UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

LAÍS SPADA DA FONSECA

Automorfismos multiplicativos e internos de uma álgebra de incidência

Maringá-PR
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AUTOMORFISMOS MULTIPLICATIVOS E INTERNOS DE UMA ÁLGEBRA DE INCIDÊNCIA

LAÍS SPADA DA FONSECA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Junior.

Maringá-PR
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

F676a

Fonseca, Laís Spada da
Automorfismos multiplicativos e internos de uma álgebra de incidência / Laís Spada da Fonseca. -- Maringá, 2016.
93 f. : il. figs., grafs.

Orientador: Prof°. Dr°. Ednei Aparecido Santulo Junior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2016.

1. Álgebra de incidência. 2. Álgebra de incidência - Automorfismos multiplicativos. 3. Álgebra de incidência - Automorfismos internos. 4. Incidence algebra. 5. Multiplicative automorphisms. 6. Inner automorphisms. I. Santulo Junior, Ednei Aparecido, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512.96

LAÍS SPADA DA FONSECA

AUTOMORFISMOS MULTIPLICATIVOS E INTERNOS DE UMA ÁLGEBRA DE INCIDÊNCIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Laerte Bemm
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 23 de fevereiro de 2016.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho à minha família,
com especial carinho à minha mãe, Sidney Spada,
e à minha irmã, Gabriela Spada Bana,
aos meus amigos e a todos que me apoiaram.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades e por me dar força e disposição para aproveitá-las.

Agradeço também à minha família, por toda a ajuda e compreensão, em especial à minha irmã e à minha mãe, por proporcionar o que fosse preciso para que tudo desse certo.

Aos meus amigos do mestrado Alisson, Anderson, Gabriel, Giovana, Jéssica, Talita e Vanessa, e aos amigos Alysson e Mariana, por sempre me apoiarem, me darem forças e torcerem por mim.

A todos os professores de minha vida acadêmica, em especial aos professores da graduação e do mestrado, pela inspiração.

Ao meu orientador Ednei Aparecido Santulo Junior, não só pelo conhecimento transmitido, mas também por todo o apoio, paciência, dedicação e confiança. Aos professores da banca, Laerte Bemm e Marcelo Muniz Silva Alves, pela dedicação ao ler o trabalho e pelas valiosas sugestões e correções.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E, finalmente, a todos que fazem parte da minha vida e que torceram por mim.

A Matemática é o alfabeto com o
qual Deus escreveu o Universo.
Galileu Galilei

Resumo

O principal objetivo desse trabalho é apresentar diferentes condições necessárias e suficientes para que um automorfismo multiplicativo de uma álgebra de incidência seja interno. Primeiramente é verificado que um automorfismo multiplicativo é interno se e somente se o elemento multiplicativo da álgebra associado ao automorfismo em questão for fracionário. Em seguida é apresentada uma condição necessária e suficiente que considera o diagrama de Hasse do poset como um grafo direcionado com pesos oriundos do automorfismo multiplicativo considerado. Por fim, é mostrado que o quociente do grupo de automorfismos multiplicativos de uma álgebra pela interseção desse grupo com o grupo de automorfismos internos da álgebra é isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia do poset da álgebra e alguns exemplos são fornecidos.

Palavras-chave: Álgebra de incidência, automorfismos multiplicativos, automorfismos internos.

Abstract

The main goal of this work is to present different necessary and sufficient conditions for a multiplicative automorphism of an incidence algebra to be inner. Firstly it is verified that a multiplicative automorphism is inner if and only if the element of the incidence algebra associated to that automorphism is fractionary. In the sequence, it is presented a necessary and sufficient condition which considers the Hasse diagram of the poset as a directed graph having weights given by the considered multiplicative automorphism. Finally, it is shown that the quotient group of the multiplicative automorphisms of an incidence algebra over the intersection of that group with the inner automorphisms of the algebra is isomorphic to the first cohomology group of the poset of that algebra and some examples are provided.

Keywords: Incidence algebra, multiplicative automorphisms, inner automorphisms.

SUMÁRIO

Introdução **11**

1 Preliminares **14**

1.1 O Radical de Jacobson 14

1.2 Conjuntos Parcialmente Ordenados 16

1.3 O Diagrama de Hasse 20

1.4 Funções que preservam ordem 22

2 Álgebra de Incidência **27**

2.1 O Problema do Isomorfismo 34

2.2 Automorfismos e Teorema da Decomposição 40

3 Automorfismos multiplicativos e internos **53**

4 Homologia e Cohomologia de Conjuntos Parcialmente Ordenados **73**

4.1 O primeiro grupo de cohomologia 73

4.2 Cálculo do primeiro grupo de cohomologia 78

Bibliografia **93**

INTRODUÇÃO

As álgebras de incidência foram primeiramente consideradas formalmente como objeto de estudo por Rota em [18], mas o próprio Rota, nesse artigo, diz que a ideia não é nova, remontando a trabalhos de Bell [3], Dedekind [8] e Ward [25] da década de 1930.

A motivação de Rota ao considerar álgebras de incidência foi obter uma sistematização para determinar que tipos de problemas combinatórios de enumeração e contagem poderiam ser resolvidos através de generalizações do princípio de inclusão-exclusão. Após o trabalho de Rota, as álgebras de incidência passaram a ser objeto de interesse de outros pesquisadores.

Uma álgebra de incidência de um conjunto parcialmente ordenado finito é sempre isomorfa a uma subálgebra de uma álgebra de matrizes triangulares superiores. Quando o conjunto é infinito, mas localmente finito, a álgebra de incidência considerada sobre ele torna-se uma generalização bem comportada da álgebra de matrizes triangulares superiores. Além disso, álgebras de incidência são isomorfas ao quociente de uma álgebra de caminhos cuja aljava (*quiver*) provém do diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado.

Um dos problemas famosos sobre as álgebras de incidência é o problema do isomorfismo, cujo objetivo é determinar se o fato de duas álgebras de incidência serem isomorfas implica que os posets (conjuntos parcialmente ordenados) de cada uma delas também o são. Esse problema foi amplamente estudado em diferentes contextos

e sob diferentes hipóteses e, em todos os casos, a resposta foi positiva. Os resultados relativos a esse problema podem ser encontrados em [2], [10], [11], [13], [16], [17], [22] e [23].

Os automorfismos e involuções de uma álgebra de incidência também foram e têm sido alvos de estudo. Os automorfismos foram abordados em [1], [7], [9], [14], [19], [20], [22], dentre outros. As involuções foram estudadas em [5], [6], [21], dentre outros. Tanto involuções como automorfismos podem ser decompostos como uma composição de três automorfismos: um interno, um multiplicativo e um induzido de um automorfismo (ou involução, dependendo do caso) do poset sobre o qual a álgebra está sendo considerada. Embora tal decomposição, em geral, não seja única pois a interseção entre o subgrupo dos automorfismos multiplicativos e o subgrupo dos internos não seja trivial, o automorfismo (ou involução) induzido(a) de um automorfismo do poset é único. Em [4], a fim de obter a classificação das involuções de uma álgebra de incidência, é obtido o número de classes de equivalência no conjunto das involuções de uma álgebra de incidência quando a equivalência é obtida via um automorfismo interno. Se todo automorfismo multiplicativo é interno e o poset em questão admite uma única involução, isso fornece todas as classes de equivalência das involuções da álgebra. Embora critérios para que um automorfismo multiplicativo seja interno fossem conhecidos antes de [5], os mesmos não fornecem uma maneira prática de descobrir se isso ocorre ou não, a não ser em alguns casos particulares. Em [5] é descrito como obter essa informação a partir do diagrama de Hasse do poset sobre o qual a álgebra de incidência está sendo considerada. Em algumas referências, como [12] e [22], aparece, implicitamente, a afirmação de que o quociente do grupo dos automorfismos multiplicativos por sua interseção com os internos de uma álgebra de incidência fixa é isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia do poset, no entanto uma demonstração explícita desse fato não é apresentada.

Esse trabalho teve, como principal objetivo, apresentar os resultados de [5], bem como apresentar a demonstração da afirmação feita por Stanley e Khripchenko referente aos grupos de cohomologia do poset, além de apresentar o cálculo do primeiro grupo de cohomologia para alguns posets notáveis.

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 1 são definidos os objetos elementares e apresentados os resultados essenciais para a construção das

álgebras de incidência. No capítulo 2 são apresentadas as álgebras de incidência e também são apontados alguns dos principais resultados relativos a suas propriedades, principalmente no tocante a seus automorfismos. No capítulo 3 são apresentados os resultados de [5]. Por fim, no capítulo 4 é mostrado que o quociente entre o grupo dos automorfismos multiplicativos e sua interseção com o grupo dos automorfismos internos é isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia do poset e são exibidos alguns exemplos de cálculos explícitos desses grupos de cohomologia.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo será dedicado aos conceitos essenciais e resultados importantes para o estudo de álgebras de incidência, como o radical de Jacobson de um anel, conjuntos parcialmente ordenados e seus diagramas de Hasse e isomorfismos entre conjuntos parcialmente ordenados.

1.1 O Radical de Jacobson

Faremos uma breve revisão dos principais resultados sobre o radical de Jacobson de um anel com unidade, pois muitos resultados sobre o radical de Jacobson de uma álgebra de incidência serão utilizados posteriormente.

Definição 1.1. Seja R um anel com unidade. O *radical de Jacobson de* R, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R.

Observação 1.2. *O radical de Jacobson de um anel com unidade R é um ideal à esquerda de R, uma vez que é a interseção de ideais à esquerda de R.*

Proposição 1.3. *Seja R um anel com unidade. Então, $r \in J(R)$ se, e somente se, $1 - tr$ é invertível à esquerda, para todo $t \in R$.*

Demonstração. Seja r um elemento de $J(R)$ e seja M um ideal à esquerda maximal qualquer de R. Então $r \in M$ e, assim, $tr \in M$, para todo $t \in R$. Dessa forma, como $M \neq R$, então $1 - tr \notin M$, para todo ideal à esquerda maximal M de R e para todo $t \in R$. Considere o ideal à esquerda I gerado por $1 - tr$. Note que, se $I \neq R$, existe um ideal à esquerda maximal M_0 de R tal que $I \subset M_0$. Mas dessa maneira $1 - tr \in M_0$, com M_0 ideal à esquerda maximal, o que é um absurdo. Logo $I = R$ e, portanto, $1 - tr$ é invertível à esquerda, para todo $t \in R$.

Reciprocamente, seja $r \in R$ tal que $1 - tr$ é invertível à esquerda, para todo $t \in R$, e seja M um ideal à esquerda maximal de R. Então $1 - tr \notin M$, para todo $t \in R$. Assim, $1 \notin M + Rr$ e, portanto, $M + Rr \neq R$. Dessa forma, $M \subset M + Rr \neq R$ e, pela maximalidade de M, $Rr \subset M$. Portanto $r \in M$ e, como M é um ideal à esquerda maximal qualquer de R, segue que $r \in J(R)$.

□

Proposição 1.4. *Seja R um anel com unidade. Então $J(R)$ é um ideal bilateral de R.*

Demonstração. Basta mostrar que $J(R)$ é um ideal à direita, pois sabemos que o mesmo é um ideal à esquerda. Sejam $s \in J(R)$ e $r \in R$. Para mostrar que $sr \in J(R)$, pela proposição anterior, basta mostrar que $1 - usr$ é invertível à esquerda para cada $u \in R$.

Seja $u \in R$ qualquer. Como $J(R)$ é um ideal à esquerda, temos que $rus \in J(R)$. Pela proposição anterior, existe $v \in R$ tal que $v(1 - rus) = 1$, logo $v = 1 + vrus$. Assim, temos que

$$(1 + usvr)(1 - usr) = 1 - usr + usvr - us(vrus)r = 1 + usvr - us(1 + vrus)r$$

$$= 1 + usvr - usvr = 1.$$

Portanto, $1 - usr$ é invertível à esquerda, para todo $u \in R$ e, assim, concluímos que $J(R)$ é um ideal à direita, como queríamos.

□

Exemplo 1.5. Se R é um corpo, então $J(R) = (0)$, pois o único ideal maximal de R é (0).

Lema 1.6. *Sejam R um anel com unidade e $y \in R$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $y \in J(R)$;
2. $1 - xyz$ *é invertível em* R, *para quaisquer* $x, z \in R$.

Demonstração. Note que, em (2), tomando $z = 1$, temos que $1 - xy$ é invertível em R, para todo $x \in R$, então pela Proposição 1.3 temos a condição (1).

Reciprocamente, sejam $y \in J(R)$ e $x, z \in R$ quaisquer. Como, pela proposição anterior, $J(R)$ é um ideal bilateral de R, temos que $yz \in J(R)$ e, assim, pela Proposição 1.3, existe $u \in R$ tal que $u(1 - xyz) = 1$. Então $u = 1 + u(xyz) = 1 - u(-xyz)$ e como $-xyz \in J(R)$ pela proposição anterior, segue da Proposição 1.3 que u também é invertível à esquerda. Logo, u é invertível e, portanto, $1 - xyz$ é um elemento invertível de R, como queríamos.

□

Segue do item (2) do lema anterior que o radical de Jacobson de um anel R coincide com a interseção de todos os ideais à direita maximais de R.

1.2 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Nesta seção, revisaremos o que é um conjunto parcialmente ordenado e conceitos relacionados, tais como cadeia e conexidade.

Definição 1.7. Um *conjunto parcialmente ordenado*, ou simplesmente *poset*, como utilizaremos daqui em diante, é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial.

Recordemos que uma relação R em um conjunto X é uma *relação de ordem parcial* se a mesma é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é:

1. $x \; R \; x$, para todo $x \in X$;
2. Se $x \; R \; y$ e $y \; R \; x$, então $x = y$;
3. Se $x \; R \; y$ e $y \; R \; z$, então $x \; R \; z$.

Daqui em diante, denotaremos a relação de ordem parcial de um poset X por $\leq$, bem como $(X, \leq)$. Os elementos de um poset X serão chamados de *pontos* de X. Dizemos que $p, q \in X$ são *comparáveis* se $p \leq q$ ou $q \leq p$. Também, dizemos que "p é estritamente menor que q", e escrevemos $p < q$, se $p \leq q$ e $p \neq q$. Um poset X será chamado de *finito (infinito)* se o conjunto X for finito (infinito).

Exemplo 1.8. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, os inteiros $\mathbb{Z}$, os racionais $\mathbb{Q}$ e os números reais $\mathbb{R}$ com suas ordens usuais são posets.

Exemplo 1.9. O conjunto das partes de um conjunto X, considerado com a inclusão de conjuntos $\subseteq$, é um poset.

Exemplo 1.10. Os números naturais podem também ser ordenados da seguinte forma: dados $p, q \in \mathbb{N}$, dizemos que $p \mid q$ se p divide q. Entende-se que p divide q se existe um número natural c de modo que $q = cp$. Sob essa definição, 1 divide todos os números naturais e todos os naturais (incluindo o 0) dividem 0. Logo, $1 \mid a$ e $a \mid 0$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Assim, $(\mathbb{N}, \approx)$ também é um poset.

Exemplo 1.11. Dado um poset $(X, \leq)$, o *poset dual* de X, denotado por $\widetilde{X}$, é formado pelos mesmos elementos de X com a ordem $\preceq$ dada por: $x \preceq y \Leftrightarrow y \leq x$.

Exemplo 1.12. Fixado um natural n, consideremos a ordem em $\mathbb{N}^n$ dada por:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \text{ ou existe um } k \in \{1, \ldots, n\}$$

tal que $x_i = y_i$ para todo $i < k$ e $x_k < y_k$. Então, $\mathbb{N}^n$ munido dessa ordem é um poset. Tal ordem é chamada de *ordem lexicográfica*.

Definição 1.13. Um elemento x de um poset X é dito *maximal* se sempre que $x \leq y$, com $y \in X$, então $x = y$. Se X possui um elemento x tal que $y \leq x$ para todo $y \in X$, então x é chamado o elemento *máximo* de X. Analogamente definem-se elemento *minimal* e elemento *mínimo* de um poset.

Observação 1.14. *Repare que todo elemento mínimo (máximo) é minimal (maximal), mas o contrário nem sempre ocorre. Considere, por exemplo, o conjunto dos números naturais com a ordem definida no Exemplo* 1.10. *Neste caso,* 1 *é o mínimo e* 0 *é o máximo. Se considerarmos o subconjunto* $Y = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ *com a mesma ordem dada anteriormente, temos agora que cada número primo é um elemento minimal de* Y*, que não possui elementos maximais.*

No que segue, veremos que subconjuntos de um poset possuem as mesmas propriedades do poset inicial, isto é, subconjuntos de um poset também são posets.

Proposição 1.15. *Sejam $(P, \leq_P)$ um poset e $Q \subseteq P$ um subconjunto. Então, restringindo à Q a ordem de P, temos que Q é também um poset.*

Demonstração. A reflexibilidade, a antissimetria e a transitividade da ordem restrita aos elementos de Q seguem imediatamente do fato de que elementos de Q são elementos do poset P.

□

A ordem de Q da proposição anterior é chamada de *ordem induzida de P*.

Definição 1.16. Seja $(P, \leq_P)$ um poset e seja $Q \subseteq P$ com a ordem induzida de P, a qual denotaremos por $\leq_Q$. Então, $(Q, \leq_Q)$ é dito um *subposet* de P.

Salvo menção contrária, assumiremos que subposets carregam a ordem induzida do poset que o contém.

Definição 1.17. Um subconjunto C de um poset é uma *cadeia* se, para quaisquer $x, y \in C$, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Um subconjunto B de um poset é uma *anticadeia* se, para qualquer par de elementos distintos $x, y \in B$, tem-se $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$.

Dizemos que uma cadeia C tem *comprimento* n se C tem n elementos. Nesse caso, tal cadeia pode ser chamada de n-cadeia.

Exemplo 1.18. Se X é o poset dado pelo conjunto das partes de $\{1, 2, 3, 4\}$ munido da inclusão de conjuntos, temos que $C = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ é uma cadeia de X de comprimento 4.

Exemplo 1.19. Considerando $\mathbb{N}$ munido da ordem do Exemplo 1.10, o subconjunto formado pelos números primos é uma anticadeia.

Definição 1.20. Dados x e z elementos de um poset X, o *intervalo* ou *segmento* de x a z é o conjunto

$$[x, z] = \{y \in X : x \leq y \leq z\}.$$

Um poset X é *localmente finito* se todo intervalo de X é finito. Um intervalo $[x, y]$ de um poset X é dito ter *comprimento* n se há uma cadeia de comprimento n em $[x, y]$ e qualquer outra cadeia nesse intervalo tem comprimento menor ou igual a n.

Exemplo 1.21. Em $\mathbb{N}$ com a ordem do Exemplo 1.10, o intervalo $[2, 40]$ é o conjunto dos números naturais que são divisíveis por 2 e que dividem 40, ou seja, $[2, 40] = \{2, 4, 8, 10, 20, 40\}$. Este intervalo tem comprimento 4, pois suas maiores cadeias são $\{2, 4, 8, 40\}$ e $\{2, 10, 20, 40\}$.

Exemplo 1.22. Em $\mathbb{N}$ com a ordem do Exemplo 1.10, o intervalo $[3, 36]$ é o conjunto dos números naturais que são divisíveis por 3 e que dividem 36, ou seja, $[3, 36] = \{3, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Este intervalo tem comprimento 4, pois suas maiores cadeias são $\{3, 6, 12, 36\}$ e $\{3, 9, 18, 36\}$.

Definição 1.23. Os elementos x e y de um poset X são ditos *conexos* se, para algum inteiro positivo n, existem $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ elementos de X tais que $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

É evidente que a conexidade de elementos de X é uma relação de equivalência e a classe de equivalência de um elemento é dita uma *componente conexa*. Dessa forma, todo poset X pode ser escrito como união disjunta de suas componentes conexas.

Definição 1.24. Um poset X é dito *conexo* quando X possui apenas uma componente conexa, isto é, dados quaisquer $x, y \in X$, existe uma sequência $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ de elementos de X tal que $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemplo 1.25. Considere $2\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais pares munido da ordem do Exemplo 1.10. Então $2\mathbb{N}$ é conexo pois, dados quaisquer $x, y \in 2\mathbb{N}$, basta tomar a sequência $x, 2, y$, já que $2 \mid x$ e $2 \mid y$.

Exemplo 1.26. Considerando X qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ que contém 0 ou 1, com a ordem do Exemplo 1.10, temos que X é conexo. De fato, dados $x, y \in X$, basta tomar a sequência $x, 0, y$ (já que $x \mid 0$ e $y \mid 0$) ou $x, 1, y$ (já que $1 \mid x$ e $1 \mid y$).

Exemplo 1.27. Considerando $Y = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ munido da inclusão de conjuntos, note que os elementos $\{1, 2\}$ e $\{1, 3\}$ são conexos, pois $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ e $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$, mas $\{1, 2\}$ e $\{1, 4\}$ não são conexos. Logo, Y não é conexo.

1.3 O Diagrama de Hasse

A fim de analisar mais a fundo a estrutura de um poset, isto é, de um conjunto equipado com uma relação de ordem parcial, uma visualização geométrica do poset seria de grande ajuda. Para tanto, faremos uso da teoria de grafos para definir o Diagrama de Hasse de um poset. Inicialmente, veremos o que é um grafo.

Definição 1.28. Um *grafo* G é um par (V, E) de um conjunto V de vértices e um conjunto $E \subseteq \{\{a, b\} : a, b \in V\}$ de arestas.

Esta definição e a forma visual estão conectadas de forma simples. Para cada $v \in V$, coloque um ponto no plano (ou no 3-espaço) para representar o vértice. Por sua vez, para quaisquer dois vértices $v, w \in V$ tais que $\{v, w\} \in E$, unimos esses pontos com um segmento (aresta) que não toque qualquer outro ponto. A Figura 1.1 ilustra o que foi dito.

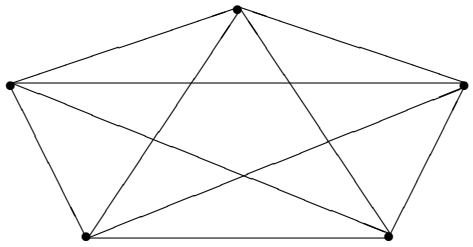

Figura 1.1: Grafo com 5 vértices

Desta maneira, temos uma boa ferramenta visual do grafo, bem como uma maneira de traduzir problemas do cotidiano em matemática (como, por exemplo, as redes ferroviárias podem ser modeladas por meio de grafos).

Poderíamos então repetir essa idéia e aplicar esse conceito aos posets, utilizando vértices para representar os elementos de X e arestas para ligar elementos quando os mesmos são comparáveis entre si, mas devido à propriedade de ordem parcial, haveria redundâncias que podemos eliminar. Vamos então melhorar este conceito a fim de eliminarmos essas deficiências e, assim, podermos aplicá-lo a posets.

Definição 1.29. Seja P um poset. Dizemos que $q \in P$ *cobre* $p \in P$ se, e somente se, $p < q$ e $\{z \in P \mid p < z < q\} = \emptyset$. Dizemos também que p é uma *cobertura inferior* de q e que q é uma *cobertura superior* de p.

Exemplo 1.30. No conjunto das partes $\mathcal{P}(\{1, \ldots, 6\})$, o conjunto $\{1, 3, 5\}$ cobre $\{1, 3\}$, mas $\{1, 2, 3, 4\}$ não cobre $\{1, 3\}$.

Exemplo 1.31. Em $\mathbb{Z}$ com a ordem usual, cada número k tem exatamente uma cobertura superior $k + 1$ e uma cobertura inferior $k - 1$.

Exemplo 1.32. A noção de cobertura depende do universo envolvido. Observe que, em $\mathbb{Z}$ com a ordem usual, 2 não cobre 0, mas 2 é uma cobertura superior de 0 no conjunto dos números inteiros pares. Similarmente, $\{1, 2, 3, 4\}$ cobre $\{1, 3\}$ no conjunto dos subconjuntos de $\{1, \ldots, 6\}$ que têm uma quantidade par de elementos.

Exemplo 1.33. Em posets infinitos, elementos podem ter ou não coberturas, como é o caso de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ com suas ordens usuais, que não possuem elementos que cobrem um ao outro.

