UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

RENAN HENRIQUE MARTINS

Alguns Resultados de Instabilidade Linear para Modelos de Evolução Não-Lineares

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Alguns Resultados de Instabilidade Linear para Modelos de Evolução Não-Lineares

RENAN HENRIQUE MARTINS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá-PR
2018

Resumo

A presente dissertação visa estudar dois métodos de instabilidade linear para modelos evolutivos que podem ser reduzidos em equações Hamiltonianas abstratas. Para tal equação, podemos escrevê-la como um problema de autovalores e o principal objetivo consiste em encontrar soluções não nulas (autofunções) para esse problema cujo autovalor correspondente possui parte real positiva. Nossa abordagem permite o estudo da instabilidade linear transversal para ondas solitárias para a equação generalizada de Kadomtsev-Petviashvili do tipo I e a instabilidade linear de ondas viajantes solitárias para a equação generalizada de Korteweg-de Vries.

Palavras-chave: Instabilidade linear, sistema Hamiltoniano, ondas solitárias

ABSTRACT

The main goal of this work is to study two methods of linear instability for evolution models which can be reduced as abstract Hamiltonian equations. To do so, we can rewrite the equation as an eigenvalue problem and the main focus consists in finding nonzero solutions (eigenfunctions) for this problem whose correspondent eigenvalue has positive real part. Our approach allows us to study the transversal linear instability to the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation of I kind and the linear instability of solitary traveling wave solutions for the generalized Korteweg-de Vries equation.

Keywords: Linear instability, Hamiltonian systems, solitary wave

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O principal foco desta dissertação é estudar resultados de instabilidade linear para modelos evolutivos que podem ser escritos através de um sistema Hamiltoniano abstrato

$$u_t = JE'(u), \tag{1.1}$$

onde u é uma função que para todo $t \in [0, +\infty)$ tem-se $u(t) \in H$, H é um espaço de Hilbert, J é um operador linear anti-simétrico e E' representa a derivada de Fréchet de um funcional suave e definido no espaço de Hilbert H.

Num contexto específico, nosso intuito é considerar uma forma de linearização do sistema Hamiltoniano (1.1) em sua forma linearizada dado por

$$v_t = JLv, \tag{1.2}$$

onde L é considerado ser um operador linear fechado e possivelmente auto-adjunto definido em H com domínio $D(L)$. Com isto, considerando soluções da forma $v(x,t) = e^{\sigma t} w(x)$, $\sigma \in \mathbb{C}$, e substituindo na equação (1.2) chegamos ao seguinte problema de autovalores

$$JLw = \sigma w. \tag{1.3}$$

Definição 1.1. *Dizemos que o problema de autovalores* (1.3) *é linearmente estável (espectralmente estável) se o espectro do operador* JL *está inteiramente contido no eixo imaginário de* $\mathbb{C}$. *Caso exista* $\sigma \in \mathbb{C}$ *e um* $w \neq 0$ *tal que* $Re(\sigma) > 0$ *que resolve o problema* (1.3), *dizemos que o problema é linearmente instável (espectralmente instável).*

Supondo, então, que J é invertível, o problema (1.3) é reduzido em resolver o problema equivalente

$$Lw = \sigma J^{-1} w. \tag{1.4}$$

Na literatura atual, determinados resultados para a instabilidade linear relacionados ao problema de autovalores (1.3) fazem o uso dessa característica importante em relação ao operador J. De fato, Grillakis, Shatah and Strauss em [8] e [9] determinaram condições suficientes para a instabilidade linear para o caso em que J é um operador linear invertível. Nessa abordagem, é necessário conhecer a quantidade e multiplicidade de autovalores negativos do operador L. Além disso, a quantidade de simetrias presente na equação (em geral rotação e translação) está relacionada com a dimensão do núcleo do operador L também é de suma importância na análise. Neste caso, se $n(L)$ denota a quantidade de autovalores negativos (contando multiplicidades), D é um ente relacionado com as quantidades conservadas presentes no sistema (1.1) e a diferença $n(L) - p(D)$ é um número ímpar, tem-se a instabilidade linear no sentido da Definição 1.1. Como exemplo ilustrativo, consideremos a equação de Schrödringer não linear

$$iu_t + u_{xx} + |u|^{p-1}u = 0, \tag{1.5}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, $u = u(x,t)$ e $p > 2$. Esta equação aparece em vários domínios do campo da física matemática, por exemplo, no estudo de propagação de feixes de laser (ver [11]) e na propagação de uma onda eletromagnética plana em um meio não-linear (ver [5]). Nesse caso, é possível escrever a equação (1.5) na forma (1.1) com

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(|u_x(x)|^2 - \frac{2}{p+1}|u(x)|^{p+1} \right) dx$$

e

$$L = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + c - p\varphi^{p-1} & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + \omega - \varphi^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, temos $\varphi = \varphi_\omega$ denota a solução da forma $u(x,t) = e^{ict}\varphi(x)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, $c > 0$ indicando a frequência da onda. A solução φ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$-\varphi'' + c\varphi - \varphi^p = 0. \tag{1.6}$$

Uma propriedade especial que necessitamos para a função φ é que ela tenha derivadas de todas as ordens e satisfaça a condição de onda *estacionária solitária*

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)=0, \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Então, usando o método da quadratura, temos que uma solução que atende todas as premissas divulgadas é

$$\varphi(x)=\left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{(p-1)}}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{(p-1)}}. \tag{1.7}$$

Observando que o tipo de onda traz apenas uma simetria (rotação), segundo a teoria de M. Grillakis, J. Shatah e W. Strauss em [8] e [9], temos a necessidade de supor apenas que o núcleo de L é apenas unidimensional e gerado por $\{0,\varphi\}$. Outro ponto importante é que $n(L)=1$ (usando as propriedades da onda e a teoria de Sturm Liouville, é possível determinar esse fato). Além disso, a referida teoria nos mostra que nesse caso temos, após alguns cálculos, que

$$D=\frac{1}{2}\frac{d}{dc}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)^2dx<0, \qquad \text{sempre que } p>5.$$

Então, como $n(L)-p(D)=1$, temos que o problema de autovalor associado é linearmente instável no sentido da Definição 1.1.

Uma consideração importante deve ser mencionada é que quando se aprofunda nas teorias em [8] e [9], o fato em que J é inversível (em verdade limitado e com inversa limitada) é imprescindível uma vez que o problema de autovalor (1.3) deve ser olhado como o problema (1.4).

Consideremos, agora, a equação de Korteweg-de Vries

$$u_t+(u^p)_x+u_{xxx}=0, \tag{1.8}$$

onde $u:\mathbb{R}\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função real e $p>2$. Esta equação aparece em diversos contextos físicos como, por exemplo, na propagação unidirecional de ondas de águas rasas na superfície de alguma estrutura (natural ou artifícial) com água, este modelo descreve o comportamento de ondas de amplitude pequena e comprimento longo, quando comparadas com a profundidade da água. Neste caso, podemos escrever a equação (1.8) na forma (1.1) fazendo $J=\partial_x$ e $E(u)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}u_x(x)^2-\frac{2}{p+1}u(x)^{p+1}dx$. O problema de autovalores (1.3) tem como operador linearizado $L = -\partial_x^2 + c - p\varphi^{p-1}$, onde φ é a solução com perfil secante hiperbólico em (1.7) que resolve a mesma equação (1.6). Aqui, para obtermos a equação (1.6), faz-se necessário considerar soluções ondas viajantes da forma $u(x,t) = \varphi(x - ct)$, $c > 0$.

No caso da equação (1.8), temos que o operador J não é invertível e, portanto, as teorias mencionadas de instabilidade linear tratadas em [8] e [9] não podem ser aplicadas nesse caso.

Desta maneira, decidimos estudar dois métodos para determinar resultados de instabilidade linear para modelos de evolução não lineares que funcionam em diversos exemplos de equações dispersivas não lineares. O primeiro foi desenvolvido por Rousset e Tzvetkov em [19] e tange a um critério de instabilidade transversal para modelos que podem ser escritos na forma (1.1) com J não sendo invertível mas cujo problema de autovalor que será estudado tem a forma

$$L(k)u = \sigma A(k)u, \tag{1.9}$$

onde $L(k)$ e $A(k)$ são famílias de operadores operadores lineares (possivelmente ilimitados) que dependem suavemente do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, com $L(k)$ nas mesmas condições do operador L determinado acima. Neste caso específico, nosso objetivo é determinar, de acordo com a Definição 1.1, um elemento não nulo u tal que o problema (1.9) tenha solução para algum $\sigma > 0$ e $k \neq 0$. Para este fim, vamos utilizar o trabalho estabelecido por Rousset e Tzvetkov em [19]. Usaremos algumas técnicas estudadas ao longo do ano de 2017 como teoria espectral, teoria da pertubação de operadores e resultados de análise não linear (como o Teorema da Função Implícita para espaços de Banach). Como exemplo, aplicaremos a técnica em [19] para estudar a existência de ondas transversais que são linearmente instáveis para equação generalizada de Kadomtsev-Petviashvili do tipo I (KP-I), dada por

$$u_t + (u^p)_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \tag{1.10}$$

onde $u(x,y,t)$ é uma função real $(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty)$. Quando $p = 3$ esta equação é um modelo para descrever a evolução de ondas sonoras em antiferromagnéticos (ver [6]). Neste caso, iremos considerar ondas transversais do tipo viajante (a onda apenas viaja em uma das direções) da forma $u(x,y,t)=\varphi(x-ct)$, $c>0$ para a equação (1.10), de onde se obtém a equação (1.6).

Outro abordagem que estudamos nesta dissertação é o problema de determinar resultados de instabilidade linear para a equação de autovalores (1.3) supondo que o operador J seja pelo menos injetor. Para isso, vamos usar a técnica determinada por Lopes em [15] que estabelece um melhoramento das teorias provadas em [8] e [9]. Aqui, o professor Orlando Lopes utiliza a teoria de semigrupos e resultados de análise funcional para apresentar um critério parecido ao determinado nas teorias de instabilidade linear dadas em [8] e [9]. Como aplicação, estabelecemos um resultado de instabilidade linear para a equação de Korteweg-de Vries dada em (1.8).

Apresentamos, agora, um breve esboço da dissertação. O Capítulo 2 foi dedicado a estabelecer alguns fatos básicos dentro da análise funcional. Os três primeiros subcapítulos apresentam alguns resultados de análise básicabásicos da teoria da integração e da análise funcional. Como referências para estes tópicos podemos citar

[1], [2], [4], [12], [16] e [20]. O subcapítulo seguinte foi dedicado a apresentar alguns pontos de teoria da distribuição e espaços de Sobolev que podem ser encontrados em [3].

Nas seções 2.5 e 2.6, apresentamos alguns resultados avançados de teoria espectral para operadores ilimitados. Mostramos primeiro condições para que um operador linear que mantém um determinado tipo de cone invariante tenha ao menos um autovalor. Esta teoria foi desenvolvida em [13]. A seguir, são apresentados resultados de teoria espectral sobre operadores auto-adjuntos, em especial, o critério de Weyl e o teorema de invariância do espectro essencial. Estes resultados são utilizados para obtermos informações sobre o operador $\mathcal{L}:L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$\mathcal{L}u \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2}+w\right)u - f'(\varphi)u,$$

onde $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, I um intervalo que contém o zero, $f(0)=f'(0)=0$ e φ é uma função em $\mathcal{C}^\infty$ positiva e par tal que $\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)\to 0$ se $|x|\to 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Também exibimos aqui o teorema espectral para operadores auto-adjuntos. Para fundamentar estes estudos foram utilizados [10], [13] e [17].

O próxima seção apresenta alguns pontos da teoria de Sturm-Liouville associada à equação diferencial da forma

$$\mathcal{J} \equiv -\varphi'' + V(\varphi) = 0,$$

onde o potencial $V(\xi)$ é assumido valor real e contínuo com autovalores reais.

A teoria de semigrupos e grupos de operadores lineares é estudada no subcapítulo 2.8. Aqui apresentamos, em especial, os teoremas de Hille-Yosida e de Stone, que nos dão condições para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo ou grupo de operadores lineares limitados. Para este estudo utilizamos [7].

O capítulo 3 é dedicado em encontrar critérios para os quais o problema (1.9) tenha solução não trivial U para $\sigma > 0$ e $k \neq 0$. Para isso, utilizaremos o resultado desenvolvido por F. Rousset e N. Tzvetkov e apresentado em [19]. Assumimos $L(k), A(k)$ operadores lineares sobre um espaço de Hilbert e L, A dependem suavemente sobre k. Além disso, acrescentamos sobre L as hipóteses

(**H1**) existem $K > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $L(k) \geq \alpha\, I$ sempre que $|\alpha| \geq K$;

(**H2**) o espectro essencial $\sigma_{ess}(L(k))$ de $L(k)$ está contido em $[c_k, \infty)$, com $c_k > 0$, para $k \neq 0$;

(**H3**) para quaisquer $k_1 \geq k_2 \geq 0$ temos $L(k_1) \geq L(k_2)$. Além disso, se para algum $k > 0$ e $U \neq 0$ tivermos $L(k)U = 0$, então $(L'(k)U, U)_H > 0$, onde $L'(k)$ é a derivada de L com respeito a k;

(**H4**) o espectro $\sigma(L(0))$ de $L(0)$ é da forma $\{-\lambda\} \cup$ I, onde $-\lambda < 0$ é um autovalor simples isolado e I $\subset [0, \infty)$.

Primeiro verificamos que existe $k_0 > 0$ para o qual $L(k_0)$ possui núcleo unidimensional. Para isso utilizamos a caracterização para o menor autovalor de um operador auto-adjunto apresentada na Seção 2.6. A seguir, aplicamos o teorema da função implícita no operador $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varphi]^{\perp} \to H$ definido por $G(\sigma, k, V) = L(k)\varphi + L(k)V - \sigma A(k)\varphi - \sigma A(k)V$, onde φ é o único elemento não-nulo em $Ker(L(k_0))$. Utilizando o teorema de invariância do espectro essencial, encontramos soluções não-nulas de $G(\sigma, k, V) = 0$ em uma vizinhança de $(0, k_0, 0)$.

Como aplicação para este resultado consideramos a equação KP-I definida em (1.10). Linearizando em torno de Q, onde Q é uma solução da forma (1.7) com $c = 1$, e procurando por soluções $U(x, y, t) = e^{\sigma t} e^{iky} V(x)$, obtemos um problema de autovalores sob a forma (1.9), onde $A(k) = -\partial_x$ e $L(k) = -\partial_x(-\partial_{xx} + 1 - pQ^{p-1})\partial_x + k^2$.

No Capítulo 4, estabelecemos condições que asseguram a instabilidade linear do problema (1.3) no caso em que J não é sobrejetora. A soluÃ§Ã£o para este problema foi desenvolvida por O. Lopes e apresentada em [15]. Para isso exigimos que o operador L em (1.4) restrito a um determinado subespaço H_2 satisfaça a hipótese

(H) existe $\gamma > 0$ tal que o operador $F : H_2 \to H_2^*$ é invertível, tem exatamente um autovalor negativo e todos os demais autovalores estejam contidos em $[\gamma, \infty)$, onde $F = L|_{H_2}$.

Nessas condições, é possível assegurar que JL tem ao menos um autovalor negativo e um positivo. Para isso consideramos J_0F o problema (1.2) reduzido ao subespaço H_2. Utilizando a teoria desenvolvida nas seções 2.6 e 2.8, mostramos que J_0F possui um autovalor μ não-nulo. Obtemos das propriedades dos operadores J_0 e F e de [9] que $-\mu$ é também um autovalor de J_0F. A partir de μ e $-\mu$ será possível construir um autovalor positivo e um negativo de JL.

A equação

$$\frac{\partial u}{\partial_t} = \frac{\partial}{\partial_x}(u_{xx} + u^p) \tag{1.11}$$

é usada como exemplo nesse capítulo. A linearização do problema (1.11) em torno de uma solução φ da forma (1.7) é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial_t} = \frac{\partial}{\partial_x}(-\partial_x^2 + c - p\varphi^{p-1})u. \tag{1.12}$$

Pela teoria de Sturm-Liouville temos que o operador $L = -\partial_x^2 + c - p\varphi^{p-1}$ possui um único autovalor negativo e simples e que o autovalor zero é simples com autofunção associada φ'. A partir disso, é possível construir o subespaço H_2 e concluir que $F = L|_{H^2}$ satisfaz a hipótese **(H)**.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

2.1 Cálculo Diferencial sobre Espaços Lineares Normados

2.1.1 Derivadas em Direção a um Campo de Vetores

Seja v um vetor ligado a um ponto x de um domínio U, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e v um vetor ligado a um ponto x no sentido de que existe $\varphi : I \to U$ uma curva parametrizada tal que $\varphi(0) = x$ e $\varphi_t(0) = v$. A composta $f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ é uma função valor real sobre uma variável real t.

Definição 2.1. *A derivada da função f na direção do vetor v é a derivada da função $f \circ \varphi$ definida acima no ponto $t = 0$.*

A derivada de f na direÇão de v é denotada por $L_v f$ e depende unicamente do vetor v, e não de uma curva em particular (ver [1]x, pg 122).

Isto pode ser visto, por exemplo, pela expressão para derivada direcional em termo das coordenadas. Pela regra da cadeia temos

$$L_v f = \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i.$$

Definição 2.2. *A derivada de uma função $f : U \to \mathbb{R}$ na direção de um campo de vetores v é uma nova função*

$$L_v f : U \to \mathbb{R}$$

cujo valor em cada ponto x é a derivada da função f na direção de um vetor ligado a x, ou seja, $L_v f(x) = L_{v(x)} f$.

A função $L_v f$ é chamada derivada de Lie de f.

Seja v um campo de vetores infinitamente diferenciável em U. A derivada de uma função f de $C^\infty(U)$ em direção ao campo de vetores v ainda pertence a $C^\infty(U)$, donde podemos definir $L_v : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ e valem as propriedades (ver [1], pg 123)

1. $L_v(f+g) = L_v f + L_v g$,

2. $L_v(fg) = f L_v g + g L_v f$,

3. $L_{u+v} = L_u + L_v$.

Definição 2.3. *Sejam v um campo de vetores em um domínio U e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A função f é chamada primeira integral da equação*

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v(x)$$

se sua derivada em direção ao campo v é zero, isto é, $L_v f \equiv 0$.

2.1.2 Derivada de Fréchet e Teorema da Função Implícita

Sejam E e F espaços lineares normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E,F)$ o espaço das transformações lineares de E em F. Caso $E = F$, escrevemos $\mathcal{L}(E)$. O subespaço de $\mathcal{L}(E,F)$ definido pelas aplicações lineares de E em F que são também limitadas será denotado por $B(E,F)$.

Definição 2.4. (Derivada de Fréchet). *Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e seja $f : U \to F$ uma dada função. A função f é dita diferenciável em $a \in U$ se existe uma aplicação $f'(a) \in B(E,F)$ tal que*

$$\| f(a+h) - f(a) - f'(a)h \| = o(\| h \|),$$

onde $o(\| h \|)$ é uma aplicação contínua à direita tal que

$$\frac{o(\| h \|)}{\| h \|} \to 0$$

se $\| h \| \to 0$.

Definição 2.5. *Seja $f : U \subset E \to F$ uma dada função. Se existe $f'(a)$ para todo $a \in U$, dizemos que f é diferenciável em U. Se a aplicação $a \longmapsto f'(a)$ é contínua de U para $B(E, F)$, dizemos que $f'(a)$ é de classe $\mathcal{C}^1$.*

Proposição 2.6. *Sejam E, F e G espaços lineares normados, U um aberto de E e V um aberto de F. Sejam $f : U \to F$ e $g : V \to G$ tais que, para um dado ponto $a \in U$, temos $f(a) = b \in V$. Sobre o aberto $U' = f^{-1}(V)$, que contém a, definimos*

$$h = g \circ f : U' \to G.$$

Se f é diferenciável em a e g o é em b, então h é diferenciável em a e

$$h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Demonstração: Ver [12], página 7. □

Consideremos E o produto de espaços lineares normados $E_1, E_2, ..., E_n$. Dado $a = a_1+a_2+...+a_n \in E$, definimos $\lambda_i : E_i \to E$ por $\lambda_i(x_i) = a_1+a_2+...+a_{i-1}+x_i+a_{i+1}...+a_n$.

Proposição 2.7. *Se f é diferenciável em $a \in U$, então para cada i, $f \circ \lambda_i$ é diferenciável em a_i. Mais ainda,*

$$f'(a)(h_1 + ... + h_n) = \sum_{i=1}^{n} (f \circ \lambda_i)'(a_i)h_i.$$

Demonstração: Ver [12], página 9. □

Definição 2.8. *A derivada de $f \circ \lambda_i$ em a_i é chamada de i-ésima derivada parcial de f em a e é denotada por $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ ou por $\partial_i f(a)$.*

Teorema 2.9. (Teorema da Função Implícita). *Sejam E_1, E_2 e F espaços lineares normados e assuma que E_2 é completo. Sejam $\Omega \subset E_1 \times E_2$ um aberto e $f : \Omega \to F$ uma função tal que*

1. *f é contínua;*

2. *para todo $x = x_1 + x_2 \in \Omega$, com $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$, $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x)$ existe e é contínua em Ω;*

3. *$f(a + b) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_2} f(a + b)$ é invertível com inversa contínua.*

Então existem vizinhanças U de a e V de b e uma aplicação contínua $\varphi : U \to V$ tais que $\varphi(a) = b$ e $f(x + \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in U$. Mais ainda, se f é diferenciável em $a + b$, então φ é diferenciável em a e

$$\varphi'(a) = -\left[\frac{\partial}{\partial x_2} f(a+b)\right]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(a+b)\right].$$

Demonstração: Ver [12], página 22. □

2.2 Espaços L^p

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das funções mensuráveis (no sentido de Lebesgue) $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tais que $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$, se $1 \leq p < \infty$, ou $\displaystyle\underset{x\in\Omega}{supess}|f(x)| < \infty$, se $p = \infty$. Definimos a norma em $L^p(\Omega)$ para p finito por

$$\|f\|_{L^p} \equiv \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e em $L^\infty(\Omega)$ por $\|f\|_{L^\infty} \equiv \|f\|_\infty = \underset{x\in\Omega}{supess}|f|$.

