UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

BRUNO ALEXANDRE RODRIGUES

Classificação topológica de sistemas de controle lineares

Maringá-PR
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES

BRUNO ALEXANDRE RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria/Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana.
Co-orientador: Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol

Maringá-PR
2014

Dedico este trabalho à todas as minhas mães,
com especial carinho para minhas três velhinhas,
Terezinha Maria Andretto (in memorian),
Nadir Andretto e
Laíde Aparecida Andretto.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por permitir-me tal conquista. Aos meus pais, Elaine Aparecida Andretto e Paulo Roberto Rodrigues, pelo dom da vida. E dedico especial carinho às minhas mães, Terezinha Maria Andretto, Nadir Andretto e Laíde Aparecida Andretto, pois sem o amor das quais nada disto teria sido possível.

Agradeço imensamente a minha namorada, Thaís Fernanda Cabral dos Santos, por todo o amor, carinho e força que tem me dado ao longo desta caminhada, sendo sempre a melhor justificativa e o melhor motivo para que haja felicidade inclusive nos momentos mais difíceis, sempre apoiando e motivando-me a seguir em busca de nossos objetivos.

Agradeço a todos os meus familiares que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço ao meu orientedor, Prof. Dr. Alexandre José Santana, co-orientaddor, Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol, e aos colegas de seminário, João Augusto Navarro Cossich, Prof. Dr. Marcos André Verdi e Prof. Dr. César Adolfo Hernandez Melo, por todo o conhecimento que me foi transmitido nos inúmeros seminários que realizamos e por todas as contribuições, sugestões e correções que foram de grande valia para a conclusão desta dissertação.

Agradeço aos meus amigos e colegas de mestrado, Me. Ademir Benteus Pampu, Anderson Macedo Setti, Me. Richard Wagner Maciel Alves, que em muitas das longas tardes de estudos na biblioteca contribuíram para este trabalho com ideias e sugestões das melhores e mais variadas.

Agradeço a todos os professores com quem convivi e adquiri todo o conhecimento que me permitiu alcançar o sonho de ser, eu também, professor.

Aos membros da banca examinadora agradeço por todas as sugestões e correções indicadas.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, o qual foi imprescindível durante o período de realização deste trabalho.

Aos outros, dou o direito de ser como são.

A mim, dou o dever de ser a cada dia melhor.

Chico Xavier

Resumo

Neste trabalho estudaremos o problema de classificação topológica de sistemas de controle lineares, o que será feito por meio de famílias de trajetórias associadas ao sistema de controle. Também classificaremos tais sistemas via fluxos produto cruzado. Como resultado principal, estabeleceremos que dois sistemas de controle lineares são topologicamente conjugados se, e somente se, possuirem os mesmos índices de Kronecker, mesma inércia e as matrizes geradoras da parte não controlável dos sistemas forem semelhantes.

Também mostraremos que se o conjunto das imagens dos controles for compacto, então para um sistema de controle do tipo $\dot{x} = Ax + Bu$, com A hiperbólica, o fluxo de $\dot{x} = Ax$ e o fluxo de controle de $\dot{x} = Ax + Bu$ são topologicamente conjugados.

Palavras-chave: Sistemas de controle, conjugação topológica, índices de Kronecker, equivalência de feedback, forma de Brunovský.

Abstract

In this work we study the problem of classification of linear control systems. We do this first by using families of trajectories associated to a control system and after we use skew product flows to obtain another kind of classification. As main goal, we will state that two control systems are topologically conjugate if, and only if, they have the same Kronecker indices, the same inertia and the matrices that generate the noncontrollable parts of the systems are similar.

We also show that if the control range is compact, then to a control system of the form $\dot{x} = Ax + Bu$ with A hyperbolic, the associated linear flow Φ and the associated affine flow Ψ are topologically skew conjugate.

Keywords: Control systems, topological conjugation, Kronecker indices, feedback equivalence, Brunovský canonical form.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho vamos estudar a classificação de sistemas de equações diferenciais lineares e sistemas de controle lineares, tópico de grande importância na teoria matemática dos Sistemas de Controle.

Desde a antiguidade já existia a necessidade de se controlar sistemas físicos para obter algum comportamento desejado. Constatamos isto, por exemplo, na necessidade de se medir o tempo com precisão.

A clepsidra (do grego, $\kappa\lambda\epsilon\psi\acute{\upsilon}\delta\rho\alpha$) foi um dos primeiros instrumentos utilizados para medir o tempo. Funciona, assim como a ampulheta, por meio da ação da gravidade sendo, porém, movida pela água. Tal objeto consiste de dois recipientes posicionados em alturas diferentes: um na parte superior, contendo água, e outro na parte inferior dotado de uma escala de níveis interna e inicialmente vazio. Através de uma abertura parcialmente controlada no recipiente superior, a água passa para o recipiente inferior e o tempo é medido pela escala.

Ao longo da história, a clepsidra foi usada para medir períodos de tempo curtos, por exemplo,

- a duração de discursos de defesa (justiça) na Grécia Antiga;
- a duração dos turnos de guarda das legiões romanas;
- medição do tempo à noite ou em condições nas quais não se podia fazer uso de relógios de sol.

Contudo, a clepsidra era um sistema com precisão duvidosa, pois com o passar do tempo, à medida em que o nível de água caía, a pressão também era reduzida, fato que diminuía a vazão de água e prejudicava a linearidade da medição.

Por volta do ano 270 a.C., o matemático e engenheiro grego Ctesíbio inventou uma boia reguladora para a clepsidra. A função deste regulador era manter o nível de água no recipiente superior a uma profundidade constante - o nível de água no recipiente inferior dependia, portanto, do tempo decorrido.

O *design* do controle de sistemas como o exposto acima era essencialmente baseado em tentativa/erro e uma boa dose de engenhosa intuição. Era, portanto, muito mais arte que ciência.

Foi somente em meados do século XIX que se usou matemática para estudar o controle de sistemas físicos. Surgia então a teoria matemática dos Sistemas de Controle. Nesta teoria, o astrônomo britânico G. B. Airy foi o primeiro a utilizar equações diferenciais em seus estudos, por volta do ano de 1840.

A teoria moderna de Sistemas de Controle fundamenta-se, basicamente, no uso de modelos matemáticos para descrever e fazer com que um sistema físico concreto comporte-se de acordo com especificações estabelecidas. Uma das técnicas mais comuns é o uso de um modelo espaço estado com tempo contínuo do sistema a ser controlado. Isto é dado, em alguns casos, por uma equação diferencial da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde chamamos $\mathbb{R}^n$ de "espaço estado" do sistema e $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função com determinada regularidade, chamada de função de controle.

Neste trabalho, nosso objetivo será classificar sistemas de controle do tipo acima por meio de certas relações de equivalência e conjugações. A classificação de sistemas de controle é de fundamental importância nesta teoria, o que se justifica pelo fato de que sistemas numa mesma classe de equivalência (ou de conjugação) possuem todos propriedades semelhantes, tais como controlabilidade e estabilidade, por exemplo. Assim sendo, para conhecer as propriedades de todos os elementos de uma mesma classe, basta apenas estudar um único elemento, que seja tão simples quanto possível.

O problema de classificação para sistemas de controle lineares completamente controláveis foi estudado por Brunovský [4], que introduziu o conceito de equivalência de feedback e mostrou que existe apenas uma quantidade finita de classes de equivalência de feedback, cada uma representada por uma forma canônica relativamente simples.

A classificação topológica para sistemas de controle lineares governados por equações diferenciais foi estudada primeiramente por J. C. Willems [12]. Tal classificação é baseada no conceito de família de trajetórias de um sistema de controle, i.e., curvas no espaço estado que são soluções da equação diferencial para determinados valores iniciais e funções de controle admissíveis.

Já nos trabalhos de A. J. Santana e F. Colonius, [10] e [11], são classificados os sistemas de controle bilinear, afim e afim-linear, sob o conceito de fluxo de uma equação diferencial. Podemos também usar [10], como veremos no capítulo 5, para classificar sistemas de controle lineares.

A estrutura deste texto está organizada do seguinte modo. No capítulo 1 faremos um apanhado geral e breve dos conceitos de Álgebra Linear e Equações Diferenciais que serão mais úteis neste texto, introduziremos os espaços quociente e determinadas projeções neste tipo de espaço que serão essenciais para os resultados de classificação de sistemas de controle lineares. Também enunciaremos o teorema de Carathéodory para existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias e, a partir da definição de exponencial de matrizes, observamos alguns resultados sobre existência e unicidade de solução para o sistema $\dot{x} = Ax$. Encerramos o capítulo explicitando a solução do sistema de equações diferenciais $\dot{x} = Ax + Bu$, peça chave deste trabalho.

Para que seja mantida certa "linearidade" na apresentação dos fatos, bem como para embasar os resultados que seguem, no capítulo 2 classificamos sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas, o que fundamenta todo o estudo subsequente. Iniciamos com a conjugação linear, caso mais simples e que se vale da existência de certo isomorfismo satisfazendo propriedades adequadas. Também trazemos pela primeira vez o conceito de fluxo de uma equação diferencial, o que proporciona diferentes meios de classificação dos sistemas.

O ápice deste capítulo consiste no estudo da conjugação topológica, imprescindível na classificação a ser feita no capítulo 4. Os resultados de classificação obtidos para sistemas homogêneos são então generalizados para sistemas afins no final do capítulo, cujos resultados são devidos a A. J. Santana e F. Colonius, [11]. Tal desenvolvimento já assemelha-se bastante ao que será desenvolvido no capítulo 5.

Os capítulos 3 e 4 são devotados à classificação topológica de sistemas de controle lineares introduzida em [12]. O capítulo 3 é reservado para os resultados referentes à equivalência de feedback, índices de Kronecker e a Forma Canônica de Brunovský, que são as ferramentas necessárias para se obter a classificação topológica apresentada no capítulo seguinte.

Na primeira seção do capítulo definimos o que exatamente são os sistems de controle e apresentamos os principais elementos a estes relacionados, no que tange à controlabilidade e resultados elementares a ela referentes. Este passa a ser o ambiente no qual desenvolvemos o restante da teoria.

Os índices de Kronecker (determinadas sequências finitas de números naturais) e a forma canônica de Brunovský (determinados pares de matrizes A e B) são objetos que possibilitam classificar topologicamente os sistemas de controle lineares por meio de seus conjuntos de trajetórias. Os índices de Kronecker permitem-nos identificar cada classe de equivalência segundo a equivalência de feedback e ainda nos dizem que a quantidade de classes possíveis é finita e relativamente pequena, sendo que cada classe possui seu único representante canônico, dado pela forma canônica acima citada. A equivalência de feedback também se mostra fundamental para a classificação topológica. Por fim, estabelecemos algumas relações entre a equivalência de feedback e os índices de Kronecker, o que possibilita uma visão mais ampla da importância de tais ferramentas.

O capítulo 4 é reservado exclusivamente para expormos a classificação topológica de sistemas de controle lineares segundo J. C. Willems, sendo que iniciamos formalizando o conceito de conjugação para as famílias de trajetótias de sistemas do tipo $\dot{x} = Ax+Bu$ e demonstramos alguns resultados técnicos necessários, para então termos condição plena de demonstrar os teoremas de classificação, tanto no caso controlável quanto no caso não controlável.

No capítulo 5, a partir dos trabalhos [10], [11] e [3], apresentamos as definições de fibrados vetoriais e de somas de Whitney para que tenhamos um ambiente adequado para lidar com os conceitos de fluxo produto cruzado e fluxo afim-linear para, por meio destes, exibir um modo alternativo de classificar sistemas de controle lineares.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Para podermos entender de modo satisfatório a classificação topológica de sistemas de controle lineares via famílias de trajetórias, são fundamentais as noções de espaço quociente e projeção, posto que a ideia será, basicamente, considerar trajetórias módulo o subespaço de controlabilidade do sistema em questão.

Com o intuito de definir posteriormente o conceito de controlabilidade para sistemas lineares e demonstrar alguns resultados elementares e essenciais, vamos primeiramente expor os fundamentos teóricos necessários ao bom desenvolvimento das ideias aqui presentes. Por se tratarem de resultados de Álgebra Linear, facilmente encontrados na literatura, serão dadas poucas demonstrações neste primeiro momento. Um desenvolvimento completo e formal destes tópicos pode ser encontrado, por exemplo, em Hoffman & Kunze [7] e Wonham [13].

No decorrer do texto utilizaremos letras maiúsculas $A, B, T, \ldots$ para identificar matrizes e aplicações e maiúsculas caligráficas $\mathcal{B}, \mathcal{R}, \mathcal{S} \ldots$ para espaços e conjuntos. É claro, com algumas exceções, por exemplo, $\mathcal{U}$ que denotará o espaço das funções de controle enquanto que $U \subset \mathbb{R}^m$ o conjunto dos valores de controle.

1.1 Quocientes e projeções

Excetuando-se menção contrária, todos os espaços vetoriais considerados serão de dimensão finita.

Dado um espaço vetorial $\mathcal{X}$, é fácil verificar que o conjunto de todos os subespaços vetoriais de $\mathcal{X}$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão $\subset$, e que as operações $+$ e $\cap$ possuem características minimais e maximais com respeito a inclusão, i.e., $\mathcal{R}+\mathcal{S}$ é o menor subespaço contendo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ e, do mesmo modo, $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ é o maior subespaço contido em ambos simultâneamente.

A toda aplicação linear $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre espaços de dimensão n e m, respectivamente, podemos associar de forma única uma martriz A de ordem $m \times n$. Por este motivo faremos pouca distinção entre matrizes e transformações lineares.

Sejam $\mathcal{X}$ um espaço vetorial e $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ um subespaço qualquer. Dizemos que $x, y \in \mathcal{X}$ são **congruentes módulo** $\mathcal{R}$ se $x - y \in \mathcal{R}$. Definimos o espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{R}$ como sendo o conjunto de todas as classes de equivalência

$$x/\mathcal{R} = \{y \in \mathcal{X} \mid y - x \in \mathcal{R}\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Por vezes chamamos $x/\mathcal{R}$ de classe lateral. Pode-se provar que $\mathcal{X}/\mathcal{R}$ é um espaço vetorial com as operações

$$(x_1/\mathcal{R}) + (x_2/\mathcal{R}) := (x_1 + x_2)/\mathcal{R}$$

e

$$c(x_1/\mathcal{R}) := (cx_1)/\mathcal{R}.$$

Definição 1.1 (Projeção Canônica)**.** *A aplicação linear*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{R} \\ x &\longmapsto x/\mathcal{R} \end{aligned}$$

*é chamada de **projeção canônica** de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}/\mathcal{R}$. Claramente P é sobrejetora e* $\ker P = \mathcal{R}$.

Quando o espaço vetorial $\mathcal{X}$ é escrito como soma direta de subespaços vetoriais, i.e., $\mathcal{X} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$, como cada $x \in \mathcal{X}$ é unicamente representado por $x = r + s$, $r \in \mathcal{R}$,

$s \in \mathcal{S}$, fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{X} \quad &\rightarrow \quad \mathcal{X} \\ x \quad &\longrightarrow \quad r. \end{aligned}$$

É simples a verificação de que Q é linear, Im$Q = \mathcal{R}$ e $\ker Q = \mathcal{S}$.

Se $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ são subespaços vetoriais e $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{S}$ é a projeção canônica, temos que

$$\mathcal{R}/\mathcal{S} = P(\mathcal{R}),$$

o que faz de $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ um subespaço de $\mathcal{X}/\mathcal{S}$. Note, contudo, que se $\mathcal{R}$ for um subespaço que não contém $\mathcal{S}$, não faz sentido algum falar no quociente $\mathcal{R}/\mathcal{S}$. Temos, neste caso,

$$P(\mathcal{R}) = \frac{\mathcal{R} + \mathcal{S}}{\mathcal{S}}.$$

Agora, sejam $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ linear e $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ um subespaço A-invariante, ou seja, tal que $A(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{A} : \mathcal{X}/\mathcal{R} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{X}/\mathcal{R} \\ x/\mathcal{R} \quad &\longmapsto \quad Ax/\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} x/\mathcal{R} = y/\mathcal{R} \ \text{ em } \ \mathcal{X}/\mathcal{R} \quad &\Rightarrow \quad (x-y) \in \mathcal{R} \\ &\Rightarrow \quad Ax/\mathcal{R} - Ay/\mathcal{R} = (Ax - Ay)/\mathcal{R} = (A(x-y))/\mathcal{R} = \\ &\quad\;\; = \bar{A}((x-y)/\mathcal{R}) = 0/\mathcal{R}, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\bar{A}$ está realmente bem definida. Além disso, a linearidade de A é preservada por $\bar{A}$, vejamos

$$\begin{aligned} x/\mathcal{R}, \alpha y/\mathcal{R} \in \mathcal{X}/\mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad &\bar{A}(x/\mathcal{R} + \alpha y/\mathcal{R}) = \bar{A}((x + \alpha y)/\mathcal{R}) = \\ &A(x + \alpha y)/\mathcal{R} = (Ax + \alpha Ay)/\mathcal{R} \\ &= Ax/\mathcal{R} + \alpha Ay/\mathcal{R} = \bar{A}(x/\mathcal{R}) + \alpha \bar{A}(y/\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Observe que se $P : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{R}$ é a projeção canônica, então para todo $x \in \mathcal{X}$

$$\bar{A} \circ P(x) = \bar{A}(x/\mathcal{R}) = Ax/\mathcal{R} = P(Ax) = P \circ A(x).$$

i.e.,

$$\bar{A} \circ P = P \circ A.$$

Isto prova que $\bar{A}$ é a única aplicação tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{X}/\mathcal{R} \arrow[r, "\bar{A}"'] & \mathcal{X}/\mathcal{R} \end{tikzcd}$$

Chamamos $\bar{A}$ de **aplicação induzida** em $\mathcal{X}/\mathcal{R}$ por A, ou **projeção** de A em $\mathcal{X}/\mathcal{R}$.

1.2 Existência de soluções

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Carathéodory para existência de soluções de equações diferenciais ordinárias. Uma discussão detalhada deste resultado pode ser encontrada em Coddington [5]. Também discutiremos brevemente sobre as soluções dos principais tipos de equações tratadas ao longo do texto.

Teorema 1.2 (Teorema de Carathéodory)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

i) $f(\cdot, x)$ é mensurável para cada $x \in \mathbb{R}^n$;

ii) $f(t, \cdot)$ é contínua para quase todo $t \in \mathbb{R}$ fixo;

iii) para cada compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existe uma função integrável $m_K(t)$ com

$$\|f(t, x)\| \leq m_K(t), \ \ \forall (t, x) \in K.$$

Nessas condições, o problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$
$$x(0) = x_0$$

possui uma solução absolutamente contínua definida em algum intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$, $a > 0$.

Definimos a exponencial de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ por

$$e^A = \mathrm{Id} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

Os próximos resultados são clássicos e as demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em Doering & Lopes [6].

Proposição 1.3. *Dados uma matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$, *então os caminhos* $t \longmapsto e^{At}$ *em* $M_n(\mathbb{R})$ *e* $t \longmapsto e^{At}x$ *em* $\mathbb{R}^n$ *são deriváveis com*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \in M_n(\mathbb{R})$$

e

$$\frac{d}{dt}e^{At}x = Ae^{At}x \in \mathbb{R}^n.$$

No caso do sistema linear homogêneo $\dot{x} = Ax$, temos o amplamente conhecido

Teorema 1.4. *Dada uma matriz* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *e uma condição inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *a solução correspondente é única e dada por* $\varphi_t(x_0) = e^{At}x_0$.

Demonstração: Basta observar que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{At}x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)}x_0 - e^{At}x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(e^{At}\cdot e^{Ah} - e^{At})x_0}{h} \\
&= e^{At}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{Ah} - \mathrm{Id}}{h}\right) = e^{At}Ax_0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\frac{d}{dt}(e^{At}x_0) = e^{At}Ax_0$, e, portanto, $e^{At}x_0$ é uma solução do problema.

Agora, suponha que $x(t)$ seja uma outra solução para o problema de valor inicial e defina $y(t) := e^{-At}x(t)$. Assim,

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{d}{dt}e^{-At}\right)x(t) + e^{-At}\frac{dx}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= e^{-At}(-A + A)x(t) = 0. \end{aligned}$$

Isto significa que y é constante. Por fim, como $y(0) = x(0) = x_0$, então $x(t) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que garante que

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

Corolário 1.5. *Dadas matrizes A_1 e A_2 em $M_n(\mathbb{R})$, temos:*

i) se $A_1A_2 = A_2A_1$ então $e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_1+A_2} = e^{A_2}e^{A_1}$;

ii) a matriz e^{A_1} é sempre inversível com $(e^{A_1})^{-1} = e^{-A_1}$.

Para o sistema de equações diferenciais não-homogêneo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua por partes, temos que o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.2-1}$$

também admite única solução dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

De fato, se duas curvas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de (1.2-1), então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) &= (Ax_1(t) + Bu(t)) - (Ax_2(t) + Bu(t)) \\ &= Ax_1(t) - Ax_2(t) \\ &= A(x_1(t) - x_2(t)), \end{aligned}$$

ou seja, $x_1 - x_2$ é solução de $\dot{x} = Ax$ e portanto, pela unicidade demonstrada no teorema acima, segue que $x_1 = x_2$. Além disso,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) \\ &= Ae^{At}x_0 + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\big|_{t=\tau} \\ &= A\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t).\end{aligned}$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para o sistema afim $\dot{x}(t) = Ax(t) + a$, $a \in \mathbb{R}$, $x(0) = x_0$, sendo que neste caso a solução é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}ad\tau.$$

CAPÍTULO 2

CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE SISTEMAS LINEARES

O objeto de estudo deste capítulo será o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = Ax,$$

com $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O propósito será estabelecer uma classificação topológica para tais sistemas com respeito a um certo tipo de conjugação, a qual será posteriormente generalizada para sistemas de controle lineares. Para este capítulo, uma discussão mais aprofundada e detalhada pode ser encontrada em Robinson [9].

2.1 Conjugação linear

De agora em diante denotaremos a aplicação φ, definida no produto cartesiano $\mathbb{R} \times M$, aplicada em (t, x) por $\varphi_t(x)$ ao invés da notação clássica $\varphi(t, x)$.

É de suma importância nesta teoria o conceito de fluxo. Embora possa ser definido de modo independente, tal objeto está intimamente relacionado com equações diferenciais, bem como com sistemas de controle.

Dada um sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = Ax, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $A \in M_n(\mathbb{R})$, dizemos que o fluxo do sistema é uma função

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

satisfazendo

$$\varphi_0(x) = x, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = A\varphi_t(x),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Formalmente, num contexto mais geral temos a seguinte

Definição 2.1 (Fluxo)**.** *Dado um espaço métrico M, chamamos de **fluxo** em M a toda aplicação contínua*

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$$

que satisfaça

i) $\varphi_0(x) = x$, *para todo* $x \in M$;

ii) $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$, *para todos* $t, s \in \mathbb{R}$ *e* $x \in M$.

