica, isto é, na atividade criativa do pensamento em vista dos problemas das matemáticas e das ciências. Ele, segundo comentadores, como, por exemplo, Michel Paty (2010), inaugura uma nova maneira de pensar nas matemáticas e na física matemática, ao lançar as bases da abordagem dita qualitativa na teoria das equações diferenciais, que se interessa, por exemplo, pelos tipos de comportamento das soluções dos sistemas de equações diferenciais, mais do que em explicitar as próprias soluções. Essa nova via de abordagem qualitativa e estrutural revelava mais sobre os sistemas dinâmicos em estudo que as próprias soluções particulares sujeitas aos efeitos de variação das condições iniciais e, assim, finalmente

imprevisíveis. Essa maneira de pensar, esse estilo científico próprio, aponta para uma racionalidade nova como resultado da criação desses novos métodos e objetos matemáticos.

Além disso, as ideias de Poincaré entram em diálogo com as de Bachelard ao encontrarmos ponto de contato ou de convergência, principalmente no que diz respeito a suas concepções de ciência e sua relação com a matemática. Com Poincaré ampliamos, então, o desafio que é a elaboração, agora, de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática. Logo, são as ideias de Poincaré e Bachelard relativas à produção de conhecimentos, suas críticas em relação ao conhecimento científico, à filosofia e história da ciência e da matemática, bem como suas abordagens pedagógicas que nos deram subsídio teórico para a pesquisa.

Desponta-se então o título da tese: *A elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática e implicações para a educação matemática: diálogos com Henri Poincaré e Gaston Bachelard.*

Tratar de “epistemologia da imaginação e da intuição” em matemática só é possível adotando uma concepção de “matemática viva”, dinâmica, movimentando-se na trama do pensamento, não apenas como um corpo estático e rígido de conhecimentos, mas sim como uma forma dinâmica de pensar, como uma atividade, como um processo. Desse ponto de vista, buscamos afastar a crença de que a matemática é puramente lógica e racional, com a rigidez de um pensamento formal. Quando falamos de matemática viva, estamos associando, metaforicamente, seu desenvolvimento aos processos biológicos. A biologia se preocupa com organismos e sobre como os organismos se transformam, geram-se, sofrem mutações; esse comportamento só funciona com “objetos” vivos. Então, os objetos e conceitos matemáticos, segundo nossa concepção, têm essa natureza de organicidade e dinamicidade, nesse sentido, consideramos viva a matemática.

Essa matemática viva, porém complexa, exige, além da lógica, também a imaginação e a intuição para sua compreensão e para seu desenvolvimento. A intensa polissemia dos termos ‘imaginação’ e ‘intuição’, suas múltiplas acepções, bem como seus papéis na construção do conhecimento matemático, em complemento à lógica, nos desafiam e nos colocam em ação diante do problema da elaboração de uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática. Essa epistemologia enseja contribuir para discussões conceituais sobre o papel da imaginação, da intuição, da exclusividade da lógica clássica na construção do conhecimento matemático e das relações entre a matemática, a arte e outras ciências.

A epistemologia de que trata esse trabalho não é a teoria do conhecimento em geral, mas, modernamente, a teoria do conhecimento científico; é a epistemologia do século XX.

Porém, situamos o conhecimento científico com sua racionalidade lógica, especialmente no caso da matemática, entre outras formas possíveis de conhecimento, que envolvem processos ligados à imaginação e à intuição. A “epistemologia é uma reflexão sobre a ciência, do mesmo modo que a estética se tornou essencialmente reflexão sobre a arte e a filosofia moral, uma reflexão sobre a ética” (BLANCHÉ, 1975, p. 147). É uma reflexão crítica sobre e principalmente uma atitude diante do mundo e diante da possibilidade de conhecê-lo (CIFUENTES, 2017). A epistemologia deve ajudar-nos a compreender os processos do conhecer através da ciência e desenvolvê-los, capacitando-nos a julgar criticamente a fidedignidade dos conhecimentos científicos. Nesse processo de conhecer, tanto na matemática como nas ciências intervêm outras formas de atingir o saber que não o puramente lógico. A matemática nesse processo tem a função epistemológica de ser um instrumento para a compreensão do mundo, não apenas um instrumento para aplicação de algoritmos.

A palavra ‘científico’ remete à ciência, a método. As ciências da natureza, por exemplo, a física e a biologia, têm como principal ferramenta a experimentação, já a matemática, nesse contexto, não pode ser considerada como uma ciência de tipo experimental, porém, ela admite um método formal, no qual uma das principais ferramentas é a lógica, e a imaginação e a intuição, formas também possíveis de acesso ao conhecimento, são maneiras de experimentação em matemática ou são manifestações do que poderíamos chamar de “experiência matemática”. Quando provocamos a intervenção da imaginação e da intuição na matemática, estamos aproximando-a das outras ciências, pois essa imaginação e intuição são formas de experiência em matemática, claro que com suas características próprias. Quando falamos de imaginação e intuição como formas de acesso ao conhecimento matemático, precisamos ampliar o conceito de racional, além dos limites que a lógica impõe.

Segundo Cifuentes (2017),

com Pitágoras (séc. VI-V a. C.) e os seus seguidores, os pitagóricos, nasceu a matemática como uma ciência e como uma filosofia, e nasceu a própria filosofia. A Escola Pitagórica via o mundo como um *cosmos*, isto é, como um todo ordenado, uma totalidade harmônica, não apenas física senão também espiritual, um universo inteligível e racional, em contraposição a um mundo desordenado, caótico, irracional, totalidade cujas regularidades são a base da possibilidade de predição do mundo e, em geral, de sua inteligibilidade. A ideia de cosmos como estrutura intrínseca de ordem e harmonia do universo é a base do pitagorismo e é também o início do que pode ser considerado de “caráter matemático”, isto é, da “matematicidade”. Assim como a musicalidade é o substrato da sensibilidade musical, a matematicidade é o substrato da “sensibilidade matemática” [...]. A matemática nasce concebida como a essência do mundo inteligível, com sua função de expressar essa ordem do *cosmos*, tornando-se na linguagem descritiva e explicativa do universo [...]. Com Pitágoras e seus contemporâneos, nasce uma nova forma de contemplar o mundo: através da razão. Nasce o “espírito racional”. Do ponto de vista da razão, mais importante que pensar

que o universo foi criado por “Deus” é pensar que foi criado seguindo certos princípios que estimulam a nossa razão. Esses princípios configuraram a lógica da racionalidade. A razão humana precisa de princípios para funcionar!

Porém, entendemos que a racionalidade não está somente ligada à lógica. E, para compreender esse fato, recorreremos a dois filósofos/matemáticos pré-socráticos que possuíam uma visão diferente, porém complementar, para compreender o mundo: Parmênides e Heráclito (séc. VI-V a. C.).

Segundo Cifuentes (2017):

a) O mundo apolíneo de Parmênides caracteriza-se pela permanência, o absoluto, a perfeição, a verdade, a lógica do verdadeiro e o falso, o racional, o quantitativo, a unidade. O conhecimento desse mundo é objetivo e preciso. Os eventos são determinísticos. A modernidade, a partir do século XVII, expressa essa concepção de mundo pela simplicidade cartesiana.

b) O mundo dionisíaco de Heráclito caracteriza-se pela transformação, a geração e a mutação, o relativo, a incerteza, a imperfeição, a dialética e a retórica do melhor e o pior, o irracional, o qualitativo, a diversidade. O conhecimento desse mundo é subjetivo e impreciso. Os eventos são não determinísticos. Na pós-modernidade, já no século XX, a complexidade está na base da inteligibilidade desse mundo.

A partir disso, podemos associar o mundo de Parmênides ao imutável, ao racional, ao lógico. Enquanto que o mundo de Heráclito associa-se ao fluído, ao irracional, à imaginação e à intuição. O mundo de Heráclito não é oposto ao de Parmênides. Há uma racionalidade no seu mundo, uma racionalidade na irracionalidade. Ele captura a unidade na multiplicidade, no movimento, na transformação. Uma unidade de tensões opostas. Existe uma harmonia oculta das forças opostas que permite capturar uma certa racionalidade no seu mundo, que permite sintetizar, apreender e formular. Nesse aspecto, podemos considerar que há diferentes graus e/ou tipos de racionalidade. A matemática moderna, para a sua compreensão, exige uma multiplicidade de razão, uma nova noção de racionalidade.

Compreender a matemática, principalmente a dos finais do século XIX e a partir do século XX, exige uma “nova matemática”, pois lida com incertezas, com complexidades, tal como o mundo preconizado por Heráclito, e “novos mecanismos” de compreensão que só “a lógica [sozinha] não basta” (POINCARÉ, 1995, p. 20). Portanto, exige uma multiplicidade de razão. Essa nova matemática, na medida em que amplia seu leque de racionalidade, permitirá uma nova lógica subjacente e uma nova epistemologia. É o que nos dá subsídios para a elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática e

para defender outras formas de acesso ao conhecimento nesse campo, possibilitando, também, novas metodologias de ensino da matemática nos diferentes níveis. Além dos padrões racionais da lógica, para compreender essa nova matemática, temos que considerar outros tipos de racionalidade. Há uma racionalidade na imaginação e na intuição, que poderíamos chamar, talvez, de ‘racionalidade estética’.

Quando dizemos, seguindo Poincaré, que “a lógica não basta”, estamos nos referindo à chamada lógica clássica, iniciada por Aristóteles (séc. IV a. C.) que lida com os conceitos absolutos de verdade e de falsidade e suas leis, com fronteiras bem determinadas, com os princípios do terceiro excluído e da não contradição. É a lógica ocidental do sim e do não, a lógica do mundo de Parmênides. Buscar a verdade na ciência atual, na matemática atual, nesse mundo de incertezas, é “estabelecer uma verdade proporcional à medida humana”, tal como expresso por Empédocles (séc. V a. C.). “Isto significa que a evidência procurada não é do intelecto puro: é a exigência da clareza racional, porém aplicadas aos dados fornecidos pelos sentidos” (OS PENSADORES, 2000, p. 27). Nisso intervém a ação humana. O conceito de verdade já não lida mais somente com a lógica, dita clássica, mas com “coisas”, “sentidos” que são de caráter humano. Nesse aspecto, a imaginação e a intuição, faculdades essencialmente do ser humano, assumem um papel importante para apreensão da realidade e para compreensão do mundo.

A lógica por si só não é suficiente para a compreensão dessa “nova matemática”, para a apreensão dessa “nova matematicalidade”, aceitar isso permite-nos incorporar a imaginação e a intuição na discussão desse campo. Então, falar de imaginação e intuição em matemática nos remete falar de conhecimento e formas de acesso. Formas de acesso, em que “conhecimento matemático” remete a uma abordagem epistemológica e “formas de acesso” remetem ao fato de considerar essas capacidades como atos, como ações. Por isso, Poincaré (1995, p. 22-23) diz que “a lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento de demonstração: a intuição é o instrumento da invenção”. Ambas são necessárias e indispensáveis.

A imaginação e a intuição são processos complexos que não podem ser delimitados por meio de uma definição e menos expressos em (poucas) palavras. Elas são noções orgânicas que estão em movimento na teia do pensamento matemático. São como uma bola de basquete ou de futebol, elas não fazem sentido paradas, mas em movimento nos dizem muito sobre o jogo. Nesse sentido, essas noções não estão sujeitas a definições e seu tratamento teórico é possível numa concepção orgânica de matemática. Daí que a concepção de matemática deve ser adequada à incorporação da imaginação e da intuição no seu campo de abrangência, ou seja, a de matemática como organismo. A imaginação e a intuição são partes de um organismo vivo,

são “seres” que respiram, transformam-se e, portanto, não admitem definições fechadas, pois “definir” é encontrar o limite de algo.

Assim, estamos considerando a intuição e a imaginação em sua dimensão epistemológica, isto é, como processos de acesso ao conhecimento matemático, processos de descoberta e criação dentro da dinâmica interna do conhecimento matemático. Não estamos dizendo que a imaginação e a intuição são partes do conhecimento matemático, mas são formas de acesso. Desse ponto de vista, elas não são conhecimento, mas são ações.

Defendemos que imaginação e intuição, dentro dessa concepção de matemática, têm uma certa racionalidade que extrapola a lógica. Ter uma racionalidade é usar a razão “para atingir um certo nível de razoabilidade ou irrazoabilidade” (LEHRER, 2008, p. 325).

No contexto apresentado, é importante esclarecermos o que entendemos por intuição e imaginação no campo da matemática, para tal iniciamos a construção desses conceitos colocando algumas ideias como ponto de partida da discussão e as chamamos de “hipóteses de trabalho”:

1) Propomos associar, primeiro, a intuição às descobertas. Descobre-se algo que já existe, mas que não se tem, necessariamente, acesso de imediato. Por exemplo, sabendo que polígonos regulares de número pequeno de lados têm algumas propriedades comuns, assim, podemos intuir que polígonos regulares com um número elevado de lados têm também a mesma propriedade (“descobrimos” através da intuição essa propriedade que já existe, mas que não “vemos” em forma imediata).

2) Já a imaginação, propomos associá-la à invenção e a criação. No processo inventivo fazem-se construções, ou seja, cria-se algo novo que não existe ainda. É uma forma de construção. Imaginar é criar e é um ato livre, mas não é arbitrário. Talvez a principal finalidade da imaginação é “definir” um objeto novo através de sua criação/construção. Por exemplo, pode-se imaginar (criar) objetos do “mundo” de quatro dimensões ou cinco, extrapolando objetos com duas ou três dimensões, supostamente já constituídos.

É certo que não há uma definição exata (uma verdade absoluta) a respeito do que foi dito acima e que, na atuação da imaginação e da intuição, em alguns momentos, pode haver uma mistura tanto de descoberta como de invenção/criação.

Imaginação e intuição são conceitos complexos que têm forte caráter filosófico, então, defini-los de uma forma simples é um contrassenso, pois tais conceitos estão ligados, dentre tantas questões, com problemas fundamentais relacionados com a epistemologia e também com a cognição humana, portanto, problemas em constante movimento. Podemos, então, refletir sobre o papel da imaginação e da intuição, particularmente, no campo da matemática. Podemos,

ainda, imaginar a imaginação e intuir a intuição nesse campo, mas não defini-las definitivamente.

Logo, na procura da compreensão dos conceitos de imaginação e de intuição, buscamos argumentos e exemplos matemáticos diversos que, de alguma forma, justifiquem suas qualidades teóricas e sua dinamicidade no processo de pensamento matemático. E é na movimentação da imaginação e da intuição que elas nos revelarão seus segredos e os diversos exemplos apresentados vão permitir essa movimentação.

A imaginação e a intuição como tratadas nessa tese apresentam elementos constituídos de uma certa racionalidade, exigem um certo grau de formalização que são expressos por meio de relação, combinação, ordenamento e síntese de ideias, conceitos, teorias etc.

Na matemática, a imaginação e o conhecimento a partir da imaginação, apesar de não estar do lado da objetividade científica, não é um ato trivial, desprovido de toda racionalidade. A imaginação não é apenas o processo de construir ou criar imagens, envolve a realização de sínteses nessa criação.

Com Poincaré e Bachelard, buscamos elaborar uma epistemologia da imaginação e da intuição, no campo da matemática. Ambos trouxeram, como veremos mais adiante, muitas contribuições no campo da epistemologia e filosofia da ciência, em especial suas concepções sobre a construção da ciência, a sua relação com a matemática, relação em que a imaginação e a intuição entram em diálogo com ela; diálogo que é um dos principais motivadores desta pesquisa.

Discutir as contribuições da epistemologia de Poincaré e de Bachelard nos coloca a assumir uma postura filosófica diante do conhecimento a ser (re)elaborado para o campo da matemática e da educação matemática, em interconexão com as outras ciências. Nesse contexto, a matemática é considerada como um fazer, uma forma de pensar, e não só um saber. Sobre essa questão, Cifuentes (2010, p. 20) afirma que ela “é um movimento, fazer matemática é como fazer filosofia, o filosofar, e por que não, no caso da matemática, o matematizar, tendo ambas as atividades uma raiz comum”.

Nas ideias de Poincaré sobre imaginação, intuição, invenção, descoberta, em complemento à lógica, expressa-se, em seus textos, a questão da imaginação, que toma forma na sua filosofia da ciência sob a alcunha de exercício da intuição e é fundamental para a concepção de ciência que esse pensador propõe. Segundo Poincaré (1995, p. 147),

não pode haver nem ciência sem fato científico, nem fato científico sem fato bruto. E então, temos o direito de dizer que o cientista cria o fato científico? Antes de tudo, ele não o cria *ex nihilo*, já que o faz com o fato bruto. Por conseguinte, não o faz

livremente, e como quer. Por mais hábil que seja o trabalhador, sua liberdade é sempre limitada pelas propriedades da matéria-prima sobre a qual opera.

É o cientista que intervém ativamente, escolhendo, por meio de uma liberdade limitada, impulsionado, em muitos casos, pela intuição, os fatos que merecem ser observados, que, posteriormente, devem ser submetidos à verificação. Nesse sentido, vemos que intuição complementa a lógica. A ciência prevê, assim como o cientista deve prever, isto nos permite generalizar (POINCARÉ, 2008). Os fatos nus e crus, já existentes em estado bruto, “não podem ser-nos suficientes: é por isso que precisamos de uma ciência ordenada, ou melhor, organizada” (POINCARÉ, 2008, p. 225), e essa organização não é apenas descoberta, é também construída. Desse ponto de vista, a intuição, associada à descoberta e à imaginação, associada à construção, são formas de organização do conhecimento científico e matemático.

Da vertente noturna de Bachelard, temos um pensador do devaneio, que pautava seu conhecimento na poética, na imaginação e na criatividade. Logo, resgatamos traços de sua epistemologia científica quando ele propõe o termo ‘surracionalismo’, termo tomado da surrealidade da arte, entendido como propulsor da “imaginação criadora”, para alargar a compreensão da própria matemática e multiplicar as formas de pensar o conhecimento científico e matemático.

A “imaginação criadora”, pautada nas leis materiais dos quatro elementos: fogo, água, ar e terra, passam a ter um destaque na epistemologia de Bachelard. Para ele “a imaginação não é, como sugere a etimologia, a faculdade de formar imagens da realidade; ela é a faculdade de formar imagens que ultrapassam a realidade, que cantam a realidade. É uma faculdade de sobre-humanidade” (2013, p. 16).

Segundo Paiva (2005), a imaginação criadora revela-se como um poder de maximizar a inventividade. A ela compete libertar-se das imagens inertes, romper com estados de alma e desrealizar o mundo corporificando o irreal. A imaginação em Bachelard é uma força cuja envergadura supera a condição humana. Suas imagens buscam suplantar o que se oferece à visão, engendrando formas outras, realidades inexistentes.

Essa imaginação criadora nos leva a uma poética. Ciência e poética provêm de “lugares diversos do espírito, mas compete a ambas dar existência ao que não é, desrealizando o real, de modo que as oposições entre elas não obscurecem as similaridades: a abertura para o novo, a recusa da imobilidade, a dinamicidade, a inegável presença do sujeito criador” (PAIVA, 2005, p. 164), ou seja, subsídios para uma epistemologia da imaginação.

Na concepção alargada de matemática, juntos com Bachelard e com Poincaré, entendemos que a lógica pode ser considerada como componente da face “diurna” da matemática e a imaginação e a intuição, como componentes da face “noturna” da matemática.

Falar de “epistemologia da imaginação e da intuição” no contexto da matemática, no qual tradicionalmente a lógica é soberana, é quase um paradoxo, no entanto, a racionalidade da imaginação, da intuição, envolvendo também os processos de criação, que se pretende aqui colocar em evidência, pode possibilitar a elaboração dessa epistemologia e permitir uma melhor compreensão da própria matemática como produtora de saber e de seu papel na educação matemática. Assim, acreditamos que a problemática apresentada, bem como os objetivos propostos são de interesse da ciência, da matemática e da educação matemática.

Entre as implicações para o campo do ensino de matemática, colocamos as ligadas à visualização em matemática a partir de um diálogo entre a epistemologia e a poética. Nesse caminhar, acreditamos que, como acender a luz num “quarto escuro”, a pesquisa poderá elucidar aspectos epistemológicos importantes da visualização, o que permitirá a compreensão da própria matemática e da forma de produção de conhecimento nesse campo, além de fortalecer e impulsionar as relações interdisciplinares entre diversos campos de conhecimento.

Colocar a epistemologia, que está do lado da razão científica, ligada com a imaginação, considerada do lado da razão poética (há uma racionalidade na criação), é já um desafio. Há, então, um pressuposto: a imaginação tem uma racionalidade (o que não deve ser confundido com ter uma lógica) que pode ser subsídio para o conhecimento em matemática. Razão e imaginação não são ações dicotômicas, ambas possuem características semelhantes, de criar significados e produzir conhecimentos para instaurar o que ainda não existe. Razão e imaginação caracterizam-se como criadoras, ativas, abertas e realizantes, como proposto por Bachelard. A imaginação e a intuição são ações que nos permitem descobrir ou construir caminhos e na apreensão da ordenação desses caminhos está a sua racionalidade.

Essa pesquisa teve, como já mencionado, sua motivação nas ideias trazidas por Poincaré e Bachelard sobre intuição e imaginação no desenvolvimento da ciência e da matemática, ideias apontadas pelos professores Valdeni Soliani Franco e José Carlos Cifuentes e que constituíram o projeto da tese. Posteriormente, essas ideias foram discutidas no estágio de doutorado sanduíche desenvolvido no *Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie – Archives Henri Poincaré*, ligado à Universidade de Lorraine, em Nancy, na França, no ano de 2017, sob a orientação do professor doutor Gerhard Heinzmann.

Na França, tangenciamos, como apoio às nossas discussões, as ideias de Kant sobre imaginação e, principalmente, sobre intuição, nas quais Poincaré, entre outros, “bebeu”. Mas como intervém Kant em toda essa discussão?

Apesar de não ser nosso foco tratar das ideias desenvolvidas por Kant, não podemos deixar de revisitá-lo, pois “se pode estar em desacordo com ele, porém o que não se pode fazer é deixar de dar respostas às perguntas que ele elabora” (TORRES ALCARAZ, 2005).

Kant sempre foi a referência (positiva ou negativa), pautada fortemente na geometria euclidiana de pensadores da matemática nos finais do século XIX e princípios do século XX, como por exemplo, Bolzano, Brouwer, Helmholtz, Poincaré, Riemann, Russell, entre outros. Mas será que podemos ainda usar a matriz Kantiana para compreender os processos de imaginação e de intuição na matemática atual, ou seja, agora com a inclusão das geometrias não-euclidianas, por exemplo? Podemos, em outras palavras, adaptar as concepções de Kant no contexto atual? Qual a contribuição mais importante de Kant para a matemática a partir do século XIX?

Torres Alcaraz (2005) nos dá um indicativo, afirmando que Kant vê nas proposições matemáticas verdades necessárias. No entanto, ao contrário de Leibniz, Kant não vê nelas proposições analíticas, isto é, puramente lógicas. Em sua opinião, as proposições matemáticas não são seguidas necessariamente de análises dos conceitos aí contidos; elas são, portanto, sintéticas, porém, *a priori*.

Segundo Torres Alcaraz (2005), Kant avança na direção de pensar que existem proposições que não são puramente lógicas. É o que ele chama de proposições ‘sintéticas *a priori*’, não são analíticas puramente como Leibniz pensava, tampouco sintéticas *a posteriori*, nem derivam delas, pois não provém da experiência, entendida no sentido empírico. Então, a necessidade de se pensar as proposições matemáticas como sendo sintéticas *a priori* é porque nessa condição elas permitem misturar a lógica com a intuição. Nesse tipo de proposição, Kant dá abertura à intuição matemática como sendo importante para a matemática.

O que devemos resgatar da discussão anterior é que as proposições sintéticas *a priori* não são consequência da análise, mas de uma construção. É o que afirma Kant, segundo Torres Alcaraz (2005), a matemática é sintética porque seus resultados se obtêm realizando construções. A matemática é *a priori* porque suas construções não são empíricas (por isso os geômetras podem afirmar a validade do resultado com relação a todas as intuições correspondentes ao conceito).

Assim, movidos pelo senso da beleza e da sensibilidade estética, apontamos, a seguir, a problemática e os objetivos da pesquisa.

Problemática da pesquisa:

Colocar em bases epistemológicas o problema da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática, visando à educação (em) matemática.

Os objetivos da pesquisa:

- Colocar a imaginação e a intuição matemáticas na dimensão epistemológica, isto é, como formas de acesso ao conhecimento matemático por meio de exemplos que ponham em evidência sua dinamicidade no processo do conhecimento matemático.
- Buscar subsídios para elaborar uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática, envolvendo as ideias desenvolvidas por Poincaré e Bachelard (“diurno” e “noturno”);
- Levantar, do ponto de vista conceitual, usando a “epistemologia da imaginação e da intuição”, aspectos da interdisciplinaridade entre a matemática, a arte e outras ciências.
- Ressaltar os aspectos formativos da imaginação e da intuição na formação de professores de matemática.

Assim, a realização desses objetivos podem trazer para os professores de matemática em formação (inicial e continuada) esclarecimentos, reflexões, argumentações e ideias que possam contribuir na elaboração de metodologias inovadoras para o ensino da matemática em que a imaginação e a intuição estejam presentes, pois, além da formação matemática promovida, é necessário desenvolver uma cultura matemática que reflita o verdadeiro pensamento matemático e científico contemporâneos. Também estimular e fortalecer os estudos sobre a interdisciplinaridade entre a matemática, a arte e as outras ciências, além de contribuir para uma melhor compreensão do conhecimento matemático no campo da educação matemática. Podem ainda ser criados subsídios para se repensar a incorporação da matemática do século XX no ensino básico, como por exemplo, as geometrias não-euclidianas (hiperbólica e elíptica), a topologia etc., que requer essa nova epistemologia.

Finalmente, intenciona-se esclarecer em que medida os estudos filosóficos, no campo da Educação Matemática, são “formativos”, para dar uma contribuição a um melhor

entendimento e sustentação da expressão “formação de professores”, pois a eles vão direcionados os resultados desta pesquisa.

Somos cientes da dificuldade da problemática e, portanto, antes de pretender solucionar em forma definitiva os problemas esboçados (ou levantados), buscaremos colocá-los em suas bases, isto é, fundamentá-los adequadamente para um posterior tratamento.

Percursos metodológicos

A pesquisa, de natureza teórica básica e exploratória, na medida em que procura caminhos inovadores, constitui-se um processo de formação do próprio pesquisador. Mais do que uma metodologia estanque, com regras rigidamente estabelecidas, ela foi configurada ao longo da investigação. Ao criar o percurso da pesquisa, criou-se seu modo de fazê-la. Criar um percurso metodológico requer ir além de regras pré-estabelecidas, requer também criatividade, imaginação e intuição; requer ser reinventado. O pesquisador, às voltas com o processo de organização da pesquisa, acaba por processar-se a si mesmo, realiza-se um processo de descoberta e de invenção.

Na tese, muito mais que encontrar respostas, buscamos, a partir de uma discussão coerente, colocar em suas bases a questão da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática. Essa discussão, segundo nosso entendimento e como já mencionada, deve ser feita por meio de exemplos do campo da matemática. Os exemplos, no nosso caso, não são meras ilustrações da teoria, mas permitem colocar em movimento as noções de imaginação e intuição no pensamento matemático, constituindo-se como uma metodologia de pesquisa, justificando as diferentes ideias e conclusões apresentadas na tese. Ao escolhermos esse percurso metodológico, procuramos dar visibilidade e sustentabilidade ao problema da elaboração dessa epistemologia.

Bachelard e Poincaré, em muitos momentos de suas obras, utilizam exemplos para ilustrar, esclarecer e explicar suas ideias. No entanto, não são exemplos quaisquer, mas aqueles que são portadores de certas características que podem levar ao conhecimento. “Acreditamos que os exemplos precisos emprestados do conhecimento científico [e matemático] podem sensibilizar as discussões filosóficas gerais” (BACHELARD, 1966, p. 18). Os “exemplos se apresentam por si sós ao espírito” (POINCARÉ, 1995, p. 50). Ainda, “os exemplos abundam, e me limitarei aos mais impressionantes” (POINCARÉ, 1995, p. 92). E continua, “é preciso que o matemático tenha trabalhado como artista. O que lhe pedimos é que nos ajude a ver, a discernir

nosso caminho no labirinto que se nos oferece. Ora, quem vê melhor é aquele que mais ascendeu” (POINCARÉ, 1995, p. 92).

Nesse aspecto, os exemplos, desde que devidamente selecionados e interpretados, são os portadores das qualidades dinâmicas da intuição e da imaginação no campo da matemática e, além disso, propõem-se discutir a sua dimensão epistemológica em uma compreensão alargada da matemática. Os exemplos, portanto, são as nossas principais ferramentas metodológicas, pois permitem movimentar as ideias e mostrar suas diferentes facetas dentro da concepção dinâmica da matemática.

Desse ponto de vista, entendemos que a metodologia de pesquisa baseada em exemplos pode configurar-se como um método, com características próprias não rígidas, que reflete o pensamento matemático em movimento, como em um organismo vivo, pensamento que, como apontado por Poincaré (1988), representa não coisas, mas relações entre coisas, uma ontologia adequada, como veremos, para a imaginação e a intuição matemáticas.

Deste modo, os exemplos utilizados na pesquisa descrevem, discutem e interpretam os processos de elaboração e formas de conhecimento no campo da matemática. Constituem-se como um meio de representação do conhecimento; organizam, mostram ideias, hipóteses e proporcionam informações estéticas sobre esses processos. Os exemplos, aqui escolhidos, em decorrência do processo exploratório da pesquisa, procuram desvelar a “realidade” representada que sem eles continuaria oculta ou seria mais difícil de desvendar em outras perspectivas de investigação. Eles constroem argumentos, apresentam, discutem hipóteses e sustentam visualmente o desenvolvimento conceitual de uma investigação, formulando perguntas, descrevendo situações. A credibilidade dos exemplos e sua validação como método não está na representação de uma teoria ou de ideias matemáticas, mas na amplitude e clareza que os conceitos expressam. Nesse aspecto, o pesquisador é colocado em estado de invenção, atento ao processo de criação, captando a unidade na multiplicidade, em uma espécie de síntese. A dimensão epistemológica e estética da metodologia com exemplos possibilita novas interpretações e novos olhares para essa “nova matemática”, uma matemática que incorpore a imaginação e a intuição nos seus processos dinâmicos de construção do conhecimento matemático.

No percurso metodológico adotado, tomamos o princípio da descontinuidade proposto por Lescure para a decodificação de Bachelard, que pressupõe ser necessário

saber destruir e construir sua ordem vivida, ler para trás e para a frente, ao acaso e em todos os sentidos, provocar suas surpresas, colocá-la em perspectivas inesperadas, talvez em si mesma, lê-la e relê-la, e voltar a relê-la, indefinidamente, como um poema

que nunca se esgota em seus significados (LESCURE apud BACHELARD, 1999, p. 120, tradução nossa)

Essa “desconstrução” e “reconstrução”, como espírito geral da pesquisa, foram feitas naquilo que foi necessário ou possível de realizar.

E Lescure pergunta: “haverá um método do inconsciente? Ou antes bem, se se quer passar a um inconsciente inteiramente psicológico, haverá um método do imaginário?, [...] A polêmica me desperta, me disse [Bachelard] um dia” (LESCURE apud BACHELARD, 1999, p. 112, tradução nossa).

Na sequência ele diz, segundo Bachelard “toda ação se constitui em método. Toda decisão é uma maneira de ser” (LESCURE apud BACHELARD, 1999, p. 113).

Ainda sobre o método, Lescure afirma que:

o método não é nenhum livro de receitas. É a vida mesma. Tu, filósofo, aprenderás a escutar o poeta, “fenomenólogo nato”; tu, poeta, deverás discernir as razões e os caminhos difíceis pelos que é possível afastar a poesia das escórias e das reminiscências que a matam, e atuar de sorte que, “apesar da vida”, um homem seja poeta. Pois o poeta não nasce, mas se faz (LESCURE apud BACHELARD, 1999, p. 114, tradução nossa).

Já finalizando o capítulo, ele diz,

para o espírito enamorado de saber e viver, antes que nada todo conhecimento é falível e toda vida está ausente. [...] Há um caminho da ciência e um da poesia. Sem nunca ter-se obstinado em reconciliar seus poderes diurnos com suas potências noturnas, Bachelard sinalizou que homem sábio ou poeta, não é um ser dado. O homem se faz. Como em poesia, “todo progresso real do pensamento científico necessita uma conversão” (LESCURE apud BACHELARD, 1999, p. 134, tradução nossa).

Assim, com bases nesses argumentos, há um caminho da ciência e um da poesia, porém, para a formação desse homem, já que ele não é um ser dado, pronto e acabado, mas em constante formação e transformação, toda ação constitui um método. Dessa forma, entendemos que uma metodologia baseada em exemplos captura esse movimento e essa dinamicidade do ser.

Desse modo, buscando respaldo também na arte, temos que: Claude Monet, um dos iniciadores do Impressionismo na arte (na segunda metade do século XIX), nos mostra, com sua série *A Catedral de Rouen*, que a apreensão da realidade por mecanismos da arte não é objetiva. Ele, capturando diversos instantes com luminosidades diferentes, nos aproxima da “realidade” da Catedral através de suas diversas facetas e nos ensina que essa realidade deverá ser uma síntese de todos esses casos particulares. Assim, o nosso conhecimento sobre a imaginação e a intuição deverá ser uma síntese dos subsídios que os exemplos nos forneçam.

Os mecanismos da intuição e da imaginação, assim como os da arte, sejam pela descoberta ou pela invenção, só podem nos dar essa aparência de realidade em sua multiplicidade, porém unificadas por um processo de síntese. Uma unidade na multiplicidade.

Os exemplos podem ser considerados como diversas “tomadas” que, com sua vontade de sistematização, beiram uma metodologia de pesquisa sobre as características da intuição e da imaginação no campo da matemática.

Para aproximar o conhecimento científico do poético na epistemologia é necessário encontrar um ponto médio: podemos caracterizar o conhecimento que vem da imaginação como “pré-científico”, definindo também adequadamente esse termo. A procura de uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática, a partir da dinamicidade da própria matemática, como propõe Bachelard para a ciência, torna-se uma metodologia de pesquisa no próprio caminhar desse trabalho.

A partir dessas primeiras reflexões, propõe-se a seguinte estrutura para esta tese:

No capítulo 1, *A imaginação e a intuição no campo da matemática por meio de exemplos: traços de uma epistemologia*, iniciaremos a nossa discussão com as duas “hipóteses de trabalho” já mencionadas e apresentaremos diversos exemplos do campo da matemática que justificam e colocam em evidência o papel da imaginação e da intuição no processo de descoberta e criação na organicidade do conhecimento matemático. A imaginação e a intuição, além da lógica, são tomadas na tese em sua dimensão epistemológica, isto é, como capacidades que permitem ascender ao conhecimento matemático.

No capítulo 2, *A imaginação e a intuição no desenvolvimento do conhecimento matemático: algumas concepções*, apresentaremos visões de diversos autores a respeito da imaginação e da intuição, o que nos permitirá desvelar algumas características dessas capacidades, possibilitando uma compreensão ampliada da própria matemática. Tais visões e características apontadas nos darão argumentos para pensar em uma abordagem dinâmica do pensamento matemático, em que a imaginação e a intuição são constituintes desse processo. Além disso, traremos as próprias concepções de Bachelard e de Poincaré a respeito da imaginação e da intuição na construção do conhecimento científico e matemático.

No capítulo 3, *Imaginação e intuição: uma revisitação no percurso da poética para a epistemologia*, apresentaremos a motivação para a elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática e retomaremos os primeiros passos para essa elaboração, situando, principalmente, o papel da síntese e da analogia, interpolados pela imaginação e a intuição, como formas epistêmicas de acesso ao conhecimento matemático.

No capítulo 4, *Poincaré e Bachelard: diálogos para um marco na elaboração de uma epistemologia da imaginação e da intuição*, apontaremos algumas características da epistemologia desses dois filósofos, suas relações com a ciência, especialmente a física e a matemática, com vistas a “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática. A partir disso, buscaremos realizar um diálogo, quando possível, entre suas ideias e concepções de ciência e de matemática, do papel que a imaginação e a intuição assumem nessas ideias e como essas capacidades intervêm, para eles, no processo de construção do conhecimento científico e matemático.

No capítulo 5, *Configurando uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática*, organizaremos as diversas características epistemológicas da imaginação e da intuição que os exemplos analisados no capítulo 1 nos “revelam”, assim como a racionalidade por trás desse processo.

No capítulo 6, *O ensino da matemática pela imaginação e a intuição: aspectos formativos*, apresentaremos certos posicionamentos epistemológicos, estéticos e pedagógicos de Poincaré e Bachelard no processo formador e estruturador do espírito, em que, além da lógica, intervêm a imaginação, a intuição e a criatividade. A visualização em matemática é tratada, nesse capítulo, como recurso epistemológico, salientando a necessidade de “ver” além da percepção imediata. A criatividade, tratada nesse capítulo como um recurso pedagógico, permite, associada à imaginação e à intuição, em complemento à lógica, compreender a própria matemática e seu ensino.

Nas *considerações finais*, que não necessariamente é “o final”, realizaremos um relato sobre o percurso da pesquisa no “quarto escuro” e apontaremos alguns direcionamentos para futuras pesquisas, pois há sempre “cantos” a serem iluminados nesse “quarto”.

Sabemos que ainda há muito para fazer, mas nos colocamos a caminho, pois, parafraseando o poeta espanhol Antonio Machado, “o caminho faz-se caminhando”.

Esse é o desafio! Um belo desafio!

CAPÍTULO 1

A IMAGINAÇÃO E A INTUIÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA POR MEIO DE EXEMPLOS: TRAÇOS DE UMA EPISTEMOLOGIA

A ideia de que a matemática é pautada somente no raciocínio lógico-dedutivo, em que os encadeamentos lógicos das demonstrações são a essência do pensamento matemático é uma ideia parcial, segundo nossa concepção, dos processos constitutivos da matemática, pois há nesses processos a intervenção da imaginação, da intuição, da criatividade, de recursos da visualização, entre outros aspectos ligados não diretamente e somente à lógica, mas também à sensibilidade matemática. O raciocínio lógico-dedutivo, nesse processo, legitima as ideias e formaliza o conhecimento adquirido inicialmente por meio desses outros recursos.

Como dito na introdução, assumiremos como “hipóteses de trabalho” as seguintes:

- 1) Associaremos a intuição (matemática) com a descoberta e,
- 2) Associaremos a imaginação (matemática) com a criação.

A associação da intuição com a descoberta implica que aquilo que se descobre existe em algum sentido, e a associação da imaginação com a criação supõe que o que está sendo imaginado não existe, porém será construído, construção que não é arbitrária, como no caso de uma ficção literária.

Por exemplo, tratando de intuir quantas diagonais tem um polígono regular de n lados, primeiro observamos que, nos casos mais simples, temos o seguinte: um triângulo tem 0 diagonais, um quadrado tem 2 diagonais, um pentágono tem 5 diagonais, um hexágono tem 9 diagonais. Há indícios de uma regularidade presente que poderia ser expressa por uma fórmula que determina qual o número de diagonais em cada caso e desejamos “descobrir” essa fórmula para o caso geral de n lados.

Para tanto, ajudamos nossa intuição, revelando-lhe o processo de encontrar sistematicamente o número de diagonais em um caso genérico. Esse processo consiste no seguinte: primeiro, fixando um vértice, “vemos” que daí saem $n - 3$ diagonais (desconsiderando o próprio vértice e os dois consecutivos); segundo, como isso pode ser feito com cada vértice, teremos então $n(n - 3)$ diagonais; terceiro, porém, advertirmos que, no estágio anterior, cada diagonal é repetida duas vezes (considerando o vértice de partida e de chegada), o que nos dá, finalmente, $\frac{n(n - 3)}{2}$ diagonais.

A fórmula obtida para o número de diagonais nos fornece apenas uma conjectura sobre a resposta procurada, que deverá depois ser demonstrada por algum método lógico.

Com esse processo temos intuída a fórmula que determina o número de diagonais para qualquer polígono regular dado, fórmula que pode ser corroborada nos casos mais simples.

Aproveitamos esse exemplo, ainda, para salientar algumas das características desse processo de descoberta por intuição.

Primeiro, a intuição é diferente da percepção, aliás, a intuição não é uma percepção do imediato, mas é uma “visualização” (uma espécie de percepção de ordem superior) do geral, apesar de que, no processo argumentativo, lida-se com um caso chamado “genérico”. Essa visualização do geral já nos revela que o que está sendo intuído não são as próprias coisas, senão as relações que as determinam, como pensado por Poincaré.

Assim, a partir de determinadas regras, leis, propriedades etc., há uma “realidade de relações” subjacente que permite novas descobertas. Hadamard (2009, p. 13) afirma que “descoberta refere-se a um fenômeno, uma lei, um ser vivo que já existia, mas que não havia sido percebido: Cristóvão Colombo descobriu a América, mas ela já existia antes dele”. “Descobrir é a única maneira ativa de conhecer. Mas essa descoberta não pode permanecer contingente, deve ser sempre repensada para se afirmar em conexões racionais. Qualquer dialética, mesmo aquela trazida por uma nova descoberta, impõe uma assimilação racional” (BACHELARD, 1966, p. 54, tradução nossa). Poincaré (1995, p. 7), referindo-se aos trabalhos dos matemáticos, coloca que “os próprios matemáticos não se parecem entre si; uns só conhecem a implacável lógica, outros recorrem à intuição e veem nesta a fonte única da descoberta”.

Agora, no caso da imaginação, ela estará associada, como já dito, à criação/construção de um objeto novo.

Por exemplo, se nos colocamos o problema de construir um “mundo” geométrico tetradimensional, seus objetos poderiam ser definidos de diversas maneiras, no entanto, a escolha da definição mais “adequada” não será arbitrária e deverá ser pautada nas características dos objetos correspondentes em dimensões menores. Vejamos, por exemplo, qual será a definição do que chamaremos de hiperplano? Para tanto, nos guiaremos pelos correspondentes em dimensões dois e três.

Aventamos a ideia de que os correspondentes ao hiperplano tetradimensional são o plano tridimensional e a reta bidimensional.

No caso do bidimensional, a equação cartesiana de uma reta é da forma: $ax + by = c$, onde a , b e c , são números reais constantes. No caso tridimensional, a equação cartesiana de

um plano é da forma, $ax + by + cz = d$, onde a, b, c e d são constantes. A analogia nos sugere que, no caso tetradimensional, a equação cartesiana (com 4 coordenadas x, y, z e w) deverá ser da seguinte forma $ax + by + cz + dw = e$, sendo a, b, c, d e e constantes.

Essa suposta fórmula cartesiana para um hiperplano não é descoberta, ela se cria baseada nas analogias que permitem configurá-la e também não é uma criação arbitrária, pois a analogia fornece as regras. Aqui também são as relações que determinam o objeto/conceitos criado/construído. Esse exemplo também nos mostra que imaginar, no sentido que estamos adotando, não é trazer uma imagem à mente, é criar um objeto abstrato através de suas determinações conceituais.

Esse exemplo também vai nos mostrar que, uma vez construído o objeto, a intuição vai nos permitir descobrir outras propriedades desse objeto que não faziam parte de suas relações iniciais constitutivas.

Por exemplo, uma propriedade importante que o plano tridimensional e a reta bidimensional têm é a seguinte: eles dividem o espaço em duas partes desconexas, de modo que, unindo com um segmento de reta um ponto de uma das partes com outro ponto da outra parte, esse segmento deve atravessar o plano tridimensional ou a reta bidimensional dados. Deixamos ao leitor verificar que isso mesmo acontece com o hiperplano. Da mesma forma, podemos intuir que o vetor (coordenadas a, b, c, d), formado pelos coeficientes das variáveis x, y, z e w na equação do hiperplano, sinaliza a única direção perpendicular ao hiperplano, o que também pode ser verificado facilmente.

Na medida em que a intuição foi colocada ao lado da descoberta e a imaginação ao lado da criação, isso implica uma outra hipótese de trabalho: nós consideramos que a intuição assume traços do realismo e a imaginação do antirrealismo, isto é, a realidade a ser intuída é *a priori* enquanto a realidade a ser imaginada é *a posteriori*.