Incorporando esse novo conceito à idéia visual de grafo descrita anteriormente, obtemos uma importante ferramenta de visualização de posets. Um poset finito (e alguns casos particulares de enumeráveis) pode ser visualizado como um grafo da seguinte forma: cada elemento do poset é representado por um ponto e, sempre que um elemento x cobrir um elemento y, ambos são ligados por um segmento de reta, sendo que a posição do ponto que representa o elemento coberto, no caso y, deve ser inferior à posição do ponto que representa o elemento que o cobre, no caso x, isto é, trata-se de um grafo ordenado, no qual as arestas são pares ordenados no lugar de conjuntos. Tal grafo é denominado *Diagrama de Hasse* do poset.

Exemplo 1.34. Considere o subconjunto $Y = \{2, 3, 12, 18\} \subseteq \mathbb{N}$ com a ordem herdada do Exemplo 1.10. A Figura 1.2 exibe um diagrama de Hasse que representa esse poset.

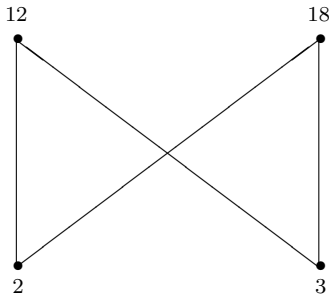

Figura 1.2: Diagrama de Hasse de Y

Apesar de o Diagrama de Hasse ser uma importante ferramenta visual, a unicidade da representação de um poset nem sempre ocorre. Seguem, na Figura 1.3, os diagramas que representam o poset $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ com a ordem:

$D \leq A,\ D \leq B,\ E \leq A,\ E \leq C,\ F \leq B$ e $F \leq C$.

Para cada representação, os pontos do poset são renomeados da seguinte forma: na primeira representação, temos $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, etc. Na segunda representação, $A = A_2$, $B = B_2$ e assim sucessivamente para esta e a próxima representação.

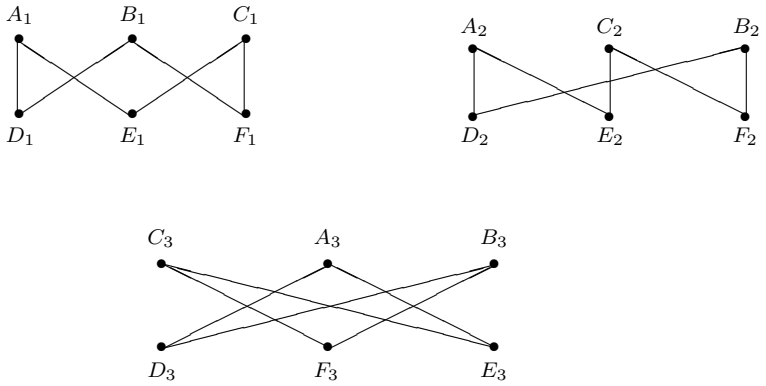

Figura 1.3: Três diagramas para o mesmo poset

1.4 Funções que preservam ordem

Revisaremos, nesta seção, o conceito de isomorfismo de posets e suas propriedades.

Definição 1.35. Sejam $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ posets e $f : P \to Q$ uma função. Então, f é chamada uma função que *preserva ordem* se, e somente se, para todos $p_1, p_2 \in P$

$$p_1 \leq_P p_2 \Rightarrow f(p_1) \leq_Q f(p_2).$$

Exemplo 1.36. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 5x$ é uma função que preserva ordem se ambos, domínio e imagem, têm a mesma ordem dada no Exemplo 1.10.

Exemplo 1.37. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 1$ preserva ordem se ambos, domínio e imagem, têm a ordem usual de $\mathbb{N}$ $(\leq)$. No entanto, f não preserva ordem se considerarmos domínio e imagem de f munidos com a ordem dada no Exemplo 1.10, uma vez que $2 \approx 4$, mas $f(2) \not\approx f(4)$, já que 3 não divide 5.

Esse exemplo mostra que o fato de uma função preservar ordem depende das ordens com que estão munidos o domínio e a imagem da função, isto é, a mesma função pode ou não preservar ordem dependendo das ordens do domínio e da imagem.

Proposição 1.38. *Sejam P, Q, R posets e sejam $f : P \to Q$ e $g : Q \to R$ funções que preservam ordem. Então a função $g \circ f : P \to R$ também preserva ordem.*

Demonstração. Sejam $p_1, p_2 \in P$ tais que $p_1 \leq p_2$. Como f preserva ordem, temos $f(p_1) \leq f(p_2)$ e, por sua vez, como g preserva ordem, segue que $g(f(p_1)) \leq g(f(p_2))$, como queríamos provar.

□

Observe que, dados dois posets, a existência de uma função entre eles que preserva ordem, mesmo sendo bijetora, não garante que os posets são "essencialmente os mesmos". Abaixo segue um exemplo que ilustra essa afirmação.

Exemplo 1.39. Considere os posets $X = \{2, 3, 12, 18\} \subseteq \mathbb{N}$ com a ordem herdada do Exemplo 1.10, $Y = \{2, 3, 12, 18\} \subseteq \mathbb{N}$ com a ordem usual de $\mathbb{N}$ e $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x$, para todo $x \in X$. Claramente, f é bijetora e preserva ordem, mas os conjuntos não são "os mesmos", como mostra a Figura 1.4.

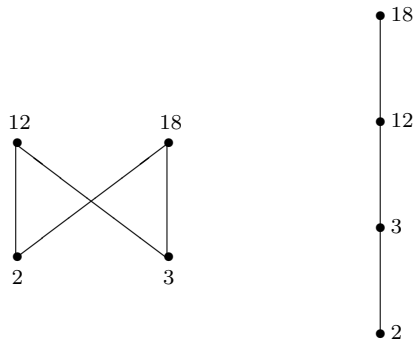

Figura 1.4: Posets X e Y

Definição 1.40. Sejam P e Q posets e seja $\phi : P \to Q$ uma função. Então, ϕ é dita um *isomorfismo* (de posets) se:

1. ϕ preserva ordem;
2. ϕ tem uma inversa ϕ^{-1};
3. ϕ^{-1} preserva ordem.

Em caso afirmativo, dizemos que os posets P e Q são isomorfos e denotamos $P \cong Q$.

A próxima caracterização de isomorfismo reforça a noção de que posets isomorfos podem ser considerados "os mesmos".

Proposição 1.41. *Sejam P e Q posets. Então, $f : P \to Q$ é um isomorfismo (de posets) se, e somente se,*

1. *f é bijetora;*
2. *$p_1 \leq p_2$ se, e somente se, $f(p_1) \leq f(p_2)$, para todos $p_1, p_2 \in P$.*

Demonstração. Provemos inicialmente que se (1) e (2) valem, então f é um isomorfismo. Para tanto, basta provar que $f^{-1} : Q \to P$ preserva ordem, uma vez que as demais condições já são satisfeitas.

Sejam $q_1, q_2 \in Q$ tais que $q_1 \leq q_2$. Como, por hipótese, f é bijetora, existem $p_1, p_2 \in P$ tais que $f(p_i) = q_i$, para $i = 1, 2$. Como $f(p_1) = q_1 \leq q_2 = f(p_2)$, de (2) segue que $p_1 \leq p_2$. Assim, $f^{-1}(q_1) \leq f^{-1}(q_2)$ e, portanto, f^{-1} preserva ordem.

Reciprocamente, se $f : P \to Q$ é um isomorfismo, então existe $f^{-1} : Q \to P$ e a condição (1) é satisfeita. Um lado da condição (2) segue do fato de que f preserva ordem e o outro lado de (2) obtém-se do fato de que f^{-1} preserva ordem.

□

Observe que no Exemplo 1.39 não vale a volta do item (2) da proposição anterior, pois $f(2) \leq f(3)$, mas $2 \not\approx 3$.

Proposição 1.42. *Sejam P, Q e R posets e sejam $\phi : P \to Q$ e $\varphi : Q \to R$ isomorfismos (de posets). Então, $\varphi \circ \phi$ é um isomorfismo (de posets).*

Demonstração. Como ϕ e φ são isomorfismos de posets, então ϕ e φ preservam ordem e possuem inversas ϕ^{-1} e φ^{-1} que preservam ordem. Assim, pela Proposição 1.38, segue que $\varphi \circ \phi$ e $\phi^{-1} \circ \varphi^{-1}$ preservam ordem. Como $\phi^{-1} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \phi)^{-1}$, segue o resultado.

□

Definição 1.43. Se P é um poset e $f : P \to P$ é um isomorfismo de posets, então dizemos que f é um *automorfismo* de P.

Exemplo 1.44. n-cadeias só admitem o automorfismo trivial.

De fato, sejam C uma n-cadeia, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ os elementos de C, e f um automorfismo de C. Suponha que existam $i \neq j$ tais que $f(x_i) = x_j$. Então temos que $x_i < x_j$ ou $x_j < x_i$.

Se $x_i < x_j$, pela Proposição 1.41, segue que $x_j = f(x_i) < f(x_j) = x_k$, para algum k. Como $x_j < x_k$, pela Proposição 1.41, temos que $x_k = f(x_j) < f(x_k) = x_l$, para algum l. Como C tem n elementos, após repetir esse procedimento uma quantidade finita de vezes, obtemos que existe m tal que $x_m < f(x_m) = x_n$. Logo, $x_m < x_n$ implica, pela Proposição 1.41, que $x_n = f(x_m) < f(x_n)$, o que é um absurdo, já que x_n é o elemento máximo de C.

Analogamente chega-se a um absurdo se $x_j < x_i$. Logo, $f(x_i) = x_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e, portanto, $f = id_C$.

Exemplo 1.45. Toda bijeção em uma anticadeia é um automorfismo.

Com efeito, sejam B uma anticadeia e $g : B \to B$ uma bijeção. Então g satisfaz a condição (2) da Proposição 1.41 pois, caso contrário, existiriam $p_1, p_2 \in B$ tais que

$p_1 \leq p_2$ com $f(p_1) \not\leq f(p_2)$ ou tais que $f(p_1) \leq f(p_2)$ com $p_1 \not\leq p_2$, onde $f(p_1), f(p_2) \in B$. Como B é uma anticadeia, então não existem $x_1, x_2 \in B$ tais que $x_1 \leq x_2$, ou seja, não existem tais $p_1, p_2 \in B$. Assim, pela Proposição 1.41, g é um automorfismo de B.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA DE INCIDÊNCIA

Estudaremos agora álgebras de incidência, suas propriedades e resultados importantes para demonstrar os dois principais teoremas deste capítulo, o "Problema do Isomorfismo" e o Teorema da Decomposição, que podem ser encontrados em [15].

Definição 2.1. Dados X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade, a *álgebra de incidência* $I(X,R)$ de X sobre R é o conjunto

$$I(X,R) = \{f : X \times X \to R : f(x,y) = 0, \text{ se } x \not\leq y\}$$

com as operações dadas por:

- $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$
- $(f.g)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)g(z,y)$, se $x \leq y$ e $(f.g)(x,y) = 0$, se $x \not\leq y$
- $(r.f)(x,y) = rf(x,y)$,

para todos $f, g \in I(X,R)$, $r \in R$ e $x, y, z \in X$.

Observe que fazemos uso de um somatório ao efetuarmos o produto de elementos de $I(X,R)$. Como, por hipótese, o poset X é localmente finito, então o intervalo $[x,y]$ e, consequentemente, o somatório em questão são finitos, de onde conclui-se que o

produto de elementos de $I(X,R)$ está bem definido. Além disso, facilmente pode-se verificar que $I(X,R)$ com as operações descritas acima realmente definem uma R-álgebra.

Agora, definiremos algumas funções em $I(X,R)$ que serão utilizadas frequentemente. Considere $\delta \in I(X,R)$ definida por:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dada $f \in I(X,R)$, note que

$$(f\delta)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\delta(z,y) = f(x,y) \text{ e}$$

$$(\delta f)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta(x,z)f(z,y) = f(x,y),$$

para todos $x, y \in X$ com $x \leq y$. Assim, conclui-se que δ é a unidade da álgebra de incidência $I(X,R)$.

Considere também, para cada par $x, y \in X$ com $x \leq y$, a função $\delta_{xy} \in I(X,R)$ dada por:

$$\delta_{xy}(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad u = x \text{ e } v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde δ_{xx} será denotada por e_x.

Queremos agora caracterizar os elementos invertíveis da álgebra $I(X,R)$. Para tanto, recordemos que dado R um anel com unidade, se um elemento $s \in R$ tem inverso à direita e à esquerda, então s é invertível.

Teorema 2.2. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Dada $f \in I(X,R)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f tem um inverso à direita;*
2. *f tem um inverso à esquerda;*
3. *f é invertível;*
4. *$f(x,x)$ é invertível em R, para todo $x \in X$.*

Demonstração. $(1) \Rightarrow (4)$ Suponhamos que f tem um inverso à direita, digamos g. Então, $f.g = \delta$, ou seja, para cada $x \in X$, temos $f(x,x)g(x,x) = (fg)(x,x) = \delta(x,x) = 1$. Como R é comutativo, segue que $f(x,x)$ é invertível em R, para todo $x \in X$. Analogamente prova-se $(2) \Rightarrow (4)$.

$(4) \Rightarrow (1)$ Suponhamos agora que $f(x,x)$ é invertível em R, para todo $x \in X$. Definimos o inverso à direita de f, digamos g, por indução sobre o comprimento dos intervalos de X, como segue. Se $|[x,y]| = 0$, então $x \not\leq y$ e assim definimos $g(x,y) = 0$. Observe que isso garante que $g \in I(X,R)$. Se $|[x,y]| = 1$, então $x = y$ e, dessa forma, considere $g(x,x) = f(x,x)^{-1}$, já que, por hipótese, $f(x,x)$ é invertível.

Seja $n > 1$, suponhamos que a função g foi definida em cada intervalo de comprimento menor que n e seja $[x,y]$ um intervalo de comprimento n. Queremos que $f.g = \delta$, ou seja, para $x \neq y$, queremos que

$$0 = (fg)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)g(z,y) = f(x,x)g(x,y) + \sum_{x < z \leq y} f(x,z)g(z,y).$$

Como, por hipótese, $f(x,x)$ é invertível, podemos resolver a equação acima definindo $g(x,y)$ como

$$g(x,y) = \left(- \sum_{x < z \leq y} f(x,z)g(z,y) \right) .(f(x,x))^{-1}.$$

Como o intervalo $[z,y]$ tem comprimento menor que n, pela hipótese de indução, a função g está definida nesse intervalo e, portanto, g está definida para todos $x, y \in X$. Analogamente prova-se $(4) \Rightarrow (2)$.

Como (4) implica (1) e (2), segue que (4) implica (3). Finalmente, como (3) claramente implica (1) e (2), o teorema está provado.

□

Observação 2.3. *A demonstração do teorema anterior mostra como a indução pode ser usada para posets localmente finitos.*

Lema 2.4. *Sejam X e Y posets localmente finitos e R um anel comutativo com unidade. Se X e Y são isomorfos, então $I(X,R)$ e $I(Y,R)$ são isomorfas como álgebras.*

Demonstração. Seja $\varphi : X \to Y$ um isomorfismo de posets.

Defina $\widehat{\varphi} : I(X,R) \to I(Y,R)$ por $\widehat{\varphi}(f)(u,v) = f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v))$, para todo par $u, v \in Y$. Note que se $u \not\leq v$, então $\varphi^{-1}(u) \not\leq \varphi^{-1}(v)$, pela Proposição 1.41. Dessa forma,

temos que $f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = 0$, uma vez que $f \in I(X, R)$. Portanto, $\widehat{\varphi}(f) \in I(Y, R)$ e a função $\widehat{\varphi}$ está bem definida. Verifiquemos que $\widehat{\varphi}$ é um isomorfismo de álgebras.

Sejam $f, g \in I(X, R)$, $\lambda \in R$ e u, v elementos quaisquer de Y. Temos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(f+g)(u,v) &= (f+g)(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) \\
&= f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) + g(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) \\
&= \widehat{\varphi}(f)(u,v) + \widehat{\varphi}(g)(u,v) \\
&= [\widehat{\varphi}(f) + \widehat{\varphi}(g)](u,v).
\end{aligned}$$

Também,

$$\widehat{\varphi}(fg)(u,v) = (fg)(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = \sum_{\varphi^{-1}(u) \leq t \leq \varphi^{-1}(v)} f(\varphi^{-1}(u), t) g(t, \varphi^{-1}(v)).$$

Como φ é um isomorfismo de posets temos que, dado $t \in X$ com $\varphi^{-1}(u) \leq t \leq \varphi^{-1}(v)$, existe $z \in Y$ tal que $t = \varphi^{-1}(z)$ e, como φ preserva ordem, então $u \leq z \leq v$. Assim:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(fg)(u,v) &= \sum_{\varphi^{-1}(u) \leq \varphi^{-1}(z) \leq \varphi^{-1}(v)} f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(z)) g(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(v)) \\
&= \sum_{u \leq z \leq v} \widehat{\varphi}(f)(u,z) \widehat{\varphi}(g)(z,v) \\
&= [\widehat{\varphi}(f)\widehat{\varphi}(g)](u,v).
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\widehat{\varphi}(\lambda f)(u,v) = (\lambda f)(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = \lambda f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = [\lambda \widehat{\varphi}(f)](u,v).$$

Note ainda que, para todos $u, v \in Y$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\delta_X)(u,v) &= \delta_X(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \varphi^{-1}(u) = \varphi^{-1}(v) \\ 0, & \quad \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \quad \text{se} \quad u = v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \delta_Y(u,v),
\end{aligned}$$

onde δ_X é a função $\delta \in I(X,R)$ e δ_Y é a função $\delta \in I(Y,R)$. Assim, $\widehat{\varphi}$ leva a unidade de $I(X,R)$ na unidade de $I(Y,R)$ e, portanto, $\widehat{\varphi}$ é um homomorfismo de álgebras.

Verifiquemos agora que $\widehat{\varphi}$ é bijetora. Seja $f \in \ker \widehat{\varphi}$. Então, $\widehat{\varphi}(f)(u,v) = 0$, para todos $u, v \in Y$, isto é, $f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = 0$, para todos $u, v \in Y$, o que implica que $f(x,w) = 0$, para todos $x, w \in X$ e, portanto, $f = 0$. Assim, $\ker \widehat{\varphi} = 0$, logo $\widehat{\varphi}$ é injetora.

Além disso, se $g \in I(Y,R)$, observe que $g = \widehat{\varphi}(h)$, onde $h(u,v) = g(\varphi(u), \varphi(v))$, para todo par $u, v \in X$, pois

$$\widehat{\varphi}(h)(u,v) = h(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = g(\varphi(\varphi^{-1}(u)), \varphi(\varphi^{-1}(v))) = g(u,v),$$

com $h \in I(X,R)$. Logo, temos a sobrejetividade de $\widehat{\varphi}$ e, portanto, conclui-se a demonstração do resultado.

□

Corolário 2.5. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Se $\varphi : X \to X$ é um automorfismo de X, então $\widehat{\varphi} : I(X,R) \to I(X,R)$ como definido no lema anterior é um automorfismo de $I(X,R)$.*

Veremos mais à frente que a recíproca do lema anterior é verdadeira para o caso em que R é um corpo. Tal resultado é chamado de "Problema do Isomorfismo". Vamos, então, apresentar alguns resultados que auxiliam na demonstração deste.

Definição 2.6. Dizemos que o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$ de elementos não nulos de R é um *conjunto maximal de idempotentes primitivos ortogonais dois a dois* se:

1. e_i é um elemento idempotente, isto é, $e_i^2 = e_i$, para todo $1 \leq i \leq t$;

2. Se $i \neq j$, então $e_i e_j = 0$ (ortogonalidade);

3. Para cada $1 \leq i \leq t$, não existem elementos u e v idempotentes ortogonais não nulos de R tais que $e_i = u + v$ (primitividade);

4. Se $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\} \subset I$, onde I é um conjunto de elementos não nulos de R que satisfazem os três itens acima, então $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\} = I$ (maximalidade).

Lema 2.7. *Sejam R um anel e I um ideal de R tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\}$. Suponha que e, e', f, f' são elementos idempotentes de R tais que $e' - e$ e $f' - f$ pertencem a I. Então, $e.R.f = \{0\}$ se, e somente se, $e'.R.f' = \{0\}$.*

Demonstração. Mostremos que $e.R.f = \{0\}$ implica que $e'.R.f' = \{0\}$. A implicação contrária segue por argumento análogo. Observe que é suficiente mostrar que, para cada $r \in R$, o elemento $e'.r.f' \in I^n$, para todo n. Para mostrar isso, usaremos indução sobre n. Denote $p = e' - e$ e $q = f' - f$. Então

$$e'.r.f' = (e + p).r.(f + q) = 0 + (e.r.q) + (p.r.f) + (p.r.q)$$

e, dessa forma, $e'.r.f' \in I$, uma vez que $p, q \in I$.

Suponha que $e'.r.f' = i$ que é um elemento de I^n, pela hipótese de indução. Como e' e f' são idempotentes, temos

$$e'.r.f' = (e')^2.r.(f')^2 = e'.i.f' = (e + p).i.(f + q) = 0 + (e.i.q) + (p.i.f) + (p.i.q),$$

que é um elemento de I^{n+1}, já que $i \in I^n$ e $p, q \in I$. Assim, segue o resultado.

□

Vamos agora caracterizar o radical de Jacobson da álgebra de incidência e provar alguns resultados relacionados.

Teorema 2.8. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. O Radical de Jacobson de $I(X, R)$ é o conjunto de todas as funções $f \in I(X, R)$ tais que $f(x, x) \in J(R)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Dada $f \in I(X, R)$, aplicando a Proposição 1.3, f pertence ao radical de Jacobson de $I(X, R)$ se, e somente se, $\delta - gf$ é invertível à esquerda, para toda $g \in$

$I(X,R)$. Mas, pelo Teorema 2.2, isso vale se, e somente se, $1-g(x,x)f(x,x)$ é invertível à esquerda em R, para todo $x \in X$ e toda $g \in I(X,R)$. Porém, esta última afirmação é equivalente a dizer que, para todo $x \in X$, $1 - rf(x,x)$ é invertível à esquerda, para cada $r \in R$, pois sempre existe $g \in I(X,R)$ tal que $g(x,x) = r$. Novamente, pela Proposição 1.3, segue que f pertence ao radical de Jacobson de $I(X,R)$ se, e somente se, $f(x,x) \in J(R)$, para todo $x \in X$, o que conclui o resultado.

□

Observação 2.9. *Se considerarmos X um poset localmente finito e F um corpo, teremos*

$$J(I(X,F)) = \{f \in I(X,F) : f(x,x) = 0, \text{ para todo } x \in X\},$$

já que $J(F) = (0)$, pelo Exemplo 1.5.

Corolário 2.10. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Então, $\dfrac{I(X,R)}{J(I(X,R))}$ é isomorfo a $\displaystyle\prod_{x\in X} \frac{R_x}{J(R_x)}$, onde $R_x = R$ para cada $x \in X$.*

Demonstração. Defina $\varphi : I(X,R) \to \displaystyle\prod_{x\in X} \frac{R_x}{J(R_x)}$ por $\varphi(f) = (\overline{f(x,x)})_{x\in X}$. É fácil ver que φ é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Segue do Teorema 2.8 que $\ker\varphi = J(I(X,R))$ e, dessa forma, o resultado segue do Teorema do Isomorfismo.

□

Lema 2.11. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Se e é um idempotente não nulo de $I(X,R)$, então $e \notin J(I(X,R))$.*

Demonstração. Observe que $e(\delta - e) = 0$, o que implica que $\delta - e = \delta - \delta e$ é um divisor de zero e, portanto, não é invertível em $I(X,R)$. Segue então, pela Proposição 1.3, que $e \notin J(I(X,R))$.

□

Lema 2.12. *Sejam X um poset localmente finito e F um corpo. Então*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (J(I(X,F)))^n = \{0\}.$$

Demonstração. Primeiramente mostraremos, por indução sobre n, que se $f = f_1 f_2 \dots f_n$, com $f_i \in J(I(X,F))$ para todo i, então $f(x,y) = 0$ sempre que $|[x,y]| \leq n$, com $x, y \in X$.