*Se M for um espaço vetorial e φ for linear em M, dizemos que φ é um **fluxo linear**.*

Para podermos estudar a conjugação de sistemas de controle de maneira adequada, devemos introduzir o conceito de família de trajetórias em $\mathbb{R}^n$, que consiste meramente de um conjunto Γ de aplicações $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2 (Conjugação)**.** *Dizemos que duas famílias de trajetórias Γ_1 e Γ_2 em $\mathbb{R}^n$ são **conjugadas** se existe uma bijeção $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\varphi_1 \in \Gamma_1 \Longleftrightarrow H\varphi_1 \in \Gamma_2,$$

*onde $H\varphi_1(t) := H(\varphi_1(t))$. Se a bijeção H é um homeomorfismo, difeomorfismo ou isomorfismo, dizemos que a conjugação é **topológica**, **diferencial** ou **linear**, respectivamente.*

Alternativamente, podemos definir de modo independente a conjugação entre fluxos, a saber,

Definição 2.3 (Conjugação de fluxos)**.** *Dois fluxos ψ e φ em $\mathbb{R}^n$ são **conjugados** se existir uma bijeção $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$H(\varphi_t(x)) = \psi_t(H(x)), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ e \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do mesmo modo como antes, a regularidade da bijeção caracteriza o tipo de conjugação (topológica, diferencial e linear).

Observe que as soluções de $\dot{x} = Ax$ definem um fluxo linear em $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto e^{At}x. \end{aligned}$$

De fato,

i) $\varphi_0(x) = e^{A0}x = x$,

ii) $\varphi_t \circ \varphi_s(x) = e^{At}(e^{As}x) = e^{A(t+s)}x = \varphi_{t+s}(x)$,

iii) $\varphi_t(\alpha x + y) = e^{At}(\alpha x + y) = \alpha e^{At}x + e^{At}y = \alpha\varphi_t(x) + \varphi_t(y)$,

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, t, s \in \mathbb{R}$.

Por trajetórias associadas a um sistema, entendemos as curvas-solução do sistema. Assim, dizemos que dois sistemas lineares são conjugados se os fluxos ou as famílias de trajetórias a eles associadas forem conjugadas. Note que não há ambiguidade, pois tanto o fluxo quanto as famílias de trajetórias são formadas a partir das soluções dos sistemas. Em outras palavras, os fluxos

$$\varphi_t^1(x) = e^{A_1 t}x \quad \text{e} \quad \varphi_t^2(x) = e^{A_2 t}x$$

são conjugados se, e somente se, as famílias

$$\Gamma_1 = \{\varphi^1(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n | x \in \mathbb{R}^n\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{\varphi^2(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n | x \in \mathbb{R}^n\}$$

são conjugadas, onde as trajetórias $\varphi^i(x)$ são também dadas pelas soluções do sistema correspondente. De fato, supondo que as famílias são conjugadas, seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi^1 \in \Gamma_1 \Longleftrightarrow H\varphi^1 \in \Gamma_2.$$

Se $H\varphi^1(x) \in \Gamma_2$, temos que $H\varphi^1(x) = \varphi^2(y)$, para algum $y \in \mathbb{R}^n$. Como $H\varphi_0^1(x) = Hx$, segue que $Hx = y$, o que nos dá

$$H\varphi_t^1(x) = \varphi_t^2(Hx), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja, os fluxos $e^{A_1 t}x$ e $e^{A_2 t}x$ são conjugados. A recíproca é imediata.

Ao longo deste capítulo, conjugaremos sistemas pelos fluxos associados. Entretanto, para sistemas de controle nos apoiaremos inicialmente na noção de famílias de trajetórias.

Observação: No que segue, denotaremos sistemas de equações diferenciais por Σ.

O próximo resultado fornece-nos uma primeira classificação para sistemas lineares da forma $\dot{x} = Ax$, correspondente a conjugação linear.

Teorema 2.4. *Sejam $\Sigma_i : \dot{x} = A_i x$, $i = 1, 2$, sistemas lineares. Então, são equivalentes:*

i) $\Sigma_1 \sim_D \Sigma_2$*;*

ii) $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$*;*

iii) A_1 *é semelhante a* A_2*,*

onde $\sim_D$ e $\sim_L$ denotam conjugação diferencial e linear, respectivamente.

Demonstração: Se $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$, é óbvio que $\Sigma_1 \sim_D \Sigma_2$, pois se $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e inversível, segue que tanto H como sua inversa H^{-1} são diferenciáveis.

Suponha que $\Sigma_1 \sim_D \Sigma_2$ e seja H o difeomorfismo correspondente, ou seja,

$$He^{A_1 t}x = e^{A_2 t}Hx, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Derivando com relação a x, temos

$$DH|_{e^{A_1t}x}\, e^{A_1t} = e^{A_2t} DHx.$$

Defina $T := DH(0)$ e note que

$$Te^{A_1t} = DH(0)e^{A_1t} = e^{A_2t}DH(0) = e^{A_2t}T,$$

ou seja, $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$.

Como $Te^{A_1t} = e^{A_2t}T$, segue também que

$$e^{A_1t} = T^{-1}e^{A_2t}T,$$

logo, derivando a expressão acima em t e avaliando em $t = 0$ concluímos que $A_1 = T^{-1}A_2T$, ou seja, A_1 e A_2 são semelhantes.

Por fim, suponha que as matrizes A_1 e A_2 sejam semelhantes, ou seja, que $A_1 = T^{-1}A_2T$ para alguma $T \in GL_n(R)$. Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} + A_1t + \frac{(A_1t)^2}{2!} + \cdots &= \mathrm{Id} + T^{-1}(A_2t)T + \frac{T^{-1}(A_2t)^2T}{2!} + \cdots \\ &= T^{-1}(\mathrm{Id} + A_2t + \frac{(A_2t)^2}{2!} + \cdots)T, \end{aligned}$$

pois $(T^{-1}A_2tT)^k = T^{-1}(A_2t)^kT$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto significa que

$$Te^{A_1t} = e^{A_2t}T.$$

Portanto, os fluxos são linearmente conjugados, o que encerra a demonstração.

$\blacksquare$

2.2 Conjugação topológica

Em contrapartida ao que vimos na seção anterior, a conjugação topológica fornece um resultado de classificação mais forte, contudo mais elaborado. Em poucas palavras, tal classificação consistirá em avaliar a parte real dos autovalores das matrizes envolvidas, os quais fornecem decomposições do espaço estado ($\mathbb{R}^n$) em subespaços invariantes, que denominaremos subespaços (ou subfibrados, como veremos no capítulo 5) estável e instável.

Definição 2.5 (Matriz hiperbólica). *Seja A uma matriz real de ordem $n \times n$. Dizemos que A é* ***hiperbólica*** *se todos os autovalores de A possuem parte real não-nula. Neste caso, a matriz A induz uma equação diferencial linear hiperbólica, $\dot{x} = Ax$.*

Definimos o **subespaço estável** associado a matriz A (e portanto ao sistema $\dot{x} = Ax$) como sendo a soma direta dos autoespaços generalizados gerados pelos autovalores com parte real negativa, denotando-o por $\mathcal{L}^-$. De modo semelhante, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^+$ denotam os **subespaços central** e **instável** obtidos como soma direta dos autoespaços generalizados correspondentes aos autovalores com parte real nula e positiva, respectivamente.

Para classificar topologicamente os sistemas lineares, o resultado abaixo é de suma importância.

Teorema 2.6 (Norma Adaptada). *Seja A uma matriz $n \times n$ real e considere a equação diferencial $\dot{x} = Ax$. São equivalentes:*

i) Existe uma norma $\|\cdot\|_A$ em $\mathbb{R}^n$ e uma constante $a > 0$ tal que para qualquer condição inicial $x \in \mathbb{R}^n$, a solução satisfaz

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-ta}\|x\|_A, \quad \forall t \geq 0.$$

ii) Para toda norma $\|\cdot\|_*$ em $\mathbb{R}^n$ existem constantes $a > 0$ e $C > 0$ tais que para qualquer condição inicial $x \in \mathbb{R}^n$ a solução satisfaz

$$\|e^{At}x\|_* \leq Ce^{-at}\|x\|_*, \quad \forall t \geq 0.$$

iii) As partes reais de todos os autovalores de A são negativas.

Demonstração: Suponha inicialmente que $i)$ seja válida. Como em espaços de dimensão finita duas normas quaisquer são sempre equivalentes, segue que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1\|x\|_* \leq \|x\|_A \leq C_2\|x\|_*.$$

Então, para $t \geq 0$,

$$\|e^{At}x\|_* \leq \frac{1}{C_1}\|e^{At}x\|_A \leq \frac{1}{C_1}e^{-at}\|x\|_A \leq \frac{C_2}{C_1}e^{-at}\|x\|_*$$

Tomando $C = \frac{C_2}{C_1}$, obtemos $ii)$.

Para ver que $iii)$ é válido sob a condição $ii)$, suponha que exista um autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\alpha \geq 0$. Então existe uma solução para o autovetor correspondente $v = u + iw$ da forma

$$e^{\alpha t}[\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)w],$$

e esta solução não converge para 0 quando $t \to \infty$, uma contradição. Logo, $iii)$ é verificada.

Por fim, suponha $iii)$ e vamos provar $i)$. Sejam $a > 0$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) < -a$ para todos os autovalores λ de A.

Pode-se provar, devido à forma das soluções que para este a existe $\tau > 0$ tal que

$$\|e^{At}x\| \leq e^{-at}\|x\|, \quad \forall t > \tau,$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana ou qualquer norma fixada (cf. [9]).

Defina

$$\|x\|_A := \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}x\|ds.$$

Note que isto de fato define uma norma:

$$\|x\|_A = 0 \Leftrightarrow \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}x\|ds = 0$$

como $\tau > 0$ e tanto e^{as} como e^{As} nunca se anulam, segue que

$$\|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Também vale que

$$\|x\|_A = \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}x\|ds \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + y\|_A &= \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}(\alpha x + y)\|ds \\
&= \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}\alpha x + e^{As}y\|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\tau \left(e^{as}\alpha\|e^{As}x\| + e^{as}\|e^{As}y\|\right) ds \\
&= \alpha\int_0^\tau e^{as}\|e^{As}x\|ds + \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}y\|ds \\
&= \alpha\|x\|_A + \|y\|_A
\end{aligned}$$

Vamos provar que esta norma satisfaz o desejado. Seja $t \geq 0$ e escreva $t = n\tau + t_0$, com $0 \leq t_0 \leq \tau$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|e^{At}x\|_A &= \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}e^{At}x\|ds \\
&= \int_0^\tau e^{as}\|e^{As}e^{A(n\tau+t_0)}x\|ds \\
&= \int_0^{\tau-t_0} e^{as}\|e^{An\tau}e^{A(t_0+s)}x\|ds + \int_{\tau-t_0}^\tau e^{as}\|e^{An\tau}e^{A(t_0+s)}x\|ds \\
&= \int_0^{\tau-t_0} e^{as}\|e^{An\tau}e^{A(t_0+s)}x\|ds + \int_{\tau-t_0}^\tau e^{as}\|e^{A(n+1)\tau}e^{A(t_0-\tau+s)}x\|ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = t_0 + s$ na primeira integral, $u = t_0 - \tau + s$ na segunda e utilizando a estimativa anterior para $\|e^{An\tau}x\|$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|e^{At}x\|_A &= \int_0^{\tau-t_0} e^{as}\|e^{An\tau}e^{A(t_0+s)}x\|ds + \int_{\tau-t_0}^\tau e^{as}\|e^{A(n+1)\tau}e^{A(t_0-\tau+s)}x\|ds \\
&= \int_{t_0}^\tau e^{a(u-t_0)}\|e^{An\tau}e^{Au}x\|du + \int_0^{t_0} e^{a(u+\tau-t_0)}\|e^{A(n+1)\tau}e^{Au}x\|du \\
&\leq \int_{t_0}^\tau e^{a(u-t_0)}e^{-an\tau}\|e^{Au}x\|du + \int_0^{t_0} e^{a(u+\tau-t_0)}e^{-a(n+1)\tau}\|e^{Au}x\|du \\
&= \int_{t_0}^\tau e^{a(u-n\tau-t_0)}\|e^{Au}x\|du + \int_0^{t_0} e^{a(u-n\tau-t_0)}\|e^{Au}x\|du \\
&= \int_0^\tau e^{a(u-n\tau-t_0)}\|e^{Au}x\|du \\
&= e^{a(-n\tau-t_0)}\int_0^\tau e^{au}\|e^{Au}x\|du \\
&= e^{-at}\|x\|_A,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

■

A classificação topológica para sistemas lineares que citamos no início do capítulo é dada nos dois próximos teoremas. Classificar sistemas do tipo $\dot{x} = Ax$ consiste em olhar para a parte real dos autovalores da matriz A, ou seja, numa mesma classe de conjugação encontram-se todos os sistemas cujas matrizes possuem a mesma quantidade de autovalores com parte real negativa, nula e positiva. A classificação que apresentaremos levará em conta apenas o caso onde nenhum autovalor possui parte real nula, o caso geral pode ser encontrado em Kuiper [8]. No capítulo 4 apresentamos uma generalização deste resultado para sistemas de controle lineares.

Teorema 2.7. *Sejam φ^1 e φ^2 dois fluxos em $\mathbb{R}^n$ dados por*

$$\varphi_t^1(x) = e^{A_1 t}x \quad e \quad \varphi_t^2(x) = e^{A_2 t}x.$$

Admita que os autovalores de A_1 e A_2 tenham todos parte real negativa. Então os dois fluxos lineares φ_1 e φ_2 são topologicamente conjugados.

Demonstração: Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, seja $\| \cdot \|_A$ sua norma adaptada e $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Para obter uma estimativa semelhante para tempo negativo, vamos analisar a desigualdade acima em $e^{At}x \in \mathbb{R}^n$ e $-t$, $t \leq 0$. Temos

$$\|e^{A(-t)}e^{At}x\|_A \leq e^{-a(-t)}\|e^{At}x\|_A,$$

ou seja,

$$\|e^{At}x\|_A \geq e^{-at}\|x\|_A, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \leq 0.$$

Agora, observemos que a aplicação

$$t \mapsto \|e^{At}x\|_A$$

i) é contínua pela Proposição 1.3 e pela continuidade da norma;

ii) é estritamente decrescente (e portanto injetora). De fato, dados $s, t \in \mathbb{R}$, suponha, sem perda de generalidade que $t > s$. Então,

$$\|e^{At}x\|_A = \|e^{At}e^{-As}e^{As}x\|_A \leq e^{-a(t-s)}\|e^{As}x\|_A < \|e^{As}x\|_A.$$

A partir de i) e ii), vemos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ não-nulo existe um único tempo $\tau(x)$ para o qual

$$\|e^{A\tau(x)}x\| = 1,$$

ou seja, $e^{A\tau(x)}x \in \mathcal{S}_A$, esfera unitária na norma adaptada $\|\cdot\|_A$.

Isto define uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{R}^n - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tau(x). \end{array}$$

A aplicação τ satisfaz as seguintes propriedades

i) Se $\|x\|_A = 1$, então $\tau(x) = 0$;

ii) Se $\|x\|_A > 1$, então

- $\tau(x) > 0$.

  De fato, se fosse $\tau(x) \leq 0$, teríamos

  $$1 = \|e^{A\tau(x)}x\|_A \geq e^{-a\tau(x)}\|x\|_A > 1,$$

  contradição.

- $\tau(x) \leq \ln \|x\|_A^{\frac{1}{a}}$.

  De fato,

  $$\begin{array}{rcl} \|e^{A\tau(x)}x\|_A & \leq & e^{-a\tau(x)}\|x\|_A \\ \Rightarrow 1 & \leq & e^{-a\tau(x)}\|x\|_A \\ \Rightarrow e^{a\tau(x)} & \leq & \|x\|_A \\ \Rightarrow \tau(x) & \leq & \ln \|x\|_A^{\frac{1}{a}}. \end{array}$$

iii) Se $\|x\|_A < 1$, então

- $\tau(x) < 0$.

  De fato, se fosse $\tau(x) \geq 0$, teríamos

$$1 = \|e^{A\tau(x)}x\|_A \leq e^{-a\tau(x)}\|x\|_A < 1,$$

  contradição.

- $\tau(x) \geq \ln \|x\|_A^{\frac{1}{a}}$.

  De fato,

$$\begin{aligned} e^{-a\tau(x)}\|x\|_A &\leq \|e^{A\tau(x)}x\|_A \\ \Rightarrow e^{-a\tau(x)}\|x\|_A &\leq 1 \\ \Rightarrow \|x\|_A &\leq e^{a\tau(x)} \\ \Rightarrow \ln \|x\|_A^{\frac{1}{a}} &\leq \tau(x). \end{aligned}$$

iv) $\tau\left(e^{At}x\right) = \tau(x) - t$, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \left\|e^{A(\tau(x)-t)}e^{At}x\right\|_A &= \|e^{A\tau(x)}e^{-At}e^{At}x\|_A \\ &= \|e^{A\tau(x)}x\|_A = 1. \end{aligned}$$

Isto permite-nos provar que a aplicação $\tau : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Seja $x_k \longrightarrow x$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Temos que

$$|\tau(x)| \leq \left|\ln \|x\|_A^{\frac{1}{a}}\right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Então,

$$|\tau(x_k) - \tau(x)| = \left|\tau\left(e^{A\tau(x)}x_k\right)\right| \leq \left|\ln \|e^{A\tau(x)}x_k\|_A^{\frac{1}{a}}\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left|\ln \|e^{A\tau(x)}x\|_A^{\frac{1}{a}}\right| = |\ln 1| = 0.$$

Portanto, τ assim como definimos é contínua.

Denotemos as normas adaptadas às matrizes A_1 e A_2 por $\|\cdot\|_{A_1}$ e $\|\cdot\|_{A_2}$. Sejam $\tau(x)$

e $\tilde{\tau}(x)$ os únicos tempos para os quais

$$\|e^{A_1\tau(x)}x\|_{A_1} = 1 \quad \text{e} \quad \|e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x\|_{A_2} = 1,$$

respectivamente.

Consideremos a aplicação

$$h_0 : \mathcal{S}_{A_1} \to \mathcal{S}_{A_2}$$

dada por $h_0(x) = \dfrac{x}{\|x\|_{A_2}}$. Como toda norma em $\mathbb{R}^n$ é contínua, torna-se evidente que h_0 é um homeomorfismo com inversa dada por $h_0^{-1}(y) = \dfrac{y}{\|y\|_{A_1}}$.

Utilizando-nos de h_0 e τ, podemos definir a aplicação

$$H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

pondo

$$H(x) = \begin{cases} e^{-A_2\tau(x)}h_0(e^{A_1\tau(x)}x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

O resultado ficará demonstrado de pudermos mostrar que H é um homeomorfismo e que conjuga os fluxos em questão. Note que H é contínua em todos os pontos $x \neq 0$, posto que todas as aplicações envolvidas são contínuas. Verifiquemos que H é contínua na origem.

Seja $x_k \longrightarrow 0$ em $\mathbb{R}^n$ e denotemos por τ_k o tempo para o qual $\|e^{A_1\tau_k}x_k\|_{A_1} = 1$. Observe que $\tau_k \longrightarrow -\infty$. De fato, não pode ocorrer $\tau_k \geq 0$, pois se fosse o caso teríamos

$$1 = \|e^{A_1\tau_k}x_k\|_{A_1} \leq e^{-a\tau_k}\|x_k\|_{A_1} \longrightarrow 0,$$

o que é uma contradição. Assim, considerando $\tau \leq 0$, como para cada $x \neq 0$ a trajetória $e^{At}x$ intercepta apenas uma vez $\mathcal{S}_{A_1}$, são únicos o tempo $\tau_k < 0$ e o ponto $y_k \in \mathcal{S}_{A_1}$ tal que

$$e^{A_1\tau_k}x_k = y_k.$$

Supondo também que $|\tau_k| < M$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para alguma constante $M > 0$, segue que (τ_k) possui uma subsequência convergente (τ_{k_i}), digamos para τ_0. Como a sequência correspondente (y_{k_i}) está contida no compacto $\mathcal{S}_{A_1}$, garantimos a existência de uma outra subsequência (y_{ki_m}) tal que

$$(y_{ki_m}) \longrightarrow y,$$

com $y \in \mathcal{S}_{A_1}$. Por outro lado, como $x_{ki_m} \longrightarrow 0$, segue que

$$y_{ki_m} = e^{A_1 \tau_{ik_m}} x_{ik_m} \longrightarrow 0,$$

nova contradição. Consequentemente, $\tau_k \longrightarrow -\infty$.

Note que

$$\|h_0(e^{A_1\tau_k}x_k)\|_{A_2} = \frac{\|e^{A_1\tau_k}x_k\|_{A_2}}{\|e^{A_1\tau_k}x_k\|_{A_2}} = 1,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|H(x_k)\|_{A_2} &= \|e^{-A_2\tau_k}h_0(e^{A_1\tau_k}x_k)\|_{A_2} \\
&\leq \|e^{-A_2\tau_k}\|_{A_2}\|h_0(e^{A_1\tau_k}x_k)\|_{A_2} \\
&= \|e^{-A_2\tau_k}\|_{A_2} \\
&\leq e^{-a_2\tau_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

e isto prova que $H(x_k) \longrightarrow H(0)$ quando $k \longrightarrow \infty$, ou seja, H é contínua em $x = 0$.

Para concluirmos que H é homeomorfismo, devemos mostrar que H é inversível. Mas isto realmente ocorre, basta definir

$$H^{-1}(x) = \begin{cases} e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Como $\tilde{\tau}(e^{A_2t}x) = \tilde{\tau}(x) - t$ e $h_0(e^{A_1\tau(x)}x) \in \mathcal{S}_{A_2}$, temos

$$\tilde{\tau}(e^{-A_2\tau(x)}h_0(e^{A_1\tau(x)}x)) = \tilde{\tau}(h_0(e^{A_1\tau(x)}x)) + \tau(x) = \tau(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(H^{-1}\circ H)(x) &= H^{-1}\left(e^{-A_2\tau(x)}h_0\left(e^{A_1\tau(x)}x\right)\right)\\
&= e^{-A_1\tilde{\tau}\left(e^{-A_2\tau(x)}h_0\left(e^{A_1\tau(x)}x\right)\right)}h_0^{-1}\left(e^{A_2\tilde{\tau}(e^{-A_2\tau(x)}h_0(e^{A_1\tau(x)}x))}e^{-A_2\tau(x)}h_0\left(e^{A_1\tau(x)}x\right)\right)\\
&= e^{-A_1\tau(x)}h_0^{-1}\left(e^{A_2\tau(x)}e^{-A_2\tau(x)}h_0(e^{A_1\tau(x)}x)\right)\\
&= x.
\end{aligned}$$

Como também vale que $\tau(e^{A_1t}x)=\tau(x)-t$ e $h_0^{-1}(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x)\in\mathcal{S}_{A_1}$, segue que

$$\tau(e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x))=\tau(h_0^{-1}(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x))+\tilde{\tau}(x)=\tilde{\tau}(x),$$

logo,

$$\begin{aligned}
(H\circ H^{-1})(x) &= H\left(e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}\left(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x\right)\right)\\
&= e^{-A_2\tau\left(e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}\left(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x\right)\right)}h_0\left(e^{A_1\tau(e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x))}e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}\left(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x\right)\right)\\
&= e^{-A_2\tilde{\tau}(x)}h_0\left(e^{A_1\tilde{\tau}(x)}e^{-A_1\tilde{\tau}(x)}h_0^{-1}(e^{A_2\tilde{\tau}(x)}x)\right)\\
&= x.
\end{aligned}$$

Portanto, H é um homeomorfismo. Resta apenas mostrar que tal homeomorfismo realiza a conjugação desejada. Vejamos:

$$\begin{aligned}
H(e^{A_1t}x) &= e^{-A_2\tau(e^{A_1t}x)}h_0\left(e^{A_1\tau(e^{A_1t}x)}e^{A_1t}x\right)\\
&= e^{-A_2(\tau(x)-t)}h_0\left(e^{A_1(\tau(x)-t)}e^{A_1t}x\right)\\
&= e^{A_2t}e^{-A_2\tau(x)}h_0\left(e^{A_1\tau(x)}x\right)\\
&= e^{A_2t}H(x),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Teorema 2.8. *Sejam φ^1 e φ^2 dois fluxos em $\mathbb{R}^n$ dados por*

$$\varphi_t^1(x)=e^{A_1t}x \quad e \quad \varphi_t^2(x)=e^{A_2t}x.$$

Admita que os autovalores de A_1 e A_2 tenham todos parte real não-nula e que os subespaços *estáveis de A_1 e A_2 tenham a mesma dimensão (consequentemente, os subespaços instáveis também têm mesma dimensão). Então os dois fluxos lineares φ_1 e φ_2 são topologicamente conjugados.*

Demonstração: Observe inicialmente que se dois sistemas com matrizes A_1 e A_2, cujos autovalores têm todos parte real positiva, então como a parte real dos autovalores de $-A_1$ e $-A_2$ são todas negativas, segue do teorema anterior que os fluxos e^{-A_1t} e e^{-A_2t} são topologicamente conjugados, ou seja e^{A_1t} e e^{A_2t} são também topologicamente conjugados.