É certo que não há uma definição exata (uma verdade absoluta) a respeito das nossas hipóteses de trabalho e que, na atuação da imaginação e da intuição, pode haver uma mistura tanto de descoberta como de invenção/criação, como os exemplos acima mostram.

Assim, consideramos que não existe uma via racional e única para construir conhecimento no campo da matemática. Assim como a imaginação e a intuição são, também, faculdades que permitem descobrir aquilo que é desconhecido e criar “coisas” novas com as limitações que a liberdade da matemática na modernidade nos permite.

Poincaré situa-se nesta perspectiva, propondo, nos seus trabalhos, de maneira direta ou indireta, uma reflexão filosófica sobre o pensamento matemático, concebendo-o tanto na dimensão de racionalidade quanto naquela de um pensamento que, pretendendo a

inteligibilidade, é conduzido a ultrapassar o que é dado, quer dizer, a inventar, a criar. Seu interesse na filosofia dirige-se aos aspectos criadores do pensamento científico, um pensamento científico criativo concebido em uma perspectiva racional (PATY, 2010).

Um conhecimento novo não está inscrito com anterioridade em um céu de ideias e sob uma única forma possível, mas é fruto de um processo de descoberta/criação pelo pensamento, constituindo uma ontologia em potência. E, na verdade, existe muito de racionalidade nesse processo, passa pelas exigências de inteligibilidades particulares, mas o resultado obtido transcende, necessariamente, essas últimas, e propõe-se imediatamente como objetivo e universal (PATY, 2010), porém, objetivo e universal nessa ontologia.

Subjacente à ideia de descoberta, particularmente em relação aos conhecimentos do campo da matemática e das ciências naturais, está a naturalidade da coisa descoberta, já presente em potencial que nos é dada ao termo de um processo de pensamento, mas que ainda não está identificada e que, sobretudo, não está realmente inventada (PATY, 2001). Da mesma forma, a ideia de criação de algo novo reporta-se às atividades que provêm diretamente da imaginação, apoiada, por exemplo, no recurso de analogias como vimos.

Gurgel e Pietrocola (2011b) disseram que, na indução e nos processos imaginativos, a palavra ‘descoberta’, como normalmente a utilizamos, privilegia o objeto, que está pronto em suas regularidades à espera que alguém construa um caminho de acesso até ele. Já a palavra ‘criação’ demonstra uma maior subjetividade, pois envolve uma “nova forma”, uma parcela do mundo atribuindo características à mesma, que se apresenta ao olhar do indivíduo. Isso faz com que o indivíduo tenha uma participação ativa no processo. Em um processo imaginativo, o sujeito tem um papel maior na criação científica, pois mesmo a percepção de uma regularidade ou a proposição de uma simetria pode ser criada por ele e não demonstrada pela natureza.

Segundo Paty (2010), para Poincaré o processo de invenção comporta fases sucessivas do pensamento, alternando o trabalho consciente, voluntário e racional com as fases de pensamento semiconsciente, que não são resolúveis analiticamente, mas é sempre o pensamento consciente e sua colocação de problemas (com suas formulações de natureza racional) que continua a guiar o movimento do pensamento, mesmo ao longo das fases inconscientes, em seu jogo com os símbolos que representam os conceitos. Sem poder recorrer às reminiscências dos momentos da invenção, no sentido estrito, de Poincaré, momentos do surgimento de uma ideia que jamais foi pensada antes e que nunca nos serão dados com os segredos de sua subjetividade, restam-nos as obras escritas, pelas quais poderemos tentar retratar os caminhos da inteligibilidade seguindo a sua própria marca que é aquela de seu estilo de pensamento. E isso

tanto mais que, em Poincaré, a redação parece frequentemente reproduzir, em sua espontaneidade, o movimento do pensamento inventivo.

Bachelard (1996, p. 303), referindo-se às características pedagógicas do descobrir/inventar, afirma que, “para ensinar o aluno a inventar, é bom mostrar-lhe que ele pode descobrir”.

O debate, já apontado por Bachelard, sobre os processos de imaginação e de intuição, na construção do conhecimento matemático, e implícito nas nossas hipóteses de trabalho, deve ser feito, segundo nosso entendimento, através de exemplos representativos que mostram ambas as faces.

Na história da matemática encontramos muitos exemplos que ilustram o papel da imaginação e da intuição no processo de elaboração de conhecimentos. A escolha dos exemplos, assim como as argumentações pertinentes, tornam-se um método de pesquisa importante, como já dissemos, para justificar as diferentes conclusões, contribuindo, na sequência, para uma discussão pedagógica que poderá fortalecer o papel da matemática no ensino e suas diferentes relações interdisciplinares.

Estamos considerando a intuição e a imaginação em sua dimensão epistemológica, isto é, como processos de acesso ao conhecimento matemático, processos de descoberta e criação dentro da dinâmica interna do conhecimento matemático, envolvendo a gênese e evolução das ideias. A imaginação e a intuição nos dão acesso não apenas às formas, senão também ao movimento das formas.

A imaginação ligada à invenção, como já dito, permite criar algo novo, sendo, portanto, um ato livre. Nessa medida, as suas escolhas requerem o concurso da intuição. Uma das finalidades da intuição é a elaboração de “conjecturas” (que requerem uma demonstração posterior). Quando dizemos que a imaginação é um ato livre, estamos atribuindo a ela uma característica que a arte também tem. Imaginar/inventar/criar/construir é um processo artístico, não é um raciocínio lógico.

Mas como a intuição, a partir do senso estético, pode ser um guia para a descoberta?

O primeiro passo é o estabelecimento de conjecturas. As conjecturas são proposições que os matemáticos acham verdadeiras, isto é, a expressão de um “fato”, porém, ainda não conseguiram prová-las. Elas são uma espécie de “pré-teoremas” que resultam da intuição, mas que requerem uma demonstração para se consolidar como verdades matemáticas.

Recorremos, então, a alguns exemplos de caráter numérico e geométrico que nos mostram que a intuição pode nos conduzir à verdade matemática por meio do estabelecimento prévio de “conjecturas”:

a) O *Último Teorema de Fermat*, elaborado como conjectura pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665), em 1637, afirma que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos, não-nulos para x , y , z , n com n maior que 2, que satisfaça a equação $x^n + y^n = z^n$. Essa conjectura, elaborada por Fermat a partir da análise de vários exemplos particulares, só foi demonstrada em 1995, pelo matemático inglês Andrew Wiles, consolidando-se então como um teorema da matemática.

b) A *Conjectura de Goldbach* foi elaborada pelo matemático prussiano Christian Goldbach (1690-1764). Ela diz que todo número par maior ou igual a 4 é a soma de dois números primos (diferentes de 1): $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 7 + 3 = 5 + 5$; Apesar de simples, essa conjectura ainda não foi demonstrada, porém uma versão fraca dela foi demonstrada em 2013, pelo matemático peruano Harald Helfgott.

c) A *Conjectura dos Números Primos Gêmeos*. Essa conjectura parte da pergunta: existem infinitos pares de primos da forma $(p, p + 2)$ com $p \geq 3$? Em outras palavras, existem infinitos pares de primos gêmeos ímpares (dois números ímpares consecutivos), como 3 e 5; 5 e 7; 11 e 13; ...? Assim como a Conjetura de Goldbach, a conjectura de que existem sim infinitos primos gêmeos encontra-se sem demonstração.

Esses três exemplos mostram-nos como funciona a intuição numérica, ela faz-nos “perceber” a possível verdade de uma conjectura através de exemplos particulares. Porém, para consolidá-la, é preciso buscar sua demonstração por meio de argumentos lógicos. Uma demonstração deve exprimir as intuições subjacentes.

A seguir exporemos um exemplo de caráter geométrico e qualitativo, na qual a intuição também atua:

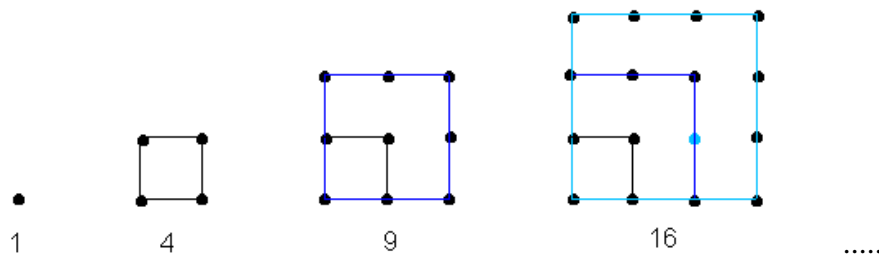
O chamado *Teorema das Quatro Cores* foi formulado no século XIX como conjectura, pelo matemático britânico Francis Guthrie (1831-1899), mas demonstrada apenas em 1976 e com uso de tecnologias computacionais. Trata-se da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa plano, de países reais ou imaginários, de forma que países com fronteira comum não poderiam ser pintados com a mesma cor. Francis Guthrie conjecturou que quatro cores era esse número mínimo. Embora simples, levou mais de cem anos para provar que realmente a conjectura estava certa. Porém, apesar de ter sido incorporada como teorema na matemática, ainda se questiona o rigor lógico da demonstração pelo recurso do uso de computadores.

1.1 A intuição generalizante: um exemplo

Frequentemente se associa a intuição com um conhecimento que é, de alguma forma, imediato, porém, vamos questionar essa associação, apresentando exemplos em que a intuição, como a concebemos, não necessariamente é imediata, apesar de não ser discursiva.

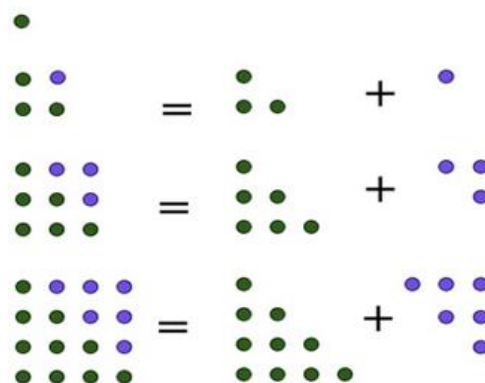
Analisemos os números quadrados de Pitágoras, por exemplo, a sequência 1, 4, 9, 16,... é constituída pelos chamados números quadrados ou quadrados perfeitos (denominação que ainda preservamos) dos primeiros inteiros positivos.

É através da representação geométrica desses números que é possível encontrar, intuir, algumas leis que governam a sequência. Por exemplo, no caso dos números quadrados, podemos perceber que cada um deles é a soma dos números ímpares consecutivos começando em 1, isto é, 1 ou $1 + 3$ ou $1 + 3 + 5$ ou $1 + 3 + 5 + 7$ etc., o que pode ser verificado, nos primeiros termos da série, pela sua configuração geométrica.



Isso nos induz a conjecturar que para todo n , $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Também, dessa representação geométrica podemos perceber que os números quadrados iniciais são soma de dois números triangulares consecutivos: 1, $1 + 3$, $3 + 6$, $6 + 10$ etc., o que pode ser intuído de todos os termos da série.



Também é possível “prever” o próximo termo da sequência, ou seja, o termo 25, processo que envolve outra característica estética da matemática, como é o recurso à simplicidade, que apela à nossa capacidade de escolha. O “próximo termo da sequência”, dentre as múltiplas possibilidades, é aquele cuja escolha é a mais simples dentro de certo conjunto de dados contidos nos termos anteriores da sequência (CIFUENTES, 2011). Assim, percebe-se

que a intuição tem como uma de suas características a seletividade, que, segundo Ostrower (2010, p. 66), representa um processo de economia. Tendemos a buscar aquilo que seria suficiente para resolver uma determinada situação em que estamos envolvidos. Mais uma vez, a intuição nos põe em contato com as características relacionais dos objetos.

A intuição nos permite ver ao longe, ou seja, prever. Poincaré (2008, p. 224-225), referindo-se à atividade do cientista e de seus experimentos mentais, questiona: “então, que é um bom experimento? É aquele que nos faz conhecer algo diferente de um fato isolado; é aquele que nos permite prever, isto é, nos permite generalizar. [...] Para prever, é preciso ao menos invocar a analogia, o que já é generalizar”. E, na sequência, complementa “toda generalização pressupõe a crença na unidade e na simplicidade da natureza. [...] É claro que um dado fato pode ser generalizado de uma infinidade de maneiras. A questão é escolher. A escolha só pode ser norteadada por considerações de simplicidade” (POINCARÉ, 2008, p. 227).

Esses trechos nos sinalizam que, para Poincaré, a descoberta acontece por meio da analogia e da generalização.

No exemplo anterior, nos questionamos: como adquirimos a intuição de que “todos” (a universalidade a partir de casos particulares) esses números são, por exemplo, soma de dois números triangulares? Observando as formas como estes números configuram na sua sequencialidade, percebemos que esse processo não é o dedutivo e sim é indutivo e analógico. É na observação dos primeiros números quadrados que percebemos que as propriedades se repetem nas demais configurações. Porém, não é uma observação na individualidade de cada termo da sequência e sim na passagem de um para o outro (analogia), na relação de um para outro, o que permite concluir, melhor conjecturar, por intuição, que todos os números quadrados têm essa propriedade.

Assim, há dois tipos de intuição nesse caso, a intuição imediata e a intuição ao longe. Na intuição imediata é possível encontrar o seguinte número da sequência, ou seja, temos a “intuição do seguinte”; e a intuição “ao longe” nos permite “ver o todo” da sequência em cada um dos seus termos, ou seja, temos a intuição de uma totalidade, o que caracteriza o processo de generalização. Passar de um termo para outro é imediato, mas a intuição ao longe torna-se intuição generalizante e, para esse processo, a analogia configura-se como um dos principais ingredientes.

Nesse caso, temos um tipo de intuição que chamaremos de ‘generalizante’, pois nos permite “ver” ao longe, permite generalizações. Uma das características da descoberta, por meio da intuição generalizante, é a estruturação de uma generalidade, traço importante da ontologia resultante. É “o caráter de generalidade no particular”, isto é, não é um particular

concreto que se apreende pela intuição, é um particular genérico, um particular que tem caráter de generalidade.

Resumindo, a intuição generalizante não é um processo lógico e nela intervêm outros recursos, como a analogia e a indução.

1.2 Uma descoberta por intuição: o teorema generalizado de Pitágoras

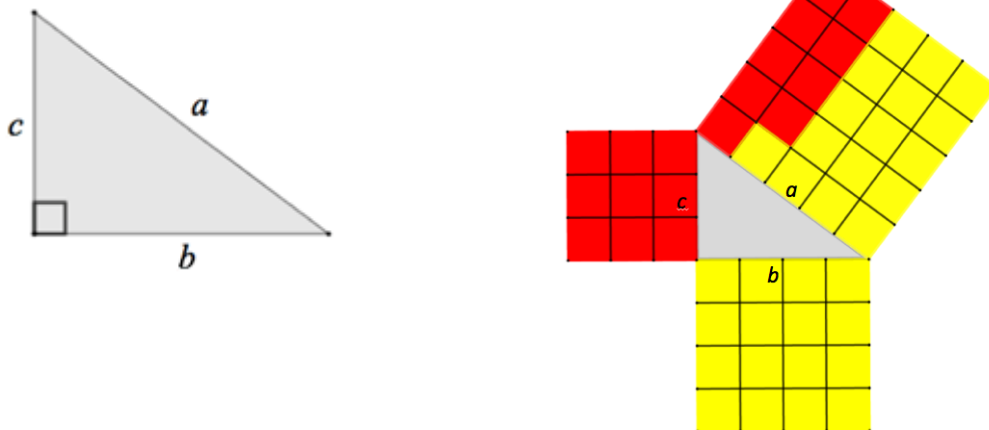
O exemplo a seguir ilustrará como a curiosidade, movida pela intuição, pode nos conduzir às descobertas em matemática, a partir de uma “situação base”.

Considerando um triângulo retângulo de lados de medidas a , b e c , em que a é a medida da hipotenusa pode-se formular o teorema de Pitágoras estabelecendo a relação entre os seus lados algebricamente e geometricamente:

Algebricamente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Geometricamente:



Usando o teorema de Pitágoras e desenhando quadrados nos lados do triângulo retângulo, temos que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado desenhado sobre a hipotenusa.

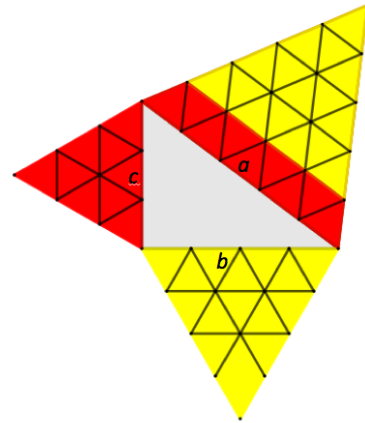
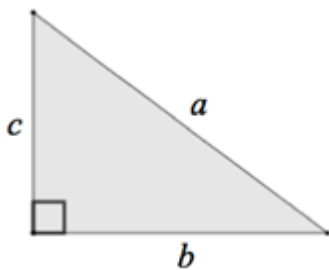
Essa interpretação geométrica, pelo seu grande apelo perceptivo, permite formular a seguinte questão: será que essa relação vale se, ao invés de desenhar quadrados sobre os lados do triângulo retângulo, forem desenhados triângulos equiláteros?

Se o triângulo retângulo de lados a , b e c seguir a relação expressa anteriormente, tem-se:

Algebricamente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Geometricamente:



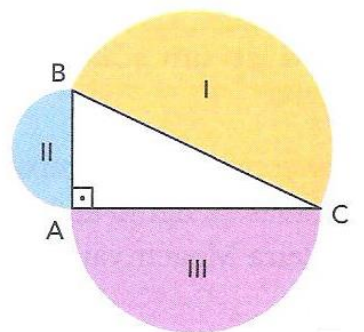
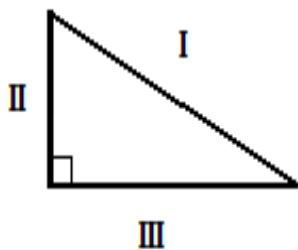
A resposta à pergunta anterior é sim! Usando o teorema de Pitágoras e desenhando, nos lados do triângulo retângulo, triângulos equiláteros, verifica-se que a soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos é igual à área do triângulo equilátero desenhado sobre a hipotenusa.

Mas agora, se sobre os lados do triângulo retângulo for desenhado um semicírculo, será que vale a mesma relação? Observe:

Algebricamente:

$$I^2 = II^2 + III^2$$

Geometricamente:



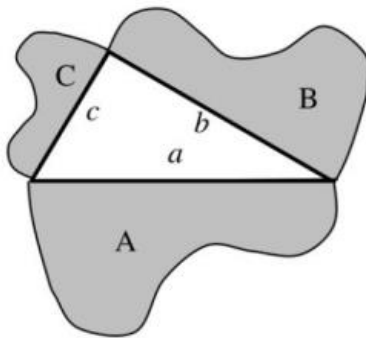
A resposta também é sim! Usando o teorema de Pitágoras e se, nos lados do triângulo, forem desenhados semicírculos, a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos resulta ser igual à área do semicírculo desenhado sobre a hipotenusa.

Se essa relação serve para quadrados, triângulos equiláteros e semicírculos desenhados sobre os lados do triângulo retângulo, é possível imaginar outras situações? Será, então, que é possível generalizá-la? Será que existe um padrão?

Nesse ponto começa a descoberta por generalização. É uma intuição ao longe.

Uma resposta positiva foi dada por George Polya (1897-1985), ele usou o teorema de Pitágoras para comprovar que essa relação entre áreas vale para quaisquer “figuras semelhantes” desenhadas sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Observe:

Sejam A , B e C as áreas de figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo. Sabe-se que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então, tem-se:



$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

Pela propriedade das proporções, como $a^2 = b^2 + c^2$ (relação de Pitágoras), conclui-se que $A = B + C$.

As figuras semelhantes realizam-se com movimentos como rotação, translação, reflexão (os rígidos) e homotetia, porém, apesar de não manterem o tamanho, mantêm a forma.

Intui-se que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Esta é, portanto, uma generalização do teorema de Pitágoras formulada primeiro como conjectura, cuja veracidade foi posteriormente demonstrada logicamente.

Sistematizando, podemos dizer que a intuição, como processo de descoberta e, em sua função heurística, tem como algumas de suas características as seguintes: a universalidade no

particular, o recurso à indução e à analogia, a generalização, a seletividade, o recurso à simplicidade e o “ver” ao longe. Para Poincaré, a intuição que nos permite “ver” ao longe é que acontece, por exemplo, no jogo de xadrez: para encontrar uma sequência de jogadas que nos conduza ao sucesso não basta conhecer apenas as regras do jogo (a lógica do jogo), é necessário ter a intuição da jogada “certa” ao longe. Tudo isso num marco ontológico relacional.

1.3 O hipercubo e a hiperesfera como produtos da imaginação

Da mesma forma que a intuição conduz à descoberta, como a imaginação pode ser um guia para a criação?

No processo inventivo, como já dissemos, fazem-se construções, ou seja, cria-se algo que não existe ainda. Pode-se imaginar (criar) objetos de um “mundo” de mais de três dimensões, extrapolando propriedades de duas ou três dimensões, como vimos no caso do hiperplano tetradimensional. Os exemplos a seguir mostrarão esse processo de extrapolação, colocando em evidência suas características epistemológicas.

O processo construtivo, como veremos, consiste em selecionar algumas poucas propriedades dos objetos de duas ou três dimensões (a base da construção) para usá-las como ponto de partida para uma definição que generalize esses objetos. Parte-se do conhecido para se chegar ao desconhecido.

Por exemplo, o que acontece no bidimensional nos dá argumentos para “visualizar” o tridimensional. Assim, pode-se visualizar, por analogia, o que acontece no tetradimensional a partir do que acontece no tridimensional. Visualizar objetos tetradimensionais depende muito da compreensão dos objetos de dimensão inferior. Portanto, o hipercubo e a hiperesfera serão construções de ideias cuja visualização será possível através da síntese das relações envolvidas, já que não é possível representá-los no nosso mundo tridimensional.

Um espaço de dimensão quatro (4D) para muitos é algo associado ao desconhecido. Porém, é um espaço tão abstrato como os de dimensão um, dois ou três. A diferença é que nos espaços de dimensão até três podemos fazer representações geométricas, isto é, podemos enxergar as representações dos objetos geométricos. Assim, certos artifícios são criados para que possamos “ver” objetos de espaços de dimensão alta em espaços de dimensão mais baixa. A perspectiva é um desses artifícios. Por analogia, podemos fazer o mesmo com objetos que “vivem” no espaço de dimensão quatro (no qual não podemos “enxergar”) e representá-los no espaço de dimensão três ou mesmo num plano, por exemplo, no plano de nossa retina.

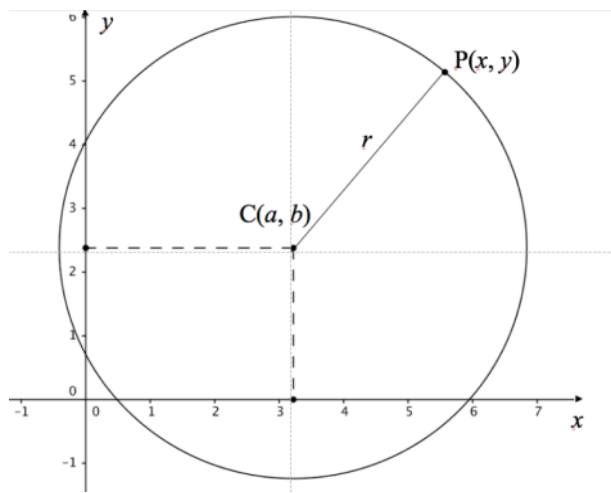
Analisemos dois casos: a hiperesfera e o hipercubo.

1.3.1 A hiperesfera

O seguinte exemplo mostrará como a “hiperesfera” no espaço tetradimensional será resultado da extrapolação da esfera (tridimensional) e da circunferência (bidimensional).

a) Para a equação da circunferência no plano temos:

Geometricamente

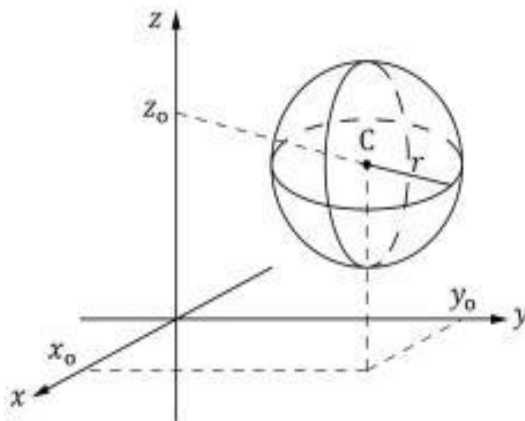


Algebricamente

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

b) Para a equação da superfície esférica no espaço tridimensional temos:

Geometricamente



Algebricamente

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

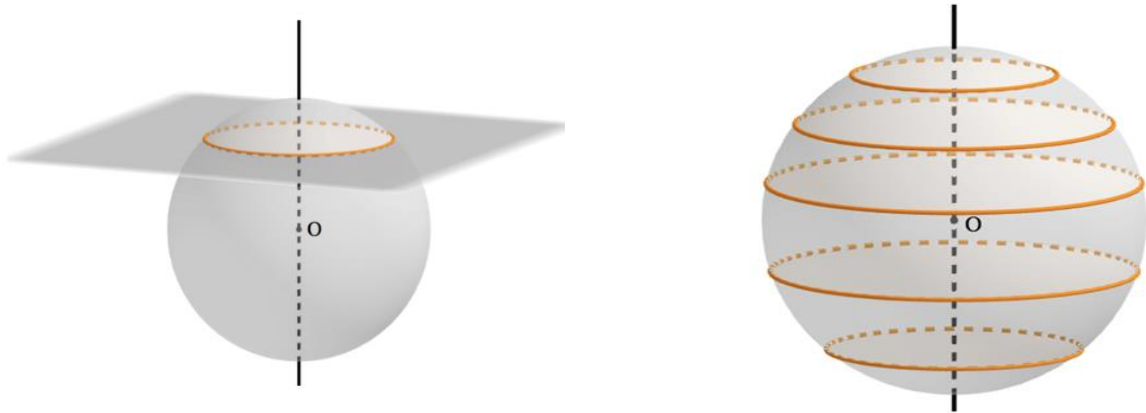
c) Para a equação algébrica da hiperesfera no espaço tetradimensional teremos, por extrapolação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (w - w_0)^2 = r^2$$

Não é possível “ver” ou representar a hiperesfera, apenas formular sua equação e por analogia com os casos anteriores. Mas, como podemos formar uma imagem mental de sua estrutura? Para passar do plano para o espaço tridimensional, acrescenta-se uma coordenada. Essa passagem nos permite formular a equação da hiperesfera para poder imaginá-la.

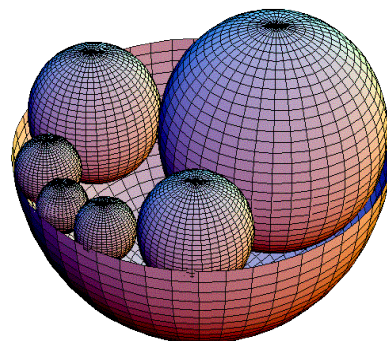
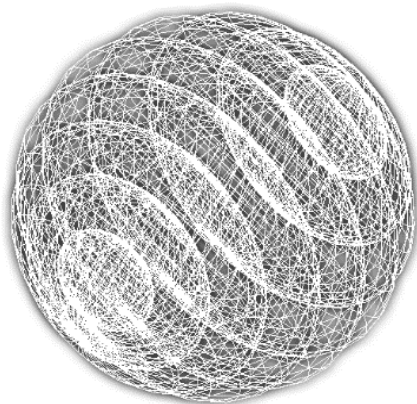
Uma vez definida (construída) a hiperesfera, a intuição nos permite sair do confinamento e “ver” algumas de suas propriedades. Por exemplo:

Sabendo que planos (2D) cortam uma esfera (3D) formando sessões circulares (2D) na esfera, como ilustrado nas figuras, temos que:



Se a hiperesfera (4D) for cortada por hiperplanos (3D), a intuição nos “revela” que serão formadas esferas (3D), então, a hiperesfera será constituída por sessões tridimensionais que são esferas.

Observe que a imaginação e subsequente intuição permitem-nos atingir o conhecimento do mundo tetradimensional.



Fonte: <<http://www.taringa.net/post/ciencia-educacion/8883483/Explicacion-sencilla-de-la-teoria-de-la-relatividad-2.html>>.

Fonte: <<http://matemolivares.blogia.com/2014/080601-el-beso-preciso-de-frederick-soddy..php>>

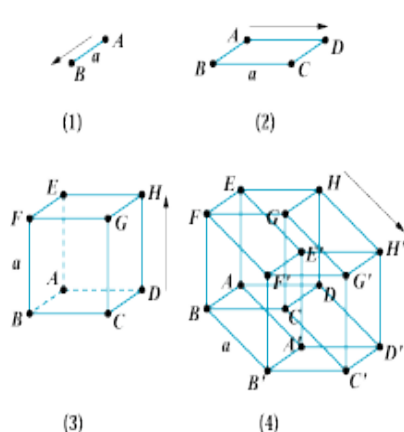
Repare-se que as imagens apresentadas logo acima são construções poéticas, são metáforas.

O fato de cortes na hipersfera (4D) produzirem esferas (3D) pode ser corroborado tornando constante a nova variável w , por exemplo, $w = c$, obtendo a equação de uma esfera (3D). Observe:

Seja a equação: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (c - w_0)^2 = r^2$, podemos escrevê-la dessa forma: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 - (c - w_0)^2$, com a condição adicional de que $r^2 - (c - w_0)^2 > 0$.

1.3.2 O hipercubo

Observe a figura:



1) Deslocando um ponto A , segundo uma direção, numa distância a , obtém-se um segmento AB de comprimento a . Passou-se assim da dimensão 0 para a dimensão 1.

2) Deslocando um segmento AB de comprimento a , paralelamente a si mesmo, segundo uma direção que lhe seja perpendicular, numa distância igual a a , obtém-se um quadrado $ABCD$ de lado a . Passou-se assim da dimensão 1 para a dimensão 2.

3) Deslocando um quadrado $ABCD$ de lado a , paralelamente a si mesmo, segundo uma direção que lhe seja perpendicular, numa distância igual a a , obtém-se um cubo $ABCDEFGH$ de aresta a . Passou-se assim da dimensão 2 para a dimensão 3.

4) Se imaginarmos um cubo $ABCDEFGH$ de aresta a deslocando-se, paralelamente a si mesmo, segundo uma direção perpendicular às três arestas do cubo (o que só é possível de acontecer em quatro dimensões), numa distância igual a a , obteríamos um hipercubo $ABCDEFGHA'B'C'D'E'F'G'H'$ de aresta a . Teríamos assim passado da terceira para a quarta dimensão! Embora seja impossível (ou apenas muito difícil) visualizar esta situação, imaginá-la não apresenta talvez grande dificuldade. Na figura, AA' representa o deslocamento perpendicular às três arestas do cubo.

Fonte: <http://www.apm.pt/apm/foco98/activ13.html>. Acesso em: 03 dez. 2017.

Assim, só é possível “conceber” ou “imaginar” o hipercubo (tetradimensional) por analogia com o cubo (tridimensional). O hipercubo é uma generalização do cubo tridimensional e todos os seus lados devem ser de mesmo comprimento.

O hipercubo exige sem dúvida o exercício da imaginação e da intuição para modelar o planejamento e a operacionalidade de uma universalidade que terá que, inevitavelmente (segundo a lógica dessa analogia), enfrentar os desafios dessa nova existência em espaços que certamente só são viáveis na virtualidade.

Analisando o processo construtivo, será que podemos encontrar alguns padrões?

Apesar de não ser possível visualizar o hipercubo, é possível contar o número de seus vértices, arestas e outros elementos a partir da extrapolação das dimensões 2 e 3. Por exemplo, na dimensão 0, 1, 2 e 3 temos:

n	Vértice (extremidade)	Aresta	Face	Nº Cubo	Total de elementos
0	1	0	0	0	1
1	2	1	0	0	3
2	4	4	1	0	9
3	8	12	6	1	27

Observando a tabela, é possível verificar certas regularidades. Por exemplo, o número de vértices aumenta em potência de dois: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$, enquanto que o número total de elementos aumenta em potência de três: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots$. Seguindo essa sequência, podemos começar a construir um hipercubo (4D) extrapolando as dimensões 2 e 3:

n	Vértice (extremidade)	Aresta	Face	Nº Cubo	Hipercubo	Total
0	1	0	0	0	0	1
1	2	1	0	0	0	3
2	4	4	1	0	0	9
3	8	12	6	1	0	27
4	16	32	24	8	1	81
...

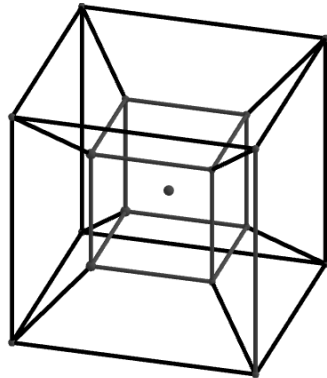
Dimensão	Vértice (extremidade)	Aresta	Faces	Cubo	Hipercubo	Total
n	$\binom{n}{0} 2^n$	$\binom{n}{1} 2^{n-1}$	$\binom{n}{2} 2^{n-2}$	$\binom{n}{3} 2^{n-3}$	$\binom{n}{4} 2^{n-4}$	3^n

Fonte: Disponível em: <<http://www.mathematische-basteleien.de/hypercube.htm>>. Acesso em: 02 nov. 2017.
Adaptado.

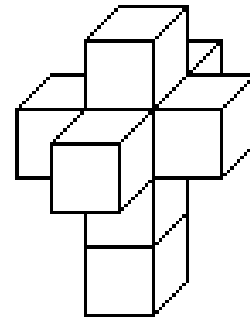
O quadro acima é construído por um processo de síntese que nos permite juntar algumas informações para produzir um objeto na imaginação, o hipercubo, ou na “ontologia” da imaginação. É essa síntese que nos permite dizer que, nesse processo construtivo de imaginação/criação, há uma certa racionalidade.

Durante muitos anos, os cientistas tentavam “enxergar” objetos tetradimensionais e foi um matemático inglês chamado Charles Howard Hinton o primeiro a desenvolver algumas técnicas para “visualizar” esses objetos. Para isso, Hinton se deu conta de que, por mais que tentássemos “ver” aqueles objetos, só conseguiríamos “ver” as suas em dimensões menores.

Representações geométricas do hipercubo:



Hipercubo “dobrado”
(sombra de um hipercubo no espaço tridimensional)



Hipercubo “desdobrado”
(planificação do hipercubo no espaço tridimensional)

Ao desdobrar o hipercubo no espaço 3D, ao invés de “visualizarmos” quadrados como na planificação de um cubo, visualizaríamos cubos.

A representação de um hipercubo se pareceria com os seguintes objetos:

O Monumento à Constituição de 1978 de Madrid



Fonte: <https://i.pinimg.com/736x/85/eb/cb/85ebcbc841765e61c44d0eacf225cb75--constitution-day-madrid.jpg>

Crucificação de Salvador Dali



Fonte: http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/galeria/uploads/1/normal_dali32_7.png

Sistematizando, podemos dizer que a imaginação tem, como algumas de suas características, as seguintes: é um processo criativo, tem, então, uma dimensão construtiva, além de promover o “espírito crítico” e pôr em relevo a relação, a associação, a configuração, o ordenamento, a harmonia, a síntese, a economia etc. Salientamos também, do ponto de vista epistemológico, é necessário colocar em evidência os mecanismos de visualização dos objetos construídos. Aliás, visualizam-se, como no caso da intuição, as relações e não os próprios objetos.

Como anteriormente sugerido, a imaginação admite uma certa liberdade, que permite decompor, transpor, recompor ideias e, assim, construir “coisas” novas. Ao mesmo tempo em que tem essa liberdade, a imaginação admite, também, um certo grau de racionalidade. Aquilo que nunca foi visto ou ouvido pode ser criado por associação, particularmente no campo da matemática, e a imaginação, nesse campo, configura-se como a faculdade que ultrapassa a experiência, assumindo uma dimensão epistemológica, alargando os conceitos matemáticos.

Quando falamos em “associação” nos remetemos à “ontologia da imaginação e da intuição” que nós chamamos de ‘ontologia relacional’, na qual as relações entre os objetos devidamente associadas em uma espécie de trama lhes dão existência. Como já sugerido na introdução, para Poincaré, a ciência nos faz conhecer as verdadeiras relações entre as coisas, permitindo-nos conhecer algo da realidade, mas o que ela pode atingir “não são as próprias coisas, [...] são unicamente as relações entre as coisas; fora dessas relações não há realidade que possa ser conhecida” (POINCARÉ, 1988, p. 13).

A imaginação cria um mundo não de coisas, mas de relação entre coisas. Nesse sentido, há uma aproximação com Poincaré. Intuir o universal é justamente capturar as relações que regem os diversos casos particulares.

Com os exemplos apresentados, podemos perceber que a imaginação e a intuição não agem isoladamente, mas estão entrelaçadas no processo de elaboração de conhecimento.

1.4 Relação entre imaginação e intuição: outros exemplos

A seguir apresentaremos outros exemplos e começaremos analisando as diversas geometrias.

Nesse contexto de imaginação/criação, intuição/descoberta (nossas hipóteses de trabalho) pode-se dizer que, a respeito do estudo do “espaço”, as geometrias não-euclidianas estão do lado da imaginação, enquanto que a geometria euclidiana, na própria versão de Euclides, está do lado da intuição.

Para compreender essa distinção, devemos considerar primeiro que chamamos de ‘geometria’ uma teoria (geralmente apresentada em forma axiomática) que estuda o espaço geométrico e fala de certos objetos como ponto, reta, plano, ângulo etc. Esses objetos só adquirem um significado “concreto” no espaço geométrico estudado que podemos chamar de “espaço de concretização” (em que esses objetos podem ser visualizados de alguma maneira). Assim, faz-se uma associação entre a forma (teoria) e a matéria (espaço).

No caso da geometria euclidiana, tal como feita por Euclides, o espaço correspondente é o “espaço natural” e ele preexiste à geometria, isto é, a geometria euclidiana é o estudo do espaço natural. Nesse sentido, as propriedades geométricas desse espaço são apreendidas por intuição. Nesse espaço natural, a visualização dos objetos geométricos correspondentes podem ser dadas através de sua construção com régua e compasso, construção que muitas vezes precisa de um certo grau de imaginação.

Quanto às geometrias não-euclidianas, desenvolvidas no século XIX, elas nascem primeiro como um jogo lógico axiomático (axiomas, teoremas, demonstrações) e não existe um espaço não-euclidiano pré-determinado. Tais espaços são criações artificiais para dar um suporte semântico (interpretativo) a essas novas geometrias. Esses espaços são criados posteriormente para munir essas geometrias de um espaço ou diversos espaços de concretização chamados de “modelos” dessas geometrias. Desse ponto de vista, num primeiro momento, são produtos da imaginação. Num segundo momento, uma vez construídos os modelos não-euclidianos, eles já podem servir para alimentar a intuição sobre outras propriedades dessas geometrias. Esses modelos uma vez inventados tornam-se “naturais” para essas geometrias e agem como o espaço natural semelhante da geometria euclidiana. Frequentemente, os modelos das geometrias não-euclidianas são uma criação lógica a partir dos modelos cartesianos das geometrias euclidianas.

Contrariamente à geometria euclidiana, nas geometrias não-euclidianas, os seus axiomas não são verdades que a intuição escolhe, pois não há *a priori* nenhum espaço de concretização dessas verdades. Os axiomas são escolhidos quase que arbitrariamente, e eles são aceitos por suas “boas” consequências lógicas e não por serem verdadeiros.

No caso da geometria de Lobachevsky, por exemplo, foram criados diversos modelos como de Felix Klein (1849 – 1925) e de Poincaré. Klein denominou as geometrias de Lobachevsky de ‘geometria hiperbólica’. Nesse caso os modelos são construídos, isto é, são produtos da imaginação (mas uma imaginação racional, não arbitrária). Aqui, podemos ver ainda que esses modelos, uma vez criados e verificada sua coerência, podem servir para alimentar a intuição sobre essas novas geometrias.

Em que momento gera-se a intuição das geometrias não-euclidianas? A resposta mais satisfatória é no seu início formal. A intuição aparece quando se constrói um modelo para essas novas geometrias. Cria-se um mundo “artificial”. Para desenvolver uma intuição das geometrias não-euclidianas, você precisa de um mundo artificial em que os fenômenos dessas geometrias se concretizam.

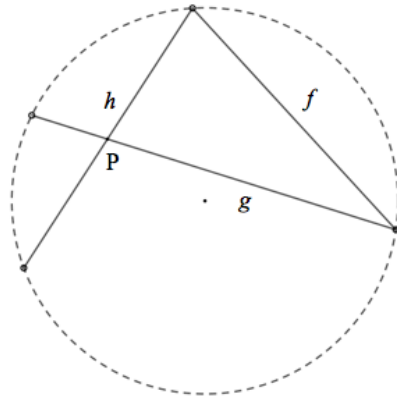
A geometria euclidiana parte de certas noções fundamentais, como plano, ponto, reta, que nos permitem associar ideias claras e de certas proposições simples, ou seja, alguns axiomas (EINSTEIN, 1999, p. 11) para compreender um mundo “real” (modelo), pois tal geometria se realiza nesse mundo real. Aos “conceitos geométricos correspondem, de maneira mais ou menos exata, objetos na natureza” (EINSTEIN, 1999, p. 12). No processo de criação da teoria axiomática euclidiana, um certo grau de imaginação esteve envolvido na escolha dos axiomas, mas uma vez criada e “com base em um método lógico cuja justificação nos sentimos compelidos a reconhecer, todas as proposições são referidas àqueles axiomas, isto é, são demonstradas” (EINSTEIN, 1999, p. 11).

O mesmo acontece com as geometrias não-euclidianas. Após criada e por meio de várias manipulações, mentais, intelectuais e formais, a intuição passa a agir sobre esse mundo, sendo constantemente alimentada e, a partir daí, descobrem-se novos mundos, por exemplo, os diversos modelos das geometrias não-euclidianas. Assim, na geometria euclidiana podemos “ver” planos, retas e pontos, mas na geometria não-euclidiana podemos então, intuir analogamente tais entes e construir novos mundos, intervindo nesse processo a imaginação, a partir de suas representações algébricas.

1.4.1 O modelo de Klein

O modelo proposto por Klein ficou conhecido como Plano de Lobachevsky. Esse modelo para a geometria hiperbólica consiste em um círculo euclidiano considerando apenas sua região interior, que seria o “plano”. As retas são identificadas com as cordas deste círculo. Fica claro que dois pontos distintos de um círculo determinam uma única corda, desta forma temos que dois pontos neste plano determinam uma única reta hiperbólica. Sabemos que duas cordas distintas se interceptam, no máximo, em um ponto interior do círculo, portanto, temos que duas retas hiperbólicas se interceptam no máximo em um ponto. Neste modelo, chamando de ‘retas paralelas’ duas retas que não se cortam, vemos infinitas retas paralelas a uma dada reta passando por um dado ponto.

Modelo de Klein

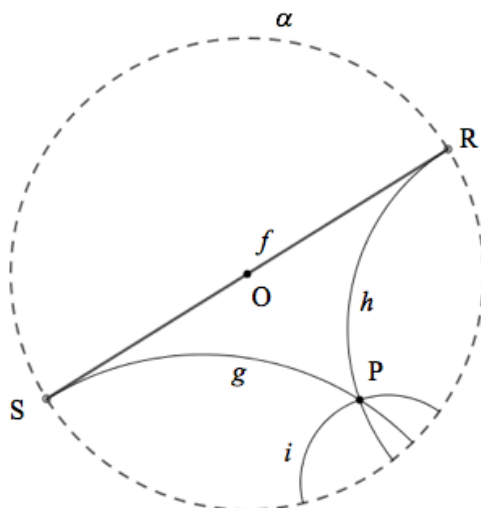


Os segmentos f , g e h são retas hiperbólicas no Modelo de Klein, onde h , g concorrem no ponto P e são paralelas à reta f , já que a circunferência não faz parte do plano.