Se $n = 1$, temos dois casos a analisar. Se $|[x, y]| = 0$, então $x \not\leq y$, assim $f(x, y) = 0$, já que $f \in I(X, F)$. Se $|[x, y]| = 1$, então $x = y$ e, como $f = f_1 \in J(I(X, F))$, temos, pela Observação 2.9, que $f(x, y) = 0$.

Suponha agora que $n > 1$ e que o resultado é válido para $n-1$. Sejam $f = f_1 f_2 \dots f_n$ e $x, y \in X$ tais que $|[x, y]| \leq n$. Então:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{x \leq z \leq y} f_1 f_2 \dots f_{n-1}(x,z) f_n(z,y) \\ &= \sum_{x \leq z < y} f_1 f_2 \dots f_{n-1}(x,z) f_n(z,y) + f_1 f_2 \dots f_{n-1}(x,y) f_n(y,y). \end{aligned}$$

Como $f_n \in J(I(X, F))$, então $f_n(y, y) = 0$ e assim:

$$f(x,y) = \sum_{x \leq z < y} f_1 f_2 \dots f_{n-1}(x,z) f_n(z,y).$$

Agora, note que $|[x, z]| \leq n - 1$. Assim, por hipótese de indução, $f_1 f_2 \dots f_{n-1}(x, z) = 0$, para todo $x \leq z < y$. Logo, $f(x, y) = 0$.

Então, seja $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (J(I(X, F)))^n$ e mostremos que $f(x, y) = 0$, para todos $x, y \in X$. Dados $x, y \in X$, temos que $|[x, y]| = k < \infty$, uma vez que X é um poset localmente finito. Como $f \in (J(I(X, F)))^k$, f é uma soma de produtos da forma $f_1 \dots f_k$, com $f_i \in J(I(X, F))$. Então, da afirmação provada anteriormente segue que $f(x, y) = 0$.

□

2.1 O Problema do Isomorfismo

A fim de obtermos uma demonstração mais detalhada do próximo teorema, são necessários alguns resultados preliminares.

Lema 2.13. *Seja F um corpo e considere, para cada $x \in X$,*

$$e_x(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad u = v = x \text{ em } X \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, o conjunto $A = \{e_x : x \in X\}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos

ortogonais dois a dois de $I(X,F)$. Além disso, o conjunto $\overline{A} = \{e_x + J(I(X,F)) : x \in X\}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos ortogonais dois a dois de $\dfrac{I(X,F)}{J(I(X,F))}$.

Demonstração. Inicialmente note que, para todo $x \in X$, $e_x \neq 0$, pois $e_x(x,x) = 1$. Além disso:

$$e_x^2(u,v) = \sum_{u \leq t \leq v} e_x(u,t)e_x(t,v) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad u = v = x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = e_x(u,v).$$

Logo, $e_x^2 = e_x$, implicando que e_x é um idempotente de $I(X,F)$. Dados $e_x, e_y \in A$, com $x \neq y$, temos:

$$(e_x e_y)(u,v) = \sum_{u \leq t \leq v} e_x(u,t)e_y(t,v) = 0,$$

para todos $u, v \in X$, isto é, $e_x e_y = 0$ para todo $x \neq y$.

Mostremos agora a primitividade de e_x, $x \in X$. Dado um idempotente não nulo $f \in I(X,F)$, pelo Lema 2.11, $f \notin J(I(X,F))$. Pelo Teorema 2.8 e pelo fato que $J(F) = 0$, temos que existe $u \in X$ tal que $f(u,u) \neq 0$. Como F é um corpo e $f(u,u)$ é um idempotente de F, devemos ter que $f(u,u) = 1$.

Sejam f e g idempotentes ortogonais de $I(X,F)$ tais que $e_x = f + g$. Então, $1 = e_x(x,x) = f(x,x) + g(x,x)$, e assim $f(x,x)$ e $g(x,x)$ não são ambos nulos. Podemos então supor, sem perda de generalidade, que $f(x,x) \neq 0$. Suponha por absurdo que $g \neq 0$. Então, existe $u \in X$ tal que $g(u,u) = 1$. Repare que $u \neq x$, pois se $u = x$, teríamos $1 = e_x(x,x) = f(x,x) + g(x,x) = f(x,x) + 1$, onde $f(x,x) \neq 0$. Temos também que $0 = (fg)(u,u) = f(u,u)g(u,u) = f(u,u)$. Assim,

$$0 = e_x(u,u) = f(u,u) + g(u,u) = 0 + 1 = 1,$$

o que é um absurdo. Logo, $g = 0$ e, assim, $f = e_x$, o que prova que e_x é primitivo. Portanto, o conjunto A é formado por idempotentes primitivos ortogonais dois a dois.

Resta mostrar a maximalidade de A. Suponha que exista um conjunto K de elementos idempotentes primitivos ortogonais dois a dois de $I(X,F)$ tal que $A \subsetneq K$. Então, existe $0 \neq f \in K$ tal que $f \notin A$. Como os elementos de K são ortogonais dois a dois, temos em particular que, para todo $x \in X$, $fe_x = e_x f = 0$, ou seja, f é ortogonal aos elementos de A.

Sejam $x \leq y$. Então:

$$0 = (e_x f)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} e_x(x,z) f(z,y) = f(x,y),$$

isto é, $f(x,y) = 0$ para todos $x \leq y$. Como sempre vale que $f(x,y) = 0$ para todos $x \not\leq y$, segue que f é identicamente nula, o que é um absurdo.

Agora mostremos que $\overline{A}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos ortogonais dois a dois de $\dfrac{I(X,F)}{J(I(X,F))}$. Pelo Lema 2.11, para todo $x \in X$ temos que $e_x \notin J(I(X,F))$, logo $e_x + J(I(X,F)) \neq 0 + J(I(X,F))$. Dessa forma, o fato de $\overline{A}$ ser um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois segue facilmente do fato de que A tem a mesma propriedade.

Mostremos agora que os elementos de $\overline{A}$ são primitivos. Pela demonstração do Corolário 2.10, a aplicação

$$\overline{\varphi} : \frac{I(X,F)}{J(I(X,F))} \to \prod_{x \in X} F$$

$$f + J(I(X,F)) \mapsto (f(x,x))_{x \in X}$$

é um isomorfismo de anéis.

Seja $y \in X$ e suponha que $e_y + J(I(X,F)) = f + J(I(X,F)) + g + J(I(X,F))$, com $f + J(I(X,F))$ e $g + J(I(X,F))$ idempotentes ortogonais de $\dfrac{I(X,F)}{J(I(X,F))}$. Assim,

$$\overline{\varphi}(e_y + J(I(X,F))) = \overline{\varphi}(f + J(I(X,F))) + \overline{\varphi}(g + J(I(X,F))),$$

onde $\overline{\varphi}(f + J(I(X,F)))$ e $\overline{\varphi}(g + J(I(X,F)))$ são idempotentes ortogonais de $\prod_{x \in X} F$, já que $\overline{\varphi}$ é um homomorfismo de anéis. Mas $\overline{\varphi}(e_y + J(I(X,F))) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, com um único 1 na posição y, que claramente é um idempotente primitivo de $\prod_{x \in X} F$. Assim, segue que $\overline{\varphi}(f + J(I(X,F))) = 0$ ou $\overline{\varphi}(g + J(I(X,F))) = 0$. Como $\overline{\varphi}$ é injetor, segue que $f + J(I(X,F)) = 0$ ou $g + J(I(X,F)) = 0$, o que prova que $e_y + J(I(X,F))$ é primitivo.

Resta mostrar a maximalidade de $\overline{A}$. Suponha que exista um conjunto $\overline{K}$ de elementos idempotentes primitivos ortogonais dois a dois de $\dfrac{I(X,F)}{J(I(X,F))}$ tal que $\overline{A} \subsetneq \overline{K}$. Então, existe $0 + J(I(X,F)) \neq f + J(I(X,F)) \in \overline{K}$ tal que $f + J(I(X,F)) \notin \overline{A}$. Como

os elementos de $\overline{K}$ são ortogonais dois a dois, temos, para todo $x \in X$

$$0 + J(I(X,F)) = [f + J(I(X,F))].[e_x + J(I(X,F))] = (f.e_x) + J(I(X,F)).$$

Logo, $f.e_x \in J(I(X,F))$ donde, pelo Teorema 2.8, $(f.e_x)(x,x) = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, $f(x,x) = 0$ para todo $x \in X$. Novamente pelo Teorema 2.8, segue que $f \in J(I(X,F))$, o que é um absurdo, uma vez que supomos $f + J(I(X,F)) \neq 0 + J(I(X,F))$.

□

Lema 2.14. *Sejam X um poset localmente finito, R um anel comutativo com unidade e $x_1, x_2 \in X$. Então, $x_1 \leq x_2$ se, e somente se, $e_{x_1} I(X,R) e_{x_2} \neq \{0\}$.*

Demonstração. Se $x_1 \leq x_2$, então defina $f \in I(X,R)$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad (x,y) = (x_1, x_2) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e assim, temos

$$\begin{aligned} (e_{x_1} f e_{x_2})(x_1, x_2) &= \sum_{x_1 \leq z \leq x_2} e_{x_1}(x_1, z)(f e_{x_2})(z, x_2) \\ &= (f e_{x_2})(x_1, x_2) \\ &= \sum_{x_1 \leq w \leq x_2} f(x_1, w) e_{x_2}(w, x_2) \\ &= f(x_1, x_2) \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $e_{x_1} f e_{x_2} \neq 0$ e, portanto, $e_{x_1} I(X,R) e_{x_2} \neq \{0\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $e_{x_1} I(X,R) e_{x_2} \neq \{0\}$. Então, existe $f^* \in I(X,R)$ tal que $(e_{x_1} f^* e_{x_2})(x,y) \neq 0$ para algum par $x, y \in X$. Mas, note que para toda $f \in I(X,R)$, temos

$$(e_{x_1} f e_{x_2})(x,y) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & \text{se} \quad (x,y) = (x_1, x_2) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, necessariamente devemos ter que $f^*(x_1, x_2) \neq 0$, o que implica que $x_1 \leq x_2$, já

que $f^* \in I(X, R)$.

□

Finalmente estamos aptos a demonstrar o resultado a seguir, que é conhecido por "Problema do Isomorfismo".

Teorema 2.15. *Sejam F um corpo e X e Y posets localmente finitos tais que as álgebras de incidência $I(X, F)$ e $I(Y, F)$ são isomorfas como F-álgebras. Então, X e Y são isomorfos como posets.*

Demonstração. Seja ψ um F-isomorfismo de $I(X, F)$ em $I(Y, F)$. Pelo Lema 2.13, $A = \{e_x : x \in X\}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos ortogonais dois a dois de $I(X, F)$. Como ψ é um isomorfismo de álgebras, temos facilmente que $\psi(e_x)$ é um idempotente primitivo de $I(Y, F)$. Mais ainda, por raciocínio análogo à demonstração do Lema 2.13, obtemos que $B = \{\psi(e_x) : x \in X\}$ e $\overline{B} = \{\psi(e_x) + J(I(Y, F)) : x \in X\}$ são conjuntos maximais de idempotentes primitivos ortogonais dois a dois de $I(Y, F)$ e $\dfrac{I(Y, F)}{J(I(Y, F))}$, respectivamente.

Pelo Corolário 2.10, temos que $\dfrac{I(Y, F)}{J(I(Y, F))}$ é isomorfo a $\prod_{z \in Y} F$, e este isomorfismo associa cada idempotente primitivo $\psi(e_x) + J(I(Y, F))$ a $(\psi(e_x)(z, z))_{z \in Y}$, que deve ser idempotente primitivo em $\prod_{z \in Y} F$. Como os idempotentes primitivos de $\prod_{z \in Y} F$ são da forma $f_y = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, com um único 1 na posição y, segue que para cada $x \in X$, existe um único $y = y(x) \in Y$ tal que $(\psi(e_x))(y, y) \neq 0$ (na verdade, $(\psi(e_x))(y, y) = 1$).

Assim, dado $z \in Y$, se $z \neq y$ então $(\psi(e_x) - e_y)(z, z) = (\psi(e_x))(z, z) - e_y(z, z) = 0$ e se $z = y$, $(\psi(e_x) - e_y)(y, y) = (\psi(e_x))(y, y) - e_y(y, y) = 1 - 1 = 0$, ou seja, $(\psi(e_x) - e_y)(z, z) = 0$ para todo $z \in Y$. Pelo Teorema 2.8, segue que $\psi(e_x) - e_y \in J(I(Y, F))$, isto é, para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $\psi(e_x) - e_y \in J(I(Y, F))$. Dessa forma, definimos a função

$$\theta : X \to Y$$

$$x \mapsto y(x)$$

e mostraremos que θ é um isomorfismo de posets.

Suponha que exista $z \in Y$ tal que $z \neq y(x)$, para todo $x \in X$. Então, não existe

$x \in X$ tal que $\psi(e_x) - e_z \in J(I(Y,F))$, isto é,

$$e_z + J(I(Y,F)) \notin \{\psi(e_x) + J(I(Y,F)) \ : \ x \in X\} = \overline{B}.$$

Também temos que $\psi(e_x)(z,z) = 0$, para todo $x \in X$, ou ainda, $\psi(e_x).e_z \in J(I(Y,F))$, para todo $x \in X$. Assim, para qualquer $x \in X$,

$$[\psi(e_x) + J(I(Y,F))].[e_z + J(I(Y,F))] = \psi(e_x).e_z + J(I(Y,F)) = 0 + J(I(Y,F)),$$

e assim segue que $e_z + J(I(Y,F))$ é um idempotente primitivo ortogonal a todos os elementos de $\overline{B}$, o que contradiz a maximalidade de $\overline{B}$. Portanto, θ é sobrejetora.

Sejam agora $x_1, x_2 \in X$. Pelo Lema 2.14, temos que

$$x_1 \leq x_2 \text{ se, e somente se, } \ e_{x_1} I(X,F) e_{x_2} \neq \{0\}.$$

Uma vez que ψ é um isomorfismo, temos ainda que

$$e_{x_1} I(X,F) e_{x_2} \neq \{0\} \text{ se, e somente se, } \ \psi(e_{x_1}) I(Y,F) \psi(e_{x_2}) \neq \{0\}.$$

Por sua vez, como $\psi(e_{x_1}) - e_{\theta(x_1)}$ e $\psi(e_{x_2}) - e_{\theta(x_2)}$ pertencem a $J(I(Y,F))$ e, pelo Lema 2.12, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (J(I(Y,F)))^n = \{0\}$, podemos aplicar o Lema 2.7 e concluir que

$$\psi(e_{x_1}) I(Y,F) \psi(e_{x_2}) \neq \{0\} \text{ se, e somente se, } \ e_{\theta(x_1)} I(Y,F) e_{\theta(x_2)} \neq \{0\}.$$

Novamente pelo Lema 2.14, temos que

$$e_{\theta(x_1)} I(Y,F) e_{\theta(x_2)} \neq \{0\} \text{ se, e somente se, } \ \theta(x_1) \leq \theta(x_2).$$

Logo, segue que $x_1 \leq x_2$ se, e somente se, $\theta(x_1) \leq \theta(x_2)$, donde segue também a injetividade de θ. Portanto, pela Proposição 1.41, θ é um isomorfismo de posets.

□

Segue do Lema 2.4 e do Teorema 2.15 que, se X e Y são posets localmente finitos e F é um corpo, então X e Y são isomorfos como posets se, e somente se, $I(X,F)$ e $I(Y,F)$ são isomorfas como F-álgebras.

2.2 Automorfismos e Teorema da Decomposição

Considerando X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade, denotaremos por $Aut(I(X,R))$ o grupo dos automorfismos da R-álgebra $I(X,R)$, munido da operação de composição.

Nosso objetivo nesta seção é provar o Teorema da Decomposição, que mostra que todo automorfismo da álgebra de incidência de um poset localmente finito X sobre um corpo F pode ser decomposto como composição de três automorfismos: um interno, um multiplicativo e um induzido. Para isso, vamos definir e estudar alguns subgrupos importantes do grupo $Aut(I(X,R))$. Começaremos pelos bem conhecidos automorfismos internos, então os automorfismos induzidos por um automorfismo de X e, por fim, os automorfismos multiplicativos.

Se $f \in I(X,R)$ é invertível, então sabemos que f determina um automorfismo ψ_f de $I(X,R)$ definido por $\psi_f(g) = fgf^{-1}$, para toda $g \in I(X,R)$, o qual é chamado de *automorfismo interno associado a* f. Note que $\psi_{f^{-1}} = (\psi_f)^{-1}$ e, se f_1, f_2 são elementos invertíveis de $I(X,R)$, então $\psi_{f_1} \circ \psi_{f_2} = \psi_{f_1 f_2}$. Com isso, o conjunto

$$Inn(I(X,R)) = \{\psi_f : f \text{ é invertível em } I(X,R)\}$$

é um subgrupo de $Aut(I(X,R))$.

Considere agora α um automorfismo de X. Conforme o Corolário 2.5, α induz um automorfismo $\widehat{\alpha}$ de $I(X,R)$ dado por

$$(\widehat{\alpha}(f))(x,y) = f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)),$$

para toda $f \in I(X,R)$ e para cada par $x, y \in X$. $\widehat{\alpha}$ é chamado *automorfismo induzido por* α. O próximo resultado mostra que o conjunto de todos os automorfismos induzidos por automorfismos de X é um subgrupo de $Aut(I(X,R))$.

Proposição 2.16. *Considere o conjunto* $Ind(I(X,R)) = \{\widehat{\alpha} : \alpha \text{ é um automorfismo de } X\}$. *Então* $Ind(I(X,R))$ *é um subgrupo de* $Aut(I(X,R))$.

Demonstração. Primeiramente, note que $id_{I(X,R)} = \widehat{id_X}$. De fato, para todos $f \in I(X,R)$

e $x, y \in X$, temos

$$(\widehat{id_X}(f))(x,y) = f(id_X{}^{-1}(x), id_X{}^{-1}(y)) = f(x,y) = (id_{I(X,R)}(f))(x,y).$$

Assim, $id_{I(X,R)} \in Ind(I(X,R))$.

Observe que, para todos $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in Ind(I(X,R))$, temos que $(\widehat{\alpha})^{-1} = \widehat{\alpha^{-1}} \in Ind(I(X,R))$ e, para toda $f \in I(X,R)$ e todos $x, y \in X$, temos

$$[(\widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta})(f)](x,y) = \widehat{\alpha}(\widehat{\beta}(f)(x,y)) = (\widehat{\beta}(f))(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$$

$$= f((\beta^{-1} \circ \alpha^{-1})(x), (\beta^{-1} \circ \alpha^{-1})(y)) = [(\widehat{\alpha \circ \beta})(f)](x,y).$$

Logo, temos que $\widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta} \in Ind(I(X,R))$, concluindo a demonstração.

□

Definição 2.17. Uma função $\sigma \in I(X,R)$ é *multiplicativa* se, para todos $x \leq z \leq y$ elementos de X, tivermos que $\sigma(x,y)$ é invertível em R e $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$.

Observe que uma consequência da definição anterior é que, se σ é multiplicativa, então para cada $x \in X$, $\sigma(x,x)$ é invertível em R. E mais: $\sigma(x,x) = \sigma(x,x)\sigma(x,x)$, ou seja, $\sigma(x,x) = 1$. Desta forma, pelo Teorema 2.2, σ é invertível em $I(X,R)$.

Definição 2.18. Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Dados elementos $f, g \in I(X,R)$, o *produto de Hadamard* (ou *produto de Schur*) de f por g, denotado por $f * g$, é definido por $(f * g)(x,y) = f(x,y)g(x,y)$, para todos $x, y \in X$.

Claramente, $f * g \in I(X,R)$ e esse produto é comutativo. Mais ainda, se σ e τ são funções multiplicativas, então $\sigma * \tau$ é multiplicativa, pois se $x \leq z \leq y$ são elementos de X, então $(\sigma * \tau)(x,y) = \sigma(x,y)\tau(x,y)$, e assim podemos concluir que $(\sigma * \tau)(x,y)$ é invertível em R, uma vez que $\sigma(x,y)$ e $\tau(x,y)$ são invertíveis em R. Pelo fato de σ e τ serem multiplicativas, temos que

$$(\sigma * \tau)(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)\tau(x,z)\tau(z,y) = \sigma(x,z)\tau(x,z)\sigma(z,y)\tau(z,y)$$

$$= (\sigma * \tau)(x,z)(\sigma * \tau)(z,y).$$

Lema 2.19. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Se $\sigma \in I(X,R)$ é multiplicativa, então a função $M_\sigma : I(X,R) \to I(X,R)$ definida por $M_\sigma(f) = \sigma * f$, para toda $f \in I(X,R)$, é um automorfismo de $I(X,R)$.*

Demonstração. Dados $f, g \in I(X,R), \lambda \in R$ e $x, y \in X$ quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}
(M_\sigma(f+g))(x,y) &= [\sigma * (f+g)](x,y) \\
&= \sigma(x,y)(f+g)(x,y) \\
&= \sigma(x,y)[f(x,y)+g(x,y)] \\
&= \sigma(x,y)f(x,y) + \sigma(x,y)g(x,y) \\
&= (\sigma * f)(x,y) + (\sigma * g)(x,y) \\
&= [(\sigma * f) + (\sigma * g)](x,y) \\
&= (M_\sigma(f) + M_\sigma(g))(x,y).
\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
(M_\sigma(fg))(x,y) &= [\sigma * (fg)](x,y) \\
&= \sigma(x,y)(fg)(x,y) \\
&= \sigma(x,y)\left(\sum_{x\leq z\leq y} f(x,z)g(z,y)\right).
\end{aligned}$$

Como $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$ sempre que $x \leq z \leq y$, temos que

$$(M_\sigma(fg))(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} \sigma(x,z)f(x,z)\sigma(z,y)g(z,y).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[M_\sigma(f)M_\sigma(g)](x,y) &= \sum_{x\leq z\leq y} (\sigma * f)(x,z)(\sigma * g)(z,y) \\
&= \sum_{x\leq z\leq y} \sigma(x,z)f(x,z)\sigma(z,y)g(z,y).
\end{aligned}$$

Logo, $M_\sigma(fg) = M_\sigma(f)M_\sigma(g)$, como queríamos.

Ainda:

$$\begin{aligned}(M_\sigma(\delta))(x,y) &= (\sigma * \delta)(x,y)\\ &= \sigma(x,y)\delta(x,y)\\ &= \begin{cases}\sigma(x,y), & \text{se} \quad x=y\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}1, & \text{se} \quad x=y\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \delta(x,y).\end{aligned}$$

Logo, $M_\sigma(\delta) = \delta$.

Por fim,

$$\begin{aligned}(M_\sigma(\lambda f))(x,y) &= (\sigma * \lambda f)(x,y)\\ &= \sigma(x,y)(\lambda f)(x,y)\\ &= \sigma(x,y)\lambda f(x,y)\\ &= \lambda\sigma(x,y)f(x,y)\\ &= \lambda(\sigma * f)(x,y)\\ &= (\lambda M_\sigma(f))(x,y).\end{aligned}$$

Com isto, segue que M_σ é um homomorfismo de R-álgebras.

Resta mostrar que M_σ é bijetora. Seja $f \in \ker M_\sigma$. Então $(M_\sigma(f))(x,y) = 0$ para todos $x \leq y \in X$, isto é, $\sigma(x,y)f(x,y) = (\sigma * f)(x,y) = 0$ para todos $x \leq y$. Como $\sigma(x,y)$ é invertível em R para todos $x \leq y$, segue que $f(x,y) = 0$ para todos $x \leq y$ e, assim, $f = 0$. Dessa forma, $\ker M_\sigma = 0$ e, portanto, M_σ é injetora.