Com isto, se restringirmos os fluxos e^{A_1t} e e^{A_2t} aos subespaços $\mathcal{L}^-_{A_1}$ e $\mathcal{L}^-_{A_2}$, respectivamente, vemos que existe uma conjugação

$$h^- : \mathcal{L}^-_{A_1} \longrightarrow \mathcal{L}^-_{A_2}$$

entre $e^{A_1t}\big|_{\mathcal{L}^-_{A_1}}$ e $e^{A_2t}\big|_{\mathcal{L}^-_{A_2}}$. Do mesmo modo, restringindo os fluxos a $\mathcal{L}^+_{A_1}$ e $\mathcal{L}^+_{A_2}$, garantimos a existência de uma conjuação

$$h^+ : \mathcal{L}^+_{A_1} \longrightarrow \mathcal{L}^+_{A_2}$$

entre os fluxos $e^{A_1t}\big|_{\mathcal{L}^+_{A_1}}$ e $e^{A_2t}\big|_{\mathcal{L}^+_{A_2}}$. Considerando as projeções

$$\pi^- : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^-_{A_1}$$

e

$$\pi^+ : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^+_{A_1},$$

vemos que qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como

$$x = \pi^-(x) + \pi^+(x)$$

e, portanto, as duas conjugações combinadas produzem uma conjugação no espaço estado todo, a saber,

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & h^-\left(\pi^-(x)\right) + h^+\left(\pi^+(x)\right) \end{array}$$

Como os fluxos são lineares, vemos facilmente que H define uma conjugação:

$$\begin{aligned}
H(e^{A_1 t}x) &= h^-\left(\pi^-(e^{A_1 t}x)\right) + h^+\left(\pi^+(e^{A_1 t}x)\right) \\
&= h^-\left(e^{A_1 t}|_{\mathcal{L}^-_{A_1}}\left(\pi^-(x)\right)\right) + h^+\left(e^{A_1 t}|_{\mathcal{L}^+_{A_1}}\left(\pi^+(x)\right)\right) \\
&= e^{A_2 t}|_{\mathcal{L}^-_{A_2}}\left(h^-\left(\pi^-(x)\right)\right) + e^{A_2 t}|_{\mathcal{L}^+_{A_2}}\left(h^+\left(\pi^+(x)\right)\right) \\
&= e^{A_2 t}x\left(h^-\left(\pi^-(x)\right) + h^+\left(\pi^+(x)\right)\right) \\
&= e^{A_2 t}x\left(H(x)\right).
\end{aligned}$$

Definimos a inversa de H simplesmente considerando as projeções nos subespaços estável e instável da matriz A_2. A continuidade de ambas segue imediatamente da continuidade das funções envolvidas.

■

2.3 Classificação topológica de sistemas afins

Vamos agora generalizar para sistemas afins do tipo

$$\dot{x} = Ax + a, \quad A \in GL_n(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}^n \tag{2.3-1}$$

o que já foi feito para sistemas homogêneos. Desta vez, porém, exigimos que A seja inversível, para que em alguns momentos tenhamos a garantia de existência de um ponto de equilíbrio.

Muitas das demonstrações serão breves dada a semelhança com o que já foi feito. Um estudo mais detalhado deste tipo de sistemas pode ser encontrado em [11].

Observe que para tais sistemas, a solução

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dada por

$$\Phi_t(x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}a d\tau,$$

também define um fluxo sobre $\mathbb{R}^n$. Em verdade, Φ é contínua pelo Teorema de Carathéodory,

$$\Phi_0(x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_{t+s}(x) &= e^{A(t+s)}x + \int_0^{t+s} e^{A(t+s-\tau)}ad\tau \\
&= e^{A(t+s)}x + \int_t^{t+s} e^{A(t+s-\tau)}ad\tau + \int_0^{t} e^{A(t+s-\tau)}ad\tau \\
&= e^{A(t+s)}x + \int_0^{s} e^{A(s-\tau)}ad\tau + \int_0^{t} e^{A(t+s-\tau)}ad\tau \\
&= \Phi_t\left(\Phi_s(x)\right).
\end{aligned}$$

Definição 2.9 (Ponto fixo)**.** *Um ponto $e_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado de **ponto fixo** (ou **equilíbrio**) da equação (2.3-1) se*

$$\Phi_t(e_0) = e_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Será de fundamental importância ao longo desta seção o seguinte resultado.

Proposição 2.10. *Suponha $A \in M_n(\mathbb{R})$ estável, isto é, todos seus autovalores têm parte real negativa. Então existe um único ponto fixo, e_0, para a equação (2.3-1). Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que*

$$\Phi_t(x) \longrightarrow e_0$$

quando $t \longrightarrow \infty$.

Demonstração: Como 0 não é autovalor de A, segue que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Portanto,

$$\begin{aligned}
& 0 = Ae_0 + a \\
\Leftrightarrow \ \ & e_0 = -A^{-1}a.
\end{aligned}$$

Mas como

$$e_0 = e^{At}e_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}ad\tau,$$

obtemos que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_t(x) - e_0\| &= \left\| e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}ad\tau - e^{At}e_0 - \int_0^t e^{A(t-\tau)}ad\tau \right| \\
&= \left\| e^{At}(x - e_0) \right\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Norma Adaptada. A unicidade segue à maneira clássica, sem nenhuma dificuldade.

■

O teorema a seguir fornece-nos o equivalente ao Teorema 2.4, referente à conjugação linear.

Teorema 2.11. *Considere os fluxos Φ e Ψ associados aos sistemas*

$$\dot{x} = A_1 x + a_1 \quad e \quad \dot{x} = A_2 x + a_2, \quad A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R}),$$

respectivamente. São equivalentes:

i) Os fluxos Φ e Ψ são diferencialmente conjugados;

ii) Os fluxos Φ e Ψ são linearmente conjugados;

iii) Existe $T \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $A_1 = TA_2T^{-1}$ e $Ta_1 = a_2$.

Demonstração: Assim como no Teorema 2.4, $ii)$ evidentemente implica $i)$. Suponha que para alguma $T \in GL_n(\mathbb{R})$ valha

$$A_1 = TA_2T^{-1} \text{ e } Ta_1 = a_2.$$

Observe que a primeira igualdade ocorre se, e somente se,

$$e^{A_1 t} = Te^{A_2 t}T^{-1},$$

ou seja,

$$T^{-1}e^{A_1 t} = e^{A_2 t}T^{-1}.$$

Defina a aplicação (evidentemente linear)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto T^{-1}x. \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
h\left(e^{A_1t}x+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau\right) &= T^{-1}\left(e^{A_1t}x+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau\right)\\
&= T^{-1}e^{A_1t}x+T^{-1}\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau\\
&= e^{A_2t}T^{-1}x+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}T^{-1}a_1d\tau\\
&= e^{A_2t}h(x)+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2d\tau,
\end{aligned}$$

ou seja, os fluxos são linearmente conjugados.

Por outro lado, se supormos os fluxos linearmente conjugados, com isomorfismo $h:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, temos

$$h\left(e^{A_1t}x+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau\right)=e^{A_2t}h(x)+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2d\tau. \tag{2.3-2}$$

Derivando com respeito a x, obtemos

$$Dh\left(e^{A_1t}x+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau\right)e^{A_1t}=e^{A_2t}Dh(x).$$

Como h é isomorfismo de espaços vetoriais, defina $T^{-1}:=Dh(0)$ e veja que

$$T^{-1}e^{A_1t}=Dh(0)e^{A_1t}=e^{A_2t}Dh(0)=e^{A_2t}T^{-1},$$

de onde

$$A_1=TA_2T^{-1}.$$

Além disso, a linearidade de h juntamente com (2.3-2) implica que

$$T^{-1}\left(e^{A_1t}x+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau\right)=e^{A_2t}T^{-1}x+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2d\tau,$$

ou seja,

$$T^{-1}\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1d\tau=e^{A_2t}T^{-1}x-T^{-1}e^{A_1t}x+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2d\tau=\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2d\tau.$$

Assim, para todo t,

$$\begin{aligned} e^{A_2t}\int_0^t e^{-A_2\tau}a_2 d\tau &= \int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2 d\tau \\ &= T^{-1}\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1 d\tau \\ &= T^{-1}e^{A_1t}\int_0^t e^{-A_1\tau}a_1 d\tau \\ &= e^{A_2t}T^{-1}\int_0^t e^{-A_1\tau}a_1 d\tau \\ &= e^{A_2t}\int_0^t T^{-1}e^{-A_1\tau}a_1 d\tau \\ &= e^{A_2t}\int_0^t e^{-A_2\tau}T^{-1}a_1 d\tau. \end{aligned}$$

Logo, $e^{-A_2t}a_2 = e^{-A_2t}T^{-1}a_1$ para todo t, portanto, $a_2 = T^{-1}a_1$.

Suponha agora que os fluxos são diferencialmente conjugados, com difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Sejam e_1 e e_2 os pontos fixos de

$$\dot{x} = A_1x + a_1 \quad \text{e} \quad \dot{x} = A_2x + a_2,$$

respectivamente. Diferenciando

$$h\left(e^{A_1t}x + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1 d\tau\right) = e^{A_2t}h(x) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)}a_2 d\tau$$

com respeito a x, obtemos

$$Dh\left(e^{A_1t}x + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}a_1 d\tau\right)e^{A_1t} = e^{A_2t}Dh(x).$$

Calculando em $x = e_1$ e definindo $H := Dh(e_1)$, vem

$$He^{A_1t} = e^{A_2}H.$$

Por fim, diferenciando novamente em t e calculando em $t = 0$, obtemos $HA_1 = A_2H$. Um cálculo análogo ao feito acima nos dá $ii)$. Sendo h um difeomorfismo, segue que $H = Dh(e_1)$ é isomorfismo e, portanto, conjugação linear.

■

Para classificar sistemas afins, tal como antes, precisamos garantir a existência da norma adaptada, que será dada no próximo teorema, cuja demonstração segue as mesmas linhas gerais do Teorema 2.6. Observe apenas que se $\Phi_t(x)$ é solução de $\dot{x} = Ax + a$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, então

$$\Phi_t(x) - e_0$$

é solução de $\dot{x} = Ax$, com valor inicial $x - e_0$, onde $e_0 = -A^{-1}a$ é o ponto fixo do sistema afim, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_t(x) &= A\Phi_t(x) - Ae_0 + a \\ &= A\Phi_t(x) - AA^{-1}a + a = A\Phi_t(x). \end{aligned}$$

Para a equivalência entre $ii)$ e $iii)$, cf. Teorema 2.2 em [11].

Teorema 2.12. *Seja Φ o fluxo associado ao sistema afim $\dot{x} = Ax + a$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^n$ e seja $e_0 = -A^{-1}a$ o único ponto fixo do sistema. Então, são equivalentes:*

i) Existe uma norma $\|\cdot\|_A$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$ tais que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\Phi_t(x) - e_0\|_A \leq e^{-\alpha t}\|x - e_0\|_A, \quad \forall t \geq 0;$$

ii) Para toda norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ existem $\alpha > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\Phi_t(x) - e_0\| \leq Ce^{-\alpha t}\|x - e_0\|, \quad \forall t \geq 0;$$

iii) Todo autovalor de A tem parte real negativa.

Para encerrar este capítulo, os dois próximos resultados, tal como na seção anterior, fornecem a classificação topológica para sistemas afins, apresentando inicialmente o caso estável e, em seguida, o caso hiperbólico.

Teorema 2.13. *Sejam Φ e Ψ fluxos correspondentes aos sistemas*

$$\dot{x} = A_1x + a_1 \quad e \quad \dot{x} = A_2x + a_2,$$

respectivamente, com $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$. Se todos os autovalores de A_1 e A_2 têm parte real negativa, então os fluxos Φ e Ψ são topologicamente conjugados.

Demonstração: Observe que existem únicos pontos fixos e_1 e e_2 para os sistemas

$$\dot{x} = A_1x + a_1 \quad \text{e} \quad \dot{x} = A_2x + a_2,$$

respectivamente, e que pelo Teorema 2.7, os fluxos

$$e^{A_1t}x \quad \text{e} \quad e^{A_2t}x$$

são topologicamente conjugados via um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_t(x) - e_1$ é solução de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x \\ x(0) &= x - e_1, \end{aligned}$$

bem como $\Psi_t(x) - e_2$ é solução de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_2x \\ x(0) &= x - e_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi_t(x) - e_1 = e^{A_1t}(x - e_1) \quad \text{e} \quad \Psi_t(x) - e_2 = e^{A_2t}(x - e_2).$$

Como h é conjugação, vale que

$$h\left(e^{A_1t}(x - e_1)\right) = e^{A_2t}h(x - e_1) = e^{A_2t}\left(h(x - e_1) + e_2 - e_2\right),$$

que pode ser reescrito como

$$h\left(\Phi_t(x) - e_1\right) = \Psi_t\left(h(x - e_1) + e_2\right) - e_2. \tag{2.3-3}$$

Defina

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto h(x - e_1) + e_2. \end{aligned}$$

Assim, de (2.3-3) temos

$$H\left(\Phi_t(x)\right) = \Psi_t\left(H(x)\right).$$

Finalmente, como h é homeomorfismo o mesmo é válido para H, o que conclui a demonstração.

∎

O próximo resultado nos dá a classificação topológica para sistemas afins hiperbólicos. A grosso modo, a demonstração segue os mesmos moldes do Teorema 2.8 e, por este motivo, será feita com poucos detalhes.

Teorema 2.14. *Sejam Φ e Ψ fluxos associados com*

$$\dot{x} = A_1 x + a_1 \quad e \quad \dot{x} = A_2 x + a_2,$$

respectivamente. Suponha que $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ e que A_1 e A_2 sejam hiperbólicas. Nestas condições, os fluxos Φ e Ψ são topologicamente conjugados se, e somente se, as dimensões dos subespaços estáveis de A_1 e A_2 forem iguais.

Demonstração: Note que são possíveis as decomposições

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^-_{A_1} \oplus \mathcal{L}^+_{A_1} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^n = \mathcal{L}^-_{A_2} \oplus \mathcal{L}^+_{A_2}.$$

Considerando as projeções

$$\pi^-_{A_1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^-_{A_1} \quad \text{e} \quad \pi^+_{A_1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^+_{A_1},$$

$$\pi^-_{A_2} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^-_{A_2} \quad \text{e} \quad \pi^+_{A_2} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^+_{A_2},$$

e os "subsistemas"

$$\dot{x} = A|_{\mathcal{L}^-_{A_1}} x + \pi^-_{A_1} a_1$$

e

$$\dot{x} = A|_{\mathcal{L}^-_{A_2}} x + \pi^-_{A_2} a_2$$

nos subespaços estáveis e

$$\dot{x} = A|_{\mathcal{L}^+_{A_1}} x + \pi^+_{A_1} a_1$$

e

$$\dot{x} = A|_{\mathcal{L}^+_{A_2}}\, x + \pi^+_{A_2} a_2$$

nos subespaços instáveis, segue do teorema anterior que existe uma aplicação de conjugação

$$h^- : \mathcal{L}^-_{A_1} \longrightarrow \mathcal{L}^-_{A_2}$$

para os subsistemas estáveis e, revertendo o tempo nos subsistemas instáveis, garantimos a exitência da conjugação

$$h^+ : \mathcal{L}^+_{A_1} \longrightarrow \mathcal{L}^+_{A_2}.$$

Como cada solução de $\dot{x} = A_i x + a_i$ é escrita como soma de soluções dos subsistemas respectivos, segue que podemos definir a conjugação topológica entre Φ e Ψ por

$$H(x) := h^- \left(\pi^-_{A_1}(x)\right) + h^+ \left(\pi^+_{A_1}(x)\right).$$

Isto encerra a demonstração.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 3

ÍNDICES DE KRONECKER E A FORMA CANÔNICA DE BRUNOVSKÝ

Neste capítulo apresentamos, a partir de um detalhado estudo do artigo [12], os alicerces para a classificação topológica de sistemas de controle lineares que mencionamos. Em síntese, associaremos ao par de matrizes (A, B) de um sistema de controle linear uma lista finita de números naturais, os Índices de Kronecker de (A, B), o que possibilitará definir em poucos passos um par de matrizes nilpotentes que servirá de representante canônico para as classes de equivalência módulo a equivalência de feedback. Além disso, mostraremos que os índices de Kronecker satisfazem propriedades que garantem que o número de classes de equivalência sob a equivalência de feedback é finito, o que simplifica, por exemplo, um estudo qualitativo de tais sistemas.

3.1 Sistemas de controle lineares e controlabilidade

Um **sistema de controle** é dado por

i) um espaço estado M, que é uma variedade C^∞ de dimensão n;

ii) um conjunto de valores de controle $U \subset \mathbb{R}^m$ e um conjunto de funções de controle admissíveis

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow U, \ \text{localmente integrável}\};$$

iii) uma dinâmica

$$\dot{x} = X(x, u(t)),$$

que é dada por uma família de equações diferenciais dependendo dos controles, sendo que para cada $u \in \mathcal{U}$

$$X_u : x \longmapsto X(x, u)$$

seja um campo de vetores C^∞.

De agora em diante, lidaremos com sistemas de controle lineares da forma $\Sigma : \dot{x} = X(x, u)$,

$$X(x, u) = Ax + Bu, \quad t \geq 0, \tag{3.1-1}$$

sendo o espaço estado $\mathbb{R}^n$, e as funções de controle $u \in \mathcal{U}$

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

localmente integráveis. Como o sistema é unicamente determinado por A e B, faremos a identificação do mesmo com o par ordenado de matrizes $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Se $x(0) = x_0$, temos que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \geq 0,$$

é solução do sistema (3.1-1). De modo mais geral, se $x(t_0) = x_0$,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t_0 \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Denotemos por $\varphi_t(x_0, u)$ a correspondente solução do sistema Σ, i.e.,

$$\varphi_t(x_0, u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Definição 3.1 (Ponto atingível). *Dizemos que um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é **atingível** a partir de x_0 se existirem t e u, com $0 < t < \infty$ e $u \in \mathcal{U}$ de modo que $\varphi_t(x_0, u) = x$.*

Inicialmente, denotemos por $\mathcal{R}_0$ o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que são atingíveis a partir da origem. Verifica-se sem dificuldades, utilizando a linearidade da integral, que $\mathcal{R}_0$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Os dois próximos resultados proporcionarão uma boa caracterização do espaço $\mathcal{R}_0$.

Lema 3.2. *Sejam $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Denotemos por $\langle A|\mathcal{V}\rangle$ o menor subespaço A-invariante contendo $\mathcal{V}$. Nestas condições, é verdade que*

$$\langle A|\mathcal{V}\rangle = \mathcal{V} + A\mathcal{V} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{V}.$$

Demonstração: Note primeiramente que, de fato, existe um menor subespaço A-invariante contendo $\mathcal{V}$, pois $\mathbb{R}^n$ é A-invariante contendo $\mathcal{V}$ e a interseção de todos os subespaços com estas caracteristicas ainda as preserva.

Agora, note que a A-invariância de $\mathcal{V}$ garante-nos que $A^n\mathcal{V} \subset \langle A|\mathcal{V}\rangle$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\mathcal{V} \subset \langle A|\mathcal{V}\rangle \Rightarrow A\mathcal{V} \subset \langle A|\mathcal{V}\rangle,$$

e se $A^{n-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V} \subset \langle A|\mathcal{V}\rangle$, então $A^n\mathcal{V} \subset A\mathcal{V} \subset \langle A|\mathcal{V}\rangle$, como queríamos. Disto obtemos que $\mathcal{V} + A\mathcal{V} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{V} \subset \langle A|\mathcal{V}\rangle$. Para concluir a demonstração devemos apenas garantir que $\mathcal{V} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{V}$ é A-invariante, pois a minimalidade de $\langle A|\mathcal{V}\rangle$ assegurará a igualdade. Seja χ_A o polinômio característico de A, i.e., $\chi_A(x) = \det(\mathrm{Id}x - A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton (cf. [7]) temos que

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0\mathrm{Id} = 0,$$

ou seja,

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1A - a_0\mathrm{Id}. \tag{3.1-2}$$

Agora, dado $x \in \mathcal{V} + A\mathcal{V} + ... + A^{n-1}\mathcal{V}$, temos que

$$x = x_0 + Ax_1 + ... + A^{n-1}x_{n-1}.$$

Usando (3.1-2) temos que

$$\begin{aligned} Ax &= Ax_0 + A^2x_1 + ... + A^nx_{n-1} \\ &= Ax_0 + A^2x_1 + ... + (-a_{n-1}A^{n-1} - ... - a_1A - a_0\mathrm{Id})x_{n-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a_0 x_{n-1} + A(x_0 - a_1 x_{n-1}) + ... + A^{n-1}(x_{n-2} - a_{n-1}x_{n-1}) \\
&\in \mathcal{V} + A\mathcal{V} + ... + A^{n-1}\mathcal{V},
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração.

■

Nosso intuito é descrever $\mathcal{R}_0$ em termos de A e B apenas. Para isso, vamos convencionar a notação $\mathcal{B} := \mathrm{Im}B$. Ao conjunto $\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B}$ daremos o nome de **subespaço de Kalman** associado ao par (A, B). Para maiores esclarecimentos acerca da teoria utilizada na demonstração do próximo teorema, vide o Apêndice A.

Teorema 3.3. *Com as definições acima, temos que* $\mathcal{R}_0 = \langle A|\mathcal{B}\rangle$.

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{R}_0$. Então existem $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}$ tais que $x = \varphi_t(0, u)$. Note que para todo $s \in [0, t]$

$$e^{A(t-s)}Bu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} A^n Bu(s) \in \langle A|\mathcal{B}\rangle,$$

logo

$$x = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \in \langle A|\mathcal{B}\rangle,$$

pela própria definição da integral de Riemann.

Afirmação:

$$\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathrm{Im}W_t, \quad t > 0, \tag{3.1-3}$$

onde

$$W_t := \int_0^t e^{As}BB'e^{A's}ds = \int_0^t e^{As}BB^Te^{A^Ts}ds,$$

sendo que W_t é vista como aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e A' e B' são as aplicações duais a A e B (cf. Apêndice A). Como W_t é simétrica, provar (3.1-3) equivale a provar

$$\langle A|\mathcal{B}\rangle^{\perp} = \ker W_t, \quad t > 0.$$

Se $x \in \ker W_t$, então $x'W_tx = 0$, e assim

$$\int_0^t x'e^{As}BB'e^{A's}xds = \int_0^t \langle B'e^{A's}x, B'e^{A's}x\rangle ds = \int_0^t |B'e^{A's}x|ds = 0.$$

Logo,

$$x'e^{As}B = 0, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Diferenciando e calculando em $s = 0$ repetidas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} x'B &= 0 \\ x'BA &= 0 \\ x'BA^2 &= 0 \\ &\vdots \\ x'BA^{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

o que nos mostra que $x \in (\mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B})^{\perp} = \langle A|\mathcal{B}\rangle^{\perp}$.