1.4.2 O modelo de disco de Poincaré

No modelo do disco de Poincaré, o plano hiperbólico coincide com o Plano de Lobachevsky, ou seja, o plano neste modelo é um círculo aberto. Os pontos euclidianos deste disco aberto são denominados pontos do plano hiperbólico, os pontos que pertencem à circunferência são chamados ideais e a circunferência é o horizonte. Os arcos de circunferência ortogonais ao Disco e os diâmetros são considerados as retas neste modelo, e são chamadas retas hiperbólicas.

Disco de Poincaré



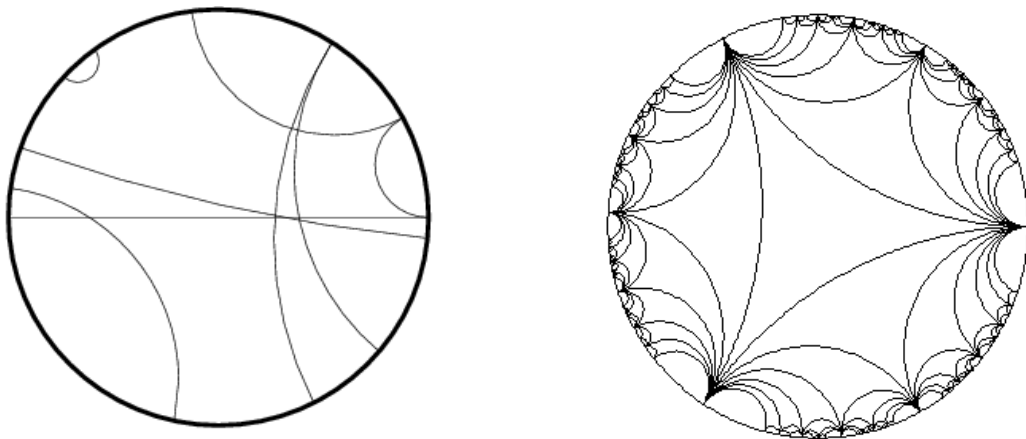
Na Figura ao lado, a região no interior da circunferência α é o plano hiperbólico, os pontos P e O são pontos hiperbólicos e os pontos R e S são pontos ideais, o diâmetro f e os arcos g , h e i são retas hiperbólicas. As retas hiperbólicas g e h passam no ponto P e são paralelas à reta hiperbólica f , já que os pontos ideais R e S não pertencem ao plano do Disco de Poincaré.

Utilizando-se de analogias é possível imaginar um “mundo” em que o espaço é diferente do euclidiano. As noções de reta, plano e distância num espaço não-euclidiano eram

completamente diferentes e não podiam ser observadas diretamente como na geometria euclidiana, mas visualizadas através de uma construção teórica. A visualização é “ver” com a visão da imaginação, ou “ver” com a visão construída pela imaginação.

Resumindo: as geometrias não-euclidianas nascem como teorias lógicas sem apelo intuitivo, depois constroem-se modelos interpretativos (semântica) para alimentar a intuição dessas geometrias. Nesses modelos, objetos geométricos não-euclidianos adquirem significado e com isso alimentam a nossa intuição sobre eles. A própria geometria euclidiana admite outros modelos diferentes do espaço natural, por exemplo, os espaços cartesianos da geometria analítica, eles foram construídos (imaginados) muito depois da época de Euclides.

O “mundo” de Poincaré (1988) transcende o mundo de duas ou três dimensões. Poincaré introduz um modelo físico do mundo não-euclidiano:



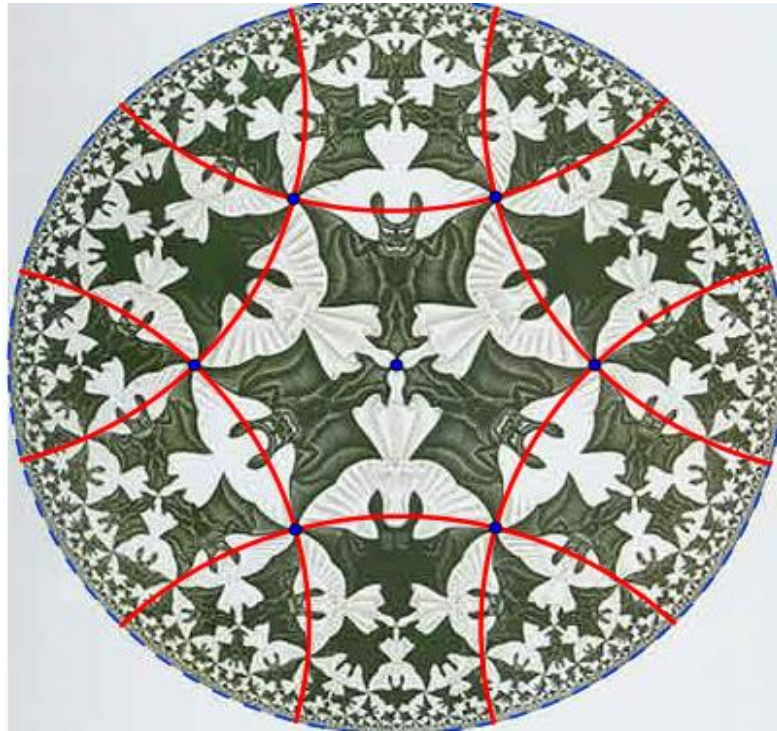
Nesse caso, primeiro constrói-se o modelo usando a imaginação e suas características de síntese etc., e depois, uma vez construído, ele pode ser usado para alimentar a intuição, “descobrimo” novas propriedades que não eram evidentes no início. A intuição, nesse caso, aparece quando se constrói um modelo para essas novas geometrias.

O mundo não-euclidiano de Poincaré precisa ser visto como uma experiência matemática a partir de dois referenciais: dentro e fora do mundo não-euclidiano. Visto de fora: a experiência é euclidiana, pois um “ser” que mora nesse mundo, à medida que avança para a borda, o “ser” diminui de tamanho. Visto de dentro: colocando-nos dentro desse mundo, a experiência é não-euclidiana. O “ser” não diminui de tamanho na medida em que avança para a borda, considerada esta como um horizonte. As propriedades não-euclidianas dependem do referencial.

Neste modelo, o plano é mapeado num disco limitado, mas as retas não-euclidianas são interpretadas como arcos de circunferências ortogonais ao horizonte.

Baseado no disco de Poincaré, Escher construiu suas gravuras cujas tesselações estão inspiradas nesse mundo não-euclidiano.

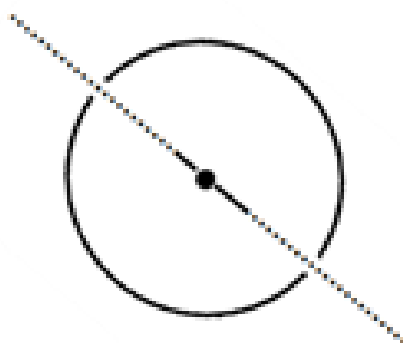
Limite Circular IV



Fonte: <<http://www.news.ucsb.edu/2016/017129/cool-classes>>

A obra *Limite Circular IV*, conhecida também como *Anjos e Demônios* apresenta uma imagem de um plano hiperbólico no sentido de Poincaré. Na obra, os anjos e os demônios parecem, visto de fora, diminuir continuamente de tamanho à medida que se movem em direção à borda do círculo. No entanto, visto de dentro, eles têm exatamente a mesma forma e o mesmo tamanho, isto é, o tamanho deles não diminui quando se aproxima do “horizonte” (a borda), pois, nesse mundo não-euclidiano a régua que mediria o tamanho diminui na mesma proporção ao se movimentarem. Essa interpretação física realizada na gravura de Escher foi feita pelo próprio Poincaré.

Continuando: uma reta que passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência vai interceptar ou não essa circunferência? Podemos nos guiar pela analogia sugerida por Poincaré e Escher.



Segundo Pais (1996, p. 72), “uma maioria expressiva de alunos que tem uma pequena iniciação em geometria não tem dificuldade em concluir que a reta realmente irá não somente interceptar as circunferências como o fará em dois pontos”.

Essa afirmação seria uma intuição verdadeira do plano euclidiano, mas se estivéssemos falando de um plano não-euclidiano no modelo do Disco de Poincaré, ou no modelo de Klein, essa afirmação contraria o Axioma II de Euclides (qualquer segmento de reta pode ser prolongado quanto se quiser) que trata da infinitude da reta.

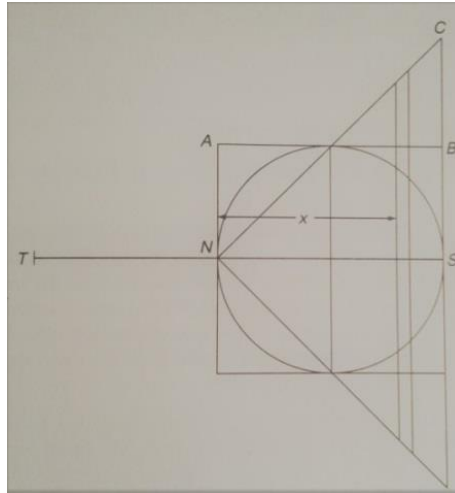
Nesses dois modelos, temos que, por mais que prolonguemos intuitivamente os extremos dos segmentos da reta, ela nunca atingirá a circunferência. Intuitivamente, para um ser que mora no círculo, essa circunferência seria como um horizonte que nunca é atingido por mais que nos aproximamos dele. A intuição nesse caso apresenta-se a nós com a ideia de horizonte e concretiza a ideia de reta não-euclidiana.

1.5 As descobertas de Arquimedes: extrapolação do finito para o infinito

Como já mencionado, a história da matemática fornece muitos exemplos que ilustram o papel da imaginação e da intuição na construção do conhecimento matemático. Alguns desses exemplos são até célebres como as descobertas realizadas por Arquimedes (Séc III a. C.). Um desses exemplos é considerado como uma das maiores “descobertas matemáticas”, a saber, a fórmula para calcular o volume de uma esfera.

Segundo Eves (2004, p. 422), Arquimedes, para determinar o volume de uma esfera, fez cortes nela em um número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas e (mentalmente) pendurou esses pedaços em uma das extremidades de uma alavanca, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de volume e centroide conhecidos.

Seja r o raio da esfera. Faça com que o diâmetro polar da esfera esteja sobre o eixo x (horizontal), com polo norte N na origem.



Fonte: Eves (2004)

Construa o cilindro e o cone de revolução obtidos pela rotação do retângulo $NABS$ e do triângulo NCS em torno do eixo x . Tome agora nos três sólidos as fatias verticais delgadas (que são vistas como cilindros achatados) correspondentes às seções de abcissas x e $x + \Delta x$. Os volumes dessas fatias são “aproximadamente”:

$$\text{Esfera: } \pi x(2r - x)\Delta x$$

$$\text{Cilindro: } \pi r^2\Delta x$$

$$\text{Cone: } \pi x^2\Delta x$$

Penduremos no ponto T , dado por $TN = 2r$, as fatias da esfera e do cone. Seu momento combinado em relação a N é:

$$[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2\Delta x]2r = 4\pi r^2 x\Delta x.$$

Observemos que o resultado anterior é o quádruplo do momento da fatia cilíndrica quando ela é mantida em sua posição original. Efetuando-se a soma de um “número grande” dessas fatias temos, “aproximadamente”:

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Observa-se que essa fórmula pode ser obtida estabelecendo uma comparação entre os volumes da esfera e do cilindro que a contém, aliás, Arquimedes obteve primeiro a seguinte relação:

$$\text{Volume da esfera} = \frac{2}{3} \text{ volume do cilindro}$$

Esse procedimento descrito em *O Método*, um tratado de Arquimedes enviado em forma de carta a Eratóstenes, foi a maneira como ele descobriu a fórmula do volume da esfera. Porém, sua consciência matemática não se satisfazia com tal procedimento, pois era ciente de que estava realizando uma extrapolação e porque ele podia recorrer ao método de exaustão para fornecer uma demonstração mais rigorosa. Tal método havia sido utilizado por Eudoxo, argumentado por “dupla redução ao absurdo”. No entanto, pelo método de equilíbrio, utilizado por Arquimedes, de caráter mais intuitivo-experimental pode-se ver a fertilidade da ideia que consiste em considerar toda a grandeza como sendo formada de um número “muito grande” de porções atômicas, um jogo dialético entre o muito grande e o muito pequeno, embora essa ideia não tenha uma fundamentação precisa, segundo Eves (2004).

Nesse exemplo, particularmente, observa-se que, para chegar às descobertas, Arquimedes se entregava constantemente a um método indutivo e intuitivo (por via mecânica), ou seja, construindo figuras e depois passando à comprovação, demonstrando rigorosamente aquilo que havia alcançado por aquele caminho. Percebe-se, no método mecânico, criado por Arquimedes, um apelo à imaginação, à intuição e analogia com objetos físicos, por exemplos, alavancas, equilíbrio estático, entre outras, que, como observado por Poincaré (1995), constitui-se de um valioso instrumento de descoberta no campo da matemática.

A intuição, nesse exemplo, nessa descoberta de Arquimedes, está em supor que um fenômeno de caráter finito é válido também para o correspondente fenômeno infinito. A intuição consiste em extrapolar o fenômeno finito para o caso infinito, preservando sua validade e o caso finito é estudado por analogias físicas (alavancas, balanças etc.).

Quanto à demonstração pela dupla redução ao absurdo, utilizada por Arquimedes, e devido a Eudoxo, podemos perceber a intuição atuando em complemento à lógica. De um lado, temos um método mecânico que possibilita a utilização da intuição geométrica considerada como um instrumento de descoberta, fruto de uma intuição alargada; por outro lado, a demonstração pela redução ao absurdo não permite novas descobertas, pois sua utilização exige o conhecimento prévio do resultado que se busca demonstrar.

1.6 A Intuição dos números naturais

Com relação à aritmética, ou seja, à teoria dos números, nos perguntamos, até que ponto os números naturais são intuitivos? É possível intuir os números pequenos, como 1, 2, 3, 4, ..., utilizando os dedos das mãos (os dedos servem como instrumentos para contar números pequenos) ou por meio da visualização de polígonos regulares com esse número de lados, mas

poderíamos intuir o número 1 000 000? Ou, da mesma forma, é possível visualizar um polígono regular com esse mesmo número de lados? Para ser mais claro, como distinguir o número 1 000 000 de 1 000 001? Prosseguindo no nosso raciocínio, poderíamos distinguir um polígono de 1 000 000 de lados de outro de 1 000 001 lados?

Como extrapolar essa situação para conjuntos infinitos? Até que ponto temos a intuição dos conjuntos infinitos?

Temos, por exemplo, o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e o conjunto dos números pares $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, comparando esses conjuntos podemos estabelecer uma bijeção (feita originalmente por Galileu). Nesse sentido, percebemos que os dois conjuntos possuem mesmo “tamanho”. Ocorre então uma “nova intuição sobre os números infinitos”, pois apesar do segundo conjunto, o dos números pares, estar propriamente contido no primeiro (o conjunto dos números naturais), eles têm a mesma cardinalidade, isto é, “mesmo número de elementos”. Aliás, o conceito ‘número de elementos’ é construído como uma síntese de propriedades conjuntistas guiadas pela noção de “correspondência bijetiva” a qual é uma extrapolação da intuição do finito.

Essa extrapolação do finito é expressa através do seguinte *princípio por recorrência*:

Seja $P(n)$ um enunciado que descreve uma propriedade sobre um número natural n maior ou igual a um número natural n_0 fixado, se tivermos que valem as duas condições:

- a) $P(n_0)$ é verdadeira;
- b) $(\forall k \in \mathbf{N}, k \geq n_0)[P(k) \Rightarrow P(k + 1)]$;

então pode-se afirmar que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

No uso prático, para provar um teorema pelo princípio da recorrência deve-se mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Isso garante a validade da propriedade para a infinidade de casos aos quais o teorema faça referência. No caso da segunda condição, como uma implicação só é falsa se sua premissa for verdadeira e a conclusão falsa, basta excluir essa possibilidade para termos a validade da implicação desejada. Assim, o que normalmente se faz é tomar um k genérico qualquer maior ou igual a n_0 e, admitindo que $P(k)$ seja verdadeiro, mostrar que necessariamente $P(k + 1)$ também deve ser verdadeiro. Feita também a prova de que vale a propriedade para o primeiro natural n_0 , o princípio da recorrência nos garante a validade da propriedade em todos os casos afirmados.

Temos o que se pode chamar de efeito dominó.

Se uma coleção infinita de ‘dominós’, numerados a partir de 1, é colocada em “pé” um ao lado de outro e se puder assegurar que:

- a) o primeiro dominó cai;

b) sempre que um dominó cair, seu próximo vizinho também cairá;
então pode-se concluir que todos os infinitos dominós cairão.



Fonte: Gerônimo e Franco (2010)

Primeiramente, dizer que $P(1)$ é verdadeiro, onde P é a propriedade de “cair”, é como se empurrar a primeira peça do dominó. Em seguida, o fato de $P(k)$ verdadeiro implicar $P(k + 1)$ verdadeiro, significa que os dominós estão dispostos de tal forma que, se for derrubada uma peça, então a próxima peça também seria derrubada. Portanto, todas as peças do dominó serão derrubadas.

Para Poincaré (1988), esse princípio é um instrumento de transformação que se presta, mais do que a uma sequência de simples silogismos, a muitas combinações diversas que permitem passar do particular ao geral, do finito ao infinito. A intuição, nesse exemplo, é extrapolar o finito para o infinito.

Esse é, segundo Poincaré, o *juízo sintético a priori* mais importante, pois permite aceitar ou “ver” que todos caem e só podemos aceitar esse fato porque é *a priori*, preexiste no espírito, sendo, portanto, acessível à nossa intuição. A intuição assume um duplo sentido: instinto sintético e fonte de noções matemáticas puras. A evidência irresistível que esse princípio nos impõe não é outra senão a afirmação do poder do espírito que é capaz de conceber a repetição indefinida de um mesmo ato, desde que esse ato tenha sido possível uma vez. O espírito tem a intuição direta dessa sua capacidade e, para ele, a experiência não pode ser senão uma ocasião para se utilizar dela, desse modo, de conscientizar-se da sua existência, afirma Poincaré (1988).

Esse princípio, utilizado como método, pode se tornar um argumento dedutivo e como tal tem o poder de generalizar. A intuição nesse processo tem a função de criar e a lógica de sistematizar o que a intuição cria. Um princípio lógico é analítico, não sintético, mas o princípio de recorrência é sintético. O infinito é construído por meio de uma síntese e esse princípio gera novas intuições sobre os números.

1.7 A intuição do contínuo

A relação entre o discreto e contínuo é uma das dicotomias dialógicas mais importantes na história da matemática e sua conexão com o infinito é notória.

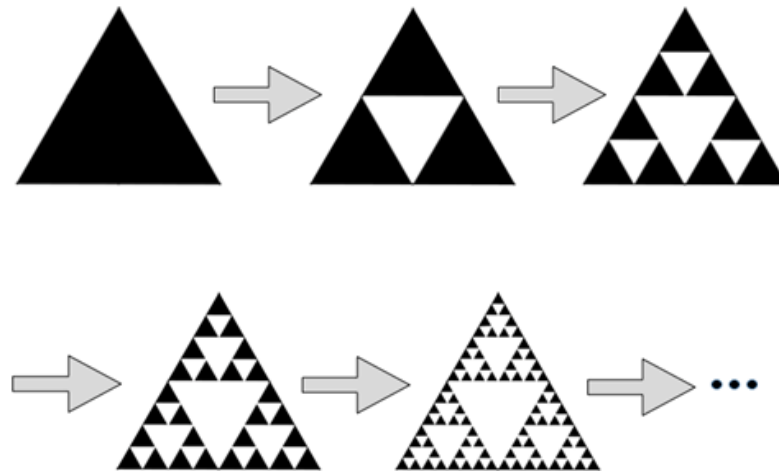
A intuição do discreto está intimamente relacionada com a intuição dos números naturais, porém, a intuição do contínuo deve ser construída e sua relação com os números reais, que usualmente se lhe associa, não é trivial. Temos uma “intuição física” do contínuo, mas sua intuição matemática ainda não está totalmente consolidada e passa pela compreensão do processo chamado de ‘aritmética’ que permite associá-lo aos números reais (CIFUENTES, 2015).



A intuição ingênua do contínuo pode ser enganadora, por isso é necessário ter cuidados, pois essa intuição diz, por exemplo, que “toda curva contínua tem tangente em ‘quase’ todos os seus pontos”. No entanto, no século XIX, Weierstrass construiu formalmente uma curva contínua que não tem tangente em nenhum ponto. Por isso, a intuição primária nem sempre é confiável! De fato, a partir da construção de Weierstrass, geraram-se os fractais, que são formas geométricas construídas efetivamente no século XX e que têm as propriedades estudadas por Weierstrass. Eles deixaram de ser objetos geométricos “patológicos” (isto é, sem apelo intuitivo) e novas intuições sobre eles foram consolidadas a partir de sua construção.



Então, os fractais também resultam de um processo construtivo. Quando vemos um desenho de um fractal, por exemplo, o Triângulo de Sierpinski, o que vemos é apenas uma parte do seu processo construtivo. Ele se concretiza no limite de todo o processo e o limite é uma dessas curvas que não tem tangente.



1.8 Cosmos: um novo olhar sobre a imaginação e a intuição

Diante disso, nos questionamos como fazemos inteligível o mundo?

Quem deu inicialmente uma resposta a essa questão foi Pitágoras. Ele concebeu o universo como um “cosmos”, isto é, um todo ordenado e harmônico. O mundo para Pitágoras tinha uma ordem intrínseca e o ser humano só poderia “descobrir” essa ordem por meio da razão, isto é, podemos intuir a ordem do universo.

Na modernidade, com Galileu, a ideia de cosmos dá um giro de 180° em que o universo não é necessariamente ordenado em forma intrínseca, mas é ordenável, é o ser humano que impõe uma ordem ao universo para fazê-lo inteligível. Isso significa que usamos a imaginação para construir uma ordem plausível do universo.

Temos então como resposta duas formas de compreensão do mundo: 1) trazendo para nós sua ordem intrínseca que é o cosmos de Pitágoras (descobre-se o cosmos), ou, 2) construindo para nós um ordenamento do mundo (inventa-se um cosmos ao estilo de Galileu).

Como exemplo, para entender essa diferença, recorremos à descrição das órbitas dos planetas introduzida por Kepler. Kepler, por meio de constantes observações, “percebeu” que as órbitas efetuadas pelos planetas são elipses e o sol ocupa um dos focos. Analisando esse fato temos que, para Kepler, a elipse é parte real do mundo do planeta concretizada em sua órbita. Por outro lado, o cientista pode “colocar” a elipse na órbita do planeta para melhor compreender seu movimento. Assim, há duas formas de compreender esse processo: se a forma elíptica é própria da órbita do planeta, então ela pode ser descoberta por meio da intuição ou, se impomos à órbita uma forma elíptica para melhor compreendê-la, nesse caso, atua a imaginação, pois é um ato construtivo.

A partir dessa discussão, cabem-nos questionar quais são as limitações desses processos imaginativos e intuitivos na construção de conhecimentos, particularmente no campo da matemática? Em que se diferencia um processo de caráter lógico de outro? No de caráter lógico espera-se uma resposta única (pois a argumentação lógica tem caráter de necessidade), mas em outro tipo de processo, podem se esperar respostas múltiplas (como no caso da possibilidade de construir diversos modelos das geometrias não-euclidianas).

Quais são os limites desses processos, pois são livres, mas não arbitrários? Seus limites não são lógicos, pois não é a lógica que os rege, mas eles têm uma racionalidade, uma cientificidade. Os limites são assuntos dessa cientificidade do processo.

“Uma prova de que a razão e a lógica nunca se identificam é que a razão pode se manifestar através de sistemas lógicos distintos” (MIRÓ QUESADA, 1980, p. 73). Isso manifesta-se, notoriamente, em partes da matemática que admitem uma abordagem clássica, assim como uma abordagem intuicionista. O intuicionismo tradicional não tem uma lógica subjacente, mas sim uma racionalidade que em certa forma manifesta o dinamismo da razão nesses campos.

Aí cabe a seguinte frase de Novalis: “se tivéssemos uma ‘fantástica’ como temos uma lógica, seria descoberta a arte de inventar”. A denominação de “fantástica” se refere a uma possível arte da fantasia que antigamente (ou no contexto da literatura) é identificada com imaginação.

CAPÍTULO 2

A IMAGINAÇÃO E A INTUIÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO: ALGUMAS CONCEPÇÕES

Sobre a imaginação e a intuição, no campo da matemática, muitos autores trazem diversas perspectivas em favor do aprimoramento dessas capacidades para a compreensão da própria matemática e também para seu ensino. Dentre eles cita-se: Bachelard (1994, 2013, 2001, 2003, 2013a), Brunshvicg (1945), Nagel e Newman (1973), Pais (1996), Brutter (1998), Cifuentes (2003, 2005, 2010, 2013), Del Vecchio Junior (2005, 2010), Duarte Junior (1988, 1991, 2010), Fischbein (1987), Hadamard (2009), Heinzmann (2000, 2013), Negrelli (2008), Paiva (2005), Paty (2001), Poincaré (1946, 1988, 1995), Gurgel e Pietrocola (2004, 2011a), entre tantos outros.

2.1 Sobre a imaginação

2.1.1 Características da imaginação

Imaginação é criação!

A imaginação tem sua origem etimológica no verbo latino *imaginatio*, que significa “a possibilidade de evocar ou produzir imagens, independente da presença do objeto a que se referem” (ABBAGNANO, 2000, p. 537). No contexto da filosofia é “a criação de objetos em um sistema simbólico” (GRANGER, 1998, p. 7 apud GURGEL e PIETROCOLA, 2011a). Ainda, em Houaiss (2009, p. 1048) lê-se: é a “faculdade de criar a partir de combinação de ideias”. A menção da “combinação de ideias” no processo de criação remete a uma das características, já mencionadas da imaginação: a síntese. Nesta abordagem, concebe-se o pensamento humano como capaz de gerar representações mentais dos elementos, habilitando o homem a se relacionar com o mundo não apenas por meio dos sentidos, mas também das construções simbólicas que elabora (BRONOWSKI, 1998, apud GURGEL e PIETROCOLA, 2011a).

Os processos de produção do conhecimento, particularmente o científico, exige considerar a imaginação nesse processo. As discussões no meio científico sobre essa questão sempre se mostraram controversas, no entanto, a partir de meados do século XIX e no século XX, com os desenvolvimentos no campo da matemática, por exemplo, o das geometrias não-

euclidianas, e no campo da ciência, por exemplo, o da teoria eletromagnética, da teoria da relatividade e da mecânica quântica, deixaram evidente o papel da imaginação e de outros aspectos subjetivos no processo de elaboração do fazer matemática e ciência.

A atividade matemática e científica é permeada pela imaginação, mas não uma imaginação desvinculada de conhecimentos prévios. A imaginação à qual nos referimos não se resume em algo fantasioso ou uma inspiração imediata, mas está condicionada a uma construção racional, uma estrutura de pensamento vinculada tanto a conteúdos como a teorias, portanto, não é arbitrária. Insistimos, ela é criação!

As “produções submetem-se às regras que regulam essa operação, baseadas na racionalidade. Isso faz com que a imaginação tenha um papel importante na ciência: ela é, por definição, a maneira com a qual o pensamento conceitual busca criativamente estabelecer regras organizadoras para a realidade” (GURGEL e PIETROCOLA, 2011a, p. 95). Sabemos que a realidade é complexa, caótica, então a imaginação intervém para ordená-la. Novamente, e a ideia de *cosmos* na modernidade.

A imaginação assume, portanto, uma dimensão construtiva. A “criação produzida inicialmente pela imaginação é submetida à racionalidade na busca de uma apreensão sintética da realidade tal qual se apresenta à nossa mente” (GURGEL e PIETROCOLA, 2011a, p. 104). Após a intervenção da imaginação no processo de criação, há a necessidade de aferição, nesse aspecto, intervém também a lógica. O raciocínio lógico legitima o conhecimento já adquirido pela imaginação e também pela intuição.

Para Ostrower (2010, p. 5), criar

corresponde a um formar, um dar forma. Sejam quais forem os modos e os meios, ao se criar algo, sempre se o ordena e se o configura. [...] Criar é basicamente, formar. Em qualquer que seja o campo de atividade, trata-se, nesse “novo”, de novas coerências que se estabelecem para a mente humana, fenômenos relacionados de modo novo e compreendidos em termos novos. O ato criador abrange, portanto, a capacidade de compreender; e esta, por sua vez, a de relacionar, ordenar, configurar, significar.

Para criar algo novo é necessário estabelecer associações, correspondências, conjecturas. As associações compõem “a essência de nosso mundo imaginativo” (OSTROWER, 2010, p. 20), é, então, uma importante característica da imaginação. A capacidade de associar é, de fato, uma das formas da capacidade de sintetizar. Elas, as associações, “geram um mundo experimental, de um pensar e agir em hipóteses – do que seria possível, se nem sempre provável. O que dá amplitude à imaginação é essa nossa capacidade

de perfazer uma série de atuações, associar objetos e eventos, poder manipulá-los, tudo mentalmente, sem precisar de sua presença física” (OSTROWER, 2010, p. 20).

Canguilhem, na apresentação da obra *Estudos* (2008, p. 8-9), uma coletânea de artigos de Bachelard, afirma que esse autor, ao elaborar a frase “sob certos aspectos, falar das fronteiras da Química é tão inútil quanto falar das fronteiras da Poesia”, já vislumbrava o poder ilimitado da imaginação na ciência.

A “imaginação é uma faculdade específica. A ela pertence essa função do irreal, que psiquicamente é tão útil como a função do real” (LESCURE apud BACHELARD, 1999, p. 128). “Não é o conhecimento do real que nos faz amar apaixonadamente o real. É o sentimento que constitui o valor fundamental e primeiro. A natureza, começamos por amá-la sem conhecê-la, sem vê-la bem, realizando nas coisas um amor que se fundamenta alhures” (BACHELARD, 2013a, p. 119).

A imaginação é dinâmica, porém, é um movimento corajoso. “Essa imagem dinâmica fundamental é, pois uma espécie de luta em si. Mais que ninguém, o nadador [por exemplo] pode dizer: o mundo é a minha vontade, o mundo é a minha provocação. Sou eu que agito o mar” (BACHELARD, 2013a, p. 174).

No processo criativo, em que atua a imaginação, há a incorporação também do princípio dialético, pois quando se configura, quando se significa, ordena algo e se o define, surgem novas ideias, conceitos, fenômenos etc., em diálogo com a razão.

As ideias provindas da imaginação surgem quando damos liberdade “sem pudor”, sem restrição, ou seja, quando sonhamos em ação, quando sonhamos acordados (o Bachelard “norturno” em ação). O pensamento inventivo exige concentração. O trabalho concentrado exige do pensamento “arrumar” os fatos, as ideias, os conceitos, combiná-los coerentemente e, assim, formar um modelo visual que nos permita “ver” as infinitas possibilidades de pensar e construir novas ideias, novas teorias.

2.1.2 Baudelaire e a imaginação na dinâmica do pensamento

Quando dizemos que a imaginação é construtiva, estamos dizendo que não é ao acaso que as novas ideias florescem, mas é partir de um substrato já elaborado. Todo “universo visível é apenas um depósito de imagens e de sinais em que a imaginação dará um lugar e um valor relativo; é uma espécie de alimento que a imaginação deve digerir e transformar” (BAUDELAIRE, 1993, p. 99).

A imaginação é uma misteriosa faculdade, sendo considerada por Baudelaire (1993, 94) como a “rainha das faculdades”. Ela atinge todas as outras; ela as excita, ela as envia ao combate. Ela “cria um mundo novo, produz a sensação do novo. Como ela criou o mundo, é justo que o governe” (BAUDELAIRE, 1993, p. 94). Na medida em que a imaginação é construtiva, ela possui uma racionalidade. “Ela é a análise, ela é a síntese” (BAUDELAIRE, 1993, p. 94). É análise, mas não é só isso; é sensibilidade, mas também não é só isso. É, então, a síntese, ou seja, reúnem diversas “coisas” em um todo organizado e harmonioso.

Baudelaire (1993, p. 94) questiona:

O que seria de um cientista sem a imaginação? Que aprendeu tudo o que, tendo sido ensinado, podia ser aprendido, mas que ele não encontrará as leis ainda não adivinhadas. A imaginação é a rainha do verdadeiro, e o possível é uma das províncias do verdadeiro, que trata com as diversas modalidades do verdadeiro, como o necessariamente verdadeiro e o possível verdadeiro. Ela é aparentada com o infinito.

Nesse trecho percebemos que a imaginação extrapola a lógica clássica. Ela não trata apenas com o verdadeiro, mas com o que é possível. Ela representa um papel poderoso no processo criador. Além disso, possui o espírito crítico.

Baudelaire (1993, p. 94), citando um trecho de a *Face noturna da natureza* da Sra. Crowe e se antecipando à Bachelard, exprime:

por imaginação, não quero apenas expressar a ideia comum implicada nessa palavra da qual se abusa tanto, a qual é simplesmente fantasia, mas sim a imaginação criadora, que é uma função muito mais elevada, e que, como o homem é feito a imagem de Deus, guarda uma relação afastada com essa potência sublime pela qual o criador concebe, cria e mantém o universo.

Assim, a imaginação, como estamos defendendo, é um processo também racional, apesar de não ser necessariamente lógico, em que o “produto construído” (uma teoria matemática, por exemplo) é resultado de várias outras criações cujos precedentes são sempre completados pelo seguinte. Esse produto conduzido logicamente, harmoniosamente, consiste em uma série de criações precedentes que se integram em forma de síntese. Mesmo admitindo o papel que a imaginação desempenha na construção das ideias, é necessário ter uma estrutura já previamente formada. A síntese exerce um papel essencial não lógico na racionalidade da imaginação.

2.1.3 A imaginação e a criação científica

René Descartes e Albert Einstein, quando falavam sobre suas investigações, mostraram que a base de seus trabalhos no campo da ciência era impregnada de imaginação e intuição. Descartes, por exemplo, nas *Regulae ad Directionem Ingenii* [Regras para a direção do espírito], citado por Hadamard (2009, p. 104), afirma que:

[...] a imaginação, sozinha, é incapaz de criar a ciência. [...] No entanto, [...] devemos, em certos casos, recorrer a ela. Primeiro, ao fixá-la sobre o objeto que queremos considerar, vamos impedir que ela se disperse e nos atrapalhe; depois e sobretudo, ela pode despertar em nós certas ideias.

No mesmo trabalho, continua Descartes,

a imaginação será muito útil, sobretudo, quando se tiver de resolver um problema não por simples dedução, mas por várias deduições sem ligações entre si, das quais, a seguir, será preciso fazer a enumeração completa e coordenar os resultados (HADAMARD, p. 104).

A imaginação assume várias formas, mas especialmente, ela permite-nos “ver” o que não está lá. Nesse sentido, Felício (1994, p. 56) acrescenta, “não é necessário que uma imagem se refira a uma experiência real que se imagina, pois a imagem ‘se imagina’. [...] Essa imagem pode nascer espontaneamente na consciência, dinamizando-a e induzindo-a no pensamento”.

Os seres humanos, por meio de imagens e da imaginação, criam um universo significativo em seu encontro com o mundo. Imaginar “é um pensar específico sobre um fazer concreto” (OSTROWER, 2010, p. 32). O imaginário, uma espécie de mundo em que a imaginação atua, os conceitos/objetos que estão sendo imaginados existem, não é um campo de objetos, mas um campo de relações entre objetos.

A imaginação, em nosso contexto atual, é preterida em favor do conhecimento intelectual proveniente da razão, no entanto,

a própria ciência, que pretende ser um conhecimento rigoroso das “coisas como são”, é filha direta da imaginação. A criação de normas de objetividade, para que a razão se discipline e não sofra interferências dos valores e emoções, é um produto da imaginação. Aliás, a ciência surge, nos primórdios do século XVII, quando a imaginação de Galileu leva-o a afirmar: “vamos *supor* que um corpo caia sem sofrer interferências do atrito com o ar”. Isto é, *imaginemos* uma coisa *inexistente* em nosso mundo: a queda livre, sem interferências da atmosfera, o movimento contínuo. A imaginação é, portanto, o dado fundamental do universo humano e o motor de todo ato de criação. Precisamos notar também que em qualquer ato criativo não há apenas uma mobilização da razão, da esfera lógica (que se dá através dos símbolos). Como já se observou, nossa razão, nossos símbolos (linguísticos, matemáticos etc.), estão sempre apoiados nas nossas vivências, nos nossos sentimentos (DUARTE JR, 1991, p. 52, grifo do autor).

A imaginação é a “atividade que inclui o uso produtivo do material sensorial que leva à criação científica, bem como o uso similar desse material que leva à obra de arte, não havendo uma diferença essencial entre os dois processos” (READ, 2001, p. 71-72). Pela imaginação o homem ordena o mundo numa estrutura significativa e permite criar mundos possíveis e melhores possibilidades de ser e sentir-se parte integrante dele; por meio dela, somos impelidos a visualizar aquilo que não temos a oportunidade de experienciar na vida cotidiana, rompendo o estreito espaço que o cotidiano nos reserva. Ainda, por meio da imaginação, o homem é estimulado a produzir conhecimento, particularmente em matemática.

Em 2013, Cifuentes, em uma entrevista concedida ao Programa *Caldo de Cultura* da TV da Universidade Federal do Paraná – UFPR, a respeito da exposição, “A magia de Escher” ocorrida no Museu Oscar Niemeyer, afirma que:

A matemática do século XX incorpora aspectos qualitativos e exige, além da visão do olhar, uma visão da imaginação. No entanto, deve superar a visualidade bidimensional e tridimensional das representações do mundo que nos cercam e atingir uma visualização de ordem superior. Essa matemática vai além dos números e das fórmulas, incorporando novas geometrias, por exemplo, as geometrias não-euclidianas. Essa nova matemática lida com transformações, distorções, objetos que podem ser modificados sem perder certas qualidades, próprias da matemática. Essa nova matemática precisa ser capturada, por meio também da sensibilidade. Não pode ser vista com o olhar da visão, mas sim deve ser pensada, capturada pela imaginação. Essa nova matemática ultrapassa a tridimensionalidade e alcança a tetradimensionalidade. Para conhecê-la é necessária uma visão, um pensamento e uma imaginação mais refinados (CIFUENTES, 2013).

O processo de construção de conhecimento é interpolado pelo sujeito e, como tal, está submetido a hipóteses, erros e retificações, razão e emoção. O sujeito, na sua essência, é ao mesmo tempo um homem da ciência e da poética. A imaginação, capacidade ligada mais à experiência estética (Baudelaire), está intrínseca no sujeito e se manifesta no seu poder de agir, de interpretar e de transformar, assim, o sujeito tem a capacidade de desconstruir para poder reconstruir, ou seja, (re)inventar.

Essas capacidades do sujeito de imaginar, intuir, criar se revelam mais espontaneamente na arte, seu campo natural, porém estão presentes também na matemática e nas interpretações de todos os fenômenos físicos. Sobre essa questão, em Gusmão (2013) há uma defesa de uma educação matemática que valoriza o sensível, uma educação da sensibilidade, uma forma de pensar, capaz de desenvolver e refinar as percepções acerca do mundo e das coisas do mundo, inclusive do mundo racional, percepções que também podem envolver a matemática, quando enfocada do ponto de vista estético.

A imaginação é o motor da criação! E a curiosidade é o motor da imaginação! “A razão pode responder perguntas, mas a imaginação tem que perguntá-las”, já dizia Ralph Gerard (1900-1974), neurocientista americano.

2.2 Sobre a intuição

Intuição é descoberta!

A intuição, segundo Abbagnano (2000, p. 581) é entendida como uma “relação direta (sem intermediários) com um objeto qualquer; por isso, implica a presença efetiva do objeto”. Em Houaiss (2009, p. 1103) lemos que intuição “é a faculdade ou ato de perceber, discernir, ou pressentir coisas, independente do raciocínio ou da análise”. Ainda, “forma de conhecimento direta, clara e imediata, capaz de investigar objetos pertencentes ao âmbito intelectual, a uma dimensão metafísica ou a uma realidade concreta”.

Observa-se que essas “definições”, ingênuas para efeito de elaborar uma epistemologia, apontam características imediatistas como as de “relação direta”, “percepção” e “conhecimento imediato” que os nossos exemplos da matemática, analisados no capítulo 1, desprezam para o que chamamos de ‘intuição matemática’.

“Com a palavra intuição se designa o trabalho profundo da inteligência. [...] É a inteligência mesma” (BRUNSCHVICG, 1945, p. 488). E Brutter (1998, p. 74) acrescenta:

Designamos por intuição um conjunto de atividades mentais que engloba a observação e a reminiscência de fatos análogos e de indícios. [...] É uma manifestação muito apurada e muito elaborada da racionalidade profunda do ser. As qualidades intrínsecas, a formação, e, em particular, o exercício estão na origem da manifestação desta intuição.

A intuição matemática é então, uma capacidade humana que se aprende, se aprimora ao longo da vida, podemos dizer, segundo Nagel e Newman, que ela é “elástica” (1973). O ser humano educa a sua intuição matemática a partir de uma familiaridade com conceitos matemáticos, melhor dizendo, adquire uma maturidade matemática. À medida que estudamos matemática, entramos em conexão com ela, assim passamos a alimentar nossa intuição matemática. “Seria muito cômodo se, depois de conhecer os dados de um problema, fôssemos deitar e encontrássemos a solução completa ao acordar no dia seguinte” (HADAMARD, 2009, p. 61). Então, para que a matemática possa constituir-se como ciência, é necessário que passe da “intuição ingênua a uma intuição refinada” (BRUNSCHVICG, 1945, p. 488, tradução nossa).

De acordo com Brunshvicg, “em cada etapa decisiva do pensamento matemático vamos encontrar já a noção de intuição” (1945, p. 466, tradução nossa). E continua, “não se recorre mais a dados da intuição só para facilitar o raciocínio; é, na espera da demonstração, um instrumento de descoberta” (BRUNSCHVICG, 1945, p. 475, tradução nossa).

Nesse aspecto, resolver um problema guiado pela intuição não é uma questão de sorte, não é fruto do acaso, mas um pensar constante, um trabalho de alta racionalidade sem ser puramente lógico, um esforço voluntário e intenso da consciência, muitas vezes de dias e até anos. É por meio de uma maturidade matemática que uma educação da sensibilidade habilita a intuição para fazer matemática (sublinhando a palavra ‘fazer’).

Como o raciocínio argumentativo, a intuição é um modo de acesso ao conhecimento, mas nem um e nem outro são autônomos. Ambos agem de modo colaborativo. Há então, “ao pé da letra, um ‘mundo inteligível’, um mundo de entidades racionais, como há um ‘mundo sensível’, um mundo de dados sensíveis. Os dois mundos têm uma estrutura análoga” (BRUNSCHVICG, 1945, p. 427, tradução nossa). O pensamento matemático, para ir da necessidade abstrata à aplicação, envolve todas as funções do espírito em uma espécie de intuição integral em que encontra seu equilíbrio e sua plenitude (BRUNSCHVICG, 1945).

Dialetizar os pensamentos racionais e imaginativos é aumentar a possibilidade de descobrir, criar e recriar novos mundos, novos cotidianos, permitindo, dessa forma, evoluir e ampliar os conhecimentos, particularmente na ciência e na matemática. Assim, imaginação e intuição, além da lógica, segundo nossa defesa, são motores para desenvolvimento do conhecimento matemático. Desse modo, permite uma abordagem epistemológica.

Para Fischbein (1987), com um certo teor cognitivo, a intuição pode ter um *status* de teoria. Uma intuição é teórica-intelectual, nunca uma mera habilidade ou percepção de um fato dado. Expressa uma percepção geral através de uma experiência particular. A intuição vista como percepção (que pode ser de ordem superior) permite-nos “ver” o universal inserido no particular (como os nossos exemplos mostram), sendo, portanto, uma importante característica para uma nova epistemologia (epistemologia da intuição). Em uma intuição geralmente se compreende a universalidade de um princípio, de uma relação, de uma lei, por meio da realidade particular, porém, realidade constituída de relações e não objetos, como apontados por Poincaré.