Por fim, dada $h \in I(X,R)$, defina $\overline{\sigma} \in I(X,R)$ por

$$\overline{\sigma}(x,y) = \begin{cases}(\sigma(x,y))^{-1}, & \text{se} \quad x \leq y\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

Tomando o elemento $\overline{\sigma} * h \in I(X,R)$, temos que

$$(M_\sigma(\overline{\sigma} * h))(x,y) = [\sigma * (\overline{\sigma} * h)](x,y) = \sigma(x,y)\overline{\sigma}(x,y)h(x,y) = h(x,y),$$

para todos $x, y \in X$, e com isso concluímos a sobrejetividade de M_σ. Portanto, M_σ é um automorfismo de $I(X, R)$.

□

Definição 2.20. Se $\sigma \in I(X, R)$ é uma função multiplicativa, então o automorfismo M_σ de $I(X, R)$ é chamado de *automorfismo multiplicativo associado a* σ.

O próximo resultado mostra que o conjunto de todos os automorfismos multiplicativos de $I(X, R)$ é um subgrupo do grupo $Aut(I(X, R))$.

Proposição 2.21. *Considere o conjunto* $Mult(I(X, R)) = \{M_\sigma : \sigma \text{ é multiplicativa}\}$. *Então* $Mult(I(X, R))$ *é um subgrupo de* $Aut(I(X, R))$.

Demonstração. Considerando $\sigma \in I(X, R)$ dada por $\sigma(x, y) = 1$ se $x \leq y$ e $\sigma(x, y) = 0$ se $x \not\leq y$, temos que σ é multiplicativa e, para todos $f \in I(X, R)$ e $x \leq y$ em X,

$$(M_\sigma(f))(x, y) = (\sigma * f)(x, y) = \sigma(x, y)f(x, y) = f(x, y) = (id_{I(X,R)}(f))(x, y).$$

Logo, $id_{I(X,R)} = M_\sigma \in Mult(I(X, R))$.

Já vimos que se σ e τ são multiplicativas, então $\sigma * \tau$ é multiplicativa. Assim, para todo par $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
(M_{\sigma*\tau}(f))(x, y) &= [(\sigma * \tau) * f](x, y) \\
&= (\sigma(x, y)\tau(x, y))f(x, y) \\
&= \sigma(x, y)(\tau(x, y)f(x, y)) \\
&= \sigma(x, y)(\tau * f)(x, y) \\
&= \sigma(x, y)(M_\tau(f))(x, y) \\
&= (\sigma * M_\tau(f))(x, y) \\
&= [M_\sigma(M_\tau(f))](x, y) \\
&= [(M_\sigma \circ M_\tau)(f)](x, y),
\end{aligned}$$

o que mostra que $M_{\sigma*\tau} = M_\sigma \circ M_\tau$, ou seja, $M_\sigma \circ M_\tau \in Mult(I(X, R))$.

Se $\sigma \in I(X, R)$ é multiplicativa, mostremos que $(M_\sigma)^{-1}$ é também multiplicativo. Considere $\overline{\sigma} \in I(X, R)$ como dada na demonstração do último lema. Note que, para

todos $x \leq y$ em X, $\overline{\sigma}(x,y)$ é invertível em R, uma vez que $(\sigma(x,y))^{-1}$ o é. Mais ainda, se $x \leq z \leq y$ são elementos de X, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(x,y) &= (\sigma(x,y))^{-1} \\
&= (\sigma(x,z)\sigma(z,y))^{-1} \\
&= (\sigma(z,y))^{-1}(\sigma(x,z))^{-1} \\
&= (\sigma(x,z))^{-1}(\sigma(z,y))^{-1} \\
&= \overline{\sigma}(x,z)\overline{\sigma}(z,y).
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\overline{\sigma}$ é multiplicativa. Agora, observe que $M_{\overline{\sigma}} = (M_\sigma)^{-1}$, pois dados $x \leq y$ em X

$$\begin{aligned}
[(M_\sigma \circ M_{\overline{\sigma}})(f)](x,y) &= [M_\sigma(M_{\overline{\sigma}}(f))](x,y) \\
&= (M_\sigma(\overline{\sigma} * f))(x,y) \\
&= (\sigma * \overline{\sigma} * f)(x,y) \\
&= \sigma(x,y)\overline{\sigma}(x,y)f(x,y) \\
&= \sigma(x,y)(\sigma(x,y))^{-1}f(x,y) \\
&= f(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto, $M_\sigma \circ M_{\overline{\sigma}} = id_{I(X,R)}$ e, de forma análoga, vemos também que $M_{\overline{\sigma}} \circ M_\sigma = id_{I(X,R)}$. Portanto, $Mult(I(X,R))$ é um subgrupo de $Aut(I(X,R))$.

□

Vamos agora caracterizar todos os elementos de $Mult(I(X,R))$.

Teorema 2.22. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Seja $\psi \in Aut(I(X,R))$. Então, ψ está em $Mult(I(X,R))$ se, e somente se, $\psi(e_x) = e_x$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Se $\psi = M_\sigma$, para alguma $\sigma \in I(X,R)$ multiplicativa, então para cada $x \in X$ e $u \leq v$ em X, temos

$$(\psi(e_x))(u,v) = (M_\sigma(e_x))(u,v) = (\sigma * e_x)(u,v) = \sigma(u,v)e_x(u,v).$$

Esse produto só é não nulo quando $u = v = x$ e, nesse caso, temos

$$(M_\sigma(e_x))(x,x) = \sigma(x,x)e_x(x,x) = 1.1 = 1 = e_x(x,x).$$

Portanto, $\psi(e_x) = e_x$, para todo $x \in X$, como queríamos.

Reciprocamente, suponha que ψ é um automorfismo de $I(X,R)$ tal que $\psi(e_x) = e_x$, para todo $x \in X$. Sejam $f \in I(X,R)$ e $x \leq y$ em X. Então:

$$(e_x f e_y)(x,y) = \sum_{x \leq w \leq z \leq y} e_x(x,w)f(w,z)e_y(z,y) = f(x,y)$$

e $(e_x f e_y)(u,v) = 0$ se $(u,v) \neq (x,y)$. Logo, $e_x f e_y = f(x,y)\delta_{xy}$, para toda $f \in I(X,R)$.

Dados $x \leq y$ em X, como $\delta_{xy} = e_x \delta_{xy} e_y$, temos

$$\psi(\delta_{xy}) = \psi(e_x \delta_{xy} e_y) = e_x \psi(\delta_{xy}) e_y = r(x,y)\delta_{xy},$$

onde $r(x,y) = (\psi(\delta_{xy}))(x,y) \in R$. Assim, dada $f \in I(X,R)$, temos:

$$\begin{aligned}
(\psi(f))(x,y) &= (e_x \psi(f) e_y)(x,y) \\
&= (\psi(e_x f e_y))(x,y) \\
&= (\psi(f(x,y)\delta_{xy}))(x,y) \\
&= r(x,y)f(x,y).
\end{aligned}$$

Como ψ é sobrejetor, dados $x \leq y$, existe $g \in I(X,R)$ tal que $\psi(g) = \delta_{xy}$. Assim,

$$1 = \delta_{xy}(x,y) = (\psi(g))(x,y) = r(x,y)g(x,y)$$

e, portanto, $r(x,y) \in R$ é invertível. Além disso, quando $x \leq z \leq y$, temos que $\delta_{xy} = \delta_{xz}\delta_{zy}$. Logo,

$$r(x,y)\delta_{xy} = \psi(\delta_{xy}) = \psi(\delta_{xz}\delta_{zy}) = \psi(\delta_{xz})\psi(\delta_{zy}) = r(x,z)r(z,y)\delta_{xz}\delta_{zy} = r(x,z)r(z,y)\delta_{xy}$$

e, portanto, $r(x,y) = r(x,z)r(z,y)$.

Dessa forma, $\sigma \in I(X,R)$ dada por

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} r(x,y), & \text{se} \quad x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função multiplicativa e $\psi = M_\sigma$, provando o desejado.

□

Alguns automorfismos multiplicativos podem ser descritos mais especificamente. Denote por R^* o grupo formado pelos elementos invertíveis de R e seja h uma função de X em R^*. Então a função $\tau_h : X \times X \to R$ dada por

$$\tau_h(x,y) = \begin{cases} \frac{h(x)}{h(y)}, & \text{se} \quad x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um elemento multiplicativo de $I(X,R)$. De fato, se $x \leq z \leq y$ são elementos de X, então $\tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1}$, o qual é invertível em R. Além disso,

$$\tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1}h(z)(h(z))^{-1} = h(x)(h(z))^{-1}h(z)(h(y))^{-1} = \tau_h(x,z)\tau_h(z,y).$$

Tais funções τ_h acima mencionadas são chamadas de *funções fracionárias*. Se h_1 e h_2 são funções de X em R^*, considerando $h_1h_2 : X \to R^*$ dada por $(h_1h_2)(x) = h_1(x)h_2(x)$, então temos:

$$\begin{aligned} \tau_{h_1h_2}(x,y) &= \begin{cases} \frac{(h_1h_2)(x)}{(h_1h_2)(y)}, & \text{se} \quad x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{h_1(x)h_2(x)}{h_1(y)h_2(y)}, & \text{se} \quad x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \tau_{h_1}(x,y)\tau_{h_2}(x,y) \\ &= (\tau_{h_1} * \tau_{h_2})(x,y), \end{aligned}$$

e assim concluímos que $\tau_{h_1h_2} = \tau_{h_1} * \tau_{h_2}$. Como visto anteriormente, $M_{\tau_{h_1}} \circ M_{\tau_{h_2}} = M_{\tau_{h_1} * \tau_{h_2}}$ e, assim, $M_{\tau_{h_1}} \circ M_{\tau_{h_2}} = M_{\tau_{h_1h_2}}$.

Na verdade, temos que

$$Frac(I(X,R)) = \{M_{\tau_h} : \tau_h \text{ é uma função fracionária}\}$$

é um subgrupo de $Mult(I(X,R))$. Tais automorfismos multiplicativos são chamados de *automorfismos fracionários*.

Proposição 2.23. *Se X é um poset localmente finito e R é um anel comutativo com unidade, então*

$$Frac(I(X,R)) = Mult(I(X,R)) \cap Inn(I(X,R)).$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que

$$Frac(I(X,R)) \subseteq Mult(I(X,R)) \cap Inn(I(X,R)).$$

Como $Frac(I(X,R))$ é um subgrupo de $Mult(I(X,R))$, basta mostrar que

$$Frac(I(X,R)) \subseteq Inn(I(X,R)).$$

Seja M_{τ_h} um automorfismo fracionário de $I(X,R)$, com τ_h uma função fracionária. Defina $f \in I(X,R)$ por:

$$f(x,y) = \begin{cases} h(x), & \text{se} \quad x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $f(x,x) = h(x) \in R^*$, para todo $x \in X$, segue, pelo Teorema 2.2, que f é invertível e temos

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} (h(x))^{-1}, & \text{se} \quad x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos então considerar o automorfismo interno ψ_f. Mostremos que $M_{\tau_h} = \psi_f$.

Sejam $g \in I(X,R)$ e $x, y \in X$, então

$$\begin{aligned}
(\psi_f(g))(x,y) &= (fgf^{-1})(x,y) \\
&= \sum_{x\leq z\leq y} f(x,z)(gf^{-1})(z,y) \\
&= h(x)(gf^{-1})(x,y) \\
&= h(x)\left(\sum_{x\leq z\leq y} g(x,z)f^{-1}(z,y)\right) \\
&= h(x)g(x,y)(h(y))^{-1} \\
&= [h(x)(h(y))^{-1}]g(x,y) \\
&= (\tau_h * g)(x,y) \\
&= (M_{\tau_h}(g))(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto, $M_{\tau_h} = \psi_f$ e, assim, $Frac(I(X,R)) \subseteq Inn(I(X,R))$, como queríamos.

Por outro lado, seja $\rho \in Mult(I(X,R)) \cap Inn(I(X,R))$. Então, existem $f, \sigma \in I(X,R)$, com f invertível e σ multiplicativa, tais que $\psi_f = \rho = M_\sigma$, isto é,

$$(fgf^{-1})(x,y) = (\rho(g))(x,y) = \sigma(x,y)g(x,y),$$

para todos $g \in I(X,R)$ e $x, y \in X$. Em particular, se $x \leq y$ e $g = \delta_{xy}$, temos

$$f(x,x)(f(y,y))^{-1} = (f\delta_{xy}f^{-1})(x,y) = \sigma(x,y)\delta_{xy}(x,y) = \sigma(x,y).$$

Seja $h : X \to R^*$ dada por $h(x) = f(x,x)$. Como f é invertível, então $h(x) = f(x,x)$ é de fato invertível em R. Assim,

$$\sigma(x,y) = f(x,x)(f(y,y))^{-1} = h(x)(h(y))^{-1} = \tau_h(x,y),$$

para todos $x \leq y \in X$, isto é, $\sigma = \tau_h$. Dessa forma, $\rho = M_\sigma = M_{\tau_h}$ e, portanto, $Mult(I(X,R)) \cap Inn(I(X,R)) \subseteq Frac(I(X,R))$, o que prova o resultado.

□

Se X possui um elemento que é comparável com todos os elementos de X, ou seja, se existe $x_0 \in X$ tal que, para cada $x \in X$, $x \leq x_0$ ou $x_0 \leq x$, então podemos "melhorar" a propriedade anterior.

Proposição 2.24. *Sejam X um poset localmente finito e R um anel comutativo com unidade. Se existe $x_0 \in X$ tal que todo elemento de X é comparável com x_0, então*

$$Frac(I(X,R)) = Mult(I(X,R)).$$

Nesse caso, em particular, todo automorfismo multiplicativo é um automorfismo interno.

Demonstração. Pela proposição anterior, é suficiente mostrar que todo automorfismo multiplicativo é um automorfismo fracionário. Então, dado $M_\sigma \in Mult(I(X,R))$, devemos exibir uma função $h : X \to R^*$ tal que $\sigma = \tau_h$. Defina h como

$$h(y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad y = x_0 \\ \sigma(y, x_0), & \text{se} \quad y < x_0 \\ (\sigma(x_0, y))^{-1}, & \text{se} \quad x_0 < y. \end{cases}$$

e mostremos que $\sigma = \tau_h$. Sejam $x, y \in X$ e comecemos com o caso em que $x < y$. Usando que $x_0 \in X$ é comparável com todos os elementos de X, temos alguns casos a considerar:

- $x = x_0$; então $h(x) = 1$ e $h(y) = (\sigma(x,y))^{-1}$. Assim

$$\tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1} = 1.((\sigma(x,y))^{-1})^{-1} = \sigma(x,y).$$

- $y = x_0$; análogo ao caso anterior.

- $x < x_0 < y$; então $h(x) = \sigma(x, x_0)$ e $h(y) = (\sigma(x_0, y))^{-1}$. Usando o fato que σ é multiplicativa, temos também que $\sigma(x,y) = \sigma(x,x_0)\sigma(x_0,y)$, assim

$$\tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1} = \sigma(x,x_0)\sigma(x_0,y) = \sigma(x,y).$$

- $x < y < x_0$; então $h(x) = \sigma(x, x_0)$ e $h(y) = \sigma(y, x_0)$. Usando o fato que σ é multiplicativa, temos que $\sigma(x, x_0) = \sigma(x,y)\sigma(y,x_0)$, ou melhor, $(\sigma(y,x_0))^{-1} = (\sigma(x,x_0))^{-1}\sigma(x,y)$, e assim:

$$\tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1} = \sigma(x,x_0)(\sigma(y,x_0))^{-1} = \sigma(x,x_0)(\sigma(x,x_0))^{-1}\sigma(x,y),$$

que é igual a $\sigma(x, y)$.

- $x_0 < x < y$; análogo ao caso anterior.

Agora, se $x = y$, então $h(x) = h(y)$ e $\tau_h(x, y) = 1 = \sigma(x, y)$, já que σ é multiplicativa. Portanto, temos que $\sigma(x, y) = \tau_h(x, y)$, para todos $x, y \in X$, e assim concluímos que $\sigma = \tau_h$. Portanto, $M_\sigma = M_{\tau_h} \in Frac(I(X, R))$, como queríamos.

□

Teorema 2.25 (Teorema da Decomposição)**.** *Sejam X um poset localmente finito e F um corpo. Se ρ é um automorfismo de $I(X, F)$, então $\rho = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}$, para algum automorfismo interno ψ_f, algum automorfismo multiplicativo M_σ e algum automorfismo α de X.*

Demonstração. Pela demonstração do Teorema 2.15, existe um isomorfismo $\alpha : X \to X$ tal que $\rho(e_x) \in e_{\alpha(x)} + J(I(X, F))$. Considere $\alpha^{-1} : X \to X$ e $\widehat{\alpha^{-1}} \in Aut(I(X, F))$. Como $\{e_x : x \in X\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois de $I(X, F)$ e $\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}}$ é um automorfismo de $I(X, F)$, então $\{(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y) : y \in X\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois de $I(X, F)$.

Defina

$$f = \sum_{y \in X} (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y).e_y.$$

Observe que, para cada par $u, v \in X$, o somatório que define $f(u, v)$ se reduz a uma única parcela, pois, para $y \in X$,

$$\begin{aligned}
[(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y).e_y](u, v) &= \sum_{u \leq t \leq v} ((\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y))(u, t).e_y(t, v) \\
&= \begin{cases} ((\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_v))(u, v), & \text{se} \quad v = y \\ 0, & \text{se} \quad v \neq y. \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, $f(u, v) = ((\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_v))(u, v)$, de onde conclui-se que f está bem definida e que $f \in I(X, F)$.

Repare que $(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y) = \rho(e_{\alpha^{-1}(y)}) \in e_y + J(I(X, F))$. Logo, $f(u, u) = ((\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_u))(u, u) = 1$, para todo $u \in X$. Portanto, pelo Teorema 2.2, segue que f é invertível.

Agora, dado $z \in X$, temos

$$\begin{aligned}(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).f &= (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).\left(\sum_{y\in X}(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y).e_y\right)\\ &= \sum_{y\in X}[(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y)].e_y\\ &= (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).e_z,\end{aligned}$$

já que $\{(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y) : y \in X\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois.

Também,

$$f.e_z = \left(\sum_{y\in X}(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_y).e_y\right).e_z = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).e_z,$$

pois $\{e_x : x \in X\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois.

Logo, para todo $z \in X$, temos que $(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).f = f.e_z$, o que implica que

$$fe_zf^{-1} = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z), \quad \text{ou melhor,} \quad \psi_f(e_z) = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z).$$

Assim, para todo $z \in X$, temos que $e_z = ({\psi_f}^{-1} \circ \rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_z)$. Pelo Teorema 2.22, segue que ${\psi_f}^{-1} \circ \rho \circ \widehat{\alpha^{-1}} = M_\sigma$, para alguma $\sigma \in I(X, F)$ multiplicativa. Portanto, $\rho = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}$, como queríamos demonstrar.

□

Como consequência do resultado anterior e da Proposição 2.24, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.26. *Sejam X um poset localmente finito e F um corpo. Se existe $x_0 \in X$ tal que todo elemento de X é comparável com x_0, então todo automorfismo de $I(X, F)$ é a composição de um automorfismo interno de $I(X, F)$ com um automorfismo induzido por um automorfismo de X.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.24 que todo automorfismo multiplicativo é interno. Como composição de automorfismos internos é um automorfismo interno, segue o resultado.

□

CAPÍTULO 3

AUTOMORFISMOS MULTIPLICATIVOS E INTERNOS

O Teorema da Decomposição, apresentado no capítulo anterior, mostra que todo automorfismo de $I(X, F)$ pode ser decomposto como composição de um automorfismo interno, um automorfismo multiplicativo e um automorfismo induzido por um automorfismo de X. Se tivermos que o automorfismo multiplicativo é interno, então esta decomposição torna-se mais simples, já que composição de automorfismos internos é um automorfismo interno. Obter a classificação das involuções de uma álgebra de incidência, tal como estudado em [4], torna-se também mais simples quando todo automorfismo multiplicativo é interno.

Embora tenhamos obtido uma condição necessária e suficiente na Proposição 2.23 para que todo automorfismo multiplicativo de uma álgebra de incidência seja interno (e esta condição é que todo automorfismo multiplicativo seja fracionário), repare que a aplicação do mesmo é difícil, a menos que o poset possua uma particularidade evidente como possuir um elemento que seja comparável com todos os demais do poset, por exemplo, como mostra a Proposição 2.24.

Desta forma, o objetivo deste capítulo é apresentar condições necessárias e suficientes que permitam, a partir de uma análise do diagrama de Hasse do poset, perceber se um automorfismo multiplicativo de uma álgebra de incidência é interno. Para isso, usaremos a estrutura do poset como um grafo direcionado. A partir de agora, assumi-

remos que F é um corpo.

O próximo resultado apresenta condições necessárias e suficientes para que um automorfismo interno de uma álgebra de incidência seja multiplicativo.

Proposição 3.1. *Seja $f \in I(X,F)$ invertível e considere o automorfismo interno ψ_f. Então, ψ_f é multiplicativo se, e somente se, $f(x,y) = 0$, para todo $x \neq y \in X$.*

Demonstração. Suponha que ψ_f é um automorfismo multiplicativo. Então, existe uma função multiplicativa $\tau \in I(X,F)$ tal que $(\psi_f(g))(x,y) = (M_\tau(g))(x,y)$, para toda $g \in I(X,F)$ e todos $x, y \in X$. Assim, $(fgf^{-1})(x,y) = \tau(x,y)g(x,y)$, para toda $g \in I(X,F)$ e todos $x, y \in X$. Em particular, para $x \leq y$ e $g = \delta_{xy}$, temos que $f(x,x)f^{-1}(y,y) = \tau(x,y)$, para todos $x \leq y \in X$. Logo, temos

$$(fgf^{-1})(x,y) = f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y), \tag{3.0-1}$$

e assim

$$\sum_{x \leq t \leq z \leq y} f(x,t)g(t,z)f^{-1}(z,y) = f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y), \tag{3.0-2}$$

para toda $g \in I(X,F)$ e todos $x \leq y \in X$.

Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$ e façamos a demonstração por indução sobre $|[x,y]|$. Se $|[x,y]| = 0$, então $x \not\leq y$ e assim $f(x,y) = 0$, já que $f \in I(X,F)$. Não pode ocorrer $|[x,y]| = 1$, pois isso implicaria que $x = y$. Se $|[x,y]| = 2$, então y cobre x. Assim, da igualdade $(3.0-2)$, temos

$$f(x,x)g(x,x)f^{-1}(x,y) + f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y) + f(x,y)g(y,y)f^{-1}(y,y)$$

$$= f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y),$$

o que implica que

$$f(x,x)g(x,x)f^{-1}(x,y) + f(x,y)g(y,y)f^{-1}(y,y) = 0,$$

para toda $g \in I(X,F)$.

Em particular, para $g = e_y$, temos $f(x,y)f^{-1}(y,y) = 0$, o que implica que $f(x,y) = 0$, já que $f^{-1}(y,y) = (f(y,y))^{-1} \neq 0$, pelo Teorema 2.2.

Agora, suponha que o resultado seja válido para $|[x,y]| \leq n-1$, com $n-1 \geq 2$ e mostremos que vale para n. Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $|[x,y]| = n$. Para toda $g \in I(X,F)$, temos, por $(3.0-1)$

$$f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)(gf^{-1})(z,y)$$

$$= f(x,x)(gf^{-1})(x,y) + f(x,y)(gf^{-1})(y,y) + \sum_{x<z<y} f(x,z)(gf^{-1})(z,y).$$

Como $|[x,z]| \leq n-1$, pela hipótese de indução temos que $f(x,z) = 0$, para todo z tal que $x < z < y$. Logo,

$$\sum_{x<z<y} f(x,z)(gf^{-1})(z,y) = 0$$

e temos

$$f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y) = f(x,x)(gf^{-1})(x,y) + f(x,y)g(y,y)f^{-1}(y,y),$$

para toda $g \in I(X,F)$.

Em particular, para $g = e_y$, temos $f(x,y)f^{-1}(y,y) = 0$, o que implica que $f(x,y) = 0$, já que $f^{-1}(y,y) \neq 0$. Portanto, $f(x,y) = 0$, para todo $x \neq y \in X$.