Se $x \in \langle A|\mathcal{B}\rangle^{\perp}$, revertendo os passos acima obtemos $x'W_t x = 0$, e, como $W_t \geq 0$, segue que $x \in \ker W_t$, pelo Teorema Espectral. Isto prova a afirmação.

Agora, seja $x \in \langle A|\mathcal{B}\rangle$ e fixe $t > 0$. Então $x = W_t y$, para algum $y \in \mathbb{R}^n$, o que conclui a demonstração da igualdade $\langle A, B\rangle^{\perp} = \ker W_t$. Escolhendo

$$u(s) = B'e^{A(t-s)}y, \quad 0 \leq s \leq t,$$

vemos que

$$x = W_t y = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds = \varphi_t(0, u),$$

i.e., $x \in \mathcal{R}_0$, o que conclui a demonstração.

∎

O subespaço $\mathcal{R}_0 = \langle A|\mathcal{B}\rangle \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser o **subespaço controlável** do par (A, B), ou, como já dissemos, o subespaço de Kalman do par (A, B). Descrevemos $\mathcal{R}_0$ como sendo o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ A-invariante que contém ImB.

Agora, sejam $\bar{\mathcal{X}} = \mathbb{R}^n/\mathcal{R}_0$, $P : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathcal{X}}$ a projeção canônica, $\bar{A}$ a aplicação induzida em $\bar{\mathcal{X}}$ por A e denote $\bar{x} := Px$, $x \in \mathbb{R}^n$. Como $PB = 0$ (pois Im$B \subset \mathcal{R}_0$), segue que o sistema $\Sigma/\mathcal{R}_0$ (projeção de Σ) é dado por

$$\Sigma/\mathcal{R}_0 : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t). \tag{3.1-4}$$

Note que, pela construção utilizada na demonstração do Teorema 3.3, $x \in \mathcal{R}_0$ implica que para todo $t > 0$ existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $x = \varphi_t(0, u)$.

Observe também que x é atingível a partir de x_0 se, e somente se, $x - e^{At}x_0 \in \mathcal{R}_0$. De fato, $x - e^{At}x_0 \in \mathcal{R}_0$ se, e somente se, existem $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}$ tais que

$$x - e^{At}x_0 = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds,$$

ou seja,

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Disto também se conclui que $x \in \mathbb{R}^n$ é atingível a partir de x_0 se, e somente se, $\bar{x} = e^{\bar{A}t}\bar{x}_0$, para algum $0 < t < \infty$.

Isto sugere a seguinte definição:

Definição 3.4 (Par controlável). *Dizemos que o par (A, B) é **controlável** quando o subespaço de Kalman a ele associado coincide com todo o $\mathbb{R}^n$, i.e., $\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathbb{R}^n$.*

Como consequência da discussão realizada, fica evidente que (A, B) é controlável se, e somente se, a matriz $[B \ \ AB \cdots A^{n-1}B]$, formada pela justaposição das matrizes A^iB, tem posto n. Damos a ela o nome de **matriz de Kalman** de (A, B). De agora em diante, denotaremos o conjunto dos pares controláveis por $\mathcal{S}^c_{n,m}$, e o conjunto de todos os pares de matrizes de ordens $n \times n$ e $n \times m$, por $\mathcal{S}_{n,m}$.

Observe que

$$W_t = \int_0^t e^{As}BB'e^{A's}ds$$

é simétrica positiva definida para todo $t > 0$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e fixado $t > 0$, defina

$$u(s) := B'e^{A'(t-s)}W_t^{-1}(x - e^{At}x_0), \quad 0 \le s \le t.$$

Com isto, temos

$$\begin{aligned}
\varphi_t(x_0, u) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}BB'e^{A'(t-s)}W_t^{-1}(x - e^{At}x_0)ds \\
&= e^{At}x_0 + W_tW_t^{-1}(x - e^{At}x_0) = e^{At}x_0 + x - e^{At}x_0 = x.
\end{aligned}$$

Ou seja, todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser atingido a partir de qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em qualquer intervalo de tempo positivo. Por esta razão, podemos simplificar a notação de $\mathcal{R}_0$ para

$\mathcal{R}$, apenas.

Suponha agora que no sistema usual

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

modifiquemos a função de controle, escolhendo

$$u(t) = Fx(t) + v(t), \quad t \geq 0,$$

onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é arbitrária e $v \in \mathcal{U}$ é um novo controle. Tal tipo de mudança é chamado de mudança de **feedback** no sistema. É imediato verificar que a mudança de feedback equivale a substituir o par (A, B) pelo par $(A + BF, B)$.

O próximo resultado nos garante que controlabilidade é uma propriedade invariante por isomorfismos no espaço estado e mudanças de feedback. De agora em diante, vamos denotar por $\mathcal{R}^i$ os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{R}^i := \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{i-1}\mathcal{B}.$$

Proposição 3.5. *Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ isomorfismos e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear arbitrária. Então*

(i) $\mathcal{R}^i(T^{-1}AT, T^{-1}BG) = T^{-1}\mathcal{R}^i(A, B), \quad i = 1, \ldots, n;$

(ii) $\mathcal{R}^i(A + BF, B) = \mathcal{R}^i(A, B), \quad i = 1, \ldots, n.$

Demonstração: (i) Observe que para todo $i = 1, \ldots, n-1$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{i}(T^{-1}AT)^i\mathrm{Im}(T^{-1}BG) &= \sum_{k=1}^{i}(T^{-1}AT)^iT^{-1}\mathrm{Im}(BG) \\
&= \sum_{k=1}^{i} T^{-1}A^iTT^{-1}\mathrm{Im}(BG) \\
&= \sum_{k=1}^{i} T^{-1}A^i\mathrm{Im}B = T^{-1}\sum_{k=1}^{i} A^i\mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Como além disso temos que $Im(T^{-1}BG) = Im(T^{-1}B)$, segue que $\mathcal{R}^i(T^{-1}AT, T^{-1}BG) = T^{-1}\mathcal{R}^i(A, B)$.

(ii) Vamos provar inicialmente que

$$\mathcal{B} + (A + BF)\mathcal{X} = \mathcal{B} + A\mathcal{X},$$

para quaisquer que sejam $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ subespaço e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. De fato, como $BF\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$, segue que $\mathcal{B} + (A + BF)\mathcal{X} \subset \mathcal{B} + A\mathcal{X}$. Formalmente,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{B} + (A + BF)\mathcal{X} &\Leftrightarrow x \in \mathcal{B} + A\mathcal{X} + BF\mathcal{X} \\ &\Leftrightarrow x = \sum \alpha_i b_i + \sum \beta_i x_i + \sum \gamma_i b'_i \end{aligned}$$

onde $b_i \in \mathcal{B}$, $x_i \in A\mathcal{X}$, $b'_i \in BF\mathcal{X}$ formam bases e α_i, β_i e γ_i são escalares. Como $b'_i \in \mathcal{B}$ para todo i, podemos escrever a última igualdade como

$$x = \sum \alpha'_i b_i + \sum \beta_i x_i \in \mathcal{B} + A\mathcal{X}.$$

A inclusão contrária é imediata, posto que $BF\mathcal{X}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. De fato,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{B} + A\mathcal{X} &\Leftrightarrow x = v + w, \quad v \in \mathcal{B}, \quad w \in A\mathcal{X} \\ &\Leftrightarrow x = v + w + 0, \quad v \in \mathcal{B}, \quad w \in A\mathcal{X}, \quad 0 \in \mathcal{B}F\mathcal{X} \\ &\Rightarrow x \in \mathcal{B} + A\mathcal{X} + BF\mathcal{X} = \mathcal{B} + (A + BF)\mathcal{X}, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade desejada. Para concluir o resultado, denote $\tilde{A} = A + BF$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i(A + BF, B) = \mathcal{R}^i(\tilde{A}, B) &= \mathcal{B} + \tilde{A}\mathcal{B} + \cdots + \tilde{A}^{n-1}\mathcal{B} \\ &= \mathcal{B} + \tilde{A}(\mathcal{B} + \tilde{A}(\cdots(\mathcal{B} + \tilde{A}\mathcal{B}))\cdots) \\ &= \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B} \\ &= \mathcal{R}^i(A, B), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

Corolário 3.6. *Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ isomorfismos, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qualquer* *aplicação linear e* $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$*. Então*

$$(T^{-1}AT, T^{-1}BG) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$$

e

$$(A + BF, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}.$$

Demonstração: Basta observar que os subespaços de Kalman correspondentes são iguais ao subespaço de Kalman de (A, B).

∎

3.2 Índices de Kronecker

Índices de Kronecker (ou índices de controlabilidade) são sequências finitas de números naturais que servem de "rótulo" para certas classes de equivalência no conjunto dos pares de matrizes controláveis.

Um índice de Kronecker nada mais é que uma partição de um número $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.7 (Partição). *Uma* ***partição*** *de um número natural* n *em* r *partes é uma sequência finita* $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$ *tal que*

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_r > 0 \qquad e \qquad \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r = n$$

Particionaremos o conjunto de pares (A, B) controláveis, $\mathcal{S}^c_{n,m}$, em classes de equivalência. Como veremos, cada classe será unicamente determinada por seu índice de Kronecker, o que faz com que a quantidade de classes seja relativamente pequena. De fato, em $\mathcal{S}^c_{n,m}$ o número de classes será dado exatamente pela quantidade de partições para as quais $r \leq m$. Por exemplo, se $n = 4$ e $m = 2$, temos exatamente 3 classes de equivalência, correspondentes aos índices $(4), (3, 1)$ e $(2, 2)$.

A forma canônica citada, chamada forma de Brunovský, é definida com base numa partição de n, como segue:

Definição 3.8 (Forma de Brunovský). *Se* $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *é uma partição de* n*, com* $r \leq m$*,* *então o par* (A_κ, B_κ) *tal que*

$$A_\kappa \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad e \qquad B_\kappa \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

são dados por

$$A_\kappa = \begin{bmatrix} A_{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\kappa_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\kappa_r} \end{bmatrix} \qquad e \qquad B_\kappa = \left[\begin{array}{cccc|c} b_{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{\kappa_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\kappa_r} & 0 \end{array}\right]$$

onde $A_{\kappa_i} \in \mathcal{M}_{\kappa_i}(\mathbb{R})$ *e* $b_{\kappa_i} \in \mathcal{M}_{\kappa_i \times 1}(\mathbb{R})$ *são da forma*

$$A_{\kappa_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad b_{\kappa_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

é chamado ***Forma Canônica de Brunovský*** *relativa à partição* κ.

Vamos agora definir os índices de Kronecker formalmente. Para isso, seja $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ e consideremos os subespaços $\mathcal{R}^i$ associados ao par (A, B), i.e.,

$$\mathcal{R}^i = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{i-1}\mathcal{B}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Note que $\mathcal{R}^0 := \{0\}$, $\mathcal{R}^1 = \mathcal{B}$ e $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$, o subespaço de Kalman do par (A, B).

Defina

$$\lambda_i = \dim\left(\frac{\mathcal{R}^i}{\mathcal{R}^{i-1}}\right)$$

e vamos mostrar que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ define uma partição de n. Para verificar tal fato, consideremos o seguinte resultado:

Proposição 3.9. *Para quaisquer subespaços* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ *e qualquer aplicação linear* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, vale que*

$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}\right) = \dim\left(\frac{A\mathcal{R}}{A\mathcal{S}}\right) + \dim\left(\frac{\mathcal{R} \cap \ker A}{\mathcal{S} \cap \ker A}\right),$$

e, se $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$*,*

$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}\right) = \dim\left(\frac{\mathcal{R}+\mathcal{T}}{\mathcal{S}+\mathcal{T}}\right) + \dim\left(\frac{\mathcal{R}\cap\mathcal{T}}{\mathcal{S}\cap\mathcal{T}}\right).$$

Demonstração: Dados dois espaços $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, sabemos, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem que

$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}\right) = \dim\left(\mathcal{R}\right) - \dim\left(\mathcal{S}\right).$$

De fato, basta considerar a projeção canônica $\pi : \mathcal{R} \to \dfrac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$. Do mesmo modo, vale que

$$\dim\left(\frac{A\mathcal{R}}{A\mathcal{S}}\right) = \dim\left(A\mathcal{R}\right) - \dim\left(A\mathcal{S}\right),$$

e que

$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}\cap\ker A}{\mathcal{S}\cap\ker A}\right) = \dim\left(\mathcal{R}\cap\ker A\right) - \dim\left(\mathcal{S}\cap\ker A\right).$$

Considerando as restrições $A\mathcal{R}$ e $A\mathcal{S}$ e aplicando novamente o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(A\mathcal{R}) = \dim(\mathcal{R}) - \dim(\mathcal{R}\cap\ker A)$$

$$\dim(A\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S}) - \dim(\mathcal{S}\cap\ker A).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\dim\left(\frac{A\mathcal{R}}{A\mathcal{S}}\right) &= \dim(\mathcal{R}) - \dim(\mathcal{R}\cap\ker A) - \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{S}\cap\ker A)\\ &= \dim(\mathcal{R}) - \dim(\mathcal{S}) - \left[\dim(\mathcal{R}\cap\ker A) - \dim(\mathcal{S}\cap\ker A)\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{R}) - \dim(\mathcal{S}) &= \dim\left(\frac{A\mathcal{R}}{A\mathcal{S}}\right) + \left[\dim(\mathcal{R}\cap\ker A) - \dim(\mathcal{S}\cap\ker A)\right]\\ \dim\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}\right) &= \dim\left(\frac{A\mathcal{R}}{A\mathcal{S}}\right) + \dim\left(\frac{\mathcal{R}\cap\ker A}{\mathcal{S}\cap\ker A}\right).\end{aligned}$$

Para a segunda igualdade, observe que

$$\dim(\mathcal{R}+\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\mathcal{T}) - \dim(\mathcal{R}\cap\mathcal{T})$$

e que
$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}+\mathcal{T}}{\mathcal{S}+\mathcal{T}}\right)=\dim(\mathcal{R}+\mathcal{T})-\dim(\mathcal{S}+\mathcal{T}).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\dim\left(\frac{\mathcal{R}+\mathcal{T}}{\mathcal{S}+\mathcal{T}}\right) &= \dim(\mathcal{R}+\mathcal{T})-\dim(\mathcal{S}+\mathcal{T})\\ &= \dim(\mathcal{R})-\dim(\mathcal{S})+\left[\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{T})-\dim(\mathcal{R}\cap\mathcal{T})\right].\end{aligned}$$

Logo,
$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}\right)=\dim\left(\frac{\mathcal{R}+\mathcal{T}}{\mathcal{S}+\mathcal{T}}\right)+\dim\left(\frac{\mathcal{R}\cap\mathcal{T}}{\mathcal{S}\cap\mathcal{T}}\right)$$

■

Para mostrarmos que $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ constitui uma partição, observe que para os espaços $\mathcal{R}^i$ definidos anteriormente, vale $\mathcal{B}+A\mathcal{R}^i=\mathcal{R}^{i+1}$, e também

$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}^i}{\mathcal{R}^{i-1}}\right)=\dim\left(\frac{A\mathcal{R}^i}{A\mathcal{R}^{i-1}}\right)+\dim\left(\frac{\mathcal{R}^i\cap\ker A}{\mathcal{R}^{i-1}\cap\ker A}\right).$$

Mas como pela proposição anterior

$$\dim\left(\frac{A\mathcal{R}^i}{A\mathcal{R}^{i-1}}\right)=\dim\left(\frac{\overbrace{A\mathcal{R}^i+\mathcal{B}}^{\mathcal{R}^{i+1}}}{\underbrace{A\mathcal{R}^{i-1}+\mathcal{B}}_{\mathcal{R}^i}}\right)+\dim\left(\frac{A\mathcal{R}^i\cap\mathcal{B}}{A\mathcal{R}^{i-1}\cap\mathcal{B}}\right),$$

segue que

$$\dim\left(\frac{\mathcal{R}^i}{\mathcal{R}^{i-1}}\right)=\dim\left(\frac{\mathcal{R}^{i+1}}{\mathcal{R}^i}\right)+\dim\left(\frac{A\mathcal{R}^i\cap\mathcal{B}}{A\mathcal{R}^{i-1}\cap\mathcal{B}}\right)+\dim\left(\frac{\mathcal{R}^i\cap\ker A}{\mathcal{R}^{i-1}\cap\ker A}\right).$$

Isto é,
$$\lambda_i=\lambda_{i+1}+\dim\left(\frac{A\mathcal{R}^i\cap\mathcal{B}}{A\mathcal{R}^{i-1}\cap\mathcal{B}}\right)+\dim\left(\frac{\mathcal{R}^i\cap\ker A}{\mathcal{R}^{i-1}\cap\ker A}\right),$$

de onde concluímos que $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$. E como

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n\dim\left(\frac{\mathcal{R}^i}{\mathcal{R}^{i-1}}\right)=\sum_{i=1}^n\dim(\mathcal{R}^i)-\dim(\mathcal{R}^{i-1})=\dim(\mathcal{R})=n,$$

concluímos que λ é, de fato, uma partição de n.

Definição 3.10 (Índices de Kronecker)**.** *O **índice de Kronecker** (ou os índices) do par* (A,B) *é dado por* $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_r)$*, onde* κ_i *é o número de* λ_j*'s maiores ou iguais a* i*.*

Como já dissemos, κ deve formar uma partição de n. Para provar isto, observe inicialmente que $\kappa_i \geq \kappa_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. De fato, não pode ocorrer $\kappa_{i+1} > \kappa_i$, pois todo λ_j maior ou igual a $i+1$ é também maior ou igual a i. Logo,

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_r.$$

Para concluir que κ é partição de n, temos a seguinte

Proposição 3.11. *Dado $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$, então $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$, obtido a partir da partição λ, é tal que $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r = n$.*

Demonstração: Observe inicialmente que o espaço de Kalman de (A, B) de dimensão n é gerado pelos vetores que constituem a matriz

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & A^{n-1}b_2 & \cdots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix},$$

onde b_i a $A^j b_i$ denotam a i-ésima coluna da matriz B e $A^j B$, respectivamente.

Em $\bar{R}$, vamos trocar cada vetor $A^j b_i$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, m$ por um sinal, 1 ou 0, de acordo com a seguinte regra:

Olhamos para a matriz $\bar{R}$ pelas linhas, ou seja, na ordem

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, Ab_1, \ldots, Ab_m, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, A^{n-1}b_m \tag{3.2-5}$$

O vetor $A^j b_i$ será trocado por 1 se for linearmente independente dos anteriores em (3.2-5), caso contrário o trocamos por 0. Após isto, obtemos uma matriz da forma

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que, como os vetores $A_j b_i$ geram o espaço de Kamlman de (A, B), então o número total de uns na matriz $\bar{\mathcal{R}}$ é exatamente n, pois, por controlabilidade, temos que

$$\text{span}\{A^j b_i \mid j = 1, \ldots, n-1, \;\; i = 1, \ldots, m\} = \mathbb{R}^n.$$

Além disso, abaixo de zeros existem somente zeros. De fato, se substituímos $A^{j_0} b_{i_0}$ por 0, então

$$A^{j_0} b_{i_0} = \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A^j b_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_{ij_0} A^{j_0} b_i$$

Logo, para qualquer $k = 1, \ldots, n - j_0$, temos

$$\begin{aligned} A^{j_0+k} b_{i_0} &= A^k \left[\sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A^j b_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_{ij_0} A^{j_0} b_i \right] \\ &= \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A^{j+k} b_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_{ij_0} A^{j_0+k} b_i \end{aligned}$$

e, portanto, $A^{j_0+k} b_{i_0}$ deve ser substituído também por zero.

Agora, note que a quantidade de uns na i-ésima linha de $\bar{\mathcal{R}}$ é dada por λ_i. De fato, os vetores que geram $\mathcal{R}^{i-1}$ são exatamente aqueles representados por uns na primeira até a linha $(i-1)$ de $\bar{\mathcal{R}}$. Do mesmo modo, os vetores que geram o espaço $\mathcal{R}^i$ são estes citados mais aqueles da i-ésima linha que são linearmente independentes dos mesmos. Assim, vemos que $\lambda_i = \dim \mathcal{R}^i - \dim \mathcal{R}^{i-1}$ é dado precisamente pela quantidade de uns na i-ésima linha de $\bar{\mathcal{R}}$. Desta forma, k_i é o número de linhas nas quais a quantidade de $1'$s é maior ou igual a i. Como a quantidade de $1'$s em cada linha não aumenta e se o simbolo 0 aparece em uma coluna o restante das entradas também serão 0, segue que k_1 é a quantidade de $1'$s na coluna com quantidade máxima destes, k_2 a quantidade de $1'$s na coluna com a segunda maior quantidade de $1'$s e assim sucessivamente. Como a quantidade total de números 1 em $\bar{\mathcal{R}}$ é o número de elementos de uma base do espaço de Kalman, e este tem dimensão n, segue que $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

■

Observação: Podemos definir índices de Kronecker para pares não controláveis exatamente pelo mesmo procedimento, exceto pelo fato de que neste caso os índices particionam a dimensão do subespaço de Kalman, $\dim \mathcal{R}$, ao invés de particionar a dimensão do espaço estado todo, n.

Exemplo 3.12. *Sejam $n = 6$ e $m = 3$ e consideremos o par (A, B) dado por*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é a forma canônica de Brunovský dada pela partição $\kappa = (3, 2, 1)$. Calculemos o índice de Kronecker de (A, B). Para isto, devemos determinar inicialmente a partição inicial λ, o que é possível conhecendo-se a dimensão dos subespaços $\mathcal{R}^1$, $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$, $\mathcal{R}^4$, $\mathcal{R}^5$ e $\mathcal{R}^6$. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^6$. Verifica-se sem dificuldades que

$$\mathcal{B} = [e_3, e_5, e_6],$$

$$A\mathcal{B} = [e_2, e_4],$$

$$A^2\mathcal{B} = [e_1],$$

$$A^3\mathcal{B} = A^4\mathcal{B} = A^5\mathcal{B} = A^6\mathcal{B} = \{0\}.$$

Assim,

$$\mathcal{R}^1 = \mathcal{B} = [e_3, e_5, e_6],$$

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{B} + A\mathcal{B} = [e_2, e_3, e_4, e_5, e_6],$$

$$\mathcal{R}^3 = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + A^2\mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6],$$

$$\mathcal{R}^4, \mathcal{R}^5, \mathcal{R}^6 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6].$$

Com isto,

$$\lambda_1 = \dim\mathcal{R}^1 = 3,$$

$$\lambda_2 = \dim\mathcal{R}^2 - \dim\mathcal{R}^1 = 5 - 3 = 2,$$

$$\lambda_3 = \dim\mathcal{R}^3 - \dim\mathcal{R}^2 = 6 - 5 = 1,$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0.$$

Ou seja, a partição auxiliar é $\lambda = (3, 2, 1)$. Assim sendo, temos que $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 2$ e

$\kappa_3 = 1$, isto é, o índice de Kronecker do par (A, B) é $\kappa = (3, 2, 1)$.