O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema 2.10. (Lema de Fatou). *Se $\{f_k\}$ é uma sequência de funções mensuráveis e não-negativas sobre um conjunto mensurável E, então*

$$\int_E \underset{k\to\infty}{lim\,inf}\ f_k(x)dx \leq \underset{k\to\infty}{lim\,inf} \int_E f_k(x)dx.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Teorema 2.11. (Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $\{f_k\}$ é uma sequência de funções mensuráveis sobre um conjunto mensurável E tal que $f_k \longrightarrow f$ q. s. em*

E. Se existe φ mensurável em E tal que $|f_k(x)| \leq \varphi(x)$ q. s. em E para todo k, então

$$\int_E f_k(x)dx \longrightarrow \int_E f(x)dx.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Teorema 2.12. (Desigualdade de Young). *Seja $u = \phi(x)$ uma aplicação real contínua e estritamente crescente para $x \geq 0$, com $\phi(0) = 0$. Se $x = \psi(y)$ é a inversa de ϕ, então para $a, b > 0$,*

$$ab \leq \int_0^a \phi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy.$$

A igualdade vale se, e somente se, $b = \phi(a)$.

Demonstração: Ver [20]. □

Consideremos $\phi(x) = x^\alpha$, com $\alpha > 0$, então $\psi(y) = y^{\frac{1}{\alpha}}$ e decorre da desigualdade de Young que $ab \leq a^{1+\alpha}/(1+\alpha) + b^{1+\frac{1}{\alpha}}/(1+\frac{1}{\alpha})$. Pondo $p = 1+\alpha$ e $q = 1+\frac{1}{\alpha}$, obtemos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ se } a, b \geq 0 \text{ , } 1 < p < \infty \text{ , e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 2.13. (Desigualdade de Holder). *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, isto é,*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{se } 1 < p < \infty$$
$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\underset{x\in\Omega}{supess}|f(x)|\right) \int_\Omega |g(x)|dx.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Teorema 2.14. (Desigualdade de Minkowski). *Se $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Teorema 2.15. *Valem as seguintes propriedades:*

1. *Se* $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ *é espaço de Banach.*

2. *Se* $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *é separável.*

3. *Se* $0 < p < 1$, $L^p(\Omega)$ *é um espaço métrico completo e separável com a função distância definida por*
$$d(f,g) = \|f-g\|_p^p.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Teorema 2.16. (Continuidade da norma em L^p). *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *então*

$$\lim_{|h|\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Ver [20]. □

Definição 2.17. *A função* $f \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *é diferenciável em* $L^p(\Omega)$ *com respeito a k-ésima variável se existe* $g \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \left| \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} - g(x) \right|^p dx \longrightarrow 0 \text{ quando } h \longrightarrow 0.$$

Se tal função existe (e nesse caso é única) é chamada derivada parcial de f *com respeito a k-ésima coordenada na norma de* $L^p(\Omega)$.

Para qualquer aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos o conjunto

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K};\ f \in L^p(\widetilde{\Omega}) \text{ para todo } \widetilde{\Omega} \subset \Omega\}$$

onde $\widetilde{\Omega} \subsetneq \Omega$ é tal que existe K compacto que satisfaz $\widetilde{\Omega} \subset K \subset \Omega$.

Definição 2.18. *Sejam* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Dizemos que* v *é a derivada fraca de* u *e escrevemos* $D^\alpha u = v$ *quando*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\phi(x) dx,$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definimos a convolução de duas funções f e g mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ em que a integral exista.

Teorema 2.19. (Teorema de Convolução de Young) *Sejam p e q satisfazendo $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, e seja r definido por $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Ver [20]. □

2.3 A Transformada de Fourier

2.3.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.20. *A Transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\widehat{f}$, é definida como*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x,\xi)}dx, \text{ para } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $(x, \xi) = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Listamos abaixo algumas propriedades básicas da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.21. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então:*

1. *$f \longmapsto \widehat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ para $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1. \tag{2.1}$$

2. *$\widehat{f}$ é contínua.*

3. *$\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue).*

4. *Se $\tau_h f(x) = f(x-h)$ denota a translação por $h \in \mathbb{R}^n$, então*

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{2\pi i(h,\xi)}\widehat{f}(\xi), \tag{2.2}$$

e

$$(\widehat{e^{-2\pi i(x,h)} f})(\xi) = (\tau_{-h}\widehat{f})(\xi).$$

5. *Se $\delta_a f(x) = f(ax)$ denota a dilatação por $a > 0$, então*

$$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi). \tag{2.3}$$

6. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f * g$ a convolução de f e g. Então*

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \tag{2.4}$$

7. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy.$$

Demonstração: Ver [14], página 1. □

Observação 2.22. *Consideremos uma aplicação não-negativa $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Como $\widehat{f}$ é contínua, então $\widehat{f}(x) \leq \|\widehat{f}\|_\infty$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso,*

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \|f\|_1.$$

Segue, então de (2.1), que $\widehat{f}(0) = \|\widehat{f}\|_\infty = \|f\|_1$.

Proposição 2.23. *Seja $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onde x_k denota a k-ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^n$. Então $\widehat{f}$ é diferenciável com respeito a ξ_k e*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = (\widehat{-2\pi i x_k f(x)})(\xi).$$

Demonstração: Ver [14], página 4. □

Teorema 2.24. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g sua derivada parcial com respeito a k-ésima variável na norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$.*

Demonstração: Por definição, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, por (2.1),

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{f(x+\widehat{he_k)-}f(x)}{h} \right) - \widehat{g}(x) \right| &= \left| \left(\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h} - g(x) \right)^{\wedge} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+he_k)-f(x)}{h} - g(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Notemos que, aplicando (2.2), vem

$$\left| \left(\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h} \right)^{\wedge} \right| = \left| \frac{\widehat{\tau_{-he_k} f}(x) - \widehat{f}(x)}{h} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i h x_k} - 1}{h} \widehat{f}(x) \right| \leq 10\pi |x_k \widehat{f}(x)|,$$

para $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, e também que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{2\pi i h x_k} - 1}{h} = 2\pi i x_k.$$

Segue, então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (2.11) que

$$\left\| \frac{f(x+\widehat{he_k)-}f(x)}{h} - \widehat{g}(x) \right\|_{L^1} \longrightarrow \|2\pi i x_k \widehat{f}(x) - \widehat{g}(x)\|_{L^1} \text{ quando } h \longrightarrow 0.$$

Portanto, $\widehat{g}(x) = 2\pi i x_k \widehat{f}(x)$ q. s. em $\mathbb{R}^n$. □

Dos resultados anteriores obtemos as identidades

$$P(D)\widehat{f}(\xi) = (P(\widehat{-2\pi i x)} f(x))(\xi),$$

$$(\widehat{P(D)} f)(\xi) = P(2\pi i \xi)\widehat{f}(\xi),$$

onde P é um polinômio em n variáveis e $P(D)$ denota o operador diferencial associado ao P.

Proposição 2.25. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$f(x) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,\xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

onde o limite é tomado na norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, se f é contínua no ponto x_0, então

$$f(x_0) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x_0, \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Sejam $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$f(x) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x, \xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad \textit{para quase todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Ver [14], página 5. □

2.3.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Vamos exibir, primeiramente, uma propriedade para a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.26. (Plancherel). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Demonstração: Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, sabemos que $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.

Definamos $g(x) = \overline{f}(-x)$. Então $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e, pelo teorema de convolução de Young, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, por (2.4),

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2 > 0.$$

Além disso, dados $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| = |\int_{\mathbb{R}^n} [f(x+h-y) - f(x-y)] g(y) dy| \leq \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2 \|g\|_2.$$

Segue, da continuidade em $L^2(\mathbb{R}^n)$, que $f * g$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}^n$. Então, pela proposição 1.8 e por $\widehat{f * g} \geq 0$,

$$(f * g)(0) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{(f * g)}(\xi) d\xi,$$

e

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{(f * g)}(\xi) d\xi.$$

Pelo lema de Fatou e por (2.1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underset{t\to 0}{lim\, inf} \left(e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{(f*g)}(\xi) \right) d\xi \leq (f*g)(0) \leq \|f*g\|_1.$$

Assim,

$$\|f*g\|_1 = (f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(y)dy = \|f\|_2^2$$

e

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f*g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

□

Isso mostra que a transformada de Fourier define um operador linear limitado de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ para $L^2(\mathbb{R}^n)$ que, por sua vez, é uma isometria. Ainda, $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ na norma de $\|\cdot\|_2$, logo existe uma única extensão linear limitada $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, chamada transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Usamos a notação $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f}$ é definido como o limite de uma sequência $\{\widehat{h_j}\}$, onde $\{h_j\}$ denota uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge para f na norma de L^2.

Teorema 2.27. *A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ define um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Ver [14], página 7. □

Teorema 2.28. *A inversa $\mathcal{F}^{-1}$ da transformada de Fourier pode ser definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}^{-1}(f(x)) = \mathcal{F}(f(-x)),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [14] página 8. □

2.3.3 A Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Definição 2.29. *O Espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescentes, que denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é definido por*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} < \infty \text{ para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

onde $\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} = \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_\infty$.

Emk [3], vemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$ é uma seminorma sobre este espaço.

Exemplo 2.30. *A aplicação* $e^{-\|x\|^2}$ *é uma função de decrescimento rápido.*

Exemplo 2.31. *O espaço das funções teste* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é subespaço de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *De fato, dada* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *existe um compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $supp(\varphi) \subset K$. *Consideremos* $\rho > 0$ *tal que* $K \subset B_\rho(0)$, *temos para quaisquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *que se* $\|x\| > \rho$ *então* $\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} = 0$, *e se* $\|x\| \leq \rho$, *então* $\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} = \rho^{|\alpha|}\|D^\beta\varphi\|_\infty < \infty$.

Definição 2.32. *Seja* $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Dizemos que* $\varphi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *se*

$$\|\varphi_j\|_{(\alpha,\beta)} \longrightarrow 0 \text{ quando } j \to \infty,$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Proposição 2.33. *Para* $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *e a inclusão é contínua.*

Demonstração: Ver [3]. □

Proposição 2.34. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *está densamente contido em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [3]. □

Observação 2.35. *Em particular, para* $1 \leq p \leq \infty$, *temos que* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *devido a densidade de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *e do fato que* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.36. *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [3]. □

Proposição 2.37. *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

1. $\left(\widehat{D_x^\alpha \varphi}\right)(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
2. $\xi^\beta D_\xi^\alpha(\widehat{\varphi}(\xi)) = \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|}}{(2\pi i)^{|\beta|}} \left(D_x^\beta \widehat{(x^\alpha \varphi(x))}\right)(\xi)$, *para quaisquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.
3. $\lim\limits_{\|\xi\|\to\infty} \widehat{\varphi}(\xi) = 0$.

Demonstração: Ver [3]. □

Proposição 2.38. *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. Então* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e a aplicação* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é linear e contínua.*

Demonstração: Ver [3]. □

Proposição 2.39. (Relação Fraca de Parseval). *Seja* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy.$$

Demonstração: Pelo Teorema de Fubini (ver [20], página 114),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)}f(x)dxd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)}g(\xi)d\xi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.40. (Fórmula de inversão de Fourier). *Seja* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. Então*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)}\widehat{g}(\xi)d\xi.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{S}$ arbitrária e consideremos $\lambda > 0$. Definamos $f(x) = \varphi(x/\alpha)$. Então $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, por (2.3), $\widehat{f}(\xi) = \lambda n\widehat{\varphi}(\lambda\xi)$.

Aplicando a relação fraca de Parseval em f e g, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\lambda^n\widehat{\varphi}(\lambda\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)\varphi(x/\lambda)dx.$$

Fazendo uma mudança de variável acima, vem que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi/\lambda)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)\varphi(x/\lambda)dx.$$

Notemos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\xi/\lambda)\widehat{\varphi}(\xi) = g(0)\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \widehat{g}(x)\varphi(x/\lambda) = \widehat{g}(x)\varphi(0).$$

Agora, como $\widehat{\varphi}, \widehat{g} \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e f e g são limitadas, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)dx.$$

Considerando-se $\varphi(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$, então $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$ e

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|\xi\|^2}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)dx.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|\xi\|^2}d\xi = 1$, temos que

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)dx.$$

Pelo Teorema 2.21, obtemos

$$g(x) = \tau_{-x}g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\tau_{-x}g(0)})(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi)e^{2\pi i(x,\xi)}d\xi,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 2.41. *A aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\mathcal{F}(\varphi) = \widehat{\varphi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo.*

Demonstração: Consideremos a aplicação

$$\widetilde{\varphi}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)e^{2pii(x,\xi)}d\xi,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Notemos que

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \mathcal{F}(\varphi)(-x)$$

e que $\mathcal{F}^{-1}$ é uma aplicação contínua. Além disso, pela Proposição 2.40,

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = Id.$$

Logo, $\mathcal{F}$ é uma bijeção com inversa $\mathcal{F}^{-1}$, portanto, $\mathcal{F}$ é um isomorfismo topológico. $\square$

Da demonstração do teorema de Plancherel 2.26 e do fato que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, segue o seguinte resultado.

Proposição 2.42. (Relação Forte de Parseval). *Seja $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{g}(y)}dy.$$

Demonstração: Ver [3]. $\square$

Corolário 2.43. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Demonstração: Segue diretamente da proposição anterior com $f = g$. $\square$

2.3.4 A Transformada de Fourier no Espaço das Distribuições Temperadas

Definição 2.44. *Dizemos que $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ define uma distribuição temperada quando $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é o dual do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

1. *Ψ é linear,*
2. *Ψ é contínua, ou seja, para toda $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \to 0$ se $j \to \infty$, então $\Psi(\varphi_j) \to 0$ se $j \to \infty$.*

Exemplo 2.45. *Dada qualquer função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, podemos obter uma distribuição temperada.*

Consideremos $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *definida por* $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$. *De fato,* T_f *é linear.*

Pela desigualdade de Holder 2.13,

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|dx = \|(1+\|\cdot\|^2)^{-k} f\|_p \|(1+\|\cdot\|^2)^k \varphi\|_q.$$

Fazendo $\varphi \to 0$ *verificamos a continuidade de* T_f.

Definição 2.46. *Seja* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Definimos a transformada de Fourier* $\widehat{T}$ *de* T *por*

$$\langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle \text{ , para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.47. *Seja* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Definimos a transformada de Fourier inversa*

$$\langle \breve{T}, \varphi\rangle = \langle T, \breve{\varphi}\rangle \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

onde $\breve{\varphi}$ *é a Transformada de Fourier inversa de* φ.

Como $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo, temos $\widehat{T}, \breve{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ver [3], página 72). Mais ainda, $\mathcal{F}^*, (\mathcal{F}^{-1})^* : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são aplicações lineares injetivas e contínuas. Observemos que $\mathcal{F}^*(T) = \widehat{T}$ e $(\mathcal{F}^{-1})^*(T) = \breve{T}$. Como $(\mathcal{F}^{-1})^* = (\mathcal{F}^*)^{-1}$, vemos que $\mathcal{F}^*$ é um isomorfismo.

Proposição 2.48. *Seja* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e consideremos* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Então*

1. $D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|}(\widehat{x^\alpha T})$,
2. $(\widehat{D^\alpha T}) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}$.

Demonstração: Ver [3]. □

Observação 2.49. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *temos pela relação fraca de Parseval que*

$$\langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\varphi = \langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle.$$

2.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Isso motiva a definição de um novo espaço.

Definição 2.50. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por*

$$W^{m,p} = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } ; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\},$$

onde $D^\alpha u$ é considerado a derivada de u no sentido fraco (ver Definição 2.18).

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{k,\infty} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \underset{x\in\Omega}{supess} |D^\alpha u(x)| \right)^{\frac{1}{p}},$$

se $p = \infty$, é um espaço de Banach (ver [3]).

Observação 2.51. *O espaço $W^{k,2}(\Omega)$, munido do produto interno*

$$(u, v)_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx,$$

é um espaço de Hilbert e será denotado por $H^k(\Omega)$.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, no entanto, $C_0^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$ (ver [3]). Por isso, definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, o espaço $W_0^{m,2}(\Omega)$ será representado por $H_0^k(\Omega)$.

Suponhamos $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Estabelecemos, agora, uma caracterização para os espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \| \cdot \|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

e o produto interno será dado por

$$(u, v)_{H^m} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \widehat{u}(x) \overline{\widehat{v}(x)} dx = \left((1 + \| \cdot \|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}, (1 + \| \cdot \|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{v}\right)_{L^2}. \tag{2.5}$$

Com efeito, sejam $c_1, c_2 > 0$ constantes que dependem de m tais que

$$c_1 \sum_{|\alpha| \leq m} x^{2\alpha} \leq (1 + \|x\|^2)^m \leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq m} x^{2\alpha},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $\alpha \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ (ver [3]).

Identificando-se $L^2(\mathbb{R}^n)$ com o seu dual, ou seja, $H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in J^m(\mathbb{R}^n)$, então $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^m}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&\leq c^2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&= c \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \widehat{D^\alpha f}(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

e pelo teorema de Plancherel 2.26, vem

$$\|f\|_{H^m}^2 \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| D^\alpha f(x)|^2 dx < \infty.$$

Reciprocamente, suponhamos que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e que $(1 + \| \cdot \|^2)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |\widehat{u}(x)|^2 dx < \infty,$$

portanto, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha f}(x)|^2 dx &= (2\pi)^{2|\alpha|} \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{(2\pi)^{2|\alpha|}}{c_1} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\mathbf{x}|^2)^m |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{D^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, pelo teorema de Plancherel 2.26, $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$.

Proposição 2.52. *Seja $s \in \mathbb{R}$.*

1. *Se $0 \leq s < s'$, então $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subsetneq H^s(\mathbb{R}^n)$;*

2. *$H^s(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido em (2.5).*

3. *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

4. *Se $s_1 \leq s \leq s_2$, com $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $\theta \in [0,1]$, então*

$$\|f\|_{H^2} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^{\theta} \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Demonstração: Ver [14], página 46. □

Definição 2.53. *Seja H um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$. Dizemos que a forma bilinear*

$$a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. *é contínua, se existe uma constante C tal que*

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|,$$

para quaisquer $u, v \in H$.

2. *é coerciva, se existe uma constante α tal que*

$$|a(v,v)| \geq \alpha |v|^2,$$

para todo $v \in H$.

Proposição 2.54. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $b : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então, existe um único $T_b \in B(H_1, H_2)$ tal que*

$$b(u, v) = (T_b u, v)_{H_2},$$

para quaisquer $u \in H_1$, $v \in H_2$. Além disso, $\|T_b\|_{H_2} = \|b\|$.

Demonstração: Ver [4], página 176. □

Teorema 2.55. ***(Lema de Lax-Milgran)*** *Sejam H um espaço de Hilbert e*

$$b(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma forma bilinear contínua e coerciva. Então, para todo $\varphi \in H'$, existe um único $\xi_f \in H$ tal que

$$b(u, v) = \langle f, v \rangle_{H',H},$$

para todo $v \in H'$.

Além disso, se $b(u, v)$ for simétrica, então u se caracteriza por:

$$\begin{cases} Existe \quad um \quad único \quad u \in H \quad tal \quad que \\ \dfrac{1}{2}b(u, v) - \langle f, u \rangle_{H',H} = \min_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}b(u, v) - \langle \varphi, u \rangle_{H',H} \right\} \end{cases}$$

Demonstração: Pelo Lema 2.54 temos que existe $t_b \in B(H)$ tal que $b(u, v) = (T_b u, v)$, para quaisquer $u, v \in H$.

Pela condição de coercitividade e pela desigualdade de Cauchy temos

$$c\|u\|^2 \leq |b(u, u)|_H = |(T_b u, u)| \leq \|T_b u\|_H \|u\|_H,$$

donde $c\|u\|_H \leq \|T_b u\|_H$, para todo $u \in H$, donde T_b deve ser injetiva.

Provaremos que $Im(T_b)$ é fechado. Sejam $v \in \overline{Im(T_b)}$ e $\{u_n\} \subset Im(T_b)$ tais que $T\xi_n = u_n \to v$ em H, onde $\{\xi_n\} \subset H$.

De fato, $\|\xi_n - \xi_m\|_H \leq \frac{1}{c}\|T_b\xi_n - T_b\xi_m\|_H = \|u_n - u_m\|_H$, para m, n naturais, logo $\{\xi_n\}$ é de Cauchy em H e deve existir $\xi \in H$ tal que $\xi_n \to \xi$. Como T_b é contínua, então $T_b\xi = v \in Im(T_b)$ e, portanto, este é fechado. Podemos escrever $H = (Im(T_b)) \oplus (Im(T_b))^\perp$.

Consideremos $u \in (Im(T_b))^{\perp}$, então $0 = |(u, T_b u)| \geq c\|u\|_H^2$ e, assim, $u = 0$, ou seja, $(ImT_b)^{\perp} = \{0\}$. Segue que T_b é sobrejetiva. Segue, então, do Teorema da Aplicação Aberta que $T_H^{-1} : H \to H$ é linear e contínua.

Seja $f \in H'$. Pelo teorema de representação de Riez (ver [4], página 171) existe um único $\xi \in H$ tal que

$$f(\eta) = (\xi, \eta)_H = (T_b T_b^{-1} \xi, \eta)_H = b(T^{-1}\xi, \eta).$$

Escrevendo $\xi_f = T_b^{-1}\xi$, temos o desejado. □

2.5 Operadores Fechados

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno $(\cdot, \cdot)_H$ e norma $\| \cdot \|_H = \sqrt{(\cdot, \cdot)_H}$. Uma transformação linear ou operador linear A é uma função $A : H \to H$ com a propriedade

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v),$$

para quaisquer $u, v \in H$ e α, β escalares.