Reciprocamente, defina $\sigma \in I(X,F)$ por

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} f(x,x)(f(y,y))^{-1}, & \text{se} \quad x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Repare que $f(u,u)$ é invertível para todo $u \in X$, já que f é invertível, assim σ está bem definida e $\sigma(x,y)$ é invertível, para todos $x \leq y$. Se $x \leq z \leq y$, temos

$$\sigma(x,y) = f(x,x)(f(y,y))^{-1} = f(x,x)(f(z,z))^{-1}f(z,z)(f(y,y))^{-1} = \sigma(x,z)\sigma(z,y).$$

Logo, σ é uma função multiplicativa.

Além disso, para toda $g \in I(X, F)$ e todos $x \leq y$, temos

$$\begin{aligned}
(\psi_f(g))(x,y) &= (fgf^{-1})(x,y) \\
&= \sum_{x \leq t \leq w \leq y} f(x,t)g(t,w)f^{-1}(w,y) \\
&= f(x,x)g(x,y)(f(y,y))^{-1} \\
&= f(x,x)(f(y,y))^{-1}g(x,y) \\
&= \sigma(x,y)g(x,y) \\
&= (M_\sigma(g))(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi_f = M_\sigma$ e ψ_f é um automorfismo multiplicativo.

□

A Proposição 2.24 do capítulo anterior mostra que o poset X ter um elemento comparável com todos os seus elementos é uma condição suficiente para que todo automorfismo multiplicativo de $I(X, F)$ seja um automorfismo interno. Porém, essa não é uma condição necessária. Por exemplo, considere o poset X_1 associado ao diagrama de Hasse da Figura 3.1.

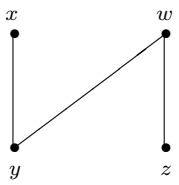

Figura 3.1: Poset X_1

Claramente, não existe elemento em X_1 comparável com todos os elementos desse poset, no entanto, mostraremos adiante que todo automorfismo multiplicativo da álgebra $I(X_1, F)$ é interno.

Contudo, também existem situações em que a álgebra de incidência admite um automorfismo multiplicativo que não é interno. É o caso da álgebra de incidência do poset X_2 da Figura 3.2, como veremos no Exemplo 3.9.

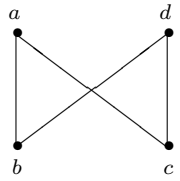

Figura 3.2: Poset X_2

Conforme mencionado anteriormente, um poset X pode ser identificado com seu diagrama de Hasse, o qual é um grafo direcionado $G = (X, E)$, onde X é o conjunto de vértices (elementos do poset X), E é o conjunto de arestas e, dados $x, y \in X$, $(x, y) \in E$ se y cobre x, isto é, se $x < y$ e $\{t \in X : x < t < y\} = \emptyset$. De agora em diante, veremos que a estrutura de X como um grafo direcionado pode ajudar a determinar condições para um automorfismo multiplicativo de $I(X, F)$ ser um automorfismo interno.

Como já definido no Capítulo 1, um poset X é dito conexo se, para quaisquer $x, y \in X$, existem $x_0, x_1, \ldots, x_n$ elementos de X tais que $x = x_0, y = x_n$ e $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$, para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Isso é equivalente a dizer que o diagrama de Hasse associado a X é conexo. A partir de agora, assumiremos que X é um poset finito e conexo.

Definição 3.2. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Dados $v, w \in V$, seja $\mathscr{P}$ uma sequência de vértices distintos dois a dois $v_0 v_1 \ldots v_k$ tal que $v_0 = v$ e $v_k = w$. Denotaremos tal sequência por $\mathscr{P} : v = v_0 v_1 \ldots v_k = w$. A sequência $\mathscr{P}$ é dita ser um *caminho (contracaminho)* ligando v a w em G se $(v_i, v_{i+1})((v_{i+1}, v_i))$ está em E, para todo $0 \leq i \leq k-1$. A sequência $\mathscr{P}$ é um *semicaminho* ligando v a w em G se, para todo $0 \leq i \leq k-1$, (v_i, v_{i+1}) ou (v_{i+1}, v_i) está em E. Se, para qualquer par $v, w \in V$, existe um único semicaminho ligando v a w em G, então G é dito uma *árvore*.

Exemplo 3.3. O poset X_1 da Figura 3.1 é uma árvore.

Exemplo 3.4. Considere o poset X_3 dado na Figura 3.3.

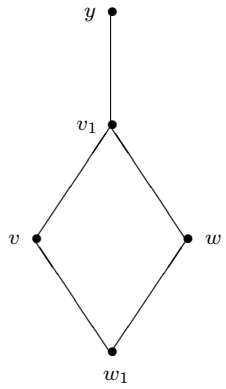

Figura 3.3: Poset X_3

Temos que $\mathscr{P}_1 : w_1vv_1y$ é um caminho ligando w_1 a y, $\mathscr{P}_2 : yv_1w$ é um contracaminho ligando y a w e $\mathscr{P}_3 : vv_1w$ é um semicaminho ligando v a w. Note que X_3 não é uma árvore, pois $\mathscr{P}_4 : vw_1w$ é outro semicaminho que liga v a w.

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado e seja C um conjunto. Um *peso* ω em G com valores em C é uma aplicação $\omega : E \to C$. Quando existe um peso $\omega : E \to C$, dizemos que G é um *grafo direcionado com peso*.

Se $G = (V, E)$ é um grafo direcionado com peso $\omega : E \to H$, onde $(H, *)$ é um grupo abeliano qualquer, denote por

$$E^* := \{(u, v) : (v, u) \in E\}.$$

Pela forma como foi definido o conjunto E das arestas de G, isto é, $(u, v) \in E$ se e somente se v cobre u, ou seja, $u < v$ e $\{t \in V : u < t < v\} = \emptyset$, segue que $E \cap E^* = \emptyset$. Assim, o *peso direcionado* γ_ω induzido pelo peso ω é a aplicação $\gamma_\omega : E \cup E^* \to H$ dada por

$$\gamma_\omega(u, v) = \begin{cases} \omega(u, v), & \text{se} \quad (u, v) \in E \\ (\omega(v, u))^{-1}, & \text{se} \quad (u, v) \in E^* \end{cases},$$

onde $(\omega(v, u))^{-1}$ denota o inverso de $\omega(v, u)$ com relação à operação $*$.

Em particular, se F é um corpo, então $F^* = F\backslash\{0\}$ é um grupo abeliano munido da multiplicação. Assim, dado $\omega : E \to F^*$ um peso, temos o peso direcionado $\gamma_\omega : E \cup E^* \to F^*$ induzido por ω:

$$\gamma_\omega(u,v) = \begin{cases} \omega(u,v), & \text{se} \quad (u,v) \in E \\ (\omega(v,u))^{-1}, & \text{se} \quad (u,v) \in E^* \end{cases}.$$

Agora, dada $\sigma \in I(X,F)$ multiplicativa, pode-se construir um peso ω_σ e, assim, tornar $G = (X,E)$ num grafo direcionado com peso, cujos pesos pertencem a F^*, da seguinte maneira: se (x,y) é uma aresta de X (isto é, y cobre x, ou ainda, $(x,y) \in E$), o peso de (x,y) é $\sigma(x,y)$. Note que, como σ é multiplicativa, se $x = v_0 v_1 \dots v_k = y$ é um caminho em X, então $\sigma(x,y) = \prod_{i=0}^{k-1} \sigma(v_i, v_{i+1}) = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_{\omega_\sigma}(v_i, v_{i+1})$.

Dados dois semicaminhos distintos ligando x a y em X, o produto dos pesos direcionados das arestas em cada semicaminho não é necessariamente o mesmo. Por exemplo, considere os semicaminhos abd e acd ligando a a d no poset X_2, dado na Figura 3.4, onde $\sigma(b,a) = 1$, $\sigma(b,d) = -1$, $\sigma(c,a) = 1$ e $\sigma(c,d) = 1$.

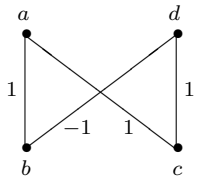

Figura 3.4: Poset X_2

Se a característica de F é diferente de 2, temos:

$$\begin{aligned} \gamma_\sigma(a,b)\gamma_\sigma(b,d) &= (\sigma(b,a))^{-1}\sigma(b,d) \\ &= 1.(-1) \\ &= -1 \\ &\neq 1.1 \\ &= (\sigma(c,a))^{-1}\sigma(c,d) \\ &= \gamma_\sigma(a,c)\gamma_\sigma(c,d). \end{aligned}$$

No entanto, essa é uma condição necessária e suficiente para o automorfismo multiplicativo M_σ ser um automorfismo interno, como veremos no próximo teorema.

Se $\mathscr{P} : x = v_0 v_1 \dots v_k = y$ é um semicaminho ligando x a y em X e σ é um elemento multiplicativo de $I(X,F)$, denotaremos o produto dos pesos direcionados das arestas

de $\mathscr{P}$ por $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y)$, isto é,

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_{\sigma}(v_i, v_{i+1}).$$

Lema 3.5. *Seja $\mathscr{P} : x = v_0 v_1 \dots v_k = y$ um semicaminho ligando x a y em X e seja σ um elemento multiplicativo de $I(X,F)$.*

1. *Se $\mathscr{P}$ é um caminho, então $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = \sigma(x,y)$ e, se $\mathscr{P}$ é um contracaminho, então $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = (\sigma(y,x))^{-1}$.*

2. *Se $\mathscr{P}_1 : x = v_0 v_1 \dots v_l = z$ e $\mathscr{P}_2 : z = v_l \dots v_k = y$, onde $0 < l < k$ (nesse caso, denotaremos $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2$), então*

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(x,z) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(z,y).$$

3. *Se $\mathscr{P}^{-1} : y = v_k \dots v_1 v_0 = x$, então $\mathscr{P}^{-1}$ é um semicaminho ligando y a x em X e*

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}^{-1}}(y,x) = \left[I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y)\right]^{-1}.$$

Demonstração. (1) Se $\mathscr{P}$ é um caminho, então $(v_i, v_{i+1}) \in E$, para todo $0 \leq i \leq k-1$. Assim, como σ é multiplicativa,

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_{\sigma}(v_i, v_{i+1}) = \prod_{i=0}^{k-1} \sigma(v_i, v_{i+1}) = \sigma(v_0, v_k) = \sigma(x,y).$$

Se $\mathscr{P}$ é um contracaminho, então $(v_{i+1}, v_i) \in E$, para todo $0 \leq i \leq k-1$. Novamente usando que σ é multiplicativa, temos

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_{\sigma}(v_i, v_{i+1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma(v_{i+1}, v_i))^{-1} = (\sigma(v_k, v_0))^{-1} = (\sigma(y,x))^{-1}.$$

(2) Temos que

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(x,z) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(z,y) = \prod_{i=0}^{l-1} \gamma_{\sigma}(v_i, v_{i+1}) . \prod_{j=l}^{k-1} \gamma_{\sigma}(v_j, v_{j+1}) = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_{\sigma}(v_i, v_{i+1}) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y).$$

(3) Considere $\mathscr{P}^{-1} : y = v_k \dots v_1 v_0 = x$. Então $\mathscr{P}^{-1}$ é uma sequência de vértices distintos dois a dois, pois $\mathscr{P}$ o é. Ainda, como $\mathscr{P}$ é um semicaminho ligando x a y em

X, então (v_i, v_{i+1}) ou (v_{i+1}, v_i) está em E, para todo $0 \leq i \leq k-1$, o que mostra que $\mathscr{P}^{-1}$ é um semicaminho ligando y a x em X. Além disso note que, para cada $0 \leq i \leq k-1$, temos

$$(\gamma_\sigma(v_i, v_{i+1}))^{-1} = \begin{cases} (\sigma(v_i, v_{i+1}))^{-1}, & \text{se} \quad (v_i, v_{i+1}) \in E \\ \sigma(v_{i+1}, v_i), & \text{se} \quad (v_i, v_{i+1}) \in E^* \end{cases} = \gamma_\sigma(v_{i+1}, v_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned} [I^\sigma_{\mathscr{P}}(x,y)]^{-1} &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \gamma_\sigma(v_i, v_{i+1})\right)^{-1} \\ &= [\gamma_\sigma(v_0, v_1)\gamma_\sigma(v_1, v_2)\ldots\gamma_\sigma(v_{k-2}, v_{k-1})\gamma_\sigma(v_{k-1}, v_k)]^{-1} \\ &= (\gamma_\sigma(v_{k-1}, v_k))^{-1}(\gamma_\sigma(v_{k-2}, v_{k-1}))^{-1}\ldots(\gamma_\sigma(v_1, v_2))^{-1}(\gamma_\sigma(v_0, v_1))^{-1} \\ &= \gamma_\sigma(v_k, v_{k-1})\gamma_\sigma(v_{k-1}, v_{k-2})\ldots\gamma_\sigma(v_2, v_1)\gamma_\sigma(v_1, v_0) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_\sigma(v_{k-j}, v_{k-j-1}) \\ &= I^\sigma_{\mathscr{P}^{-1}}(y,x). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. *Seja σ um elemento multiplicativo de $I(X,F)$. O automorfismo multiplicativo M_σ é interno se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e quaisquer semicaminhos $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ ligando x a y, tivermos que $I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(x,y) = I^\sigma_{\mathscr{P}_2}(x,y)$.*

Demonstração. Suponha que M_σ é um automorfismo interno. Então, pela Proposição 2.23, M_σ é fracionário. Assim, existe uma aplicação $h : X \to F^*$ tal que $\sigma = \tau_h$, isto é, $\sigma(x,y) = \tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1}$, para todos $x \leq y \in X$.

Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$ e seja $\mathscr{P} : v_0 v_1 \ldots v_k$ um semicaminho qualquer ligando x a y. Provaremos, por indução sobre k, que $I^\sigma_{\mathscr{P}}(x,y) = h(x)(h(y))^{-1}$.

Para $k = 1$, se $x < y$ então $I^\sigma_{\mathscr{P}}(x,y) = \gamma_\sigma(x,y) = \sigma(x,y) = h(x)(h(y))^{-1}$. Se $y < x$ então $I^\sigma_{\mathscr{P}}(x,y) = \gamma_\sigma(x,y) = (\sigma(y,x))^{-1} = [h(y)(h(x))^{-1}]^{-1} = h(x)(h(y))^{-1}$.

Suponha que $k > 1$ e que o resultado é válido para $k-1$. Se escrevermos

$\mathscr{P} = \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2$, onde $\mathscr{P}_1 : v_0v_1 \dots v_{k-1}$ e $\mathscr{P}_2 : v_{k-1}v_k$, então pelo item (2) do Lema 3.5,

$$\begin{aligned} I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) &= I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(v_0, v_{k-1}) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(v_{k-1}, v_k) \\ &= h(v_0)(h(v_{k-1}))^{-1} h(v_{k-1})(h(v_k))^{-1} \\ &= h(v_0)(h(v_k))^{-1} \\ &= h(x)(h(y))^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(x,y) = h(x)(h(y))^{-1}$, para qualquer semicaminho $\mathscr{P}$ ligando x a y e, portanto, segue o resultado.

Reciprocamente suponha que, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e quaisquer semicaminhos $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ ligando x a y, tenhamos que $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(x,y) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(x,y)$. Defina $h : X \to F^*$ da seguinte forma: fixado $z \in X$, tome $h(z) = 1$ e, para qualquer outro $x \in X$, tome $h(x) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_x}(x,z)$, onde $\mathscr{P}_x$ é algum semicaminho ligando x a z. Por hipótese, h está bem definida.

Sejam $x < y$ em X. Então existe um contracaminho $\mathscr{Q}_1$ ligando y a x. Seja $\mathscr{Q}_2$ um semicaminho ligando x a z e seja p o último vértice de $\mathscr{Q}_2$ que pertence a $\mathscr{Q}_1$. Considerando $\mathscr{P}_1$ o contracaminho ligando y a p e $\mathscr{P}$ o semicaminho ligando p a z, então $\mathscr{P}_1\mathscr{P}$ é um semicaminho que liga y a z. Considerando $\mathscr{P}_2$ o caminho ligando x a p, então $\mathscr{P}_2\mathscr{P}$ é um semicaminho que liga x a z, como mostra a Figura 3.5.

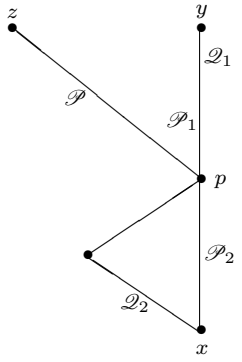

Figura 3.5: Caso em que $\mathscr{Q}_1$ e $\mathscr{Q}_2$ se interceptam em outros vértices além de x

Assim:

$$\begin{aligned} h(x)(h(y))^{-1} &= I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2\mathscr{P}}(x,z)[I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}}(y,z)]^{-1} \\ &= I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2\mathscr{P}}(x,z)I^{\sigma}_{(\mathscr{P}_1\mathscr{P})^{-1}}(z,y) \\ &= I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(x,p)I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(p,z)I^{\sigma}_{\mathscr{P}^{-1}}(z,p)I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1^{-1}}(p,y) \\ &= I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2\mathscr{P}_1^{-1}}(x,y) \\ &= \sigma(x,y), \end{aligned}$$

já que σ é multiplicativa e $\mathscr{P}_2\mathscr{P}_1^{-1}$ é um caminho ligando x a y.

Se $\mathscr{Q}_1$ e $\mathscr{Q}_2$ não se interceptam além da extremidade x, então $p = x$, $\mathscr{P}_1 = \mathscr{Q}_1$, $\mathscr{P} = \mathscr{Q}_2$, como mostra a Figura 3.6, e o argumento acima funciona sem o caminho $\mathscr{P}_2$.

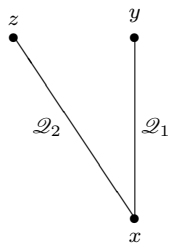

Figura 3.6: Caso em que $\mathscr{Q}_1$ e $\mathscr{Q}_2$ não se interceptam em outros vértices além de x

Se $x = y$, claramente $h(x)(h(y))^{-1} = \sigma(x,y)$. Logo, $\sigma = \tau_h$ e, portanto, $M_\sigma = M_{\tau_h} \in Frac(I(X,F))$. Pela Proposição 2.23, segue que M_σ é um automorfismo interno.

□

Corolário 3.7. *Se X é uma árvore, então todo automorfismo multiplicativo de $I(X,F)$ é interno.*

Demonstração. Seja σ um elemento de multiplicativo de $I(X,F)$. Como X é uma árvore, então dados $x, y \in X$ distintos, existe um único semicaminho ligando x a y. Logo, as hipóteses do teorema anterior são satisfeitas. Assim, M_σ é interno e, portanto, segue o resultado.

□

Exemplo 3.8. Como o poset X_1 considerado anteriormente na Figura 3.1 é uma árvore, segue do corolário anterior que todo automorfismo multiplicativo de $I(X_1,F)$ é

interno.

Exemplo 3.9. Considere o poset X_2 dado anteriormente na Figura 3.2. Defina $\sigma \in I(X_2, F)$ por: $\sigma(b,a) = 1, \sigma(b,d) = -1, \sigma(c,a) = 1, \sigma(c,d) = 1$ e $\sigma(x,x) = 1$, para todo $x \in X_2$. Claramente, σ é um elemento multiplicativo de $I(X_2, F)$. Agora, considere os semicaminhos $\mathscr{P} : abd$ e $\mathscr{Q} : acd$ ligando a a d. Temos que $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(a,d) = (\sigma(b,a))^{-1}\sigma(b,d) = -1$ e $I^{\sigma}_{\mathscr{Q}}(a,d) = (\sigma(c,a))^{-1}\sigma(c,d) = 1$. Logo, se a característica de F é diferente de 2, pelo Teorema 3.6 pode-se concluir que o automorfismo multiplicativo M_σ não é interno.

Vamos agora introduzir o conceito de semicaminho reduzido.

Note que todo semicaminho num grafo direcionado pode ser dividido em caminhos e contracaminhos alternados. Quando o grafo direcionado é um poset X, os caminhos correspondem a cadeias ascendentes e os contracaminhos correspondem a cadeias descendentes. Seja $v_0 v_1 \dots v_k$ um semicaminho em um poset X e sejam $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_r = k$ os índices tais que $v_{i_{t-1}} v_{i_{t-1}+1} \dots v_{i_t}$ é um caminho (contracaminho) e $v_{i_t} v_{i_t+1} \dots v_{i_{t+1}}$ é um contracaminho (caminho). Chamamos a sequência $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_r}$ de *semicaminho reduzido associado ao semicaminho* $v_0 v_1 \dots v_k$.

Exemplo 3.10. Considere o poset X_4 dado na Figura 3.7 e considere o semicaminho $\mathscr{P} : x_1 x_3 x_6 x_4 x_7 x_5 x_2$ ligando x_1 a x_2.

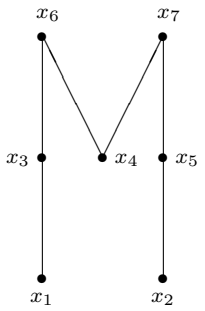

Figura 3.7: Poset X_4

Então, o semicaminho reduzido associado a $\mathscr{P}$ é $x_1 x_6 x_4 x_7 x_2$.

O próximo resultado generaliza o Corolário 3.7.

Corolário 3.11. *Seja X um poset tal que, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, quaisquer dois semicaminhos ligando x a y têm o mesmo semicaminho reduzido. Então todo automorfismo multiplicativo de $I(X, F)$ é interno.*

Demonstração. Segue diretamente dos itens (1) e (2) do Lema 3.5 e do Teorema 3.6.

□

O Teorema 3.6 fornece uma boa condição para verificar se um automorfismo multiplicativo de uma álgebra de incidência é interno, mas tal condição pode ser difícil de ser checada, pois, dependendo do poset X, podem existir vários semicaminhos distintos ligando dois pontos. Na realidade, uma aplicação mais fácil do Teorema 3.6 é mostrar que um automorfismo multiplicativo não é interno, como foi feito no Exemplo 3.9. Assim, em vista do Teorema 3.6, buscaremos condições sobre X mais simples de serem checadas que garantam que $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(x,y) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(x,y)$, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e quaisquer semicaminhos $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ ligando x a y.

Lema 3.12. *Seja σ um elemento multiplicativo de $I(X,F)$ e seja $\mathscr{P} : v_0 v_1 \dots v_k$ um semicaminho tal que todo vértice de $\mathscr{P}$ é comparável com v_0. Então:*

1. *$v_0 < v_k$ ($v_k < v_0$) implica que $v_0 < v_i$ ($v_i < v_0$), para todo $1 \leq i \leq k-1$.*
2. $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(v_0, v_k) = \begin{cases} \sigma(v_0, v_k), & \text{se} \quad v_0 < v_k \\ (\sigma(v_k, v_0))^{-1}, & \text{se} \quad v_k < v_0 \end{cases}$.

Demonstração. (1) Suponha que $v_0 < v_k$ e mostremos que $v_0 < v_{k-1}$. De fato, se v_k cobre v_{k-1}, então devemos ter que $v_0 < v_{k-1} < v_k$, pois v_0 e v_{k-1} são comparáveis e não existe $x \in X$ tal que $v_{k-1} < x < v_k$. Se v_{k-1} cobre v_k, então temos $v_0 < v_k < v_{k-1}$.

Agora, como v_{k-1} cobre v_{k-2} ou v_{k-2} cobre v_{k-1}, analogamente tem-se que $v_0 < v_{k-2}$. Repetindo esse raciocínio, após $k-1$ passos, conclui-se que $v_0 < v_i$, para todo $1 \leq i \leq k-1$. O caso $v_k < v_0$ é análogo.