Exemplo 3.13. *Considerando ainda $n = 6$ e $m = 3$, seja a forma canônica de Brunovský relativa à partição $\kappa = (2, 2, 2)$, ou seja,*

$$A_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular o índice de Kronecker de (A, B). Neste caso, temos

$$\mathcal{B} = [e_2, e_4, e_6]$$

$$A\mathcal{B} = [e_1, e_3, e_5]$$

$$A^2\mathcal{B} = A^3\mathcal{B} = A^4\mathcal{B} = A^5\mathcal{B} = A^6\mathcal{B} = \{0\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{R}^1 = \mathcal{B} = [e_2, e_4, e_6]$$

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{B} + A\mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]$$

$$\mathcal{R}^3, \mathcal{R}^4, \mathcal{R}^5, \mathcal{R}^6 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6].$$

Logo, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 = 0$, isto é, $\lambda = (3, 3)$.

Assim sendo, vemos que

$$\kappa_1 = 2,$$

$$\kappa_2 = 2$$

e

$$\kappa_3 = 3.$$

E o índice de Kronecker de (A_κ, B_κ) é $\kappa = (2, 2, 2)$.

3.3 A F-equivalência, ou equivalência de feedback

Vamos agora tratar da relação que fornece a partição de $\mathcal{S}^c_{n,m}$ em classes de equivalência mencionada, a chamada equivalência de feedback. Considere $\mathcal{S}^c_{n,m}$ o conjunto de todos os pares (A, B) controláveis, ou seja, tais que

$$\dim(\mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B}) = n.$$

Por uma questão de conveniência, podemos considerar $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ como um elemento $p \in \mathbb{R}^N$, $N = n^2 + nm$. Agora, introduzimos um conjunto $\mathbb{G}$ de transformações g em $\mathbb{R}^N$, definidas por

$$gp := g(A, B) := (T^{-1}(A + BF)T, T^{-1}BG).$$

Isto é, cada $g \in \mathbb{G}$ é representada por uma terna distinta de matrizes

$$(T, F, G) \in \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{m^2},$$

onde T e G são isomorfismos. Ao elemento $g \in \mathbb{G}$ daremos o nome de **transformação de feedback**.

Segue diretamente da Proposição 3.5 que se $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ e $g \in \mathbb{G}$, então $g(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$.

Com isto, fica claro que $\mathcal{S}^c_{n,m}$ é invariante pela ação de $\mathbb{G}$, i.e.,

$$\mathbb{G}\mathcal{S}^c_{n,m} = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} g\mathcal{S}^c_{n,m} = \mathcal{S}^c_{n,m}.$$

Munimos $\mathbb{G}$ com uma estrutura de **grupo de transformações**, com regra de composição

$$g_2 \circ g_1 = (T_1T_2, F_1 + G_1F_2T_1^{-1}, G_1G_2),$$

elemento identidade

$$\mathrm{Id} = (Id_n, 0, Id_m),$$

e elemento inverso
$$g^{-1} = (T^{-1}, -G^{-1}FT, G^{-1}).$$

Agora, seja $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$. O conjunto $\mathbb{G}(A, B) = \{g(A, B) \mid g \in \mathbb{G}\} \subset \mathcal{S}^c_{n,m}$ é chamado *órbita* de (A, B) sob $\mathbb{G}$.

Definição 3.14 (F-equivalência). *Dois pares (A, B) e $(\tilde{A}, \tilde{B})$ são ditos* ***F-equivalentes*** *(ou* ***feedback equivalentes****) se (A, B) e $(\tilde{A}, \tilde{B})$ pertencem à mesma órbita.*

Como sabemos, as órbitas particionam $\mathcal{S}^c_{n,m}$ em subconjuntos disjuntos. Assim, temos realmente uma relação de equivalência em $\mathcal{S}^c_{n,m}$.

3.4 F-equivalência e índices de Kronecker

As próximas três proposições nos mostram como associar índices de Kronecker com a F-equivalência definida.

Proposição 3.15. *Se dois pares controláveis $(A, B), (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ são F-equivalentes, então estes possuem os mesmos índices de Kronecker.*

Demonstração: Basta observar que os índices de Kronecker de um par (A, B) são obtidos pelas dimensões dos espaços $\mathcal{R}^i$. Como, pela Proposição 3.5, as dimensões de tais espaços são invariantes pela F-equivalência, segue-se imediatamente que pares F-equivalentes possuem os mesmos índices de Kronecker.

■

As demonstrações das duas próximas proposições, apesar de longas e trabalhosas, são extremamente simples. Excetuando-se extensos cálculos matriciais, os artifícios utilizados em cada passo são constituídos de ideias pouco elaboradas. Recomenda-se uma leitura que priorize o entendimento global das demonstrações.

Proposição 3.16. *Se $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ tem índice de Kronecker $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$, então (A, B) é F-equivalente à forma canônica (A_κ, B_κ) definida por κ.*

Demonstração: O que faremos será mostrar que existe uma sequência finita de transformações de feedback que associam o par (A, B) ao par (A_κ, B_κ). O resultado seguirá então por transitividade.

Seja $(A, B) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ com índice de Kronecker $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$ e consideremos novamente a matriz

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & A^{n-1}b_2 & \cdots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, multiplicamos B por uma matriz de permutação V_1 (evidentemente inversível) que rearranje as colunas de B de tal modo que, ao montarmos a matriz $\bar{\mathcal{R}}$, a quantidade de uns nas colunas da mesma, tal como já fizemos, passe a ser não crescente, i.e., a coluna com mais uns passa a ser a primeira e assim por diante. Por simplicidade continuamos denotando BV_1 apenas por B, assim como suas colunas por b_i. A transformação de feedback $g_1 \in \mathbb{G}$ correspondente é dada por

$$g_1 = (Id_n, 0, V_1).$$

Note que (como já observamos na Proposição 3.11) o número de uns na i-ésima coluna de $\bar{\mathcal{R}}$ agora é representado por κ_i. Além disso, os vetores

$$b_1, Ab_1, \ldots, A^{\kappa_1 - 1}b_1, b_2, \ldots, A^{\kappa_2 - 1}b_2, \ldots, b_r, \ldots, A^{\kappa_r - 1}b_r$$

agora são linearmente independentes, portanto formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

Observe que, pelo fato de $A^{\kappa_i}b_i$ ser o primeiro 0 da i-ésima coluna, podemos escrever

$$A^{\kappa_i}b_i + \sum_{j<i} \alpha_{ij0} A^{\kappa_i} b_j = -\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\kappa_i} \alpha_{ijk} A^{\kappa_i - k} b_j$$

ou seja,

$$A^{\kappa_i}\left(b_i + \sum_{j<i} \alpha_{ij0} b_j\right) = -\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\kappa_i} \alpha_{ijk} A^{\kappa_i - k} b_j \qquad (3.4\text{-}6)$$

O próximo passo é simplificar a expressão acima multiplicando, para isso, a matriz B por outra matriz inversível V_2, resultando em novas colunas

$$\tilde{b}_i := b_i + \sum_{j<i} \alpha_{ij0} b_j, \quad i = 1, \ldots, r \ \text{ e } \ \tilde{b}_i := b_i \ \text{ para } \ i > r.$$

Tal matriz é dada por

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{210} & \alpha_{310} & \cdots & \alpha_{r10} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_{320} & \cdots & \alpha_{r20} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{r(r-1)0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo, continuando a denotar BV_2 ainda por B, vemos que 3.4-6 passa a ser escrita como

$$A^{\kappa_i} b_i + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\kappa_i} \alpha_{ijk} A^{\kappa_i - k} b_j = 0,$$

com novos coeficientes α_{ijk}, naturalmente.

A este estágio, a transformação de feedback $g_2 \in \mathbb{G}$ equivalente é

$$g_2 = (Id_n, 0, V_2).$$

A seguir, para cada $i = 1, \ldots, r$ e $l := 1, \ldots, \kappa_i$, definimos os vetores

$$e_{il} := A^{l-1} b_i + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{l-1} \alpha_{ijk} A^{l-1-k} b_j;$$

$$e_{i1} := b_i.$$

Desta forma,

$$e_{11} = b_1, \;\; e_{21} = b_2, \ldots, \;\; e_{r1} = b_r,$$

$$e_{12} = Ab_1 + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{1j1} b_j, \;\; e_{22} = Ab_2 + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{2j1} b_j, \ldots, \;\; e_{r2} = Ab_r + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{rj1} b_j,$$

$$e_{13} = A^2 b_1 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{2} \alpha_{1jk} A^{2-k} b_j, \ldots, \;\; e_{r3} = Ab_r + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{2} \alpha_{rjk} A^{2-k} b_j, \ldots$$

$$e_{i\kappa_i} = A^{\kappa_i - 1} b_i + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\kappa_i - 1} \alpha_{ijk} A^{\kappa_i - 1 - k} b_j, \ldots$$

Considerando a base

$$b_1, ..., b_{\lambda_1}, Ab_1, .., Ab_{\lambda_2}, ..., A^{k_1}b_1, ..., A^{k_1}b_{\lambda_r}$$

de $\mathbb{R}^n$, vemos que e_{il} é escrita na forma da matriz $\bar{R}$, e que e_{il} é uma combinação linear envolvendo somente o elemento de posição i, l desta matriz, com coeficiente 1, e os elementos das linhas acima. Logo, ao dispormos os coeficientes das combinações lineares que fornecem e_{il} em forma matricial, obteremos uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal, que é inversível. Daí se vê que os vetores e_{il} são linearmente independentes.

Isto faz com que a matriz

$$T := [e_{1\kappa_1}, e_{1(\kappa_1-1)}, \ldots, e_{11}, e_{2\kappa_2}, \ldots, e_{21}, \ldots, e_{r\kappa_r}, \ldots, e_{r1}]$$

seja inversível. Observe agora que

$$\begin{aligned} Ae_{il} &= A\left[A^{l-1}b_i + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{ijk}A^{l-1-k}b_j\right] = A^l b_i + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_{ijk}A^{l-k}b_j = \\ &= A^l b_i + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{l}\alpha_{ijk}A^{l-k}b_j - \sum_{j=1}^{r}\alpha_{ijl}b_j = e_{i(l+1)} - \sum_{j=1}^{r}\alpha_{ijl}b_j \end{aligned}$$

se $l < \kappa_i$ e, consequentemente, para $l = \kappa_i$

$$Ae_{i\kappa_i} = A^{\kappa_i}b_i + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{\kappa_i}\alpha_{ijk}A^{\kappa_i-k}b_j - \sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij\kappa_i}b_j = -\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij\kappa_i}b_j$$

Sabendo disto, observe que

$$\begin{aligned} AT &= A[e_{1\kappa_1}, e_{1(\kappa_1-1)}, \ldots, e_{11}, e_{2\kappa_2}, \ldots, e_{21}, \ldots, e_{r\kappa_r}, \ldots, e_{r1}] \\ &= [Ae_{1\kappa_1}, Ae_{1(\kappa_1-1)}, \ldots, Ae_{11}, Ae_{2\kappa_2}, \ldots, Ae_{21}, \ldots, Ae_{r\kappa_r}, \ldots, Ae_{r1}] \\ &= T\tilde{A}, \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix},$$

com

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_{ii\kappa_i} & -\alpha_{ii(\kappa_i-1)} & \cdots & -\alpha_{ii1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{ij\kappa_i} & -\alpha_{ij(\kappa_i-1)} & \cdots & -\alpha_{ij1} \end{bmatrix}$$

De maneira similar, como $e_{i1} = b_i$, então $B = T\tilde{B}$, sendo que

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{b}_2 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{b}_r & * & \cdots & * \end{bmatrix}_{n\times m}, \quad \text{onde} \quad \tilde{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\kappa_i\times 1}$$

Tais cálculos sugerem a próxima transformação de feedback $g_3 \in \mathbb{G}$,

$$g_3 = (T, 0, Id_m),$$

aplicada, é claro, ao par (A, BV_1V_2) já obtido, o qual insistimos por chamar de (A, B). Observe que as matrizes

$$T^{-1}AT \quad \text{e} \quad T^{-1}B$$

diferem das matrizes desejadas A_κ e B_κ apenas por algumas poucas linhas (em $T^{-1}AT$) e colunas (em $T^{-1}B$) não nulas. Vejamos como eliminá-las.

Na matriz $T^{-1}B$, note que as últimas $m - r$ colunas (possivelmente não nulas) dependem linearmente das r primeiras (pois o posto de B é r). Assim, podemos aplicar uma mudança de base V no espaço dos valores de controle para zerá-las, isto é, com uma determinada transformação de feedback $g_4 \in \mathbb{G}$,

$$g_4 = (Id_n, 0, V),$$

obtemos a forma desejada para a segunda matriz do par. Ainda resta zerar as linhas não nulas de $T^{-1}AT$ que a diferem da forma canônica. Para isto, consideremos a matriz

B_κ recém obtida e a matriz de ordem $m \times n$

$$F = \begin{bmatrix} \alpha_{11\kappa_1} & \alpha_{11(\kappa_1-1)} & \cdots & \alpha_{111} & \alpha_{21\kappa_2} & \cdots & \alpha_{211} & \cdots & \alpha_{r1\kappa_r} & \alpha_{r1(\kappa_r-1)} & \cdots & \alpha_{r11} \\ \alpha_{12\kappa_1} & \alpha_{12(\kappa_1-1)} & \cdots & \alpha_{121} & \alpha_{22\kappa_2} & \cdots & \alpha_{221} & \cdots & \alpha_{r2\kappa_r} & \alpha_{r2(\kappa_r-1)} & \cdots & \alpha_{r21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1r\kappa_1} & \alpha_{1r(\kappa_1-1)} & \cdots & \alpha_{1r1} & \alpha_{2r\kappa_2} & \cdots & \alpha_{2r1} & \cdots & \alpha_{rr\kappa_r} & \alpha_{rr(\kappa_r-1)} & \cdots & \alpha_{rr1} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

com as primeiras r linhas representadas acima e últimas $m-r$ linhas arbitrárias (indicadas pelos asteriscos). Aplicando a transformação de feedback $g_5 \in \mathbb{G}$,

$$g_5 = (Id_n, F, Id_m)$$

ao par $(T^{-1}AT, B_\kappa)$, obtemos o resultado desejado.

■

Proposição 3.17. *Dada $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$, $r \leq m$, uma partição de n, então a forma canônica de Brunovský defnida por κ tem índice de Kronecker exatamente κ.*

Demonstração: Isto se verifica por meio de um cálculo direto. Vejamos explicitamente tal procedimento. O par canônico é dado por

$$A_\kappa = \begin{bmatrix} A_{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\kappa_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\kappa_r} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{e} \quad B_\kappa = \left[\begin{array}{cccc|c} b_{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{\kappa_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\kappa_r} & 0 \end{array}\right]_{n\times m},$$

onde A_{κ_i} e b_{κ_i} são da forma

$$A_{\kappa_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\kappa_i\times\kappa_i} \quad \text{e} \quad b_{\kappa_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\kappa_i\times 1}.$$

Observemos que

$$A_\kappa^j = \begin{bmatrix} A_{\kappa_1}^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\kappa_2}^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\kappa_r}^j \end{bmatrix}, \quad A_{\kappa_i}^j b_{\kappa_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{\kappa_i \times 1}, \text{ para } 1 \leq j < \kappa_i$$

$$\text{e} \quad A_{\kappa_i}^{\kappa_i} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{\kappa_i \times \kappa_i},$$

sendo que na matriz coluna $A_{\kappa_i}^j b_{\kappa_i}$, o 1 encontra-se na entrada $\kappa_i - j$. Veja ainda que $\dim(A_{\kappa_i}) = \kappa_i - 1$ e $\dim(A_{\kappa_i}^j) = \kappa_i - j$, onde $\dim(\cdot)$ denota o posto da matriz em questão. Além disso,

$$A_\kappa^j B_\kappa = \begin{bmatrix} A_{\kappa_1}^j b_{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\kappa_2}^j b_{\kappa_2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\kappa_r}^j b_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

e, particularmente,

$$A_\kappa^{\kappa_i} B_\kappa = \begin{bmatrix} A_{\kappa_1}^j b_{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\kappa_2}^j b_{\kappa_2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

onde o último bloco-coluna não nulo na diagonal é $A_{\kappa_i - 1}^{\kappa_i} b_{\kappa_i - 1}$. Portanto, $A_\kappa^{\kappa_1} B_\kappa$ anula-se. Tendo realizado tais potências e produtos matriciais, resta apenas avaliar o posto de tais matrizes, que fornecem-nos o índice de Kronecker desejado. Temos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}^1 &= r \\ \dim \mathcal{R}^2 &= r + r \\ &\vdots \\ \dim \mathcal{R}^{\kappa_r + 1} &= (\kappa_r - 1)r + (r - 1) \\ \dim \mathcal{R}^{\kappa_r + 2} &= (\kappa_r - 1)r + 2(r - 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{R}^{\kappa_{r-1}+1} &= (\kappa_r - 1)r + (\kappa_{r-1} - \kappa_r)(r-1) + (r-2) \\
&\vdots \\
\dim \mathcal{R}^{\kappa_{r-i}+1} &= (\kappa_r - 1)r + \cdots + (\kappa_{r-i} - \kappa_{r-(i-1)})(r-i) + (r-(i+1)) \\
&\vdots \\
\dim \mathcal{R}^{\kappa_1+1} &= (\kappa_r - 1)r + (\kappa_{r-1} - \kappa_r)(r-1) + \cdots + (\kappa_1 - \kappa_2)(r-r+1)
\end{aligned}$$

e isto nos dá a partição preliminar $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = r,\ \ \lambda_2 = r,\ \ \lambda_3 = r, \ldots,\ \ \lambda_{\kappa_r} = r, \\
\lambda_{\kappa_r+1} = r-1,\ \ \lambda_{\kappa_r+2} = r-1, \ldots,\ \ \lambda_{\kappa_{r-1}} = r-1 \\
\lambda_{\kappa_{r-1}+1} = r-2,\ \ \lambda_{\kappa_{r-1}+1} = r-2, \ldots,\ \ \lambda_{\kappa_{r-2}} = r-2, \ldots \\
\lambda_{\kappa_{r-i}} = r-i, \ldots \\
\lambda_{\kappa_3+1} = 2,\ \ \lambda_{\kappa_3+2} = 2, \ldots,\ \ \lambda_{\kappa_2} = 2 \\
\lambda_{\kappa_2+1} = 1,\ \ \lambda_{\kappa_2+2} = 1, \ldots,\ \ \lambda_{\kappa_1} = 1 \\
\lambda_{\kappa_1+1} = 0 = \cdots = \lambda_n.
\end{gathered}$$

Assim, uma simples contagem nos mostra que o índice de Kronecker do par (A_κ, B_κ) é $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$.

∎

Proposição 3.18. *Sejam dois pares $(A, B), (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{S}^c_{n,m}$ e suponha que estes tenham os mesmos índices de Kronecker, digamos $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r)$. Então (A, B) e $(\tilde{A}, \tilde{B})$ são F-equivalentes.*

Demonstração: Pela proposição anterior, segue que

$$(A, B) \sim (A_\kappa, B_\kappa) \quad \text{e} \quad (\tilde{A}, \tilde{B}) \sim (A_\kappa, B_\kappa),$$

onde $\sim$ denota a F-equivalência. Por transitividade, segue que

$$(A, B) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}).$$

∎

CAPÍTULO 4

CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES

Temos agora ferramentas suficientes para classificar topologicamente sistemas de controle lineares. Provaremos que dois destes sistemas são topologicamente conjugados se, e somente se, possuirem os mesmos índices de Kronecker, mesma inércia e as matrizes geradoras da parte não controlável dos sistemas forem semelhantes. Em outras palavras, o que faremos será generalizar a classificação presente no capítulo 2 para sistemas de controle, pois o que entendemos por parte não controlável de um sistema nada mais é que um sistema de equações diferenciais homegêneo, sendo a inércia de uma matriz uma terna de naturais que representam a quantidade de autovalores com parte real negativa, nula e positiva, respectivamente.

Antes de expor a principal definição deste capítulo, façamos um pequeno esclarecimento quanto a notação a ser adotada ao longo desta etapa.

Vamos utilizar letras minúsculas para identificar vetores, por exemplo, $x \in \mathbb{R}^n$ e, diferentemente do restante do texto, caracteres em negrito para identificar trajetórias dependentes do tempo, por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

A letra grega maiúscula Σ continuará identificando sistemas de controle lineares, bem como os conjuntos de trajetórias por estes determinados.

Estas observações são importantes pois em certos momentos, durante o texto, tais objetos confundem-se a ponto de serem quase indistintos, isto é, podemos entender como sistema tanto uma equação do tipo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ quanto o conjunto de trajetórias por ela determinada. Do mesmo modo, na maioria dos casos, os vetores serão simplesmente valores pontuais de trajetórias, embora não especificado no decorrer do texto. Os principais resultados deste capítulo foram originalmente estudados em [12].

4.1 Conjugação topológica, diferencial e linear

Definição 4.1 (Conjugação). *Diremos que dois sistemas Σ_1 e Σ_2, definidos por $\dot{\boldsymbol{x}} = A_1\boldsymbol{x}+B_1\boldsymbol{u}$ e $\dot{\boldsymbol{x}} = A_2\boldsymbol{x} + B_2\boldsymbol{u}$ em $\mathbb{R}^n$ são **conjugados** $(\Sigma_1 \sim \Sigma_2)$ quando existir uma bijeção $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de modo que*

$$\boldsymbol{x}_1 \in \Sigma_1 \Leftrightarrow S\boldsymbol{x}_1 \in \Sigma_2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Os sistemas Σ_1 e Σ_2 são **topologicamente conjugados** $(\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2)$ se S for homeomorfismo, **diferencialmente conjugados** $(\Sigma_1 \sim_D \Sigma_2)$ se S for difeomorfismo e **linearmente conjugados** $(\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2)$ se S for linear.*

Note que consideramos Σ_i definindo uma família de trajetórias em $\mathbb{R}^n$ do seguinte modo

$$\Sigma_i := \{\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ \mid \ \mathbf{x} \text{ abs. contínua e } \exists \mathbf{u} : \mathbb{R} \to U \text{ t.q. } \dot{\mathbf{x}} = A_i\mathbf{x} + B_i\mathbf{u} \text{ q. s.}\}$$

Observação: Uma aplicação $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é dita absolutamente contínua se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, se $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ é uma família de intervalos disjuntos, com

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta,$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{x}(a_i) - \mathbf{x}(b_i)\| < \epsilon.$$

Seja Σ um sistema definido em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{R}$ o subespaço de Kalman associado, i.e., o menor subespaço A-invariante de $\mathbb{R}^n$ que contém $\mathcal{B}$. Seja agora o espaço quociente

$\mathbb{R}^n/\mathcal{R} = \{x/\mathcal{R}; x \in \mathbb{R}^n\}$. Consideremos a aplicação $\bar{A}$ induzida em $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}$ por A e $\Sigma/\mathcal{R}$ a projeção do sistema Σ em $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}$, i.e., $\Sigma/\mathcal{R} : \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{A}\bar{\mathbf{x}}$.