Também, a intuição apresenta um caráter extrapolativo excedendo a informação disponível. É através da intuição que extrapolamos indiretamente, a partir de uma quantidade limitada de informações, dados que estão além de nossa compreensão direta. O rol fundamental de conhecimento intuitivo é o de conferir certeza às ideias obtidas depois de haver extrapolado (FISCHBEIN, 1987).

Além disso, apresenta um caráter implícito: embora aparentemente auto evidente, as intuições são de fato baseadas em mecanismos complexos de seleção, globalização e inferências. Mas esta atividade é geralmente inconsciente e o indivíduo está ciente apenas do produto final, as cognições são aparentemente auto evidentes, intrinsecamente consistentes. Mas, em tais casos, também os processos íntimos pelo quais a compreensão intuitiva surge são em sua maior parte desconhecidos do indivíduo (FISCHBEIN, 1987).

Para Heinzmann (2013), o campo semântico da palavra ‘intuição’ é bastante vasto e tem registros desde a Antiguidade. Na concepção de Platão, é entendida como “ver” as ideias. Para Aristóteles, estava ligada ao intelecto. Kant a concebia de duas formas, como intuição sensível e como intuição intelectual. Há então uma intuição imediata provinda do sensível e uma mediata provinda do intelecto. Essa pode ser uma das primeiras classificações dos diversos tipos de intuição. Porém, diante da polissemia da palavra intuição, a sua intervenção na elaboração do conhecimento pode, de fato, constituir-se como um “elemento metodicamente justificável” (HEINZMANN, 2013, p. 12).

Ainda, segundo Heinzmann (2013), para alguns, a intuição é no seu uso a forma mais perfeita de conhecimento. Para outros, em dualidade com a abstração, é uma faculdade do intelecto que conduz ao conhecimento de proposições evidentes, e nós acrescentaríamos, conduz também a tornar evidentes as proposições. Utilizada de uma maneira cuidadosa, é uma “revelação” de verdades elementares (Descartes).

Heinzmann (2013, p. 19-20) propõe três formas de abordar o processo da intuição, sendo que pelo menos as duas primeiras têm um caráter cognitivo e a terceira um caráter epistemológico. Para os propósitos dessa tese é importante considerar a terceira:

Enfim, a intuição pode ser entendida como instrumento de descoberta. Nesse caso, ela pode ter uma função heurística e conduzir às hipóteses iniciais [conjecturas] ou a um raciocínio analógico. Assim, a evidência intuitiva das representações empíricas de figuras geométricas [...] pode ser a fonte uma análise científica. A intuição pode também ter uma função normativa-crítica, como foi o caso da antiguidade, quando as únicas competências/propriedades consideradas em “álgebra” foram os números quadrados e cúbicos porque não intuir as competências/propriedades mais elevadas.

Repare-se que, na concepção de Heinzmann, a intuição, mesmo entendida como instrumento de descoberta, está associada com certos apelos geométricos, como é o caso (histórico) das potências quadradas e cúbicas, as quais remetem a áreas e a volumes respectivamente. Do ponto de vista desse apelo geométrico não fazem sentido, para a intuição, as potências maiores, porém elas podem ser matéria da imaginação, como foi mostrado no capítulo 1 para o caso da quarta dimensão.

Para Kant, ela é necessária a todo conhecimento. Seu caráter imediato e singular, próprio de um objeto, é oposto ao caráter geral do conceito. Enquanto o conceito pertence ao entendimento, a intuição pertence à sensibilidade (HEINZMANN, 2013, p. 17-18). O trecho anterior já aponta para uma problemática importante de ser resolvida: o objeto da intuição é o geral ou é o particular? Os exemplos discutidos no capítulo 1 sugerem que o objeto da intuição (não imediata) é o geral (a intuição generalizante). Nesse caso, a intuição é uma sensibilidade de ordem superior que permite ver ao longe, isto é, “pré-ver”.

No que concerne às matemáticas, os filósofos e os matemáticos não estão de acordo sobre os critérios de identidade dos objetos matemáticos, nem mesmo sobre a necessidade de considerar uma ontologia dos objetos matemáticos abstratos suscetível de ser apreendidos por uma “intuição de” (Heinzmann, 2013, p. 24).

Como pode ser observado, a discussão sobre qual é a ontologia da intuição (e da imaginação), é relevante e necessária. Nesta tese, temos apontado, por diversas vezes, que consideramos uma ontologia relacional como resposta a essa questão.

Se a intuição não é fonte última de conhecimento, ela pode ser, não obstante, um elemento que contribui para a credibilidade do conhecimento. A intuição é frequentemente o estado último da racionalidade teórica, nessa perspectiva, atribui-se uma racionalidade a certas formas de intuição (Heinzmann, 2013). E, na procura dessa racionalidade, apelaremos a Poincaré e Bachelard.

No vertente noturna de Bachelard, ele trata da imaginação como fonte de conhecimento e Poincaré traz para discussão o papel da intuição como sendo fundamental, em complemento à lógica, no “fazer matemático”.

2.3 Sobre uma filosofia da imaginação em Bachelard

Bachelard, homem da ciência (o homem diurno) e da poesia (o homem noturno), apresenta em suas obras um estilo próprio, com formulações teóricas intercaladas com seu próprio jogo e, por que não dizer, com sua própria vida. Utiliza, muitas vezes, terminologias técnicas da literatura, fenomenologia, metafísica, poética, estética etc., de uma maneira inusitada, reinterpretando seus significados segundo uma perspectiva peculiar, baseados em termos atuais de sua época. Em sua epistemologia (teoria do conhecimento científico), a reflexão assume um papel importante, “o de compreender”. Assim, a “própria essência da reflexão é compreender o que não se tinha compreendido” (BACHELARD, 2006, p. 125),

ainda, as “regiões do saber são determinadas pela reflexão” (BACHELARD, 2006, p. 33). Ao tomar o pensamento científico como seu objeto de reflexão, a ciência em Bachelard adquire uma postura de construção processual e inacabada, reconstruindo-se ao se repensar. Nesse sentido, o pensamento científico assume uma atitude de aventura, necessitando, assim, de uma razão irrequieta, ligada à imaginação, comprometida na produção criativa de conhecimentos e na busca constante pelo novo.

Bachelard, em vários momentos de sua obra e vida, se declara fiel à objetividade do pensamento científico. Realidade, objetividade e racionalidade parecem ser preponderantes em suas obras. No entanto, em um dado momento de seus trabalhos, ele declara ser um homem de vinte quatro horas, ou seja, dia e noite, um homem na sua totalidade. “Vocês ficarão surpresos, me atrevo a falar de mim, que um filósofo racionalista se ocupe um pouco dos problemas da imaginação e faça a psicanálise do fogo, busca os devaneios da água ou do ar. Eu também tenho meus momentos noturnos” (BACHELARD, 1973, p. 62, tradução nossa).

Se tivesse que fazer um plano geral das reflexões de um filósofo no Outono da sua vida, diria que tenho agora nostalgia de uma certa antropologia. Sendo mais claro, gostaria de discutir um tema que não é o de hoje, tema que chamaria “o homem das vinte quatro horas”. Parece-me, portanto, que se quisesse dar ao conjunto da antropologia suas bases filosóficas e metafísicas seria imprescindível e também suficiente, descrever um homem durante as vinte quatro horas de sua vida (BACHELARD, 1973, p. 54, tradução nossa).

No entanto, apesar de achar que o debate sobre o homem da noite seja importante, ele deixa de lado essas discussões, pelo menos em *El Compromiso Racionalista* (1973), para concentrar-se no homem do dia.

Quero limitar-me ao homem em vigília, ao homem super desperto, ao homem que eu denominaria precisamente, se vocês quiserem, o homem racionalista. Pois durante a noite não se é racionalista, não se dorme com equações na cabeça. Se bem que se fala do trabalho da imaginação nos matemáticos que, ao acordar, encontram o que não haviam encontrado no final do dia anterior; e sobre isso há algumas anedotas para mostrar essa capacidade racionalista da noite! Em todo caso, eu não as conheço (BACHELARD, 1973, p. 54, tradução nossa).

E racionalista para Bachelard é recomeçar, é reorganizar, é renovar, ou seja, “trata-se da filosofia do “re”, “re”, “re”” (1973, p. 57, tradução nossa). Ainda, “creio que, se devêssemos definir o racionalismo, seria necessário defini-lo como um pensamento claramente recomeçado e recomeçado cada dia. Se se é verdadeiramente racionalista não se pode fundar o hoje sobre o ontem” (BACHELARD, 1973, p. 56, tradução nossa). No entanto, esse racionalismo é aberto,

é dialético, nesse aspecto, permite, por um processo de síntese, criar coisas novas, pois o hoje é sempre um novo dia. Assim, dá-se vazão para a imaginação.

A expressão “Bachelard diurno e noturno” é muito utilizada por comentadores de Bachelard, porém, ele mesmo se intitula “o homem de vinte horas” mais especificamente na obra *El Compromisso Racionalista* (originalmente em 1972). Essa divisão/complementaridade entre o homem diurno e noturno serve de metáfora epistemológica para compreendermos a totalidade do pensamento de Bachelard, em que a imaginação poética e a racionalidade da ciência se relacionam.

O nosso interesse nesta tese são pelas ideias do “Bachelard noturno”, pois a partir dessas que situaremos e analisaremos a questão da imaginação em Bachelard e a interpretaremos no campo da matemática. Essa imaginação de que trataremos é concebida como forma de criação e de acesso ao conhecimento matemático. Não descartaremos, no entanto, as ideias do “Bachelard diurno”, pois há também vestígios, não explicitados, de criação e imaginação no pensamento do “Bachelard diurno”. Assim, diante da multiplicidade de perspectivas e com um estilo reforçado por um excêntrico vocabulário, isso fez com que o pensamento de Bachelard sobre a imaginação recebesse interpretações diversas. No entanto, subjacente a este aspecto variado da sua escrita, ele apresenta um quadro conceitual consistente sobre uma filosofia da imaginação.

Para Bachelard, a ciência e a poesia não são redutíveis uma à outra, estão, a princípio, em lados opostos e cabe à filosofia realizar a tarefa de estabelecer a complementaridade. “Os eixos da poesia e da ciência são princípios inversos. Tudo o que a filosofia pode esperar é tornar a poesia e a ciência complementares, uni-las como contrários bem-feitos. É preciso, portanto, opor ao espírito poético expansivo o espírito científico taciturno” (BACHELARD, 1994, p. 2). O espírito científico é construtivo e criativo, mas sua liberdade nesse processo não é absoluta, o espírito científico não age sozinho. Segundo Bachelard (1972, p. 58), “em resumo, não temos direito à construção solitária; uma construção solitária não é uma construção científica. E, portanto, não temos uma liberdade absoluta na criação de axiomas e teorias. A liberdade racional é uma liberdade difícil de precisar”. O espírito científico é construtivo, inventivo e cria coisas novas. Nesse processo, percebemos intrinsecamente a ação da imaginação, no entanto, é necessário o respaldo do próprio espírito científico. Para Bachelard (1966, p. 165, tradução nossa), há duas formas de inventar: “dialetrizar o pensamento e precisar a experiência”, colocando na mesma relação a razão e a imaginação como tem o pensamento e a experiência, isto, é “dialetrizar a razão e precisar a imaginação”.

Apesar do pensamento bachelardiano apoiar-se muito na racionalidade da ciência, percebe-se nas obras dedicadas aos quatro elementos (fogo, ar, água e terra) e mais especificamente nas suas últimas produções, por exemplo, em *La Poétique de l'Espace* (1957), *La Poétique de l'a Rêverie* (1961) e *La Flamme d'une Chandelle* (1961) que a poesia e a imaginação, com seu potencial criador, assumem um papel também importante.

Os últimos livros fornecem a chave para todos os demais, incluindo os epistemológicos, e introduzem, para além de toda propedêutica, a uma verdadeira *pedagogia do espírito*. Desaparece toda psicanálise e o homem se revela como criador, como fonte e origem, como criador de mundos tanto do mundo da ciência como do mundo da arte. É ele o ser que responde as todas provocações, particularmente à do instante, mediante a criação; o ser que recupera a vocação da filosofia que, desde os pré-socráticos, foi sempre uma vocação de desvelamento; o ser cuja missão é lutar sem cessar contra o sonho do mundo e seu próprio adormecimento (LACROIX, 1973, p. 17).

Psicanalista dos elementos (fogo, água, ar e terra), Bachelard estuda os aspectos criativos da imaginação, não só fenomenologicamente, mas como que constituindo uma ontologia. O estudo de imaginação de Bachelard em sua pureza criativa tem um profundo compromisso moral, restabelecer a imaginação em seu papel vivo como guia da vida humana, como a maior força da natureza humana (BACHELARD, 2001).

A objetividade científica de Bachelard, onde imperava sua vertente diurna, buscava, por meio de uma psicanálise, afastar a imaginação do processo de construção do conhecimento. Psicanalisar para Bachelard constitui-se um ato essencial para o espírito, ao conhecimento científico e ao progresso da ciência. No entanto, nesse processo de psicanalisar, a imaginação é desvendada, tornando-se “atraente” ao Bachelard noturno, passando a ser motivo também de psicanálise, não mais como entrave ou obstáculo ao conhecimento, mas permitindo compreender o objeto e as relações estabelecidas entre eles. Para Bachelard, é

necessário restaurar à razão humana sua função de turbulência e agressividade. Contribuiremos, assim, para fundar um surracionalismo que irá multiplicar as oportunidades de pensar. Quando este surracionalismo encontrar sua doutrina poderá ser colocado em relação com o surrealismo, pois a sensibilidade e a razão terão encontrado, em conjunto, à sua fluidez (BACHELARD, 1972, p. 10, tradução nossa).

E Bachelard completa: “somente as crises da razão instruem a razão” (BACHELARD, 1972, p. 35, tradução nossa).

A vertente “noturna” das obras de Bachelard é dedicada à imaginação e à poesia e apresenta uma concepção dinâmica do espírito. Essa dinamicidade está ligada ao movimento dos conceitos científicos e ao dinamismo da imaginação, a qual produz imagens poéticas e, por

que não dizer, conhecimento. O espírito, em movimento, torna-se sujeito de um campo de forças que são propulsoras de criações. Assim, o espírito desenvolve-se em duas dinâmicas: a atividade da razão e a atividade da imaginação. Aparentemente e inicialmente opostas, essas atividades se complementam ao longo do processo de produção de conhecimentos.

Tanto a atividade da razão como da imaginação colocam o espírito em movimento, em ação. Assim, por exemplo, os conceitos desenvolvidos na física contemporânea rompem com o realismo ingênuo e são substituídos por outros retificados, auxiliados pelas estruturas das equações matemáticas, em correspondência com experimentos. Tais relações atualizam e potencializam o processo de construção de novos conceitos, em que a profundidade e a precisão da imaginação (uma imaginação racional), com seu movimento e dinamicidade, rompem com as evidências de “verdades” e conduzem à nova “verdade”.

Bachelard, então, aplica os mesmos conceitos para duas dinâmicas opostas. O mesmo conceito que designa a operação que coloca o espírito em movimento, se dedicando à ciência, é o mesmo que é aplicado na leitura de um poema. A dinamicidade da imaginação é precisamente a ciência do movimento, que ele chama de “indução”. O efeito produzido pela leitura de um verso ou a contemplação de uma tela em nossa imaginação é descrito da mesma forma que a aprendizagem de teorias físicas:

Só uma simpatia para com a matéria pode determinar uma participação realmente ativa verdadeiramente ativa que de bom grado chamaríamos de “indução”, se a palavra não fosse já empregada pela psicologia do raciocínio. Seria, entretanto, na vida das imagens que poderíamos experimentar uma vontade de conduzir. Somente essa indução material e dinâmica, essa “dução” pela intimidade do real, pode elevar nosso ser íntimo (BACHELARD, 2001, p. 9).

A imaginação induz/cria uma outra visão do mundo. Assim, a oposição entre a atividade da razão (diurna) e da imaginação (noturna) é rompida pela intervenção de um mesmo “operador dinâmico” que é a indução. As criações, poéticas e/ou científicas, provindas do movimento dinâmico da imaginação e facilitadas pela indução, não são arbitrárias, mas carregam um certo grau de generalização. As generalizações são produzidas, a partir da extrapolação de alguns conceitos base e permitem corrigir algumas “falhas” que porventura o espírito pode produzir.

A indução em Bachelard pode ser pensada por analogia com a indução eletromagnética, por exemplo, o deslocamento de um ímã através de uma bobina induz uma corrente elétrica; a corrente que flui em uma bobina induz um campo magnético em torno dela. Os “operadores

dinâmicos” são aqueles conceitos que, como a indução, permitem, em analogia com os conceitos das ciências naturais, pensar a dinâmica da imaginação.

‘Diurna’ e ‘noturna’ são expressões metafóricas que indicam a alternância de fases complementares como, por exemplo, da rotação da Terra e, assim, analogamente, as obras epistemológicas e poéticas de Bachelard têm o mesmo caráter de alternância. Ávido por conhecer as construções conceituais e também instigado pelas belezas da imaginação poética colocam as obras de Bachelard em complementaridade. A leitura das obras de Bachelard, nos dois aspectos, permite compreender como a interpretação poética e o significado objetivo se entrelaçam. O espírito científico encontra em certas abstrações (matemáticas) uma oportunidade de imaginar de outra forma a realidade física, seguindo as metáforas de um poeta, o espírito imaginativo descobre uma solidariedade cristalina inteligível entre as imagens. Para Bachelard, o conhecimento científico não se opõe à cultura literária; ele os combina sem confundi-los. Ensina-nos a combinar a dinâmica do espírito.

Para Bachelard, o conceito de imaginação é estabelecido como uma faculdade criadora da mente, mais do que uma simples reprodução da percepção. Mais do que formar imagem, a imaginação “é a faculdade de deformar imagens proporcionadas pela percepção” (BACHELARD, 2001, p. 2). A deformação da imagem resulta de uma ação intrínseca à imaginação. A imaginação é a força mesma da produção psíquica, é um impulso vital. A ação decisiva da imaginação: de um monstro, ela faz um recém-nascido (BACHELARD, 1994).

A imaginação se manifesta como uma aspiração para novas imagens; é uma força de tornar-se “real” para a mente humana. Ela pode ser descrita como extrapolação de modos de produção, de imagens para ideias e até para teorias científicas e matemáticas. A autonomia e a liberdade da imaginação são pré-condições para criações. “A imaginação é uma força primeira. Deve nascer na solidão do ser imaginante” (BACHELARD, 1994, p. 180).

A imaginação permite criar, desde que não estejamos bloqueados por conhecimentos já constituídos. Contrapsicanalisar o onirismo constituído é uma forma de “restituir ao devaneio sua continuidade”. [...] O psiquismo deve encontrar o equilíbrio entre o imaginado e o conhecido [...]. Cada noite nova seria para nós um devaneio novo, uma cosmogonia nova. O consciente malfeito, o consciente acabado é tão nocivo para a alma sonhadora quanto o inconsciente amorfo ou deformado” (BACHELARD, 1994, p. 180).

Um dos entraves para a imaginação que necessita ser rompido é o hábito. O “hábito era a inércia do devir psíquico. [...] O hábito é a exata antítese da imaginação criadora. A imagem habitual detém as forças imaginantes. A imagem aprendida nos livros, vigiada e criticada pelos professores, bloqueia a imaginação” (BACHELARD, 2001, p. 12). Portanto, é preciso provocar

uma “verdadeira educação da imaginação” (2001, p. 116). A imaginação deve, então, se tornar uma linha da vida e guia para criação. Querer imaginar decorre da vontade de criar.

Acreditamos, da nossa parte, que as linhas imaginárias são as verdadeiras linhas da vida, aquelas que mais dificilmente se rompem. Imaginação e Vontade são dois aspectos de uma mesma força profunda. Sabe querer quem sabe imaginar. À imaginação que ilumina a vontade se une uma vontade de imaginar, de viver o que se imagina (BACHELARD, 2001, p. 112).

Então, interpretando Bachelard podemos dizer que a imaginação pode criar conhecimentos na ciência e na matemática. Segundo Bachelard (1994, p. 34), “a ciência [e a matemática] forma-se mais sobre um devaneio do que sobre uma experiência, e são muitas experiências para se apagarem as brumas do sonho”. O “que é puramente factício para o conhecimento objetivo permanece, pois, profundamente real e ativo para os devaneios inconscientes. O sonho é mais forte que a experiência” (BACHELARD, 1994, p. 31).

A liberdade dos sonhos é uma consequência da autonomia da imaginação e, diante de conhecimentos objetivos declarados, considerados “verdades”, a imaginação encontra seu lugar e seu papel. “Por uma porta estreita, a imaginação nos transcende e nos põe face ao mundo” (BACHELARD, 1994, p. 133-134).

A imaginação, no entanto, é mais do que uma simples percepção dirigida por necessidades subscientes e complexas, é um sintetizador de todos os modos de consciência e produção. Decorre daí duas principais características da imaginação: ela é sintetizante e criativa. “Temos na memória microfilmes que não podem ser lidos senão quando recebem a luz viva da imaginação” (BACHELARD, 1978c, p. 311).

A síntese pode ser considerada como característica poética da imaginação. Com a síntese, a imagem associa-se a outras imagens, o conceito associa-se a outros conceitos, gerando assim novas imagens, novos conceitos, novos conhecimentos, é nesse processo que a imaginação pode ser realizante. “O esforço de síntese está em todos os lugares, nos detalhes e nos sistemas. [...] As belezas do pensamento científico não são belezas oferecidas à contemplação. Elas aparecem contemporaneamente ao esforço de construção” (BACHELARD, 1966, p. 248).

Bachelard organiza especificamente grande parte de sua pesquisa em torno dos quatro elementos: fogo, ar, água e terra. Esses elementos passam a constituir a energia primordial da imaginação, movimentando os pensamentos do indivíduo e a sua relação com o mundo. Esses elementos imaginativos possuem leis idealistas tão certas quanto as leis experimentais. Bachelard caracteriza os “quatro elementos como os hormônios da imaginação. Por eles se efetuam as grandes sínteses que dão características um pouco regulares ao imaginário.

Particularmente, o ar imaginário é o hormônio que nos faz crescer psiquicamente” (BACHELARD, 2001, p. 12). A “matéria [terrestre] nos revela sua força; [...] é nosso espelho energético; é um espelho que focaliza as nossas potências iluminando-se com as alegrias imaginárias” (BACHELARD, 2013, p. 19-20). Declaradamente, “a água é realmente o elemento transitório. É a metamorfose ontológica essencial entre o fogo e a terra” (BACHELARD, 2013, p. 7). Já o fogo é o elemento de transformação, do devir, da purificação, regeneração, do renascimento, é ultravivo, situa-se em posições opostas, ao mesmo tempo em que destrói, também reconstrói, recria (BACHELARD, 1994).

Assim, impulsionada pela força dos quatro elementos que, por meio de um processo de síntese, a imaginação imagina, isto é, cria novas imagens, novas teorias, novas “coisas”. Nenhum dos quatro elementos age em sua inércia, cada elemento é imaginado no seu dinamismo, no seu movimento, na sua liberdade (BACHELARD, 2001).

“Quando vamos tão longe, tão alto, reconhecemo-nos em estado de imaginação aberta” (2001, p. 6). Os quatro elementos são a matéria-prima da imaginação. Apreender o real pela imaginação consiste em um processo de transformação e/ou deformação construtiva da matéria pela imaginação. A imaginação não se fixa na matéria, pois permite a mobilidade. É a imaginação que capta o real na sua materialidade elementar: ela imagina o real como matéria porque suas imagens elementares são imagens materiais construídas com aqueles 4 elementos. A rigor, a imaginação não representa o real, ela o estende, constitui-se como sua continuidade independente, como super-realidade.

2.3.1 A imaginação produtora e a imaginação reprodutora em Bachelard

Em Bachelard, temos dois tipos de imaginação: a reprodutora e a produtora.

- a) A imaginação reprodutora, caracterizada como a faculdade mental de evocar, sob a forma de imagens, objetos conhecidos por uma sensação ou experiência anteriores; e
- b) a imaginação produtora, que é a faculdade em que a mente cria e recria, ainda que a partir de formas sensíveis e concretas, imagens novas. Essa é essencialmente criadora, construtiva, inventora, a partir, sempre, de um processo de síntese.

Na imaginação reprodutora da matéria, combinamos fragmentos do real percebido, lembranças do real vivido, mas não poderíamos atingir o domínio de uma imaginação fundamentalmente criadora (produtora), que tem funções totalmente diferentes da reprodutora (BACHELARD, 2013). Quase que Bachelard antecipa a nossa concepção de intuição.

De fato, segundo Jolivet (1946), a imaginação é a faculdade de formar imagens e se distingue em duas formas: imaginação reprodutora – função pela qual a consciência percebe uma imagem de alguma coisa que já conhecemos, porém instantaneamente ausente, e imaginação produtora – função pela qual o espírito forma sínteses novas e originais, cria algo novo.

Nesse aspecto, podemos associar às ideias de Bachelard de imaginação reprodutora e produtora a nossa “hipótese de trabalho” defendida nessa tese, a saber: a imaginação reprodutora está mais próxima de intuição, isto é, descobre-se algo novo a partir de algo já conhecido, porém que não se tem acesso imediatamente. “Não se trata de encontrar, mas de reencontrar. Não se trata de conhecer, mas de reconhecer” (BACHELARD, 2010). Já a imaginação produtora, segundo nossa interpretação, está mais do lado da imaginação, pois permite, por meio de um processo de síntese, criar algo novo. Assim, guiado pela imaginação e pelo “espírito científico, sustentado pela abstração racional, o homem que pensa está pronto para fabricar tudo, até o espaço” (BACHELARD, 2010, p. 88).

Tanto a imaginação reprodutora (intuição) quanto a imaginação produtora pertencem ao campo da poética, das ciências e da matemática, ambas são importantes na constituição do novo espírito científico como preconiza Bachelard.

As retificações constantes, nas quais o novo espírito científico dialetiza a razão científica com a razão poética, provocam um novo racionalismo, que é denominado por Bachelard de ‘surracionalismo’. Termo criado por ele a partir do surrealismo nas artes, nas quais se multiplicam as formas de pensar o conhecimento científico.

O termo surracionalismo, segundo Japiassu (1976, p. 96), nada mais é que

a transposição para o domínio científico daquilo que, no campo poético, representa e significa o termo surrealismo. A poesia das profundezas do ser, a poesia liberada dos fatores de inspiração externa e de visões celestes e instaurando uma linguagem criadora de imagens novas, pois cada imagem deve ser portadora de um diferencial de novidade. Toda criação liquida um passado e encara a novidade.

A imaginação é então o exercício de uma liberdade, estreita as relações entre os mundos da criação científica e da criação artística, entre ciência e poesia.

O surracionalismo e o surrealismo são considerados como verdadeiros motores espirituais, motores para a criação. “O surrealismo é a imaginação em ato. Porque é pela imaginação que chegamos ao ato criador, que não admite a imitação” (JAPIASSU, 1976, p. 101). No surracionalismo, o conhecimento poético do mundo precede o seu conhecimento racional.

O pensamento surracional do Bachelard “noturno” é dinâmico e fecundo. Bachelard busca nas artes e na poesia motivos para imaginar, criar e construir. Descoberta e criação interconectam-se na elaboração de conhecimentos científicos e poéticos. O homem da ciência é, por essência, um criador, assim como o homem da poesia. A função da poesia nos dois homens é a de despertar, de libertar, capacidades capazes de encorajar e impulsionar a criatividade humana. Só há poesia onde houver criação. A poética é um caminho para a descoberta das forças vivas da natureza e da profundidade dos dramas humanos.

Para Bachelard, “o método [científico], que tem a seu favor a prudência científica, pareceu-nos insuficiente para fundar uma metafísica da imaginação” (BACHELARD, 1978c, p. 184). Com isso, Bachelard aponta para uma insuficiência do método científico na produção de conhecimento e, ao mesmo tempo, confere às criações da imaginação, no campo da ciência, um estatuto epistemológico. Na sequência, discutiremos também em que medida se aplicam essas discussões ao campo da matemática.

2.4 A intuição e a lógica em Poincaré

Poincaré se “indispôs contra todas as novas teorias que costumamos identificar com o novo espírito da matemática nos fins do século XIX e primeiros anos do século XX: a nova lógica, a teoria dos conjuntos, o formalismo hilbertiano” (SILVA, 1992, p. 43) e colocou-se em defesa da intuição. A intuição, segundo Poincaré, “se impõe ao se relacionar o mundo matemático com o mundo real, pois só ele pode transpor o abismo que separa o símbolo da realidade” (PATY, 2010, p. 175-176). É a intuição que faz a unidade de um raciocínio, é ela que ilumina o caminho, conduz os matemáticos e lhes permitem inventar. É a intuição que nos coloca em contato com a realidade, inclusive com a “realidade matemática”, mas ela necessita da lógica para formalizar e complementar as ideias de um pensamento intuitivo.

Qual o papel da intuição e da lógica na construção do pensamento científico e matemático?

Segundo Poincaré (1995, p. 20), “a lógica [sozinha] não basta”. A “lógica inteiramente pura só nos levaria sempre a tautologias; não poderia criar coisas novas; não é dela sozinha que pode originar qualquer ciência” (POINCARÉ, 1995, p. 18). No campo da matemática não é diferente, “para fazer aritmética, assim como para fazer geometria, ou qualquer ciência, é preciso algo mais que a lógica pura. Para designar essa outra coisa, não temos outra palavra senão intuição” (POINCARÉ, 1995, p. 16). No entanto, a “intuição não pode nos dar o rigor, nem mesmo certeza” (POINCARÉ, 1995, p. 16). Assim, tanto a lógica como a intuição

sozinhas não bastam, precisam estar diretamente conectadas para construir conhecimentos. Isso nos mostra que “a lógica não basta; que a ciência da demonstração não é a ciência inteira, e que a intuição deve conservar seu papel como complemento, quase se poderia dizer como contrapeso ou como antídoto da lógica” (POINCARÉ, 1995, p. 20).

Assim, “a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção” (POINCARÉ, 1995, p. 22), invenção de caminhos para a descoberta.

Para compreender como a intuição atua, Poincaré (1995, p. 21-22) faz uma analogia com o jogo de xadrez, diz ele:

Se os senhores assistem a uma partida de xadrez, para compreender a partida não lhes bastará saber as regras da marcha das pedras. Isso lhes permitiria apenas reconhecer que cada lance foi jogado em conformidade com aquelas regras, e essa vantagem realmente teria bem pouco valor. Entretanto, isso é o que faria o leitor de um livro de matemática, se ele fosse apenas lógico. Compreender a partida é algo inteiramente diferente; é saber porque o jogador avança determinada peça ao invés de outra, que poderia ter movido sem violar as regras do jogo. É perceber a razão íntima que faz de uma série de lances sucessivos uma espécie de todo organizado. *A fortiori*, essa faculdade é necessária ao próprio jogador, isto é, ao inventor [o inventor de caminhos].

Segundo Poincaré (1995), os matemáticos sempre caminharam passo a passo, sem ter a visão do fim que desejam atingir. Foi mesmo necessário que adivinhassem o caminho que os conduziam, e para isso recorrem a um artifício, que nada mais é que a intuição.

A análise pura põe à nossa disposição uma quantidade de procedimentos cuja infalibilidade ela nos garante; abre-nos mil caminhos diferentes, onde podemos nos embrenhar com toda confiança; garantem-nos que não encontraremos obstáculos neles; mas de todos esses caminhos, qual será aquele que nos levará mais prontamente ao fim? Quem nos dirá qual deles é preciso escolher? Necessitamos uma faculdade que nos faça ver o fim de longe, e essa é a intuição. Ela é necessária ao explorador para que possa escolher sua rota, e não é menos àquele que o segue e deseja saber por que escolheu tal rota (POINCARÉ, 1995, p. 21).

A geometria de Euclides, considerada como um paradigma da ciência dedutiva, teve por Poincaré uma interpretação, na qual atribui à intuição, além da lógica, um papel importante nessa construção:

Euclides, por exemplo, edificou uma estrutura científica na qual seus contemporâneos não podiam encontrar defeito. Nessa vasta construção, da qual cada peça, contudo, deve-se à intuição, podemos ainda hoje, sem demasiado esforço, reconhecer a obra de um lógico (POINCARÉ, 1995, p. 15-16).

A geometria de Euclides, apesar de ter sido elaborada essencialmente em forma lógica, tem uma fase construtiva onde as verdades geométricas são estabelecidas através de uma construção com régua e compasso. Nesse sentido, o uso da régua e o compasso apela a uma intuição por trás, a intuição materializada da reta e do círculo euclidianos.

Compreender a geometria de Euclides, evidenciando suas características intuitivas, é importante para observar os vários tipos de intuição que Poincaré defende:

primeiro, o apelo aos sentidos e à imaginação; em seguida, a generalização por indução, por assim dizer calcada nos procedimentos das ciências experimentais; temos, enfim, a intuição do número puro, [...] que pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático (POINCARÉ, 1995, p. 19).

Da mesma forma que há vários tipos de intuição, há também, segundo Poincaré (1995), tipos diferentes de espíritos matemáticos: uns são lógicos e analistas, os que estão preocupados com a lógica; outros são intuitivos e geômetras, esses são guiados pela intuição. No entanto, “os analistas também foram inventores” (POINCARÉ, 1995, p. 23). Mas, como isso é possível?

Claude Bernard dizia: a intuição ou sentimento gera a ideia ou a hipótese experimental, ou seja, a interpretação da natureza. [...] A razão ou o raciocínio servem apenas para deduzir as consequências dessas ideias. Poincaré repetia, com referência a matemática, o que Bernard dissera a propósito das ciências experimentais. [...] Na matemática a exigência lógica leva à formulação analítica; a exigência intuitiva, à formulação geométrica. [...] ambas são indispensáveis (ABBAGNANO, 2000, p. 583).

E o próprio Poincaré explica:

Antes de mais nada, pode-se pensar que esses lógicos sempre procederam do geral para o particular, como as regras da lógica formal pareciam obrigá-los? Não seria assim que poderiam ter ampliado as fronteiras da ciência; só se pode fazer conquista científica através da generalização (POINCARÉ, 1995, p. 23).

E é a generalização que permite, de fato, descobrir “coisas” novas na matemática induzidas pela intuição. Trata de “o caráter de generalidade no particular”, isto é, não é um particular concreto que se apreende pela intuição, é um particular genérico, um particular que tem caráter de generalidade. Um dos ingredientes principais da intuição generalizante é a analogia. Por meio desta e, guiados pela intuição, podemos “ver” ao longe, ou seja, “pré-ver”.

Uma demonstração matemática não é uma simples justaposição de silogismos. Consiste em silogismos colocados numa certa ordem e a ordem pela qual estes elementos são colocados é muito mais importante que os próprios elementos. Se tenho a sensação, a intuição, por assim dizer, desta ordem, de forma a que possa perceber rapidamente o conjunto do raciocínio, já não tenho que relear ou esquecer nenhum dos seus elementos. Cada um deles irá colocar-se por si

próprio no quadro preparado sem ter que se fazer nenhum esforço de memória. Percebe-se que esta sensação, esta intuição da ordem matemática nos leva a adivinhar harmonias e relações aparentemente escondidas (POINCARÉ, 1946, p. 42-43).

Se bem é verdade que ir do geral ao particular é uma passagem lógica, ir do particular ao geral não tem esse caráter, a menos que esse particular esconda uma generalidade. A natureza do raciocínio matemático, sem deixar de ser absolutamente rigoroso, pode nos elevar do particular ao geral por um procedimento chamado de ‘indução matemática’ (POINCARÉ, 1995). Poincaré destaca que o princípio de recorrência que fundamenta esse procedimento é uma típica proposição sintética *a priori*, sendo que a palavra ‘sintética’ guarda sua condição não lógica.

É certo que não existe uma definição única de intuição, como algo oposto à lógica. Para Hadamard e do ponto de vista psicológico, todo trabalho mental, e em particular o trabalho de descoberta, implica a colaboração do inconsciente, seja o superficial, seja (muitas vezes) o mais ou menos profundo; nesse inconsciente, depois de um trabalho preliminar consciente podem surgir as novas ideias, tal como relata Poincaré, ou seja, o espírito usa representações concretas para fixar combinações e delas fazer síntese. Segue então uma primeira consequência: não existe descoberta perfeitamente lógica. Uma intervenção vinda do inconsciente é necessária, pelo menos para dar início ao trabalho lógico. Ao contrário, uma segunda consequência, há espíritos para quem as ideias elaboradas no âmbito do inconsciente são levadas integralmente à luz do consciente. Hadamard imaginaria isso para Poincaré, cujas ideias, embora inspiradas por intuições de longo alcance, pareciam em geral seguir uma via bem natural. Percebe-se que pode haver lógicos aparentes, ou seja, indivíduos que são lógicos na enunciação de suas ideias, mas depois de terem sido intuitivos nas descobertas (HADAMARD, 2009).

2.5 Invenção em Poincaré

“Que é de fato a invenção matemática?”, questiona Poincaré (1946, p. 43) e, na sequência, responde: inventar não consiste em fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos. Qualquer um poderia fazer isso, mas as combinações que se conseguiriam obter assim seriam em número limitado e, na sua maioria, totalmente desprovidas de interesse. Inventar consiste, precisamente, não em construir as combinações inúteis, mas as que são úteis e que estão em ínfima minoria. Inventar é discernir, é escolher. O mecanismo de invenção matemática para Poincaré (1946), “não diferencia do mecanismo de invenção geral”. A invenção é um discernimento, uma escolha (HADAMARD, 2009, p. 46).

Hadamard (2009, p. 47) questiona: “como pode ser feita essa escolha?” Ele mesmo responde referindo à Poincaré: “as regras que a devem guiar [...] são extremamente finas e delicadas. É quase impossível enunciá-las numa linguagem exata; elas são mais sentidas do que formuladas”. É o “próprio inconsciente que deve perceber exclusivamente as combinações interessantes” (p. 48) e descartar às inúteis. Assim, Hadamard (2009, p. 48) chega a uma dupla conclusão, baseado no que Poincaré coloca sobre a intervenção do sentido da beleza nesse processo, ou seja “a invenção é uma escolha; essa escolha é governada de modo imperativo pelo sentido da beleza científica”.

As ideias escolhidas pelo inconsciente, as que chegam ao consciente, são precisamente as que estão de acordo com o senso estético. Logo, a beleza é a força motora para a descoberta, afirma Hadamard (2009), concordando com as ideias de Poincaré.

Para esclarecer melhor como funciona esse processo na mente de um matemático, Poincaré relata um fato que aconteceu com ele e que o permitiu dar base, descobrir a teoria dos grupos fuchsianos e das funções fuchsianas. Tal relato, apesar de extenso, é muito importante para a compreensão.

Relata Poincaré (1946, p. 45-46):

Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga ao que depois vim a chamar de funções fuchsianas; naquela época eu era muito ignorante; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Numa noite, contrariando o meu costume, tomei café e não consegui dormir; então, as ideias surgiam em massa, eu sentia como elas se chocavam, até que duas delas se encaixaram formando uma combinação estável. Na manhã seguinte, tinha já estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica; não tive mais que redigir os resultados o que apenas me levou algumas horas.

Quis, na sequência, representar essas funções pelo quociente de duas séries, esta ideia foi perfeitamente consciente e refletida: era guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntava-me quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e cheguei sem dificuldades a formar as séries que chamei thetafuchsianas.

Nesse então, eu deixava Caen, onde morava, para participar de um concurso organizado pela Escola de Minas. As peripécias da viagem fizeram-me esquecer meus trabalhos matemáticos; ao chegar a Coutances, subindo num ônibus para fazer um passeio e no momento que colocava o pé no degrau, veio-me a ideia sem que nada do que eu estava pensando me preparasse para aquilo, que as transformações que tinha utilizado para definir as funções fuchsianas eram idênticas às da Geometria não-euclidiana. Não fiz as verificações, não tive tempo, pois assim que me sentei no ônibus retomei a conversa que havia começado, mas tive de imediato uma absoluta certeza. Ao voltar a Caen, verifiquei o resultado mais repousadamente, para a tranquilidade de meu espírito.

Coloquei-me, então, a estudar as questões aritméticas sem grande resultado aparente e sem suspeitar que isso tivesse qualquer relação com as minhas descobertas anteriores. Aborrecido com o meu fracasso, fui passar uns dias à beira-mar e procurei pensar em outras coisas diferentes. Um dia, enquanto passeava por uma falésia, veio-me a ideia, sempre com as mesmas características de brevidade, instantaneidade e

certeza imediata, de que as transformações aritméticas de formas quadráticas ternárias indeterminadas eram idênticas às da geometria não-euclidiana.

Para Hadamard (2009), esses dois resultados relatados por Poincaré mostraram que existiam outras funções fuchsianas além das que ele descobrira durante a insônia. Essas eram mais gerais. Ao fazer um esforço consciente e persistente, compreendeu que havia graves dificuldades e no início não conseguiu superá-las. Mais uma vez, a solução surgiu depois, de maneira inesperada e sem preparação como nos dois outros casos.

Esse relato de Poincaré demonstra a importância da atividade inconsciente, mas essa só será fecunda se for precedida de um trabalho consciente, ou seja, depois de alguns intervalos de um intenso trabalho voluntário. Após um período de trabalho voluntário e repouso, a ideia surge à mente do matemático, como se o repouso restituísse ao espírito sua força. Poincaré (1946) coloca que o eu inconsciente desempenha papel fundamental para as descobertas em matemática e não pode, portanto, agir de modo puramente mecânico, pois se assim o fosse, qualquer máquina poderia fazer esse trabalho. A multiplicidade do inconsciente possibilita realizar um trabalho de síntese. Essa “síntese fornece o fio condutor sem o qual ficaríamos como o cego que pode andar, mas não sabe qual direção seguir” (HADAMARD, 2009, p. 126).

E como escolher as melhores combinações que poderiam gerar novas descobertas em matemática? São os entes matemáticos a que atribuímos características de beleza, de elegância e que são susceptíveis de desencadear em nós um sentimento de emoção estética. São aqueles cujos elementos estão dispostos harmoniosamente, de forma que a mente possa sem esforço abraçar todo o conjunto, penetrando em todos os seus detalhes. Esta harmonia é simultaneamente uma satisfação para as nossas necessidades estéticas e um auxílio para a mente que a sustenta e guia. E, ao mesmo tempo, ao colocar perante os nossos olhos um conjunto bem ordenado, faz-nos *descobrir*, por exemplo, uma lei matemática (POINCARÉ, 1946).

Segundo Hadamard (2009, p. 45), é evidente que a

invenção ou a descoberta, na matemática como em outras áreas, ocorre por combinação de ideias. Ora, há um número extraordinariamente grande de tais combinações, quase todas desprovidas de interesse. Bem poucas podem ser fecundas. Quais são as que o nosso espírito – quero dizer o nosso espírito consciente – percebe? Apenas as que são fecundas ou, excepcionalmente, as que poderiam tornar-se fecundas.

Para encontrar as combinações fecundas, “foi necessário construir numerosas combinações possíveis, entre as quais é preciso selecionar as combinações úteis” (HADAMARD, 2009, p. 45).

Ainda, segundo Hadamard (2009), citando Poincaré, a invenção passa por diferentes etapas e, após passar pelas etapas do processo de inconsciente, consciente, e assim sucessivamente, tem a etapa de “verificação” e “acabamento”. Nessa fase, intervém a razão, tarefa que pertence exclusivamente ao consciente, pois necessita de exatidão. Cada etapa deve articular-se à seguinte por resultados precisos, chamados de “resultados intermediários”. Por exemplo, “ao cortar um triângulo com uma paralela a um de seus lados obtém-se um triângulo semelhante ao primeiro; esse fato, evidente em si, precisava ser enunciado com precisão para fornecer a longa série de propriedades que dele decorrem” (p. 81-82).

Todo o trabalho científico visa saber e compreender. Por isso a importância das descobertas e das invenções, da intuição e da imaginação em complemento à lógica. Há um gosto científico como há um gosto estético nesse processo. Mas há a necessidade de escolha para que haja as descobertas e as invenções, mas como orientar essa escolha? Voltemos a Poincaré, “o guia que devemos seguir é o senso de beleza, a sensibilidade estética” (HADAMARD, 2009, p. 148).