Uma definição um pouco mais geral de uma transformação linear pode ser obtida se permitirmos que A seja definida somente sobre um subespaço linear $\mathcal{D}(A)$ de H. Aqui $\mathcal{D}(A)$ é chamado de domínio do operador A. Frequentemente consideraremos $\mathcal{D}(A) = H$, mas nem sempre é possível definir um operador em todo o H. O conjunto

$$R(A) = \{Au;\ u \in \mathcal{D}(A)\}$$

é chamado imagem de A. O conjunto

$$Ker(A) = \{u \in \mathcal{D}(A);\ Au = 0\}$$

é chamado núcleo do operador A. Os conjuntos $R(A)$ e $Ker(A)$ são sempre subespaços de H.

Um operador linear A é dito ser limitado sobre um domínio $\mathcal{D}(A)$ se existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\|Au\|_H \leq M\|u\|_H,$$

para todo $u \in \mathcal{D}(A)$.

O número

$$\|A\| = inf\{M;\ \|Au\|_H \leq M\|u\|_H, \text{para todo } u \in \mathcal{D}(A)\}$$

é chamado de norma de A. Observemos que, desta forma, para provar que A não é limitado em $\mathcal{D}(A)$, basta exibir uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, com $\|u_n\|_H \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{\|Au_n\|_H}{\|u_n\|_H} \to \infty.$$

Dizemos que uma transformação linear A é contínua no ponto $u \in \mathcal{D}(A)$ se, para toda sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{D}(A)$, temos $Au_n \to Au$. Um operador A é contínuo em seu domínio se ele é contínuo em todo ponto de $\mathcal{D}(A)$.

Teorema 2.56. *Seja A um operador linear definido em $\mathcal{D}(A) \subset H$.*

1. *Se A é contínuo na origem, então A é contínuo em $\mathcal{D}(A)$,*

2. *A é contínuo em $\mathcal{D}(A)$ se, e somente se, A é limitado.*

Demonstração: Ver [17], página 212. □

Definição 2.57. *O operador linear B é dito ser uma extensão do operador linear A se $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $Bu = Au$, para todo $u \in \mathcal{D}(A)$.*

Lema 2.58. *Seja A um operador linear limitado definido sobre um subespaço linear $\mathcal{D}(A)$ em H. Então, A pode ser estendido a todo o espaço H, preservando a norma e a continuidade do operador.*

Demonstração: Ver [17], página 214. □

Observação 2.59. *No lema anterior, se $\mathcal{D}(A)$ for um subespaço denso em H, então a extensão de A em H é única.*

Definição 2.60. *Seja A um operador linear sobre um subespaço linear $\mathcal{D}(A)$. Dizemos que A é aberto quando para todo conjunto aberto $B \subset H$ tivermos que $T(B)$ é aberto em H.*

Teorema 2.61. (Aplicação Aberta). *Um operador linear sobrejetivo e contínuo é aberto.*

Demonstração: Ver [4], página 74. □

Definição 2.62. *Seja A um operador linear sobre um subespaço linear $\mathcal{D}(A)$. Dizemos que A é fechado se para qualquer sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ satisfazendo*

$$u_n \to u \text{ , e } Au_n \to f$$

tivermos que

$$Au = f.$$

Dizemos que um operador linear A definido sobre um subespaço linear $\mathcal{D}(A) \subset H$ é fechável se permitir uma extensão linear B, nas condições da Definição 2.57, que é fechada.

Teorema 2.63. (Gráfico Fechado). *Um operador fechado sobre um domínio fechado é limitado.*

Demonstração: Ver [17], página 114. □

2.6 Teoria Espectral

Definição 2.64. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D}(A) \subset H$. Os conjuntos*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ possui inversa limitada e } R(A - \lambda I) = H\}$$

e

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

são chamados, respectivamente, o conjunto resolvente de A e o espectro de A. Se $\lambda \in \rho(A)$, $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ é chamado resolvente de A em λ.

O espectro de um operador A pode ser particionado em três subconjuntos disjuntos:

1. **Espectro pontual** $(\sigma_p(A))$: é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(A - \lambda I)u = 0$ possui solução não-trivial; em outras palavras, λ é um autovalor de A e qualquer solução não-trivial correspondente u é um autovetor de A correspondente ao λ;

2. **Espectro contínuo** $(\sigma_c(A))$: é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais $R_\lambda(A)$ existe e $\overline{R(A-\lambda I)} = H$, mas $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ não é limitado;

3. **Espectro residual** $(\sigma_r(A))$: é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais R_λ existe (e pode ser limitado ou não), mas $\overline{R(A-\lambda I)} \neq H$.

Assim, temos a seguinte reunião disjunta do plano complexo

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A).$$

Seguem, agora, algumas propriedades básicas dos conjuntos $\rho(A)$, $\sigma(A)$ e do resolvente $R_\lambda(A)$. O resolvente $R_\lambda(A)$ é um operador que depende do parâmetro complexo λ. Isso sugere uma definição geral de função operador.

Uma função operador é uma aplicação do tipo

$$\begin{array}{rccc} S: & \Lambda & \longrightarrow & B(H) \\ & \lambda & \longmapsto & S_\lambda \end{array}$$

onde Λ é algum subconjunto do plano complexo e $B(H)$ é o conjunto de todos os operadores limitados definidos de H em H.

Definição 2.65. *Seja Λ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Uma função operador S definida sobre Λ é dita ser localmente holomórfica sobre Λ se para todo $x \in H$ e $f \in H'$ (espaço dual de H) a aplicação definida por*

$$h(\lambda) = f(S_\lambda x)$$

é holomórfica (ou analítica) em todo $\lambda_0 \in \Lambda$ no sentido usual da análise complexa. A função S é dita ser holomórfica ou analítica sobre Λ se S é localmente holomórfica sobre Λ e Λ é um domínio (um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$).

Teorema 2.66. *Seja A um operador fechado. Então:*

1. *Para $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A)$ e $R_\mu(A)$ comutam e temos a fórmula do resolvente*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A).$$

2. *O conjunto $\lambda(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.*

3. *A função operador*
$$\lambda \in \rho(A) \longmapsto R_\lambda(A) \in B(H)$$
é uma função analítica sobre cada componente (subconjunto maximal conexo) de $\rho(A)$.

4. *O conjunto $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Ver [17], página 219. □

O item *1.* deste teorema é chamado primeira fórmula do resolvente.

O resultado a seguir nos apresenta propriedades explícitas do espectro de um operador linear fechado.

Teorema 2.67. *Seja $A \in B(H)$. Então:*

1. *O espectro $\sigma(A)$ de A é um conjunto compacto do plano complexo tal que $\sigma(A) \neq \emptyset$ e $\sigma(A)$ está contido no disco $|\lambda| \leq \|A\|$.*

2. *O resolvente $\rho(A)$ de A é um conjunto não-vazio.*

Demonstração: Ver [17], página 220. □

2.6.1 Teoria Espectral e Operadores Positivos

Definição 2.68. *Um subconjunto fechado e convexo K de um espaço de Banach X é dito ser um cone se $K \cap (-K) = \{0\}$ e $\lambda K \subset K$, para todo $\lambda \geq 0$.*

Considerando K um conjunto com uma relação de ordem parcial, dizemos que um funcional f definido sobre K é positivo se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in K$, e monótono se $f(x) \leq f(y)$ sempre que $x \leq y$, para todo $x, y \in K$. Um funcional linear positivo f é uniformemente positivo se existir $c > 0$ tal que $f(x) \geq c\|x\|_X$, para todo $x \in K$.

Dizemos que um cone K permite o revestimento K_1 se um cone K_1 puder ser encontrado de modo que todo elemento não-nulo $x_0 \in K$ seja um ponto interior de K_1 e, além disso, K_1 contém a esfera $B(x_0, b\|x_0\|_X)$, onde $b > 0$ não depende do elemento x_0.

Teorema 2.69. *Uma condição necessária e suficiente para que um funcional linear uniformemente positivo possa ser definido uniformemente sobre um cone K é que K permita revestimento.*

Demonstração: Ver [13], página 32. □

Um operador A é fracamente contínuo se a imagem de toda sequência fracamente convergente de elementos é uma sequência que também é fracamente convergente. Um subconjunto T de um espaço de Banach E é dito ser fracamente compacto se toda sequência limitada em T possui subsequência fracamente convergente.

Lema 2.70. (Princípio de Tikhonov). *Seja T um operador fracamente contínuo e B um conjunto fracamente compacto. Se a imagem de T por B for fracamente compacta, então o operador T possui ao menos um ponto fixo em B.*

Demonstração: Ver [13], página 70. □

Teorema 2.71. *Sejam E um espaço fracamente completo tal que a esfera unitária em E é fracamente compacta e K um cone que permite revestimento. Então, todo operador linear A, para o qual K é invariante, tem ao menos um autovetor.*

Demonstração: Como K permite revestimento, temos, em virtude do teorema anterior, que existem um funcional linear f_0 e $a \geq 0$ tais que

$$f_0(x) > a\|x\|_E,$$

para todo $x \in K$.

Denotemos por K_1 o conjunto dos elementos de $x \in K$ tais que $f_0(x) = 1$. Então K_1 é convexo e fechado, pois é a interseção do hiperplano $\{x \in E; f_0(x) = 1\}$ com o cone K, e $\|x\|_E \leq \frac{1}{a}$, para todo $x \in K_1$. Logo, K_1 é compacto na topologia fraca.

Definimos sobre K_1 o operador

$$Tx = \frac{x + Ax}{f_0(x + Ax)},$$

onde A é um operador linear. Vemos que K_1 é invariante por B, pois

$$\|T(x)\|_E = \left\| \frac{x + Ax}{f_0(x + Ax)} \right\|_E \leq \frac{1}{a}.$$

A continuidade fraca do operador T segue diretamente da continuidade fraca de A. Segue então do princípio de Tikhonov, Lema 2.70, que o operador T possui ao menos um ponto fixo $x_0 \in K_1$. Portanto,

$$Ax_0 = [f_0(x_0 + Ax_0) - 1]x_0 = f_0(Ax_0)x_0,$$

ou seja, x_0 é um autovetor de A. $\square$

2.6.2 Teoria Espectral e Operadores Auto-Adjuntos

Definição 2.72. *Seja $A \in B(H)$. Então o operador adjunto de $A^* : H \to H$ é definido por*

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H,$$

para quaisquer $u, v \in H$.

Definição 2.73. *Um operador $A \in B(H)$ é dito auto-adjunto ou Hermitiano se $A = A^*$, e é unitário se A é uma bijeção e $A^* = A^{-1}$.*

Listamos, agora, algumas propriedades básicas de operadores fechados adjuntos e operadores fechados unitários. A seguir, exibimos relações entre o adjunto de um operador e seu espectro.

Proposição 2.74. *Sejam $T, U \in B(H)$. Então:*

1. $(TU)^* = U^*T^*$, $(T^*)^* = T$,
2. *se T tem inversa limitada, então T^* tem inversa limitada e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$,*
3. *se U é unitário, então U é isométrico, $\|Ux\|_H = \|x\|_H$ para todo $x \in H$,*
4. $\|T^*\| = \|T\|$.

Demonstração: Ver [17], página 222. $\square$

Teorema 2.75. *Seja $T \in B(H)$. Então:*

1. $\sigma(T^*) = \{\lambda;\ \overline{\lambda} \in \sigma(T)\}$ *e* $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = [R_\lambda(T)]^*$,
2. *se $\lambda \in \sigma_r(T)$, então $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ e, se $\lambda \in \sigma_p(T)$, então $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$,*
3. *se T é auto-adjunto, então $\sigma_r(T) = \emptyset$,*

4. *se T é auto-adjunto, então $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,*

5. *se T é auto-adjunto, então autovetores de T correspondentes aos autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração: Ver [17], página 222. □

Agora, definimos a noção de operadores adjunto e auto-adjunto para operadores não-limitados.

Definição 2.76. *Seja $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$, onde H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e $D(A) \subset H$. Chamamos adjunto de A o operador $A^* \in \mathcal{L}(D(A^*), H)$, onde*

$$D(A^*) = \{v \in H; \text{existe } v^* \in H \text{ tal que } (Au, v) = (u, v^*), \text{ para todo } u \in H\},$$

definido por $A^*v = v^*$, para todo $v \in D(A^*)$.

Teorema 2.77. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador linear densamente definido. Então:*

1. *A^* é um operador fechado,*

2. *Se A é fechado, então $\mathcal{D}(A^*)$ é denso em H. Mais ainda, $(A^*)^* = A$,*

3. *Suponhamos $\overline{\mathcal{D}(A^*)}^H = H$. Então, A é fechável e $A \subseteq A^{**}$. Mais ainda, $A^{**} = \overline{A}$,*

4. *Existem operadores lineares que não possuem extensão fechada.*

Demonstração: Ver [17] , página 223. □

Definição 2.78. *Sejam H um espaço de Hilbert e A um operador sobre H com domínio $D(A) \subset H$. Dizemos que:*

1. *A é simétrico, se $D(A)$ é denso em H e $(Au, v) = (u, Av)$, para todo $u, v \in D(A)$.*

2. *A é auto adjunto, se $A^* = A$ e, neste caso, fica subentendido que $D(A^*) = D(A)$.*

Teorema 2.79. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador auto-adjunto. Então:*

1. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,*

2. *A não possui espectro residual, ou seja, $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.*

Demonstração: A prova segue diretamente dos itens *3* e *4* do Teorema 2.75. □

O teorema a seguir é muito útil para encontrar o espectro de um operador auto adjunto.

Teorema 2.80. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador auto-adjunto. Então, o número real λ está em $\sigma(A)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{u_n\} \subset (A)$ tal que*

$$\|u_n\|_H = 1 \ \ e \ \ \|(A - \lambda I)u_n\|_H \to 0 \ \ quando \ \ n \to \infty.$$

Demonstração: Ver [17], página 225. □

Corolário 2.81. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador auto-adjunto e suponhamos que*

$$\|u\|_H \leq c\|Au\|_H,$$

para todo $u \in \mathcal{D}(A)$, então A é injetivo e $R(A)$ é fechado.

Demonstração: Ver [17], página 225. □

Definição 2.82. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado. Dizemos que A é monótono (ou acretivo, ou ainda, $-A$ é dissipativo) se $(Av, v) \geq 0$, para todo $v \in D(A)$. Além disso, A é maximal monótono se $R(I + A) = H$.*

Proposição 2.83. *Seja A um operador maximal monótono e simétrico. Então, A é auto-adjunto.*

Demonstração: Ver [4], página 298. □

Teorema 2.84. *Sejam T e S dois operadores simétricos tais que $D(T) = D(S) = \mathcal{D}$ e*

$$\| (S - T)u \|_H \leq a \| u \|_{\mathcal{D}} + b(\| Tu \|_H + \| Su \|_H), u \in \mathcal{D},$$

onde a, b são constantes não-negativas com $b < 1$. Então, S é auto-adjunta se, e somente se, T também o é.

Demonstração: Ver [10], página 287. □

Vamos obter informações sobre o operador linear $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$\mathcal{L}u \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + w\right) u - f'(\varphi)u, \tag{2.6}$$

onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que I é um intervalo que contém o zero, $f(0) = f'(0) = 0$ e φ é uma função em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ positiva e par tal que $\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x) \to 0$ se $|x| \to 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.85. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ um operador linear.*

(1) Dizemos que $\lambda \in \sigma(A)$ é não-essencial se, e somente se, λ é um autovalor isolado de $\sigma(A)$ e o espaço $Ker(A - \lambda I)$ tem dimensão finita. Chamamos o conjunto de todos esses λ de espectro discreto e ele será denotado por $\sigma_{disc}(A)$.

(2) O complemento em $\sigma(A)$ do conjunto dos pontos não-essenciais é chamado espectro essencial de A. Denotamos este conjunto por $\sigma_{ess}(A)$. Consequentemente, $\sigma(A) = \sigma_{disc}(A) \cup \sigma_{ess}(A)$.

Vemos, agora, uma caracterização clássica para o espectro essencial de operadores auto-adjuntos.

Teorema 2.86. (Critério de Weyl). *Seja A um operador auto-adjunto com domínio $\mathcal{D}(A)$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$,

(2) existe uma sequência $\{\psi_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ ortogonal em H com $\|\psi_n\|_H = 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)\psi_n\|_H = 0.$$

Demonstração: Ver [17], página 232. □

Agora, vemos que o espectro essencial é preservado quando perturbamos o operador de interesse por uma classe especial de operadores.

Teorema 2.87. (Invariância do Espectro Essencial). *Sejam A e B operadores auto-adjuntos sobre H tais que*

(1) $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ e

(2) $A - B$ é um operador compacto de $\mathcal{D}(A)$ para H. Aqui $\mathcal{D}(A)$ é considerado com a norma do gráfico gerada por A, isto é,

$$\|u\|_A^2 = \|Au\|_H^2 + \|u\|_A^2$$

(notemos que $\mathcal{D}(A)$ é um espaço de Banach desde que A seja fechado).

Então, $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Demonstração: Ver [17], página 233. □

Teorema 2.88. *O operador $\mathcal{L}$ definido em (2.6) é um operador fechado, ilimitado e auto-adjunto sobre $L^2(\mathbb{R})$ no qual o espectro consiste de uma parte essencial $[w, \infty)$ mais um número finito de autovalores discretos (com autoespaço de dimensão finita) no intervalo $(-\infty, w)$.*

Demonstração: Ver [17], página 232. □

Teorema 2.89. *O operador $\mathcal{L}$ definido em (2.6) possui espectro essencial $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = [w, \infty)$.*

Demonstração: Ver [17], página 234. □

A partir de agora, estabelecemos algumas definições para apresentar o Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos (ver [10], página 353). Seja H um espaço de Hilbert e suponhamos que existe uma família $\{M(\lambda)\}$ de subespaços fechados de H dependendo de um parâmetro real λ, $-\infty < \lambda < \infty$, não decrescente, isto é, $M(\lambda') \subset M(\lambda'')$ se $\lambda' < \lambda''$, tal que a interseção de todos os $M(\lambda)$ é $\{0\}$ e a união deles é densa em H.

Para λ fixo, a interseção $M(\lambda + 0)$ de todo $M(\lambda')$ com $\lambda' > \lambda$ contém $M(\lambda)$. Similarmente temos que $M(\lambda) \supset M(\lambda - 0)$, onde $M(\lambda - 0)$ é o fecho da união de todo $M(\lambda')$ com $\lambda' < \lambda$. Dizemos que a família $\{M(\lambda)\}$ é contínua à direita em λ se $M(\lambda + 0) = M(\lambda)$, contínua à esquerda se $M(\lambda - 0) = M(\lambda)$ e contínua se for contínua tanto à direita quanto à esquerda. Observemos que a família $\{M(\lambda + 0)\}$ tem as mesmas propriedades requeridas de $\{M(\lambda)\}$ e, mais ainda, é contínua à direita.

Essas propriedades podem ser escritas na forma de propriedades da família $\{E(\lambda)\}$ de projeções ortogonais sobre $\{M(\lambda)\}$. Então,

$$E(\lambda) \text{ é não decrescente: } E(\lambda') \leq E(\lambda'') \text{ para } \lambda' < \lambda''. \tag{2.7}$$

$$\underset{\lambda \to -\infty}{s - lim} E(\lambda) = 0, \quad \text{e} \quad \underset{\lambda \to \infty}{s - lim} E(\lambda) = 1. \tag{2.8}$$

Temos que (2.7) é equivalente a

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda) = E(min(\lambda, \mu)). \tag{2.9}$$

Uma família $\{E(\lambda)\}$ de projeções ortogonais com as propriedades (2.7) e (2.8) é chamada família espectral.

As projeções $E(\lambda \pm 0)$ sobre $M(\lambda \pm 0)$ são dadas por

$$E(\lambda \pm 0) = \underset{\epsilon \to 0^+}{s - lim} E(\lambda \pm \epsilon). \tag{2.10}$$

Logo, a família $\{M(\lambda)\}$ é contínua à direita (esquerda) se, e somente se, $\{E(\lambda)\}$ é uma família de projeções fortemente contínuas à direita (esquerda).

Toda família espectral $\{E(\lambda)\}$ está associada a um operador auto-adjunto E expresso pela integral de Stieltjes

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda). \tag{2.11}$$

Definimos, também, o operador

$$|A| = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| dE(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \lambda dE(\lambda) - \int_{-\infty}^{0} \lambda dE(\lambda). \tag{2.12}$$

O domínio de $|A|$ é o mesmo do operador A, além disso, $|A|$ é auto-adjunto não-negativo e $ker(|A|) = ker(A)$.

Teorema 2.90. (Teorema Espectral). *Todo operador $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert H admite uma expressão da forma (2.11) por meio de uma família espectral $\{E(\lambda)\}$ unicamente determinada por A.*

Demonstração: Ver [10], página 356. □

Sejam A um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert H,

$$\lambda_0 = \underset{0 \neq \phi \in \mathcal{D}}{inf} \frac{(A\phi, \phi)_H}{\|\phi\|_H^2} \quad \text{e} \quad \Lambda_0 = \underset{0 \neq \phi \in \mathcal{D}}{sup} \frac{(A\phi, \phi)_H}{\|\phi\|_H^2},$$

onde $\mathcal{D}$ é o domínio de A em H. Segue, do teorema espectral 2.90, que $\sigma(A) \subset [\lambda_0, \Lambda_0]$ (ver [18], página 68) e, se λ_0 é finito, então $\lambda_0 \in \sigma(A)$ (o mesmo para Λ_0).

Observação 2.91. *Nas condições acima, se λ_0 é finito e A possui um único autovalor negativo e simples, então A é não-negativa sobre um espaço de codimensão 1.*

De fato, seja φ o autovetor associado ao autovalor λ_0. Denotemos

$$\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{D}; (V, \varphi)_H = 0\},$$

então

$$\begin{aligned} \lambda_0 \quad < \quad 0 \quad &\leq \inf_{0 \neq \phi \in \mathcal{V}} \frac{(A\phi, \phi)_H}{\|\phi\|_H^2} \\ \Longrightarrow \quad (\phi, \phi)_H \quad &\leq \quad (A\phi, \phi)_H, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{V}$.