Proposição 4.2. *Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ subespaços quaisquer de $\mathbb{R}^n$ e assuma que $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, com bijeção correspondente S. Suponha que $S(x_1/\mathcal{S}_1) = Sx_1/\mathcal{S}_2$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$. Então $\Sigma_1/\mathcal{S}_1 \sim \Sigma_2/\mathcal{S}_2$ com bijeção correspondente S',*

$$\begin{aligned} S' : \mathbb{R}^n/\mathcal{S}_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathcal{S}_2 \\ x_1/\mathcal{S}_1 &\longmapsto Sx_1/\mathcal{S}_2. \end{aligned}$$

Demonstração: Devemos provar que S' é uma bijeção e que preserva trajetórias. Suponha $Sx_1/\mathcal{S}_2 = Sy_1/\mathcal{S}_2$ em $\mathbb{R}^n/\mathcal{S}_2$. Note que

$$Sx_1/\mathcal{S}_2 = Sy_1/\mathcal{S}_2 \Leftrightarrow S(x_1/\mathcal{S}_1) = S(y_1/\mathcal{S}_1)$$

Como S é bijeção, segue que $x_1/\mathcal{S}_1 = y_1/\mathcal{S}_1$. De fato,

$$S(x_1/\mathcal{S}_1) = S(y_1/\mathcal{S}_1) \Leftrightarrow S^{-1}S(x_1/\mathcal{S}_1) = S^{-1}S(y_1/\mathcal{S}),$$

e fica provada a injetividade. Dado qualquer $x_2/\mathcal{S}_2 \in \mathbb{R}^n/\mathcal{S}_2$, temos que $x_2 \in \mathbb{R}^n$. Sendo S bijeção, existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Sx_1 = x_2$. Logo, $S'(x_1/\mathcal{S}_1) = Sx_1/\mathcal{S}_2 = x_2/\mathcal{S}_2$, o que prova ser S' sobrejetiva.

Por fim, dado $x_1/\mathcal{S}_1 \in \Sigma_1/\mathcal{S}_1$, podemos assumir $x_1 \in \Sigma_1$. Isto significa que $Sx_1 \in \Sigma_2$ e, portanto, $Sx_1/\mathcal{S}_2 \in \Sigma_2/\mathcal{S}_2$. Como, por definição $S'(x_1/\mathcal{S}_1) = Sx_1/\mathcal{S}_2$, obtemos o resultado, i.e.,

$$x_1/\mathcal{S}_1 \in \Sigma_1/S_1 \Leftrightarrow S'(x_1/\mathcal{S}_1) \in \Sigma_2/\mathcal{S}_2.$$

∎

Verifica-se sem dificuldades que propriedades como linearidade, continuidade e diferenciabilidade são preservadas por S'.

Proposição 4.3. *Seja $\Sigma : \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$. Então, $x_1 \in \mathcal{B}$ se, e somente se, para $M > \|x_1\|$ e $T > 0$ existe $\boldsymbol{x}_T \in \Sigma$ satisfazendo:*

i) $\|\boldsymbol{x}_T(t)\| \leq M, \ \ \forall t \in [0,T]$;

ii) $\boldsymbol{x}_T(0) = 0$

iii) $\boldsymbol{x}_T(T) = x_1$.

* *Podemos também assumir que* $\boldsymbol{x}_T \in \mathcal{C}^\infty$.

Demonstração: Suponha $M > \|x_1\|$ e $T > 0$ tais que exista $\mathbf{x}_T \in \Sigma$ satisfazendo i)-iii) acima. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$x_1 = x_T(T) = \int_0^T Ax_T(\tau)d\tau + B\int_0^T u(\tau)d\tau.$$

Disto, veja que

$$\begin{aligned}
\left\| x_1 - B\int_0^T u(\tau)d\tau \right\| &= \left\| \int_0^T Ax_T(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \int_0^T \|Ax_T(\tau)\|\, d\tau \\
&\leq \int_0^T \|A\| \cdot \|x_T(\tau)\| d\tau \leq M\|A\|T \overset{T\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $x_1 \in \bar{\mathcal{B}}$. Mas como $\mathcal{B}$ é subespaço vetorial de um espaço de dimensão finita, temos $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$, i.e., $x_1 \in \mathcal{B}$, como queríamos.

Reciprocamente, sejam $x_1 \in \mathcal{B}$ e $r \in \mathbb{R}^m$ com $Br = x_1$. Defina

$$\begin{aligned}
R_{T,M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} \in \mathcal{C}^\infty, \\
\dot{\mathbf{x}}(t) - A\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}, \ \|\mathbf{x}\| \leq M, \ \mathbf{x}(0) = 0, \ \mathbf{x}(T) = x\}
\end{aligned}$$

Note que toda solução de $\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu$ limitada por M e com condição inicial $\mathbf{x}(0) = 0$ fornece, no tempo T, um ponto de $R_{T,M}$.

Admita que Σ é controlável, caso contrário, substitua $\mathbb{R}^n$ pelo subespaço de Kalman $\mathcal{R}$.

Afirmação: $\mathcal{B} \cap B_M(0) \subset R_{T,M}$, onde $B_M(0)$ representa a bola aberta de raio M centrada na origem.

De fato, sejam f_ϵ funções que aproximam a Delta de Dirac no intervalo $[0,T]$, centrada em T, que sejam positivas, contínuas e nulas em $[0, T-\epsilon]$, satisfazendo

$$\int_0^T f_\epsilon(\tau)d\tau \xrightarrow{\epsilon\to 0} 1 \tag{4.1-1}$$

e

$$\int_0^T g(\tau)f_\epsilon(\tau)d\tau \xrightarrow{\epsilon\to 0} g(T), \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty. \tag{4.1-2}$$

Então, os problemas de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Brf_\epsilon(t)$$
$$\mathbf{x}(0) = 0$$

nos fornecem soluções

$$\mathbf{x}_\epsilon(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Brf_\epsilon(\tau)d\tau.$$

Note que $\mathbf{x}_\epsilon(T) \xrightarrow{\epsilon\to 0} x_1$, de fato, basta tomar

$$g(\tau) := e^{A(T-\tau)}Br$$

e aplicar (4.1-2), pois $g(T) = x_1$.

Além disso, como $\|x_1\| < M$, segue que $\|\mathbf{x}_\epsilon(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, T]$ e ϵ suficientemente pequeno, em verdade,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_\epsilon(t)\| = \left\| \int_0^T e^{A(t-\tau)}Brf_\epsilon(\tau)d\tau \right\| &\leq \int_0^T \|e^{A(t-\tau)}\| \cdot \|Br\| \cdot f_\epsilon(\tau)d\tau \\
&\leq x_1 \int_{T-\epsilon}^t \|e^{A(t-\tau)}\| \cdot f_\epsilon(\tau)d\tau \\
&\leq \|x_1\| \max_{\tau\in(-\epsilon,\epsilon)} \|e^{A\tau}\| \xrightarrow{\epsilon\to 0} \|x_1\| < M,
\end{aligned}$$

para todo ϵ suficientemente pequeno.

Logo, para ϵ suficientemente pequeno temos $\mathbf{x}_\epsilon(T) \in R_{T,M}$. Como $\mathbf{x}_\epsilon(T) \xrightarrow{\epsilon\to 0} x_1$, segue que $x_1 \in \overline{R_{T,M}}$. Pode-se provar que o conjunto

$$R_K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{u} : [0, T] \to \mathbb{R}^m, \ \|\mathbf{u}\| \leq K \text{ com } \varphi_T(0, \mathbf{u}) = x\}$$

tem interior não vazio e contendo 0. Sendo assim, considere $N \subset R_K$ uma vizinhança de 0. Seja $\epsilon > 0$ tal que $x_1 - x_\epsilon \in N$, onde $x_\epsilon = \mathbf{x}_\epsilon(T)$, e escolha $\mathbf{u}_\epsilon$ controle com $\|\mathbf{u}_\epsilon\|$ pequena o bastante de modo que a solução $\mathbf{y}_\epsilon$ de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}_\epsilon$ com condição inicial $\mathbf{y}_\epsilon(0) = 0$ seja tal que $\mathbf{y}_\epsilon(T) = x_1 - x_\epsilon$.

Então $\mathbf{x}_\epsilon + \mathbf{y}_\epsilon$ é solução de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(rf_\epsilon + \mathbf{u}_\epsilon)$ e

i) $\mathbf{x}_\epsilon(T) + \mathbf{y}_\epsilon(T) = x_\epsilon + x_1 - x_\epsilon$

ii) $\|\mathbf{x}_\epsilon(t) + \mathbf{y}_\epsilon(t)\| \leq \|\mathbf{x}_\epsilon(t)\| + \|\mathbf{y}_\epsilon(t)\| \leq M - \delta + \sup\limits_{t \in [0,T]} e^{At} \cdot \|B\| \cdot K$, para algum $\delta > 0$.

Como $\sup\limits_{t \in [0,T]} e^{At} \cdot \|B\| \cdot K$ pode ser feito menor que δ tomando-se K suficientemente pequeno, o resultado segue.

■

Proposição 4.4. *Sejam sistemas Σ_1 e Σ_2, $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2$, com homeomorfismo correspondente S. Então,*

$$S(x_1/\mathcal{R}_1^i) = Sx_1/\mathcal{R}_2^i \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Demonstração: Seja $\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$.

Afirmação 1: $x_1 \in x_0 + \mathcal{B}$ se, e somente se, para $M > \|x_1\|$ existe um conjunto de trajetórias $\mathbf{x}_T \in \Sigma$ satisfazendo:

(i) $\|\mathbf{x}_T(t)\| \leq M, \;\; \forall t \in [0, T]$;

(ii) $\mathbf{x}_T(0) = x_0$

(iii) $\lim\limits_{T \to 0} \mathbf{x}_T(T) = x_1$.

De fato, suponha $M > \|x_1\|$ e que existe um conjunto de trajetórias satisfazendo i)-iii) acima. Como

$$\lim_{T \to 0}[\mathbf{x}_T(T) - \mathbf{x}_T(0)] = \lim_{T \to 0} \left[\int_0^T A\mathbf{x}_T(t)dt + B \int_0^T \mathbf{u}(t)dt \right],$$

temos que

$$\lim_{T \to 0}[\mathbf{x}_T(T) - \mathbf{x}_T(0)] - \lim_{T \to 0} B \int_0^T \mathbf{u}(t)dt = \lim_{T \to 0} \int_0^T A\mathbf{x}_T(t)dt.$$

Segue da continuidade de B que $x_1 \in x_0 + \mathcal{B}$, pois

$$\begin{aligned}\left\| x_1 - \left[x_0 + B\left(\lim_{T\to 0} \int_0^T \mathbf{u}(t)dt \right) \right] \right\| &= \left\| \lim_{T\to 0} \int_0^T A\mathbf{x}_T(t)dt \right\| \\ &\leq \lim_{T\to 0} \left\| \int_0^T A\mathbf{x}_T(t)dt \right\| \\ &\leq \lim_{T\to 0} M\|A\|T = 0\end{aligned}$$

e $x_0 + \mathcal{B}$ é fechado.

Reciprocamente, seja $x_1 \in x_0 + \mathcal{B}$. Podemos escrever $x_1 = x_0 + y$, com $y \in \mathcal{B}$. Pela Proposição 4.3, para $M' > \|x_1\|$ existe $\mathbf{x}_T \in \Sigma \cap \mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\|\mathbf{x}_T(t)\| \leq M' \;\; \forall t \in [0, T];$$

$$\mathbf{x}_T(0) = 0;$$

$$\mathbf{x}_T(T) = y.$$

Defina $\bar{\mathbf{x}}_T(t) := e^{At}x_0 + \mathbf{x}_T(t)$. Então $\bar{\mathbf{x}}_T \in \Sigma \cap \mathcal{C}^\infty$ e, além disso,

(i) $\|\bar{\mathbf{x}}_T(t)\| = \|\mathbf{x}_T(t) + e^{At}x_0\| \leq \|\mathbf{x}_T(t)\| + \|e^{At}\| \leq M' + \|e^{At}\|_\infty := M$,

(ii) $\bar{\mathbf{x}}_T(0) = \mathbf{x}_T(0) + e^{A0}x_0 = \mathrm{Id}x_0 = x_0$,

(iii) $\lim_{T\to 0} \bar{\mathbf{x}}_T(T) = \lim_{T\to 0} \left[e^{At}x_0 + \mathbf{x}_T(T) \right] = x_0 + y = x_1$,

o que garante a afirmação feita.

Afirmação 2: Pela caracterização topológica dada a $x + \mathcal{B}$ na afirmação 1, segue que

$$\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2 \Rightarrow S(x_1 + \mathcal{B}_1) = Sx_1 + \mathcal{B}_2,$$

onde $\Sigma_1 : \dot{x} = A_1x + B_1u$, $\Sigma_2 : \dot{x} = A_2x + B_2u$, $\mathcal{B}_1 := \mathrm{Im}B_1$ e $\mathcal{B}_2 := \mathrm{Im}B_2$.

De fato, admita $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2$, ou seja

$$\mathbf{x} \in \Sigma_1 \Leftrightarrow S\mathbf{x} \in \Sigma_2,$$

sendo S homeomorfismo entre os espaços-estado, e considere

$$Sx \in S(x_1 + \mathcal{B}_1), \quad \text{com} \quad x \in x_1 + \mathcal{B}_1 \quad \text{arbitrário.}$$

Pelo resultado anterior, existe $M < \infty$ tal que para todo $T > 0$ existe $\mathbf{x}_T \in \Sigma_1$ satisfazendo

$$\|\mathbf{x}_T(t)\| \leq M, \ \ t \in [0, T];$$

$$\mathbf{x}_T(0) = x_1,$$

e

$$\lim_{T \to 0} \mathbf{x}_T(T) = x.$$

Note que

$$S\mathbf{x}_T(0) = Sx_1 \ \text{ e } \ \lim_{T \to 0} S\mathbf{x}_T(T) = Sx.$$

Devemos usar a equivalência topológica para obter $\|S\mathbf{x}_T(t)\| \leq K$, para algum $K < \infty$, $t \in [0, T]$, o que implica, pelo mesmo resultado, que $Sx \in Sx_1 + \mathcal{B}_2$. Como cada $x_T \in \Sigma_1$, a equivalência topológica nos garante que

$$S\mathbf{x}_T \in \Sigma_2, \ \ \forall T > 0.$$

Consideremos a bola fechada de raio M centrada na origem, $B_M(0) \subset \mathbb{R}^n$, compacta por natureza.

Como S é homeomorfismo, $SB_M(0) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto e, portanto, existe $K > 0$ tal que

$$\|x\| \leq K, \ \ \forall x \in SB_M(0).$$

Como $\mathbf{x}_T(t) \in B_M(0)$ para todo $T > 0$ e para todo $t \in [0, T]$, temos $S\mathbf{x}_T(t) \in SB_M(0)$ para todos $T > 0$ e $t \in [0, T]$. Portanto,

$$\|S\mathbf{x}_T\| \leq K, \ \ \forall T > 0.$$

Em resumo, fomos capazes de garantir, graças à equivalência topológica, a existência de uma constante $K > 0$ tal que para todo $T > 0$ existe $S\mathbf{x}_T \in \Sigma_2$ satisfazendo

$$\|S\mathbf{x}_T(t)\| \leq K, \ \ t \in [0, T],$$

$$S\mathbf{x}_T(0) = Sx_1$$

e

$$\lim_{T\to 0} S\mathbf{x}_T(T) = Sx.$$

Pelo resultado exposto, segue que $Sx \in Sx_1 + \mathcal{B}_2$.

Para a inclusão contrária, seja $x \in Sx_1 + \mathcal{B}_2$. Então, existe $M > 0$ tal que para todo $T > 0$ existe $\mathbf{x}_T \in \Sigma_2$ satisfazendo

$$\|\mathbf{x}_T(t)\| \leq M, \ \ t \in [0, T],$$

$$\mathbf{x}_T(0) = Sx_1$$

e

$$\lim_{T\to 0} \mathbf{x}_T(T) = x.$$

Note que é suficiente mostrarmos que $S^{-1}x \in x_1 + \mathcal{B}_1$. Para isso, consideremos novamente a bola fechada $B_M(0) \subset \mathbb{R}^n$. Então $S^{-1}B_M(0)$ é compacta, i.e., existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K$ para todo $x \in S^{-1}B_M(0)$. Pela equivalência topológica,

$$\mathbf{x}_T \in \Sigma_2 \Rightarrow S^{-1}\mathbf{x}_T \in \Sigma_1.$$

Assim, obtivemos $K > 0$ tal que para todo $T > 0$ existe $S^{-1}\mathbf{x}_T \in \Sigma_1$ satisfazendo

$$\|S^{-1}\mathbf{x}_T(t)\| \leq K, \ \ t \in [0, T],$$

$$S^{-1}\mathbf{x}_T(0) = x_1$$

e

$$\lim_{T\to 0} S^{-1}\mathbf{x}_T(T) = S^{-1}x.$$

Portanto, pelo mesmo resultado já citado, podemos afirmar que

$$S^{-1}x \in x_1 + \mathcal{B}_1,$$

ou seja, $x \in S(x_1 + \mathcal{B}_1)$. Isto prova a igualdade desejada.

Aplicando a Proposição 4.2, concluimos que $\Sigma_1/\mathcal{B}_1 \sim_T \Sigma_2/\mathcal{B}_2$ pelo homeomorfismo

$$S' : x_1 + \mathcal{B}_1 \mapsto Sx_1 + \mathcal{B}_2.$$

Vamos agora caracterizar $\Sigma/\mathcal{B}$. Seja $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{L} \approx \mathbb{R}^n/\mathcal{B}$. Assim, escreva $\mathbb{R}^n = \mathcal{B} \oplus \mathcal{L}$. Logo, $\Sigma/\mathcal{B}$ é dado por

$$\Sigma/\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{z} : \mathbb{R} \to \mathcal{L} \mid \exists \mathbf{b} \text{ abs. contínua t.q. } \dot{\mathbf{z}}(t) = \bar{A}\mathbf{z}(t) + \bar{B}\mathbf{b}(t), \forall t \in \mathbb{R} \right\},$$

onde as matrizes $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são definidas como

$$\begin{aligned} \bar{A} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ z &\longmapsto A(0,z)/\mathcal{B} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{B} : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ b &\longmapsto Ab/\mathcal{B}, \end{aligned}$$

o que condiz com o que foi feito no início da seção. Portanto,

$$\Sigma/\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{z} : \mathbb{R} \to \mathcal{L} \mid \mathbf{z} \text{ e } \dot{\mathbf{z}} \text{ são absolutamente contínuas e } \mathbf{z} \in \Sigma(\bar{A}, \bar{B}) \right\}.$$

Na verdade, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ não são unicamente determinadas, pois elas dependem da escolha da base para a decomposição $\mathbb{R}^n = \mathcal{B} \oplus \mathcal{L}$. Entretanto, é fácil ver que todos os pares $(\bar{A}, \bar{B})$ são equivalentes, em verdade, mudanças de base no espaço estado $\mathbb{R}^n$ estão entre aquelas que caracterizam a F-equivalência.

Agora, aplicamos o mesmo raciocínio usado anteriormente, porém com $\Sigma/\mathcal{B}$ no lugar de Σ. A necessidade adicional de suavidade requerida em $\Sigma/\mathcal{B}$ (de que $\dot{\mathbf{z}}$ também seja contínua) é levada em conta pelo fato de que $\mathbf{x}_T$ pode ser considerada $\mathcal{C}^\infty$ (e assim $\dot{\mathbf{x}}_T$ também é absolutamente contínua).

Portanto, $S'(z_1 + \bar{\mathcal{B}}_1) = S'z_1 + \bar{\mathcal{B}}_2$, e, após identificarmos S' e z_1, podemos escrever

$$S(x_1 + \mathcal{B}_1 + A_1\mathcal{B}_1) = Sx_1 + \mathcal{B}_2 + A_2\mathcal{B}_2.$$

Continuando este mesmo processo com $(\Sigma/\mathcal{B})/\bar{\mathcal{B}}$, etc., obtemos o resultado:

$$S(x_1 + \mathcal{R}_1^i) = Sx_1 + \mathcal{R}_2^i$$

■

4.2 Teoremas de classificação

Esta seção contém os principais teoremas de classificação deste trabalho. A definição a seguir será de grande valia.

Definição 4.5 (Inércia). *Seja p um polinômio real e mônico. Denotemos por p^-, p^0 e p^+ os fatores mônicos de $p = p^-p^0p^+$ cujas raízes possuem parte real negativa, nula e positiva, respectivamrente. A **inércia** de p é definida como sendo a terna $[n^-, n^0, n^+]$, onde n^-, n^0 e n^+ são, nesta ordem, os graus de p^-, p^0 e p^+.*

Podemos generalizar esta definição para matrizes quadradas:

Definição 4.6. *A **inércia** de uma matriz quadrada A é definida como sendo a inércia de seu polinômio característico, e será denotada por $s(A)$.*

No que se segue, denotamos por $\mathcal{L}_A$ o subespaço central de A, isto é, o subespaço gerado pelos autovetores de A correspondentes aos autovalores que são imaginários puros. Portanto, $s(A)$ é uma terna de números naturais onde cada componente denota o número de autovalores de A (contando multiplicidade) com parte real negativa, nula e positiva, nessa ordem.

O conteúdo dos Teoremas 4.8 e 4.9 é uma generalizção do seguinte resultado clássico para sistemas lineares, que é essencialmente o Teorema 2.8, porém com subespaço central não vazio. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em Arnold [2].

Teorema 4.7. *Sejam $\Sigma_i : \dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. Então,*

i) $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_1 \sim_D \Sigma_2 \Leftrightarrow A_1$ e A_2 são semelhantes.

ii) $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2 \Leftrightarrow s(A_1) = s(A_2)$ e $A_1/\mathcal{L}_{A_1}$ é semelhante a $A_2/\mathcal{L}_{A_2}$.

Observação: duas matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, existe T não-singular tal que $B = T^{-1}AT$.

Teorema 4.8. *Sejam $\Sigma_i : \dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + B_i\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$, dados e assuma que Σ_1 é controlável. Então são equivalentes:*

(i) Σ_2 *é controlável e* (A_1, B_1) *e* (A_2, B_2) *possuem os mesmos índices de Kronecker;*

(ii) $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$*;*

(iii) $\Sigma_1 \sim_D \Sigma_2$*;*

(iv) $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2$*.*

Demonstração: A demonstração será estruturada do seguinte modo: $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$. Note que $ii) \Rightarrow iii)$ e $iii) \Rightarrow iv)$ são triviais. Vamos então analisar as duas implicações restantes.

A implicação $i) \Rightarrow ii)$ é uma consequência imediata da Proposição 3.18. Para ver isto, usaremos os dois fatos a seguir:

Fato 1: Para quaisquer $R \in GL_m(\mathbb{R})$ e $K \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$\Sigma(A, B) = \Sigma(A + BK, BR),$$

i.e., mudança de base no espaço estado e transformação de feedback não alteram as trajetórias do sistema. Basta observar que

$$\begin{aligned} \Sigma(A + BK, BR) : \dot{\mathbf{x}} &= (A + BK)\mathbf{x} + BR\mathbf{u} \\ &= A\mathbf{x} + B(K\mathbf{x} + R\mathbf{u}) \\ &= A\mathbf{x} + B(K\mathbf{x} + R\mathbf{u}) : \Sigma(A, B), \end{aligned}$$

onde $K\mathbf{x} + R\mathbf{u}$ representa apenas uma mudança no feedback do sistema $\Sigma(A, B)$. Formalmente, o conjunto de trajetórias

$$\{\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ abs. contínua e } \exists \mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathcal{U} \text{ t.q. } \dot{\mathbf{x}} = A_i\mathbf{x} + B_i\mathbf{u} \text{ q. s.}\}$$

permanece inalterado. De fato, se

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad \text{q.s. para algum} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U},$$

basta tomar $\mathbf{v} := R^{-1}(\mathbf{u} - K\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ e ver que

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + BK)\mathbf{x} + BR\mathbf{v} \quad \text{q.s.}$$

Do mesmo modo, se

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + BK)\mathbf{x} + BR\mathbf{v} \quad \text{q.s. para algum} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{U},$$

tomando $\mathbf{u} := K\mathbf{x} + R\mathbf{v} \in \mathcal{U}$, temos

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad \text{q.s.}$$

o que basta para a igualdade.