A arte de inventar não é uma arte abstrata e lógica, daqueles que reduzem o homem ao pensamento e o pensamento ao simples encadeamento de fórmulas, ou fruto da imaginação e da intuição. É uma arte profunda, concreta, organizada, em que são empregadas todas as faculdades e todas as funções do ser, interação da razão e a sensibilidade. É o desenvolvimento mesmo da vida. Para essa nova ideia, essa nova invenção, devem-se levar em consideração as hipóteses testadas, as combinações úteis, os esforços de reflexão e de repouso, o trabalho inconsciente e consciente. Essas novas ideias não são encontradas ao acaso, de forma voluntária, não germinam do nada, mas são desenvolvidas, cultivadas, alimentadas.

Assim, invenção em Poincaré, segundo nossa interpretação, nada mais é que uma intuição alargada, ou seja, uma intuição de ordem superior. A faculdade de invenção exige, acima de tudo, uma intuição “evoluída”. A intuição, como dizia Poincaré, não é apenas uma faculdade de combinar ideias, mas de combinar “boas” ideias. E é a intuição que permite escolher. E para inventar é preciso escolher.

2.6 Algumas contribuições de Kant

Kant sempre foi a referência (positiva ou negativa) de pensadores da matemática nos finais do século XIX e princípios do século XX, e uma de suas principais contribuições é a discussão da natureza das proposições matemáticas, tendo introduzido o conceito de ‘proposição sintética a priori’ e atribuído essa condição especialmente aos axiomas da

geometria euclidiana. A natureza sintética dessas proposições já revela o seu caráter não puramente lógico (analítico), e o seu apriorismo indica que elas não são dadas pela experiência empírica, mas não discute se outro tipo de experiência, por exemplo, a experiência matemática ou a experiência estética, as fundamenta. Algumas questões são levantadas nesse contexto: será que podemos ainda usar a matriz Kantiana para compreender os processos de imaginação e de intuição na matemática atual, ou seja, agora com a inclusão das geometrias não-euclidianas, por exemplo, como já mencionamos?

Para Kant, o conhecimento humano tem duas fontes: a sensibilidade e o entendimento. Pela primeira, através da intuição os objetos nos são dados, de forma passiva e, pela segunda, de modo ativo, os conceitos são concebidos, isto é, criados.

Kant (2004) afirma que “[a] identidade total da apercepção de uma diversidade dada na intuição contém uma síntese das representações e só é possível pela consciência dessa síntese” (p. 124). Em relação ao entendimento, ele afirma que “o princípio supremo dessa mesma possibilidade é que toda a diversidade da intuição esteja submetida às condições da unidade sintética originária da apercepção” (p. 127). E acrescenta: “a síntese das representações assenta-se sobre a imaginação. No entanto, a unidade sintética dessas representações requerida para o juízo descansa-se sobre a unidade da apercepção” (p. 178-179).

O entendimento das noções das geometrias não-euclidianas está ligado ao conceitual na sua formulação puramente lógica e no início da construção/criação de modelos, pois, depois de criados, a intuição em cima desses modelos torna os conceitos envolvidos em objetos, segundo Kant. Na verdade, Kant diz, no início da terceira seção da *Crítica da Razão Pura*, que “o entendimento é a faculdade dos conceitos”, portanto, se entendemos imaginação como criação, ou melhor, como criação de conceitos, então, a imaginação está no campo do conceitual e, portanto, do entendimento.

A intuição deve ser colocada no campo do particular, mas do particular genérico. Em matemática é necessário esclarecer que o que a intuição tem acesso não é o particular concreto, mas sim o particular relacional que se deve mostrar no seu caráter *sintético a priori*, consequência do fato que, segundo Kant, as matemáticas procedem por construções *à priori* de conceitos. Nesse caso, o particular terá certamente um grau de generalidade. Qual é então a diferença entre intuição e imaginação para Kant?

Uma das diferenças é que a intuição, na medida em que é ligada à descoberta, é um tipo de “percepção” de ordem superior (sensibilidade). A noção de “sensibilidade” de Kant possivelmente está muito próxima da percepção, mas trata-se de uma sensibilidade ampliada,

por exemplo, captar o abstrato matemático. Esta sensibilidade que chamamos de intuição admite elementos relacionais.

A intuição, seguindo esse raciocínio, é passiva, porém a imaginação é ativa. Podemos dizer que a imaginação é ativa na medida em que constrói “coisas” elaborando objetos por uma síntese sob um conceito.

Sobre a intuição ser passiva e a imaginação ativa, podemos entender melhor essa diferença através de uma metáfora, por exemplo, a do tempo: o passado pode ser intuído (passivamente), pois ele já está aí, porém o futuro só pode ser imaginado (ativamente), pois ele precisa ser criado, possivelmente fazendo uma síntese de fatos passados para construí-lo. A mesma metáfora mostra-nos que é possível criar várias versões de futuro, assim como é possível criar vários modelos diferentes das geometrias não-euclidianas, sendo uma das características dos processos de criação, sua multiplicidade.

No caso das geometrias não-euclidianas é a escolha dos axiomas o que importa para discussão. Os axiomas, pela sua própria natureza, podem ser escolhidos ou como “verdades evidentes” de uma realidade geométrica pré-existente, como no caso dos axiomas de Euclides, ou podem ser escolhidos como hipóteses de partida, como no caso das geometrias não-euclidianas, que só se tornarão verdades em algum modelo posteriormente construído.

CAPÍTULO 3

IMAGINAÇÃO E INTUIÇÃO: UMA REVISITAÇÃO NO PERCURSO DA POÉTICA PARA A EPISTEMOLOGIA

Segundo Bachelard (1978b, p. 92), “a ciência cria, com efeito, uma filosofia”. Ainda, a “ciência costuma postular uma realidade. [...] Essa realidade, cujo conhecimento não pode ser esgotado, suscita uma pesquisa sem fim. [...] Vamos, pois, adotar como postulado da epistemologia o caráter sempre inacabado do conhecimento” (BACHELARD, 2004, p. 16-17). “A epistemologia deve ser tão móvel quanto a ciência” (BACHELARD, 1966, p. 22, tradução nossa).

Nesse sentido, parafraseando Bachelard (1978b), a matemática cria uma epistemologia. É a ciência na sua dinamicidade que engendra a nova filosofia da ciência. Aplicado ao campo da matemática, será a própria matemática em sua dinamicidade que envolve, além da lógica, a imaginação e a intuição, que permitirá o desenvolvimento de uma filosofia da matemática, em particular, de uma epistemologia da imaginação e da intuição em matemática. E nos indagamos, e por que não? “É preciso forçar a natureza e ir tão longe quanto o nosso espírito” (BACHELARD, 1978a, p. 21). A filosofia como a matemática não é um campo fechado, mas aberto e dinâmico e essa epistemologia da imaginação e da intuição deve elaborar-se a partir das transformações que norteiam o universo da “realidade” matemática.

O universo da realidade matemática nos apresenta um mundo aberto, dinâmico, vivo e em constante transformação. Assim, “quando a imaginação tiver precipitado os elementos materialistas não razoáveis, terá mais liberdade para a construção das experiências científicas [e matemáticas] novas” (BACHELARD, 1994, p. 155).

Esse mundo dinâmico e em movimento permite-nos “ver” além da visão, permite-nos ver com os olhos da imaginação, permite olhar para o interior das coisas, da própria matemática, resgatar sua gênese, sua historicidade e dinamicidade, esse é um desafio na elaboração de uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática.

Essa “necessidade de penetrar, de ir ao interior das coisas, ao interior dos seres, é uma sedução da intuição do calor íntimo. Lá onde o olhar não chega, onde a mão não entra, o calor se insinua” (BACHELARD, 1994, p. 61). Lá é onde opera a imaginação e a intuição. Vemos, então, os conhecimentos científicos e os matemáticos em atividade, em movimento como um organismo. “A maneira como se imagina costuma ser mais instrutiva do que aquilo que se imagina” (BACHELARD, 1994, p. 44).

Na sequência, Bachelard, referindo-se à imaginação, afirma que “é preciso descer mais fundo, até tocar os valores inconscientes. São esses valores que fazem a permanência de certos princípios de explicação. Mediante uma suave tortura, a psicanálise deve fazer o sábio confessar seus motivos inconfessáveis” (BACHELARD, 1994, p. 90-91). Traduz aqui como a produção de conhecimento se concretiza; ir mais fundo é mergulhar na imaginação para depois ser razão. O uso lógico da razão, no universo da imaginação, “consiste em encadear entre si as relações de ideias, mediante uma substituição de termos que é puramente analítica” (BRUNSCHVICG, 1945, p. 285-286, tradução nossa). E é “assim por uma porta estreita, a imaginação ‘nos transcende e nos põe face ao mundo’, como diz Armand Petitjean” (BACHELARD, 1994, p. 133-134). Então se compreenderá que Petitjean tenha podido escrever que a imaginação:

escapa às determinações da psicologia – a psicanálise incluída – e constitui um reino autóctone, autógeno. [...] A imaginação é a força mesma da produção psíquica. Psiquicamente, somos criados por nosso devaneio. Criados e limitados por nosso devaneio, pois é o devaneio que desenha os últimos confins de nosso espírito. A imaginação opera no seu extremo, como uma chama, e é na região da metáfora, na região dadaísta em que o sonho, como viu *Tristan Tzara*, é o ensaio de uma experiência, quando o devaneio transforma formas previamente transformadas, que se deve buscar o segredo das energias mutantes (BACHELARD, 1994, p. 161).

Olhar para dentro é reforçado por Bachelard (2003, p. 7-8) em outra obra, quando diz:

A vontade de olhar para o interior das coisas torna a visão aguçada, a visão penetrante. Transforma a visão numa violência. Ela detecta a falha, a fenda, a fissura pela qual se pode violar o segredo das coisas ocultas. A partir dessa vontade de olhar para o interior das coisas, de olhar o que não se vê, o que não se deve ver, formam-se estranhos devaneios tensos, devaneios que formam um vinco entre as sobancelhas. Já não se trata então de uma curiosidade passiva que aguarda os espetáculos surpreendentes, mas sim de uma curiosidade agressiva, etimologicamente inspetora. É esta curiosidade da criança que destrói seu brinquedo para ver o que há dentro.

Ir para dentro, nos sugere um movimento intenso de pensamento, de imaginação e intuição, que ultrapassa o imediato das sensações superficiais. É uma ação onde os atos humanos são imaginados em intimidade. A imaginação deseja “esquadrinhar a matéria. Todas as grandes forças humanas, mesmo quando se manifestam exteriormente, são imaginadas em sua intimidade. [...] a imaginação nada mais é senão o sujeito transportado às coisas” (BACHELARD, 2003, p. 2).

Fazendo uma analogia para o campo da matemática, podemos dizer que toda teoria, toda “matéria”, “substância”, “produto” em matemática não se isola em sua significação abstrata, mas possui sua materialidade que traz a marca do sujeito em sua completude, ou seja, em uma dialética entre imaginação e razão. A imaginação permite sonhar “além do mundo e aquém das

realidades humanas bem definidas” (BACHELARD, 2003, p. 3). Nesse aspecto, o homem é sujeito que estabelece uma dialética entre imaginação e razão, que assim produz conhecimento, não é um “simples ajustador, mas é também modelador, fundidor, ferreiro. [...] Ele vive, pela imaginação, esse sustentáculo” (Ibidem, 2003, p. 1).

Logo, as forças psíquicas em ação, onde a imaginação e também a intuição têm suas fontes, precisam “deixar os aspectos exteriores para ver outra coisa, ver além, ver por dentro, em suma, escapar à passividade da visão” (BACHELARD, 2003, p. 8).

O pensamento e a inteligência se apoiam na imaginação, mas ela “não se aplica estreitamente como se a imaginação devesse desenhar toda a estrutura e dirigir de antemão todo o desenvolvimento” (BRUNSCHVICG, 1945, p. 42, tradução nossa). Querer captar o mecanismo da inteligência, levando em consideração somente os objetos que são representáveis mediante a intuição, sem haver a relação de atividade interna, ou seja, do pensamento, é seguir um caminho falso (BRUNSCHVICG, 1945).

O pensamento humano, o sonho humano como a visão humana sempre recebe as imagens superficiais das coisas, apenas as formas superficiais, é necessário ir além da visão, para “ver” o que os olhos não conseguem ver, e isso é permitido pela imaginação, porém uma imaginação amadurecida. A natureza tem sentido de profundidade e para compreendê-la é necessário mergulhar nessa profundidade, tirar as máscaras que encobrem o seu interior.

Tão embrutecidos pela razão, posto ou imposto pela comunidade científica, não conseguimos, muito vezes, ver ou aceitar outro método e formas para a produção de conhecimentos. Porém, percebe-se bem que uma “teoria do conhecimento do real que se desinteressa dos valores oníricos se priva de alguns dos interesses que impelem ao conhecimento” (BACHELARD, 2003, p. 10). Mas, adentrando ao interior das coisas, percebemos quão espaçoso é esse espaço interno, quantas coisas a descobrir. Um postulado da imaginação pode nos dar a potência das analogias imaginárias e levar-nos a “ver” o mundo, a realidade na sua crueza, revelando-nos um universo de interioridade, onde a soberana “razão” se sente ameaçada. “Parece que a imaginação é então uma louca esperança de ver sem limites” (BACHELARD, 2003, p. 14). O sentir é reintegrado ao pensar.

Assim, as “dialéticas da razão que justapõe as contradições para abranger todo o campo do possível e as dialéticas da imaginação que querem apreender todo o real encontram mais realidade que se oculta do que naquilo que se mostra” (BACHELARD, 2003, p. 21). São submetidos à lei da imaginação uma multiplicidade de fatos, de ideias, de hipóteses e nessa multiplicidade há agitação, porém organizada como em um formigueiro, uma agitação em atividade.

Não há na ciência e também na matemática, um único caos imóvel, as ideias estão em movimento, em agitação, sendo necessário, portanto, a intervenção da imaginação para auxiliar a fazer escolhas e decidir qual hipótese convém para estruturar uma teoria. Nessa multiplicidade, promovida pela imaginação, veremos melhor a origem e, portanto, teremos uma síntese, uma unidade, um todo organizado que leva ao conhecimento.

Pela lógica é que provamos, mas é pela intuição e imaginação que encontramos o que buscamos, nos ensina Poincaré (1995); a intuição é a ferramenta que permite o acesso às ideias, às descobertas e guia as escolhas. É na escrita de uma teoria matemática, de uma demonstração, em que é preciso cumprir regras lógicas e formais, que a intuição se reorganiza, porém, ela, na maioria das vezes, não é mencionada nas produções escritas. É a intuição que faz com que passemos de uma ideia a outra, é esta imensidão de associações de ideias que surgem quando fazemos as boas perguntas, que nos permitem iniciar, continuar e chegar ao fim de uma demonstração.

A imaginação e a intuição estão presentes na matemática, mais do que em outras ciências. A história da matemática revela criações intelectuais inesperadas quanto efêmeras, ligadas a um trabalho permanente de investigação e maturação intelectual. Newton, por exemplo, teve a intuição da força da gravitação universal para pensar a dinâmica dos sólidos e corpos em queda. Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemático autodidata indiano, era conhecido e respeitado por sua intuição numérica prodigiosa. Ele acreditava que suas descobertas matemáticas eram reveladas a ele em sonhos.

Logo, a opção por Poincaré e Bachelard como base teórica para esse trabalho se deu por encontrarmos nas suas ideias e pensamentos um apelo à criação no domínio da arte, da poesia, da ciência e da matemática. Seus pensamentos eram extremamente fecundos e “agitados” como que abertos e prontos para um novo devir. O ato criador não se reduz ao ato de imaginar, mas começa por uma atitude de profunda admiração das coisas. Somos todos seres profundos com capacidades imensas para imaginar e criar, intuir e descobrir, poetizar e produzir. A poética é um caminho para a descoberta das forças vivas da natureza. A poética é um caminho para descobertas no campo científico e matemático.

3.1 Retomando os primeiros passos na elaboração de uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática

O conhecimento matemático socialmente produzido pela humanidade, coletiva e historicamente, exige formas diferenciadas para apreendê-lo. Comumente se aceita que essa

apreensão está ligada às formas que privilegiam a racionalidade, a lógica, as regras, o rigor. No entanto, a apreensão do “mundo”, em que o conhecimento matemático tem papel fundamental, se vale de aspectos ligados à sensibilidade, à intuição e à imaginação, cuja racionalidade escapa de qualquer lógica.

Nesse sentido, é que entendemos que há uma “matemática diurna” e uma “matemática noturna” que, em complemento, permitem compreender a própria matemática. A diurna é regida pela lógica, pela análise, pelos algoritmos, pelas demonstrações, enquanto que a noturna é guiada pela imaginação, pela intuição e pela síntese.

A síntese (em oposição à análise) pode ser considerada como um dos métodos para ascender ao conhecimento que vai do simples ao composto, dos elementos às suas combinações, nos objetos cuja natureza se pretende explicar. A oposição dos dois métodos foi expressa pela primeira vez por Descartes. Leibniz assim a expressava: chega-se muitas vezes a belas verdades por meio da síntese, indo do simples ao composto, mas quando é preciso encontrar o meio de fazer aquilo que se propõe, a síntese normalmente não basta, cabe à análise dar-nos o fio condutor, quando isso é possível, porque há casos em que a natureza do problema exige que se proceda tateando, e nem é possível cortar o caminho (ABBAGNANO, 2000).

No decorrer deste texto, aparecerá em vários momentos a expressão “compreender a matemática”, assim, é importante salientar o sentido de *compreensão* com um forte viés estético. Para motivar a resposta à pergunta “o que significa compreender a matemática?”, faz-se outro questionamento: o que significa compreender a poesia? Compreender a poesia não é apenas entender o que ela diz literalmente, sua ordenação de palavras, sua racionalidade, sua lógica, mas é também captar o sentimento que ela traz, a sensibilidade que desperta no leitor. Voltando à questão sobre o que significa compreender a matemática, analogamente à poesia, compreender a matemática não seria apenas entender sua racionalidade, seus encadeamentos lógicos, seus processos algorítmicos, a matemática pensada tradicionalmente, caracterizada pela exatidão e a certeza, mas, também apreender a sensibilidade que está por trás dos conceitos matemáticos em estudo, ou melhor dizendo, ter a “experiência estética” desses conceitos. Nesse entendimento de “compreensão” em matemática está colocada a relação entre matemática e arte (GUSMÃO, 2013) que será relevante em toda discussão. E, por que não dizer, entre a matemática e outras ciências.

Poincaré (1995) compara o compreender a matemática a um jogo de xadrez. Para compreender a partida, não basta saber as regras do movimento das peças. Como já vimos, isso só permite reconhecer que cada lance foi jogado em conformidade com aquelas regras, e essa vantagem realmente teria pouco valor. Compreender, então, a partida é algo inteiramente

diferente, é saber por que o jogador escolhe uma determinada sequência de passos ao invés de outra. É perceber a razão íntima que faz dessa série de lances sucessivos uma espécie de um todo organizado que permite sucesso (a vitória) na partida. E para tal, necessitamos de certas faculdades que nos façam ver o fim de longe, e essas faculdades são a intuição e a imaginação. Cada movimentação das peças é resultado de uma síntese.

Outra expressão recorrente que aparece no texto é “interpretar a realidade”, mas o que é a “realidade” da qual falamos? Quando falamos em realidade, podemos pensar numa espécie de “realidade exterior” que pode ser organizada na forma de realidade social, física, biológica, abstrata etc. Um primeiro passo na compreensão dessa realidade é através da identificação de certos fatos. Os fatos não são a mesma coisa que fragmentos da realidade, mas devem ser entendidos como fatos científicos que, para Poincaré (1946), são recortes da realidade devidamente modificados, transformados ou simplificados e têm o caráter de hipótese. A realidade existe e para compreendê-la extrai-se uma parte pequena dela e realiza-se a interpretação. Nesse sentido, entra em cena a imaginação e a intuição para o estabelecimento dos fatos, que permitam compreender essa realidade.

Nesse sentido, interpretar a realidade pressupõe fazer escolhas e a escolha é dada pela intuição. Por exemplo, o processo de escolher o caminho mais adequado para resolver um problema matemático escapa de qualquer lógica, residindo aí um aspecto belo e estético da matemática. O raciocínio matemático também é uma sequência de passos, a escolha de cada passo é dada pela intuição. Uma demonstração que garante rigor e verdade à matemática não é puramente lógica, é também movida pela intuição.

Diante das potencialidades que a imaginação e a intuição proporcionam para a elaboração do conhecimento científico e matemático é que nos dá condições para sustentar nesta tese a necessidade de uma epistemologia da imaginação e da intuição, por meio de uma síntese e dialética entre a razão e os processos de imaginação e intuição, entre o pensar e o sentir. A imaginação à sua maneira é objetiva, possui uma certa racionalidade. “Para ir mais longe, basta às vezes começar e sonhar” (BACHELARD, 2003, p. 29). “A imaginação vai longe; ela faz filosofia” (BACHELARD, 2003, p. 57), e o sentir é reintegrado ao pensar.

Entre a lógica, a imaginação e a intuição não há uma melhor escolha. Essas são formas indispensáveis para o pensamento matemático e ideal para se fazer matemática. Em vez de escolher uma ou outra, o ideal é cultivá-las em perfeita harmonia, mesmo sabendo quando uma é a dominante, pois é “pela lógica que provamos e é pela intuição que descobrimos” (POINCARÉ, 1908), como já foi dito.

3.2 A síntese, principal instrumento da imaginação e da intuição na constituição do conhecimento

Segundo Abbagnano (2000, p. 905), o termo síntese “além do significado comum de unificação, organização ou composição, tem os seguintes significados específicos: 1) método cognitivo oposto à análise; 2) atividade intelectual”.

No primeiro significado, ou seja, a oposição à análise, “a síntese pode ser considerada como o método que vai do simples ao composto, dos elementos às suas combinações, nos objetos cuja natureza se pretende explicar” (ABBAGNANO, 2000, p. 905). No entanto, para elaboração de conhecimento científico e matemático “a análise e a síntese têm ambas um papel legítimo” (POINCARÉ, 1995. p. 15).

Do ponto de vista de uma teoria do conhecimento científico, o processo de desenvolvimento de conhecimento costuma ser imaginado como um contínuo processo de elaboração, ordenação e organização de pensamento, permeado, em princípio, pela imaginação e intuição, mas uma imaginação e intuição que está guiada por uma certa racionalidade. As teorias científicas e matemáticas emergem então como síntese de uma grande quantidade de processos mentais que, baseados em suposições fundamentais (fatos) que se relacionam entre si, são, então, demonstradas por meio da lógica.

Assim, ao tratar de elaborar uma epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática, estamos, num certo sentido, atribuindo a essas capacidades uma certa cientificidade, que nos permite compreender a realidade matemática. No entanto, a ciência não é a realidade, ela está constituída, mesmo no caso da matemática, de conceitos, teorias que possivelmente não capturam fielmente a realidade, mas a intuição é um nexos entre o mundo dos conceitos e o mundo da percepção sensível. A “vinculação do significado racional de um conceito com significados atribuídos ao mundo real é feita através da intuição. Devemos interpretar a estrutura racional e vincular nossa interpretação à nossa forma de “ver” o mundo” (GURGEL e PIETROCOLA, 2004).

Recursos da imaginação são as simulações mentais. Simulações são formas de exercitar nossa capacidade de criar situações e verificar resultados. São formas de criar hipóteses e são dinâmicas, assim como é o conhecimento. Em se tratando de novas tecnologias, elas estão permitindo que construção de significados abstratos seja possível.

Cifuentes (2010, p. 14) afirma que:

a compreensão da realidade na sua unidade exige, então, a movimentação das duas capacidades essenciais do ser humano, ambas necessárias, como veremos, para constituição do conhecimento e até da própria realidade, considerando esta em seus aspectos tanto materiais quanto espirituais: a razão e a emoção, traduzidas no pensamento e a racionalidade a primeira, e na intuição e a sensibilidade a segunda. Ambas têm seu ápice na matemática e na arte respectivamente.

As exigências contemporâneas pedem múltiplos olhares para uma mesma realidade, um mesmo fato, um mesmo objeto, um mesmo fenômeno, para um mesmo problema, obrigando a razão a ser dialética. Assim, a razão científica e a razão poética devem tornar-se complementares, em uma forma de síntese entre a epistemologia e a poética. Essa dialética nos dá argumentos para a elaboração da procurada epistemologia da imaginação e da intuição no campo da matemática.

Para chegar à unidade, podemos “servir-nos da dialética, como de um estrondo que desperte as ressonâncias adormecidas” (BACHELARD, 1994, p. 160). É “impossível escapar a essa dialética: ter consciência de arder é esfriar; sentir uma intensidade é diminuí-la. É preciso ser intensidade sem sabê-lo. Essa é a triste lei do homem ativo” (BACHELARD, 1994, p. 163). Tal ambiguidade, aparente, dolorosa e inaceitável por muitos é, ao mesmo tempo, poetizante e fonte de conhecimento. Favorecer e estimular a dialética dá ao espírito sua verdadeira liberdade e sua verdadeira função, no processo criador.

3.3 A analogia na imaginação e na intuição como forma de raciocínio

Segundo Abbagnano (2000, p. 55), o termo analogia “tem dois significados fundamentais: 1º) o sentido próprio e restrito, extraído do uso matemático (equivalente à proporção) de igualdade de relações; 2º) o sentido de extensão provável do conhecimento mediante o uso de semelhanças genéricas que se podem aduzir entre situações diversas”.

O uso de analogias é fundamental para o ato criativo e para as descobertas. Elas possibilitam ilustrar, visualizar, explorar relações e, assim, permitir a construção de conhecimentos. A analogia estabelece uma comparação entre um elemento considerado familiar com outro, a princípio, desconhecido. Na matemática, são comparações entre “coisas”, sejam entes matemáticos, ideias, definições, proposições, conceitos ou teorias. A analogia tem intenção de esclarecer, interagir, estruturar, ampliar e avaliar o desconhecido a partir de algo que se conhece. Essa comparação permite descobrir, por exemplo, coisas novas em matemática. Permite ainda o desenvolvimento do pensamento matemático abstrato e a generalização. É uma forma de descoberta por intuição e uma forma de construção através da imaginação.

A analogia, como um instrumento de demonstração, é considerada superficial, porém seu papel é imenso como instrumento de descoberta, pois orienta o pesquisador para a questão de saber precisamente quais são, na analogia observada, os elementos que são semelhantes e as partes que não são. Estabelecer comparações é próprio da engenharia da descoberta, e o objeto descoberto é um resultado de uma forma de intuição de primeira importância, a intuição analógica. A exploração por analogia conduz para certa harmonia, sendo, portanto, um elemento essencial para a beleza da matemática (LE LIONNAIS, 1948).

Segundo Paty (2001, p. 175),

Poincaré denomina “analogias matemáticas” as que exprimem as relações “verdadeiras”, as relações de estrutura, na profundidade dos fatos matemáticos ou físicos; elas justificam e permitem a passagem, por uma extensão criadora, do particular ao geral. No que diz respeito à física, a extensão dos princípios permite atingir plenamente a física teórica e matemática. Todo o ofício do matemático ou do físico consiste em saber descobrir “as analogias verdadeiras, profundas, que os olhos não veem e que a razão adivinha”, graças ao “espírito matemático, que desdenha da matéria para se ater apenas à forma pura”. A analogia neste sentido é inseparável do movimento do pensamento que escapa à simples comparação e à indução empirista, para “inventar livremente”.

As relações de similaridade estabelecidas pela analogia precisam ser portadoras de significados, pois ater-se a relações de semelhança superficial entre os fatos não produziria nada senão banalidade e repetição, sem que se encontrasse o acesso às relações significativas. As similitudes, portadoras de significados, como são, por exemplo, as “analogias matemáticas”, defendidas por Poincaré, transcendem as diferenças materiais. Quanto mais distantes forem os fatos cuja relação se verifica fecunda, mais essencial será a propriedade que eles revelam – o que também corresponde a um caráter estético. A fecundidade da relação entre os fatos, matemáticos ou físicos, é marcada pelo fato de eles fazerem aparecer uma ordem entre os elementos que antes pareciam não relacionados, ou abandonados ao acaso, e por conduzirem ao conhecimento de uma lei. A formação de tais combinações fecundas advém do processo de “invenção matemática”; é atingir aquilo que Poincaré com frequência remete à “harmonia”, referindo-se à “beleza intelectual” e à “elegância matemática” (PATY, 2001).

Para Poincaré, segundo Paty (2001), a harmonia corresponde à instantaneidade da evidência para o espírito, que é atingida, no final das contas, por meio da inteligibilidade. Poincaré citado por Paty (2001) coloca que quanto mais vemos esse conjunto claramente e de um só golpe, melhor perceberemos suas analogias com outros objetos vizinhos, e em consequência, teremos mais chances de descobrir as generalizações possíveis. E um raciocínio “meio intuitivo” permite ver simultaneamente, em razão de sua brevidade, suas diversas partes,

“de modo que se percebe imediatamente aquilo que deve ser modificado para que se adapte a todos os problemas de natureza semelhante que possam vir a se apresentar”.

No processo constitutivo do conhecimento, “Poincaré insiste sobre o fato que no ensino e na aprendizagem da matemática é necessário recorrer à intuição e ao raciocínio por analogia” (HEINZMANN, 2013, p. 116). As reflexões filosóficas de Poincaré sobre a lógica dizem respeito à relação entre psicologia, intuição e estética. E essas capacidades são, também, indispensáveis para criar fatos novos em matemática, afirma Heinzmann (2013).

Um raciocínio por analogia procura descobrir, no fenômeno novo ou desconhecido, uma interpretação evidente no sentido de uma redução a propriedades sensíveis ou abstratas já conhecidas. A analogia pode fundar-se sobre uma grande complexidade conceitual, e ela não exige a simplicidade que se atribui à evidência intuitiva (HEINZMANN, 2013).

O processo de descoberta envolve domínios vizinhos, ou seja, faz-se, geralmente, por analogias para chegar às descobertas. O processo de pesquisa e descoberta por analogia não consiste apenas em traduzir de um campo a outro para obter o semelhante, mas em adaptar propriedades diferentes que, muitas vezes, é preciso separar, fragmentar, dissecar, “estripar”, acrescentar, articular, aniquilar e, para essa adaptação, é preciso, em muitos casos, de manipulações “violentas”, pois é fundamental adaptar o que é intraduzível. Todo esse processo torna a matemática muito fecunda.

Nos processos de descoberta em que a intuição atua “procura-se alcançar um novo modo de ser essencial dos fenômenos, através de estruturas [já existentes] que se configuram dentro da materialidade específica desse fenômeno” (OSTROWER, 2010, p. 69).

Segundo Poincaré (2008, p. 225),

diz-se com frequência que é preciso experimentar sem ideias preconcebidas, isso não é possível; não apenas equivaleria a tornar estéril qualquer experimento, como veríamos que se trata de uma impossibilidade. Cada um traz em si concepção do mundo, da qual não pode desfazer-se com tanta facilidade. É preciso, por exemplo, servir-nos da linguagem; nossa linguagem é repleta de ideias pré-concebidas.

Nesse trecho, percebe-se uma atitude pré-bachelardiana de Poincaré, pois há uma interpretação do mundo a partir de um rol de teorias pré-concebidas. Isso nos dá mais um argumento para colocar em diálogo as ideias de Poincaré e Bachelard em relação à nossa elaboração de uma epistemologia da imaginação e da intuição.

3.4 A racionalidade da imaginação e da intuição

Admitindo a existência do momento de invenção, de criação e de descoberta no processo de produção de conhecimentos científicos e matemáticos, tais processos eram e são até hoje considerados como algo que escapa ao racional, pertencendo ao irracional e, portanto, pouco valorizado nesses processos. Não estamos aqui, também, supervalorizando o poder da imaginação e da intuição, em detrimento da lógica, mas estamos defendendo que essas faculdades desempenham papel importante no acesso ao conhecimento, pois também possuem uma certa racionalidade, sendo um de seus recursos a síntese que não faz parte da lógica.

A imaginação e a intuição são capacidades da mente que permitem associar, sugerir e movimentar ideias, fazer escolhas, realizar inferências, construir argumentos, sendo, portanto, uma forma de raciocínio, uma forma de razão. Os raciocínios provindos da imaginação e da intuição não são absolutos, não são puramente analíticos, mas apresentam variados graus de racionalidade e, portanto, podem complementar os raciocínios lógicos. A imaginação e a intuição são atos da nossa mente, ou seja, são formas de pensar e, portanto, carregam uma certa racionalidade. A imaginação e a intuição não têm pretensões de analisar, verificar ou explicar, mas apresentam, em sua essência, um dinamismo organizador que permite apreender o real e ordená-lo de forma a fazê-lo inteligível ao pensamento.

Tanto a imaginação que, segundo nossas hipóteses de trabalho, é a que permite criar coisas novas ainda não existentes, como a intuição que permite descobrir coisas já existentes não nos são dadas aleatoriamente, arbitrariamente, mas por um processo de trabalho mental, de pensamento racional, de estabelecimento anterior de relações de similaridade. Newton, questionado sobre a descoberta da atração universal, responde: “pensando nisso constantemente” (HADAMARD, 2009, p. 62). Há, então, uma racionalidade anterior a racionalidade da razão.

Nesse sentido, temos em Bachelard (1928, p. 163), que “a teoria matemática parece-nos inventiva em sua essência. [...] A invenção é um método. [...] Assim, ao lado da invenção real, há uma espécie de invenção lógica que tem uma força de convicção particular”.

Mas essa invenção não é arbitrária, tem uma certa objetividade e racionalidade, conforme salienta Bachelard:

É necessário indicar ao leitor como ele pode reviver a intuição criativa, como, ao se apoiar na harmonia das ideias, ele descobrirá a harmonia das coisas. É nesta condição que os processos de invenção entrarão no caminho da objetividade. O desenvolvimento científico não é um desenvolvimento meramente histórico, uma força única a percorrer, e pode-se dizer que a ordem dos pensamentos fecundos é uma ordem natural (BACHELARD, 1928, p. 163, tradução nossa).

O problema da racionalidade da imaginação e da intuição é muito complexo e aqui trabalharemos com a estruturação que fizemos.

CAPÍTULO 4

POINCARÉ E BACHELARD: DIÁLOGOS PARA UM MARCO NA ELABORAÇÃO DE UMA EPISTEMOLOGIA DA IMAGINAÇÃO E DA INTUIÇÃO

Para problematizar o papel da imaginação e da intuição na ciência e na matemática, podemos nos pautar nas epistemologias de Poincaré e de Bachelard colocadas em diálogo, tendo como um horizonte as ideias de Herbert Read, mencionadas na introdução, sobre o que ele chama de “método estético” (READ, 1986), no contexto da educação pela arte, em que valoriza a espontaneidade, a liberdade, a imaginação, a intuição, a criatividade, a sensibilidade no processo de construção de conhecimentos. Subsidiando-nos com isso, buscamos colocar nas suas bases a questão da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” que favoreça a compreensão da própria matemática com implicações na educação matemática.

4.1 O pensamento de Henri Poincaré sobre o “fazer matemático” e a “filosofia matemática” em interlocução com as ciências

Poincaré, matemático, geômetra e físico francês foi considerado um grande mestre e um grande professor. Seu trabalho teórico (pois ele não foi um cientista experimental), contribuiu com a filosofia da ciência, sendo um grande divulgador científico de assuntos avançados, contribuiu também com o desenvolvimento do pensamento qualitativo da matemática, elaborou numerosas reflexões sobre temas fundamentais como o espaço, o tempo, a ciência e a natureza do conhecimento físico e matemático. Foi considerado não somente um matemático universal, mas um filósofo profundo que intervinha nos debates filosóficos com discussões a respeito dos recentes desenvolvimentos da ciência de sua época. Um ponto forte no seu trabalho foi discutir o papel da hipótese e da intuição nas ciências (BOTTAZZINI, 2012).

Brunschvicg (1945, p. 600, tradução nossa), de certa forma se une ao pensamento de Poincaré, afirmando que a verdade da ciência, então,

não implica mais a suposição de uma realidade transcendental; está ligada aos procedimentos de verificação que são imanentes ao desenvolvimento da matemática. É esta verificação que acreditamos poder descobrir a raiz das noções constitutivas do saber. E a encontramos nos momentos decisivos em que o espírito humano se abre a um novo horizonte [...] A filosofia matemática terminou sua tarefa, em condições de seguir a ordem natural da história, tomando consciência de duas características, cuja ligação é a marca específica da inteligência: capacidade indefinida de progresso, inquietude perpétua de verificação.

Discutir a “filosofia matemática” de Poincaré (não a filosofia da matemática) consiste em observá-la sob dois ângulos, que de forma alguma estão equidistantes, mas estabelecem diálogos entre si. Por um lado, temos o fazer matemático no campo da aritmética e da geometria que proporcionam, cada um, o modelo de descobrimento fecundo e de demonstração que o matemático deve seguir para estabelecer e elaborar uma teoria e, por outro lado, a segurança que caracteriza o raciocínio matemático devido à universalidade dos princípios aos quais esses raciocínios estão ligados. A filosofia matemática de Poincaré não é um olhar da filosofia sobre a matemática, mas é uma filosofia permeada de pensamento matemático. “A matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes” (POINCARÉ, 1946, p. 29).

Quem nos ensinou a conhecer as verdadeiras e profundas analogias, aquelas que os olhos não veem, e que a razão adivinha? O espírito, que desdenha a matéria, para só se ater à forma pura. Foi ele quem nos ensinou a chamar pelo mesmo nome seres que só diferem pela matéria (POINCARÉ, 1995, p. 92).

Poincaré iniciou-se na investigação científica com o estudo das equações diferenciais e estabeleceu uma rede de interações entre saberes com ramificações da própria matemática e domínios científicos diversos, sendo então considerado um universalista. Como resultado de suas investigações pode transpor as barreiras nos campos das equações diferenciais, a teoria de grupos, as geometrias não-euclidianas e a topologia. Essa rede de ligações não se restringiu à matemática, chegando ao campo da física e com o apoio da filosofia.

O princípio de recorrência e a noção de grupo traduzem a potência do espírito na aritmética e na geometria respectivamente, no sentido de uma virtude criadora, e eles são, para Poincaré, com traços de inspiração kantiana, da ordem do sintético *a priori*.

Poincaré “propôs em seus estudos sobre a filosofia da ciência, uma teoria da matemática sensível a Kant” (AMOROSO COSTA, 1971, p. 92). Isso quer dizer que muitas ideias de Poincaré têm raízes nas proposições kantianas. A influência de Kant na matemática, particularmente na geometria, foi muito forte. Ele acreditava e defendia severamente a geometria euclidiana como a geometria “natural” e esse fato gerou um certo rechaço à emergência das geometrias não-euclidianas no século XIX. A posição de Kant foi tão forte que se constituiu, a nosso modo de ver, como um obstáculo epistemológico às novas geometrias.

Poincaré “aceita a existência de *juízos sintéticos a priori* e para mostrar que eles constituem o fundamento do método axiomático, procura o domínio em que a ciência conserva a sua pureza máxima, isto é, a aritmética dos números inteiros” (AMOROSO COSTA, 1971, p.

94). No campo da matemática, a aritmética é a ciência mais pura. Na axiomática de Peano, da aritmética há pelo menos um *juízo sintético a priori* que é o princípio que chamamos de recorrência ou indução finita ou completa, princípio esse fundamental no processo do “fazer matemático”. Poincaré considera o princípio de indução matemática como um ingrediente essencial para que a matemática se torne fecunda, sem, no entanto, perder o seu rigor, isto é, incorpora esse princípio, apesar de ser sintético, como parte da lógica da aritmética.

O valor epistemológico na produção científica de Poincaré permitiu que elaborasse novas ideias, teorias e relações, dentre as quais destacam as relações das geometrias não-euclidianas com outras áreas da matemática.

A geometria elaborada por Jonas Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobachevski (1792-1856) desencadeara o surgimento de outros estudos nesse campo. Bernhard Riemann (1826-1866) e Hermann von Helmholtz (1821-1894) foram os primeiros a utilizar essa geometria e foram as contribuições de Félix Klein (1849-1925) e de Sophus Lie (1842-1899) que permitiram avançar e colocar em evidência a importância da noção de grupo, estabelecendo os fundamentos dessa teoria. Foi essa noção, a de grupo, que permitiu a Poincaré fazer associações entre as funções fuchsianas, um ramo clássico da análise, e a geometria não-euclidiana, um campo relativamente novo no mundo da ciência.

Adotando o ponto de vista de Klein, Poincaré defendia que a geometria não é mais que o estudo dos grupos, aliás, dos grupos de transformações geométricas. O impacto da noção de grupo e as suas implicações tanto na matemática como nas ciências da natureza, levou à origem da álgebra abstrata. A partir do encontro com as novas geometrias, Poincaré foi tecendo naturalmente uma epistemologia matemática, sendo chamado de ‘convencionalista’. Em seus trabalhos buscava caracterizar a natureza comum da matemática e da física que considerava intimamente relacionadas.

Com relação ao espaço, Poincaré, a partir de seus trabalhos, afirmava que não existe espaço na natureza, não é um objeto natural, não podendo, portanto, ser “visto” ou “descoberto”, sendo necessário, então, deduzi-lo, a partir de uma estrutura, a qual é criada pela noção de grupo. Se o espaço não pode ser “visto” ou “descoberto” na natureza, compreende-se, então, que é uma criação do espírito humano, sendo, portanto, imposta ao mundo pela ciência.

Poincaré realizou trabalhos sobre a topologia e as geometrias não-euclidianas, levando-o a elaborar e discutir muitos problemas de ordem epistemológica relativos à natureza do espaço e às relações entre a geometria e a física. Uma de suas concepções acerca do espaço refere-se a negar o suposto espaço absoluto da mecânica newtoniana e postular a existência de um espaço relativo. O espaço relativo significa que somente podemos falar sobre posições e movimentos

em relação a outros objetos. A noção de grupo, especialmente dos grupos de transformações geométricas, é, então, para Poincaré fundamental na compreensão do espaço, das geometrias e da natureza.

O “fazer matemático”, na visão de Poincaré, pressupõe métodos, estratégias, hipóteses, observações, representações, teorias, práticas, demonstrações etc. Poincaré, então, fez uma análise epistemológica do modo de fazer matemática para discutir alguns processos que para ele são essenciais nesse fazer.

Na virada do século XIX, Poincaré (1988) defende o papel central desempenhado pela intuição na matemática: o mestre universalista combate os “logicistas” e o programa de axiomatização dessa ciência dos “formalistas”. A busca do rigor, apesar dos avanços dos estudos matemáticos, se encontra cada vez mais distante, esse fato é percebido pelos próprios matemáticos. A intuição do número puro, através do princípio de recorrência, descortina um novo realismo na matemática.

O apelo à intuição e o papel decisivo atribuído ao princípio da indução completa (raciocínio por recorrência) caracterizavam o “intuicionismo” de Poincaré, opondo-o não somente a Hilbert, mas igualmente aos partidários da nova lógica, os logicistas. Poincaré, em suas conferências e em produções de natureza filosófica, desenvolveu as ideias de um matemático fortemente envolvido com a pesquisa heurística. Para ele, para obter um resultado importante, não basta colocar em movimento uma quantidade enorme de cálculos ou possuir uma máquina de colocar as coisas em ordem, não é somente a ordem, mas a ordem inesperada, iluminada pela intuição, que vale alguma coisa. A máquina pode mordiscar o fato bruto, a alma do fato lhe escapará sempre (POINCARÉ, 1988).

A matemática encontra-se próxima da filosofia e da física. Nós sempre vimos, afirma Poincaré (1988), e ainda tornaremos a ver os matemáticos marcharem em duas direções opostas, é certamente útil que a ciência matemática volte-se sobre si mesma, porque é interessante refletir acerca do espírito humano que a criou. As especulações sobre os fundamentos, o estudo dos postulados e das geometrias insólitas são, certamente, úteis. Para Poincaré (1988), no entanto, não há nenhuma dúvida de que é para o lado oposto, para o lado da natureza, que se deve dirigir a maior parte de nosso esforço. Essa direção é diferente daquela defendida pelos logicistas representados por Russell e formalistas por Hilbert.