Consideremos $\mathcal{P} \subset H$ tal que $(A\phi, \phi)_H > 0$ para todo $\phi \in \mathcal{P}$, então $\mathcal{V} = Ker(A) \oplus \mathcal{P}$. Dado $\phi \in \mathcal{P}$, temos $A\phi \neq 0$ e

$$(A\phi, \varphi)_H = (\phi, A\varphi)_H = \lambda_0(\phi, \varphi)_H = 0,$$

donde $\mathcal{P}$ é invariante por A.

Caso 0 não seja um ponto de acumulação do espectro de A, obtemos também da caracterização do menor autovalor que existe $c > 0$ tal que

$$c\|\phi\|_H^2 \leq (A\phi, \phi)_H,$$

para todo $\phi \in \mathcal{P}$.

2.7 Teoria de Sturm-Liouville

Nesta seção, estabelecemos alguns resultados básicos da teoria de Sturm-Liouville associada à equação diferencial sob a forma

$$\mathcal{J}\varphi \equiv -\varphi'' + V(\varphi) = 0, \tag{2.13}$$

onde o potencial $V(\xi)$ é assumido valor real e contínuo. Estes resultados nos dão informações mais precisas sobre o espectro do operador linear

$$\mathcal{L}_0(\psi) \equiv -\psi'' + [c - f'(\phi)]\psi, \tag{2.14}$$

o qual está associado às ondas solitárias ϕ que são soluções de equações GKdV com $f(u) = u^{p+1}/(p+1)$, a qual tratamos nos capítulos 3 e 4.

Teorema 2.92. (Teorema de oscilação de Sturm). *Sejam φ_1 e φ_2 soluções não triviais das equações diferenciais*

$$-\varphi_1'' + V_1(\varphi_1) = 0 \quad e \quad -\varphi_2'' + V_2(\varphi_2) = 0, \tag{2.15}$$

respectivamente, onde $V_i(\xi)$ é assumida sendo valor real e contínua, $I = 1, 2$.

1. *Se $V_1(\xi) \geq V_2(\xi)$, para $\xi \in [a, b]$, e $\varphi_1(a) = \varphi_2(b) = 0$, então existe $\gamma \in [a, b]$ tal que $\varphi_2(\gamma) = 0$.*

   Em outras palavras, entre dois zeros contíguos de φ_1 existe um zero de φ_2.

2. *Se $V_1(\xi) > V_2(\xi)$, para $\xi \in W \subset [a, b]$, onde W tem medida de Lebesgue positiva, então um ponto γ tal que $\varphi_2(\gamma)$ pode ser encontrado em (a, b) entre dois zeros de φ_1.*

Demonstração: Assumamos que φ_1 não se anula em (a, b) e, sem perda de generalidade, $\varphi_1 > 0$ em (a, b). Então

$$\varphi_1(a) > 0 \text{ e } \varphi_2(b) < 0.$$

Suponhamos que φ_2 não se anula em $[a, b]$. Observemos que

$$\begin{aligned} (2.15) \quad &\Longleftrightarrow \quad -\varphi_1(-\varphi_2'' + V_2(\varphi_2)) + \varphi_2(-\varphi_1'' + V_1(\varphi_1)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 + (V_1 - V_2)(\xi)\varphi_1\varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Integrando com relação a ξ, temos

$$0 = \int_a^b (\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2)d\xi + \int_a^b (V_1 - V_2)(\xi)\varphi_1\varphi_2 d\xi.$$

Como $V_1(\xi) - V_2(\xi)$ e $\varphi_1, \varphi_2 > 0$, devemos ter

$$0 \geq \int_a^b (\varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_1'' \varphi_2) d\xi = \varphi_1'(a)\varphi_2(a) - \varphi_1'(b)\varphi_2(b) > 0,$$

o que é um absurdo, provando o item *1*.

Para provar o item *2*, se $\varphi_1(a) = \varphi_1(b) = 0$, $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi) > 0$ para todo $\xi \in (a, b)$ e $V_1 > V_2$ em W, verificamos de modo análogo que

$$0 \geq \varphi_1'(a)\varphi_2(a) - \varphi_1'(b)\varphi_2(b) > 0,$$

donde segue o resultado. □

Corolário 2.93. *Se $V(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \in [a, b]$ em (2.13), então qualquer solução não trivial tem no máximo um zero em $[a, b]$.*

Demonstração: Suponhamos φ uma solução não trivial de $\mathcal{J}$ que possui dois zeros em $[a, b]$.

Observemos que $\psi \equiv 1$ é solução de

$$-\psi'' + V_0(\xi)\psi = 0,$$

onde $V_0 \equiv 0$. Assim, como $V_0 \leq V$ em $[a, b]$ segue do teorema de oscilação de Sturm 2.14 que ψ se anula em algum ponto entre os dois zeros de φ, o que é um absurdo. □

Teorema 2.94. *Se φ é uma solução não trivial de (2.13), onde V satisfaz*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} V(\xi) = c > 0,$$

então o conjunto de zeros de φ é finito (provavelmente vazio).

Demonstração: Primeiramente, segue do teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais que todos os zeros da equação são isolados. Consideremos $R > 0$ tal que $V(\xi) \geq 0$, para todo ξ tal que $|\xi| \geq R$.

Segue então do corolário anterior que φ temo no máximo um zero em cada um dos intervalos $(-\infty, -R)$ e (R, ∞). □

Corolário 2.95. *Seja $\lambda < c$ um autovalor de $\mathcal{J}$ com autofunção φ. Então o conjunto de zeros de φ é finito (provavelmente vazio).*

Demonstração: Basta considerar $V_1(\xi) = V(\xi) - \lambda$. Como $V_1(\xi) \to \lambda - c > 0$ temos verificado o resultado. □

Teorema 2.96. *Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ autofunções de $\mathcal{J}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2 < c$ e com número de zeros n_1 e n_2, respectivamente. Se $\lambda_1 > \lambda_2$, então $n_2 > n_1$.*

Demonstração: Ver [17], página 238. □

Teorema 2.97. *Consideremos o operador $\mathcal{L}_0$ definido por*

$$\mathcal{L}_0\psi \equiv -\psi'' + [c - f'(\varphi)]\psi$$

e seja λ_0 o menor autovalor associado a $\mathcal{L}_0$. Então, λ_0 é um autovalor simples tal que toda autofunção correspondente ψ satisfaz $\psi(\xi) > 0$ q. s. ou $\psi(\xi) < 0$ q. s.

Demonstração: Ver [17], página 239. □

Agora, estabelecemos uma descrição exata do espectro de $\mathcal{L}_0$ definido no teorema anterior. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo $f(0) = f'(0) = 0$.

Teorema 2.98. *Suponhamos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz*

$$-\varphi'' + c\varphi - f(\varphi) = 0, \tag{2.16}$$

com $c > 0$ e φ' tendo exatamente um único zero. Então, o operador diferencial

$$\mathcal{L}_0\psi \equiv -\psi'' + [c - f'(\varphi)]\psi$$

definido em $L^2(\mathbb{R})$ tem exatamente um autovalor negativo e simples λ_0; o autovalor zero é simples com autofunção associada φ'; e existe $\delta > 0$ tal que todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_0) - \{\lambda_0, 0\}$ satisfaz $\lambda > \delta$.

Demonstração: Da igualdade (2.16), segue que $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}_0\varphi' = 0$. Além disso, zero é um autovalor simples de $\mathcal{L}_0$, pois o Wronskiano de duas soluções em $L^2(\mathbb{R})$ da equação $\mathcal{L}_0\psi = 0$ é zero. Como $\mathcal{L}_0\varphi' = 0$, resulta, do Teorema 2.88, que o menor autovalor de $\mathcal{L}_0$, λ_0, satisfaz $\lambda_0 < 0 < w$, é simples e possui um autovetor positivo associado.

Vejamos, agora, que não existem autovalores de $\mathcal{L}_0$ no intervalo $(\lambda_0, 0)$. Com efeito, suponhamos que exista $\lambda \in (\lambda_0, 0)$ tal que $\mathcal{L}_0\psi_1 = \lambda\psi_1$, com $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_0) \setminus \{0\}$. Então, como $[w - f'(\varphi(\xi))] \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$, segue do Teorema 2.96 que ψ_1 deve ter no mínimo um zero. Aplicando novamente o Teorema 2.96, mas agora no intervalo $(\lambda, 0)$, devemos ter que φ' tem no mínimo dois zeros , o que é uma contradição. Finalmente, a existência de um número positivo δ segue do Teorema 2.88. $\square$

2.8 Teoria de Semigrupos

Exibimos, nesta seção, alguns resultados sobre integração de funções vetoriais.

Consideremos $f : (a, b) \to X$ uma função contínua, onde X é um espaço de Banach (real ou complexo). Dada uma decomposição π de $[a, b]$, isto é, $n + 1$ números reais $t_0, t_1, ..., t_n$ satisfazendo a condição

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

e números reais ξ_i, $i = 1, ..., n$, $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ definimos a soma de Riemann de f por

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^{\infty}(t_i - t_{i-1})f(\xi_i) \in X.$$

Definimos $|\pi| = \underset{1\leq i\leq n}{max}\{t_i - t_{i-1}\}$. Temos que $\sigma_\pi(f)$ tem um limite $x \in X$ quando $|\pi| \to 0$. Dizemos que x é a integral de f em $[a, b]$ e escrevemos

$$x = \underset{|\pi|\to 0}{lim}\, \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Para integral de funções vetoriais valem as regras usuais:

1. Se K é uma constante,
$$\int_a^b Kf(t)dt = K\int_a^b f(t)dt.$$

2. $\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

3. Se $a \leq c \leq b$, então
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

4. $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$

5. $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \underset{a\leq t\leq b}{max}\|f(t)\|(b-a).$

Proposição 2.99. *Para todo $t \in [a,b]$ temos*

$$\underset{h\to\infty}{lim}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(\tau)d\tau = f(t).$$

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.100. (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se F é diferenciável em $[a,b]$ e $F'(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(\tau)d\tau = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.101. *Sejam A um operador linear fechado de X e f uma função contínua em $[a,b]$ com valores em $\mathcal{D}(A)$ e tal que Af é contínua em $[a,b]$. Então*

$$\int_a^b f(t)dt \in \mathcal{D}(A)$$

e

$$A\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Af(t)dt.$$

Demonstração: Ver [7]. □

A integral imprópria de uma função contínua $f : [a,\infty) \to X$ é definida por

$$\int_a^\infty f(t)dt = \underset{\rho\to\infty}{lim}\int_a^\rho f(t)dt,$$

quando esse limite existe. Nesse caso, diz-se que a integral $\displaystyle\int_a^\infty f(t)dt$ é convergente.

Diz-se que a integral é absolutamente convergente se existir o limite

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_a^\rho \|f(t)\|_X dt.$$

Teorema 2.102. (Teste de Weierstrass). *Sejam $f : [a,\infty)\times\Lambda \to X$, Λ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, contínua em $t\in[a,\infty)$, para cada $\lambda\in\Lambda$, e $M : [a,\infty)\to\mathbb{R}$ contínua e positiva em $t\in[a,\infty)$. Se $\|f(t,\lambda)\|_X \le M(t)$, para todo $(t,\lambda)\in[a,\infty)\times\Lambda$, e*

$$\int_0^\infty M(t)dt$$

converge, então

$$\int_a^\infty f(t,\lambda)dt$$

converge absolutamente para cada λ pertencente ao conjunto Λ e a convergência é uniforme nesse conjunto.

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.103. *Se f e $\frac{\partial}{\partial\lambda}f$ são contínuas para $(t,\lambda)\in[0,\infty)\times\Lambda$, Λ um aberto de $\mathbb{C}$, $\int_a^\infty f(t,\lambda)dt$ é convergente para cada $\lambda\in\Lambda$ e $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)dt$ é uniformemente convergente em Λ, então*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_a^\infty f(t,\lambda)dt = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)dt.$$

Demonstração: Ver [7]. □

2.8.1 Subgrupos de Classe C_0

Definição 2.104. *Seja X um espaço de Banach. Diz-se que uma aplicação $S:\mathbb{R}^+\to B(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

1. *$S(0)=I$, onde I é o operador identidade de $B(X)$;*

2. *$S(t+s)=S(t)S(s)$, para quaisquer $t,s\in\mathbb{R}^+$;*

   Dizemos que o semigrupo S é de classe C_0 se

3. *$\lim\limits_{t\to 0^+} \| (S(t)-I)x \| = 0$, para todo $x\in X$.*

Proposição 2.105. *Se S é um semigrupo de classe C_0, então $\| S(t) \|_M$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Demonstração: Ver [7]. □

Corolário 2.106. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo $\mathbb{R}^+$, i. é., se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \forall x \in X.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 2.107. *Os semigrupos de classe C_0 são conhecidos como semigrupos fortemente contínuos.*

Definição 2.108. *Um funcional p em um espaço vatorial X é uma aplicação $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz, para quaisquer $\xi, \eta \in X$,*

$$p(\xi + \eta) \leq p(\xi) + p(\eta).$$

Lema 2.109. *Seja p uma função subaditiva em $\mathbb{R}^+$ e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então $\dfrac{p(t)}{t}$ tem um limite quando $t \to +\infty$ e*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}. \tag{2.17}$$

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.110. *Seja S um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{ln \| S(t) \|_X}{t} = \inf_{t > 0} \frac{ln \| S(t) \|_X}{t} = w_0 \tag{2.18}$$

e para cada $w > w_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\| S(t) \|_X \leq M e^{wt}, \forall\, t \geq 0. \tag{2.19}$$

Demonstração: Por propriedade de logaritmos e pela definição de semigrupo vemos que a função $ln\|S(t)\|_X$ é uma aplicação subaditiva sobre $\mathbb{R}^+$. Mais ainda, pela Proposição 2.105, é limitada superiormente em todo intervalo limitado.

Assim, pelo Lema 2.109, temos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ln\|S(t)\|_X}{t}=\inf_{t>0}\frac{ln\|S(t)\|_X}{t}=w_0.$$

Se $w>w_0$ podemos determinar t_0 tal que se $t>t_0$, então $\dfrac{ln\|S(t)\|_X}{t}<w$.

Além disso, existe $M_0\geq 1$ tal que $\|S(t)\|_X\leq M_0$, para todo $t\in[0,t_0]$. Se $w\geq 0$, temos, para todo $t\geq 0$,

$$ln\|S(t)\|_X\leq wt+lnM_0,$$

donde, pondo $M=M_0$,

$$\|S(t)\|_X\leq Me^{wt}.$$

Se $w<0$ e $t\geq t_0$ segue que $ln\|S(t)\|_X\leq wt<0\leq wt-wt_0$, e daí, para todo $t>0$,

$$ln\|S(t)\|_X\leq w(t-t_0)+lnM_0.$$

Pondo $M=M_0e^{-wt_0}$, temos o desejado. □

Definição 2.111. *Quando $w_0<0$, existe $M\geq 1$ tal que*

$$\| S(t) \|_X\leq M,\forall t\geq 0.$$

Nesse caso diz-se que S é um semigrupo uniformemente limitado de classe C_0. Se, além disto, $M=1$, S é dito semigrupo de contrações de classe C_0.

Definição 2.112. *O operador A com*

$$\mathcal{D}(A)=\left\{x\in X;\ \lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h}x \text{ existe}\right\}$$

definido por

$$Ax=\lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h}x,\forall x\in\mathcal{D}(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Vamos designar por A_h o operador linear limitado $\dfrac{S(h)-I}{h}$, $h>0$.

Proposição 2.113. *$\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de X e A um operador linear.*

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.114. *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S.*

1. *Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax; \tag{2.20}$$

2. *Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau; \tag{2.21}$$

3. *Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)xd\tau \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$S(t)x - x = A\left(\int_0^t S(\tau)xd\tau\right). \tag{2.22}$$

Demonstração: Seja $t > 0$ fixo. Para todo $h > 0$

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h}x = A_h S(t)x = S(t)A_h x.$$

Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $S(t)A_h x$ é convergente quando $h \to 0$ e, assim, $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Por outro lado, se $0 < h < t$, temos

$$\frac{S(t-h) - S(t)}{-h}x = S(t-h)A_h x = S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax.$$

Como $\|S(t-h)\|$ é limitado, para $h \in [0,t]$ e, como $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$S(t-h)(A_h x - Ax) \to 0, \text{ se } h \to 0.$$

Pela continuidade de S,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}x = AS(t)x = S(t)Ax,$$

provando o item *1.*

Integrando

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

no intervalo $[s,t]$ verificamos o item *2.*

Observemos agora que

$$\begin{aligned} A_h\int_0^t S(\tau)xd\tau &= \frac{1}{h}\int_0^t (S(h)-I)S(\tau)xd\tau \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)xd\tau. \end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$, temos

$$A_h\int_0^t S(\tau)xd\tau \to S(t)x - x$$

pela continuidade de S, concluindo o item *3.* □

Proposição 2.115. *1. O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

2. Um operador linear A fechado e com domínio denso em X é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.

Demonstração: Ver [7]. □

Exemplo 2.116. *A função exponencial e^t restrita a $t \in \mathbb{R}^+$ é um semigrupo de classe C_0.*

O gerador infinitesimal de e^t é a função identidade, pois

$$\left\|\frac{e^h - I}{h}x - Ix\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(h)^{n-1}}{n!}x - x\right\| \le \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(h)^n}{n!}x - x\right\| \le \|e^t - 1\|\|x\| \to 0$$

quando $h \to 0$.

Definição 2.117. *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Se $A^0 = I$, $A_1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja bem definido, vamos definir A^n pondo*

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x; x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \text{ e } A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\}$$

e

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A^n).$$

Proposição 2.118. *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então:*

1. *$\mathcal{D}(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X;*

2. *Se $x \in \mathcal{D}(A^n)$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$ para todo $t \geq 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x \text{ , para todo } n \in \mathbb{N};$$

3. *se $x \in \mathcal{D}(A^n)$, então vale a fórmula de Taylor*

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau)x d\tau;$$

4. $(S(t)-I)^n x = \displaystyle\int_0^t ... \left(\int_0^t S(\tau_1 + ... + \tau_n) A^n x d\tau_1 \right) ... d\tau_n$*, para todo $x \in \mathcal{D}(A^n)$;*

5. *$\bigcap\limits_n \mathcal{D}(A^n)$ é denso em X.*

Demonstração: Ver [7]. □

2.8.2 Geração de Semigrupos

Teorema 2.119. *Seja S um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Se $Re\lambda \geq \omega_0$, onde*

$$w_0 = \lim_{t \to +\infty} \frac{ln\|S(t)\|_X}{t},$$

então $\lambda \in \rho(A)$, existe a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt,$$

para todo $x \in X$, e

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt,$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: Sejam μ, w números reais tais que $Re\lambda > \mu > w > w_0$. Então, pela Proposição 2.110, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_X \leq Me^{wt}, t > 0.$$

Assim,

$$\|e^{-\lambda t}S(t)x\|_X \leq Me^{(w-Re\lambda)t}\|x\|_X \leq Me^{(w-\mu)t}\|x\|_X. \tag{2.23}$$

A aplicação $e^{-\lambda t}S(t)x$ é contínua, portanto integrável, e também

$$\int_0^\infty Me^{(w-\mu)t}dt = \frac{1}{\mu - w}, \tag{2.24}$$

segue-se, então, do teste de Weierstrass que a integral

$$R_\lambda(x) \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt, Re\lambda > w, x \in X$$

é convergente. Além disso, R_λ é linear e, por (2.23) e (2.24), limitada.

Temos

$$\begin{aligned} A_hR_\lambda(x) &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)xdt, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{h\to 0^+} A_hR_\lambda(x) = \lambda R_\lambda x - x,$$

para todo $x \in X$.

Segue daí que

$$R_\lambda(x) \in \mathcal{D}(A) \text{ , para todo } x \in X \text{ e } (\lambda Id - A)R_\lambda(x) = x. \tag{2.25}$$

Por outro lado, como A é fechado e $S(t)Ax = AS(t)x$, se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned} R_\lambda(Ax) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Axdt \\ &= \int_0^\infty Ae^{-\lambda t} S(t)xdt \\ &= A\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)xdt \\ &= AR_\lambda(x). \end{aligned}$$

Disso e de (2.25), vem que

$$R_\lambda(\lambda Id - A)x = x,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Daí

$$R_\lambda = (\lambda Id - A)^{-1} = R(\lambda, A),$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 2.120. *Nas mesmas condições do teorema anterior:*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n S(t)xdt, \forall x \in X.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Lema 2.121. *Sejam A um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D}(A) \subset X$ denso em X e M e w números reais tais que, para cada real $\lambda > w$, temos $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_X \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Consideremos $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I, \lambda > w$, então

1. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} B_\lambda x = Ax, x \in \mathcal{D}(A)$;
2. $\|e^{tB_\lambda}\| \leq Me^{t\gamma}, \forall \lambda > \lambda(\gamma)$;
3. e^{tB_λ} *converge fortemente para um operador linear limitado quando* $\lambda \to \infty$.

Demonstração: Como $R(\lambda, A)(\lambda I - A) = I$, então

$$\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A)A,$$

donde, se $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X = \|R(\lambda, A)Ax\|_X \leq M\|Ax\|_X(\lambda - w)^{-1} \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$. Ou seja,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Por (2.26), com $n = 1$, temos

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_X \leq M|\lambda|(\lambda - w)^{-1} \leq 2M,$$

para λ suficientemente grande.

Logo, pela densidade de $\mathcal{D}(A)$ em X,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in X.$$

Assim,

$$\lim_{\lambda \to \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda R(\lambda, A) - I)x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax,$$

o que prova o item *1*.