Fato 2: Para $S \in GL_n$ vale

$$\Sigma(A, B) \sim_L \Sigma(S^{-1}AS, SB).$$

Para verificar isto, utilizaremos a própria S como sendo o isomorfismo necessário. Assim, se $\mathbf{x} \in \Sigma(A, B)$, ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad \text{q.s. para algum} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U},$$

então

$$S(\dot{\mathbf{x}}) = S(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) = SA\mathbf{x} + SB\mathbf{u} = SAS^{-1}S\mathbf{x} + SB\mathbf{u} \quad \text{q.s. para algum} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U},$$

ou seja,

$$S\mathbf{x} \in \Sigma(SAS^{-1}, SB).$$

Por outro lado, se $S\mathbf{x} \in \Sigma(SAS^{-1}, SB)$, então

$$\dot{S\mathbf{x}} = SAS^{-1}S\mathbf{x} + SB\mathbf{u} \quad \text{q.s. para algum} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U},$$

ou seja,

$$S\dot{\mathbf{x}} = SA\mathbf{x} + SB\mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

logo, $\mathbf{x} \in \Sigma(A, B)$, o que prova que $\Sigma(A, B) \sim_L \Sigma(SAS^{-1}, SB)$.

Agora, pela Proposição 3.18 (A_1, B_1) e (A_2, B_2) são F-equivalentes, pois possuem os mesmos índices de Kronecker. Segue que existem S, R e K tais que

$$(A_2, B_2) = (S(A_1 + B_1K)S^{-1}, SB_1R).$$

Portanto,

$$\Sigma(A_2, B_2) = \Sigma(S(A_1 + B_1K)S^{-1}, SB_1R) \sim_L \Sigma(A_1 + B_1K, B_1R) = \Sigma(A_1, B_1).$$

Para ver $iv) \Rightarrow i)$, assuma sem perda de generalidade que $S(0) = 0$. Como $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2$ e Σ_1 é controlável, segue imediatamente que Σ_2 também deve ser controlável, pois pela Proposição 4.4, tomando $x_1 = 0$, segue que $S(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$. Agora, seja S o homeomorfismo correspondente a esta equivalência. Assim, pela Proposição 4.4, temos

$$S\mathcal{R}_1^i = \mathcal{R}_2^i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

e, como S e S^{-1} são contínuas, $\dim \mathcal{R}_1^i = \dim \mathcal{R}_2^i$. Portanto, os índices de Kronecker são os mesmos, como queríamos.

■

Teorema 4.9. *Sejam $\Sigma_i : \dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + B_i\boldsymbol{u}_i$ e denotemos por $\bar{A}_i$ a aplicação induzida no quociente $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2$. Então,*

1. *são equivalentes:*

   i) $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$;

   ii) $\Sigma_1 \sim_D \Sigma_2$;

   iii) (A_1, B_1) *e* (A_2, B_2) *possuem os mesmos índices de Kronecker e* $\bar{A}_1$ *é semelhante a* $\bar{A}_2$.

2. *são equivalentes:*

   i) $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2$;

   ii) (A_1, B_1) *e* (A_2, B_2) *possuem os mesmos índices de Kronecker,* $s(\bar{A}_1) = s(\bar{A}_2)$ *e* $\bar{A}_1/\mathcal{L}_{A_1}$ *é semelhante a* $\bar{A}_2/\mathcal{L}_{A_2}$.

Demonstração: 1) Suponha $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$ e seja S o isomorfismo correspondente a esta equivalência. Como, pela linearidade, $S(0) = 0$, segue da Proposição 4.4 que

$$S(\mathcal{R}_1^i) = \mathcal{R}_2^i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

e, portanto, os índices de Kronecker dos pares em questão são os mesmos. Ainda pela Proposição 4.4, segue que

$$S(x_1 + \mathcal{R}_1) = Sx_1 + \mathcal{R}_2, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, aplicando a Proposição 4.2, obtemos que

$$\Sigma_1/\mathcal{R}_1 \sim_L \Sigma_2/\mathcal{R}_2.$$

Como $\Sigma_1/\mathcal{R}_1$ e $\Sigma_2/\mathcal{R}_2$ são dados por

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \bar{A}_1\bar{\mathbf{x}}_1 \ \text{ e } \ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \bar{A}_2\bar{\mathbf{x}}_2,$$

segue do Teorema 4.7-(i) que $\bar{A}_1$ é semelhante a $\bar{A}_2$.

A implicação $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_1 \sim_D \Sigma_2$ é imediata.

Vamos ver $iii) \Rightarrow i)$ e $ii) \Rightarrow i)$. O conceito de família de trajetórias de um sistema nos será muito útil agora. Dado um sistema $\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial, defina

$$\Sigma|_{\mathcal{V}} := \{\mathbf{x} \in \Sigma \ | \ \mathbf{x}(t) \in \mathcal{V}, \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Não podemos dizer que a família $\Sigma|_{\mathcal{V}}$ é, necessariamente, proveniente de um sistema de controle linear. Contudo, se $\mathcal{V}$ for um subespaço A-invariante, segue que $\Sigma|_{\mathcal{V}}$ é, de fato, o conjunto de trajetórias do sistema

$$\Sigma|_{\mathcal{V}} : \dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x} + \tilde{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{V}, \quad \tilde{A} = A|_{\mathcal{V}}, \quad \tilde{B} \ \text{tal que } \operatorname{Im}\tilde{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{V},$$

pois pela A-invariância de $\mathcal{V}$ e por $\operatorname{Im}\tilde{B} \subset \mathcal{V}$, obtemos que

$$\tilde{A}\mathbf{x}(t) + \tilde{B}\mathbf{u}(t) \in \mathcal{V}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Um tal sistema é dito **subsistema** de Σ.

Assim, para um sistema $\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, considerando seu subespaço de Kalman $\mathcal{R}$, o espaço $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}$ e uma matriz K de modo que $(A + BK)|_{\mathcal{R}}$ e $\bar{A}$ tenham espectro disjunto, obtemos que é possível decompor $\mathbb{R}^n$ como a soma direta

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S},$$

sendo o subespaço $\mathcal{R}$ A-invariante e $\mathcal{S}$ $(A + BK)$-invariante. Como $\Sigma(A + BK, B) = \Sigma(A, B)$, segue que Σ pode ser decomposto em subsistemas $\Sigma|_{\mathcal{R}}$ (parte controlável) e $\Sigma|_{\mathcal{S}}$ (parte não-controlável), onde $\Sigma|_{\mathcal{R}}$ é completamente controlável, por ser a restrição de Σ ao seu subespaço de Kamlan e $\Sigma|_{\mathcal{S}}$ é da forma

$$\Sigma|_{\mathcal{S}} : \dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}, \quad \tilde{A} = A|_{\mathcal{S}},$$

cuja família de trajetórias é identificada com a de $\Sigma/\mathcal{R}$.

Deste modo, se considerarmos os sistemas Σ_1 e Σ_2 decompostos como acima, para concluir que $\Sigma_1 \sim_L \Sigma_2$, basta aplicar o Teorema 4.8 para as partes controláveis e o Teorema 4.7-i) para as partes não-controláveis de Σ_1 e Σ_2.

2) Suponha $\Sigma_1 \sim_T \Sigma_2$, seja S o homeomorfismo correspondente e assuma, sem perda de generalidade, que $S(0) = 0$. Como, pela Proposição 4.4,

$$S(\mathcal{R}_1^i) = \mathcal{R}_2^i, \;\; i = 1, 2, \ldots$$

segue que (A_1, B_1) e (A_2, B_2) possuem os mesmos índices de Kronecker. Valendo-se ainda da mesma proposição, observe que

$$S(x_1 + \mathcal{R}_1) = Sx_1 + \mathcal{R}_2, \qquad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Então, tal como no item $1)$, aplicamos a Proposição 4.2 para obter que

$$\Sigma_1/\mathcal{R}_1 \sim_T \Sigma_2/\mathcal{R}_2.$$

Por fim, aplicando o Teorema 4.7-(ii), concluimos que $s(\bar{A}_1) = s(\bar{A}_2)$ e que $\bar{A}_1/\mathcal{L}_{A_1}$ é semelhante a $\bar{A}_2/\mathcal{L}_{A_2}$.

Reciprocamente, basta considerarmos Σ_1 e Σ_2 na decomposição feita no item $i)$ e aplicar o Teorema 4.8 nas partes controláveis e o Teorema 4.7-$ii)$ nas partes não-controláveis para obtermos que Σ_1 é topologicamente conjugado a Σ_2. Isto encerra a demonstração.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 5

CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE FLUXOS AFIM-LINEARES

Neste capítulo apresentamos um método semelhante para se classificar sistemas de controle lineares. Aqui, porém, a classificação é feita para sistemas hiperbólicos e a peça chave serão os fluxos afim-lineares. Estabeleceremos que um fluxo deste tipo, quando hiperbólico, é skew conjugado à sua parte linear. Isto é usado para mostrar a classificação para tais fluxos, o que induz tal classificação topológica para sistemas de controle lineares. Os resultados deste capítulo foram estudados originalmente em [10].

5.1 Fibrados vetoriais

Antes de tratar dos fluxos e da classificação propriamente ditos, façamos alguns esclarecimentos quanto ao "ambiente" no qual estabeleceremos os resultados.

Definição 5.1 (Fibrado vetorial). *Seja $\mathcal{B}$ um espaço topológico. Por **fibrado vetorial** real de dimensão n entendemos um par $(\mathcal{E}, p)$, onde $\mathcal{E}$ é um espaço topológico, chamado espaço total, e $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ é uma aplicação contínua, chamada projeção, tal que para cada $b \in \mathcal{B}$, a "fibra" $p^{-1}(b)$ tem a estrutura de espaço vetorial real n-dimensional. Exigimos ainda a condição de trivialidade local, isto é, para cada $b \in \mathcal{B}$ existe uma vizinhança U de b e um homeomorfismo*

$$\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

tal que

i) $\pi_1 \circ \phi = p$;

ii) $\pi_2 \circ \phi : p^{-1}(b') \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais para todo* $b' \in U$.

Aqui, π_i *denota a projeção na* i*-ésima coordenada.*

Na prática, iremos abusar da notação e nos referir ao fibrado vetorial $(\mathcal{E}, p)$ apenas por $\mathcal{E}$, visando simplicidade.

Lidaremos apenas com fibrados vetoriais do tipo produto (ou fibrados triviais), cujo espaço base é um espaço topológico $\mathcal{B}$, o espaço total é considerado como sendo $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ e a aplicação p é a projeção na primeira coordenada.

Obviamente, para cada $b \in \mathcal{B}$ a fibra

$$p^{-1}(b) = \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

tem estrutura de espaço vetorial e a condição de trivialidade local é satisfeita escolhendo $U = \mathcal{B}$ como a vizinhança necessária e

$$\phi : p^{-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$$

a idendtidade.

Aqui, será importante a noção de "soma direta", amplamente conhecida como soma de Whitney. Dados dois fibrados vetoriais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ sobre um mesmo espaço base $\mathcal{B}$, com projeções p e p' e dimensões n e m, respectivamente, a **soma de Whitney** de tais fibrados é o fibrado sobre $\mathcal{B}$ dado por

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' := \{(u, u') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}' \mid p(u) = p'(u')\}.$$

As fibras sobre cada $b \in \mathcal{B}$ são dadas por $p^{-1}(b) \oplus p'^{-1}(b)$, que são isomorfas a $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$.

Um **subfibrado vetorial** de um fibrado vetorial $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B}$ é um subespaço $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ que seja ele próprio um fibrado vetorial, com projeção dada por

$$p|_{\mathcal{E}'} : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{B},$$

onde p é a projeção do fibrado $\mathcal{E}$.

Agora temos condições apropriadas para definir o tipo de fluxo e o tipo de conjugação que utilizaremos para estudar a classificação de sistemas de controle lineares utilizando os fluxos induzidos.

5.2 Classificação de sistemas de controle lineares via fluxos

Sistemas de controle lineares, principal objeto de estudo deste texto, definem fluxos afim-lineares. Além disso, se a parte linear do sistema de controle for hiperbólica, os teoremas (5.7) e (5.8) nos fornecem uma classificação com respeito à conjugação skew topológica.

Definição 5.2 (Fluxo produto cruzado). *Seja $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ um fibrado vetorial com espaço base $\mathcal{B}$ métrico e compacto. Um fluxo linear sobre $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ é dito um **fluxo produto cruzado** se for da forma*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \\ (t, b, x) &\longmapsto (\theta_t(b), \varphi_t(b, x)), \end{aligned}$$

onde θ é um fluxo no espaço base $\mathcal{B}$, chamado fluxo base, e

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

satisfaz a propriedade do cociclo, i.e.,

$$\varphi_{t+s}(b, x) = \varphi_t(\theta_s(b), \varphi_s(b, x)).$$

Se Φ for linear na variável x, dizemos que Φ é um fluxo produto cruzado linear.

Estamos interessados num tipo ainda mais específico de fluxo:

Definição 5.3 (Fluxo afim-linear). *Uma aplicação contínua*

$$\Psi = (\theta, \psi) : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n,$$

(onde $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ é um fibrado vetorial com espaço base $\mathcal{B}$ métrico e compacto) é dita um ***fluxo produto cruzado afim-linear****, ou* ***fluxo afim-linear****, em $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ se existir um fluxo produto cruzado linear*

$$\Phi = (\theta, \varphi) : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$$

e uma função

$$f : \mathcal{B} \longrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

(chamada de termo afim) tal que

$$f(b, t+s) = f(\theta_s(b), t), \quad \forall b \in \mathcal{B}, \tag{5.2-1}$$

para quase todos $t, s \in \mathbb{R}$. E ainda, para todos $(t, b, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$,

$$\Psi_t(b, x) = \Phi_t(b, x) + \int_0^t \Phi_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f(b, \tau)\right) d\tau,$$

sendo que $f(b, t)$ denota a função $f(b)(s)$, $s \in \mathbb{R}$ e a integral acima é considerada apenas na variável do $\mathbb{R}^n$.

Portanto, como os fluxos base coincidem, em termos de suas coordenadas Ψ é escrita como

$$\Psi_t(b, x) = \left(\theta_t(b), \varphi_t(b, x) + \int_0^t \varphi_{t-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau\right).$$

Veja que Ψ realmente define um fluxo em $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\Psi_0(b, x) = \Phi_0(b, x) + \int_0^0 \Phi_{-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau = (b, x), \quad \forall (b, x) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\begin{aligned}
&\Psi_{t+s}(b, x) = \\
&= \Phi_{t+s}(b, x) + \int_0^{t+s} \Phi_{t+s-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau \\
&= \Phi_t \circ \Phi_s(b, x) + \int_0^s \Phi_{t+s-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau + \int_s^{t+s} \Phi_{t+s-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau \\
&= \Phi_t \circ \Phi_s(b, x) + \int_0^s \Phi_t \circ \Phi_{s-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau + \int_0^t \Phi_{t-\tau}(\theta_{\tau+s}(b), f(b, \tau+s)) d\tau \\
&= \Phi_t \circ \Phi_s(b, x) + \int_0^s \Phi_t \circ \Phi_{s-\tau}(\theta_\tau(b), f(b, \tau)) d\tau + \int_0^t \Phi_{t-\tau}(\theta_{\tau+s}(b), f(\theta_s(b), \tau)) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_t\left(\theta_s(b), \varphi_s(b,x) + \int_0^s \varphi_{s-\tau}(\theta_\tau(b), f(b,\tau))d\tau\right) \\
&= \Psi_t(\Psi_s(b,x)) \\
&= \Psi_t \circ \Psi_s(b,x).
\end{aligned}$$

Note também que, como Φ é contínua, então Ψ é contínua se, e somente se, o termo

$$a(t,b) := \int_0^t \Phi_{t-s}(\theta_s(b), f(b,s))ds, \;\; t \in \mathbb{R}, \;\; b \in \mathcal{B}$$

é contínuo.

Seja Ψ um fluxo afim-linear em $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ e considere valores iniciais $(b, x_1), (b, x_2) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$. Então a diferença das soluções correspondentes é uma solução do sistema homogêneo com valor inicial $(b, x_1 - x_2) \in B \times \mathbb{R}^n$. Ou seja

$$\Psi_t(b,x_1) - \Psi_t(b,x_2) = \Phi_t(b, x_1 - x_2), \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\Psi_t(b,x_1) - \Psi_t(b,x_2) &= \Phi_t(b,x_1) + \int_0^t \Phi_{t-\tau}\left(\theta_{t-\tau}(b), f(b,\tau)\right) d\tau \\
&\quad -\Phi_t(b,x_2) - \int_0^t \Phi_{t-\tau}\left(\theta_{t-\tau}(b), f(b,\tau)\right) d\tau \\
&= \Phi_t(b, x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Definição 5.4 (Skew conjugação). *Sejam $\Psi^1 = (\theta^1, \psi^1)$ e $\Psi^2 = (\theta^2, \psi^2)$ dois fluxos afim-lineares sobre fibrados vetoriais $\mathcal{B}^1 \times \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}^2 \times \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que Ψ^1 e Ψ^2 são* ***topologicamente skew conjugados*** *se existir um homeomorfismo*

$$H : \mathcal{B}^1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{B}^2 \times \mathbb{R}^n$$

tal que

$$H\left(\Psi_t^1(b,x)\right) = \Psi_t^2\left(H(b,x)\right),$$

ou seja, H é da forma $(h_{\mathcal{B}}, h)$, onde

$$h_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^1 \longrightarrow \mathcal{B}^2$$

e

$$h : \mathcal{B}^1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

satisfazem

$$h_{\mathcal{B}}(\theta_t^1(b)) = \theta_t^2(h_{\mathcal{B}}(b))$$

$$h\left(\theta_t^1(b), \psi_t^1(b,x)\right) = \psi_t^2\left(h_B(b), h(b,x)\right),$$

para todos $t \in \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{B}^1$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Note que a condição sobre $h_{\mathcal{B}}$ garante que os fluxos base são conjugados.

Dado um fluxo linear-afim sobre $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$, suponha que $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ admita uma decomposição em somas de Whitney de dois subfibrados vetoriais

$$\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n = \mathcal{L}^1 \oplus \mathcal{L}^2,$$

onde $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$ são invariantes sob o fluxo linear Φ, ou seja, para cada $b \in \mathcal{B}$ podemos decompor $\mathbb{R}^n$ como

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{L}_b^1 \oplus \mathcal{L}_b^2,$$

sendo que para cada $b \in \mathcal{B}$ a componente $\mathcal{L}_b^i \subset \mathbb{R}^n$ é identificada com $\{b\} \times \mathcal{L}_b^i \subset \mathcal{L}^i$, $i = 1, 2$. Além disso, dizer que cada $\mathcal{L}^i$ é invariante por Φ significa que

$$\Phi_t(b,x) \in \mathcal{L}^i_{\theta_t(b)},$$

para $x \in \mathcal{L}_b^i$ e $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Denotaremos a restrição dos fluxos lineares a $\mathcal{L}^i$ por Φ_t^i e, dada a aplicação linear

$$x \longmapsto \varphi_t^i(b,x) : \mathcal{L}_b^i \longrightarrow \mathcal{L}^i_{\theta_t(b)},$$

denotamos sua norma por $\|\Phi_t^i(b,\cdot)\|$. Também decompomos o termo afim na forma

$$f(b,s) = f^1(b,t) + f^2(b,t),$$

onde $f^i(b,t) \in \mathcal{L}_b^i$, $t \in \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{B}$.

Se f^i satisfizer a condição (5.2-1), então $\mathcal{L}^i$ também é invariante pelo fluxo afim-linear

$$\Psi_t^i(b,x) = \Phi_t^i(b,x) + \int_0^t \Phi_{t-\tau}^i\left(b, f^i(b,\tau)\right) d\tau, \quad i = 1,2.$$

Dizemos que o subfibrado $\mathcal{L}^i$ é estável se existirem constantes $\alpha > 0$ e $K > 1$ tais que para o fluxo Φ^i restrito a E^i valha

$$\|\Phi_t^i(b,\cdot)\| \leq Ke^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0 \ \text{ e } \forall b \in \mathcal{B}, \quad i = 1,2.$$

Com isto, podemos provar o próximo resultado que nos mostra a existência e dependência contínua de soluções limitadas.

Proposição 5.5. *Seja Ψ um fluxo afim-linear para o qual se tenha*

i) A parte linear Φ de Ψ admite uma decomposição em subfibrados invariantes $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$, sendo $\mathcal{L}^1$ estável.

ii) O termo afim satisfaz a propriedade (5.2-1) e existe $M > 0$ tal que

$$\|f^1(b)\|_\infty \leq M, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Então para cada $b \in \mathcal{B}$ existe uma única solução limitada $e^1(b,t)$, $t \in \mathbb{R}$ para o fluxo Ψ^1.

Se a aplicação

$$b \longmapsto \int_{-\infty}^0 \varphi_{-\tau}^1\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é contínua, então a aplicação $e^1 : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua.

Demonstração: Primeiramente note que o fluxo linear Φ tem somente a solução trivial limitada em $\mathbb{R}$. De fato, suponha $\varphi_t(b,x)$ uma solução limitada em $\mathbb{R}$. Então, para $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\varphi_0(b,x)\| \\ &= \|\varphi_t\left(\theta_{-t}(b), \varphi_{-t}(b,x)\right)\| \\ &\leq \|\Phi_t^1(\theta_{-t}(b),\cdot)\| \cdot \|\varphi_{-t}(b,x)\| \\ &\leq Ke^{-\alpha t} \sup_{s\in\mathbb{R}} \|\varphi_s(b,x)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Portanto, $x = 0$. Deste fato observamos que a unicidade fica garantida de imediato, pois como mostramos, a diferença entre duas soluções limitadas é uma solução limitada da equação homogênea, que neste caso é nula.

Vamos provar a existência. Defina $e^1 : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pondo

$$e^1(b,t) := \int_{-\infty}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau.$$

Veja que a integral existe, pois para qualquer $b \in \mathcal{B}$ e $\tau \leq t$ vale

$$\|\varphi^1_{t-\tau}(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau))\| \leq \|\Phi^1_{t-\tau}(\theta_\tau(b),\cdot)\| \sup \|f^1(b,\tau)\| \leq KMe^{\alpha(t-\tau)},$$

portanto e^1 está bem definida.

Para demonstrarmos a continuidade de e^1, sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $b_0 \in \mathcal{B}$ e denote a função característica em $(-\infty, t]$ por $\chi_{(-\infty,t]}$. Assim,

$\|e^1(b,t) - e^1(b_0,t_0)\| =$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{-\infty}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau - \int_{-\infty}^{t_0} \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b_0), f^1(b_0,\tau)\right) d\tau \right\| \\
&\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,t]}(s) \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau - \int_{\mathbb{R}} \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau \right\| \\
&\quad + \left\| \int_{0}^{t_0} \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau - \int_{0}^{t_0} \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b_0), f^1(b_0,\tau)\right) d\tau \right\| \\
&\quad + \left\| \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau - \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b_0), f^1(b_0,\tau)\right) d\tau \right\|
\end{aligned}$$

Note que na primeira parcela os integrandos são limitados e que

$$\chi_{(-\infty,t]}(s) \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) \longrightarrow \chi_{(-\infty,t_0]}(s) \varphi^1_{t_0-\tau}\left(\theta_\tau(b_0), f^1(b_0,\tau)\right)$$

quando $(b,t) \longrightarrow (b_0,t_0)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que a primeira parcela converge a 0 quando $(b,t) \longrightarrow (b_0,t_0)$. Para a segunda parcela, basta aplicarmos o mesmo raciocínio. Quanto à terceira, veja que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{t_0}\left(b, \varphi^1_{-\tau}(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau - \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{t_0}\left(b_0, \varphi^1_{-\tau}(\theta_\tau(b_0), f^1(b_0,\tau)\right) d\tau \right\| \\
= &\left\| \varphi^1_{t_0}\left(b, \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau - \varphi^1_{t_0}\left(b_0, \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}(\theta_\tau(b_0), f^1(b_0,\tau)\right) d\tau \right\|.
\end{aligned}$$

Juntando isto com a continuidade de φ^1 e a de $b \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau$ garantimos que esta parcela também converge para 0 quando $(b,t) \longrightarrow (b_0,t_0)$.