Para a compreensão da natureza, através da elaboração de teorias e da própria matemática por meio da composição dos sistemas axiomáticos, é necessário, segundo Poincaré, a introdução de hipóteses, pois as verdades não são tão evidentes como parecem ser, nem para o matemático e nem para o cientista. Em geral, faz-se uma imagem da matemática que, na

realidade, não se concretiza na prática. Em cada construção, conjectura, teoria ou demonstração, não há verdades evidentes, mas vêm acompanhadas de suposições e hipóteses. A hipótese não é só necessária, “mas que, quase sempre é legítima” (POINCARÉ, 1988, p. 15) nesse processo. Tais hipóteses levam à admissão de definições ou convenções que, segundo Poincaré, são, em muitos casos, “hipóteses disfarçadas” (POINCARÉ, 1988, p. 16).

Essas convenções são obra da livre atividade de nosso espírito, que, nesse domínio, não reconhece obstáculos. Aí, nosso espírito pode afirmar por que decreta; [...] esses decretos se impõem à *nossa* ciência, que, sem eles, seria impossível; não se impõem à natureza. Porém, esses decretos são arbitrários? Não, se assim fossem, seriam estéreis (POINCARÉ, 1988, p. 16).

Para ilustrar a necessidade de criar hipóteses no próprio campo da matemática com a finalidade de estabelecer uma certa área do conhecimento matemático, podemos mencionar o caso do “mundo do infinito matemático”. O conceito de ‘infinito’ sempre foi uma preocupação para a matemática e a filosofia, em particular, Aristóteles já distinguia teoricamente o infinito chamado ‘em potência’ do infinito chamado ‘em ato’, sendo que esse último não foi aceito pela matemática até o século XIX. A passagem do finito para o infinito não é, de forma alguma, natural e requer certas rupturas conceituais para poder introduzir hipóteses (convenções, decretos) adequadas que lhe deem sustentação. Notoriamente, os matemáticos do século XIX, especialmente Cantor e Dedekind, assumiram como hipótese a seguinte concepção de ‘conjunto infinito’: um conjunto é infinito se é equipotente a um subconjunto próprio, fato considerado paradoxal desde a época de Galileu, quem primeiro observou uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os números pares. Essa hipótese é o ponto de partida para desenvolver a teoria de conjuntos infinitos por Cantor, e deve ser considerada uma verdadeira hipótese criada pela imaginação.

A hipótese sobre a natureza dos conjuntos infinitos, na matemática, é análoga, no caso das ciências naturais, à hipótese atômica. Ela não é considerada verdadeira porque reflete um segmento da realidade, mas pelas suas “boas” consequências no desenvolvimento da ciência.

O objeto do conhecimento científico “não é o mundo natural, mas um mundo de relações matemáticas, de hipóteses verificadas, de teorias ‘retificadas’; a consciência racional – liberta da fascinação das imagens primeiras – cujo eixo é a invenção, criação de um *cosmos* sobre o imaginário e sobre o sensível” (MARCONDES CESAR, 2015, p. 45).

Colocado dessa forma, o raciocínio matemático não tem um caráter exclusivamente dedutivo e lógico. As hipóteses e as ideias das quais fazem uso os cientistas e os matemáticos

apresentam-se livremente ao pensamento e é essa liberdade que lhes permite criar coisas novas. Aliás, para Cantor, “a essência da matemática reside na sua liberdade”.

O papel das hipóteses para Poincaré (1988, p. 15) tem uma função fundamental na ciência, especialmente daquelas encontradas na matemática e nas ciências que estão a ela relacionadas. Ele afirma que

para um observador superficial, a verdade científica está fora do alcance da dúvida; a lógica da ciência é infalível, e se os sábios se enganam algumas vezes é somente por não haver aplicado corretamente as regras. [As verdades científicas e matemáticas] [...] tolhem, por assim dizer, o Criador e só lhe permite escolher algumas soluções relativamente pouco numerosas. Então, algumas experiências serão suficientes para nos fazer saber que escolha foi feita. De cada experiência, uma quantidade de consequências poderão ser retiradas por uma série de deduções matemáticas, e é assim que cada uma delas nos fará conhecer um pedacinho do universo.

A escolha das hipóteses ou dos axiomas nos sistemas, ditos “axiomáticos”, requer o concurso da intuição e/ou da imaginação. No caso da axiomática de Euclides, os axiomas são escolhidos apelando à intuição geométrica do espaço natural. Porém, no caso das geometrias não-euclidianas, os axiomas são criados apelando à imaginação, uma imaginação que sintetiza e generaliza situações análogas de geometrias conhecidas.

Finalizando, Poincaré demonstra nos seus trabalhos uma total centralidade na investigação científica, isto é, na atividade criativa do pensamento próprio das ciências e, nessa interlocução, a matemática, a física e a filosofia estabelecem relações intrínsecas.

4.2 O pensamento de Gaston Bachelard sobre a ciência e a matemática

Filósofo da ciência e epistemólogo francês Bachelard licenciou-se em matemática em 1912 e filosofia em 1920 e doutorou-se em letras em 1927. Foi professor de física, química e filosofia. A produção intelectual de Bachelard teve duas vertentes, como já dito. De um lado, o da epistemologia do universo científico, tratava-se mais precisamente de uma filosofia das ciências ou uma filosofia da descoberta científica que buscava o conhecimento na objetividade do pensamento lógico, na razão, nesse contexto foi chamado de “homem diurno”. Do outro, está o “homem noturno”, o Bachelard do devaneio poético, que pautava seu conhecimento na poética, na imaginação e nos processos criativos (JAPIASSU, 1976).

Considerado um dos mais notáveis filósofos das ciências, sua epistemologia é marcada pela descontinuidade e rupturas com um saber tradicional e definitivo, instaurando uma nova maneira de conceber a história das ciências. Essa epistemologia assume a historicidade

constitutiva do conhecimento racional e se afirma como história da ciência sempre em constante desenvolvimento (JAPIASSU, 1976).

Ao longo da evolução da ciência, percebe-se “que existe mais ruptura do que continuidade”, dizia Bachelard (1996, p. 148) e, no decorrer de suas obras, fornece exemplos sobre esse fato. A história das ciências teve um grande desenvolvimento principalmente a partir da primeira metade do século XX, quando incorporou as ideias filosóficas de Bachelard.

A filosofia de Bachelard afirma-se radicalmente contra a continuidade e contra o imobilismo. Opondo-se radicalmente a todo pensamento fechado e dogmático, Bachelard tentou instaurar um novo tipo de racionalismo. Sua filosofia condena de forma veemente o empirismo e as sínteses fáceis, trata de uma filosofia cujo objetivo principal consiste em instaurar uma nova vida, uma vida capaz de ultrapassar os valores vitais da racionalidade e do imaginário. Seu horizonte espiritual foi formado pelo contato direto com os elementos naturais mais simples, por exemplo: fogo, água, rios, flores, terra (JAPIASSU, 1976).

Sua vida foi uma permanente fome insaciável de conhecer e de sonhar, uma busca constante do novo, uma permanente abertura às forças da criação.

Conhecer é descrever para re-conhecer. [...] Mas há ciências em que as noções se entrelaçam com tal força que a descrição pode ser restrita e bastam definições sumárias, certo que se está de encontrar no devido lugar, em ordem lógica, no âmbito do espírito, as diversas e sucessivas qualidades dos seres definidos (BACHELARD, 2004, p. 13).

Bachelard, na sua postura epistemológica, afirma que só compreendemos o real na medida em que o organizamos racionalmente, a razão vai ao real e não parte dele, ou seja, vai da teoria ao real, é a teoria que cria esse real. “Em oposição às clássicas formulações dos empiristas e racionalistas, Bachelard propõe uma nova interpretação do conhecimento científico, na qual a criatividade do espírito está associada à experiência, numa dialética movida por uma constante retificação dos conceitos” (JAPIASSU, 1976, p. 30).

Para Bachelard (2004, p. 16-17),

a ciência costuma postular uma realidade. A nosso ver, essa realidade, cujo conhecimento não pode ser esgotado, suscita uma pesquisa sem fim. A essência da realidade reside na resistência ao conhecimento. Vamos, pois, adotar como postulado da epistemologia o caráter sempre inacabado do conhecimento.

Nesse sentido, a ciência não descobre uma realidade, ela a postula, sendo, portanto, um conhecimento dinâmico. Esse movimento em que a teoria cria o real pode ser entendido como um ato legítimo de criatividade.

Nessa postura de Bachelard, pode-se perceber um breve reflexo da atitude de Poincaré ao introduzir as hipóteses na estruturação da ciência. Essas hipóteses não revelam uma realidade factual, mas criam os “fatos científicos” em que a ciência se baseia.

O Bachelard (1996, p. 9) diuturno afirma que a razão científica “multiplica suas objeções, dissocia e religa as noções fundamentais, propõe as abstrações mais audaciosas”. Ainda, “quando se trata de experiências sugeridas ou construídas pela razão, a ordem é uma verdade, e a desordem, um erro” (BACHELARD, 1996, p. 8). Complementando Bachelard, diríamos que a experiência promovida pela intuição deve nos conduzir a um “cosmos” (ordem) descoberto, enquanto que a experiência promovida pela imaginação deve nos conduzir a um “cosmos” criado.

Com as revoluções vividas pela ciência contemporânea nos seus fundamentos, Bachelard contesta a ideia de que a ciência progride de forma contínua a partir de uma razão autônoma e imutável. A ciência se insere em um processo constante de historicidade, uma ciência em ação. O “conhecimento só pode ser um ato” (BACHELARD, 2004, p. 42). A ciência em ação pressupõe um processo de construção, criação, produção e retificação, na qual o espírito chega à verdade. A “retificação é uma realidade, ou melhor, é a verdadeira realidade epistemológica em sua dinâmica profunda. Não se explica o pensamento por meio de uma listagem de suas aquisições: uma força o percorre, e é ela que devemos conhecer” (BACHELARD, 2004, p. 300).

A racionalidade científica é instituída por uma análise eminentemente epistemológica. Trata-se, mais precisamente, de uma filosofia da descoberta científica. A epistemologia de Bachelard se interessa pela lógica da criação científica, da verdade como polêmica contra o erro, como esforço para submeter as verdades aproximadas e os métodos que ela emprega a uma retificação permanente. Aplica-se não mais à natureza e ao valor do conhecimento, à ciência feita, realizada e verdadeira, mas às ciências em vias de se fazerem e em suas condições reais de crescimento. Ela é “perturbada a todo o momento pelas objeções da razão, pondo sempre em dúvida o direito particular à abstração, mas absolutamente segura de que a abstração é um dever, o dever científico, a posse enfim purificada do pensamento do mundo!” (BACHELARD, 1996, p. 13). De fato, os objetos abstratos de que trata a ciência e a matemática são aqueles que constituem a nossa ontologia relacional, ontologia que a experiência matemática nos dá acesso através da intuição e da imaginação.

Na sequência, Bachelard (1966) afirma que “é bem mais difícil do que parece separar a razão arquitetônica e a razão polêmica, porque a crítica racional da experiência forma um todo com a organização teórica da experiência: todas as objeções da razão são pretextos para

experiências” (p. 14). E deve ser avaliada pela “perspectiva da razão, e até da perspectiva da razão evoluída, porque é só com as luzes atuais que podemos julgar com plenitude os erros do passado espiritual” (p. 22).

Segundo Bachelard (apud Marcondes Cesar, 2015, p. 33), a cultura científica

cria um mundo, que constitui, para o homem, a realidade passível de conhecimento: “a ciência de hoje é deliberadamente factícia, ela rompe com a natureza para constituir uma técnica. Constrói uma realidade, tira a matéria, dá uma finalidade a forças dispersas. Construção, purificação, concentração dinâmica, eis o trabalho humano, eis o trabalho científico. Do lado do espírito, mesmo trabalho de reconstrução, de longa organização.

Brunschvicg, também citado por Marcondes Cesar (2015, p. 47), afirma que o conhecimento “constitui um mundo que é, para nós, o mundo. Além disso, não há nada; uma coisa que estivesse além do conhecimento seria, por definição, o inacessível, o indeterminável, isto é, equivaleria, para nós, ao nada”. Assim, para a atividade científica é necessária além da assimilação das coisas em perfeita relação, também, a assimilação dos espíritos entre si.

Logo, toda cultura científica deve começar por “uma catarse intelectual e afetiva. Resta, então, a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir” (BACHELARD, 1996, p. 24).

Na epistemologia de Bachelard é necessário que

se apreenda a dialética do pensamento científico, mostrando como se dá a alternância do *a priori* e do *a posteriori* e afirmando a ligação entre racionalismo e empirismo, que constitui a própria essência da atividade científica (BULCÃO, 2009, p. 29).

Ainda, segundo Bulcão (2009, p. 29-30), uma das tarefas da nova filosofia das ciências

será de considerar a reação dos conhecimentos científicos sobre a estrutura espiritual, procurando demonstrar que os conhecimentos novos contradizem os anteriores e que o espírito científico surge de erros retificados. Por outro lado, essa nova epistemologia vai mostrar que não há verdades primeiras ou princípios gerais, mas sim verdades que nascem de erros corrigidos e que vem provar a mobilidade constante do pensamento científico.

O “erro é uma fase da dialética que precisa ser transposta, ele suscita uma investigação mais precisa, é o motor do conhecimento” (BACHELARD, 2004, p. 251). Bachelard não descarta o erro, mas o coloca em diálogo com a verdade.

No projeto filosófico de Bachelard, uma de suas preocupações básicas é adequar a filosofia às ciências contemporâneas e fazer com que a ciência tome consciência da filosofia

que implicitamente encerra (JAPIASSU, 1976). Assim, para Bachelard, a ciência encerra sua própria epistemologia.

Bachelard ressalta em suas obras o caráter específico das ciências contemporâneas, afirmando que estamos vivendo a época do novo espírito científico, permeado de epistemologia. As recentes descobertas da ciência nos mostram esse novo espírito, por exemplo, as geometrias não-euclidianas, a mecânica ondulatória, a teoria quântica, a teoria da relatividade. O novo espírito científico, postulado por Bachelard, trouxe também a natureza do imaginário poético. “É então que entra em cena a filosofia dialética do “por que não?”, que é a característica do novo espírito científico” (BACHELARD, 1978a, p. 21).

Bachelard (1978b) postula que a ciência contemporânea é uma ciência viva, constrói-se por meio de retificações constantes, por exemplo, a “Relatividade de Einstein deforma conceitos primordiais que eram tidos como fixados para sempre. A partir dessa data, a razão multiplica suas objeções, dissocia e religa as noções fundamentais, propõe as abstrações mais audaciosas” (BACHELARD, 1996, p. 9). A ciência postula “métodos novos e que transforma a relação sujeito-objeto, pois, em lugar de ser uma simples reprodução do real, é uma construção objetiva da razão” (BULCÃO, 2009, p. 55). Para Bachelard, portanto, todo saber científico deve ser frequentemente reconstruído, o que nos leva a concluir que a retificação tem o poder de reformar o pensamento, sendo o principal motor da revolução científica. O “espírito científico deve formar-se enquanto se reforma” (BACHELARD, 1996, p. 29).

O que é importante no conhecimento é justamente a relação sujeito-objeto, pois é no encontro desses dois elementos que se dá o ato de conhecer. E para que esse conhecimento seja objetivo e científico, devemos afastar os obstáculos que nele interferem (BULCÃO, 2009). De “maneira mais precisa, detectar os obstáculos epistemológicos é um passo para fundamentar os rudimentos da psicanálise da razão” (BACHELARD, 1996, p. 24).

Bachelard aplica a psicanálise dos quatro elementos (terra, fogo, ar, água), a fim de mostrar a impossibilidade de um conhecimento objetivo, já que representam valores inconscientes. No “estado de pureza alcançado por uma psicanálise do conhecimento objetivo, a ciência é a estética da inteligência” (BACHELARD, 1996, p. 13).

René Magritte (1898 – 1967) é um intérprete de Bachelard. Na sua pintura (a seguir) intitulada *O grande encontro* (1947) mostra-nos sua leitura da Caverna de Platão, em que o “mundo real” está fora, e o mundo da nossa representação, acessível só pela imaginação, pode ser conhecido, no interior da Caverna, através de diversos símbolos. Justamente, Magritte escolhe quatro símbolos que representam os quatro elementos com que os gregos constituíam sua concepção de mundo, e com que Bachelard, já no século XX, desenvolveu sua interpretação

do mundo surreal, ou surracional, da imaginação poética. Os quatro elementos de Bachelard são representados por Magritte da seguinte maneira: a ave representa o ar; o copo representa a água; a chave representa a terra; e o cachimbo representa o fogo.

O grande encontro (1947)



Fonte: <http://www.sothebys.com/content/dam/stb/lots/L07/L07007/L07007-41-lr-1.jpg>

Na obra (a seguir) intitulada *O libertador* (1947), Magritte representa a Caverna de Platão segundo a concepção de Bachelard, concepção que considera o próprio ser humano como uma Caverna de Platão, que só pode “ver” a realidade através de uma concepção dela construída com os quatro elementos bachelardianos. Os quatro elementos gregos constituem a base da metafísica de Bachelard, pois estruturam e proveem a gênese das configurações da imaginação poética, conceito fundamental da vertente noturna de sua filosofia. Eles permitem, para Bachelard, a materialização “substancial” do imaginário poético, permitem trazer, substancializado, para o mundo de Parmênides, o que é volátil. Em suas próprias palavras, os quatro elementos são os “hormônios” que possibilitam as sínteses que concretizam o imaginário para poder ser capturado pela razão epistêmica.

O libertador (1947)



Fonte: [https://uploads5.wikiart.org/images/rene-magritte/the-liberator-1947\(1\).jpg](https://uploads5.wikiart.org/images/rene-magritte/the-liberator-1947(1).jpg)

As vertentes “diurna” (epistêmica) e “noturna” (poética) do pensamento bachelardiano, estão sintetizadas na seguinte frase de Magritte: “A inteligência da exactidão não impede o prazer da inexactidão” (MEURIS, 1993, p. 123).

Marcondes Cesar (2015, p. 20), citando Bachelard, afirma que “a ciência é essencialmente um pôr em relação, e estas relações são múltiplas e sutis, cada vez mais sutis. A verdadeira realidade é a relação, o mundo é uma hierarquia de relações”. A “relação reage sobre a essência” (BACHELARD, 2004, p. 30), ponto de contato maravilhoso com a ontologia relacional de Poincaré.

O objeto científico é hoje um artefato que resulta da construção, na qual se dialetizam razão e técnica. Fazer “ciência não é, apenas, contemplar o universo, mas sim construir, através de pensamento criador e com auxílio da técnica, um mundo surreal, sempre novo” (BULCÃO, 2009). Nessa surrealidade intervém a face poética de Bachelard, já discutida anteriormente, na qual a imaginação tem um papel preponderante.

O papel da matemática na filosofia bachelardiana decorre, como já dito, da sua formação em matemática, o que lhe deu competência para discutir e acompanhar o progresso das ciências naturais, mais especificamente da física e da química, envolvendo estudos sobre a relatividade e a mecânica quântica, por exemplo, em que a atuação da matemática tem um papel fundamental. Além disso, seu desempenho como professor de ciências físicas na faculdade de Bar-sur-Aube permitiu-lhe fortalecer seu contato com a matemática. A relação de Bachelard com a matemática está muito ligada à compreensão do mundo físico.

Com a matemática, a ciência passa a ser inventiva na exploração do real: “é pela matemática que podemos verdadeiramente explorar o real, até o fundo de suas substâncias e em toda extensão de sua diversidade. Na ciência contemporânea se desenha o panorama matemático da matéria” (BACHELARD, 1932b, p. 231). Este esforço criador que agora tem um papel de uma realidade, diz certamente que a criação matemática é algo anterior a qualquer constatação no mundo (BACHELARD, 1946, p. 34). É um pôr evidência algo criado, retificado e que é apresentado como real. “Compreenderá então que o mais real é mais retificado e que não existe conhecimento primitivo que seja conhecimento realista. A realidade máxima está no término do conhecimento e não na origem do conhecimento” (BACHELARD, 2010, p. 19).

É “o esforço matemático que forma o eixo da descoberta, é a expressão matemática que, sozinha, permite pensar o fenômeno. [...] É um instrumento matemático que cria a ciência física contemporânea como o microscópio cria a microbiologia. Não há conhecimentos novos sem o domínio deste instrumento matemático novo!” (BACHELARD, 1978b, p. 117).

Bachelard é convicto que o real científico é um real criado a partir das próprias teorias científicas [e matemáticas], não devendo nada ao real natural. Para ele, “nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído” (BACHELARD, 1996, p. 18). Em outras palavras, tudo, na ciência e na matemática, pode ser introduzido através de hipóteses, como diria Poincaré.

4.3 A matemática e a física numa concepção de matemática para a “epistemologia da imaginação e da intuição”

Nesta seção, insistiremos, ainda, em delinear uma concepção de matemática idônea para a epistemologia da imaginação e da intuição procurada. Nesse contexto, devemos ressaltar, mais uma vez, que a imaginação e a intuição são “mecanismos” que a experiência matemática nos dá para o acesso ao conhecimento dos objetos matemáticos, portanto, há um certo “empirismo” nesse processo que deve ser incorporado a essa concepção de matemática. Resumidamente, o empirismo que adotaremos para a matemática consiste em considerar a possibilidade de fazermos observações e experimentações com os objetos matemáticos mediadas pela imaginação e a intuição enquanto forma de experiência matemática.

Objetivo final da ciência é “a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais – fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social” (CARAÇA, 2005, p. 101), o que permite a compreensão do universo na medida em que há o “estabelecimento de relações entre números, isto é, de leis matemáticas [...]. Elas traduzem a harmonia universal” (CARAÇA, 2005, p. 67). E a harmonia do universo só é possível traduzida por leis da matemática.

No processo de conhecer o universo e a realidade, “não basta conhecer os fenômenos; importa compreender os fenômenos, determinar as razões da sua produção, descortinar as ligações de uns com outros” (CARAÇA, 2005, p. 62).

O aspecto fundamental que a realidade nos apresenta e aquele, portanto, ao qual se deve prender a razão ao procurar uma explicação racional do mundo, é o estarem constantemente as coisas transformando-se umas nas outras [...]. Daqui resulta que é impossível, num dado instante, atingir a permanência, a estabilidade seja do que for; tudo flui, tudo devém, a todo o momento, uma coisa nova. [...] Porque há um princípio universal de luta, de tensão de contrários, que a todo o momento rompe o equilíbrio para criar um equilíbrio novo (CARAÇA, 2005, p. 65).

A compreensão do universo consiste no estabelecimento de relações entre fatos e fenômenos físicos com as leis matemáticas. O “estudo do fenômeno depende de uma atividade

puramente numenal; é a matemática que abre os novos caminhos para a experiência” (BACHELARD, 1978b, p. 119).

Seria “necessário ter esquecido completamente a história da ciência para não nos recordarmos que o desejo de conhecer a natureza teve, sobre o desenvolvimento da matemática, a influência mais constante e mais feliz” (BRUTTER, 1998, p. 50). Ainda para Brutter (1998, p. 19),

aqueles que ignoram a matemática dão por vezes provas de uma grande ingenuidade a seu respeito. Consideram-na toda poderosa, capaz de criar de imediato um modelo de fenômeno que não compreendem, de sugerir a experiência crucial que dará corpo a uma intuição ainda mais obscura.

A matemática tem a virtude de exemplificar algumas situações, comportamentos, e mostrar a sua universalidade. A sua utilização permite compreender, ou mesmo justificar, a presença de numerosas estruturas morfológicas, de muitos fenômenos dos mundos físico, biológico, social etc.

Ela contribui para

revelar a importância de conceitos facilmente acessíveis, tais como a estabilidade, a singularidade, aliados do exemplo atento de situações físicas. São conceitos de natureza dinâmica, em relação direta com a maneira como se estruturam todos os meios em evolução, quer sejam físicos ou não (BRUTTER, 1998, p. 23).

A matemática já não é, então, considerada como uma ferramenta de representação explícita e de previsibilidade perfeita, mas, sobretudo uma ferramenta conceitual e contribui para interpretar. Ela “passa a ser o instrumento universal de inteligibilidade. Esta é uma das suas principais funções” (BRUTTER, 1998, p. 23). Ela é considerada um instrumento que favorece o estudo da natureza e, dessa forma, mantém laços estreitos com a física.

Por outro lado, a matemática também provém da física ou tem motivações fortes na física, esse fato impõe um caráter interdisciplinar entre esses dois campos. Porém, o fato de dizer que provém da física, não quer dizer que a matemática provém da natureza, porque a física, tal como se conhece, já é uma teoria abstrata da natureza. É, a partir dessa abstração, que assentam-se os conceitos da física, que dizemos que a matemática provém da física. Por exemplo, o conceito geométrico de reta provém da ideia física de raio luminoso, mas o raio luminoso já é uma conceitualização da natureza, capturado de um fenômeno natural. Os geômetras, por exemplo, “servem-se de figuras visíveis, e fazem objeto de seus raciocínios, mas o objeto verdadeiro, não são essas figuras, são outras realidades, às quais essas figuras se parecem” (BRUNSCHVIG, 1945, p. 74-75, tradução nossa).

No estudo da natureza, “a matemática intervém em dois planos distintos: o primeiro é puramente instrumental e técnico, o segundo mais sutil, situa-se ao nível da gênese da compreensão e dos pensamentos através da formação adquirida pela aprendizagem da matemática” (BRUTTER, 1998, p. 46). A geometrização dos “objetos e dos processos é a grande técnica que nos permitiu progredir no conhecimento da natureza. É através de uma espécie de visão espacial, de natureza física, embora apoiada num fundo racional, que compreendemos os fenômenos, que ‘vemos’ propriedades” (BRUTTER, 1998, p. 20). Esta é uma visão bachelardiana da natureza.

Bachelard (1978a, p. 79), citando Korzybsky, coloca que

a matemática é uma linguagem de estrutura semelhante à estrutura dos organismos, por outras palavras, é uma linguagem correta não só do ponto de vista neurológico mas também do ponto de vista biológico. Esta característica das matemáticas, descoberta de uma forma absolutamente inesperada, torna possível a fusão da geometria e da física.

Para Bachelard, a física encontrou na matemática

uma linguagem que se desliga com facilidade de sua base experimental e, por assim dizer, pensa sozinha. Mas de fato somos obrigados, para compreender efetivamente uma experiência física, a traduzir sob a forma de experiência pessoal as conclusões que a matemática sugere (BACHELARD, 2004, p. 14).

Assim, o papel da matemática na física contemporânea, segundo Bachelard (1996, p. 7-8), “supera, pois, de modo singular, a simples descrição geométrica. O matematismo já não é descritivo e sim formador. A ciência da realidade já não se contenta com o como fenomenológico; ela procura o porquê matemático”.

A matemática, enquanto realizadora de experiências de pensamento, enquanto reflexão sobre o mundo físico, “constitui o prolongamento natural e obrigatório da física, na qual se encontram os seus verdadeiros fundamentos; os seus desenvolvimentos permitem aprofundar o conhecimento do mundo físico, ver, ou mesmo prever, comportamentos e propriedades que ainda tinham escapado à sagacidade dos investigadores” (BRUTTER, 1998, p. 18).

O problema da maneira como a natureza preenche o espaço pela matemática é evidentemente dos mais apaixonantes, residindo aí o aspecto estético da relação entre a matemática e a física. Se considerarmos um preenchimento regular do espaço, somos levados a estudar a teoria dos poliedros, a dos grupos cristalográficos, e, de uma forma mais geral, a das coberturas. Os cinco poliedros de Platão, os treze poliedros euclidianos semirregulares são conhecidos desde Arquimedes, porém, só hoje, ou seja, vinte e um séculos depois da descoberta

de Arquimedes, os químicos utilizaram os seus trabalhos para estudar os furelenos, corpos novos no nosso ambiente próximo (BRUTTER, 1998).

A matemática é hoje um instrumento indispensável à física. Sem uma compreensão básica dos problemas matemáticos, não se pode mais acompanhar os eventos que estão realizando na pesquisa física moderna. Por exemplo, para estudar a ideia básica da teoria da relatividade, é preciso conhecer o alfabeto matemático. A física do nosso século está grandemente matematizada. O papel da física na matemática é guiar a generalização de modo a aumentar o rendimento da ciência. Toda generalização supõe, numa certa medida, a crença na unidade e na simplicidade da natureza (POINCARÉ, 1988).

Assim como a matemática é relevante para o desenvolvimento da física, também a física é relevante para o desenvolvimento da matemática. Por exemplo, o conceito gaussiano de distância, base da geometria, é motivado pela interpretação de Helmholtz da definição física de uma medida. Esse, dentre outros, é um ponto em que a geometria e a física se confundem. Às vezes também compartilham os próprios objetos empíricos. A esse respeito, observou Poincaré (apud FUCHS, 1970), entre os objetos que nos rodeiam existem alguns que sofrem deslocamentos, de modo que podemos compensar seus movimentos por movimentos correspondentes do nosso próprio corpo. São os corpos sólidos. Se não houvesse sólidos na natureza, também não existiria a geometria.

Desse modo, “a física torna-se uma ciência geométrica, e a geometria, uma ciência física” (BACHELARD, 1978b, p. 113). Não só a geometria física, como também “qualquer geometria [segundo Poincaré] está relacionada à matéria e não pode ser imaginada sem sólidos” (FUCHS, 1970, p. 241).

Assim, a matemática, na sua dinamicidade, incorpora qualidades físicas que encontramos no espaço e no tempo, possui um caráter de física abstrata. Ela encontra os fundamentos das suas construções, a origem dos seus enunciados, dos seus teoremas mais profundos não na matemática em si, mas no seio do mundo físico. Ela deve então ser considerada como a descrição de um universo físico ideal, base do empirismo mencionado anteriormente.

O caminho mais curto da geometria euclidiana, como teoria matemática, à geometria física correspondente, foi indicado por Albert Einstein:

se à geometria euclidiana adicionarmos mais um teorema, ou seja, que a qualquer par de pontos de um corpo praticamente rígido corresponde sempre a mesma distância, independentemente de quaisquer deslocamentos aplicados ao corpo, então os teoremas da geometria euclidiana se tornam teoremas sobre as possíveis posições

relativas de corpo praticamente rígidos. A geometria assim suplementada deve ser tratada como um ramo da física (FUCHS, 1970, p. 242).

A geometrização dos objetos e dos processos é o grande artifício que nos permitiu progredir e avançar no conhecimento da natureza. Os objetos geométricos pertencem ao mundo das ideias e, ao mesmo tempo, têm sua origem no mundo físico, representam abstrações de objetos materiais, e é por meio de uma espécie de visão espacial, fruto de um processo imaginativo e intuitivo de natureza física, embora apoiada num fundo racional, que compreendemos os fenômenos, que “vemos” propriedades e objetos.

Sobre a geometria, Poincaré (1988, p. 17) questiona:

De onde vêm os primeiros princípios da Geometria? Eles nos são impostos pela lógica? Lobatchevsky nos mostrou que não, criando as geometrias não-euclidianas. O espaço nos é revelado por nossos sentidos? Também não, pois o que os nossos sentidos poderiam nos revelar difere, inteiramente, do espaço do geômetra. A geometria deriva da experiência? Uma discussão aprofundada nos mostrará que não. Então concluiremos que esses princípios não passam de convenções; mas essas convenções não são arbitrárias, e, transpostas para um outro mundo (que chamo o mundo não-euclidiano e que procuro imaginar), seríamos levados a adotar outras convenções.

A “experiência” a que se refere Poincaré é a experiência física dos fenômenos da natureza. Porém, a apreensão do espaço do geômetra é dada pela experiência matemática, guiada pela intuição e/ou imaginação, e, portanto, tem também um caráter empírico que não é conduzido pelos sentidos. Logo, o acesso aos fenômenos geométricos não é dado totalmente por convenções.

Relacionando à física, Poincaré (1988, p. 17) afirma que:

em mecânica, seríamos levados a conclusões análogas e veríamos que os princípios dessa ciência, ainda que mais diretamente apoiados sobre a experiência [experiência empírica, física], participam, ainda, do caráter convencional dos postulados geométricos.

As relações entre a matemática e a física são muito fortes. Segundo Poincaré (1995, p. 90),

o matemático não deve ser para o físico um simples fornecedor de fórmulas; é preciso que haja entre eles uma colaboração mais íntima. A física matemática e a análise pura não são apenas potências limítrofes, que mantêm relações de boa vizinhança; penetram-se mutuamente, e seu espírito é o mesmo.

Segundo Bachelard, a indução na ciência contemporânea, muito defendida também por Poincaré, decorre do papel da matemática no seu desenvolvimento. “O poder de invenção da

física decorre de sua matematização. Enquanto a física experimental fornece o material e os problemas, a física matemática cria possibilidades de novas realizações. É a física pensada matematicamente que inventa o real” (BULCÃO, 2009, p. 102). Para Bachelard (*apud* Bulcão, 2009, p. 102), “o valor indutivo da teoria científica decorre de seu *status* matemático. O valor indutivo da matemática reside na sua própria natureza, pois ela é ciência que permite a generalização e a complexificação das relações”.

Para Bachelard, a matemática forma a base de explicação física, e as condições do pensamento abstrato não podem ser separadas das condições experimentais. As relações entre o abstrato (formal) e o concreto (material) se expressam nas relações entre a matemática e a física. A fórmula matemática, embora pareça abstrata, possui uma força de organização que nos impede de desprezar seu aspecto de concretude. “A matemática não é uma simples linguagem, um simples meio de expressão que apenas traduz a realidade fenomenal. A matemática abre caminhos a investigações racionalistas diversas e, através da criação de um corpo de conceitos, organiza a experiência, [cria um “cosmos” para ser observado pela imaginação e/ou intuição]” (BULCÃO, 2009, p. 104).

O caráter dialético, somado ao caráter sintético, é outra característica que Bachelard atribui à matemática. O “desdobramento do pensamento geométrico, ocorrido com o surgimento das geometrias não euclidianas, traduz a dialética existente na matemática e destrói a tese do convencionalismo matemático” (BULCÃO, 2009, p. 105-106). Aqui há uma discordância entre as concepções de matemática de Poincaré e Bachelard que deve ser aprofundada, podendo ser colocada no contexto da concepção empírica da matemática sugerida anteriormente.

Essas características possibilitam descobertas em matemática, permitem pensar e refletir sobre as diversas multiplicidades que qualificam o fenômeno. O instrumento matemático é, portanto, imprescindível para fazer progredir a ciência contemporânea. Portanto, nesse movimento, a matemática torna-se realizante, e realizante na própria matemática. Naturalmente, “é no domínio matemático que esta função realizante atua com o máximo de delicadeza; é neste domínio que é mais difícil distingui-la, mas é também aí que seria mais instrutivo apreendê-la” (BACHELARD, 1976b, p. 105-106).

Na verdade, “a matemática é realizante, não só porque é capaz de ampliar a ciência, criando teorias novas, como também é realizante no sentido de construir fenômenos e possibilidades fenomenais que não poderiam ser constatados simplesmente na realidade” (BULCÃO, 2009, p. 113).

São muitas as relações que a matemática estabelece com a física, como já citamos, e essas relações são fundamentais para compreender e interpretar a realidade, seja ela social, física, biológica, abstrata e compreender a própria matemática. Busca-se então um saber cada vez mais integrado, distanciando-se de um saber fragmentado.

Contra esse saber fragmentado, defendemos a interdisciplinaridade entre a matemática e a física e, devido a sua proximidade, a imaginação e a intuição atuam de forma similar em ambos os campos.

4.4 Poincaré e Bachelard em diálogo sobre a relação ciência e realidade

Esta seção busca trazer diálogos, aproximações e/ou divergências entre as ideias de Poincaré e de Bachelard no campo da história e filosofia da ciência e da matemática. Ambos se interessam pelas grandes questões da epistemologia da ciência e demonstram em seus trabalhos tais preocupações. Temos, então, o Poincaré dualista que discute a lógica e a intuição e, da mesma forma, o Bachelard que se apresenta em suas duas vertentes, “diurna” e “noturna”.

Para Poincaré e também para Bachelard, existe uma íntima relação entre progresso humano, entendido como o progresso de ordem intelectual e moral, e progresso científico. Sendo que progresso do conhecimento é uma caminhada do homem em direção ao espírito, tanto o *esprit de geometrie* como o *esprit de finesse*. O *esprit de finesse* é um termo concebido por Pascal, porém, adotado por eles como sinônimo de fecundidade, invenção, descoberta e criação.

Em ambos, o objetivo do conhecimento científico é seguir, por meio da história, a constituição do universo pelo homem, porque o objeto não se dá em nós como de imediato, ou seja, a marcha em direção ao objeto não é inicialmente objetiva, parte de uma intuição e uma imaginação apurada. O conhecimento no seu processo de *finesse*, clareza, simplicidade, refinamento, postula uma epistemologia do inacabado, está, então, em movimento, sendo, portanto, um espírito vivo, nesse aspecto, em criação contínua. Esse movimento solicita ao espírito se colocar sempre diante de um real inesgotável que constitui o elemento do conhecimento.

Tanto Poincaré como Bachelard falam de “fatos” e devemos distinguir “fato real”, ou seja, o que acontece na imediatez do dia a dia, de “fato científico”, ou seja, o que deve ser traduzido no campo da ciência. O fato científico para Poincaré é a imagem do fato real, é parte da realidade, é extraído da realidade para ser modelado, utilizando-se, na maioria dos casos, de

conceitos matemáticos. Por sua vez, para Bachelard, o fato científico não é a imagem de nada real, mas é criado a partir de uma teoria.

Para obter um fato, é necessário partir de uma proposição experimental, assim para obter uma lei é necessário partir de várias proposições experimentais. Nesse processo, é necessária a generalização, pois um “fato qualquer pode ser generalizado de uma infinidade de maneiras e que se trata de escolher; a escolha só pode ser guiada por considerações de simplicidade” (POINCARÉ, 1988, p. 118). Para Bachelard (1996, p. 22), “mesmo nas ciências experimentais é sempre a interpretação racional que põe os fatos em seu devido lugar”. Ainda, “as leis descobertas na experiência são pensamentos sob forma de regras aptas para descobrir fatos novos” (BACHELARD, 1978b, p. 158). Percebe-se assim, segundo Bachelard (1996, p. 22) a “diferença entre o ofício de epistemólogo e o de historiador da ciência. O historiador da ciência deve tomar as ideias como se fossem fatos. O epistemólogo deve tomar os fatos como se fossem ideias, inserindo-as num sistema de pensamento”.

Nesse sentido, para interpretar e compreender um fato científico, por exemplo, é necessário estabelecer uma relação com a matemática, de modo que sem ela, a “maior parte das analogias íntimas das coisas permaneceriam para sempre fora do nosso conhecimento; teríamos sempre ignorado a harmonia interna do mundo, que é, [...] a única verdadeira realidade objetiva” (POINCARÉ, 1995, p. 8). Repare-se na associação que Poincaré faz da matemática com a possibilidade de “revelar” as analogias entre os fatos, uma das características não lógicas da matemática que tem muito a ver com a imaginação e a intuição.

Como, então, se caracteriza a matemática, dentro de um quadro científico?

A ciência deve ser considerada, acima de tudo, como um instrumento forjado pelos homens, instrumento ativo de penetração no desconhecido. [...] A ciência não tem, nem pode ter, como objetivo descrever a realidade tal como ela é. Aquilo a que ela aspira é construir quadros racionais [matemáticos] de interpretação e previsão. [...] Em nenhum momento, o homem de ciência pode dizer que atingiu a essência última da realidade; o mais que pode desejar é dar uma descrição, uma imagem (CARAÇA, 2005, p. 102).

A ciência é o resultado de uma interação entre os fatos e o sujeito que os observa, trabalha e os organiza. Nessa relação dialética, excluir um desses elementos (fato ou sujeito) equivale à desaparecimento da ciência. A ciência vista desta forma apresenta-se sempre em movimento, como um devir. “Querer encerrar a natureza na ciência seria querer colocar o todo na parte” (POINCARÉ, 1946, p. 16). Nessa relação fato-sujeito é necessário haver uma sintonia, uma harmonia na escolha e na organização.

Essa harmonia que a inteligência humana crê descobrir na natureza existirá fora dessa inteligência? Não, sem dúvida é uma impossibilidade uma realidade completamente independente do espírito que a concebe, vê ou sente. Um mundo assim tão exterior, se acaso existisse, ser-nos-ia para sempre inacessível. Mas o que chamamos de realidade objetiva é, em última análise, o que é comum a muitos seres pensantes, e poderia ser comum a todos; essa parte comum, como veremos, só pode ser a harmonia expressa por leis matemáticas. É, portanto, essa harmonia a única realidade objetiva, a única verdade que podemos atingir, [...] a harmonia universal do mundo é a fonte de toda beleza (POINCARÉ, 1995, p. 9).

Poincaré e Bachelard em seus estudos enfatizam a física como forma de pensar o conhecimento científico e o matemático.

Poincaré (1988) apresenta concepções físicas sobre as geometrias não-euclidianas, contribuindo, dessa forma, para mudança na forma de pensar e compreender o espaço, diferentemente de Kant. Utilizando-se de analogias propõe ao leitor imaginar e intuir um mundo em que o espaço é diferente do euclidiano, dando argumentos para compreender as propriedades das novas geometrias. Além disso, Poincaré discute a existência do tempo como a quarta dimensão, sendo então, um dos precursores da relatividade de Einstein. Já Bachelard, em muitos momentos de sua obra faz menção à física e, na obra *A experiência do espaço na física contemporânea* (BACHELARD, 2010) trata mais especificamente de conceitos físicos. Da mesma forma, relaciona o conhecimento físico à poética. Dizia ele, “em suma, a arte poética da Física faz-se com números” (BACHELARD, 1978a, p. 23). Ainda, “se a física contemporânea utiliza a estatística, podemos estar certos de que ela lhe vai pluralizar os métodos” (BACHELARD, 1978a, p. 54).

Com relação à matemática, como já dito, Poincaré, matemático francês, produziu inúmeros trabalhos nesse campo, como já foi mencionado. Já Bachelard, apesar da sua formação matemática, não produziu trabalhos especificamente nesse campo, mas atribuía importante papel do conhecimento matemático ao desenvolvimento das ciências, especialmente da física e da química.

Consenso entre Poincaré e Bachelard é que o conhecimento científico é uma obra coletiva e evolui com a evolução da humanidade. É obra coletiva e o papel do sujeito na construção de teorias que conduzem à compreensão do real é fundamental. Tais argumentos estão na gênese das suas ideias epistemológicas e são observadas em suas obras. O conhecimento científico se “não está dado nas coisas, surge delas, graças à ação especificamente humana que é exercida sobre as coisas, ação cujas condições mais simples nos deram condições de reconhecer a prática leal e equitativa dessas trocas” (BRUNSCHVIG, 1945, p. 508, tradução nossa).

Poincaré (1995, p. 8) afirma que “a ciência evoluiu; ainda evolui, evolui mesmo rapidamente. E já é necessário modificar em alguns pontos o quadro que eu traçava em 1900” (POINCARÉ, 1995, p. 8). Mas, ele acredita que a evolução precisa recorrer às teorias do passado, pois essas não são necessariamente estéreis.

Não devemos comparar a marcha da ciência com as transformações de uma cidade, onde os edifícios envelhecidos são impiedosamente demolidos para dar lugar às novas construções, e sim com a evolução contínua dos tipos zoológicos que se desenvolvem sem cessar e acabam por se tornar irreconhecíveis aos olhares comuns, mas onde um olho experimentado reencontra sempre os vestígios do trabalho anterior dos séculos passados. Não se deve crer, pois, que as teorias antiquadas são estéreis e vãs (POINCARÉ, 1995, p. 8).

Na ciência de Bachelard, uma de suas características é a de ser histórica, recorrente e em movimento. Segundo Bachelard (2004, p. 19), o conhecimento então,

é um modo de criação continua; o antigo explica o novo e o assimila; e, vice-versa, o novo reforça o antigo e o reorganiza. [...] Não é apenas re-conhecer esse algo, mas considerá-lo como a sequência de alguma coisa que já se conhece.