Observemos que

$$\|e^{tB_\lambda}\|_X = \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)}\|_X = \|e^{-\lambda t}\|_X \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n R(\lambda, A)^n}{n!} \|_X,$$

assim

$$\|e^{tB_\lambda}\|_X \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n \|R(\lambda, A)^n\|_X}{n!} \leq e^{-\lambda t} M(\lambda - w)^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n}{n!} = M e^{t\lambda w(\lambda - w)^{-1}}.$$

Como $\lambda w(\lambda - w)^{-1} \to w$ quando $\lambda \to \infty$, se $\gamma > w$, existe $\lambda(\gamma)$ tal que $\lambda(\gamma)w(\lambda(\gamma) -$

$w)^{-1} \leq \gamma$, e assim,

$$\|e^{tB_\lambda}\|_X \leq Me^{t\gamma},$$

se $\lambda > \lambda(\gamma)$ e temos provado o item 2..

Escrevemos, agora, $e^{tB_\lambda} = S_\lambda(t)$. Notemos que, para cada λ e μ,

$$B_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) B_\mu,$$

pois B_μ, B_λ comutam e

$$S_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B_\lambda^n}{n!}.$$

Logo,

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\|_X = \int_0^t \frac{d}{d\tau}[S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)x]d\tau = \int_0^\infty S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)[B_\lambda - B_\mu]xd\tau,$$

e daí

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\|_X \leq \int_0^\infty \|S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)\|_X \|B_\lambda - B_\mu\|_X xd\tau \leq M^2 e^{t\gamma} \|B_\lambda x - B_\mu x\|_X t,$$

para $\lambda, \mu > \lambda(\gamma)$ e $\gamma > w$.

Pelo item 2., $\|B_\lambda x - B_\mu x\|_X \to 0$ quando $\lambda, \mu \to \infty$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Logo, $S_\lambda(t)x$ converge em $\mathcal{D}(A)$ e a convergência é uniforme em relação a t em cada intervalo finito $[0, T]$. Pela densidade de $\mathcal{D}(A)$ em X e como $S_\lambda(t)$ é limitado quando $\lambda \to \infty$, a convergência vale para todo $x \in X$.

Segue-se do Teorema de Banach-Steinhaus (ver [4], página 66) que existe um operador linear limitado $S(t)$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x,$$

para todo $x \in X$ e a convergência é uniforme em intervalos fechados, o que mostra o item *3*. □

Teorema 2.122. (Hille-Yosida). *Para que um operador linear A, definido em $\mathcal{D}(A) \subset X$ e com valores em X, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 é necessário e suficiente que:*

1. *A seja fechado com domínio denso em X;*

2. *Existam números reais M e w tais que, para cada real $\lambda > w$, se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_X \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Suponhamos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0. Pela Proposição 2.115, segue o item *1.*

Para cada

$$w > w_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{ln\|S(t)\|_X}{t}$$

existe, pela Proposição 2.110, $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_X \leq Me^{wt},$$

para todo $t > 0$.

Pelo Teorema 2.119, se $\lambda > w$, então $\lambda \in \rho(A)$ e, pelo Corolário 2.120,

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)^n x &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^{n-1} S(t) x dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}(t)^{n-1} S(t) x dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|R(\lambda, A)^n\|_X \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-(\lambda - w)t} t^{n-1} dt = \frac{M}{(\lambda - w)^n}, n \in \mathbb{N}$$

e, portanto, a condição *2.* é necessária.

Por outro lado, consideremos, para cada $\lambda > w$, S_λ como definido no Lema 2.121. Como B_λ é um operador linear limitado sobre o espaço de Banach X, então $_\lambda$ é um semigrupo de classe C_0. Então

$$S(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(0)x = x$$

e

$$\begin{aligned} S(t+s)x &= \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t+s)x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x \\ &= S(t)S(s)x, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ e $t, s > 0$.

Além disso, $S(t)x$ é o limite uniforme de $S_\lambda(t)x$ e, portanto, contínuo. Consequentemente, S é um semigrupo de classe C_0. Vamos mostrar que A é o gerador infinitesimal do semigrupo S.

Sejam $\lambda > \lambda(\gamma)$ e $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)B_\lambda x - S(t)Ax\|_X &\leq \|S_\lambda(t)B_\lambda x S_\lambda(t)Ax\|_X + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\|_X \\ &\leq \|S_\lambda(t)\|_X\|B_\lambda x - Ax\|_X + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\|_X \\ &\leq Mte^{t\gamma}\|B_\gamma x - Ax\|_X + \|S_\gamma(t)Ax - S(t)Ax\|_X \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \to \infty$ temos, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, que $B_\gamma x \to Ax$ e que $S_\gamma(t)Ax \to S(t)Ax$ uniformemente em relação a t em todo intervalo $[0, T]$. Portanto, de

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(\tau)B_\lambda x d\tau,$$

temos

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)Axd\tau, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Seja B o gerador infinitesimal de S. Então, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, pelo Corolário 2.99,

$$Bx = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S_\lambda(\tau)Axd\tau = S_\lambda(0)Ax = Ax.$$

Observemos que se $\lambda \in \rho(A)$ e $\lambda > w$, então $\lambda \in \rho(B)$, daí

$$(\lambda I - A)\mathcal{D}(A) = X, (\lambda I - B)\mathcal{D}(B) = X$$

e como $B = A$ sobre $\mathcal{D}(A)$,

$$(\lambda I - A)\mathcal{D}(A) = X, (\lambda I - B)\mathcal{D}(A) = X$$

donde

$$\mathcal{D}(A) = (\lambda I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(B).$$

Portanto, A é o gerador infinitesimal do semigrupo S. □

Corolário 2.123. *Para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 tal que $\|S(t)\|_X \leq e^{wt}$, $t \geq 0$ é necessário e suficiente que A seja fechado com domínio denso em X e se $\lambda > w$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda, A)\|_X \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Corolário 2.124. *Para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações lineares de classe C_0 é necessário e suficiente que A seja fechado com domínio denso, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e, para todo $\lambda > 0$,*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_X \leq 1.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Corolário 2.125. *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Se $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$, $\lambda > w > w_0$, então*

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tB_\lambda} x,$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 2.126. *Para simplificar a escrita, vamos escrever $A \in G(M, w)$ para indicar que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados S de classe C_0 que satisfaz a condição $\|S(t)\|_X \leq Me^{wt}x$, para todo $x \in X$.*

Sejam X um espaço de Banach, X^* o seu dual e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Definimos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \{x^* \in X^*;\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (ver [4], página 27), $J(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Definimos uma aplicação dualidade como sendo qualquer $j : X \to X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$, para todo $x \in X$. Observemos que toda aplicação dualidade é uma isometria.

Definição 2.127.

1. *Dizemos que o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j tivermos*

$$Re\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A).$$

2. *Dizemos que A é m-dissipativo se for dissipativo e $R(\lambda I - A) = X$, para algum $\lambda > 0$.*

3. *A é dito ser acretivo (m-acretivo) se $-A$ for dissipativo (m-dissipativo).*

Proposição 2.128. *Se A é dissipativo, então*

$$\|(\lambda I - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $\lambda > 0$.

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.129. *Se A é m-dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$, $\lambda_0 > 0$, então*

1. *$\lambda_0 \in \rho(A)$ e A é fechado;*

2. *$(0, \infty) \subset \rho(A)$;*

3. *$R(\lambda - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Ver [7], página 38. □

Teorema 2.130. (Lumer-Philips). *$A \in G(1, 0)$ se, e somente se, A é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Se $A \in G(1,0)$ então, pelo Corolário 2.124, A é um operador fechado, densamente definido e $(0,\infty) \in \rho(A)$, donde $R(\lambda - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disto, para cada aplicação dualidade j, temos

$$Re\langle S(t)x, j(x)\rangle \leq |\langle S(t)x, x\rangle| \leq \|S(t)x\|_X.\|j(x)\|_X \leq \|x\|_X^2$$

pois, por hipótese $\|S(t)x\|_X \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Portanto,

$$Re\langle S(t)x - x, j(x)\rangle = Re\langle S(T)x, j(x)\rangle - \|x\|_X^2 \leq 0,$$

donde, dividindo por t e passando ao limite quando $t \to 0$, temos

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, e obtemos que A é dissipativo.

Reciprocamente, se A é m-dissipativo, então, pela Proposição 2.129, A é fechado, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ e, pela Proposição 2.128,

$$\|x\|_X = \|(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x\|_X \geq \lambda\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X,$$

ou seja,

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$.

Logo,

$$\|R(\lambda, A)\|_X \leq \frac{1}{\lambda},$$

para todo $\lambda > 0$. □

Teorema 2.131. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e S um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Então, definindo $S^* : \mathbb{R}^+ \to B(X^*)$ por $S^*(t) = S(t)^*$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, S^* é um semigrupo de classe C_0 e A^* seu gerador infinitesimal.*

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 2.132. *A família de operadores S^* definida no Teorema 2.131 é chamada semigrupo adjunto de $S(t)$. Tal semigrupo não é necessariamente de classe C_0, pois a aplicação*

$S(t) \to S^*(t)$ pode não conservar a continuidade forte de $S(t)$.

Definição 2.133. *Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R} \to B(X)$ é um grupo de operadores lineares limitados de X se*

1. *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $B(X)$;*

2. *$S(t + s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;*

   Dizemos que S é um grupo de classe C_0 se

3. *$\lim\limits_{t\to 0} \| (S(t) - I)x \| = 0$, para todo $x \in X$.*

O gerador infinitesimal de S é definido por

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

onde

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X; \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe}\}.$$

Proposição 2.134. *Para que A seja um gerador infinitesimal de um grupo de operadores lineares limitados de classe C_0, é necessário e suficiente que $+A$ e $-A$ sejam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.*

Demonstração: Seja A o gerador infinitesimal de um grupo de operadores lineares S de classe C_0. Então as restrições de S a $\mathbb{R}^+$ definidas por $S_+(t) = S(t)$ e $S_-(t) = S(-t)$ são semigrupos de classe C_0.

Escrevemos A_+, A_- os geradores infinitesimais de S_+ e S_-, respectivamente. Observemos que se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S_+(h) - I}{h} x = \lim_{h\to 0^+} \frac{S_-(h) - I}{h} x,$$

pois o limite existe. Assim, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_+), \mathcal{D}(A_-)$. Mais ainda, $Ax = A_+x = A_-x$.

Caso $x \in \mathcal{D}(A_+)$, observemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S_-(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} S_-(h) \frac{x - S_+(h)x}{-h} = A_+x,$$

donde existe o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h},$$

o que mostra que $x \in \mathcal{D}(A)$, e assim, $A_+ = A$.

Da mesma forma, verificamos que $A_- = A$, provando a necessidade.

Por outro lado, suponhamos que A e $-A$ sejam geradores dos semigrupos de classe C_0 S_+ e S_-, respectivamente. Pelo Corolário 2.125, sabemos que

$$S_+(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda I)}x \quad \text{e} \quad S_-(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(\lambda^2 R(\lambda,-A)-\lambda I)}x.$$

Logo, $S_-(t)$ comuta com $S_+(t)$, donde $T(T) = S_-(t)S_+(t)$ é um semigrupo de classe C_0.

Seja B o gerador infinitesimal de T. Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}x &= \frac{S_-(t)S_+(t)-I}{h}x \\ &= S_+(t)\frac{S_-(t)-I}{h}x + \frac{S_+(t)-I}{h}x\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{T(h)-I}{h}x \longrightarrow -Ax + Ax = 0$$

se $h \to 0^+$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Então $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $B(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Segue da densidade de $\mathcal{D}(A)$ em X e do fato de B ser fechado que $Bx = 0$, para todo $x \in \mathcal{D}(B)$. Assim, $S_-(t) = S_+^{-1}(t)$.

Consideremos o operador

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t) & \text{se} \quad t \geq 0, \\ S_-(t) & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Pelas propriedades dos semigrupos S_+ e S_-, verificamos que S_t é um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A, o que encerra a demonstração. □

Teorema 2.135. *Para que A seja gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 é necessário e suficiente que A seja fechado, densamente definido e existam constantes reais M e w tais que se λ é real e $|\lambda| > 0$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_X \leq \frac{M}{(|\lambda| - w)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Definição 2.136. *Um grupo S de operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert é dito grupo unitário se $S(t)^* = S(t)^{-1}$, para todo $t \geq 0$. Tem-se $\|S(t)x\|_X = \|x\|_X$, para todo semigrupo unitário S, pois*

$$\|S(t)x\|_X^2 = (S(t)x, S(t)x) = (S(t)^*S(t)x, x) = (x, x) = \|x\|_X^2.$$

Teorema 2.137. (Teorema de Stone). *Um operador linear A de um espaço de Hilbert H é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, $A^* = -A$.*

Demonstração: Suponhamos A o gerador infinitesimal de um grupo unitário S de classe C_0. Pela Proposição 2.134, A é gerador infinitesimal do semigrupo S_+ e $-A$ é gerador infinitesimal do semigrupo S_-.

Pelo Teorema 2.131, A^* é o gerador infinitesimal do semigrupo S_+^*. Então de $S_+^*(h) = S_+^* = S(h)^* = S(h)^{-1} = S(-h) = S_-(h)$, temos

$$\frac{S_+^*(h) - I}{h} = \frac{S_-(h) - I}{h}$$

e daí $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ e $A^*x = -Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Logo, $A^* = -A$.

Reciprocamente, suponhamos $A^* = -A$. Da existência de A segue a densidade de $\mathcal{D}(A)$ em X. Além disso, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$(Ax, x)_X = (x, A^*x)_X = -(x, Ax)_X = -\overline{(Ax, x)_X},$$

e daí $Re(Ax, x)_X = 0$. Assim, os operadores A e $-A$ são dissipativos. Segue, então, da Proposição 2.128 que $(I - A)$ e $(I + A)$ são injetivos e, para todo $x \in \mathcal{D}((I \pm A)^{-1})$, tem-se $\|x\|_X = \|(I \pm A)(I \pm A)^{-1}x\|_X \geq \|(I \pm A)^{-1}x\|_X$, donde $\|(I \pm A)^{-1}x\|_X \leq 1$.

Além disso, como o operador adjunto é fechado segue-se, de $A^* = -A$, que $(I \pm A)^{-1}$ são fechados. Portanto, para mostrar que $R(I \pm A) = X$ é suficiente mostrar que $R(I \pm A) = \mathcal{D}(I \pm A)^{-1}$ é denso em X. Seja, para isso, $y \in X$ tal que $(x, y)_H = 0$ para todo $x \in R(I \pm A)$. Então, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, temos $((I \pm A)x, y)_H = 0$ e daí $(Ax, y)_H = (x, \pm y)_H$, donde $y \in \mathcal{D}(A^*)$ e $-Ay = A^*y = \pm y$. Logo, $Re(Ay, y)_H = \mp\|y\|_H^2$ e, como $Re(Ay, y)_H = 0$ segue-se que $y = 0$. Concluímos que $R(I \pm A) = X$.

Pelo Teorema de Lumer-Philips, A e $-A$ geram semigrupos de classe C_0 e daí, pela Proposição 2.134, A gera um grupo, S, de classe C_0. Resta mostrar que S é unitário.

Notemos que o semigrupo S_- gerado por $-A = A^*$ donde, pelo Teorema 2.131, S_-^* é gerado por $A^{**} = A$. Portanto, $S_-(t)^* = S(t)$ e como $S_-(t) = S(-t) = S(t)^{-1}$ tem-se $(S(t)^{-1})^* = S(t)$, isto é, $S(t)^{-1} = S(t)^*$, como queríamos. $\square$

CAPÍTULO 3

UM CRITÉRIO DE INSTABILIDADE LINEAR TRANSVERSAL PARA ONDAS SOLITÁRIAS

Neste capítulo, estudamos um problema generalizado de autovalores sob a forma

$$\sigma A(k)U = L(k)U, \tag{3.1}$$

onde $L(k), A(k)$ são operadores (possivelmente não limitados) que dependem suavemente de um parâmetro real k em algum espaço de Hilbert. Nosso objetivo é apresentar um critério que assegure a existência de $\sigma > 0$ e $k \neq 0$ tal que (3.1) tenha uma solução não trivial U.

Nossa motivação para este problema é o estudo de instabilidade transversal de ondas solitárias em equações diferenciais parciais hamiltonianas. Consideramos o trabalho desenvolvido por F. Rousset e N. Tzvetkov em [19], que nos fornece um critério de existência de solução não trivial para o problema (3.1) sob a condições abaixo.

Consideramos um espaço de Hilbert real Hcom produto escalar $(\cdot,\cdot)_H$. Assumimos que $L(k)$ é um operador auto-adjunto não-limitado com domínio $\mathcal{D}$ continuamente imerso em H e independente do parâmetro real k. Mais ainda, $L(k)$ é um operador de $\mathcal{D}$ para H dependendo suavemente de k. Finalmente, também assumimos que $A(k) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, H)$ e dependendo suavemente de k. Uma dependência $\mathcal{C}^1$ é, no momento, suficiente para nossos propósitos.

Nossas principais hipóteses serão as seguintes:

(H1) Existem $K > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $L(k) \geq \alpha I$, sempre que $|k| \geq K$;

(H2) O espectro essencial $\sigma_{ess}(L(k))$ de $L(k)$ está contido em $[c_k, \infty)$, com $c_k > 0$, para $k \neq 0$;

(**H3**) Para quaisquer $k_1 \geq k_2 \geq 0$, temos $L(k_1) \geq L(k_2)$. Além disso, se para algum $k > 0$ e $U \neq 0$ tivermos $L(k)U = 0$, então $(L'(k)U, U)_H > 0$, onde $L'(k)$ é a derivada de L com respeito a k;

(**H4**) O espectro $\sigma(L(0))$ de $L(0)$ é da forma $\{-\lambda\} \cup J$, onde $-\lambda < 0$ é um autovalor simples isolado e $J \subset [0, \infty)$.

Teorema 3.1. *Assumindo as hipóteses **(H1)-(H4)**, existem $\sigma > 0$, $k \neq 0$ e $U \in \mathcal{D} \backslash \{0\}$ soluções para o problema*

$$\sigma(A(k))U = L(k)U.$$

Demonstração: O primeiro passo é provar que existe $k_0 > 0$ tal que $L(k_0)$ tem um núcleo unidimensional.

Vamos definir

$$f(k) = \underset{\|U\|_H = 1}{inf} (L(k)U, U)_H.$$

Como L depende suavemente de k e o produto interno é uma aplicação contínua temos que f está bem definida em $\mathbb{R}$.

Observemos que, por **(H4)**,

$$f(0) = \underset{\|U\|_H = 1}{inf} (L(0)U, U)_H \leqslant (-\lambda U_\lambda, U_\lambda)_H = -\lambda \parallel U_\lambda \parallel_H^2 = -\lambda < 0,$$

onde U_λ é a autofunção unitária associada ao autovalor $-\lambda$, e portanto $f(0) < 0$.

Por outro lado, por **(H1)** temos que, se $k \in \mathbb{R}$ é tal que $|k| > K$, então, para todo $U \in H$ com $\parallel U \parallel_H = 1$,

$$\begin{aligned} ((L(k) - \alpha I)U, U)_H \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (L(k)U, U)_H - (\alpha U, U)_H \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (L(k)U, U)_H \geq \alpha \parallel U \parallel_H^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad (L(k)U, U)_H > 0, \end{aligned}$$

ou seja, $f(k) > 0$.

Por hipótese, L depende suavemente de k, portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$. Segue, então, do Teorema do Valor Intermediário que f se anula em $[0, K)$. Logo deve existir um menor k_0 positivo tal que $f(k_0) < 0$. De fato, como $f(0) < 0$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$f(k) < 0$, para todo $k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como $f(K) \geq 0$, temos pela continuidade de f existe $0 < k_0 < K$ tal que $f(k_0) = 0$ e $f(k) < 0$, se $k \in [0, k_0)$.

Como $L(k)$ é auto-adjunto, sabemos que $\sigma(L(k)) \subset [\lambda_0, \Lambda_0]$, onde

$$\lambda_0 = \inf_{U \in \mathcal{D} \setminus 0} \frac{(L(k)U, U)_H}{\| U \|_H^2} \ \text{ e } \ \Lambda_0 = \sup_{U \in \mathcal{D} \setminus 0} \frac{(L(k)U, U)_H}{\| U \|_H^2}.$$

Escolhemos $k \in [0, k_0)$ tal que $f(k) < 0$.

Se $k = 0$, temos por **(H4)** que $-\lambda \in \sigma(L(0)) \setminus \sigma_{ess}(L(0))$ é um autovalor negativo simples. Se $k \neq 0$, temos por **(H2)** que $\sigma_{ess}(L(k)) \subset [0, \infty)$. Com efeito,

$$\lambda_0 = \inf_{U \in \mathcal{D} \setminus 0} \frac{(L(k)U, U)_H}{\| U \|_H^2} = \inf_{U \in \mathcal{D} \setminus 0} (L(k)\frac{U}{\| U \|_H}, \frac{U}{\| U \|_H})_H = f(k),$$

logo λ_0 é finito e, portanto, é um autovalor de f. Como $f(k) < 0$, $\lambda_0 \in \sigma(L(k)) \setminus \sigma_{ess}(L(k))$ e assim λ_0 é um ponto isolado do espectro e tem multiplicidade finita.

Notemos que λ_0 é o único autovalor negativo e tem multiplicidade 1. Com efeito, se supormos dois autovetores distintos de $L(k)$ associadas aos autovalores negativos, teremos que $L(k)$ é negativo sobre um subespaço de $\mathcal{D}$ de dimensão 2. No entanto, de **(H3)**, temos que $L(0) \leq L(k)$, e então, $L(0)$ também sera negativo sobre tal subespaço, o que contradiz **(H4)**.

Logo, para todo $k \in [0, k_0)$, temos que $L(k)$ tem um único autovalor negativo e este é simples.

Como

$$\inf_{U \in \mathcal{D} \setminus 0} \frac{(L(k_0)U, U)_H}{\| U \|_H^2} = \inf_{U \in \mathcal{D} \setminus 0} \left(L(k_0)\frac{U}{\| U \|_H}, \frac{U}{\| U \|_H} \right)_H = f(k_0) = 0,$$

temos que 0 é um autovalor de $L(k_0)$ e, por **(H2)**, tem multiplicidade finita. Logo, $L(k_0)$ tem núcleo não-trivial de dimensão finita (ver seção 2.6.2, teorema 2.90).