(2) Suponha que $v_0 < v_k$ e a prova será feita por indução sobre k. Por (1), temos que $v_0 < v_i$, para todo $1 \leq i \leq k$. Para $k = 1$, temos $I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(v_0, v_k) = \gamma_{\sigma}(v_0, v_1) = \sigma(v_0, v_1)$. Suponha que $k > 1$ e que o resultado é válido para $k-1$. Seja $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2$, onde $\mathscr{P}_1 : v_0 v_1 \dots v_{k-1}$ e $\mathscr{P}_2 : v_{k-1} v_k$. Então, usando o item (2) do Lema 3.5, temos

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(v_0, v_k) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(v_0, v_{k-1}) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(v_{k-1}, v_k) = \sigma(v_0, v_{k-1})\gamma_{\sigma}(v_{k-1}, v_k).$$

Se v_k cobre v_{k-1}, então $\gamma_{\sigma}(v_{k-1}, v_k) = \sigma(v_{k-1}, v_k)$ e assim

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}}(v_0, v_k) = \sigma(v_0, v_{k-1})\sigma(v_{k-1}, v_k) = \sigma(v_0, v_k).$$

Se v_{k-1} cobre v_k, então $\gamma_\sigma(v_{k-1}, v_k) = (\sigma(v_k, v_{k-1}))^{-1}$ e assim

$$I^\sigma_{\mathscr{P}}(v_0, v_k) = \sigma(v_0, v_{k-1})(\sigma(v_k, v_{k-1}))^{-1} = \sigma(v_0, v_k).$$

O caso $v_k < v_0$ é análogo.

□

Introduziremos agora o conceito de v-cauda.

Sejam $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ semicaminhos em X com os mesmos extremos. Seja $v \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ e seja $y \in X \backslash \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ um elemento comparável com v. Então $y < v$ ou $v < y$. Em qualquer caso, existe um caminho ou um contracaminho ligando y a v, digamos $u_0 u_1 \dots u_t$, com $u_0 = y$ e $u_t = v$. Pode acontecer de esse (contra) caminho interceptar $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ em algum vértice antes de v, isto é, pode existir j, $0 < j < t$, tal que $u_j \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. Seja $b := min\{i \in \{1, \dots, t\} : u_i \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2\}$. Então $u_0 u_1 \dots u_{b-1} u_b$ é um (contra) caminho ligando y a um ponto de $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ e é formado por elementos que são todos maiores ou todos menores do que v. Tal (contra) caminho obtido dessa forma será chamado de *v-cauda ligando y a v*. (Note que, em geral, a v-cauda não liga realmente y a v, mas sim y a um ponto de $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$). Sempre assumiremos que a cauda começa em y e termina em u_b.

Um exemplo simples desse conceito é dado ao considerarmos os semicaminhos $\mathscr{P}_1 : v v_1 w$ e $\mathscr{P}_2 : v w_1 w$ no poset X_3 dado na Figura 3.8. Temos que $v \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$, $y \notin \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ e $y v_1 v$ é um contracaminho ligando y a v. Assim, $y v_1$ é a v-cauda ligando y a v.

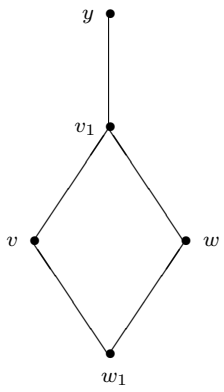

Figura 3.8: Exemplo de v-cauda

Lema 3.13. *Seja σ um elemento multiplicativo de $I(X, F)$. Dados $x_1, x_2 \in X$ distintos e $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ semicaminhos ligando x_1 a x_2 que não têm pontos em comum a não ser as extremidades x_1 e x_2, suponha que todos os elementos de $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ são comparáveis com um mesmo $y \in X$. Então $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(x_1, x_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(x_1, x_2)$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in X$ distintos e considere $\mathscr{P}_1 : v_0 v_1 \dots v_k$ e $\mathscr{P}_2 : w_0 w_1 \dots w_l$ semicaminhos satisfazendo as hipóteses. Então, $v_0 = x_1 = w_0$ e $v_k = x_2 = w_l$. Mostremos que $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(v_0, v_k) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(w_0, w_l)$.

Suponha que $y \notin \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ e seja qualquer $v \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. Como v é comparável com y, existe $\mathscr{T} : u_0 u_1 \dots u_b$ uma v-cauda ligando y a v. Então, $u_b \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u_b = v_i \in \mathscr{P}_1$, para algum i. Considere os semicaminhos $\mathscr{P}_1{}' : v_i v_{i+1} \dots v_k$ e $\mathscr{P}_1{}'' : v_i v_{i-1} \dots v_0$. Então, $\mathscr{T}\mathscr{P}_1{}' : u_0 u_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_k$ e $\mathscr{T}\mathscr{P}_1{}''\mathscr{P}_2 : u_0 u_1 \dots v_i v_{i-1} \dots v_0 w_1 \dots v_k$ são semicaminhos distintos ligando y a v_k, como mostra a Figura 3.9, e em ambos os semicaminhos, todo vértice é comparável com y.

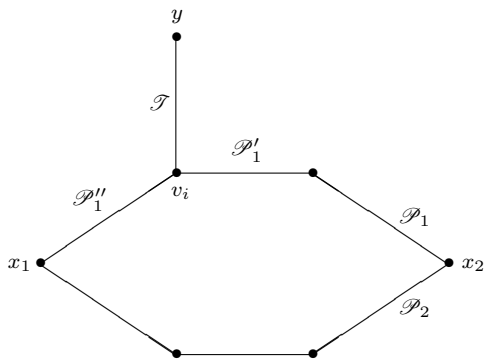

Figura 3.9:

Pelo lema anterior, temos

$$I^{\sigma}_{\mathscr{T}\mathscr{P}_1{}'}(y, v_k) = \begin{cases} \sigma(y, v_k), & \text{se} \quad y < v_k \\ (\sigma(v_k, y))^{-1}, & \text{se} \quad v_k < y \end{cases} = I^{\sigma}_{\mathscr{T}\mathscr{P}_1{}''\mathscr{P}_2}(y, v_k).$$

Assim, pelo item (2) do Lema 3.5:

$$I^{\sigma}_{\mathscr{T}}(u_0, u_b) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}'}(v_i, v_k) = I^{\sigma}_{\mathscr{T}}(u_0, u_b) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}''}(v_i, v_0) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(w_0, w_l).$$

Cancelando $I^{\sigma}_{\mathscr{T}}(u_0, u_b)$ e tomando o inverso de $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}''}(v_i, v_0)$, obtemos

$$(I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}''}(v_i, v_0))^{-1} I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}'}(v_i, v_k) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(w_0, w_l).$$

Como, pelo item (3) do Lema 3.5, $(I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}''}(v_i, v_0))^{-1} = I^{\sigma}_{(\mathscr{P}_1{}'')^{-1}}(v_0, v_i)$ e $(\mathscr{P}_1{}'')^{-1}\mathscr{P}_1{}' = \mathscr{P}_1$, concluímos, pelo item (2) do mesmo lema, que

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(v_0, v_k) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(w_0, w_l).$$

Agora, se $y \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$, então podemos assumir que $y = v_i$ e o argumento acima funciona para os semicaminhos $\mathscr{P}_1{}'$ e $\mathscr{P}_1{}''\mathscr{P}_2$, sem a cauda $\mathscr{T}$.

□

Considere $Y = \{x \in X : x \text{ é maximal}\}$ o subconjunto de todos os elementos maximais de X. Como X é um poset finito, para todo $x \in X$, existe $y_x \in Y$ tal que $x \leq y_x$, o que implica que x é comparável com y_x.

Proposição 3.14. *Seja σ um elemento multiplicativo de $I(X, F)$ e seja $Y = \{x \in X : x \text{ é maximal}\} \subset X$. Suponha que, para quaisquer $y_1, y_2 \in Y$ distintos e quaisquer semicaminhos $\mathscr{Q}_1$ e $\mathscr{Q}_2$ ligando y_1 a y_2, tem-se que $I^{\sigma}_{\mathscr{Q}_1}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{Q}_2}(y_1, y_2)$. Então, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ distintos e quaisquer semicaminhos $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ ligando x_1 a x_2, tem-se $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(x_1, x_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(x_1, x_2)$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in X$ distintos e considere $\mathscr{P}_1 : v_0 v_1 \dots v_k$ e $\mathscr{P}_2 : w_0 w_1 \dots w_l$ semicaminhos ligando x_1 a x_2. Comecemos com o caso em que os semicaminhos $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ não têm pontos em comum além das extremidades x_1 e x_2.

Se todos os elementos de $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ são comparáveis com um mesmo $y \in Y$, o resultado segue do lema anterior. Assim, suponha que não existe $y \in Y$ comparável com todos os elementos de $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. Então, existem $v_i, v_{i+1} \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ vértices consecutivos e $y_1, y_2 \in Y$ tais que v_i é comparável com y_1 e v_{i+1} é comparável com y_2 e não é comparável com y_1. Suponha que $y_1, y_2 \notin \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ e tome $\mathscr{T}_1$ uma v_i-cauda ligando y_1 a v_i e $\mathscr{T}_2$ uma v_{i+1}-cauda ligando y_2 a v_{i+1}.

Note que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2 = \emptyset$. De fato, temos que $v_i < y_1$ e $v_{i+1} < y_2$. Se existe $u \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$, então $v_i \leq u \leq y_1$ e $v_{i+1} \leq u \leq y_2$. Dessa forma, $v_{i+1} \leq u \leq y_1$ e, portanto, v_{i+1} é comparável com y_1, o que não ocorre.

Suponha, sem perda de generalidade, que a cauda $\mathscr{T}_1$ termina em $v_j \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ e a cauda $\mathscr{T}_2$ termina em $v_m \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. Então $j \neq m$.

Se $0 < j < m < k$, considere $\mathscr{P}_1{}'' : v_k v_{k-1} \dots v_m$, $\mathscr{P}_1{}' : v_j v_{j-1} \dots v_0$ e $\mathscr{P}_1{}''' : v_j v_{j+1} \dots v_m$. Então, $\mathscr{T}_1 \mathscr{P}_1{}' \mathscr{P}_2 \mathscr{P}_1{}'' \mathscr{T}_2{}^{-1}$ e $\mathscr{T}_1 \mathscr{P}_1{}''' \mathscr{T}_2{}^{-1}$ são semicaminhos ligando y_1 a y_2, como mostra a Figura 3.10.

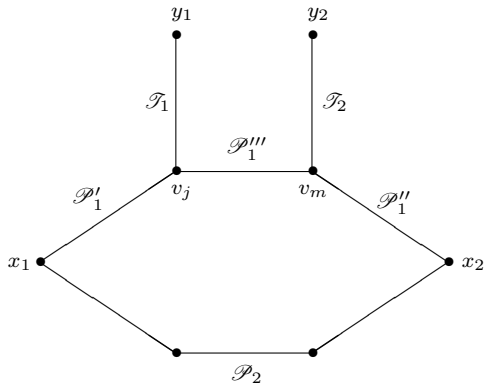

Figura 3.10:

Por hipótese,

$$I^{\sigma}_{\mathscr{T}_1 \mathscr{P}_1{}' \mathscr{P}_2 \mathscr{P}_1{}'' \mathscr{T}_2{}^{-1}}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{T}_1 \mathscr{P}_1{}''' \mathscr{T}_2{}^{-1}}(y_1, y_2).$$

Usando o item (2) do Lema 3.5 e fazendo cancelamentos, obtemos

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}'}(v_j, v_0) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(v_0, v_k) I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}''}(v_k, v_m) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1{}'''}(v_j, v_m).$$

Assim, pelos itens (2) e (3) do mesmo lema e usando que $(\mathscr{P}_1{}')^{-1} \mathscr{P}_1{}''' (\mathscr{P}_1{}'')^{-1} = \mathscr{P}_1$, temos

$$I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(w_0, w_l) = I^{\sigma}_{(\mathscr{P}_1{}')^{-1} \mathscr{P}_1{}''' (\mathscr{P}_1{}'')^{-1}}(v_0, v_k) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(v_0, v_k).$$

Se $0 = j < m < k$, obtemos o resultado repetindo esse argumento sem usar o semicaminho $\mathscr{P}_1{}'$ e, se $0 < j < m = k$, obtemos o resultado repetindo o argumento sem o semicaminho $\mathscr{P}_1{}''$. Se $0 = j < m = k$, então $\mathscr{P}_1{}''' = \mathscr{P}_1$ e o argumento funciona sem os semicaminhos $\mathscr{P}_1{}'$ e $\mathscr{P}_1{}''$.

Se $y_1 \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ ou $y_2 \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$, o argumento acima funciona para os semicaminhos sem a cauda $\mathscr{T}_1$ ou $\mathscr{T}_2$, respectivamente.

Agora, resta analisar o caso em que existem outros vértices em $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ além das extremidades. Sejam $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ vértices de $\mathscr{P}_1$ tais que $v_{i_0} = v_0$ e $v_{i_n} = v_k$ mas não

necessariamente $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}$.

Por abuso de notação, se $\mathscr{P}_1{}' : v_{i_j} = v_r v_{r+1} \dots v_s = v_{i_{j+1}}$ é um subsemicaminho de $\mathscr{P}_1$, denotaremos o produto $I^\sigma_{\mathscr{P}_1{}'}(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$ apenas por $I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$. Mesmo se $i_{j+1} < i_j$, isto é, quando $\mathscr{P}_1{}' : v_{i_{j+1}} = v_r v_{r+1} \dots v_s = v_{i_j}$, denotaremos $I^\sigma_{\mathscr{P}_1{}'}(v_{i_{j+1}}, v_{i_j})$ por $I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$, e nesse caso trabalharemos com os inversos.

Afirmação: $\prod_{j=0}^{n-1} I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) = I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_n})$.

Provaremos por indução sobre n. Para $n = 1$, não há o que provar. Para $n = 2$, se $i_1 < i_2$, então

$$I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_1}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_1}, v_{i_2}) = I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_2}).$$

Se $i_2 < i_1$, então, pelo caso anterior,

$$I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_2}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_2}, v_{i_1}) = I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_1})$$

e assim, temos

$$I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_1}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_1}, v_{i_2}) = I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_2}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_2}, v_{i_1}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_1}, v_{i_2})$$

$$= I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_2}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_2}, v_{i_1}) (I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_2}, v_{i_1}))^{-1} = I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_2}),$$

pois $I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_1}, v_{i_2}) = (I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_2}, v_{i_1}))^{-1}$.

Suponha que a afirmação vale para $n-1$ e mostremos que vale para n. De fato,

$$\prod_{j=0}^{n-1} I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) = \prod_{j=0}^{n-2} I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) . I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_{n-1}}, v_{i_n})$$

$$= I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_{n-1}}) I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_{n-1}}, v_{i_n}) = I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_0}, v_{i_n}),$$

pela hipótese de indução e pelo caso $n = 2$.

Seja $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{v_{i_0} = w_{j_0}, v_{i_1} = w_{j_1}, \dots, v_{i_t} = w_{j_t}\}$, com $v_{i_0} = v_0 = w_0 = w_{j_0}$ e $v_{i_t} = v_k = w_l = w_{j_t}$. Então

$$I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_0, v_k) = \prod_{r=0}^{t-1} I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(v_{i_r}, v_{i_{r+1}}) = \prod_{r=0}^{t-1} I^\sigma_{\mathscr{P}_2}(w_{j_r}, w_{j_{r+1}}) = I^\sigma_{\mathscr{P}_2}(w_0, w_l),$$

onde a primeira e a última igualdades seguem da **Afirmação** e a segunda igualdade se-

gue do fato de que os subsemicaminhos de $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ que ligam $v_{i_r} = w_{j_r}$ a $v_{i_{r+1}} = w_{j_{r+1}}$ não têm pontos em comum além das extremidades, então, pelo que foi provado anteriormente, temos $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(v_{i_r}, v_{i_{r+1}}) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(w_{j_r}, w_{j_{r+1}})$, para cada $0 \leq r \leq t-1$.

□

A proposição anterior fornece a condição mais simples de ser checada que foi comentada anteriormente. Agora, basta verificar a condição do Teorema 3.6 apenas para os elementos maximais de X, o que é muito mais simples, já que X é um poset finito. Assim, juntando a proposição anterior e o Teorema 3.6, obtemos um critério para um automorfismo multiplicativo ser interno, apresentado no próximo resultado.

Teorema 3.15. *Seja σ um elemento multiplicativo de $I(X, F)$ e seja $Y \subset X$ formado pelos elementos maximais de X. Se, para quaisquer $y_1, y_2 \in Y$ distintos e quaisquer semicaminhos $\mathscr{Q}_1$ e $\mathscr{Q}_2$ ligando y_1 a y_2 tivermos que $I^{\sigma}_{\mathscr{Q}_1}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{Q}_2}(y_1, y_2)$, então o automorfismo multiplicativo M_σ é interno.*

Exemplo 3.16. Considere o poset X_5 da Figura 3.11. Usando o resultado anterior, vamos construir um automorfismo multiplicativo de $I(X_5, \mathbb{R})$ que seja interno. Considere σ com os valores dados na Figura 3.11.

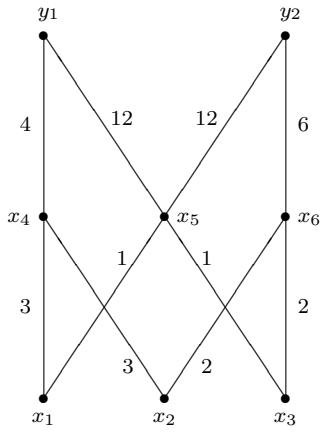

Figura 3.11: Poset X_5

Note que $Y = \{y_1, y_2\}$ é o subconjunto dos elementos maximais de X_5. Existem sete semicaminhos ligando y_1 a y_2, são eles: $\mathscr{P}_1 : y_1x_5y_2$, $\mathscr{P}_2 : y_1x_5x_3x_6y_2$, $\mathscr{P}_3 : y_1x_4x_1x_5y_2$, $\mathscr{P}_4 : y_1x_4x_2x_6y_2$, $\mathscr{P}_5 : y_1x_4x_1x_5x_3x_6y_2$, $\mathscr{P}_6 : y_1x_5x_1x_4x_2x_6y_2$ e $\mathscr{P}_7 : y_1x_4x_2x_6x_3x_5y_2$.

Temos que:

$$\begin{aligned} I^{\sigma}_{\mathscr{P}_6}(y_1, y_2) &= (\sigma(x_5, y_1))^{-1}(\sigma(x_1, x_5))^{-1}\sigma(x_1, x_4)(\sigma(x_2, x_4))^{-1}\sigma(x_2, x_6)\sigma(x_6, y_2) \\ &= \frac{1}{12}.1.3.\frac{1}{3}.2.6 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{\sigma}_{\mathscr{P}_7}(y_1, y_2) &= (\sigma(x_4, y_1))^{-1}(\sigma(x_2, x_4))^{-1}\sigma(x_2, x_6)(\sigma(x_3, x_6))^{-1}\sigma(x_3, x_5)\sigma(x_5, y_2) \\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{3}.2.\frac{1}{2}.1.12 \\ &= 1 \end{aligned}$$

e $I^{\sigma}_{\mathscr{P}_1}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_2}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_3}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_4}(y_1, y_2) = I^{\sigma}_{\mathscr{P}_5}(y_1, y_2) = 1$, isto é, os produtos dos pesos direcionados das arestas de todos os semicaminhos ligando y_1 a y_2 são iguais. Logo, o automorfismo multiplicativo M_σ é interno.

CAPÍTULO 4

HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Em [18], os grupos de cohomologia de um poset qualquer são discutidos, mas em casos um tanto particulares, por exemplo, quando o poset possui máximo e mínimo. Em [22], fica implícito do Teorema 2 que o quociente do grupo de automorfismos multiplicativos pelo subgrupo dos fracionários é isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia do poset X. A mesma afirmação aparece em [12] também sem apresentar uma demonstração explícita. Existem referências que tratam do assunto, como [24], mas que não consideram qualquer conexão entre os grupos de cohomologia de um poset e a álgebra de incidência dele. Por isso, optamos por apresentar aqui a definição de grupo de cohomologia de um poset e mostrar que as afirmações anteriores são verdadeiras. Além disso, são calculados os primeiros grupo de cohomologia de alguns tipos notáveis de posets.

4.1 O primeiro grupo de cohomologia

O capítulo anterior nos permitiu conhecer o conjunto $Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F))$.

Agora, então, estamos aptos a relacionar o grupo

$$\frac{Mult(I(X,F))}{Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F))}$$

ao primeiro grupo de cohomologia do poset X. Para isso, vamos revisar os conceitos de homologia e cohomologia para posets, em termos das cadeias do poset.

Dados X um poset e j um inteiro não negativo, definimos o *espaço cadeia* $C_j(X,\mathbb{Z})$ como o $\mathbb{Z}$-módulo livremente gerado pelas cadeias de X de comprimento $j+1$. Quando for claro qual é o poset X, denotaremos $C_j(X,\mathbb{Z})$ apenas por C_j.

Exemplo 4.1. Dado X um poset,

$$C_0(X,\mathbb{Z}) = \left\{ \sum_{u \in X} \alpha_u [u] : \alpha_u \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ isto é,}$$

$C_0(X,\mathbb{Z})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livremente gerado pelas cadeias de X de comprimento 1.

$$C_1(X,\mathbb{Z}) = \left\{ \sum_{u_{k_0} < u_{k_1} \in X} \alpha_{k_0 k_1} [u_{k_0}, u_{k_1}] : \alpha_{k_0 k_1} \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ isto é,}$$

$C_1(X,\mathbb{Z})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livremente gerado pelas cadeias de X de comprimento 2.

$$C_2(X,\mathbb{Z}) = \left\{ \sum_{u_{k_0} < u_{k_1} < u_{k_2} \in X} \alpha_{k_0 k_1 k_2} [u_{k_0}, u_{k_1}, u_{k_2}] : \alpha_{k_0 k_1 k_2} \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ isto é,}$$

$C_2(X,\mathbb{Z})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livremente gerado pelas cadeias de X de comprimento 3.

Considere a *aplicação bordo* como sendo o único homomorfismo de grupos

$$\partial_i : C_i(X,\mathbb{Z}) \to C_{i-1}(X,\mathbb{Z}) \text{ que satisfaz}$$

$$[u_0, u_1, \ldots, u_i] \mapsto \sum_{j=0}^{i} (-1)^j [u_0, \ldots, \widehat{u_j}, \ldots, u_i],$$

onde $\widehat{\cdot}$ denota exclusão.

Exemplo 4.2. Dados X um poset e $[x,y] \in C_1(X,\mathbb{Z})$, temos

$$\partial_1([x,y]) = [y] - [x].$$

Dada $[x, y, z] \in C_2(X, \mathbb{Z})$, temos

$$\partial_2([x, y, z]) = [y, z] - [x, z] + [x, y].$$

Como ∂_i é um homomorfismo de grupos, então $\ker \partial_i$ é um subgrupo de $C_i(X, \mathbb{Z})$ e, portanto, $\ker \partial_i$ é um grupo abeliano. Como $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$, então $\operatorname{Im} \partial_{i+1} \subset \ker \partial_i$, ou ainda, $\operatorname{Im} \partial_{i+1}$ é um subgrupo normal de $\ker \partial_i$. Desta forma, a *homologia de ordem i do poset X* (ou o *i-ésimo grupo de homologia de X*) é definida como

$$H_i(X, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{Im} \partial_{i+1}}.$$

Agora, considere F um corpo e o conjunto $C_j^* = Hom(C_j, F^*)$ onde, dado $\varphi \in Hom(C_j, F^*)$,

$$\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s), \text{ para todos } t, s \in C_j. \tag{4.1-1}$$

Então C_j^* é um grupo abeliano com o produto de Hadamard, isto é, $(\varphi_1\varphi_2)(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, para todo $t \in C_j$ e todos $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom(C_j, F^*)$.