Ainda Japiassu, ao analisar as obras de Bachelard, coloca que

a essência da epistemologia bachelardiana é ser histórica. Seu objeto remete a outro objeto: é um discurso que se articula com outro discurso, isto é, um discurso cujo estatuto depende da estrutura do discurso primeiro das ciências tomadas em sua historicidade (JAPIASSU, 1976, p. 50).

A cooperação e acordo entre os espíritos promovem o conhecimento científico que intenciona a compreensão e a interpretação do real, que se dá não só pela racionalidade das coisas, pois a racionalização é sempre incompleta. A racionalidade está em um contínuo vir-a-ser, o que permite reconstruir, a cada momento, um novo saber, desmistificando que o saber é finito e baseado apenas na razão. “Não vemos nisso, como Meyerson, uma prova da permanência e fixidez da razão humana, mas antes uma prova da sonolência do saber, prova da avareza do homem erudito que vive ruminando o mesmo conhecimento adquirido” (BACHELARD, 1996, p. 10). O vir-a-ser da racionalidade tem por objetivo adequar-se à realidade que ela busca compreender. Cada saber, cada modelo elaborado para compreender pode ser criticado pelo próprio sujeito que o construiu, ou por outros sujeitos.

Em virtude dessa possibilidade de crítica e de reconstituição, o conhecimento pode ser verificado, isto é, pode-se testar a melhor adequação entre a interpretação teórica e a realidade que se procura explicar. Ao colocar o sujeito como construtor de modelos para a compreensão

do real embute-se nesse processo, além da razão, a imaginação e a intuição. “O saber científico deve ser reconstruído a cada momento, nossas demonstrações epistemológicas só têm a ganhar se forem desenvolvidas no âmbito dos problemas particulares” (BACHELARD, 1996, p. 10).

O caráter dinâmico do conhecimento científico interpola a forma racional e poética do pensamento. Bachelard (1978b) defende que o novo espírito científico tem um caráter dinâmico em virtude da íntima relação entre teoria e verificação de teoria, que provocam uma aceleração de seu progresso. Poincaré, ao atribuir às intuições um papel fundamental à elaboração do conhecimento científico e matemático, também confere, segunda nossa interpretação, um caráter dinâmico ao conhecimento, no qual intuição e lógica estabelecem diálogos e complementam-se no processo. O processo criador nas ciências e na matemática é uma ordenação do pensamento, em perfeita harmonia, em que se manifesta a espontaneidade criadora do espírito. Para ambos, a ciência e a matemática são essencialmente um pôr em relação. Os elementos constituintes que as integram dispõem-se em uma composição harmoniosa.

A retificação do saber constitui também o caráter dinâmico e ativo do conhecimento científico, “traduz a necessidade de novidade, de criação, que é sem dúvida uma necessidade espiritual não menos essencial que a assimilação” (BACHELARD, 2004, p. 28). Para apreendê-lo na sua dinamicidade é necessário colocá-lo na oscilação, no ponto onde o *esprit de finesse* e o *esprit de géométrie* convergem.

O real transformado precisou ser preparado, buscado na dialética entre sujeito e objeto, porém, dentro de certos limites. O real, assim, conserva nesses limites um tipo de liberdade e vivacidade que nos permite falar de transformação, que é muito aparente quando se recoloca o fato em seu verdadeiro domínio, isto é, no mundo da percepção, em que atua uma imaginação e intuição inteligíveis. O conhecimento sobre o real nasce da multiplicidade, da combinação das sensações e da trama de relações. E na medida em que há a interpolação do sujeito nesse processo, entende-se que o conhecimento científico sobre esse real é carregado por capacidades lógicas e sensíveis do ser. Nesse aspecto, a imaginação e a intuição são consideradas em complemento à lógica.

Em consonância a Bachelard, Poincaré (1946, 1995, 1988), enfatiza o papel das hipóteses e definições nas ciências, bem como a importância da imaginação e da intuição na educação e na prática da matemática. Poincaré rejeitou as teses logicistas que pretendiam reduzir toda a matemática à lógica e colocou em evidência a importância de noção de indução completa (processo criador no processo do fazer matemático) para a aritmética. E o Bachelard “noturno”, após certo período da sua vida, reconhece o papel fundamental da poesia, do

devaneio e do pensamento criador no processo de estabelecimento de relações e elaboração de conhecimento.

A “ciência forma-se muito mais sobre um devaneio do que sobre uma experiência, e são necessárias muitas experiências para apagam as brumas do sonho” (BACHELARD, 1994, p. 34). “Cumpra-nos mostrar, na experiência científica, os vestígios da experiência infantil” (BACHELARD, 1994, p. 15).

Bachelard, ao dizer que a experiência científica traz latente vestígios da experiência infantil, recupera a espontaneidade, a naturalidade, a imaginação e a simplicidade para o fazer científico. “Desse modo estaremos autorizados a falar de um inconsciente do espírito científico, do caráter heterógeno de certas evidências, e veremos convergir, sobre o estudo de um fenômeno particular, convicções formadas nos mais variados domínios” (BACHELARD, 1994, p. 15).

Brunschvicg, citado por Marcondes Cesar (2015, p. 48), afirma que a “natureza se revela na ciência por um esforço solidário entre uma razão e uma experiência, ambas inseparáveis e ambas inesgotáveis”.

Um grande ponto de aproximação entre as ideias de Poincaré e de Bachelard está, cada qual no seu campo de ação, na compreensão dos fenômenos e, conseqüentemente, da realidade.

Segundo Bachelard, na realidade,

não há fenômenos simples; o fenômeno é uma trama de relações. Não há natureza simples, substância simples; a substância é uma textura de atributos. Não há ideias simples, porque uma ideia simples [...] deve ser inserida num sistema complexo de pensamento e experiência para ser compreendida. A aplicação é complicação. As ideias simples são hipóteses de trabalho, conceito de trabalho que deverão ser revistos para receberem o devido valor epistemológico (BACHELARD, 1978b, p. 164).

E compreender pressupõe colocar-se em ação. O sujeito com todas suas capacidades lógicas e intuitivas é um ser produtor de conhecimento, o qual visa à compreensão e interpretação da “realidade”. Bachelard afirma que a “vida não se pode compreender em uma contemplação passiva; compreendê-la é mais que vivê-la, é verdadeiramente propulsá-la” (BACHELARD, 1999, p. 20).

Nesse contexto, afinado com Poincaré, podemos dizer que, a partir de uma realidade exterior, encontra-se um modelo matemático para interpretá-la, utilizando para isso de hipóteses, que são aproximações idealizadas da própria realidade. A percepção da realidade vem acompanhada de certos parâmetros de seleção como homogeneidade, simplicidade,

regularidade, dentre outros, que, no fundo, têm um caráter de estrutura matemática (NEGRELLI, 2008, p. 35).

A relação entre a realidade e a matemática que pretende representá-la é estudada no processo de modelagem matemática, do ponto de vista epistemológico em (NEGRELLI, 2008). Para Negrelli (2008, p. 40), são as hipóteses que permitirão realizar um recorte da realidade inicial, surgindo uma realidade intermediária, que é a que será modelada. A realidade intermediária é:

uma representação recortada da realidade inicial que será modelada matematicamente. É formulada através de hipóteses e aproximações simplificadoras dadas por situações limites, que são obtidas geralmente por intuição sobre a realidade inicial, pois supõem uma escolha. É uma abstração da realidade inicial que supõe a identificação de uma situação bem estruturada desta. Salientamos que o que tem ‘estrutura’, pensada até como um conceito matemático, é a realidade intermediária e não a realidade inicial.

Por sua vez, o Bachelard epistemológico, dito “diurno”, a partir de um modelo matemático já elaborado, ou seja, a partir de uma teoria, observa-se e interpreta-se o “recorte da realidade”, criando, nesse processo, os fenômenos a serem estudados. Os “modelos matemáticos, ao mesmo tempo em que criam os fenômenos, estimulam a razão a recriar, possibilitando o germinar de realidades inauditas, em cujas construções, o pensamento e a experiência não se dissociam” (PAIVA, 2005, p. 111). “Sem teoria nunca saberíamos se aquilo que vemos e aquilo que sentimos correspondem ao mesmo fenômeno” (BACHELARD, 1978a, p. 7). A teoria “é a verdade matemática que ainda não encontrou a sua realização completa. [...] A teoria insiste, não hesita, a preço de algumas modificações de base, em procurar as realizações de um conceito inteiramente novo, sem raiz na realidade comum” (BACHELARD, 1978a, p. 21). Entra em cena então a imaginação, que permite elaborar, interpretar e construir uma intuição sobre esse real.

Nesse aspecto, as ideias do Bachelard poético, dito “noturno”, que é movido pela imaginação, e as ideias de Poincaré quando esse defende a intuição, convergem, porém, partindo de lados opostos, como temos esboçado. Ciência e poesia, que para Bachelard são dois contrários bem feitos e, lógica e intuição que para Poincaré devem caminhar juntos, se complementam no caráter dinâmico do pensamento que, mobilizados pela imaginação, definem a condição humana e contribuem para a (re)construção de conhecimentos.

A solidariedade de tensão provocada pelas ideias do Bachelard “noturno” e “diurno” e das ideias de Poincaré que confronta a lógica com a intuição coloca em evidência que o homem é, ao mesmo tempo, razão e imaginação, que cientista, homem comum, também produz

conhecimento a partir de sua imaginação, assim como a produção do poeta que é também carregada de método e de rigor. Assim, ambos produzem por um processo que envolve, além da racionalidade – ligada à objetividade, a sensibilidade – ligada à subjetividade. É, então, a imaginação e a intuição, capturadas e interpretadas a partir das ideias desses dois filósofos, que nos levaram a colocar em suas bases a questão da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática.

CAPÍTULO 5

CONFIGURANDO UMA EPISTEMOLOGIA DA IMAGINAÇÃO E DA INTUIÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, faremos uma síntese dos diversos traços que os exemplos discutidos no capítulo 1 nos revelam sobre os aspectos epistemológicos da intuição e da imaginação no campo da matemática. Ao longo do trabalho, buscamos argumentos e exemplos matemáticos que, de alguma forma, justifiquem nossa proposta de pesquisa ancorada em nossas hipóteses iniciais de trabalho: associar intuição com descoberta, ou seja, descobre-se algo que já existe, mas ao qual não se tem, necessariamente, acesso de imediato, e imaginação com criação/construção, isto é, cria-se algo novo que não existe ainda. Imaginar é uma forma de construir, e é um ato livre, mas não é arbitrário. Ainda, procuramos analisar como a relação entre imaginação e intuição permite compreender o processo de construção de conhecimento na matemática colocando em evidência suas características epistemológicas.

Cabe agora nos questionar: em que medida as nossas “hipóteses de trabalho” se consolidam como “verdadeiras” ou não? Concluimos, então, que, como “hipóteses de trabalho”, elas são idôneas e podem ser tomadas como pontos de partidas para a discussão, porém, há a necessidade de serem melhor lapidadas, pois no caminhar da pesquisa vimos que em muitos momentos elas se conectam de tal forma que resulta difícil distinguir quando agia a imaginação e quando agia a intuição.

Imaginação e intuição são conceitos complexos que pertencem ao campo da filosofia, então, defini-los de uma forma simples é um contrassenso, pois tais conceitos estão ligados, dentre tantas questões, com problemas fundamentais relacionados à cognição, portanto, problemas em constante movimento. Podemos, então, refletir sobre o papel da imaginação e da intuição, particularmente, no campo da matemática, podendo inclusive imaginar a imaginação e intuir a intuição nesse campo, mas não defini-las definitivamente.

Na concepção alargada de matemática que estamos defendendo, junto com Bachelard e Poincaré, entendemos que a lógica pode ser pensada como parte da face “diurna” da matemática, enquanto que a intuição e a imaginação como parte da face “noturna” da matemática.

Na sequência, faremos um apanhado das características epistemológicas que os exemplos apresentados no capítulo 1 nos revelaram sobre o conhecimento matemático produzido pela imaginação e a intuição.

Começamos destacando que a intuição não é percepção no sentido imediato, mas é visualização do geral embutido no chamado “exemplo genérico”, ou seja, a intuição é diferente da percepção, sendo, portanto, uma espécie de percepção de ordem superior do geral. Essa visualização do geral já nos revela que o que está sendo intuído não são objetos, senão as relações que os determinam, como pensado por Poincaré.

A intuição “vê” a generalidade no particular, o que nos permite configurar uma ontologia de relações e não de objetos, como mencionado. Para Poincaré, a intuição que nos permite “ver” ao longe, e que chamamos de ‘intuição generalizante’, é a que acontece, por exemplo, no jogo de xadrez: para encontrar uma sequência de jogadas que nos conduza ao sucesso não basta conhecer apenas as regras do jogo (a lógica do jogo), é necessário ter a intuição da jogada “certa” ao longe. Uma das características da descoberta, por meio da intuição generalizante é a estruturação de uma generalidade, traço importante da ontologia relacional resultante. Nessa ontologia, não é um particular concreto que se apreende pela intuição, é um particular genérico, um particular que tem caráter de universalidade.

Sobre a intuição generalizante, ver ao longe precisa do recurso da escolha (seletividade) do mais simples na sequência de casos particulares. Já Poincaré dizia que “para generalizar devemos escolher”. Esse processo também requer o raciocínio por analogia, sendo um dos ingredientes principais da intuição generalizante. A intuição generalizante não é um processo lógico e nele intervêm outros recursos como a analogia e a indução.

Como vimos, a intuição nos permite elaborar conjecturas, o que requer uma posterior demonstração pela lógica. Alguns exemplos, de caráter numérico e geométrico, apresentados no capítulo 1, mostram como a intuição pode nos conduzir à verdade matemática por meio do estabelecimento prévio de pré-teoremas. A intuição nos faz “perceber” a possível verdade das conjecturas estabelecidas. Porém, para consolidá-las como teoremas é preciso buscar sua demonstração por meio de argumentos lógicos. Uma demonstração deve exprimir as intuições subjacentes.

A imaginação é um processo criativo que tem então uma dimensão construtiva, a qual coloca em movimento capacidades mentais de associação, configuração, ordenamento, harmonia, síntese, economia etc., e isso requer da liberdade não arbitrária mencionada, condição que pode ser entendida como tendo consequências plausíveis.

A respeito do caráter construtivo da imaginação, constatamos que só se constrói uma situação genérica usando relações entre objetos e não os próprios objetos. Aquilo que nunca foi visto ou ouvido pode ser criado por associação, particularmente no campo da matemática, e a imaginação, nesse campo, configura-se como a faculdade que ultrapassa a experiência,

assumindo uma dimensão epistemológica e alargando o mundo dos objetos matemáticos. São essas relações entre objetos, devidamente associadas, as que constituem uma espécie de trama para lhes dar existência. No caso da hiperesfera e do hipercubo, como vimos, seu processo construtivo consiste em selecionar algumas poucas propriedades dos objetos de duas ou três dimensões (a base da construção) para usá-las como ponto de partida para uma definição que generalize esses objetos. Parte-se do conhecido para se chegar ao desconhecido.

A síntese é um dos principais instrumentos da imaginação e da intuição na constituição do conhecimento. Os recursos da intuição e da imaginação, assim como os da arte, sejam pela descoberta ou pela invenção, só podem nos dar uma aparência de realidade em sua multiplicidade, porém unificada por um processo de síntese. Uma unidade na multiplicidade. A síntese exerce um papel essencial não lógico na racionalidade da imaginação e da intuição.

Podemos dizer que a intuição e a imaginação têm um “instinto sintético”, o que é muito bem evidenciado pelo princípio de recorrência analisado por Poincaré. A evidência irresistível que esse princípio nos impõe, não é outra senão a afirmação do poder do espírito que é capaz de conceber a repetição indefinida de um mesmo ato, desde que esse ato tenha sido possível uma vez.

O recurso da analogia é utilizado para a criação/construção do conhecimento pela imaginação, mas o processo de criação por analogia não é arbitrário, pois ela utiliza-se de regras de “tradução” que mantém uma certa coerência. As analogias possibilitam ilustrar, visualizar, explorar relações e, assim, permitir a construção de conhecimentos. A analogia estabelece uma comparação entre um elemento considerado familiar com outro, a princípio, desconhecido. A comparação, por analogia, permite construir, por exemplo, coisas novas em matemática. Permite, ainda, o desenvolvimento do pensamento matemático abstrato e a generalização. É uma forma de descoberta por intuição e uma forma de construção através da imaginação. A exploração por analogia conduz para certa harmonia (coerência), sendo, portanto, um elemento essencial para a beleza da matemática.

Como vimos, na criação há uma liberdade controlada. Criar é um ato livre, porém não é arbitrário. A liberdade tem uma certa racionalidade que extrapola a lógica. No entanto, a construção do “objeto” dada pela imaginação é “boa” na medida em que tem consequências “plausíveis”. É uma espécie de lógica inversa, e a procura dessas consequências pode estar guiada pela intuição. Tais construções não podem permanecer no terreno das conjecturas, devem ser sempre analisadas em conexões racionais para tornar-se “verdades”. Uma vez construído o objeto, a intuição vai nos permitir descobrir outras propriedades desse objeto que não faziam parte de suas relações iniciais constitutivas.

A imaginação e a intuição são processos dinâmicos que, pela sua natureza, nos dão acesso não apenas às formas, senão ao movimento das formas. E os diversos exemplos apresentados permitiram essa movimentação.

A intuição, na medida em que é uma descoberta, pode sugerir uma visão realista da matemática, na qual os objetos intuídos são *a priori*, enquanto a imaginação, uma visão antirrealista, em que os objetos, por serem construídos, são *a posteriori*.

Por outro lado, o papel do sujeito epistêmico pode ser considerado ativo no processo de criação, mas passivo na descoberta, como apontado por Kant.

No jogo da imaginação é também importante discutirmos a possibilidade de visualização, visualização de objetos que estão sendo construídos e não descobertos. Isso exige reforçar a ideia da ontologia relacional, pois ela dará condições de existência desses objetos.

Finalmente, na constituição da nossa epistemologia da imaginação e da intuição não podemos deixar de destacar o papel das hipóteses como desencadeadoras de construções e descobertas na matemática. Esse papel é análogo ao que acontece, por exemplo, na física. De fato, para Poincaré, as hipóteses tem uma função fundamental na ciência para a compreensão da natureza através da elaboração de teorias, e para a compreensão da própria matemática por meio da composição dos sistemas axiomáticos. Nesses sistemas, justamente os axiomas são as hipóteses correspondentes, e sua condição de hipóteses é necessária pela possibilidade de não serem verdades evidentes como no caso das geometrias não-euclidianas. As teorias científicas e matemáticas em sua elaboração racional emergem também como síntese de uma grande quantidade de fatos que se relacionam entre si, síntese que é expressa através das hipóteses.

Com a discussão feita nesse capítulo sobre as características epistemológicas da imaginação e da intuição, podemos concluir que foram tecidos os fundamentos para a elaboração de uma epistemológica da imaginação e da intuição no campo da matemática, que foi a nossa problemática da pesquisa.

CAPÍTULO 6

O ENSINO DA MATEMÁTICA PELA IMAGINAÇÃO E A INTUIÇÃO: ASPECTOS FORMATIVOS

No tom da pesquisa sobre imaginação e intuição no campo da matemática foi dada ênfase a seus aspectos epistemológicos, porém, não podemos deixar de discutir agora, neste capítulo, alguns aspectos pedagógicos que podem contribuir na formação de professores.

Assim, discutiremos neste capítulo certos posicionamentos epistemológicos, estéticos e pedagógicos de Poincaré e de Bachelard, e qual o papel da matemática no processo formador e estruturador do espírito, em que intervém, além da lógica, a imaginação, a intuição e a criatividade, incorporando também sua capacidade para a interdisciplinaridade. O que se defende no trabalho de pesquisa é a racionalidade por trás da imaginação e da intuição na construção do conhecimento matemático, o que pode ser fundamentado por meio da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática.

A imaginação e a intuição podem ser mediadoras entre o pensamento e a sensibilidade, entre a representação e a abstração. Imaginar é a capacidade de ver além do olhar, além da imediatez do que é dado, de criar possibilidades, ideias novas, fundamentais para a criação em matemática. Embora o foco aqui não sejam os aspectos cognitivos da imaginação, e sim os epistemológicos, ela, assim como a intuição, é uma capacidade que pertence ao sujeito, portanto, ao ser estimulada pode contribuir na construção de conhecimentos e no entendimento de sua dinamicidade, particularmente, no ensino da matemática.

Nesse contexto, a matemática é considerada, como já vimos, como um fazer, uma forma dinâmica de pensar, e não só um saber estático. Sobre essa questão, Cifuentes (2010, p. 20) afirma que ela “é um movimento, fazer matemática é como fazer filosofia, o filosofar, e por que não, no caso da matemática, o matematizar, tendo ambas as atividades uma raiz comum”.

Consequentemente, apontamos de uma maneira racional, o papel da imaginação e da intuição na elaboração, interpretação e compreensão dos conhecimentos matemáticos e de sua dinâmica. Isso não significa dizer que esse uso da imaginação e da intuição seja sempre necessário para essa compreensão, mas que em certos casos é fundamental. Portanto, a imaginação e a intuição não devem ser eliminadas desse processo, elas complementam a lógica, mas é necessário educá-las por meio de um trabalho intenso, consciente e intelectual de formação.

Estimular essa avidez de interesse, essa avidez de realidade que numa criança se manifesta quando ela tem a necessidade de ver a profundidade do objeto, assim como ela manipula e destrói seu brinquedo para ver por dentro, deveria ser estimulado na escola. Mas o que a

educação não sabe fazer, a imaginação realiza seja como for. Para além do panorama oferecido à visão tranquila, a vontade de olhar alia-se a uma imaginação inventiva que prevê uma perspectiva do oculto, uma perspectiva das trevas interiores da matéria. É essa vontade de ver no interior de todas as coisas que confere tantos valores às imagens materiais da substância (BACHELARD, 2003, p. 8).

Quando se fala em imaginação e intuição, não estamos nos referindo ao comportamento cognitivo de articulação e percepção do mundo, de forma imediata baseada no senso comum, mas sim à capacidade suprassensível de identificar o que é inteligível, isto é, racionalmente acessível e que permita acessar (ou ascender) ao conhecimento, especialmente o matemático. O desafio, então, é saber sob quais condições o acesso intuitivo e imaginativo ao conhecimento pode ser considerado como racional, isto é, tem uma racionalidade.

No campo da Educação Matemática, este estudo poderá trazer subsídios, a partir da elaboração da “epistemologia da imaginação e intuição”, para um novo olhar e um repensar a incorporação da matemática moderna no ensino, por exemplo, a geometria hiperbólica, a geometria elíptica, a topologia etc., e esse repensar requer essa nova epistemologia e uma “nova” matemática.

Ainda, pode nos esclarecer em que medida os estudos filosóficos no campo da educação matemática são “formativos”, para dar uma contribuição, um melhor entendimento e sustentação para a expressão “formação de professores”, pois, a eles são direcionados os resultados desta pesquisa.

Como aspectos formativos da pesquisa procuramos trazer para os professores de matemática, e àqueles em formação, esclarecimentos, reflexões, argumentações e ideias que possam contribuir na elaboração de metodologias inovadoras para seu ensino da matemática em que a imaginação, a intuição e a criatividade estejam presentes, pois, além da formação matemática promovida, é necessário desenvolver uma cultura matemática, que reflita o verdadeiro pensamento matemático e científico contemporâneos.

6.1 Características “formativas” da matemática

Um dos papéis fundamentais da educação é contribuir para a formação e estruturação do espírito. A matemática, nesse bojo, não deve ser direcionada para uma formação que vise à vida cotidiana, imediatamente, para saber fazer contas, não é para o treino de técnicas matemáticas, a matemática visa também a formação do espírito e para tanto contribuem a imaginação e a intuição. E como se consegue a estruturação do espírito? Por meio do raciocínio, da atenção, da perseverança, nas capacidades de representação, de análise, de síntese, de imaginação e de intuição. Assim, a imaginação e a intuição aparecem como um meio para a estruturação do espírito, que é uma das principais finalidades do ensino da matemática.

Brutter (1998, p. 25) diz que as crianças merecem receber um verdadeiro ensino de matemática, pois ela carrega as virtudes formadoras deste ensino, ou seja,

a estruturação do espírito, treino nas diversas formas de raciocínios que ajudam a reconstruir o encadeamento das causalidades do mundo físico, treino da memória, das faculdades da atenção e da perseverança, desenvolvimento da intuição espacial e das capacidades de representação, de análises, de síntese, de imaginação.

Essa formação pressupõe o desenvolvimento, a educação, a ampliação da sensibilidade, o despertar da vontade de compreender, sem que haja a paralização da inteligência intelectual. Na ciência contemporânea, observa-se que no ensino, em particular no ensino de matemática, há uma imposição para um procedimento de urgência e essa imediatez visa simplesmente resultados, produtos prontos e acabados e não se valoriza o processo de sua elaboração, nem sua demonstração. A demonstração dos resultados permite compreender o próprio resultado, são as demonstrações que permitem a liberação da imaginação. A “consequência deste hábito pedagógico rígido e limitado [de olhar só o resultado e não o processo] é um travão à imaginação, à intuição; é necessário cortar com esse hábito mutilador” (BRUTTER, 1998, p. 27).

Liberar a imaginação é quase um aspecto lúdico, como um jogo que nos permite brincar com o mundo. Nesse aspecto, percebemos uma aproximação entre a matemática e a arte.

As construções ou modelos matemáticos surgem então por vezes como brinquedos, inofensivos, iniciáticos e curativos, com os quais os homens podem fazer trabalhar sua imaginação, dar-se importância e uma razão de ser, construir mundos por vezes barrocos, desvendar os fantasmas que povoam o seu espírito e de que eles se libertam pelo jogo (BRUTTER, 1998, p. 28).

O ensino da matemática não deve ser um ensino de coisas isoladas, mas de coisas interconectadas, de tal maneira que eu possa “ver” de uma forma global, como uma espécie de síntese. Síntese é juntar coisas em um corpo conexo e coerente a partir de várias coisas

aparentemente desconexas. Do ponto de vista pedagógico, a capacidade de síntese é importantíssima na mentalidade do ser humano e a matemática promove essa capacidade, essa harmonia. Para saber viver é necessário juntar diversos aspectos, tornar coerente, estabelecer relações e a matemática permite isso dentro da ideia da formação e estruturação de espírito, ou seja, não deve ser só para fazer coisas, contas, cálculos, mas também para saber viver, resolver problemas.

A matemática pode contribuir para a formação do pensamento e do espírito. Brutter (1998, p. 26) afirma que “a vantagem da matemática permanece inigualável [na formação do espírito], pois nenhuma outra disciplina permite atingir tantos objetivos com tanta combatividade, densidade e rapidez”. A matemática, sendo tratada e utilizada por muitos como forma de seleção e como ferramenta para resolução de problemas diários, imediatos, reduz o seu potencial na formação de pensamento. Segundo Poincaré,

uma ciência unicamente feita tendo em vista aplicações é impossível se concretizar, pois as verdades só são fecundas se forem ligadas umas às outras. Se nos prendermos somente àqueles das quais se espera um resultado imediato, faltarão os elos intermediários, e não haverá mais cadeia (POINCARÉ, 1995, p. 89).

Para que essa ciência [matemática] possa prestar esses serviços, ou seja, contribuir para formação do pensamento e do espírito, é preciso que ela seja cultivada do modo mais amplo, sem preocupação imediata de utilidade. Acredita-se que todos precisam ser formados para utilizar as ferramentas matemáticas, ampliando as capacidades destas ferramentas na representação das situações, na inteligibilidade dos fatos. Por isso, a matemática merece ser cultivada e apreciada por si mesma pelo potencial formador que ela desempenha.

A palavra ‘ininteligibilidade’, nesse contexto, tem que ser compreendida da seguinte maneira: a matemática permite “ver” com olhos da visão, mas, essencialmente, permite “ver” com os olhos da imaginação. Fazer inteligível é poder ter acesso ao conhecimento por meio da inteligência, por meio do pensamento, da imaginação e da intuição. Essa é, então, uma das principais funções da matemática, ou seja, fazer inteligível os objetos matemáticos é poder vê-los através da imaginação e da intuição e para isso não precisamos necessariamente cálculo.

A matemática tem ocupado importante papel nos sistemas de ensino. No entanto, os sistemas de ensino, em geral, não têm a preocupação de formar o espírito, desenvolver o pensamento matemático. Os programas educacionais foram e são até hoje concebidos mais para atender uma perspectiva utilitarista e imediata. Em se tratando do ensino de matemática, uma concepção baseada nesses princípios torna-se sectária, ingênua e prejudicial.

Segundo Brutter (1998), para formar o espírito, o ensino de matemática deve, dentre muitos aspectos, se preocupar com o desenvolvimento da visão espacial, num sentido amplo, e a intuição geométrica, ao mesmo tempo em que se fazem aparecer os primeiros elementos descritivos, formais que constituem poderosas ferramentas técnicas de demonstração. Os exercícios mentais que incidem sobre a representação espacial podem contribuir para o desenvolvimento da inteligência intuitiva e racional da natureza, formando no espírito a capacidade de síntese que poderá ser o fundamento para o desenvolvimento do pensar.

Algumas formas que contribuem no desenvolvimento, particularmente da imaginação e da intuição e do espírito matemático, é trabalhar com construções, modelizações, com manipulações manuais ou por meio de um *software* matemático, com os jogos etc. Por meio desses processos, o aluno pode trabalhar, desvendar e libertar os fantasmas que provocam o seu espírito diante de um objeto matemático. O objeto matemático é, em geral, “uma obra de arte conceitual, que os meios técnicos de hoje permitem tornar visível, manipulável, quase palpável por cada um de nós” (BRUTTER, 1998, p. 28).

Assim, aprende-se matemática fazendo matemática, ou seja, matematizando. Isto é uma forma de atividade artística, pois a arte, como a matemática, não pode ser aprendida por preceitos, por uma instrução verbal qualquer. Ambas são, falando com propriedade, um contágio, e se transmite como o fogo de espírito para espírito. “A sensibilidade à beleza na matemática é contagiosa. Ela é contraída, e não ensinada” (HUNTLEY, 1985, p. 18).

Para fazer matemática, não se deve encontrar, necessariamente, uma aplicação imediata para as teorias e técnicas matemáticas, pois a própria história mostra que muitas delas tiveram aplicações muito tempo depois e nem por isso desestimularam grandes matemáticos em suas descobertas. Para exemplificar esse fato, recorreremos à Teoria dos Números, que a partir do século XVII, com Fermat e outros matemáticos contemporâneos, grandes descobertas foram realizadas nesse campo sem se pretender aplicações imediatas.

A Teoria dos Números é um campo da matemática pura, cujo objetivo é estudar de modo especial, as propriedades dos números inteiros, como os números primos, por exemplo. Porém, é um campo muito fértil, pois, também, favorece o desenvolvimento da intuição matemática, sendo essa um guia para descobertas, como vimos no capítulo 1.

Tais descobertas foram inspiradas pelo desejo de saber e compreender mais que aplicar. Nesse aspecto, está a beleza da matemática. Compreender hoje a historicidade dos conteúdos matemáticos possibilita ao aluno, também, se sensibilizar diante da beleza da matemática. Esse senso estético pode auxiliar, esclarecer e oferecer inspiração para que o aluno possa ser atraído pela matemática. A compreensão de cada problema matemático como uma criação harmoniosa,

quando solucionado, é fonte de descoberta e de novos problemas, sendo então motivador para continuar no processo investigativo.

A matemática então, segundo nosso ponto de vista, além de ser uma ciência das quantidades, das operações numéricas e das medidas, mostra uma interconexão profunda entre o espírito humano e a realidade e, para compreender essa realidade, é necessária uma matemática que incorpore aspectos qualitativos, impregnada de sensibilidade, imaginação, intuição e criatividade. A palavra ‘qualitativa’, nesse contexto, está sendo usada contrapondo-a à ‘quantitativa’, ou seja, não é só numérica, não é só métrica.

Ao longo do tempo, percebe-se que a matemática sempre incorporou aspectos qualitativos, que alimenta a nossa intuição. Por exemplo, a geometria de Euclides é uma maneira de formalizar a intuição geométrica, tem muitas regras, mas possibilita a formulação de imagens e, nessa medida, dá vazão à intuição. O que acontece é que, a partir dos séculos XIX e XX, os aspectos qualitativos da matemática são melhor isolados, permitindo também compreendê-la a partir de suas qualidades e não somente com números, que é o caso da topologia, por exemplo.

Além disso, a partir do século XIX, muitas descobertas ocorreram no campo da matemática que permitem colocar em evidência uma mudança de mentalidade no pensamento matemático. Esse período, para Cifuentes (2003), é caracterizado pelo que ele chama de “modernismo na matemática” que se deu a partir de marcantes rupturas. O “modernismo (não confundir com modernidade) é um fenômeno cultural. Tem como principais características: ruptura com a tradição; mudanças de linguagem; fragmentação do conhecimento; autocrítica e autorreflexão” (CIFUENTES, 2003, p. 71).

A matemática que resulta desse processo de mudança, é a que chamamos de “moderna”, ela necessita essencialmente da imaginação e da intuição para sua compreensão e até para sua visualização, e sua implementação no ensino constitui-se em um desafio das recentes abordagens pedagógicas da matemática.

6.2 Visualização em matemática como um recurso epistemológico

Uma das mais atuais tendências no ensino de matemática é a visualização, especialmente a geométrica, tornando então, a geometria mais um ponto de vista do que um assunto sistematizado e a problemática sobre sua concretização só faz sentido na concepção de matemática que incorpora a imaginação e a intuição como parte dos recursos para a construção heurística do conhecimento matemático, concepção que considera a matemática como uma

atividade, na qual a dinâmica do pensamento se manifesta. Nessa construção heurística do conhecimento, fala-se em “observação” de objetos matemáticos e, nesse contexto, são tratados como fatos científicos, tratamento que é um recurso da ciência empírica dentro da matemática.

A matemática, a partir do século XIX, apesar da abstração, da formulação do pensamento desse século, há um ímpeto de visualização, um ímpeto de querer ver, mas agora querer ver coisas abstratas, nesse caso, entra em ação a imaginação e a intuição. Querer “ver” e representar são ações fundamentais na matemática.

A visualização em matemática não se faz só com o sentido da visão, se faz também com a imaginação que é uma forma de observação e de experimentação. Imaginar algo é observar e experimentar dentro de um mundo abstrato. São observações intelectuais. E a observação se faz sempre estabelecendo padrões por meio de analogias. E é necessário educar o “olhar”.

Nessa perspectiva, Flores (2007, p. 17), salienta a

importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento da habilidade de visualização. Isto porque há o reconhecimento da importância de se compreender a percepção das informações visuais, tanto para a formação matemática do educando quanto para a sua educação de maneira geral, num mundo cada vez mais semiotizado.

Aprender a “ver” em matemática é fundamental para compreender a própria matemática e, para aprender a ver, “é preciso primeiro saber que para um mesmo objeto matemático existem muitas formas de representá-lo; depois, é necessária uma aprendizagem específica dos tratamentos inerentes a cada tipo de representação” (FLORES, 2007, p. 26).

Na matemática moderna, “ver” significa ver as relações entre os objetos mais que os próprios objetos (POINCARÉ, 1988). Por isso, também, uma discussão sobre visualização é necessária, pois há uma nova ontologia nessa nova matemática (SANTOS, 2014). Ainda, Cifuentes, parafraseando o artista Paul Klee (2010, p. 23), coloca que “visualizar não é apenas ver o visível, é principalmente tornar visível”.

Mas como visualizar “coisas” que não se veem? Para vê-las, exige-se, segundo Cifuentes (2013), além da visão do olhar, o olhar da imaginação. Quando falamos em “coisas”, não estamos nos referindo à sua concretude física, ou seja, que pode ser vista espaço-temporalmente, mas à abstrata, concretude que está formada por meio de relações.

Nesse sentido, uma das formas de visualização que a imaginação promove é por meio de analogias. Como vimos no capítulo 1, o que acontece em dimensões menores nos dá argumentos para visualizar o próprio em dimensões maiores. Nesse sentido, é fonte de

conhecimento na matemática e, portanto, diante dessa possibilidade, procuramos indagar sobre suas possibilidades pedagógicas.

A visão relacional emergente nos séculos XIX e XX se consolida nas chamadas estruturas matemáticas. As estruturas capturam as relações entre os objetos em estudo e não os próprios objetos (CIFUENTES, 2010). Logo, a ontologia da visualização, igual ao caso da imaginação e da intuição, são as relações entre coisas e não propriamente as coisas. “E ver nos remete à intuição, que deve ser objeto de formação, exercícios, para atingir um nível superior às intuições diretamente sensíveis. O grau elevado de desenvolvimento dessa intuição permite a capacidade de inventar e de ser criador” (PATY, 2010, p. 175).

Há diferentes formas de representar e ver um objeto matemático em sua dinamicidade. Por exemplo, analisemos os números complexos, esse é um sistema que, na sua origem algébrica, é considerado monótono, porque trabalha com regras e algoritmos. O fato de ter regras não significa que o sistema é devidamente compreendido, pois a compreensão não deriva necessariamente de regras. Porém, no século XIX, se conseguiu diversas representações desses números que melhor permitiram sua compreensão e visualização: 1) fez-se uma representação geométrica dos números complexos. Nesse esquema, eles não são mais considerados apenas como um número, mas como objetos no plano, são vistos agora como vetores no plano. Sendo vetores, podemos vê-los geometricamente no plano; e 2) uma outra forma foi pensar os números complexos como outra representação algébrica, sendo essa quase geométrica. Eles são representados como matrizes, mas longe de seu aspecto puramente algébrico, essa representação é geométrica, pois significa transformações no plano. Multiplicar, por exemplo, um número complexo por i (o imaginário) significa girá-lo em 90° . Isso dá vida ao número complexo, porque o “vemos” agindo de alguma forma. Essas formas de representação têm a função de estimular a intuição sobre os novos objetos.

Do ponto de vista pedagógico, movidos pela curiosidade, pela imaginação e pela intuição, podemos fazer descobertas em matemática. O processo de descoberta envolve um conhecimento não menos seguro e não menos atual de domínios vizinhos, favorecendo a possibilidade de transferência de propriedades e de métodos de exploração. A exploração pode também realizar-se com base em imagens do objeto, com base em representações mais ou menos fiéis deste objeto ou de alguma das suas partes (BRUTTER, 1998).

O processo das descobertas envolve domínios vizinhos, ou seja, faz-se por analogias para chegar a elas. Como já vimos, o processo de pesquisa por analogia não consiste apenas em traduzir de um campo a outro para obter o semelhante, mas em adaptar propriedades diferentes.

Segundo Huntley (1985, p. 140),

a experiência de perceber a beleza da matemática é tão difícil de interpretar, para a pessoa, quanto de transmiti-la para o aluno. Ela é assimilada, e não ensinada. O aluno pode apenas ser encorajado a ver o esplêndido da visão por si mesmo. O prazer, mediado através do intelecto origina-se em estratos inferiores da mente a arena das emoções.

No processo de formação, trabalhar com exemplos é como realizar um ato de observação. Um modo de observar como se comporta uma teoria, como, para um determinado número em particular, vale tal propriedade, como, para um ângulo, tal propriedade geométrica está em destaque, se efetiva, muitas vezes, valendo-se de exemplos. Logo, eles são objetos de observação, cumprem com o papel final de dar-nos familiaridade com os conceitos matemáticos envolvidos e alimentar a nossa intuição das coisas ou das relações entre coisas.

A observação, como um mecanismo da visualização, também está na base do processo de modelagem matemática, processo esse tão importante no ato do “fazer matemático”, pois envolve muita imaginação, intuição e criatividade, além, é claro, de muita matemática. Modelar é observar um “pedaço” do mundo, mas não do mundo tal como ele é, pois essa observação já vem carregada de teoria, de preconceção, de conhecimentos prévios, portanto, a observação é “ver” o mundo, interpretando-o.

As novas tecnologias permitem também observar e “ver” a dinamicidade e as transformações das figuras geométricas, favorecendo as manipulações intelectuais dessas figuras. As construções matemáticas, por meio de softwares matemáticos, permitem aguçar a curiosidade e estimulam a imaginação e a intuição. Nesse aspecto, devem-se fazer presente no processo de formação.

É fato que o estudo da matemática pode favorecer a formação de diversos modos de pensar e raciocinar. Este estudo pressupõe que não nos contentamos em ensinar receitas aos alunos, essa “cozinha escolar” é insípida e não permite a formação do espírito. É indispensável que esses alunos entrem em contato com as ideias e as teorias matemáticas, que consigam dominá-las, primeiro para se exercitarem no raciocínio, mas também para desenvolver a imaginação e a intuição e com ela a sua capacidade de visualização. Dentre os ramos da matemática, o exercício da geometria é o mais apto para desenvolver essa capacidade. Nela encontramos mais facilmente construções e, por meio dessas construções, é possível conduzir o espírito à elaboração de pequenos *puzzles*, fazer relações mentais atraentes e despertar a emoção estética na matemática (BRUTTER, 1998).

Nesse aspecto, no campo da educação matemática, reforçamos que, para ter acesso ao conhecimento matemático, não é suficiente ir somente pelo caminho da racionalidade, da

inteligibilidade, da lógica, do conhecimento científico, mas agregar a esse caminho os aspectos ligados à subjetividade, ou seja, percorrer também o caminho da sensibilidade, da poesia, proporcionada pela imaginação e pela intuição matemáticas, capacidades essas capturadas, por exemplo, pelos mecanismos da visualização.

Para Flores et al. (2012, p. 35), a visualização está intimamente relacionada à intuição e permite aos alunos não só aprender matemática, mas, também construir sua própria matemática e deve ser adicionada ao contexto da educação matemática.

Adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática (FLORES et al, 2012, p. 35).

Para Cifuentes (2005, p.71), a visualização

será o principal mecanismo para “ver” a verdade de um resultado matemático sem recurso à demonstração lógica. As demonstrações visuais farão uso possivelmente de uma linguagem visual apropriada, envolvendo também meios computacionais, os quais podem pôr em evidência a expressividade artística da matemática; Todo conceito de visualização remete a uma certa “realidade”, pois “a realidade é a experiência visual básica”.

Assim, é importante proporcionar aos alunos diversos meios para aprender e fazer matemática, estabelecendo, sempre que possível, relações com outras disciplinas. Nesse aspecto, estamos visando a uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva entre a matemática, as ciências e a arte.

6.3 A criatividade em matemática, um recurso pedagógico

O significado da palavra ‘criatividade’, segundo Houaiss (2009, p. 571) “é a qualidade ou característica de quem ou do que é criativo”. Ainda, pode significar “inventividade, inteligência e talento natos ou adquiridos, para criar, inventar, inovar, quer no campo artístico, quer no científico, esportivo etc.”. Assim, acreditamos que promover um ensino de matemática por meio de atividades que estimulem a criatividade e eduque a sensibilidade dos alunos, pode tornar esse ensino mais prazeroso e mais significativo.

Em Gusmão (2013), defendemos que o conhecimento científico e matemático, bem como seu ensino, deve também ser buscado na sensibilidade da pessoa humana e não somente na sua capacidade lógica. Alexander Gottlieb Baumgarten (1714 – 1762), a partir do século

XVIII, especialmente com o aparecimento da “estética” como área da filosofia, contestou o pensamento filosófico de sua época, no qual prevalecia uma hierarquia do conhecimento e uma crença de que este só era atingido por meio da razão. Baumgarten, ao dizer que “estética” é a “ciência do conhecimento sensível”, enfatiza a importância da sensibilidade no acesso ao conhecimento (CIFUENTES, 2003).

A criatividade a que nos referimos nessa tese está relacionada à criação e à descoberta e, portanto, à imaginação e à intuição, respectivamente. Alencar e Fleith (2003, p. 13) colocam que “pode-se notar que uma das principais dimensões presentes nas diversas definições de criatividade implica a emergência de um produto novo, seja uma ideia ou uma invenção original, seja a reelaboração e o aperfeiçoamento de produtos ou ideias já existentes”.

Assim, D’Ambrosio (2007, p. 7) refere-se à matemática relacionada à sensibilidade e como construção humana.

Vejo a matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.