Vamos verificar que o núcleo de $L(k_0)$ tem dimensão igual a 1.

Consideremos, caso exista, $k \in (0, k_0)$ tal que $L(k)$ tenha um núcleo trivial. Como $L(k)$ tem um único autovalor negativo e este é simples, então $L(k)$ é não-negativo sobre um espaço de codimensão 1.

Suponhamos, por absurdo, que existem $U, V \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, com $(U, V) = 0$, tais que $L(k_0)U = L(k_0)V = 0$. Então, por **(H3)**,

$$(L(k)U, U)_H \leq (L(k_0)U, U)_H = 0 \;\; \text{e} \;\; (L(k)V, V)_H \leq (L(k_0)V, V)_H = 0.$$

Como $Ker(L(k)) = \{0\}$ segue que $L(k)$ é negativo sobre $\{U, V\}$, o que contradiz $L(k)$ ser positivo sobre um espaço de codimensão 1. Portanto, $Ker(L(k_0))$ tem dimensão 1.

Agora, seja $k_1 \in (0, k_0)$ tal que o núcleo de $L(k_1)$ é não-trivial. Denotemos ψ a autofunção associada ao autovalor negativo de $L(k_1)$, então este operador é não-negativo sobre

$$\mathcal{V} = [\psi]^{\perp} = \{V \in \mathcal{D}; (V, \psi) = 0\}.$$

Mais ainda, por **(H2)**, seguindo a notação da Observação 2.91, temos a decomposição ortogonal

$$\mathcal{V} = Ker(L(k_1)) \oplus_{\perp} \mathcal{P},$$

com $\mathcal{P}$ invariante por $L(k_1)$ e $L(k_1)$ coerciva em $\mathcal{P}$.

Como $L(k_1)$ é coerciva em $\mathcal{P}$ existe $\alpha > 0$ tal que $(L(k_1)U, U)_H > \alpha \parallel U \parallel_H^2$, para todo $U \in \mathcal{P}$.

Como H é um espaço de Hilbert real e $L(k)$ é auto-adjunto, então, para quaisquer $U, V \in \mathcal{V}$,

$$(L(k)U, V)_H + (L(k)V, U)_H = 2(L(k)U, V)_H.$$

Seja $U \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, podemos escrever $U = U_1 + U_2$, com $U_1 \in Ker(L(k_1))$ e $U_2 \in \mathcal{P}$. Assim,

$$\begin{aligned}
(L(k_1)U, U)_H &= (L(k_1)(U_1 + U_2), (U_1 + U_2))_H \\
&= (L(k_1)U_1, U_1)_H + (L(k_1)U_1, U_2)_H + (L(k_1)U_2, U_1)_H + (L(k_1)U_2, U_2)_H \\
&\geq 2(L(k_1)U_1, U_2)_H + \alpha \parallel U_2 \parallel_H^2 \\
&\geq \alpha \parallel U_2 \parallel_H^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Logo, para $k \in (k_1, k_0)$ suficientemente próximo de k_1, temos

$$(L(k)U, U)_H > 0,$$

para todo $U \in \mathcal{V}$.

Como $L(k_0) \geq L(k)$, por **(H3)**, segue que $L(k_0)$ é estritamente positivo sobre $\mathcal{V}$ e como este tem codimensão 1 e o núcleo de $L(k_0)$ é não-trivial, então $Ker(L(k_0))$ tem dimensão 1.

Sabemos que $L(k_0)$ é não-negativa. Consideremos $U \in H$ não nulo tal que $(V, U)_H = 0$, para todo $V \in R(L(k_0))$, então $(L(k_0)U, U)_H = 0$. Segue da positividade de $L(k_0)$ em $\mathcal{V}$ que $U \in Ker(L(k_0))$. Além disso, como $L(k_0)$ é auto-adjunto, temos para todo $U \in Ker(L(k_0))$ e todo $V \in \mathcal{D}$, que

$$(L(k_0)V, U)_H = (V, L(k_0)U)_H = 0.$$

Assim, $codim\,(R(L(k_0))) = dim\,(Ker(L(k_0))) = 1$.

Seja $\varphi \in \mathcal{D}$ o único elemento não-nulo tal que $L(k_0)\varphi = 0$. O espaço $[\varphi]^{\perp}$ é invariante por $L(k_0)$. De fato, dado $U \in [\varphi]^{\perp}$,

$$(L(k_0)U, \varphi)_H = (U, L(k_0)\varphi)_H = 0.$$

Dessa forma, o operador $L(k_0) : [\varphi]^{\perp} \to [\varphi]^{\perp}$ é auto-adjunto.

Consideremos a aplicação $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varphi]^{\perp} \to H$ definida por $G(\sigma, k, V) = L(k)\varphi + L(k)V - \sigma A(k)\varphi - \sigma A(k)V$. Podemos, então, reescrever o problema (3.1) e procurar por $U = \varphi + V$, $V \in [\varphi]^{\perp}$ tal que

$$G(\sigma, k, V) = 0. \tag{3.2}$$

Usamos o Teorema da Função Implícita para olharmos para V e k em função de σ. Notemos que $(0, k_0, 0)$ é uma solução não-nula de (3.2) e que a derivada de Fréchet de $G(\sigma, V, k)$ no ponto $(0, k_0, 0)$ é dada por

$$\begin{array}{rccl} D_{V,k}G(0, k_0, 0): & \mathbb{R} \times [\varphi]^{\perp} & \to & [\varphi]^{\perp} \\ & (\mu, U) & \mapsto & \mu L'(k_0)\varphi + L(k_0)U. \end{array}$$

Aqui mantemos a notação $L(k_0)$ para o operador restrito ao subespaço $[\varphi]^\perp$. Como vimos, este operador é auto-adjunto.

Seja $(\mu, U) \in \mathbb{R} \times [\varphi]^\perp$, então

$$\begin{aligned} \|D_{V,k}G(0,k_0,0)(\mu,U) - L(k_0)U\| &= \|\mu L'(k_0)\varphi\| \\ &\leq \|L'(k_0)\varphi\|\|(\mu,U)\| \end{aligned}$$

e daí, pelo fato de $L(k_0)$ ser auto-adjunto e pelo Teorema 2.84, temos que $D_{V,k}G(0,k_0,0)$ é auto-adjunto.

Consideremos $(\mu, U) \in \mathbb{R} \times [\varphi]^\perp$ tal que $D_{V,k}G(0,k_0,0)(\mu,U) = 0$. Como

$$\begin{aligned} |(D_{V,k}G(0,k_0,0)(\mu,U),\varphi)_H| &= |(\mu L'(k_0)\varphi,\varphi)_H + (L(k_0)U,\varphi)_H| \\ &= |\mu(L'(k_0)\varphi,\varphi)_H + (U, L(k_0)\varphi)_H| \\ &= |\mu|(L'(k_0)\varphi,\varphi)_H, \end{aligned}$$

temos por **(H3)** que $\mu = 0$. Segue da injetividade de $L(k_0)$ sobre $[\varphi]^\perp$ que $U = 0$. Portanto, $D_{V,k}G(0,k_0,0)$ é injetora. Além disso, como $D_{V,k}G(0,k_0,0)$ é auto-adjunto, temos que $R(D_{V,k}G(0,k_0,0)) = (Ker(D_{V,k}G(0,k_0,0)))^\perp = H$ (ver [16], página 141), donde $(D_{V,k}G(0,k_0,0)$ é sobrejetora.

Vamos utilizar o Teorema de Invariância do Espectro Essencial para mostrar que $0 \in \rho(D_{V,k}G(0,k_0,0))$. Suponhamos que $\{(\mu_j,U_j)\}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R} \times [\varphi]^\perp$ e $\{D_{V,k}G(0,k_0,0)(\mu_j,U_j)\}$ é uma sequência limitada em H. Temos, então, que $\{\mu_j\}$ é limitada em $\mathbb{R}$, e portanto, existe $\mu \in \mathbb{R}$ e uma subsequência de mesmo nome tal que $\mu_j \to \mu$ se $j \to \infty$.

Assim,

$$\|\mu_j L'(k_0)\varphi - \mu L'(k_0)\varphi\|_H \leq |\mu_j - \mu|\|L'(k_0)\varphi\|_H \to 0,$$

quando $j \to \infty$. Com isso, $\mu L'(k_0)\varphi = D_{V,k}G(0,k_0,0) - L(k_0)$ é um operador compacto, donde $0 \notin \sigma_{ess}(L(k_0)) = \sigma_{ess}(D_{V,k}G(0,k_0,0))$.

Segue que $R_0(D_{V,k}G(0,k_0,0))$ é um operador limitado, e portanto, $D_{V,k}G(0,k_0,0)$ é um isomorfismo. Temos, então, que para algum σ em uma vizinhança de 0 existem $k(\sigma)$ e $V(\sigma)$ tais que $G(\sigma,k(\sigma),V(\sigma)) = 0$, o que prova o resultado. $\square$

Observação 3.2. *Observemos que se, em vez de* **(H3)***, assumirmos que $L'(k)$ é positivo para*

$k > 0$, então podemos simplificar o argumento escolhendo $k_0 \neq 0$ tal que $L(k_0)$ tem um núcleo de dimensão um. Isto é, neste caso, de **(H4)** *temos que $L(0)$ é não-negativo sobre um subespaço $\mathcal{V}$ de codimensão 1.*

Assim, como $L'(s)$ é positivo para $s > 0$, para todo $k > 0$, temos que

$$(L(k)U, U)_H = \int_0^k (L'(s)U, U)_H + (L(0)U, U)_H \geq (L(0)U, U)_H \geq 0, \forall U \in \mathcal{V}.$$

Mais ainda, se $(L(k)U, U) = 0$ para $U \in \mathcal{V}$, então a identidade acima garante que

$$\int_0^k (L'(s)U, U)_H = 0$$

e então usando novamente que $L'(k)$ é positivo para $k > 0$ nós obtemos que $U = 0$.

Consequentemente, temos que para $k > 0$, $L(k)$ é positivo sobre um subespaço de codimensão 1. Isto garante que a dimensão do núcleo de $L(k_0)$ é exatamente 1.

Exemplo 3.3. *Vamos considerar uma equação KP-I generalizada*

$$\partial_t u = \partial_x(-\partial_{xx} u - u^p) + \partial_x^{-1} \partial_{yy} u, \tag{3.3}$$

$p = 2, 3, 4$, onde $u(t, x, y)$ é um valor real e $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

Mostramos que existe uma solução unidimensional onda solitária $u(t, x, y) = Q(x - ct)$ da forma

$$Q(x) = \left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(sech^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

com $c > 0$.

Suponhamos $u(t, x, y) = Q(x - ct) \geq 0$, como $Q \in \mathcal{S}$ não depende de y,

$$\begin{aligned} \partial_t Q = \partial(-\partial_{xx} Q - Q^p) + \partial_x^{-1} \partial_{yy} Q \quad &\Longrightarrow \quad -cQ' = -Q''' - pQ^{p-1}Q' \\ &\Longrightarrow \quad cQ' = Q''' + pQ^{p-1}Q' \\ &\Longrightarrow \quad c\int_{-\infty}^{\xi} Q' = \int_{-\infty}^{\xi} Q''' + \int_{-\infty}^{\xi} pQ^{p-1}Q', \xi \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad cQ(\xi) = Q''(\xi) + Q^p(\xi). \end{aligned}$$

Multiplicando por Q' temos

$$\begin{aligned}(-Q''+cQ-Q^p)Q'=0 &\implies -Q''Q'+cQQ'-Q^PQ'=0\\ &\implies -((Q')^2)'+c(Q^2)'-\frac{2}{p+1}(Q^{p+1})'=0\\ &\implies cQ^2-\frac{2}{p+1}Q^{p+1}=(Q')^2\\ &\implies Q^2(c-\frac{2}{p+1}Q^{p-1})=(Q')^2\geq 0.\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $Q^{p-1}\leq c\frac{p+1}{2}$. Como $p-1\geq 1$ e $Q\geq 0$, segue que Q é limitada.

Também,

$$\begin{aligned}Q^2(c-\frac{2}{p+1}Q^{p-1})=(Q')^2 &\implies \sqrt{c}Q\sqrt{1-\frac{2}{c(p+1)}Q^{p-1}}=Q'\\ &\implies \frac{dQ}{\sqrt{c}Q\sqrt{1-\frac{2}{c(p+1)}Q^{p-1}}}=dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\pm\int\frac{dQ}{cQ\sqrt{1-\frac{2}{c(p+1)}Q^{p-1}}}=\int dx.$$

Escrevendo

$$Q(x)=\alpha^{\frac{1}{p-1}}(sech(\beta\theta))^{\frac{2}{p-1}},$$

com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\theta=\theta(x)$, temos

$$dQ=-\alpha^{\frac{1}{p-1}}\frac{2}{p-1}(sech^2(\beta\theta))^{\frac{1}{p-1}}tanh(\beta\theta)d\theta.$$

Escolhendo $\beta=\frac{\sqrt{c}(p-1)}{2}$ e $\alpha=\frac{c(p+1)}{2}$,

$$\int\frac{dQ}{c\sqrt{c}Q\sqrt{1-\frac{2}{c(p+1)}Q^{p-1}}}=-\int\frac{tanh(\theta)d\theta}{\sqrt{1-sech^2(\theta)}}=\int d\theta.$$

Portanto, $\theta=x+k$, onde k é uma constante em relação a x.

Fazendo $k=0$, concluímos que $Q(x)=\left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(sech^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$ é uma solução explícita da equação (3.3).

Seja $V(t,x,y)$ uma solução da equação (3.3). Buscando uma linearização em torno *de $Q(x)$, temos*

$$\begin{aligned}\partial_t(V+Q) &= -\partial_{xxx}(V+Q) - \partial_x(V+Q)^p + \partial_x^{-1}\partial_y^2(V+Q)\\ -cV_x + V_t - Q_t &= -V_{xxx} - Q_{xxx} - p(V+Q)^{p-1}(V_x+Q_x) + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V.\end{aligned}$$

Caso $p=2$,

$$\begin{aligned}-cV_x + V_t &= -V_{xxx} - 2VV_x - 2QV_x - 2VQ_x + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V\\ \Longrightarrow V_t &= -V_{xxx} + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V + cV_x - (2QV)_x - (V^2)_x.\end{aligned}$$

Caso $p=3$,

$$\begin{aligned}-cV_x + V_t &= -V_{xxx} - 3V^2V_x - 6VQV_x - 3Q^2V_x - 3V^2Q_x - 6VQQ_x + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V\\ \Longrightarrow V_t &= -V_{xxx} + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V + cV_x - (3Q^2V)_x - (V^3 + 3QV^2)_x.\end{aligned}$$

Caso $p=4$,

$$\begin{aligned}-cV_x + V_t &= -V_{xxx} - 4(V+Q)^3V_x - 4V^3Q_x - 12v^2QQ_x - 12VQ^2Q_x + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V\\ \Longrightarrow V_t &= -V_{xxx} + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V + cV_x - (4Q^3V)_x - (V^4 + 6Q^2V^2 4QV^3)_x.\end{aligned}$$

Logo, para todo $p = 2,3,4$, temos que

$$V_t = -V_{xxx} + \partial_x^{-1}\partial_y^2 V + cV_x - (pQ^{p-1}V)_x - P(D)V,$$

onde $P(D)$ é um operador diferencial associado ao polinômio P.

Podemos, então, encontrar soluções para o problema (3.3), considerando a equação linear

$$V_t = (-\partial_x^3 + \partial_x^{-1}\partial_y^2 + c\partial_x - \partial_x pQ^{p-1})V. \tag{3.4}$$

Procurando soluções da forma $U(x,y,t) = e^{\sigma t}e^{iky}V(x)$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_t U &= -\partial_x^3 U + \partial_y^2\partial_x^{-1}U + c\partial_x U - \partial_x pQ^{p-1}U \\
\Longrightarrow \sigma V &= -V_{xxx} - k^2\partial_x^{-1}V + cV_x - (pQ^{p-1}V)_x \\
\Longrightarrow \sigma V &= (-\partial_x^3 - k^2\partial_x^{-1} + c\partial_x - \partial_x pQ^{p-1})V
\end{aligned}$$

Fazendo $V = \partial_x U$,

$$\begin{aligned}
\sigma\partial_x U &= -\partial_x^4 U - \partial_x k^2\partial_x^{-1}U + \partial_x c\partial_x U - \partial_x pQ^{p-1}\partial_x V \\
\Longrightarrow -\sigma\partial_x U &= (-\partial_x[-\partial_x^2 + c - pQ^{p-1}]\partial_x + k^2)U
\end{aligned}$$

Assim, ficamos com um problema de autovalores sob a forma

$$\sigma A(k)U = L(k)U,$$

com $A(k) = -\partial_x$ e $L(k) = -\partial_x(-\partial_{xx} + c - pQ^{p-1})\partial_x + k^2$ definidos sobre $H^4(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Usamos $c = 1$ para verificar que os operadores A e L satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1, no entanto, isso irá ocorrer independente da escolha de c.

Precisamos verificar que $L(k)$ é auto-adjunto e não-limitado para todo k.

Consideremos, para $\rho \in \mathbb{R}$,

$$U_\rho(x) = \begin{cases} \rho, & x \in [0,1] \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

De fato, $U_\rho \in H^4(\mathbb{R})$ e $L(k)U_\rho = k^2U_\rho$, logo

$$\|L(k)U_\rho\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} k^2|U_\rho|^2dx = \rho k^2.$$

Fazendo $\rho \to \infty$ temos que $\|L(k)U_\rho\|_{L^2} \to \infty$, donde $L(k)$ é uma família de operadores não-limitados.

Para mostrar que $L(k)$ é auto-adjunto definimos, para todo k, o operador

$$P(k) = L(k) - M\partial_x^2 : H^4(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

com constante finita $M = \| pQ^{p-1} \|_\infty$.

Observemos que, dados $U, V \in H^4(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
(L(k)U, V)_{L^2} &= (\partial_x^4 U, V)_{L^2} - (\partial_x^2 U, V)_{L^2} + (\partial_x pQ^{p-1}\partial_x U, V)_{L^2} + (k^2 U, V)_{L^2} \\
&= -(\partial_x^3 U, \partial_x V)_{L^2} + (\partial_x U, \partial_x V)_{L^2} - (pQ^{p-1}\partial_x U, \partial_x V)_{L^2} + k^2(U, V)_{L^2} \\
&= (\partial_x^2 U, \partial_x^2 V)_{L^2} - (U, \partial_x^2 V)_{L^2} - (\partial_x U, pQ^{p-1}\partial_x V)_{L^2} + (U, k^2 V)_{L^2} \\
&= (U, \partial_x^4 V)_{L^2} - (U, \partial_x^2 V)_{L^2} + (U, \partial_x pQ^{p-1}\partial_x V)_{L^2} + (U, k^2 V)_{L^2} \\
&= (U, L(k)V)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $H^4(\mathbb{R})$ *é denso em* $L^2(\mathbb{R})$, *concluímos que* $L(k)$ *é simétrico. De modo análogo verificamos também que* $P(k)$ *é simétrico. Observemos que este operador também é monótono. De fato,*

$$\begin{aligned}
(P(k)U, U)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x^4 U U + (\partial_x pQ^{p-1}U_x)U + k^2U^2 - (M+1)U_{xx}U\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(U_{xx}^2 - pQ^{p-1}U_x^2 + k^2U^2 + (M+1)U_x^2\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(U_{xx}^2 + U_x^2 + k^2U^2 + (M - pQ^{p-1})U_x^2\right) dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $Im(P(k) + I) = L^2(\mathbb{R})$.