Para concluir o resultado, devemos apenas mostrar que e^1 tal como definida é uma solução do fluxo Ψ^1. Como

$$\begin{aligned} e^1(b,t) &= \int_{-\infty}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau \\ &= \int_{0}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau + \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau \\ &= \int_{0}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau + \varphi^1_t\left(b, \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right)\right) d\tau \\ &= \int_{0}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau + \varphi^1_t(b,x), \end{aligned}$$

para

$$x := e(b,0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), f^1(b,\tau)\right),$$

o que mostra que f^1 satisfaz a condição (5.2-1) exigida na definição de fluxo afim-linear.

∎

Para obtermos os resultados desejados em conjugação topológica, precisamos deste resultado para sistemas hiperbólicos. Isto é feito na seguinte

Proposição 5.6. *Considere Ψ um fluxo afim-linear tal que*

i) a parte linear Φ de Ψ seja hiperbólica e, portanto, admita uma decomposição em subfibrados vetoriais invariantes $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$, onde $\mathcal{L}^1$ é estável, $\mathcal{L}^2$ é instável e são tais que as restrições Φ^1 e Φ^2 de Φ a $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$, respectivamente, satisfaçam

$$\|\Phi^1_t(b,\cdot)\| \leq K_1 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

e

$$\|\Phi^2_t(b,\cdot)\| \leq K_2 e^{\alpha t}, \quad t \leq 0$$

para constantes $\alpha > 0$, $K_1, K_2 \geq 1$ e $\forall b \in \mathcal{B}$.

ii) os termos f^1 e f^2 da decomposição de f satisfaçam condição (5.2-1) e exista $M > 0$ com

$$\|f(b)\|_\infty \leq M, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Então para todo $b \in \mathcal{B}$ existe uma única solução limitada $e(b,t)$, $t \in \mathbb{R}$, para o fluxo Ψ.

Se as aplicações dadas por

$$b \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^{1}_{-\tau}\left(\theta_{\tau}(b), f(b,\tau)\right) d\tau \quad e \quad b \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^{2}_{\tau}\left(\theta_{-\tau}(b), f(b,-\tau)\right) d\tau$$

forem contínuas, então a aplicação $e : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

Demonstração: Inicialmente, como

$$\|f^1(b,t)\| \leq \|f(b,t)\| \quad \text{e} \quad \|f^2(b,t)\| \leq \|f(b,t)\|,$$

segue que

$$\|f^1(b,t)\| \leq M \quad \text{e} \quad \|f^2(b,t)\| \leq M, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Aplicando a proposição anterior, segue que existe uma solução limitada $e^1(b,t)$, $t \in \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{B}$ para o fluxo Ψ^1. Se invertermos o tempo em Ψ^2, podemos aplicar o mesmo raciocínio para concluir que existe uma única solução limitada $e^2(b,t)$. Isto nos fornece a solução limitada

$$e(b,t) := e^1(b,t) + e^2(b,t)$$

para Ψ. Por outro lado, uma solução limitada de Ψ decompõe-se como soma de soluções limitadas de Ψ^1 e Ψ^2, o que garante a unicidade de $e(b,t)$. Para a continuidade, basta aplicar a mesma argumentação da proposição anterior para os fluxos Ψ^1 e Ψ^2, sendo este último com o tempo invertido.

■

Vamos agora mostrar que fluxos afim-lineares hiperbólicos são topologicamente skew conjugados com suas partes lineares. Este resultado nos permitirá exibir uma classificação para sistemas de controle alternativa àquela presente no capítulo 4.

Teorema 5.7. *Seja Ψ um fluxo afim-linear e suponha que*

i) a parte linear Φ de Ψ é hiperbólica com subfibrado estável $\mathcal{L}^1$ e subfibrado instável $\mathcal{L}^2$;

ii) os termos f^1 e f^2 da decomposição de f são tais que

$$f^i(b, t+s) = f^i(\theta_s(b), t),$$

para todo $b \in \mathcal{B}$ e quase todos $t, s \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, e que exista $M > 0$ para o qual

$$\|f(b)\|_\infty \leq M \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

iii) as aplicações $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$b \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), f(b,\tau)\right) d\tau \quad e \quad b \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^2_{\tau}\left(\theta_{-\tau}(b), f(b,-\tau)\right) d\tau$$

são contínuas.

Então, Ψ e sua parte linear Φ são topologicamente skew conjugadas.

Demonstração: Como os fluxos base de Ψ e Φ coincidem, podemos considerar a coordenada $h_{\mathcal{B}}$ de H como sendo a identidade. Agora, defina a coordenada h como sendo a translação com respeito à única solução limitada $e(b,t)$, isto é,

$$h(b,x) = x - e(b,0), \quad (b,x) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n.$$

Segue do item $iii)$ que h é uma aplicação contínua. Assim sendo,

$$\begin{aligned} H : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \\ (b,x) &\longmapsto (b, h(b,x)) \end{aligned}$$

é contínua. Além disso, tem inversa contínua dada por

$$\begin{aligned} H^{-1} : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \\ (b,x) &\longmapsto (b, x + e(b,0)). \end{aligned}$$

De fato,

$$H\left(H^{-1}(b,x)\right) = H\left(b, x + e(b,0)\right) = \left(b, x + e(b,0) - e(b,0)\right) = (b,x)$$

e

$$H^{-1}\left(H(b,x)\right) = H^{-1}\left(b, x - e(b,0)\right) = \left(b, x - e(b,0) + e(b,0)\right) = (b,x),$$

portanto, H é um homeomorfismo.

O resultado ficará demonstrado se provarmos que H é uma skew conjugação topológica para os fluxos Ψ e Φ. Para isto, veja que a diferença de soluções para valores iniciais x e $e(b,0)$ é uma solução do sistema homogêneo com valor inicial $(b, x - e(b,0)) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\Psi_t(b,x) - \Psi_t(b, e(b,0)) = \Phi_t(b, x - e(b,0)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{aligned}
e(\theta_t(b),0) &= e^1(\theta_t(b),0) + e^2(\theta_t(b),0) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_{t+\tau}(b), f^1(\theta_t(b),\tau)\right) d\tau + \int_{-\infty}^{0} \varphi^2_{-\tau}\left(\theta_{t+\tau}(b), f^2(\theta_t(b),\tau)\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_{t+\tau}(b), f^1(b,t+\tau)\right) d\tau + \int_{-\infty}^{0} \varphi^2_{-\tau}\left(\theta_{t+\tau}(b), f^2(b,t+\tau)\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \varphi^1_{t-\tau}\left(\theta_{\tau}(b), f^1(b,\tau)\right) d\tau + \int_{-\infty}^{t} \varphi^2_{-\tau}\left(\theta_{\tau}(b), f^2(b,\tau)\right) d\tau \\
&= e^1(b,t) + e^2(b,t) = e(b,t),
\end{aligned}$$

obtemos que,

$$\begin{aligned}
h\left(\theta_t(b), \psi_t(b,x)\right) &= \psi_t(b,x) - e\left(\theta_t(b),0\right) \\
&= \psi_t(b,x) - e\left(b,t\right) \\
&= \psi_t(b,x) - \psi_t\left(b, e(b,0)\right) \\
&= \varphi_t\left(b, x - e(b,0)\right) \\
&= \varphi_t\left(b, h(b,x)\right).
\end{aligned}$$

Isto mostra que o homeomorfismo H realmente conjuga Ψ e Φ.

■

Deve-se notar a estreita relação existente entre o próximo teorema com o que foi feito para fluxos lineares no capítulo 2, Teorema 2.7.

Teorema 5.8. *Dois fluxos afim-lineares Ψ e $\tilde{\Psi}$ satisfazendo as condições $i)$, $ii)$ e $iii)$ do teorema anterior são topologicamente skew conjugados se, se somente se, os fluxos base são topologicamente conjugados e os subfibrados estáveis de Φ e $\tilde{\Phi}$ possuem a mesma dimensão.*

Demonstração: De fato, pelo Teorema 2.8, segue que os fluxos Φ e $\tilde{\Phi}$ são topologicamente skew conjugados (a conjugação topologica fornecida por tal teorema é, na verdade, skew topológica). Assim, basta aplicar o teorema anterior e ver que, por transitividade, os fluxos Ψ e $\tilde{\Psi}$ são topologicamente skew conjugados.

∎

Vamos agora ver formalmente como um sistema de controle linear define um fluxo afim-linear. Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U},$$

com $u : \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, sendo U compacto. Sabemos que a solução da parte homogênea

$$\dot{x} = Ax$$

é dada por

$$\varphi_t(u, x) = e^{At}x.$$

Fixando o controle $u \in \mathcal{U}$, temos que a solução geral de $\dot{x} = Ax + Bu$ é exatamente

$$\psi_t(u, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{5.2-2}$$

Com isto em mãos, é facil verificar que tal sistema define um fluxo produto cruzado afim-linear da forma

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \\ (t, u, x) &\longmapsto (\theta_t(u), \psi_t(u, x)), \end{aligned}$$

onde $\theta_t(u)$ é o shift em u por t, isto é,

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R} \times \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ (t, u) &\longmapsto \theta_t(u) := u(t + \cdot) \end{aligned}$$

e $\psi_t(u, x)$ é a solução dada em (5.2-2).

Basta considerar o fluxo produto cruzado linear

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \\ (t, u, x) &\longmapsto (\theta_t(u), \varphi_t(u, x)) \end{aligned}$$

com o mesmo fluxo base descrito acima (shift) e $\varphi_t(u, x)$ definida por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, u, x) &\longmapsto e^{At}x \end{aligned}$$

juntamente com a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U} &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto f(u, t) := Bu(t) \end{aligned}$$

e notar que

$$\psi_t(u, x) = \varphi_t(u, x) + \int_0^t \varphi_{t-\tau}\left(\theta_\tau(u), f(u, \tau)\right) d\tau$$

e, portanto,

$$\Psi_t(u, x) = \Phi_t(u, x) + \int_0^t \Phi_{t-\tau}\left(\theta_\tau(u), f(u, \tau)\right) d\tau.$$

Como

$$f(u, t+s) = Bu(t+s) = B\theta_t u(s) = f\left(\theta_s(u), t\right),$$

para toda $u \in \mathcal{U}$ e quase todos $t, s \in \mathbb{R}$, segue que Ψ definido deste modo é realmente um fluxo produto cruzado afim-linear.

O próximo resultado fornece a classificação topológica para sistemas de controle lineares com respeito à conjugação skew topológica.

Teorema 5.9. *Considere o sistema de controle*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ compacto e sejam Ψ e Φ os fluxos associados. Se o fluxo Φ é hiperbólico (ou seja, a matriz A é hiperbólica), então Ψ e Φ são topologicamente conjugados.

Dados dois sistemas de controle desse tipo, estes são topologicamente skew conjugados se, e *somente se, os fluxos shift no espaço base $\mathcal{U}$ são topologicamente skew conjugados e as dimensões dos subfibrados estáveis é a mesma para ambos os sistemas.*

Demonstração: Este resultado é uma consequência imediata dos teoremas (5.7) e (5.8). Tudo o que devemos fazer é verificar que as hipóteses são plenamente satisfeitas pelo fluxo afim-linear que acabamos de definir.

Note que a hiperbolicidade é assumida por hipótese e que a propriedade exigida do termo afim,

$$f(u, t+s) = f(\theta_s(u), t),$$

já foi demonstrada. Como $f(u,t) = Bu(t)$ é linear, as projeções nos subfibrados estável e instável são determinados pelas projeções de B, e disto segue que as projeções em tais subfibrados são ambas lineares. Consequentemente, as projeções f^1 e f^2 satisfazem

$$f^1(u, t+s) = f^1(\theta_s(u), t) \ \ \text{e} \ \ f^2(u, t+s) = f^2(\theta_s(u), t).$$

Resta apenas a condição de continuidade das aplicações

$$u \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), Bu(\tau)\right) d\tau \ \ \text{e} \ \ u \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^2_{\tau}\left(\theta_{-\tau}(b), Bu(\tau)\right) d\tau.$$

Note que o integrando em

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), Bu(\tau)\right) d\tau = \int_{0}^{\infty} \varphi^1_{\tau}\left(\theta_{-\tau}(b), Bu(\tau)\right) d\tau$$

é limitado por

$$\begin{aligned}
\|\varphi^1_\tau\left(\theta_{-\tau}(b), Bu(\tau)\right)\| &\leq \|\Phi^1_s(\theta_{-\tau}(u), \cdot)\| \cdot \|Bu(\tau)\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha t} \cdot \sup_{\tau \in U} \|Bu(\tau)\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha t} \cdot \|B\| \cdot \sup_{\tau \in U} \|u(\tau)\|.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\tau\left(\theta_{-\tau}(u_n), f(u_n, \tau)\right) - \varphi_\tau\left(\theta_{-\tau}(u_0), f(u_0, \tau)\right)\| &= \|e^{A\tau} f(u_n, \tau) - e^{A\tau} f(u_o, \tau)\| \\
&= \|e^{A\tau} B(u_n(\tau) - e^{A\tau} Bu_0(\tau)\|
\end{aligned}$$

$$= \quad \|e^{A\tau}B\left(u_n(\tau) - u_0(\tau)\right)\|,$$

a continuidade de $e^{At}B$ garante a convergência pontual do integrando em questão quando há a convergência pontual de $u_n(\tau)$ para $u_0(\tau)$ em $\mathcal{U}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$u \longmapsto \int_{-\infty}^{0} \varphi^1_{-\tau}\left(\theta_\tau(b), Bu(\tau)\right) d\tau$$

é contínua. De forma análoga mostramos a continuidade da segunda aplicação. Isto encerra a demonstração.

■

Observação: Veja, por fim, que podemos explicitar a aplicação de conjugação, entre um sistema hiperbólico $\dot{x} = Ax + Bu$ e sua parte linear $\dot{x} = Ax$, a qual é dada por

$$\begin{aligned} H : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \\ (u, x) &\longmapsto (\mathrm{Id}, h), \end{aligned}$$

onde $\mathrm{Id} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ é a aplicação identidade e $h : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por

$$h(u, x) = x - e(u, 0),$$

sendo que

$$e(u, t) := -A^{-1}Bu(t).$$

De fato, como

$$e(\theta_t(u), 0) = -A^{-1}\theta_t(u)(0) = -A^{-1}Bu(t) = e(u, t)$$

e

$$\Psi_t(u, x) - \Psi_t(u, -A^{-1}Bu(0)) = \Phi_t(b, x + A^{-1}Bu(0)) = \Phi_t(b, x - e(b, 0)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\psi_t(b, x) - \psi_t\left(b, e(b, 0)\right) = \varphi_t\left(b, x - e(b, 0)\right),$$

segue que

$$\begin{aligned} h\left(\theta_t(b), \psi_t(b,x)\right) &= \psi_t(b,x) - e\left(\theta_t(b), 0\right) \\ &= \psi_t(b,x) - e\left(b, t\right) \\ &= \psi_t(b,x) - \psi_t\left(b, e(b,0)\right) \\ &= \varphi_t\left(b, x - e(b,0)\right) \\ &= \varphi_t\left(b, h(b,x)\right), \end{aligned}$$

o que prova ser H uma conjugação entre Ψ e Φ.

APÊNDICE A

DUALIDADE E PRODUTO INTERNO

Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Ao conjunto de todos os funcionas lineares $f : \mathcal{X} \to \mathbb{F}$ damos o nome de **espaço dual** a $\mathcal{X}$, denotando por $\mathcal{X}'$. É rotineiro verificar que $\mathcal{X}'$ com as operações

$$(f_1 + f_2)x := f_1 x + f_2 x, \quad f_i \in \mathcal{X}', \quad x \in \mathbb{F},$$

$$(cf)x := c(fx), \quad f \in \mathcal{X}', \quad x \in \mathcal{X}, \quad c \in \mathbb{F},$$

torna-se espaço vetorial.

Se $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base para $\mathcal{X}$, a **base dual** correspondente para $\mathcal{X}'$ é dada pelo único conjunto $B' = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{X}'$ tal que

$$f_i x_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Definição A.1 (Aplicação dual). *Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $W : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é linear, definimos sua **aplicação dual** $W' : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ pondo*

$$W'(g) := gW, \quad g \in \mathcal{Y}'.$$

Note que a definição é consistente pois g é uma aplicação de $\mathcal{Y}$ em $\mathbb{F}$. Em termos matriciais, verifica-se facilmente que a matriz associada a W' na base B' é exatamente a transposta da matriz associada a W na base B, i.e, $[W']_{B'} = [W]_B^T$.

Definição A.2 (Anulador). *Seja $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ um subespaço vetorial. O **anulador** de $\mathcal{R}$, denotado $\mathcal{R}^\perp$, é o subespaço de $\mathcal{X}'$*

$$\mathcal{R}^\perp := \{f \in \mathcal{X}' \mid f(r) = 0 \;\; \forall r \in \mathcal{R}\}.$$

É imediato verificar que $\{0\}^\perp = \mathcal{X}'$ e $\mathcal{X}^\perp = \{0\}$.

Proposição A.3. *Se $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ são subespaços vetoriais, então*

$$(\mathcal{R} + \mathcal{S})^\perp = \mathcal{R}^\perp \cap \mathcal{S}^\perp.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} f(t) = 0 \;\; \forall t \in \mathcal{R} + \mathcal{S} \;\; &\iff \;\; f(r+s) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \\ &\iff \;\; f(r) + f(s) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Em particular, para $s = 0$ temos $f(r) = 0$ para todo $r \in \mathcal{R}$. Do mesmo modo, para $r = 0$ vale que $f(s) = 0$ para todo $s \in \mathcal{S}$. Ou seja,

$$f \in (\mathcal{R} + \mathcal{S})^\perp \Rightarrow f \in \mathcal{R}^\perp \cap \mathcal{S}^\perp$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}^\perp \cap \mathcal{S}^\perp \;\; &\Rightarrow \;\; f(r) = 0 \;\; \text{e} \;\; f(s) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \\ &\Rightarrow \;\; f(r) + f(s) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \\ &\Rightarrow \;\; f(r+s) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

o que prova o desejado.

■

Esta proposição nos diz que a aplicação que leva um subespaço de $\mathcal{X}$ em seu anulador (em $\mathcal{X}'$) simplesmente associa o menor subespaço contendo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ ao maior subespaço contido em $\mathcal{R}^\perp$ e $\mathcal{S}^\perp$ simultaneamente.

Proposição A.4. *Se $W : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é linear, então $(ImW)^\perp = \ker W'$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Im}W)^\perp &= \{g \in \mathcal{Y}' \mid gy = 0, \;\; \forall y \in \mathrm{Im}W\} \\
&= \{g \in \mathcal{Y}' \mid gWx = 0, \;\; \forall x \in \mathcal{X}\} \\
&= \{g \in \mathcal{Y}' \mid W'gx = 0, \;\; \forall x \in \mathcal{X}\} \\
&= \ker W'.
\end{aligned}$$

■

Podemos munir o espaço $\mathcal{X}$ de um produto interno. Isto permite-nos fazer uma outra identificação de $\mathcal{X}$ com seu dual $\mathcal{X}'$.

Assuma que $\mathcal{X}$ seja um espaço vetorial complexo e considere $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para $\mathcal{X}$. Se $x, y \in \mathcal{X}$ são tais que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

definimos o **produto interno** de x por y pondo

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b_i}.$$

Tal produto é linear na primeira variável e antilinear na segunda variável (o que alguns autores costumam chamar de forma sesquiliear).

Com a base $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ fixada, podemos induzir um isomorfismo

$$\mathcal{X}' \approx \mathcal{X} : f \longmapsto x$$

que associa para cada $f \in \mathcal{X}'$ o vetor

$$x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) x_i$$

de $\mathcal{X}$. Sob este isomorfismo, podemos identificar $\mathcal{X}'$ com espaço $\mathcal{X}$ e escrever o produto interno $\langle x, y\rangle$ como $f(\bar{y})$, onde a barra representa a conjugação de todos os coeficentes de y na base B fixada, de fato

$$f(\bar{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{b_i} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{b_i} f(x_i) = \langle x, y\rangle,$$

onde $(b_1, \ldots, b_n)$ são os coeficientes de y na base B.

Vale observar também que a norma euclidiana de $x \in \mathcal{X}$ é dada por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{(x^*)'x}.$$

Se $\mathcal{X}$ é um espaço real munido de produto interno, então $W : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é dita **simétrica** se $\langle x, Wy\rangle = \langle Wx, y\rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}$. Ou, equivalentemente,

$$f(Wy) = (Wx)'y = fW'y.$$

O que implica $W' = W$. Portanto, W é simétrica se, e somente se, $W' = W$.

Uma aplicação simétrica W é dita **positiva definida** ($W > 0$) se $\langle x, Wx\rangle > 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ não-nulo. Caso $\langle x, Wx\rangle \geq 0$ para todo elemento não-nulo $x \in \mathcal{X}$, dizemos que W é **positiva semidefinida** ($W \geq 0$). Pelo Teorema Espectral, cf. [13], $W \geq 0$ e $\langle x, Wx\rangle = 0$ implicam $x \in \ker W$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AGRACHEV A.; SACHKOV Y. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 87. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[2] ARNOLD, V. I. *Ordinary Differential Equations*. Cambridge: MIT Press, 1973.

[3] AYALA, V.; COLONIUS, F.; KLIEMANN, W. *On topological equivalence of linear flows with applications to bilinear control systems*, J. Dynam. Control Systems 13, pp. 337-362 (2007).

[4] BRUNOVSKÝ, P. *A classification of linear controllable systems*. Kybernetika (Prague) 3, 173-187 (1970).

[5] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.

[6] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária, 4.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[7] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

[8] KUIPER, N. H., *The topology of the solutions of a linear differential equation on* $\mathbb{R}^n$. "Manifolds-Tokyo 1973", pp. 195-203, Proceedings of the Internarional Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1975.

[9] ROBINSON, C. *Dynamical systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. 2.ed., CRC Press: 1999.

[10] SANTANA, A. J.; COLONIUS, F. *Topological conjugacy for affine-linear flows and control systems*. Communications on pure and applied analysis, volume 10, number 3, pp. 847-857 (2011).

[11] SANTANA, A. J.; COLONIUS, F. *Stability and topological conjugacy for affine differential equations*. Bol. Soc. Paran. Mat., Essays (3s) volume 26 1-2, pp. 141-151 (2008).

[12] WILLEMS, J. C. *Topological Classification and Structural Stability of Linear Systems*. J. Differential Equations 35, pp. 306-318 (1980).

[13] WONHAM, W. M. *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach*. Lecture Notes in Economics, nº 101, New York: Springer-Verlag, 1974.

ÍNDICE REMISSIVO