A criatividade, uma faculdade do lado qualitativo do pensamento matemático, está ligada ao que Bachelard chama de ‘surracionalismo’, relacionando diretamente ao termo surrealismo, como já dissemos, na qual multiplicam-se as formas de pensar a atividade científica e matemática. Ao mesmo tempo, aproxima-se das ideias de Poincaré quando defende o papel central desempenhado pela intuição na matemática. Para Poincaré, a matemática não pode desprezar a intuição, pois ela atua como ponto de partida para construir um sistema, e a ciência funciona como um sistema de relações. Nesse sentido, a intuição complementa a lógica (POINCARÉ, 1995), como foi dito. São características do processo criativo, em que a imaginação e a intuição intervêm em consonância com ações de combinar, ligar, colocar em relação.

Gontijo (2007, p. 37) coloca que a criatividade em matemática é:

a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade) tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de sequência de ações.

Para Polya (2006), a resolução de problemas é uma arte prática que todos podem aprender, é a arte de fazer matemática: significa ter a capacidade para resolver problemas não apenas rotineiros, mas problemas que requerem algum grau de originalidade e criatividade.

Colocamos na introdução que os exemplos trazidos, configurados como uma metodologia de pesquisa, não são meros exemplos ilustrativos de uma teoria, mas são carregados de imaginação e intuição que permitem “ver” o movimento dos conceitos matemáticos neles envolvidos.

O ato criador está intimamente ligado à imaginação, compreendida nesse processo como a “articulação dos sentimentos, a sua transformação em imagens e ao encontro de símbolos que expressem esses processos e resultados” (DUARTE JR, 1988, p. 98). Atitude criadora, segundo Duarte Jr (1991, p. 54) constitui um ato de rebeldia, um ato de coragem na medida em que o criador

nega o estabelecido, o existente, para propor um outro caminho, uma outra forma, enfim, para propor o novo. O novo surge a partir de um descontentamento com relação ao estabelecido. Nesses termos, qualquer ato criativo é sempre subversivo, pois visa à alteração, a modificação do existente.

A esse respeito, Bachelard diria que o ato de imaginar é uma “ruptura epistemológica” com conhecimentos prévios pré-estabelecidos, conhecimentos que serão modificados com os diversos recursos de síntese, de analogias que a imaginação promove.

D’Ambrosio (2011), na conferência de abertura proferida na XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, realizada em Recife/PE, afirma que uma das melhores conceituações que ele conhece sobre o que é matemática e sobre a criatividade está na entrevista que Ennio De Giorgi, um grande matemático do século XX, concedeu poucos meses antes de sua morte, em 1996, a Michelle Emmer. D’Ambrosio conta que, nessa entrevista, De Giorgi diz: “Matemática é a única ciência com a capacidade de passar da observação de coisas visíveis à imaginação de coisas não visíveis. Este é, talvez, o segredo da força da matemática”. Ainda, “Eu penso que a origem da criatividade em todos os campos é aquilo que eu chamo a capacidade ou disposição de sonhar: imaginar mundos diferentes, coisas diferentes, e procurar combiná-los de várias maneiras”, o que nos remete a Bachelard.

A atividade científica, assim como a atividade matemática é criadora e requer uma razão irrequieta e pronta para criar o novo, exigindo, para tanto, recorrer à imaginação e à intuição. A razão aberta configura-se como a única alternativa para uma ciência que se empenha na busca

do novo. Ao “dar existência ao irreal, essa razão torna-se análoga à arte” (PAIVA, 2005, p. 110).

Um método puramente racional e “mecânico, que não pede ao espírito nenhum esforço de invenção, não pode ser realmente fecundo” (BACHELARD, 1978b, p. 173).

Na sequência, acrescenta Bachelard (1878b, p. 117-118),

é do lado estético que encontraremos valores sintéticos comparáveis aos símbolos matemáticos. [...] Os belos símbolos matemáticos em que se aliam o possível e o real. [...] O esforço matemático que forma o eixo da descoberta [...]. Quando uma lei matemática é encontrada, é bastante fácil multiplicar-lhe a tradução; o espírito ganha então agilidades que pode fazer crer numa espécie de voo além das realidades numa atmosfera leve de pensamento formal. [...] É a matemática que abre caminhos para a experiência.

A criatividade poderá ainda promover uma nova atitude em sala de aula de matemática em que a imaginação e a intuição sejam estimuladas para a compreensão da própria matemática.

6.4 Sobre a pedagogia de Poincaré e de Bachelard

As ideias de Poincaré e de Bachelard extrapolam os campos da Filosofia e da Epistemologia, alcançando outras áreas do saber como o ensino. Suas ideias pedagógicas não estão reunidas em um único documento, mas estão dispersas em suas obras. Em uma leitura atenta de suas obras é possível capturar tais ideias.

Em Bachelard, a discussão sobre o ensino está presente por meio da ideia de “formação”, especialmente na “formação do espírito (científico)”. Essa ideia, segundo Bachelard, “é muito mais completa e abrangente do que a de educação, pois não traz no seu bojo as conotações que esta última apresenta e que são oriundas da tradição que nos leva a compreender o conhecimento como ato de repetir e de memorizar ideias” (BARBOSA e BULCÃO, 2004, p. 50-51).

Para Bachelard, a formação implica essencialmente na desconstrução e reconstrução pelo qual o sujeito precisa romper com os obstáculos epistemológicos e pedagógicos, com os retardos e concepções pré-estabelecidas que o impedem de atingir o conhecimento. Nesse processo, o “espírito se revela como um ser a instruir, ou seja, como um ser a criar. O conhecimento se dinamiza por sua historicidade. Por ter uma história, ele tem um destino. Essa história é pedagógica” (BACHELARD, 2008, p. 80).

Assim, “as instâncias pedagógicas revelam-se eficazes e indispensáveis. Elas nos mostram que a ciência é escola, uma escola permanente” (BACHELARD, 1966, p. 43, tradução nossa).

Bachelard (1966, p. 24, tradução nossa), em conversa com Brunshvicg, afirma, ainda, que sem dúvida ele “é mais professor que filósofo e que a melhor maneira de medir a solidez de ideias científicas é por meio do ensino. [...] Ensinar é a melhor maneira de aprender”, o que consideramos base da formação continuada de um professor.

O homem dedicado à cultura científica é um eterno estudante. A escola é o maior modelo de vida social. Continuar estudante deve ser o anseio de todo professor. Por causa da prodigiosa diferenciação do pensamento científico e da necessária especialização, a cultura científica coloca o mestre numa situação de estudante (BACHELARD, 1966, p. 36, tradução nossa).

Para Bachelard, as noções científicas têm grande relação com os aspectos pedagógicos e essa relação se estabelece socialmente.

Para que a ciência objetiva seja plenamente educadora, é preciso que seu ensino seja socialmente ativo. É um alto desprezo pela instrução o ato de instaurar, sem recíproca, a inflexível relação professor-aluno. A nosso ver, o princípio pedagógico fundamental da atitude objetiva é: Quem é ensinado deve ensinar. Quem recebe instrução e não a transmite terá um espírito formado sem dinamismo nem autocrítica. Nas disciplinas científicas principalmente, esse tipo de instrução cristaliza no dogmatismo o conhecimento que deveria ser um impulso para a descoberta (BACHELARD, 1996, p. 300).

Segundo Barbosa e Bulcão (2004, p. 51), a “problemática da formação em Bachelard, se desenvolve a partir de dois eixos distintos [...]: o eixo da razão e o da imaginação”. Esses dois eixos, que se mostram, em princípio, opostos entre si, contribuem para o desenvolvimento do espírito humano. Nesse sentido, podem-se caracterizar as ideias pedagógicas de Bachelard como pedagogia da razão e pedagogia da imaginação. Ambas, em consonância, contribuem para a formação integral do sujeito.

Para Poincaré, dentre as suas inúmeras obras publicadas, é possível encontrar ideias pedagógicas, em *A Ciência e a Hipótese* (1988), *O Valor da Ciência* (1995), *Ce que disent les choses* (1911), essa última obra é dirigida às crianças e aos jovens e tem por objetivo tratar de ideias sobre a história da ciência como uma pedagogia. Além dessas obras, muitos de seus artigos também tratam sobre pedagogia, por exemplo, *Les définitions générales em mathématiques* (1904), *Les fondements de la géometrie: A propos d'un livre récent (suite et fin)* (1902), *La logique et l'intuition dans la science mathématique et l'enseignement* (1899a) e *La notation différentielle et l'enseignement* (1899b).

Para Poincaré, o projeto pedagógico deve seguir um projeto filosófico.

No que diz respeito à matemática, Poincaré faz uma crítica às práticas pedagógicas ditas tradicionais (na sua época, o que não tem mudado muito na atualidade). Afirma que, ao tornar-se rigorosa, “a matemática assume um caráter artificial [...], ela esquece suas origens históricas; vemos como as questões podem ser resolvidas, mas já não vemos como e porque elas aparecem” (BRUTTER, 1998, p. 53). Nesse aspecto, é fundamental trabalhar no ensino a historicidade das ideias matemáticas, as quais foram impulsionadas pela imaginação e a intuição para sua criação e conceptualização.

Poincaré, em seus trabalhos, ressalta a importância da intuição no processo de ensino e aprendizagem, particularmente na matemática, destacando a preocupação com as faculdades intuitivas dos alunos exigidas na aprendizagem com os objetos matemáticos.

Já tive oportunidade de insistir sobre o lugar que a intuição deve guardar no ensino das ciências matemáticas. Sem ela, os jovens espíritos não poderiam iniciar-se na inteligência da matemática; não aprenderiam a amá-la, e só veriam nela uma vã logomaquia; sem a intuição, sobretudo, jamais se tornariam capazes de aplicá-la (POINCARÉ, 1995, p. 26).

Poincaré (1904) argumenta que a falta de compreensão da matemática deve-se em grande medida pela não justificção das teorias apresentadas, pelo excesso de rigor e falta de intuição. O excesso de rigor, muitas vezes, mascara as razões que levaram à formulação das ideias, mascara suas origens históricas.

Em torno de definições gira a matemática e seu ensino, mas o que é uma boa definição?, pergunta Poincaré. Ele mesmo dá-nos um direcionamento: “para o filósofo é aquela que satisfaz as regras da lógica, para o ensino é aquela que é compreendida pelos alunos” (POINCARÉ, 1904, p. 18).

Mas, o que é compreender, na concepção de Poincaré? Compreender a demonstração de um teorema não é examinar sucessivamente cada um dos silogismos de que é composto e constatar que eles estão corretos, conforme as regras do jogo. É necessário mais que constatar, saber como eles encadearam em uma determinada ordem, mais que em outra. E a ordem na qual os elementos são dispostos é mais importante do que os elementos mesmos (POINCARÉ, 1904). É a intuição dessa ordem que permite perceber o conjunto do raciocínio imbricado em uma demonstração.

No ensino, então, segundo Poincaré, devemos recorrer à intuição para que os alunos compreendam melhor as ideias matemáticas. Ele ainda sugere que os alunos refaçam, sem passar etapas, o caminho percorrido pelos matemáticos para que percebam a matemática em

harmonia com as leis profundas do desenvolvimento biológico do ser. Caso contrário, corre-se o risco de o aluno considerar a matemática como um amontoado de definições inúteis. Quando o espírito do aluno estiver familiarizado com o raciocínio matemático amadurecido, dúvidas e questionamentos surgirão sucessivamente (POINCARÉ, 1904).

A “satisfação do professor não é o único propósito do ensino, e deve se preocupar antes com o espírito do aluno e o que nós queremos que ele se torne” (POINCARÉ, 1899, p. 159, tradução nossa). Da mesma forma, a arte de raciocinar é uma qualidade preciosa que o professor de matemática deve cultivar no aluno desde o início (POINCARÉ, 1904).

As discussões filosóficas em torno da intuição não minimizaram a defesa que Poincaré fez em relação ao seu potencial na formação do espírito do aluno, mas ele também não deixou de salientar as suas limitações e o seu potencial para levar a erros. A “intuição não pode nos dar rigor, nem mesmo certeza” (POINCARÉ, 1904, p. 262, tradução nossa).

Poincaré trata também, além das questões pedagógicas, importantes para o campo da educação matemática, das questões de conteúdos matemáticos propriamente ditos, por exemplo, de aritmética, de geometria, de análise, da mecânica e outros, propondo soluções pedagógicas para o ensino desses conteúdos. Por exemplo, em geometria, para definir linha reta e círculo, ele sugere conceitualizá-los a partir da intuição que a régua e o compasso promovem.

Complementando, a “educação deveria ter como propósito fundamental a potencialização da capacidade cognitiva nos indivíduos pelo uso da imaginação” (EFLAND, 2010, p. 343) e pelo exercício da intuição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

*Nas coisas indefinidas o espírito
desperta para as novas invenções*

Leonardo da Vinci

A filosofia do “quarto escuro”

A afirmação feita por Leonardo na nossa epígrafe aparece em sua obra *Tratado da Pintura*, e ela refere, segundo Alessandro Vezzosi (2011, p. 28), ao que Leonardo pensa quando observa manchas numa parede: elas “estimulam sua imaginação”. Essa forma de pensar de Leonardo vem ao encontro da nossa concepção de imaginação, pois ela se alimenta de coisas difusas, imprecisas, indefinidas para depois dar-lhe algum tipo de concretude.

Ao dar um término, mesmo que provisoriamente, à pesquisa realizada nesta tese, faz-se necessário voltar ao início, ou seja, ao “quarto escuro”, e relatar qual foi o nosso percurso dentro dele. A metáfora do “quarto escuro”, uma experiência fantástica de amadurecimento, transformação e conhecimento.

Um velho ditado diz que fazer uma pesquisa é como entrar num quarto escuro. Em que consiste esse “quarto escuro”? Inicialmente a escuridão nele é apavorante, pois nada é visível. É você com você mesmo, em um mundo totalmente estranho, ensurdecidamente escuro. Há, portanto, duas alternativas: sair ou ficar, mas a angústia produtiva em ficar é maior que sair, então, a imaginação é aguçada, flui a uma velocidade estonteante e a aventura torna-se desafiante. Assim, depois de um certo tempo, o medo vai, aos poucos, se afastando, você vai apalpando os objetos e os obstáculos na escuridão, sem rumo, sem destino, um vai e volta, várias vezes, pois voltar, em muitos momentos é necessário. Nesse caminho, tateando os obstáculos, você descobre que não há necessidade de tanto pavor e isso o faz continuar, então, a experiência torna-se atraente. A cada descoberta, um novo clarão local surge e a experiência vai tornando mais instigante e você continua, porque não consegue mais parar, como uma fagulha de fogo, insistente, latente, te impulsiona a continuar e a descobrir mais coisas novas, até que o “quarto” adquira cor e forma, som e gosto diante de seus olhos, uma experiência fantástica. Essa emoção da descoberta nos enche de prazer estético e nos deixa em um estado de euforia e felicidade.

Foi essa emoção que me conduziu durante todo o percurso da pesquisa. É claro, não estive sozinha, algumas pessoas, mas, especialmente meus orientadores, me conduziram nesse caminho. Sabemos que ainda há pontos escuros nesse quarto que precisam ser desvendados, aonde a luz ainda não chegou completamente, manchas no sentido de Leonardo, mas é necessário, nesse momento, encerrar.

Essa metáfora com o “quarto escuro” foi para expressar como funciona a experiência da pesquisa na matemática e na educação matemática, experiência que permeia este trabalho. Em um primeiro momento é como estar em um “mundo estranho”, o “quarto escuro”, mas aos poucos, vamos descobrindo, com um certo esforço, estudo e dedicação, as suas sutilezas e sentimos prazer em poder conhecê-lo, compreendê-lo e contorná-lo em certas situações.

As nuances proporcionadas pela aventura da viagem pelo “quarto escuro” da pesquisa nos levaram ao seu título: *A elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática e implicações para a educação matemática: diálogos com Henri Poincaré e Gaston Bachelard.*

O impulso que nos levou a fazer o percurso nos meandros desse “quarto escuro” e chegar ao “final do túnel”, rumo à elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática, partiu de afirmações do próprio Bachelard, quem diz: “a ciência cria, com efeito, uma filosofia” (BACHELARD, 1978b, p. 92). Ainda, a “ciência costuma postular uma realidade. [...] Essa realidade, cujo conhecimento não pode ser esgotado, suscita uma pesquisa sem fim. [...] Vamos, pois, adotar como postulado da epistemologia o caráter sempre inacabado do conhecimento” (BACHELARD, 2004, p. 16-17). Nesse sentido, parafraseando as palavras de Bachelard, tomamos como pressuposto que é a matemática que cria uma epistemologia. E assim como é a ciência na sua dinamicidade que engendra a nova filosofia da ciência, assim será a própria matemática, em sua dinamicidade, que envolve, além da lógica, a imaginação e a intuição, que permitirá o desenvolvimento de uma filosofia da matemática, em particular, de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” nesse campo. Sair ou iluminar o “quarto escuro” com essa pequena chama inicial foi, então, nosso maior desafio!

A concepção dinâmica do conhecimento matemático e a metodologia de exemplos

No campo da matemática procuramos exemplos, que posteriormente constituíram-se numa metodologia de trabalho, com que pautamos nossa discussão para elaborar uma “epistemologia da imaginação e da intuição”.

Tratar de “epistemologia da imaginação e da intuição” em matemática só é possível, como já apontamos na introdução, adotando uma concepção de matemática como uma “ciência viva”, dinâmica, se mexendo, não apenas como um corpo estático e rígido de conhecimentos, mas sim como atividade, como um processo, como forma de pensar. Nesse aspecto, buscamos afastar a crença de que a matemática é puramente lógica e racional. Quando falamos de matemática viva, estamos associando, metaforicamente, seus processos aos processos biológicos. A biologia se preocupa com organismos e os organismos nascem, se transformam, geram mutações; esse comportamento só funciona por ser vivo o objeto de estudo. Então os conceitos matemáticos, segundo nossa concepção, têm essa natureza de organicidade e dinamicidade, nesse sentido a matemática “vive”, incorporando no seu escopo os processos dinâmicos de intuição e imaginação.

Essa matemática viva, porém complexa, exige, então, além da lógica, também a imaginação e a intuição para sua compreensão. A intensa polissemia dos termos ‘imaginação’ e ‘intuição’, suas múltiplas acepções, bem como seus papéis na construção do conhecimento matemático, em complemento à lógica, nos desafia e nos coloca em ação diante do problema da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática. Essa epistemologia enseja contribuir para discussões conceituais sobre o papel da imaginação, da intuição, da exclusividade da lógica na construção do conhecimento matemático e das relações entre a matemática, a arte e outras ciências.

A imaginação e a intuição são processos complexos que não podem ser delimitados por meio de uma definição, e menos expressos em (poucas) palavras. Elas são noções orgânicas que estão em movimento na teia do pensamento matemático. São como uma bola de basquete ou de futebol, ela não faz sentido parada, mas em movimento nos diz muito sobre o jogo. Nesse sentido, essas noções não estão sujeitas a definições e seu tratamento teórico é possível numa concepção orgânica de matemática. A imaginação e a intuição são partes de um organismo vivo, são “seres” que respiram, se transformam e, portanto, não admitem definições fechadas, pois definir é encontrar o limite de algo.

Assim, estamos considerando a intuição e a imaginação em sua dimensão epistemológica, isto é, como processos de acesso ao conhecimento matemático, processos de descoberta e criação dentro da dinâmica interna do conhecimento matemático. Não estamos dizendo que a imaginação e a intuição são partes do conhecimento matemático, mas são formas de acesso. Desse ponto de vista, elas não são conhecimento, mas são ações. O que leva a conhecer, já carrega em si uma epistemologia.

A questão da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição”, segundo nosso entendimento, deve ser feito por meio de exemplos do campo da matemática. Eles não são meras ilustrações da teoria, mas permitem colocar em movimento as noções que a imaginação e a intuição fazem emergir no pensamento matemático, constituindo-se como uma metodologia de pesquisa, justificando as diferentes ideias e conclusões apresentadas na tese. Ao escolhermos esse percurso metodológico, procuramos dar visibilidade e sustentabilidade ao problema da elaboração dessa epistemologia.

Entendemos que os exemplos, desde que interpretados adequadamente, são os portadores das qualidades dinâmicas da intuição e da imaginação no campo da matemática e, além disso, propõem-se discutir a sua dimensão epistemológica, permitindo uma compreensão alargada da matemática. Desse ponto de vista, entendemos que a metodologia de pesquisa baseada em exemplos, pode configurar-se como um método, com características próprias, que reflete o pensamento matemático em movimento, como em um organismo vivo, mas cujas representações estão constituídas não por coisas, mas por relações entre as coisas, a nossa ontologia relacional.

Deste modo, os exemplos utilizados na pesquisa procuraram descrever, discutir e interpretar os processos de elaboração e formas de conhecimento no campo da matemática. Os exemplos escolhidos procuram desvelar a “realidade” representada, que sem eles continuaria oculta ou seria mais difícil de desvendar em outras perspectivas de investigação. Salientamos que a credibilidade dos exemplos não está na representação de uma teoria ou de ideias matemáticas, mas na amplitude e clareza que os conceitos expressam por meio da dinamicidade oculta nos próprios exemplos. A dimensão epistemológica e estética da metodologia com exemplos possibilita novas interpretações e novos olhares para a “nova matemática”.

Diálogos com Poincaré e Bachelard

A tese apresentou uma problemática desencadeadora de um processo de pesquisa que foi: *colocar em suas bases epistemológicas o problema da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática, visando à educação (em) matemática.*

A fim de fundamentar a pesquisa, optamos, para montar uma base teórica, realizar um diálogo com as ideias de Henri Poincaré e de Gaston Bachelard. Ambos trouxeram muitas contribuições do campo da epistemologia e filosofia da ciência, em especial suas concepções sobre a construção da ciência, a sua relação com a matemática, relação em que a imaginação e a intuição entram em diálogo com ela, diálogo esse que foi também um dos propulsores deste

trabalho. As contribuições de Bachelard e Poincaré tomadas para essa discussão, mesmo sendo relevantes e fundamentais, não foram exploradas exaustivamente e merecem um estudo posterior.

A necessidade de “ligar” a epistemologia, que está do lado da razão científica, à imaginação e à intuição, que estão do lado da razão poética, procurando sua racionalidade, o que não deve ser confundido com ter uma lógica, foi um desafio. Razão e imaginação, assim como razão e intuição, não são ações dicotômicas, ambas possuem características semelhantes, de criar e/ou descobrir conhecimentos para instaurar o que ainda não existe ou o que existe e não se “vê”.

A possibilidade de “ver” os objetos descobertos pela intuição ou criados pela imaginação requer, como já apontado, identificar um espaço ontológico de “concretização” desses objetos. Desse ponto de vista, a matemática pode ser considerada uma ciência empírica como a física, em que o acesso a esse espaço ontológico pode ser feito mediante observações ou experimentações mentais com os objetos aí existentes. Esse espaço ontológico será o espaço da experiência matemática.

Aspectos formativos da intuição e da imaginação no ensino de matemática

Gusmão (2013) destacou que o conhecimento científico e também o matemático, assim como seu ensino, devem ser procurados na sensibilidade do sujeito epistêmico e não apenas na sua capacidade lógica. Para tanto, os estudos filosóficos no campo da educação matemática serão essenciais nessa procura.

Bachelard discute, em particular, o ensino através da ideia de “formação”, especialmente na formação do “espírito científico”. De fato, um dos papéis da educação é contribuir para a formação do espírito.

A esse respeito, no capítulo 5, foi apontado o seguinte:

a matemática então, segundo nosso ponto de vista, além de ser uma ciência das quantidades, das operações numéricas e das medidas, mostra uma interconexão profunda entre o espírito humano e a realidade e, para compreender essa realidade é necessária uma matemática que incorpore aspectos qualitativos impregnada de sensibilidade, imaginação, intuição e criatividade.

A esse respeito é necessário um novo olhar para pensar a incorporação da matemática moderna (a partir do século XIX) no ensino, uma matemática que inclui, por exemplo, as

geometrias não-euclidianas e a topologia. Para esse novo olhar, a nossa epistemologia da imaginação e da intuição pode contribuir.

Essa epistemologia destaca, como um dos seus aspectos formativos, a capacidade de síntese do ser humano, capacidade necessária para todo o empreendimento criativo.

Outro dos aspectos formativos do advento dos estudos epistemológicos na matemática é o que diz respeito a compreender mais que aplicar, condição necessária para a “percepção” da beleza da matemática.

Essa percepção, que é de natureza estética, também tem um viés epistemológico, aquele que nos permite ver “concretizados” os objetos abstratos da matemática. Isso é exatamente ver as relações entre os objetos mais que os próprios objetos que, como vimos, constituem a ontologia da imaginação e da intuição.

Essa capacidade de “ver” pode ser aprimorada através do recurso pedagógico da visualização, uma das mais modernas tendências no ensino da matemática.

Finalmente, acreditamos que a incorporação dos diversos aspectos formativos apontados podem contribuir, para o professor de matemática, em uma autonomia diante do conhecimento que lhe permita elaborar metodologias inovadoras para seu ensino da matemática em que a imaginação, a intuição e a criatividade estejam presentes.

Ciência e arte guiadas pela imaginação e a intuição

A relação ciência e arte em Bachelard foi apenas citada na tese em determinados trechos e aqui nas considerações retomamos alguns aspectos, porém sem a intenção de aprofundar a questão.

Bachelard, em sua vertente noturna, o nosso maior interesse na tese, é um pensador do devaneio poético, que pautava seu conhecimento na poética, na imaginação e na criatividade. A imaginação criadora, baseada nas leis materiais dos quatro elementos: fogo, água, ar e terra teve um destaque na poética de Bachelard. Aqui, buscamos trazer para a discussão o debate entre a razão arquitetônica de sua face “diurna” e a razão polêmica de sua face “noturna”, na qual a imaginação faz-se presente.

As duas vertentes bachelardianas, a nosso ver, não são antagônicas, mas refletem-se mutuamente, a tal ponto em que podemos “defender” que só há um Bachelard, um Bachelard “inteiro”, que durante toda sua vida carregou sempre consigo a epistemologia e a poética conjugadas, ou seja, mesmo quando fazia uma análise eminentemente epistemológica, trazia uma filosofia da descoberta científica em sua materialidade.

Bachelard, o homem “diurno” da ciência, num determinado momento de sua vida muda de rumo, do campo da filosofia da ciência adentra no mundo da imaginação poética como já vimos anteriormente. Para o Bachelard “noturno”, o homem é instaurador de novas realidades, cuja fonte é a imaginação criadora, a essência do espírito humano, que de modo dinâmico o torna capaz de produzir tanto ciência quanto arte, ou seja, o pensamento e o sonho. A dualidade razão e emoção que, para Bachelard, não são excludentes, aponta para a complementaridade entre a ciência e a arte, entre o homem que aplica a razão como instrumento da ciência, e o homem que, pela fantasia e imaginação, se ancora no mundo, apreendendo-o por meio do devaneio poético (PAIVA, 2005).

Fazendo uma analogia da produção desses conhecimentos para a visão surrealista do poeta, temos que:

cada poeta seria, então, suscetível de um diagrama que indicaria o sentido e a simetria de suas coordenações metafóricas, exatamente como o diagrama de uma flor estabelece o sentido e as simetrias de sua ação floral. Não há flor real sem essa conformidade geométrica. Do mesmo modo, não há floração poética sem uma certa síntese de imagens poéticas. Convém, no entanto, não ver nessa tese uma vontade de limitar a liberdade poética, de impor uma lógica ou uma realidade, o que é a mesma coisa, à criação do poeta. É depois de tudo feito, objetivamente, depois do desabrochar, que acreditamos descobrir o realismo e a lógica íntima de uma obra poética (BACHELARD, 1994, p. 159-160).

Com a criação do termo ‘surracionalismo’ por Bachelard, “a filosofia postula a imprescindibilidade de uma razão que incorpora ao pensamento o exercício da liberdade, a qual assemelha-se à liberdade da criação artística operada pelo surrealismo nas artes” (PAIVA, 2005, p. 114).

O surracionalismo de Bachelard está em consonância com a intuição, também defendida por Poincaré (1946, 1988, 1995), que permite desenvolver a capacidade de inventar e de criar. A razão surracional, juntamente com o surrealismo que dão bases ao surracionalismo de Bachelard,

é aberta, inquieta e criadora, almeja o novo, liberta-se da condição e das formas de pensar já estabelecidas, rompendo com o saber instituído, retificando-o, redimensionando-o e transformando-o. [...] A razão surracional se evade da condição de tradição e das formas de pensar cristalizadas. [...] Bebe das fontes da imaginação (PAIVA, 2005, p. 116-117).

A razão surracional tem, para Bachelard, suas fontes na imaginação. Por outro lado, a ciência do século XX revela-se análoga à arte. Ela tem também a sua poética; imaginar, intuir, criar, dar lugar ao inexistente tornam-se atributos seus. Nesse sentido, razão e sensibilidade,

ciência e poesia, lógica e intuição se complementam nas ideias do Bachelard “diurno” e “noturno” e nas ideias de Poincaré. O Bachelard “diurno”, sem minimizar o rigor na ciência, alude a uma razão que compartilha com o ato de imaginar, sobressaindo, então, o Bachelard “noturno” (PAIVA, 2005). Também Poincaré, sem desmerecer a lógica, salienta o papel da intuição como instrumento da invenção, da imaginação, da criação.

Do ponto de vista pedagógico, liberar a imaginação criadora tem um forte componente de ludicidade, uma notória aproximação entre a matemática e a arte.

Perspectivas futuras

A tese colocou em discussão a questão da elaboração de uma “epistemologia da imaginação e da intuição” no campo da matemática. Porém, as discussões não se encerram aqui, pois há muito ainda o que fazer e esclarecer a partir das questões levantadas.

Identificar as capacidades da imaginação e da intuição em exemplos do campo da matemática permite movimentar as ideias matemáticas dentro de sua dinâmica, logo, buscar novos exemplos com essas características é uma tarefa a ser feita, ampliar a nossa metodologia de exemplos e colocá-la em relação com a “experiência matemática”.

Como uma das perspectivas futuras temos que, na medida em que é possível desligar a imaginação e a intuição da lógica, seria possível associar essas capacidades a outras lógicas, por exemplo, às lógicas das etnomatemáticas, o que poderia trazer consequências também para uma melhor compreensão da modelagem matemática. Qual é a intuição matemática em outras culturas?

A pesquisa não teve intenção de chegar aos alunos da educação básica, inicialmente, mas visou discutir e apresentar alguns aspectos formativos para a formação de professores de matemática, sendo, portanto, uma perspectiva futura, pesquisar metodologias de ensino para esse público em que a imaginação e a intuição sejam relevantes para a aquisição e fixação do conhecimento matemático.

A proposta de imaginação e de intuição posta no cenário do ensino da matemática ganha uma série de coadjuvâncias, tais como o material concreto, a história, a filosofia, entre outras. Uma, em especial, pode ser posta como perspectiva futura: a matemática na dinâmica de softwares.

Finalmente, ainda é necessário um aprofundamento filosófico e metodológico dessa epistemologia da imaginação e da intuição aqui esboçada, matizada, também, com o diálogo com outros autores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- ALENCAR, E. M. L. S.; FLEITH, D. S. **Criatividade: múltiplas perspectivas**. 2 ed. Brasília: Universidade de Brasília, 2003.
- AMOROSO COSTA, M. **As ideias fundamentais da matemática e outros ensaios**. São Paulo: Grijalbo, 1971.
- BACHELARD, G. A. **A Terra e os Devaneios da Vontade**: ensaio sobre a imaginação das forças. Trad. Maria E. de A. P. Galvão. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013.
- _____. **A experiência do Espaço na Física Contemporânea**. Trad. Estela dos Santos de Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2010.
- _____. **A água e os sonhos**: ensaio sobre a imaginação da matéria. Trad. Antônio de Pádua Danesi. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013a.
- _____. **A terra e os devaneios da vontade**: Ensaio sobre a imaginação das forças. Trad. Maria Ermantina de A. P. Galvão. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013.
- _____. **Estudos**. Trad. Estela dos S. Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.
- _____. **Epistemologia**. Rio de Janeiro: Edições 70, 2006.
- _____. **Ensaio sobre o Conhecimento Aproximado**. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.
- _____. **A terra e os devaneios do repouso**: Ensaio sobre as imagens da intimidade. Trad. Paulo Neves. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
- _____. **Ensaio sobre o conhecimento aproximado**. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.
- _____. **A Psicanálise do fogo**. Trad. Paulo Neves. São Paulo: Martins Fontes, 1994.
- _____. **La intuición del instante**. Trad. de Jorge Ferreiro. 2. ed. México: FCE, 1999.
- _____. **O Ar e os Sonhos**: ensaio sobre a imaginação do movimento. Trad. Antônio de Pádua Danesi. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.
- _____. A Filosofia do Não. In: PESSANHA, José A. M. **Os Pensadores**. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978a.
- _____. O novo espírito científico. In: PESSANHA, J. A. M. **Os pensadores**. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978b.
- _____. A poética do Espaço. In: PESSANHA, J. A. M. **Os pensadores**. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978c.

_____. **El compromiso Racionalista**. Trad. de Hugo Beccacece. Córdoba: Siglo XXI Editores, 1973.

_____. **L'Engagement Rationnaliste**. Paris: Les Presses universitaires de France, 1972.
Disponível em:
<http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/engagement_rationaliste/engagement_rationaliste.pdf>. Acesso em 13 out 2017.

_____. **Le Rationalisme Appliqué**. Paris: Les Presses universitaires de France, 1966.
Disponível em:
<http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/rationalisme_applique/rationalisme_applique.pdf>. Acesso em 13 out. 2017.

_____. **Le Pluralisme Cohérent de la Chimie Moderne**. Paris: Vrin, 1932b.

_____. **Étude sur L'Évolution d'un Problème de Physique: la propagation thermique dans les solides**. Paris: Vrin, 1928.
(http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/Etude_evolution_probleme_de_physique/Etude_evolution_probleme_de_physique.pdf).

BAUDELAIRE, Charles. **Obras Estéticas**: filosofia da imaginação criadora. Trad. Edilson Darci Heldet. Petrópolis: Vozes, 1993.

BLANCHÉ, Robert. **A epistemologia**. Trad. Natália Couto. São Paulo: Martins Fontes, 1975.

BARBOSA, E; BULCÃO, M. **Pedagogia da razão, pedagogia da imaginação**. Petrópolis: Vozes, 2004.

BOTTAZZINI, Umberto. Intuição ou a máquina de C hicago. In: Gênios da ciência: a vanguarda da matemática. **Revista Scientific American Brasil**. 2 ed. São Paulo: Duetto Editorial, 2012. p. 21-22.

BRUNSCHVICG, Leon. **Las Etapas de la Filosofía Matemática**. Trad. Cora Ratto de Sadoski. Buenos Aires: Lautaro, 1945.

BRUTTER, Claude-Paul. **Compreender as matemáticas**: as dez noções fundamentais. Trad. Luís Paulino Leitão. Lisboa: Instituto Piaget, 1998.

BULCÃO, Marly. **O racionalismo da ciência contemporânea**: introdução ao pensamento de Gaston Bachelard. Ed. rev. & ampl. Aparecida: Ideias & Letras, 2009.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 6 ed. São Paulo: Grativa, 2005.

CIFUENTES, José C. Modelagem Matemática e inclusão científica: uma abordagem histórico-epistemológica. In: ALENCAR, Edvone S.; BUENO, Simone (orgs). **Modelagem matemática e inclusão**. São Paulo: Editora da Física, 2017 (A parecer).

_____. O mito da análise real na formação conceitual do professor de matemática sobre os números reais e análise matemática. In: KALINKE, Marcos A.; MOCROSKY, Luciane F. **Educação matemática: pesquisas e possibilidades**. Curitiba: Ed. UFPR, 2015.

_____. O “Salto Arquimediano”: um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. **Scientiae Studia** (USP), vol. 9, 2011.

_____. Fundamentos Estéticos da Matemática: Da Habilidade à Sensibilidade. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Filosofia da Educação Matemática: Concepções e Movimento**. Brasília: Editora Plano, 2003.

_____. **Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

_____. Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: Uma “Odisséia Espiritual”. In: CLARETO, Sônia M.; DETONI, Adlai R.; PAULO, Rosa M. (orgs). **Filosofia, Matemática e Educação Matemática: compreensões dialogadas**. Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2010, pp. 13-32.

_____. A magia de Escher (M.C. Escher): entrevista. [08 de maio, 2013]. Curitiba. **UFPR TV**. Entrevista concedida ao Programa Caldo de Cultura, UFPR. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=H42B-OARxz0&feature=youtu.be>>. Acesso em 16 set. 2015.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação. In: **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM**. Recife, 2011. Publicado em CD-ROM.

_____. D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da Teoria à Prática**. 15ª ed. Campina: Papyrus, 2007.

DEL VECCHIO JUNIOR, J. **Metafísica e Racionalidade Científica: um Ensaio sobre os Fundamentos da Matemática**. 2010. 248f. Tese de Doutorado em Filosofia. Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Universidade de São Paulo/SP.

_____. **A Filosofia de Henri Poincaré: a natureza do conhecimento científico e os paradoxos da teoria dos conjuntos**. 2005. 109f. Dissertação de mestrado em Filosofia. Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Universidade de São Paulo/SP.

DUARTE JUNIOR, J. F. **Fundamentos Estéticos da Educação**. 2 ed. Campinas: Papyrus, 1988.

_____. **Por que arte-educação?** 6 ed. Campinas: Papyrus, 1991.

_____. **O sentido dos sentidos: a educação (do) sentido**. 5 ed. Curitiba: Criar Edições, 2010.

EFLAND, Arthur D. Imaginação na cognição: o propósito da arte. In: BARBOSA, Ana M. **Arte/Educação Contemporânea: Consonâncias Internacionais**. 3 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

EINSTEIN, Albert. **A Teoria da relatividade especial e geral**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in Science and Mathematics: an educational approach**. Dordrecht: Reidel, 1987.

FELÍCIO, Vera Lucia G. **A Imaginação Simbólica nos Quatro Elementos Bachelardianos**. São Paulo: Edusp, 1994.

FLORES, Cláudia. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva**. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone. Catarina Freitas Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FUCHS, Walter R. **A matemática moderna**. Trad. Marianne Arnsdorff e José Manasterski. São Paulo. Polígono, 1970.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e Motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio**. 194f. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília. 2007

GURGEL, Ivã; PIETROCOLA, Maurício. A Imaginação Científica: Aspectos da Construção do Conhecimento Sob a Perspectiva da Criação Subjetiva. In: **IX EPEF – Encontro de Pesquisa em Ensino de Física**, Jaboticatubas, MG, 2004.

GURGEL, Ivã; PIETROCOLA, Maurício. O papel da imaginação no pensamento científico: análise da criação científica de estudantes em uma atividade didática sobre o espalhamento de Rutherford. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, v. 28, n. 1: p. 91-122, abr. 2011a.

GURGEL, Ivã; PIETROCOLA, Maurício. Uma discussão epistemológica sobre a imaginação científica: a construção do conhecimento através da visão de Albert Einstein. **Rev. Bras. Ensino Física**, São Paulo, v. 33, n. 1, p. 01-12, Mar. 2011b.

GUSMÃO, Lucimar. **Educação Matemática pela Arte: uma defesa da educação da sensibilidade no campo da matemática**. 2013. 153f. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática. Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Interdisciplinaridade. Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR.

HADAMARD, Jaques. **Psicologia da invenção matemática**. Trad. Estela dos Santos de Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.

HEINZMANN, Gerhard. **L'intuition épistémique: une approche pragmatique du contexte de justification en mathématiques et en philosophie**. Paris: Vrin, collection Mathesis, 2013.

_____. Raisonement mathématique et esthétique. Quelques réflexions à partir de Henri Poincaré, **Alliage**, 43, p. 35-42, 2000.

- HOUAISS, Antônio. **Dicionário de língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.
- HUNTLEY, H. F. **A divina proporção**. Trad. Luiz Carlos Ascênsio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.
- JAPIASSU, Hilton. **Para ler Bachelard**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1976.
- JOLIVET, Régis. **Vocabulaire de la Philosophie**. Paris: Emmanuel Vitte, 1946.
- KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. Trad. Alex Marins. São Paulo: Martins Claret, 2004.
- LACROIX, J. Gaston Bachelard, el hombre y la obra. In: LACROIX, J., et. al. **Introducción a Bachelard**. Buenos Aires: Ed. Caldén, 1973.
- LEHRER, Keith. Racionalidade. In: GRECO, John; SOSA, Ernest (org). **Compêndio de Epistemologia**. São Paulo: Edições Loyola, 2008.
- LE LIONNAIS, F., **Les Grandes Courantes de la Pensée Mathématiques**. Marseille (Fr): Cahiers du Sud, 1948.
- LESCURE, J. Introducción a la poética de Bachelard. In: BACHELARD, G. **La intuición del instante**. Trad. de Jorge Ferreiro. 2 ed. México: FCE, 1999.
- MARCONDES CESAR, Constança. **A hermenêutica francesa: Bachelard**. 2 ed. Campinas: Alínea, 2015.
- MIRÓ QUESADA, Francisco. La Filosofía de la Lógica de N.C.A. Da Costa. **Crítica - Revista Hispanoamericana de Filosofía**, vol. 12, no. 34, 1980, p. 65-85.
- NAGEL, Ernest; NEWMAN, James, R. **Prova de Gödel**. Trad. Gita K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.
- NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática**. 2008. 94 fs. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.
- OSTROWER, Fayga. **Criatividade e processos de criação**. Petrópolis: Vozes, 2010.
- Os Pensadores. **Pré-socráticos**. São Paulo: Nova Cultural, 2000.
- PAIS, Luiz C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, SP, v. 4, n. 6, p. 65-70, jul./dez. 1996.
- PAIVA, Rita. **Gaston Bachelard: a imaginação na ciência, na poética e na sociologia**. São Paulo: FAPESP, 2005.
- PATY, Michel. Pensamento racional e criação científica em Poincaré. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 177-193, Junho 2010.

_____. A criação científica segundo Poincaré e Einstein. **Estudos avançados**, São Paulo, v. 15, n. 41, p. 175-176, abr. 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S010340142001000100013&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 07 jul. 2016.

_____. A criação científica segundo Poincaré e Einstein. **Estudos Avançados** 15 (41), 2001.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese**. Brasília: Editora da UnB, 1988.

_____. **Ensaio Fundamentais**. Org. Antônio Augusto Passos Videira e Ildeu de Castro Moreira. rad. Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

POINCARÉ, Henri. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. In: **L'enseignement Mathématique**, Paris, Genebra, n° 3, maio, 1889.

_____. Les fondements de la Géométrie: A propos d'un livre récent (suite et fin). **Revue néo-scolastique**. Année 1902, Volume 9, Numéro 33, pp. 19-34.

_____. L'Invention Mathématique. **Bulletin l'Institut Général de Psychologie**. Ano 8, 1908 (n° 3), 175-196, [Conferência pronunciada na Sociedade de Psicologia de Paris].

_____. **Les sciences et les humanités** (1911). Disponível em: <<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k680004/f1.image>>. Acesso em 12 dez 2017.

_____. Les définitions générales en mathématiques. In: **L'enseignement Mathématique**, Paris, Genebra, année 6, 1904.

_____. **Ce que disent les choses**. Paris: Hermann, 1911.

_____. **Ciência y Método**. 2. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpa Argentina, S. A., 1946.

_____. **A ciência e a hipótese**. Brasília: Editora da UnB, 1988.

_____. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PONCARÉ, Henri y EINSTEIN, Albert. **Los fundamentos de la geometria**. Buenos Aires: Ibero-Americana, 1948.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Trad. Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

READ, Herbert. **A redenção do robô: meu encontro com a educação através da arte**. Trad. Fernando Nuno. São Paulo: Summus, 1986.

_____. **A educação pela arte**. Trad. Valter Lellis Siqueira. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

SANTOS, Alessandra H. **Um estudo epistemológico da visualização matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização**.

2014. 98f. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática. Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Interdisciplinaridade. Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR.

SILVA, Jairo J. A filosofia da matemática de Poincaré. In: ÉVORA, Fátima R. R. **Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: Unicamp, 1992.

TORRES ALCARAZ, Carlos. Kant visto desde las matemáticas. **Revista Digital Universitária** [en línea]. 18 de enero de 2005, Vol. 6, Nº. 1.

VEZZOSI, Alessandro. **Leonardo da Vinci: arte y ciencia del universo**. Barcelona: Blume, 2011.