Exemplo 4.3. Temos que

$$C_0^* = Hom(C_0, F^*), \ C_1^* = Hom(C_1, F^*) \text{ e } C_2^* = Hom(C_2, F^*).$$

O *operador co-bordo* é o homomorfismo definido por

$$\delta^i : C_{i-1}^* \to C_i^*$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ \partial_i.$$

Então $\ker \delta^{i+1}$ é um subgrupo de C_i^*, logo $\ker \delta^{i+1}$ é um grupo abeliano. Como $\delta^{i+1} \circ \delta^i = 0$, então $\operatorname{Im} \delta^i \subset \ker \delta^{i+1}$, ou ainda, $\operatorname{Im} \delta^i$ é um subgrupo normal de $\ker \delta^{i+1}$. Assim, o *i-ésimo grupo de cohomologia de X* é definido por

$$H^i(X, F) = \frac{\ker \delta^{i+1}}{\operatorname{Im} \delta^i}.$$

Proposição 4.4. *Sejam X um poset localmente finito e F um corpo. Então,*

$$H^1(X,F) \cong \frac{Mult(I(X,F))}{Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F))}.$$

Demonstração. Considere $\psi : Mult(I(X,F)) \to {C_1}^*$ dada por $\psi(M_\sigma) = \varphi_\sigma \in {C_1}^*$, com $\varphi_\sigma([x,y]) = \sigma(x,y)$ e estendendo como em $(4.1-1)$, isto é,

$$\varphi_\sigma\left(\sum_i \alpha_i[x_i,y_i]\right) = \prod_i (\sigma(x_i,y_i))^{\alpha_i}.$$

Mostremos que ψ é um homomorfismo de grupos. Dados $M_\sigma, M_\tau \in Mult(I(X,F))$ e $[x,y] \in C_1$, temos que

$$\varphi_{\sigma*\tau}([x,y]) = (\sigma*\tau)(x,y) = \sigma(x,y)\tau(x,y) = \varphi_\sigma([x,y])\varphi_\tau([x,y]) = (\varphi_\sigma\varphi_\tau)([x,y]).$$

Logo,

$$\psi(M_\sigma \circ M_\tau) = \psi(M_{\sigma*\tau}) = \varphi_{\sigma*\tau} = \varphi_\sigma\varphi_\tau = \psi(M_\sigma)\psi(M_\tau).$$

Seja $\gamma_i : C_i \to F^*$ a unidade de ${C_i}^*$, isto é, $\gamma_i([x_{j_0},\ldots,x_{j_i}]) = 1$, para todos $x_{j_0} < \cdots < x_{j_i} \in X$ e estendendo como em $(4.1-1)$. Então, dado $M_\sigma \in Mult(I(X,F))$ tal que $\psi(M_\sigma) = \gamma_1$, temos que

$$\sigma(x,y) = \varphi_\sigma([x,y]) = \psi(M_\sigma)([x,y]) = \gamma_1([x,y]) = 1,$$

para todos $x < y$ em X. Assim M_σ é a aplicação identidade e, portanto, ψ é injetor. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo para grupos, segue que $Mult(I(X,F)) \cong \operatorname{Im}\psi$.

Mostremos agora que $\operatorname{Im}\psi = \ker\delta^2$. Dada $\varphi \in C_1^*$, repare que

$$\begin{aligned}
\varphi \in \ker\delta^2 &\Leftrightarrow (\delta^2(\varphi))([x,y,z]) = 1, \text{ para todos } x<y<z \\
&\Leftrightarrow (\varphi\circ\partial_2)([x,y,z]) = 1, \text{ para todos } x<y<z \\
&\Leftrightarrow \varphi([y,z]-[x,z]+[x,y]) = 1, \text{ para todos } x<y<z \\
&\Leftrightarrow \varphi([y,z])(\varphi([x,z]))^{-1}\varphi([x,y]) = 1, \text{ para todos } x<y<z \\
&\Leftrightarrow \varphi([x,z]) = \varphi([x,y])\varphi([y,z]), \text{ para todos } x<y<z \qquad (4.1\text{-}2)
\end{aligned}$$

Seja $\varphi = \psi(M_\sigma) \in \operatorname{Im}\psi$, com $M_\sigma \in Mult(I(X,F))$. Dados $x<y<z$ em X, como σ

é uma função multiplicativa, temos

$$\begin{aligned}\varphi([x,z]) &= (\psi(M_\sigma))([x,z]) \\ &= \sigma(x,z) \\ &= \sigma(x,y)\sigma(y,z) \\ &= (\psi(M_\sigma))([x,y])(\psi(M_\sigma))([y,z]) \\ &= \varphi([x,y])\varphi([y,z]),\end{aligned}$$

e assim, pela igualdade $(4.1-2)$, segue que $\varphi \in \ker \delta^2$. Portanto, $\mathrm{Im}\ \psi \subseteq \ker \delta^2$.

Por outro lado, seja $\varphi \in \ker \delta^2$ e considere a função $\sigma : X \times X \to F$ dada por

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \varphi([x,y]), & \text{se} \quad x < y \\ 1, & \text{se} \quad x = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Por $(4.1-2)$, segue que $\sigma \in I(X,F)$ é uma função multiplicativa. Além disso, dados $x < y$ em X, temos $(\psi(M_\sigma))([x,y]) = \sigma(x,y) = \varphi([x,y])$ e, assim, $\varphi = \psi(M_\sigma) \in \mathrm{Im}\ \psi$. Logo, $\ker \delta^2 \subseteq \mathrm{Im}\ \psi$ e, portanto, $\ker \delta^2 = \mathrm{Im}\ \psi \cong Mult(I(X,F))$.

Mostremos agora que $\psi(Frac(I(X,F))) = \mathrm{Im}\ \delta^1$. Dada $\varphi \in {C_1}^*$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathrm{Im}\ \delta^1 &\Leftrightarrow \text{existe } \phi \in C_0^* \text{ tal que } \delta^1(\phi) = \varphi \\ &\Leftrightarrow \text{existe } \phi \in C_0^* \text{ tal que } \phi \circ \partial_1 = \varphi \\ &\Leftrightarrow \text{existe } \phi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x,y]) = \phi([y]-[x]),\ \forall x < y \\ &\Leftrightarrow \text{existe } \phi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x,y]) = (\phi([x]))^{-1}\phi([y]),\ \forall x < y \quad \text{(4.1-3)}\end{aligned}$$

Seja $\varphi = \psi(M_{\tau_h}) \in \psi(Frac(I(X,F)))$, com τ_h uma função fracionária. Considere $\phi \in C_0^*$ dada por $\phi([x]) = (h(x))^{-1}$ e estendendo como em $(4.1-1)$. Então, dados $x < y$ em X, temos

$$\varphi([x,y]) = (\psi(M_{\tau_h}))([x,y]) = \tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1} = (\phi([x]))^{-1}\phi([y]),$$

e assim, por $(4.1-3)$, segue que $\varphi \in \mathrm{Im}\ \delta^1$. Logo, $\psi(Frac(I(X,F))) \subseteq \mathrm{Im}\ \delta^1$.

Por outro lado, seja $\varphi \in \mathrm{Im}\ \delta^1$ e considere a função $h : X \to F^*$ dada por

$h(x) = (\phi([x]))^{-1}$, onde $\phi \in C_0^*$ é a função dada em $(4.1 - 3)$. Então, de $(4.1 - 3)$ temos que

$$(\psi(M_{\tau_h}))([x,y]) = \tau_h(x,y) = h(x)(h(y))^{-1} = (\phi([x]))^{-1}\phi([y]) = \varphi([x,y]),$$

para todos $x < y$ em X. Logo, $\varphi = \psi(M_{\tau_h}) \in \psi(Frac(I(X,F)))$ e, assim, $\text{Im}\,\delta^1 \subseteq \psi(Frac(I(X,F)))$.

Agora, considere o isomorfismo $\psi : Mult(I(X,F)) \to \ker\delta^2$ e o homomorfismo canônico $\pi : \ker\delta^2 \to \dfrac{\ker\delta^2}{\text{Im}\,\delta^1}$. Como ψ e π são sobrejetores, então

$$\overline{\psi} = \pi \circ \psi : Mult(I(X,F)) \to \frac{\ker\delta^2}{\text{Im}\,\delta^1}$$

é sobrejetor e então, pelo Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{\ker\delta^2}{\text{Im}\,\delta^1} \cong \frac{Mult(I(X,F))}{\ker\overline{\psi}}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\ker\overline{\psi} &= \psi^{-1}(\text{Im}\,\delta^1) \\
&= \psi^{-1}(\psi(Frac(I(X,F)))) \\
&= Frac(I(X,F)) \\
&= Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\ker\delta^2}{\text{Im}\,\delta^1} \cong \frac{Mult(I(X,F))}{Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F))},$$

concluindo a demonstração.

□

4.2 Cálculo do primeiro grupo de cohomologia

Agora, exibiremos os cálculos do primeiro grupo de cohomologia de alguns posets.

Exemplo 4.5. Vamos calcular o primeiro grupo de cohomologia do poset X dado na Figura 4.1.

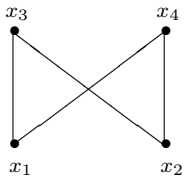

Figura 4.1: Poset X

Note que X não possui cadeias de comprimento 3. Logo, $C_2 = \{0\}$ e, portanto, $C_2^* = \{0\}$. Assim, $\ker \delta^2 = C_1^*$, já que $\delta^2 : C_1^* \to C_2^*$. Note também que existem quatro cadeias de comprimento 2, isto é, existem quatro cadeias em C_1, são elas: $[x_1, x_3]$, $[x_1, x_4]$, $[x_2, x_4]$ e $[x_2, x_3]$.

Observe que cada homomorfismo $\varphi \in C_1^*$ é unicamente determinado pelos valores de φ aplicado em cada uma das cadeias de C_1. Assim, podemos associar cada elemento φ de C_1^* a uma quádrupla de F^*, onde cada entrada é igual a φ aplicado em cada uma das cadeias de C_1. Desta forma, a aplicação $\pi : C_1^* \to (F^*)^4$ dada por

$$\pi(\varphi) = (\varphi([x_1, x_3]), \varphi([x_1, x_4]), \varphi([x_2, x_4]), \varphi([x_2, x_3]))$$

é um isomorfismo. Logo, $\ker \delta^2 = C_1^* \cong (F^*)^4$.

Na demonstração da última proposição, vimos que

$$\text{Im } \delta^1 = \{\varphi \in C_1^* : \text{existe } \psi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x, y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y]),\ \forall [x, y] \in C_1\}.$$

Então, dada $\varphi \in C_1^*$, temos que $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ se, e somente se, existe $\psi \in C_0^*$, com $\psi([x_j]) = \alpha_j$, $1 \leq j \leq 4$, tal que

$$\begin{cases} \varphi([x_1, x_3]) = \alpha_1^{-1}\alpha_3, \\ \varphi([x_1, x_4]) = \alpha_1^{-1}\alpha_4, \\ \varphi([x_2, x_4]) = \alpha_2^{-1}\alpha_4, \\ \varphi([x_2, x_3]) = \alpha_2^{-1}\alpha_3 \end{cases}.$$

Então, temos que $\varphi \in \operatorname{Im} \delta^1$ se, e somente se,

$$\pi(\varphi) = (\alpha_1^{-1}\alpha_3, \alpha_1^{-1}\alpha_4, \alpha_2^{-1}\alpha_4, \alpha_2^{-1}\alpha_3) = (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Note que

$$a_4 = a_1 a_2^{-1} a_3, \tag{4.2-4}$$

isto é, a_4 é dado em função de a_1, a_2 e a_3.

Afirmação: a_1, a_2 e a_3 são livres.

De fato, estes são dados por:

$$a_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_3, \quad a_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_4 \quad \text{e} \quad a_3 = \alpha_2^{-1}\alpha_4,$$

onde $\alpha_j = \psi([x_j])$, $1 \leq j \leq 4$.

Assim, escolhido o valor de α_1, por exemplo, $\psi([x_1]) = \alpha_1 = 1$, então tomamos $\psi([x_3]) = \alpha_3 = a_1$, de modo que $\alpha_1^{-1}\alpha_3 = a_1$. Como escolhemos $\alpha_1 = 1$, tomamos $\psi([x_4]) = \alpha_4 = a_2$, de modo que $\alpha_1^{-1}\alpha_4 = a_2$. Como $\alpha_4 = a_2$, tomamos $\psi([x_2]) = \alpha_2 = a_3^{-1}a_2$, de forma que $\alpha_2^{-1}\alpha_4 = a_3$.

Assim, tomando $\psi \in C_0^*$ tal que $\psi([x_j]) = \alpha_j$ como dado acima, temos que $\varphi([x, y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y])$, para todos $[x, y] \in C_1$, de onde $\varphi \in \operatorname{Im} \delta^1$ e as 3 primeiras coordenadas de $\pi(\varphi)$ são exatamente a_1, a_2 e a_3, provando a **Afirmação**.

Agora, analisando o quociente $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$, note que cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$ contém um elemento da forma $(1, 1, 1, \gamma)$, para algum $\gamma \in F^*$. Com efeito, considerando a classe lateral de um elemento $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \ker \delta^2$, temos

$$(1, 1, 1, \gamma) = (b_1, b_2, b_3, b_4).(b_1^{-1}, b_2^{-1}, b_3^{-1}, b_1^{-1}b_2b_3^{-1}),$$

onde, pela **Afirmação** e por $(4.2-4)$, temos que $(b_1^{-1}, b_2^{-1}, b_3^{-1}, b_1^{-1}b_2b_3^{-1})$ pertence a $\operatorname{Im} \delta^1$ e é o único elemento de $\operatorname{Im} \delta^1$ cujo produto por (b_1, b_2, b_3, b_4) tem as 3 primeiras coordenadas iguais a 1.

Repare que, nesse caso,

$$\gamma = b_1^{-1}b_2b_3^{-1}b_4,$$

isto é, γ é unicamente determinado por b_1, b_2, b_3 e b_4. Assim, existe um único elemento

da forma $(1,1,1,\gamma)$ em cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$. Como classes laterais distintas são disjuntas e $\ker \delta^2$ é igual à união das classes laterais de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$, segue que a aplicação

$$\Phi : \frac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1} \to F^*$$

$$\overline{(b_1, b_2, b_3, b_4)} \mapsto \gamma,$$

$$\text{onde } (1,1,1,\gamma) \in \overline{(b_1, b_2, b_3, b_4)},$$

é um isomorfismo. Portanto,

$$H^1(X, F) = \frac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1} \cong F^*.$$

Na última proposição, foi mostrado que $\operatorname{Im} \delta^1 = \psi(Frac(I(X,F)))$. Então, dado $\varphi \in C_1^*$,

$$\varphi \in \operatorname{Im} \delta^1 \Leftrightarrow \varphi = \psi(M_\sigma) = \varphi_\sigma, \text{ onde } \varphi_\sigma([x,y]) = \sigma(x,y), \text{ para todos } x < y \text{ em } X,$$

com $M_\sigma \in Frac(I(X,F)) = Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F))$. Mas, pelo Teorema 3.6, $M_\sigma \in Mult(I(X,F)) \cap Inn(I(X,F))$ se, e somente se, para todos $x, y \in X$ distintos e $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ semicaminhos ligando x a y, tivermos que $I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(x,y) = I^\sigma_{\mathscr{P}_2}(x,y)$.

No exemplo anterior, para caracterizarmos os elementos de $\operatorname{Im} \delta^1$ e obtermos a relação de a_4 em função de a_1, a_2 e a_3, aplicamos exatamente esse resultado. Considerando os semicaminhos $\mathscr{P}_1 : x_3x_1x_4$ e $\mathscr{P}_2 : x_3x_2x_4$ ligando x_3 a x_4 e usando que $I^\sigma_{\mathscr{P}_1}(x_3,x_4) = I^\sigma_{\mathscr{P}_2}(x_3,x_4)$, obtemos que $a_1^{-1}a_2 = a_4^{-1}a_3$, de onde segue a relação $(4.2-4)$.

Exemplo 4.6. Considere X_1 o poset dado por n cópias do poset X da Figura 4.1 arranjadas segundo o diagrama de Hasse da Figura 4.2, com $n \geq 1$. Vamos calcular $H^1(X_1, F)$.

Note que X_1 não possui cadeias de comprimento 3. Logo, $C_2 = \{0\}$ e, portanto, $C_2^* = \{0\}$. Assim, $\ker \delta^2 = C_1^*$. Note também que existem $3n+1$ cadeias de comprimento 2, isto é, existem $3n+1$ cadeias em C_1.

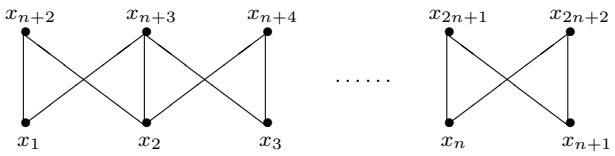

Figura 4.2: Poset X_1

Observe que cada homomorfismo $\varphi \in C_1^*$ é unicamente determinado pelos valores de φ aplicado em cada uma das cadeias de C_1. Assim, podemos associar cada elemento φ de C_1^* a um elemento de $(F^*)^{3n+1}$, onde cada entrada é igual a φ aplicado em cada uma das cadeias de C_1. Desta forma, a aplicação $\pi : C_1^* \to (F^*)^{3n+1}$ dada por

$$\pi(\varphi) = (\varphi([x_1, x_{n+2}]), \varphi([x_1, x_{n+3}]), \ldots, \varphi([x_k, x_{n+k+1}]), \varphi([x_k, x_{n+k+2}]), \ldots, \varphi([x_{n+1}, x_{2n+2}]),$$

$$\varphi([x_2, x_{n+2}]), \ldots, \varphi([x_k, x_{n+k}]), \ldots, \varphi([x_{n+1}, x_{2n+1}])),$$

com $k = 2, \ldots, n$, é um isomorfismo. Assim, $\ker \delta^2 = C_1^* \cong (F^*)^{3n+1}$.

Na demonstração da última proposição, vimos que

$$\text{Im } \delta^1 = \{\varphi \in C_1^* : \text{existe } \psi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x, y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y]),\ \forall [x, y] \in C_1\}.$$

Então, dada $\varphi \in C_1^*$, temos que $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ se, e somente se, existe $\psi \in C_0^*$, com $\psi([x_j]) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 2n + 2$, tal que

$$\begin{cases} \varphi([x_i, x_{n+1+i}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+1+i}, & \text{para} \quad i = 1, \ldots, n+1 \\ \varphi([x_i, x_{n+2+i}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+2+i}, & \text{para} \quad i = 1, \ldots, n \\ \varphi([x_i, x_{n+i}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+i}, & \text{para} \quad i = 2, \ldots, n+1 \end{cases}.$$

Então, temos que $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ se, e somente se,

$$\pi(\varphi) = (\alpha_1^{-1}\alpha_{n+2}, \alpha_1^{-1}\alpha_{n+3}, \ldots, \alpha_k^{-1}\alpha_{n+k+1}, \alpha_k^{-1}\alpha_{n+k+2}, \ldots, \alpha_{n+1}^{-1}\alpha_{2n+2},$$

$$\alpha_2^{-1}\alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_k^{-1}\alpha_{n+k}, \ldots, \alpha_{n+1}^{-1}\alpha_{2n+1}) = (a_1, \ldots, a_{3n+1}),$$

com $k = 2, \ldots, n$, onde

$$\begin{cases} a_{2i-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+1+i}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n+1 \\ a_{2i} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+2+i}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n \\ a_{2n+1+i} = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{n+1+i}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Foi comentado anteriormente que as relações entre os a_i's são obtidas através da aplicação do Teorema 3.6, e este resultado envolve dois pontos distintos e dois semicaminhos que os ligam. Assim, a cada dois pontos e dois semicaminhos distintos que os ligam podemos obter uma relação entre a_i's. Note que, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos os semicaminhos $x_{n+1+i}x_ix_{n+2+i}$ e $x_{n+1+i}x_{i+1}x_{n+2+i}$ que ligam x_{n+1+i} a x_{n+2+i}. Assim, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos

$$a_{2n+1+i} = a_{2i-1}.a_{2i}^{-1}.a_{2(i+1)-1}. \tag{4.2-5}$$

Logo, segue que os últimos n a_j's são escritos em função dos $2n+1$ a_i's anteriores.

Afirmação: Os primeiros $2n+1$ a_i's são livres.

De fato, estes são dados por:

$$a_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_{n+2}, \;\; a_3 = \alpha_2^{-1}\alpha_{n+3} \text{ e, de modo geral, } a_{2i-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+1+i}, \;\; 1 \leq i \leq n+1$$

$$a_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_{n+3}, \;\; a_4 = \alpha_2^{-1}\alpha_{n+4} \text{ e, de modo geral, } a_{2i} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+2+i}, \;\; 1 \leq i \leq n,$$

onde $\alpha_j = \psi([x_j])$, $j = 1, \ldots, 2n+2$.

Assim, escolhido o valor de α_1, por exemplo, $\psi([x_1]) = \alpha_1 = 1$, então tomamos $\psi([x_{n+2}]) = \alpha_{n+2} = a_1$, de modo que $\alpha_1^{-1}\alpha_{n+2} = a_1$. Como escolhemos $\alpha_1 = 1$, tomamos $\psi([x_{n+3}]) = \alpha_{n+3} = a_2$, de modo que $\alpha_1^{-1}\alpha_{n+3} = a_2$. Como $\alpha_{n+3} = a_2$, tomamos $\psi([x_2]) = \alpha_2 = a_3^{-1}a_2$, de forma que $\alpha_2^{-1}\alpha_{n+3} = a_3$. Como $\alpha_2 = a_3^{-1}a_2$, tomamos $\psi([x_{n+4}]) = \alpha_{n+4} = a_4a_3^{-1}a_2$, de forma que $\alpha_2^{-1}\alpha_{n+4} = a_4$. E, de modo geral, tomamos

$$\alpha_k = a_{2k-1}^{-1}.a_{2k-2}.a_{2k-3}^{-1}\ldots a_3^{-1}.a_2, \;\; \text{para } \; 2 \leq k \leq n+1 \text{ e}$$

$$\alpha_{n+k} = a_{2k-4}.a_{2k-5}^{-1}\ldots a_3^{-1}.a_2, \;\; \text{para } \; 4 \leq k \leq n+2.$$

Assim, tomando $\psi \in C_0^*$ tal que $\psi([x_j]) = \alpha_j$ como dado acima, temos que

$\varphi([x,y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y])$, para todos $[x,y] \in C_1$, de onde $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ e as primeiras $2n+1$ coordenadas de $\pi(\varphi)$ são exatamente $a_1, \ldots, a_{2n+1}$, provando a **Afirmação**.

Agora, analisando o quociente $\dfrac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1}$, note que cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1}$ contém um elemento da forma $(1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, para alguns $\gamma_i \in F^*$. Com efeito, considerando a classe lateral de um elemento $(b_1, \ldots, b_{3n+1}) \in \ker \delta^2$, temos

$$(1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (b_1, \ldots, b_{2n+1}, b_{2n+2}, \ldots, b_{3n+1}).(b_1^{-1}, \ldots, b_{2n+1}^{-1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{3n+1}),$$

com $a_{2n+1+i} = b_{2i-1}^{-1}.b_{2i}.b_{2i+1}^{-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de modo que, pela **Afirmação** e por $(4.2-5)$, tenhamos que $(b_1^{-1}, \ldots, b_{2n+1}^{-1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{3n+1})$ pertence a $\text{Im } \delta^1$ e é o único elemento de $\text{Im } \delta^1$ cujo produto por $(b_1, \ldots, b_{3n+1})$ tem as $2n+1$ primeiras coordenadas iguais a 1.

Repare que, nesse caso,

$$\gamma_i = b_{2n+1+i}.a_{2n+1+i} = b_{2n+1+i}.b_{2i-1}^{-1}.b_{2i}.b_{2i+1}^{-1},$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, existe um único elemento da forma $(1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ em cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1}$. Como classes laterais distintas são disjuntas e $\ker \delta^2$ é igual à união das classes laterais de $\dfrac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1}$, segue que a aplicação

$$\Phi : \frac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1} \to (F^*)^n$$

$$\overline{(b_1, \ldots, b_{3n+1})} \mapsto (\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

$$\text{onde } (1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \overline{(b_1, \ldots, b_{3n+1})},$$

é um isomorfismo. Portanto,

$$H^1(X_1, F) = \frac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1} \cong (F^*)^n.$$

Observe que o número de relações obtidas entre os a_i's é igual à potência de F^* no cálculo do primeiro grupo de cohomologia do poset, ou seja, dado um poset Y, $H^1(Y, F) \cong (F^*)^p$ onde p é o número de relações entre os a_i's em Y. Pode-se ver esse fato, por exemplo, no exemplo anterior. Temos que $\ker \delta^2 \cong (F^*)^{3n+1}$ e

$\text{Im } \delta^1 \cong (F^*)^{2n+1}$, já que as últimas n coordenadas são dadas em função das $2n+1$ coordenadas anteriores. Assim, ao calcular $H^1(X_1, F)$ é como se estivéssemos considerando

$$\frac{\ker \delta^2}{\text{Im } \delta^1} \cong \frac{(F^*)^{3n+1}}{(F^*)^{2n+1}} \cong (F^*)^n,$$

quocientando e cancelando os expoentes.