Consideremos $b : H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$b(U, V) = \int_{\mathbb{R}} \left(U_{xx}V_{xx} + (M+1)U_xV_x - pQ^{p-1}U_xV_x + k^2UV\right) dx.$$

Segue da linearidade das operações envolvidas que $b(\cdot, \cdot)$ *é uma forma bilinear.Temos também, para* $U, V \in H^2(\mathbb{R})$, *que*

$$\begin{aligned}
|b(U, V)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |U_{xx}V_{xx} - (pQ^{p-1} - M - 1)U_xV_x + (k^2+1)UV| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |U_{xx}V_{xx}| dx + \int_{\mathbb{R}} |pQ^{p-1} - M - 1||U_xV_x| dx + (k^2+1)\int_{\mathbb{R}} |UV| dx \\
&\leq \|U_{xx}\|_{L^2}\|V_{xx}\|_{L^2} + (2M+1)\|U_x\|_{L^2}\|V_x\|_{L^2} + (k^2+1)\|U\|_{L^2}\|V\|_{L^2} \\
&\leq (2M+1)(k^2+1)\|U\|_{H^2}\|V\|_{H^2},
\end{aligned}$$

e

$$b(U,U)=\int_{\mathbb{R}}(U_{xx}^2-(pQ^{p-1}-M-1)U_x^2+(k^2+1)U^2)dx\geq \|U\|_{H^2}^2,$$

donde b *é uma forma bilinear contínua e coerciva.*

Sabemos que toda $f\in L^2(\mathbb{R})$ *pode ser identificada com um operador* $T_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*. Pelo Lema de Lax-Milgram 2.55 existe um único* $U\in H^2$ *tal que* $T_f(V)=b(U,V)$*, para todo* $V\in H^2$*. Ou seja,*

$$T_f(V)=\int_{\mathbb{R}}f(x)V(x)=\int_{\mathbb{R}}\left(U_{xx}V_{xx}+U_xV_x-pQ^{p-1}U_xV_x+k^2UV\right)dx=\int_{\mathbb{R}}(P(k)+I)UV,$$

para todo $V\in H^2(\mathbb{R})$*.*

Fazendo $T_f(U)$*, vemos que* $U\in H^2(\mathbb{R})$*, donde existe* $U\in H^4(\mathbb{R})$ *tal que* $(P(k)+I)U=f$*, para qualquer* $f\in L^2(\mathbb{R})$*.*

Segue, então, da Proposição 2.83 que $P(k)$ *é um operador auto-adjunto. Pondo* $a=M^2$*,* $b\in(0,1)$*,* $S=L(k)$ *e* $T=P(k)$ *nas hipóteses do Teorema 2.84, concluímos que* $L(k)$ *é um operador auto-adjunto.*

Agora mostramos que o operador $L(k)$ *satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.*

Dado $U\in H^4(\mathbb{R})$*, pela bilinearidade de produto interno e pela Desigualdade de Holder que*

$$\begin{aligned}(L(k)U,U)_{L^2}&=(\partial_x^4U,U)_{L^2}-(\partial_x^2U,U)_{L^2}+(\partial_xpQ^{p-1}\partial_xU,U)_{L^2}+k^2\|U\|_{L^2}^2\\&=\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^2+\|\partial_xU\|_{L^2}^2+k^2\|U\|_{L^2}^2-(pQ^{p-1},(\partial_xU)^2)_{L^2}\\&\geq\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^2+\|\partial_xU\|_{L^2}^2+k^2\|U\|_{L^2}^2-\|pQ^{p-1}\|_\infty\|\partial_xU\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Além disso, dados $\alpha,\beta>1$ *tais que* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ *temos pela desigualdade de Young que*

$$\begin{aligned}\|\partial_xU\|_{L^2}^2&\leq\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^2\|U\|_{L^2}^2\\&\leq\frac{\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^{2\alpha}}{\alpha}+\frac{\|U\|_{L^2}^{2\beta}}{\beta}\\&=\frac{\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^{2\alpha-1}}{\alpha}\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^2+\frac{\alpha-1}{\alpha}\|U\|_{L^2}^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\|U\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Escolhendo adequadamente α*, concluímos que dado qualquer* $\delta>0$*, existe* $c_\delta>0$ *tal que*

$$\|\partial_xU\|_{L^2}^2\leq\delta\|\partial_{xx}U\|_{L^2}^2+c_\delta\|U\|_{L^2}^2.$$

Portanto, pondo $\delta = 1/\|pQ^{p-1}\|_\infty$,

$$(L(k)U,U)_{L^2} \geq \|\partial_x U\|_{L^2}^2 + (k^2 - c_\delta\|pQ^{p-1}\|_\infty)\|U\|_{L^2}^2.$$

*Temos, então, para k suficientemente grande, que $(L(k)U,U)_{L^2} \geq \|U\|_{L^2}^2$, e assim, $L(k)$ satisfaz **(H1)**.*

*Para verificarmos a hipótese **(H2)** consideramos, para cada k, o operador $L_\infty(k) : H^4(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por $L_\infty(k) = -\partial_x(-\partial_x^2+1)\partial_x + k^2$. Vamos mostrar que $E = L(k) - L_\infty(k)$ é compacto, considerando em $H^4(\mathbb{R})$ a norma do gráfico, isto é, $\|\cdot\|_G^2 = \|L(k)\cdot\|_{L^2}^2 + \|\cdot\|_{H^4}^2$.*

Seja $\{U_j\}_j$ uma sequência tal que $\{U_j\}_j$ é limitada em $H^4(\mathbb{R})$ e $\{L(k)(U_j)\}_j$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$. Então, existe $U \in H^4(\mathbb{R})$ (passando, se necessário, a uma subsequência) tal que $U_j \rightharpoonup U$ em $H^4(\mathbb{R})$. Como a inclusão $H^4(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$ é compacta sobre domínios limitados (ver [3], página 215), existe uma subsequência de mesmo nome tal que $U_j \to U$, se $j \to \infty$, em $H^1(\Omega)$.

Seja φ uma função suave tal que $\varphi(x) = 1$, se $|x| \leq 1$ e $\varphi(x) = 0$, se $|x| \geq 2$ e definimos $\varphi_R(x) = \varphi(x/R)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cada R, temos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_R\partial_x pQ^{p-1}\partial_x(U_j - U)\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\partial_x pQ^{p-1}\partial_x(U_j-U)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\partial_x pQ^{p-1}\|_\infty \|\partial_x(U_j - U)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\partial_x pQ^{p-1}\|_\infty \|U_j - U\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $\Omega = [-2R, 2R]$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}\|_\infty^2 &= \left(\underset{|x|\leq 2R}{sup} |(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}(x)|^2 + \underset{|x|\geq 2R}{sup} |(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}(x)|^2 \right) \\
&\leq \left(\underset{|x|\leq 2R}{sup} |(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}(x)|^2 + \underset{|x|\geq 2R}{sup} |\partial_x pQ^{p-1}(x)|^2 \right),
\end{aligned}$$

logo, $\|(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}\|_\infty^2 \to 0$ se $R \to \infty$.

Dessa forma, como $\{U_j\}$ é limitada em $H^4(\mathbb{R})$,

$$\|(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}\partial_x(U_j - U)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}\|_\infty^2 \|\partial_x(U_j-U)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0$$

quando $R \to \infty$. Portanto, de

$$\|\partial_x pQ^{p-1}\partial(U_j - U)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|(1-\varphi_R)\partial_x pQ^{p-1}\partial_x(U_j - U)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|\varphi_R \partial_x pQ^{p-1}\partial_x(U_j - U)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

temos que $\|E(U_j - U)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pode ser arbitrariamente pequeno se escolhemos R suficientemente grande. Isto prova que

$$\partial_x pQ^{p-1}\partial U_j \to \partial_x pQ^{p-1}\partial U,$$

como queríamos demonstrar.

Logo, pelo Teorema de Invariância do Espectro Essencial 2.87, temos que $\sigma_{ess}(L(k)) = \sigma_{ess}(L_\infty(k))$.

Consideremos

$$L_\infty(k) - \lambda I = \partial_x^4 - \partial_x^2 + (k^2 - \lambda),$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $k^2 > \lambda$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
(L_\infty(k) - \lambda I)U = V \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_x^4 - \partial_x^2 + (k^2 - \lambda)U &= V \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\partial_x^4 U} - \widehat{\partial_x^2 U} + (k^2 - \lambda)\widehat{U} &= \widehat{V} \\
&\Leftrightarrow \quad (2\pi i x)^4\widehat{U} - (2\pi i x)^2\widehat{U} + (k^2 - \lambda)\widehat{U} &= \widehat{V} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi i x)^4 - (2\pi i x)^2 + (k^2 - \lambda)}\widehat{V} &= \widehat{U}
\end{aligned}$$

Então, dado $\widehat{V} \in L^2(\mathbb{R})$, existe um único $\widehat{U} \in L^2(\mathbb{R})$ tal que se $k^2 > \lambda$, então

$$\frac{1}{(2\pi x)^4 + (2\pi x)^2 + (k^2 - \lambda)}\widehat{V} = \widehat{U}.$$

Desta forma,

$$R_\lambda(L_\infty(k))V = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi i x)^4 - (2\pi i x)^2 + (k^2 - \lambda)}\widehat{V}\right),$$

e considerando que a Transformada de Fourier $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ é um isomorfismo temos que a equação $R_\lambda(L_\infty(k))$ tem solução única desde que $k^2 - \lambda$.

Como $k^2 - \lambda > 0$ segue que

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda(L_\infty(k))V\|_{L^2} &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi ix)^4 - (2\pi ix)^2 + (k^2-\lambda)} \widehat{V} \right) \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \frac{1}{(2\pi ix)^4 - (2\pi ix)^2 + (k^2-\lambda)} \widehat{V} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \frac{1}{(2\pi x)^4 + (2\pi x)^2 + (k^2-\lambda)} \widehat{V} \right\|_{L^2} \\
&\leq \|\widehat{V}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Plancherel 2.26, temos a continuidade da inversa, pois

$$\|R_\lambda(L_\infty(k))V\|_{L^2} \leq \|V\|_{L^2}.$$

Logo, podemos concluir que $\sigma_{ess}(L_\infty(k)) = \sigma_{ess}(L(k)) \subset [k^2, \infty)$, para todo $k \in \mathbb{R}$, donde o operador L satisfaz ***(H2)****.*

Dados $k_1 \geq k_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned}
(L(k_1)U, U)_{L^2} &= (-\partial_x(-\partial_x^2 + 1 - pQ^{p-1})U, U)_{L^2} + k_1\|U\|_{L^2}^2 \\
&\geq (-\partial_x(-\partial_x^2 + 1 - pQ^{p-1})U, U)_{L^2} + k_2\|U\|_{L^2}^2 \\
&= (L(k_2)U, U)_{L^2},
\end{aligned}$$

para qualquer $U \in H^4(\mathbb{R})$. Além disso,

$$\|L(k+h) - L(k) - 2kh\|_{L^2} = \|(k+h)^2 - k - 2kh\|_{L^2} = \|h^2\|_{L^2}.$$

Fazendo $h \to 0$ temos que $L'(k) = 2kI$. Portanto, se $k > 0$ e U é não nulo,

$$(L'(k)U, U)_{L^2} = 2k\|U\|_{L^2}^2 > 0$$

e, assim, fica verificado ***(H3)****.*

Finalmente, escrevemos $C = -\partial_x^2 + 1 - pQ^{p-1}$, então $L(0) = -\partial_x C \partial_x$. Notemos que $CQ' = 0$, pois Q é solução da equação $\partial_t U = \partial_x(-\partial_x^2 U - U^p)$, chamada de KdV generalizada.

De modo análogo ao que foi feito para obtermos o espectro essencial de $L(k)$, considerando *agora*

$$E = -pQ^{p-1} : H^4(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$$

obtemos que $\sigma_{ess}(C) \subset [1, \infty)$.

Como

$$Q'(x) = \frac{p+1}{2} tanh\left(\frac{(p-1)(x-t)}{2}\right)\left(sech^2\left(\frac{(p-1)x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

tem um único zero segue do Teorema 2.98 que C possui um único autovalor negativo associado ao autovetor ψ. Mais ainda,

$$(CU, U)_{L^2} \geq 0, \forall U \in H^3(\mathbb{R}) \text{ tal que } (U, \psi)_{L^2} = 0.$$

Agora, é possível construir uma sequência $\{u_n\}_n$ em $H^4(\mathbb{R})$ tal que $\partial_x u_n$ converge para ψ, então, para n suficientemente grande, $(L(0)u_n, u_n)_{L^2} = (C\partial_x u_n, \partial_x u_n)_{L^2}$ é negativo. Pela caracterização do menor autovalor para operadores auto-adjuntos (ver Seção 2.6.2, Observação 2.91) nós temos que $L(0)$ tem um autovalor negativo. Além disso,

$$(L(0)U, U)_{L^2} = (C\partial_x u, \partial_x U)_{L^2} \geq 0,$$

*sempre que $(\partial_x U, \psi)_{L^2} = 0$, donde $L(0)$ é não negativa sobre um espaço de codimensão um e então existe no máximo um autovalor negativo, portando **(H4)** está verificada.*

Temos, então do Teorema 3.1, que existem $\sigma > 0$, $k \neq 0$ e $V \in H^4(\mathbb{R})$ não-nulo tais que $\sigma A(k)V = L(k)V$, ou seja, uma onda

$$U(x, y, t) = e^{\sigma t} e^{iky} V(x)$$

que é solução do problema (3.3).

CAPÍTULO 4

UM RESULTADO DE INSTABILIDADE LINEAR PARA ONDAS SOLITÁRIAS

Seja H um espaço de Hilbert real com produto interno $(\cdot,\cdot)_H$ e H^* seu espaço dual. Consideramos o isomorfismo natural $I : H \longrightarrow H^*$ definido por

$$\langle Iu, v\rangle = (u, v)_H,$$

para $u, v \in H$.

Seja $J : \mathcal{D}(J) \subset H^* \longrightarrow H$ um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D}(J)$ denso em H^*. Acrescentamos ao operador J as hipóteses de ser injetor e antissimétrico, isto é,

$$\langle Ju, v\rangle = -\langle u, Jv\rangle,$$

para quaisquer $u, v \in \mathcal{D}(J)$.

Consideramos a equação linear hamiltoniana

$$u_t = JLu, \tag{4.1}$$

onde $L : H \longrightarrow H^*$ é um operador auto-adjunto. Buscamos resolver o problema de instabilidade linear desta equação através do trabalho desenvolvido por O. Lopes em [15].

Também consideramos outro operador fechado $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em H. Aqui, A é o gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários sobre H. Assumimos ainda que $J^{-1}A$ pode ser estendida a um operador auto-adjunto $B : H \longrightarrow H^*$. Também que existe um elemento não nulo $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ tal que $A\varphi \neq 0$, $B\varphi \neq 0$, $LA(\varphi) = 0$ e $IA\varphi, B\varphi \in \mathcal{D}(J)$. Além disso, que JL gera um grupo

$S(t)$ fortemente contínuo $\mathcal{C}_0$ no espaço H.

Definimos a projeção ortogonal $Q : H \longrightarrow H$ por

$$Qu = u - (A\varphi, u)_H \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} - (\psi, u)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2},$$

onde $\psi = I^{-1}B\varphi$.

Dados $y \in H^*$ e $u \in H$,

$$\begin{aligned}
\langle y, Qu \rangle &= \langle y, u \rangle - (A\varphi, u)_H \frac{\langle y, A\varphi \rangle}{\| A\varphi \|_H} - (\psi, u)_H \frac{\langle y, \psi \rangle}{\| \psi \|_H} \\
&= \langle y, u \rangle - \langle y, A\varphi \rangle \varphi \frac{\langle IA\varphi, u \rangle}{\| IA\varphi \|_H^2} - \langle y, \psi \rangle \frac{\langle B\varphi, u \rangle}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}.
\end{aligned}$$

Temos, então $Q^* : H^* \longrightarrow H^*$ definido por

$$Q^* y = y - \langle y, A\varphi \rangle \frac{IA\varphi}{\| IA\varphi \|_{H^*}^2} - \langle y, \psi \rangle \frac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}.$$

Denotamos $H_2 = Q(H)$, assim $H_2^* = Q^*(H^*)$.

Definimos $J_0 : \mathcal{D}(J_0) \subset H_2^* \longrightarrow H_2$ por $J_0 y = QJy$, com $\mathcal{D}(J) \cap H_2^*$, e $F : H_2 \longrightarrow H_2^*$ por $Fz = Q^* Lz$. Como Q é limitado, pois é uma projeção, J_0 é limitado.

Notemos que $J_0 y = QJy = Jy + \langle JIA\varphi, y \rangle \dfrac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
J_0 y &= Jy - (A\varphi, Jy)_H \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} - (I^{-1}B\varphi, Jy)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} \\
&= Jy - \langle IA\varphi, Jy \rangle \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} - \langle B\varphi, Jy \rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} \\
&= Jy + \langle JIA\varphi, y \rangle \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} + \langle JB\varphi, y \rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2}.
\end{aligned}$$

Como $y \in H_2^*$ deve existir $x \in H^*$ tal que $Q^* x = y$, donde

$$\langle JB\varphi, y \rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} = \langle A\varphi, Q^* x \rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} = \langle QA\varphi, x \rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2}.$$

Mas

$$QA\varphi = A\varphi - (A\varphi, A\varphi)_H \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} - (\psi, A\varphi)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} = -(\psi, A\varphi)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2},$$

ou seja, $QA\varphi \in H_2 \cap [A\varphi, \psi]$. Logo, $QA\varphi = 0$. Temos, então, que

$$J_0 y = Jy + \langle JIA\varphi, y\rangle \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2}.$$

Uma vez que J_0 Ã© a composição de operadores fechados, J_0 é fechado. Mais ainda, J_0 é antissimÃ©trico.

De fato, vimos que $\langle y, A\varphi\rangle = 0$ para qualquer $y \in H_2^*$. Com isso, dados $u, v \in H_2^*$,

$$\begin{aligned}
\langle J_0 u, v\rangle &= \langle Ju + \langle JIA\varphi, u\rangle \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2}, v\rangle \\
&= \langle Ju, v\rangle + \frac{\langle JIA\varphi, u\rangle}{\| A\varphi \|_H^2}\langle A\varphi, v\rangle \\
&= -\langle u, Jv\rangle \\
&= -\langle u, Jv\rangle - \frac{\langle JIA\varphi, u\rangle}{\| A\varphi \|_H^2}\langle u, A\varphi\rangle \\
&= -\langle u, Jv + \langle JIA\varphi, v\rangle \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} v\rangle \\
&= -\langle u, J_0 v\rangle.
\end{aligned}$$

Repare ainda que $Fz = Q^* Lz = Lz - \langle Lz, \psi\rangle \dfrac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}$.

Com efeito, dado $z \in H_2$, temos que

$$Fz = Lz - (Lz, A\varphi)_H \frac{IA\varphi}{\| IA\varphi \|_{H^*}^2} - (Lz, \psi)_H \frac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}$$

e que existe $u \in H$ tal que $z = Qu$, portanto,

$$Fz = Lz - (Qu, LA\varphi)_H \frac{IA\varphi}{\| IA\varphi \|_{H^*}^2} - (Lz, \psi)_H \frac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2},$$

e como $LA\varphi = 0$, obtemos o desejado.

Observemos, também, que F é auto-adjunto. De fato, dados quaisquer $u, v \in \mathcal{D}(F) \subset H_2$ ($u = Qu'$, $v = Qv'$),

$$\langle Fu, v\rangle = \langle Q^* LQu', Qv'\rangle = \langle LQu', Qv'\rangle = \langle Qu', LQv'\rangle = \langle Qu', Q^* LQv'\rangle = \langle u, Fv\rangle,$$

portanto, F é simétrico, e dado $u = Qu'$ com $u' \in \mathcal{D}(L)$, temos do fato de L ser auto-adjunto que $Iu' \in \mathcal{D}(L^*)$. Portanto, $Q^*Iu \in \mathcal{D}(F^*)$, mas

$$\begin{aligned} Q^*Iu' &= Iu' + \langle Iu', A\varphi\rangle \frac{IA\varphi}{\|IA\varphi\|_H^2} - \langle Iu', \psi\rangle \frac{B\varphi}{\|B\varphi\|_H^2} \\ &= Iu' + (u', A\varphi)_H \frac{IA\varphi}{\|A\varphi\|_H^2} - (u', \psi)_H \frac{I\psi}{\|\psi\|_H^2} \\ &= Iu, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(F^*)$. De modo análogo, verificamos a outra inclusão.

Consideremos, então, a equação hamiltoniana reduzida

$$z_t = J_0 F z \tag{4.2}$$

definida no espaço H_2.

Pelo espectro de F exprimimos o espectro de $I^{-1}F$ no sentido usual e nossa hipótese fundamental é a seguinte:

(H) Existe um número $\gamma > 0$ tal que o operador $F : H_2 \to H_2^*$ é invertível, tem exatamente um autovalor negativo e todos os outros autovalores de F estão contidos em $[\gamma, +\infty)$.

Exibimos alguns resultados que são necessários para a demonstração do critério apresentado em [15].

Teorema 4.1. *Seja K um cone convexo fechado de um espaço de Hilbert tal que existe um funcional linear contínuo f e uma constante $a > 0$ tais que $f(u) \geq a|u|$ para qualquer $u \in K$. Se $T : H \to H$ é um operador linear limitado que deixa K invariante, então T possui um autovetor em K associado a um autovalor não-negativo.*

Demonstração: Como K satisfaz as hipóteses do Teorema 2.69, K permite revestimento. Assim, pelo Teorema 2.71, existe um autovetor unitário $x_0 \in K$ de T com autovalor associado $f(Tx_0) > 0$, o que prova o resultado.

□

Teorema 4.2. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $T(t)$ um semigrupo (ou grupo) de classe $\mathcal{C}_0$ com gerador infinitesimal C. Então, o adjunto $T^*(t)$ é também um semigrupo (ou grupo) de classe $\mathcal{C}_0$ cujo gerador é C^*.*

Demonstração: A demonstração segue diretamente do Teorema 2.131 e da Proposição 2.134.

□

Lema 4.3. *O operador* $J_0 : \mathcal{D}(J_0) \subset H_2^* \to H_2$ *é injetivo.*

Demonstração: Suponhamos $y \in H_2^*$ tal que $J_0 y = QJy = 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= Jy - (A\varphi, Jy)_H \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} - (\psi, Jy)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} \\ &= Jy + \langle JIA\varphi, y\rangle \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$(\psi, Jy)_H = (I^{-1}B\varphi, Jy) = \langle B\varphi, Jy\rangle = \langle J^{-1}A\varphi, Jy\rangle = -\langle A\varphi, y\rangle$$

e que

$$\langle JIA\varphi, y\rangle = -\langle IA\varphi, Jy\rangle = -(A\varphi, Jy)_H.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= Jy - (A\varphi, Jy)_H \frac{JB\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} + \langle A\varphi, y\rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} \\ &= Jy - (A\varphi, Jy)_H \frac{JB\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} \\ &\Rightarrow \langle A\varphi, y\rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $Jy = (A\varphi, Jy)_H \dfrac{JB\varphi}{\| A\varphi \|_H^2}$. Como J é linear e injetiva, segue que $y = (A\varphi, Jy)_H \dfrac{B\varphi}{\| A\varphi \|_H^2}$.

Observemos que dado $v = Qu \in H_2$, então $\langle B\varphi, v\rangle = \langle Q^* B\varphi, u\rangle$, mas

$$Q^* B\varphi = B\varphi - \langle B\varphi, A\varphi\rangle \frac{IA\varphi}{\| IA\varphi \|_{H^*}^2} - \langle B\varphi, I^{-1}B\varphi\rangle \frac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2} = -\langle B\varphi, A\varphi\rangle \frac{IA\varphi}{\| IA\varphi \|_{H^*}^2},$$

e como Q^* é uma projeção sobre H_2^*, segue que $Q^* B\varphi = 0$. Assim, $\langle y, v\rangle = \dfrac{(A\varphi, Jy)_H}{\| A\varphi \|_H^2} \langle B\varphi, Qu\rangle = \dfrac{(A\varphi, Jy)_H}{\| A\varphi \|_H^2} \langle Q^* B\varphi, u\rangle = 0$, para todo $v \in H_2$. Portanto, $y = 0$ e segue que J_0 é injetiva.

□

Lema 4.4. *O operador $J_0F : \mathcal{D}(J_0F) \subset H_2 \to H_2$, onde $D(J_0F) = \mathcal{D}(JL) \cap H_2$, é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo C_0 de operadores $S_0(t)$ no espaço H_2.*

Demonstração: O operador $\mathcal{C} = QJQ^*LQ : \mathcal{D}(JL) \subset H \to H$ é uma perturbação limitada de JL. Dado $v \in \mathcal{D}(JL)$, do fato que $LA\varphi = 0$ e de L ser auto-adjunto, temos que $(Lv, A\varphi)_H = 0$ e que $(A\varphi, JLv)_H = (JLA\varphi, v)_H$. Disso e de $QA\varphi = 0$, vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}v &= QJQ^*LQv \\
&= QJQ^*L\left(v - (A\varphi, v)_H \frac{A\varphi}{\| A\varphi \|_H^2} - (\psi, v)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2}\right) \\
&= QJQ^*\left(Lv - (\psi, v)_H \frac{L\psi}{\| \psi \|_H^2}\right) \\
&= Q\ J\left(Lv - \langle Lv, \psi\rangle \frac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2} - \frac{(\psi, v)}{\| \psi \|_H^2}\left[L\psi - \langle L\psi, \psi\rangle \frac{B\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}\right]\right) \\
&= Q\left(JLv - \langle Lv, \psi\rangle \frac{A\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2} - \frac{(\psi, v)}{\| \psi \|_H^2}\left[JL\psi - \langle L\psi, \psi\rangle \frac{A\varphi}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}\right]\right) \\
&= JLv - (\psi, JLv)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} - \frac{\langle B\varphi, u\rangle}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}\left[JL\psi - (\psi, JL\psi)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2}\right] \\
&= JLv - \langle B\varphi, JLv\rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} - \frac{\langle B\varphi, u\rangle}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}\left[JL\psi - (\psi, JL\psi)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2}\right].
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{C} = JL + L_1$, onde $L_1 = -\langle B\varphi, JLv\rangle \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2} - \frac{\langle B\varphi, u\rangle}{\| B\varphi \|_{H^*}^2}\left[JL\psi - (\psi, JL\psi)_H \frac{\psi}{\| \psi \|_H^2}\right]$, e como $B\varphi \in H^*$ segue que L_1 é limitada.

Então, $\mathcal{C}$ é gerador de um grupo de operadores S_1 de classe C_0. Observemos, também, que $\mathcal{C}$ comuta com Q, pois como Q é uma projeção, então $Q^2 = Q$, e assim,

$$\mathcal{C}Q = QJQ^*LQ^2 = QJQ^*LQ = Q^2JQ^*LQ = Q\mathcal{C}.$$

Pela Proposição 2.114, podemos escrever

$$S_1(t)x - x = \mathcal{C}\int_0^t S_1(\tau)x d\tau,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(JL)$. Observemos que

$$QS_1(t)x - Qx = Q\mathcal{C}\int_0^t S_1(\tau)x d\tau = \mathcal{C}\int_0^t S_1(\tau)x d\tau = S_1(t)x - x.$$

Logo, para todo $x \in H_2$, $QS_1x = S_1x$. Assim, a família de operadores $S_0 : H_2 \to H_2$

definida por $S_0(t) = QS_1(t)$ é um grupo de classe C_0.

Notemos que, dado $x \in H_2 \cap \mathcal{D}(JL)$, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{S_0(h) - I}{h} x = \lim_{h\to 0} \frac{S_1(h) - I}{h} x = \mathcal{C}x.$$

Agora, se $\lim_{h\to 0} \frac{S_0(h) - I}{h} x$ existe para algum $x \in H_2$, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{S_0(h) - I}{h} x = \lim_{h\to 0} \frac{QS_1(h) - I}{h} x.$$

Portanto, $\mathcal{C}$ restrito ao H_2 é o gerador do grupo S_0. Como $\mathcal{C}|_{H_2} = J_0F$, temos o desejado.

□

Teorema 4.5. *Considerando o sistema de operadores definido acima e assumindo a hipótese* ***(H)****, o operador JL tem um autovalor real positivo e um autovalor real negativo.*

Demonstração:

Vamos mostrar, primeiramente, que o operador J_0F possui um autovalor real positivo e um negativo.

Pela hipótese **(H)**, existem $e \in H_2$, $\|e\|_{H_2} = 1$, e $\lambda_0 > 0$ tais que $Fe = -\lambda_0 e$. Definimos $K = \{z \in H_2; \langle Fz, z\rangle \leq 0$ e $(z, e)_H \geq 0\}$. Então, $K \neq \emptyset$, pois $e \in K$. Além disso, dado $\alpha \geq 0$ temos que $\alpha K \subset K$.

Dada uma sequência $\{z_n\}$ em K convergente para $z \in H_2$, temos que $\langle Fz_n, \cdot\rangle$ converge para $\langle Fz, \cdot\rangle$, pois $F = Q^*E$ é contínua. Assim,

$$\langle Fz_n, z_n\rangle \to \langle Fz, z\rangle \text{ e } (z_n, e)_H \to (z, e)_H.$$

Portanto, K é fechado.

Vamos estudar a aplicação $f : K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x, e)$. Dado $z \in K$ podemos escrever $z = \alpha e + v$, onde $v \in \{e\}^\perp$ é definido por $\{e\}^\perp = \{v \in H_2; (e, v) = 0\}$. Assim,

$$f(z) = (z, e) = -\frac{1}{\lambda_0}\langle z, Fe\rangle = -\frac{1}{\lambda_0}\langle Fz, e\rangle = \alpha\lambda_0 - \frac{1}{\lambda_0}\langle Fv, e\rangle = \alpha\lambda_0 + (v, e) = \alpha\lambda_0.$$

Logo, $\alpha \geq 0$, para todo $z \in K$. Além disso, $\langle Fz, z\rangle \leq 0$ implica que

$$\langle F(\alpha e + v), \alpha e + v\rangle = \alpha^2\langle Fe, e\rangle + \|v\|_H^2 = -\lambda_0\alpha^2 + \|v\|_H^2 \leq 0,$$

logo $\|v\|_H \leq \sqrt{\lambda_0}\alpha$, e assim, $f(z) = (z, e) \geq \sqrt{\lambda_0}\|v\|_H$, donde segue que

$$f(z)^2 \geq \frac{\lambda_0}{2}(\alpha^2 + \|v\|_H^2) = \frac{\lambda_0}{2}\|z\|_H^2.$$

Consideremos $z \in K \cap (-K)$. Então, $f(z) = (z, e) = 0$, donde $z = 0$, e portanto, $K \cap (-K) = \{0\}$.

Agora, sejam $z_1, z_2 \in K$ e $0 \leq r \leq 1$. Então,

$$(rz_1 + (1-r)z_2, e) = |r|(z_1, e) + |1-r|(z_2, e) \geq 0$$

e, escrevendo $z_i = \alpha_i e + v_i$, como

$$\langle Fz_1, z_2\rangle + \langle Fz_2, z_1\rangle = -2\lambda_0\alpha_1\alpha_2 + 2\langle v_1, v_2\rangle \leq 0$$

temos que

$$\langle F(rz_1 + (1-r)z_2), rz_1 + (1-r)z_2\rangle \leq r^2\langle Fz_1, z_1\rangle + (1-r)^2\langle Fz_2, z_2\rangle \leq 0.$$

Portanto K é um cone convexo e fechado em H_2.

Notemos, agora, que Fz é a derivada de Fréchet de $\langle Fz, z\rangle$. De fato,

$$|\langle F(z+h), z+h\rangle - \langle Fz, z\rangle - \langle Fz, h\rangle| = |\langle Fh, z+h\rangle|$$

e como $z + h \to z$ e $F(h) \to F(0)$ quando $\|h\|_H \to 0$, então

$$|\langle Fh, z+h\rangle| \to 0 \text{ quando } \|h\|_H \to 0.$$

Seja z uma solução para o sistema (4.2), então

$$L_{J_0F}\langle Fz, z\rangle = \langle Fz, J_0Fz\rangle = 0, \tag{4.3}$$

donde $\langle Fz, z\rangle$ é a primeira integral do sistema (4.2).

Consideramos, agora, $z \in K$ e $S_0(t)$ o grupo definido no Lema 4.4. Observemos que se $t = 0$, então

$$(S_0(0)z, e)_H = (z, e)_H \geq 0 \tag{4.4}$$

e

$$\langle FS_0(0)z, S_0(0)z\rangle = \langle Fz, z\rangle \leq 0. \tag{4.5}$$

Além disso, por (4.3),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle FS_0(t)z, S_0(t)z\rangle &= \langle \frac{d}{dt}FS_0(t)z, S_0(t)z\rangle + \langle FS_0(t)z, \frac{d}{dt}S_0(t)z\rangle \\
&= \langle FJ_0FS_0(t)z, S_0(t)z\rangle + \langle FS_0(t)z, J_0FS_0(t)z\rangle \\
&= \langle J_0FS_0(t)z, FS_0(t)z\rangle + \langle FS_0(t)z, J_0FS_0(t)z\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\langle FS_0(t), S_0(t)z\rangle$ é constante em relação a t e, por (4.5),

$$\langle FS_0(t)z, S_0(t)z\rangle = \langle Fz, z\rangle \leq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo, verificamos que $(S_0(t)z, e) \geq 0$. Portanto, K é invariante por $S_0(t)$.

Pelo Teorema 2.119, para λ suficientemente grande,

$$Tz = (\lambda I - J_0F)^{-1}(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S_0(t)zdt$$

também deixa K invariante.

Nessas condições, pelo Teorema 4.1 existem um $\alpha \geq 0$ e um elemento não nulo $w \in K$ tais que

$$Tw = (\lambda I - J_0F)^{-1}(w) = \alpha w$$

e daí,

$$w = \alpha(\lambda I - J_0F)w = \alpha w - \alpha J_0Fw,$$

donde $J_0Fw = \mu w$, com $\mu = \frac{1-\alpha}{\alpha} \neq 0$, pois J_0 e F são injetivas devido ao Lema 4.3 e à hipótese **(H)**. Além disso,

$$\sigma(J_0F) = \sigma((J_0F)^*) = -\sigma(FJ_0) = -\sigma(FJ_0FF^{-1}) = -\sigma(J_0F),$$

e assim, $-\mu \in \sigma(J_0F)$.

Pelo Teorema 5.8 em [9], o espectro essencial de J_0F está contido no eixo imaginário, donde $-\mu$ é um autovalor de J_0F, o que prova o desejado.

Finalmente, escrevemos $u = w + \beta A\varphi \in H$, onde $\beta = \frac{(A\varphi, JLw)_H}{\mu\|A\varphi\|_H^2}$.

$$\begin{aligned}
JLu &= JL(w) + \beta JL(A\varphi) \\
&= J\left(Fw + \langle Lw, \psi\rangle \frac{B\varphi}{\|B\varphi\|_{H^*}^2}\right) \\
&= JFw + \langle Lw, \psi\rangle \frac{A\varphi}{\|B\varphi\|_{H^*}^2} \\
&= J_0Fw - \langle JIA\varphi, Fw\rangle \frac{A\varphi}{\|A\varphi\|_H^2} + \langle Lw, \psi\rangle \frac{A\varphi}{\|B\varphi\|_{H^*}^2} \\
&= J_0Fw + \langle IA\varphi, JLw\rangle \frac{A\varphi}{\|A\varphi\|_H^2} \\
&= \mu u.
\end{aligned}$$

Portanto, o operador JL possui um autovalor positivo e um negativo em $\mathbb{R}$.

□

Exemplo 4.6. *Como uma aplicação para o Teorema 4.5 consideremos a equação KdV*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + u^p) \tag{4.6}$$

no espaço $L^2(\mathbb{R})$.

De modo análogo ao Exemplo 3.3, existe $u(t,x) = \varphi_c(x) \in H^1$ solução da equação

$$-c\varphi + \varphi'' + \varphi^p = 0, \tag{4.7}$$

dada por $\varphi_c(x) = \left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(sech^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

A equação

$$\partial_t u = \partial_x(-\partial_x^2 + c - p\varphi_c^{p-1})u \tag{4.8}$$

é a linearização do problema (4.6) em torno da solução $\varphi_c(x)$.

Temos, então, uma equação da forma (4.1) com $J = \partial_x$ *e* $L = -\partial_x^2 + c - p\varphi_c^{p-1}$. *Consideremos* $A = \partial_x$, *portanto,* $B = J^{-1}A = I$.

Pela Teoria de Sturm-Liouville, Teorema 2.98, o operador L *possui um único autovalor negativo e simples* λ_0 *e o autovalor* 0 *é simples com autofunção associada* φ_c'. *Isto é,* $\varphi_c' = A\varphi_c \neq 0$ *e* $LA\varphi_c = 0$.

Definimos $H_2 = \{u \in L^2(\mathbb{R});\ (u, \varphi_c)_{L^2} = (u, \varphi_c')_{L^2} = 0\}$ *e* F *sobre* $\mathcal{D}(L) \cap H_2$ *dado por*

$$\begin{aligned} Fu &= Lu - \langle Lu, \varphi_c\rangle \frac{B\varphi_c}{\|B\varphi_c\|_{L^2}^2} \\ &= Lu - \langle Lu, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2} \\ &= L\left(u - \langle Lu, \varphi_c\rangle \frac{\psi}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}\right), \end{aligned}$$

onde $\psi = -\dfrac{d}{dc}\varphi_c$.

O espaço H_2 *é invariante por* F. *De fato,*

$$\begin{aligned} (Fu, \varphi_c')_{L^2} &= (Lu - \langle Lu, \psi\rangle \frac{B\varphi_c}{\|B\varphi_c\|_{L^2}^2}, \varphi_c')_{L^2} \\ &= (Lu, \varphi_c')_{L^2} - \frac{\langle Lu, \psi\rangle}{\|B\varphi_c\|_{L^2}^2}(B\varphi_c, \varphi_c')_{L^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $u \in H_2$, *sendo que* ψ *satisfaz* $L\psi = \varphi_c$.

Mostremos, agora, que F *definido sobre* H_2 *satisfaz a hipótese* ***(H)***.

Seja $u \in H_2$ *tal que* $Fu = 0$. *Então* $L\left(u - \langle Lu, \varphi_c\rangle \dfrac{\psi}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}\right) = 0$, *donde*

$$u - \langle Lu, \varphi_c\rangle \frac{\psi}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2} = \theta\varphi_c'. \tag{4.9}$$

Observemos que

$$\left(u - \langle Lu, \varphi_c\rangle \frac{\psi}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}, \varphi_c\right)_{L^2} = (u, \varphi_c)_{L^2} - \frac{1}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}\langle Lu, \varphi_c\rangle(\psi, \varphi_c)_{L^2} = \theta(\varphi_c', \varphi_c)_{L^2}.$$

Notemos que, para $p > 5$*,* $(\psi, \varphi)_{L^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dc}\int_{\mathbb{R}} \varphi_c^2(x)dx > 0$*. De fato,*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi_c^2(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}} \left[sech^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)\right]^{\frac{2}{p-1}} dx \\
&= \left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\sqrt{c}(p-1)} \left[sech^2(\xi)\right]^{\frac{2}{p-1}} d\xi \\
&= c^{\frac{5-p}{2(p-1)}} \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}} \frac{2}{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left[sech^2(\xi)\right]^{\frac{2}{p-1}} d\xi,
\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{d}{dc}\int_{\mathbb{R}} \varphi_c^2(x)dx = \frac{5-p}{2(p-1)}\, c^{\frac{2(2-p)}{p-1}} \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}} \frac{2}{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left[sech^2(\xi)\right]^{\frac{2}{p-1}} d\xi.$$

De

$$\frac{5-p}{2(p-1)} < 0 \text{ se } p > 5,$$

considerando $c > 0$*, temos que* $-\frac{d}{dc}\int_{\mathbb{R}} \varphi_c^2(x)dx < 0$*. Disso e de* $(u, \varphi_c)_{L^2} = (\varphi_c', \varphi_c)_{L^2} = 0$ *obtemos que* $\langle Lu, \varphi_c\rangle = 0$*. Substituindo em (4.9) temos que* $u = \theta\varphi_c'$*.*

De $u \in H_2$*, temos* $(u, \varphi_c')_{H^2} = \theta\|\varphi_c'\|_{L^2}^2 = 0$*, ou seja,* $\theta = 0$*. Logo,* F *é injetora.*

Como F *é auto-adjunto,* $R(F) = (Ker(F))^{\perp} = H_2$ *(ver [16], página 141), donde* F *é sobrejetora. Portanto,* F *é invertível.*

Seja χ *o único elemento em* $\mathcal{D}(L)$ *tal que* $\|\chi\|_{L^2} = 1$ *e* $L\chi = -\lambda_0\chi$*, com* $\lambda_0 > 0$*. Então*

$$\begin{aligned}
(F\chi, \chi)_{L^2} &= \left(L\chi - \langle L\chi, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}, \psi\right)_{L^2} \\
&= (L\chi, \chi)_{L^2} - \frac{1}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}\langle L\chi, \varphi_c\rangle(\varphi_c, \chi)_{L^2} \\
&= -\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}\langle \varphi_c, \chi\rangle^2 \\
&< -\lambda_0 + \lambda_0\|\chi\|_{L^2}^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

portanto, $(F\chi,\chi)_H < 0$*, donde segue que* F *tem ao menos um autovalor negativo (ver [2], página 490).*

Suponhamos, agora, que existem $z_1, z_2 \in H_2$ *tais que* $Fz_1 = \mu_1 z_1$ *e* $Fz_2 = \mu_2 z_2$*, com* $\mu_1, \mu_2 < 0$ *distintos. Então*

$$Lz_1 - \langle Lz_1, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2} = \mu_1 z_1$$

e

$$Lz_2 - \langle Lz_2, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2} = \mu_2 z_2,$$

donde

$$\begin{aligned} \langle Lz_1, z_1\rangle &= \langle \mu_1 z_1 + \langle Lz_1, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}, z_1\rangle \\ &= \langle \mu_1 z_1, z_1\rangle + \langle Lz_1, \varphi_c\rangle \frac{1}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2} \langle \varphi_c, z_1\rangle \\ &= \mu_1 \|z_1\|_{L^2}^2 \ < \ 0 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\langle Lz_2, z_2\rangle < 0.$$

Observemos que $\langle Lz_1, z_2\rangle = 0$*. De fato,*

$$\begin{aligned} \langle Lz_1, z_2\rangle &= \langle \mu_1 z_1 + \langle Lz_1, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}, z_2\rangle \\ &= \mu_1 \langle z_1, z_2\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle Lz_1, z_2\rangle &= \langle z_1, Lz_2\rangle \\ &= \langle z_1, \mu_2 z_2 + \langle Lz_2, \varphi_c\rangle \frac{\varphi_c}{\|\varphi_c\|_{L^2}^2}\rangle \\ &= \mu_2 \langle z_1, z_2\rangle. \end{aligned}$$

Como $\mu_1 \neq \mu_2$ *segue que* $\langle Lz_1, z_2\rangle = 0$*.*

Isso mostra que a forma quadrática $\langle Lv, v\rangle$ *é negativa sobre o espaço de dimensão dois* $[z_1, z_2]$ *e, como sabemos que* L *possui um autovalor negativo, concluímos que* L *deve ter ao menos dois autovalores negativos, o que é um absurdo. Portanto,* F *tem somente um autovalor negativo.*

Segue do fato de F ser injetora que existe $\gamma > 0$ tal que os demais autovalores de F estão em $[\gamma, \infty)$.

Referências Bibliográficas

[1] ARNOL'D, V. I.; **Ordinary Differential Equations**, - 3.Ed - New York, Springer-Verlag, 1992.

[2] BREZIS, H.; **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, New York, Springer, 2010.

[3] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, Maringá, Eduem, 2009.

[4] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V. **Introdução á Análise Funcional**, Maringá, Eduem, 2011.

[5] ABLOWITZ, M. J.; CLARKSON, P. A.; **Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering**, Cambridge University Press, 1991.

[6] FALKOVITCH, G.; TURITSYN, S.; **Stability of magneto elastic solitons and self-focusing of sound in antiferromagnet**, Soviet Phys. JEETP 62 (1985), 146?152.

[7] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, - 2.Ed - Rio de Janeiro, UFRJ.IM, 2000.

[8] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I.**, Jornal of Functional Analysis, 74 1987, 160-197.

[9] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry, part. II**, Jornal of Functional Analysis, 1994, 308–348.

[10] KATO, T. **Perturbation Theory for Linear Operators**, - 2.Ed - Berlin, Springer, 1984.

[11] KELLEY, P. L. **Self-focusing of optical beams**, Phys. Rev. Lett. 15, 1965, 1005?1008.

[12] KESAVAN, S. **Nonlinear Functional Analysis: A First Course**, Text and Readings in Mathematics 28, 2004.

[13] KRASNOSELSKII, M. **Positive Solutions of Operator Equations**, The Netherlands, P. Noordholf Ltd, 1964.

[14] LINARES, F.; PONCE, G. **Introduction to Nonlinear Dispersive Equations**, New York, Springer, 2000.

[15] LOPES, O. **A Linearized Instability Result for Solitary Waves**, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 8 (2002), 115-119.

[16] OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[17] PAVA, J.A. **Nonlinear Dispersive Equations: Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Wave Solutions**, Provedence, AMS, 2009.

[18] PIGOLA, S; SETTI, A. G.; RIGOLI, M. **Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis**

[19] ROUSSET, F.; TZVETKOV, N. **A Simple Criterion of Transverse Linear Instability for Solitary Waves**, Mathematical Research Letters, 17 (2010), 157-169.

[20] WHEEDEN, R.; ZYGMUND, A. **Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis**, - 2.ED - Boca Raton, Chapman and Hall, 2015.

Referências Bibliográficas