Exemplo 4.7. Vamos mostrar que $H^1(X_2, F) \cong F^*$, onde X_2 é uma coroa com n pontos inferiormente, $n \geq 2$, conforme o diagrama de Hasse da Figura 4.3.

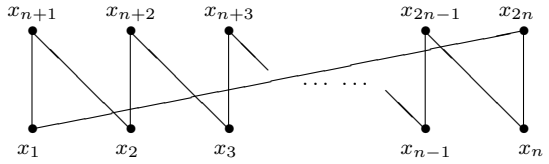

Figura 4.3: Poset X_2

Como $C_2^* = \{0\}$, então $\ker \delta^2 = C_1^*$. Como existem $2n$ cadeias em C_1, então a aplicação $\pi : C_1^* \to (F^*)^{2n}$ dada por

$$\pi(\varphi) = (\varphi([x_1, x_{n+1}]), \ldots, \varphi([x_k, x_{n+k-1}]), \varphi([x_k, x_{n+k}]), \ldots, \varphi([x_n, x_{2n-1}]),$$

$$\varphi([x_n, x_{2n}]), \varphi([x_1, x_{2n}])),$$

com $k = 2, \ldots, n$, é um isomorfismo. Dessa forma, $\ker \delta^2 = C_1^* \cong (F^*)^{2n}$.

Como

$$\text{Im } \delta^1 = \{\varphi \in C_1^* : \text{existe } \psi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x,y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y]),\ \forall [x,y] \in C_1\}$$

então, dada $\varphi \in C_1^*$, temos que $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ se, e somente se, existe $\psi \in C_0^*$, com $\psi([x_j]) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 2n$, tal que

$$\begin{cases} \varphi([x_i, x_{n+i}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+i}, & \text{para} \quad i = 1, \ldots, n \\ \varphi([x_i, x_{n+i-1}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+i-1}, & \text{para} \quad i = 2, \ldots, n \\ \varphi([x_1, x_{2n}]) = \alpha_1^{-1}\alpha_{2n} \end{cases}.$$

Então, $\varphi \in \operatorname{Im}\delta^1$ se, e somente se,

$$\pi(\varphi) = (\alpha_1^{-1}\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_k^{-1}\alpha_{n+k-1}, \alpha_k^{-1}\alpha_{n+k}, \ldots, \alpha_n^{-1}\alpha_{2n-1}, \alpha_n^{-1}\alpha_{2n}, \alpha_1^{-1}\alpha_{2n}) = (a_1, \ldots, a_{2n}),$$

com $k = 2, \ldots, n$, onde

$$\begin{cases} a_{2i-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+i}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n \\ a_{2i} = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{n+i}, & \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ a_{2n} = \alpha_1^{-1}\alpha_{2n}. \end{cases} .$$

Note que os únicos pontos de X_2 que possuem semicaminhos distintos que os ligam são x_1 e x_{2n} e os semicaminhos são $\mathscr{P}_1 : x_1x_{n+1}x_2x_{n+2}\ldots x_kx_{n+k}\ldots x_{n-1}x_{2n-1}x_nx_{2n}$, $k = 1, \ldots, n$, e $\mathscr{P}_2 : x_1x_{2n}$. Assim, obtemos uma única relação entre os a_i's em X_2, que é dada por:

$$a_1a_2^{-1}a_3a_4^{-1}\ldots a_{2n-1} = a_{2n}. \tag{4.2-6}$$

Afirmação: Os primeiros $2n-1$ a_i's são livres.

De fato, estes são dados por:

$$a_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_{n+1}, \;\; a_3 = \alpha_2^{-1}\alpha_{n+2} \text{ e, de modo geral, } a_{2i-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+i}, \;\; 1 \leq i \leq n$$

$$a_2 = \alpha_2^{-1}\alpha_{n+1}, \;\; a_4 = \alpha_3^{-1}\alpha_{n+2} \text{ e, de modo geral, } a_{2i} = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{n+i}, \;\; 1 \leq i \leq n-1,$$

onde $\alpha_j = \psi([x_j])$, $j = 1, \ldots, 2n$.

Assim, escolhido o valor de α_1, por exemplo, $\psi([x_1]) = \alpha_1 = 1$, então tomamos $\psi([x_{n+1}]) = \alpha_{n+1} = a_1$, de modo que $\alpha_1^{-1}\alpha_{n+1} = a_1$. Como $\alpha_{n+1} = a_1$, tomamos $\psi([x_2]) = \alpha_2 = a_2^{-1}a_1$, de modo que $\alpha_2^{-1}\alpha_{n+1} = a_2$. Como $\alpha_2 = a_2^{-1}a_1$, tomamos $\psi([x_{n+2}]) = \alpha_{n+2} = a_3a_2^{-1}a_1$, de forma que $\alpha_2^{-1}\alpha_{n+2} = a_3$. Como $\alpha_{n+2} = a_3a_2^{-1}a_1$, tomamos $\psi([x_3]) = \alpha_3 = a_4^{-1}a_3a_2^{-1}a_1$, de forma que $\alpha_3^{-1}\alpha_{n+2} = a_4$. E, de modo geral, tomamos

$$\alpha_k = a_{2k-2}^{-1}.a_{2k-3}\ldots a_2^{-1}.a_1, \;\; \text{para} \;\; 2 \leq k \leq n \;\; \text{e}$$

$$\alpha_{n+k} = a_{2k-1}.a_{2k-2}^{-1}\ldots a_2^{-1}.a_1, \;\; \text{para} \;\; 2 \leq k \leq n.$$

Assim, tomando $\psi \in C_0^*$ tal que $\psi([x_j]) = \alpha_j$ como dado acima, temos que $\varphi([x,y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y])$, para todos $[x,y] \in C_1$, de onde $\varphi \in \operatorname{Im}\delta^1$ e as primeiras

$2n-1$ coordenadas de $\pi(\varphi)$ são exatamente $a_1, \ldots, a_{2n-1}$, provando a **Afirmação**.

Agora, analisando o quociente $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$, note que cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$ contém um elemento da forma $(1, \ldots, 1, \gamma)$, para algum $\gamma \in F^*$. Com efeito, considerando a classe lateral de um elemento $(b_1, \ldots, b_{2n}) \in \ker \delta^2$, temos

$$(1, \ldots, 1, \gamma) = (b_1, \ldots, b_{2n-1}, b_{2n}).(b_1^{-1}, \ldots, b_{2n-1}^{-1}, a_{2n}),$$

com $a_{2n} = b_1^{-1} b_2 b_3^{-1} b_4 \ldots b_{2n-1}^{-1}$, de modo que, pela **Afirmação** e por $(4.2-6)$, tenhamos que $(b_1^{-1}, \ldots, b_{2n-1}^{-1}, a_{2n})$ pertence a $\operatorname{Im} \delta^1$ e é o único elemento de $\operatorname{Im} \delta^1$ cujo produto por $(b_1, \ldots, b_{2n})$ tem as $2n-1$ primeiras coordenadas iguais a 1.

Observe que, nesse caso,

$$\gamma = b_{2n}.a_{2n} = b_1^{-1} b_2 b_3^{-1} b_4 \ldots b_{2n-1}^{-1} b_{2n}.$$

Assim, existe um único elemento da forma $(1, \ldots, 1, \gamma)$ em cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$. Deste modo, a aplicação

$$\Phi : \frac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1} \to F^*$$

$$\overline{(b_1, \ldots, b_{2n})} \mapsto \gamma,$$

$$\text{onde } \ (1, \ldots, 1, \gamma) \in \overline{(b_1, \ldots, b_{2n})},$$

é um isomorfismo. Portanto,

$$H^1(X_2, F) = \frac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1} \cong F^*.$$

Exemplo 4.8. Vamos calcular $H^1(X_3, F)$, onde X_3 é um grafo bipartido completo formado por n pontos inferiormente e m pontos superiormente, conforme o diagrama de Hasse da Figura 4.4, com $m, n \geq 2$.

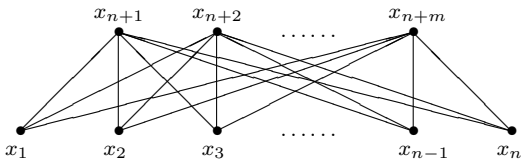

Figura 4.4: Poset X_3

Como $C_2^* = \{0\}$, então $\ker \delta^2 = C_1^*$. Como existem mn cadeias em C_1, então a aplicação $\pi : C_1^* \to (F^*)^{mn}$ dada por

$$\pi(\varphi) = (\varphi([x_1, x_{n+1}]), \ldots, \varphi([x_1, x_{n+k}]), \ldots, \varphi([x_1, x_{n+m}]), \varphi([x_2, x_{n+1}]), \ldots, \varphi([x_l, x_{n+1}]),$$

$$\ldots, \varphi([x_n, x_{n+1}]), \varphi([x_2, x_{n+2}]), \ldots, \varphi([x_2, x_{n+k}]), \ldots, \varphi([x_2, x_{n+m}]), \ldots, \varphi([x_l, x_{n+2}]),$$

$$\ldots, \varphi([x_l, x_{n+k}]), \ldots, \varphi([x_l, x_{n+m}]), \ldots, \varphi([x_n, x_{n+2}]), \ldots, \varphi([x_n, x_{n+k}]), \ldots, \varphi([x_n, x_{n+m}])),$$

com $k = 2, \ldots, m$, $l = 2, \ldots, n$, é um isomorfismo. Dessa forma, $\ker \delta^2 = C_1^* \cong (F^*)^{mn}$.

Temos que

$$\text{Im } \delta^1 = \{\varphi \in C_1^* : \text{existe } \psi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x, y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y]),\ \forall [x, y] \in C_1\}.$$

Então, dada $\varphi \in C_1^*$, temos que $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ se, e somente se, existe $\psi \in C_0^*$, com $\psi([x_j]) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n + m$, tal que

$$\varphi([x_i, x_{n+j}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+j}, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \text{ e todo } j = 1, \ldots, m.$$

Então, temos que $\varphi \in \text{Im } \delta^1$ se, e somente se,

$$\pi(\varphi) = (\alpha_1^{-1}\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_1^{-1}\alpha_{n+k}, \ldots, \alpha_1^{-1}\alpha_{n+m}, \alpha_2^{-1}\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_l^{-1}\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_n^{-1}\alpha_{n+1},$$

$$\alpha_2^{-1}\alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_2^{-1}\alpha_{n+k}, \ldots, \alpha_2^{-1}\alpha_{n+m}, \ldots, \alpha_l^{-1}\alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_l^{-1}\alpha_{n+k}, \ldots, \alpha_l^{-1}\alpha_{n+m},$$

$$\ldots, \alpha_n^{-1}\alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_n^{-1}\alpha_{n+k}, \ldots, \alpha_n^{-1}\alpha_{n+m})$$

$$= (a_{11}, \ldots, a_{k1}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, \ldots, a_{1l}, \ldots, a_{1n}, a_{22}, \ldots, a_{k2}, \ldots, a_{m2},$$

$$\ldots, a_{2l}, \ldots, a_{kl}, \ldots, a_{ml}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{kn}, \ldots, a_{mn}),$$

com $k = 2, \ldots, m$, $l = 2, \ldots, n$, onde

$$a_{ji} = \alpha_i^{-1}\alpha_{n+j}, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{e todo} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Observe que, para cada $j = 1, \ldots, m-1$, considerando os pontos x_{n+j} e x_{n+j+1}, existem n semicaminhos distintos que os ligam, são eles: $\mathscr{P}_k : x_{n+j}x_k x_{n+j+1}$, $k = 1, \ldots, n$. Assim, podemos obter $n-1$ relações entre a_i's considerando x_{n+j} e x_{n+j+1}, para cada $j = 1, \ldots, m-1$. Logo, podemos obter $(m-1)(n-1)$ relações entre a_i's em X_3. Mostremos então que $H^1(X_3, F) \cong (F^*)^{(m-1)(n-1)}$.

Note que, para cada $j = 1, \ldots, m-1$, temos

$$a_{j1}a_{j+1,1}^{-1} = a_{j2}a_{j+1,2}^{-1} = a_{j3}a_{j+1,3}^{-1} = \cdots = a_{jn}a_{j+1,n}^{-1}. \tag{4.2-7}$$

Considere o conjunto $C = \{a_{j1} : j = 1, \ldots, m\} \cup \{a_{1i} : i = 2, \ldots, n\}$. Usando $j = 1$ em $(4.2-7)$, podemos isolar a_{2k}, para $k = 2, \ldots, n$, e escrevê-los em função de elementos de C. Dados a_{2k}, $k = 2, \ldots, n$, em função de elementos de C, usando $j = 2$ em $(4.2-7)$ podemos escrever a_{3k}, $k = 2, \ldots, n$, em função de elementos de C. De modo geral, escritos a_{jk}, $k = 2, \ldots, n$, em função de elementos de C, podemos, por $(4.2-7)$, escrever $a_{j+1,k}$, $k = 2, \ldots, n$, em função de elementos de C, para todo $j = 1, \ldots, m-1$.

Assim, todos os a_{ji} são escritos em função de elementos de C, isto é, os últimos $mn-m-n+1$ a_{ji}'s são dados em função dos primeiros $m+n-1$ a_{ji}'s, e estes são livres. Analogamente aos exemplos anteriores, cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$ contém um único elemento da forma $(1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p)$, para alguns $\gamma_i \in F^*$, com $p = mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$ e, deste modo, o isomorfismo

$$\Phi : \frac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1} \to (F^*)^p$$

$$\overline{(b_1, \ldots, b_{mn})} \mapsto (\gamma_1, \ldots, \gamma_p),$$

$$\text{onde} \quad (1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p) \in \overline{(b_1, \ldots, b_{mn})},$$

garante que

$$H^1(X_3, F) \cong (F^*)^{(m-1)(n-1)}.$$

Exemplo 4.9. Considere X_4 o poset dado por n cópias do poset X da Figura 4.1 arranjadas segundo o diagrama de Hasse da Figura 4.5, com $n \geq 1$. Vamos mostrar que $H^1(X_4, F) \cong (F^*)^n$.

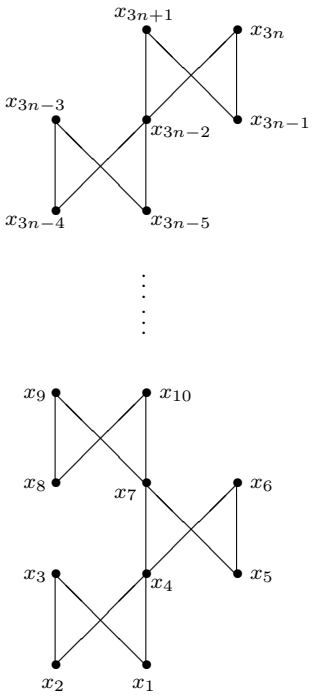

Figura 4.5: Poset X_4

É fácil ver que a aplicação $\pi : C_1^* \to (F^*)^{|C_1|}$ que associa um homomorfismo $\varphi \in C_1^*$ a uma $|C_1|$-upla cujas coordenadas são $\varphi([x, y])$, para cada $[x, y] \in C_1$, é um isomorfismo. Desta forma, $C_1^* \cong (F^*)^{|C_1|}$. Mas, pela demonstração da Proposição 4.4, dado $\varphi \in C_1^*$, temos que

$$\varphi \in \ker \delta^2 \Leftrightarrow \varphi([x, z]) = \varphi([x, y])\varphi([y, z]), \text{ para todos } x < y < z.$$

Assim, considerando o conjunto $C = \{[x, z] \in C_1 : z \text{ cobre } x\} \subset C_1$, temos que $\varphi \in \ker \delta^2$ se, e somente se, para todo $[x, y] \in C_1$, $\varphi([x, y])$ é escrito em função de imagens de elementos de C.

Existem $4n$ cadeias em C, são elas:

$$[x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_2, x_4], \ldots, [x_k, x_{k+2}], [x_k, x_{k+3}], [x_{k+1}, x_{k+2}], [x_{k+1}, x_{k+3}], \ldots,$$

$$[x_{3n-2}, x_{3n}], [x_{3n-2}, x_{3n+1}], [x_{3n-1}, x_{3n}], [x_{3n-1}, x_{3n+1}],$$

com $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ tal que $k \equiv 1 \pmod 3$.

Desta forma, $\widetilde{\pi} : \ker \delta^2 \to (F^*)^{4n}$ dada por

$$\widetilde{\pi}(\varphi) = (\varphi([x_1, x_3]), \varphi([x_1, x_4]), \varphi([x_2, x_3]), \ldots, \varphi([x_k, x_{k+2}]), \varphi([x_k, x_{k+3}]), \varphi([x_{k+1}, x_{k+2}]),$$

$$\ldots, \varphi([x_{3n-2}, x_{3n}]), \varphi([x_{3n-2}, x_{3n+1}]), \varphi([x_{3n-1}, x_{3n}]), \varphi([x_2, x_4]), \ldots,$$

$$\varphi([x_{k+1}, x_{k+3}]), \ldots, \varphi([x_{3n-1}, x_{3n+1}])),$$

para $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ tal que $k \equiv 1 \pmod 3$, é um isomorfismo e, assim, $\ker \delta^2 \cong (F^*)^{4n}$.

Agora vamos caracterizar $\operatorname{Im} \delta^1$, que é um subconjunto de $\ker \delta^2$. Temos que

$$\operatorname{Im} \delta^1 = \{\varphi \in \ker \delta^2 : \text{existe } \psi \in C_0^* \text{ tal que } \varphi([x, y]) = (\psi([x]))^{-1}\psi([y]),\ \forall [x, y] \in C_1\}.$$

Então, dada $\varphi \in \ker \delta^2$, temos que $\varphi \in \operatorname{Im} \delta^1$ se, e somente se, existe $\psi \in C_0^*$, com $\psi([x_j]) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 3n+1$, tal que

$$\begin{cases} \varphi([x_i, x_{i+2}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{i+2} \\ \varphi([x_i, x_{i+3}]) = \alpha_i^{-1}\alpha_{i+3} \\ \varphi([x_{i+1}, x_{i+2}]) = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{i+2} \\ \varphi([x_{i+1}, x_{i+3}]) = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{i+3} \end{cases},$$

para todo $i \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ tal que $i \equiv 1 \pmod 3$. (Repare que existem n i's satisfazendo tais condições).

Então, $\varphi \in \operatorname{Im} \delta^1$ se, e somente se,

$$\widetilde{\pi}(\varphi) = (\alpha_1^{-1}\alpha_3, \alpha_1^{-1}\alpha_4, \alpha_2^{-1}\alpha_3, \ldots, \alpha_k^{-1}\alpha_{k+2}, \alpha_k^{-1}\alpha_{k+3}, \alpha_{k+1}^{-1}\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_{3n-2}^{-1}\alpha_{3n}, \alpha_{3n-2}^{-1}\alpha_{3n+1},$$

$$\alpha_{3n-1}^{-1}\alpha_{3n}, \alpha_2^{-1}\alpha_4, \ldots, \alpha_{k+1}^{-1}\alpha_{k+3}, \ldots, \alpha_{3n-1}^{-1}\alpha_{3n+1}) = (a_1, \ldots, a_{4n}),$$

onde $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ tal que $k \equiv 1 \pmod 3$ e

$$\begin{cases} a_i = \alpha_i^{-1}\alpha_{i+2} \\ a_{i+1} = \alpha_i^{-1}\alpha_{i+3} \\ a_{i+2} = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{i+2} \end{cases},$$

para todo $i \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ tal que $i \equiv 1 \pmod 3$ e

$$a_{3n+j} = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{i+3}, \quad \text{para todo} \quad j = 1, \ldots, n,$$

sendo i o j-ésimo k que satisfaz: $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ e $k \equiv 1 \pmod 3$.

Note que em cada cópia do poset X podemos obter uma relação entre a_i's. Logo, obtemos n relações entre a_i's em X_4, que são:

$$a_{3n+j} = a_i^{-1}.a_{i+1}.a_{i+2}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

com i o j-ésimo k que satisfaz: $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$ e $k \equiv 1 \pmod 3$. Isto é, os últimos n a_j's são escritos em função dos $3n$ a_i's anteriores, que são livres. Analogamente aos exemplos anteriores, cada classe lateral de $\dfrac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1}$ contém um único elemento da forma $(1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, para alguns $\gamma_i \in F^*$.

Desta forma,

$$\Phi : \frac{\ker \delta^2}{\operatorname{Im} \delta^1} \to (F^*)^n$$

$$\overline{(b_1, \ldots, b_{4n})} \mapsto (\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

$$\text{onde} \quad (1, \ldots, 1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \overline{(b_1, \ldots, b_{4n})},$$

é um isomorfismo e, portanto,

$$H^1(X_4, F) \cong (F^*)^n.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BACLAWSKI, K. Automorphisms and derivations of incidence algebras. *Proc. AMS* 36, 351–356, 1972

[2] BELDING, W. Incidence rings of pre-ordered sets. *Notre Dame J. of Formal Logic* 14, 481–509, 1973.

[3] BELL, E. T. Exponential polynomials. *Ann. of Math.* II Ser 35, 258–277, 1934.

[4] BRUSAMARELLO, R., FORNAROLI, E. Z., SANTULO JR., E. A. Classification of involutions on incidence algebras. *Comm. in Algebra* 39, 1941–1955, 2011.

[5] BRUSAMARELLO, R.; FORNAROLI, E. Z.; SANTULO JR., E. A. Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Comm. in Algebra* 43, 726-736, 2015.

[6] BRUSAMARELLO, R.; LEWIS, D. Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 59, 1247–1267, 2011.

[7] COELHO, S. P. The automorphism group of a structural matrix ring. *Linear Alg. App.* 195, 35–58, 1993.

[8] DEDEKIND, R. *Gesammelte Mathematische Werke* vols 1, 2, 3. Hamburgo: Deutsche Math. Verein., 1930.

[9] FEINBERG, R. B. Faithful distributive modules over incidence algebras. *Pacific J. Math.* 65, 35–45, 1976.

[10] FROELICH, J. The isomorphism problem for incidence ring. *Illinois J. Math.* 29, 146–152, 1985.

[11] HAACK, J. Isomorphisms of incidence algebras. *Illinois J. Math.* 28, 676–683, 1984.

[12] KHRIPCHENKO, N. Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra Discrete Math.* 9, 30–37, 2010.

[13] LEROUX, P. The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories. *Illinois J. Math.* 26, 52–61, 1982.

[14] NOWICKI, A. Derivations of special subrings of matrix rings and regular graphs. *Tsukuba J. Math.* 7, 281–297, 1983.

[15] O'DONNELL, C. J.; SPIEGEL, E. *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker, 1997.

[16] PARMENTER, M. M. Isomorphic incidence algebras of graphs. *Indian J. Math.* 35, 147–153, 1993.

[17] RIBENBOIM, P. The algebra of functions of a graph. *Studia Sci. Math. Hungar.* 17, 1–20, 1982.

[18] ROTA, G-C. On the foundations of combinatorial theory I: Theory of Möbius funciton. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 2 340–368, 1964.

[19] SCHARLAU, W. Automorphisms and involutions of incidence algebras. *Proc. of the international conference on representations of algebras*. Carleton math. Lecture notes, 9, 1974.

[20] SPIEGEL, E. Automorphisms of incidence algebras. *Comm. in Algebra* 21, 2973–2981, 1993.

[21] SPIEGEL, E. Upper-triangular embeddings of incidence algebras with involution. *Comm. in Algebra* 36, 1675–1681, 2008.

[22] STANLEY, R. P. Structure of incidence algebras and their automorphism groups. *Bull. AMS* 76, 1936–1939, 1970.

[23] VOSS, E. R. On the isomorphism problem for incidence rings. *Illinois J. Math.* 24, 624–638, 1980.

[24] WACHS, M. L. *Poset Topology: Tools and applications*. Miami: IAS/Park City Mathematics Series, 2004.

[25] WARD, M. The algebra of lattice functions. *Duke Math. J.* 5, 357–371, 1939.