

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(MESTRADO)

Bifurcação de Hopf em sistemas de equações diferenciais com
simetria

Giovana Higinio de Souza

Maringá - PR
2015

Bifurcação de Hopf em sistemas de equações diferenciais com simetria

Giovana Higinio de Souza

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática - PMA/UEM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Patrícia Hernandes Baptistelli.

Maringá - PR
2015

“Se tiver o hábito de fazer as coisas com alegria, raramente encontrará situações difíceis.”

Baden Powell

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pois sem Ele eu não seria nada e nada seria possível.

Agradeço à minha família: por todo apoio da minha mãe, por todos os conselhos do meu pai e pela torcida dos meus irmãos.

Aos meus amigos do mestrado, Ademir, Bruno, João, Richard, Anderson e Laís, por me darem forças e apoio em todos os momentos. Eles me mostraram que melhor do que ter com quem contar é ter com quem demonstrar.

Aos meus amigos, por todo o apoio, votos de sucesso e compreensão.

Aos meus professores, da graduação e do mestrado, pela atenção e paciência. Me mostraram a importância da seriedade na matemática e me apoiaram sempre que necessário.

À minha orientadora Patricia Hernandez Bapstitelli, pela paciência, por todas as horas dedicadas ao meu trabalho e por não poupar esforços para me auxiliar e me orientar da melhor forma possível. Mais do que orientar, ela me ensinou com o exemplo, mostrando amor extremo pela profissão e profissionalismo espetacular.

Ao Grupo Escoteiro Verde Canção, por ter me acolhido em Maringá e me ajudado em todos os momentos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todas as pessoas que torcem por mim e que fazem parte da minha vida. Muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho nós estudamos bifurcação de Hopf em sistemas de equações diferenciais equivariantes segundo a ação de um grupo de Lie Γ compacto. Nosso principal objetivo é provar, sob certas condições, a existência de um ramo de soluções periódicas para tais sistemas usando o método de redução de Liapunov-Schmidt, um procedimento que induz uma ação do grupo do círculo \mathbf{S}^1 no espaço das funções contínuas 2π -periódicas. A principal hipótese para a obtenção do resultado é que a linearização do sistema em um ponto fixo tenha autovalores puramente imaginários $\pm i$. Neste caso, o ramo de soluções periódicas possui simetrias em um subgrupo de isotropia $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$, desde que Σ tenha subespaço de ponto fixo bidimensional. Utilizando métodos algébricos, nós estabelecemos técnicas que facilitam a determinação de tais subgrupos de isotropia. Finalizamos o trabalho com dois exemplos de bifurcação de Hopf com grupos de simetrias S_3 e $\mathbf{O}(2)$.

Abstract

In this work we study Hopf bifurcation in systems of differential equations that are equivariants under the action of a compact Lie group Γ . Our main goal is to prove, under certain conditions, the existence of a branch of periodic solutions for such systems by using the Liapunov-Schmidt reduction, a procedure that induces an action of the circle group \mathbf{S}^1 on the space of continuous 2π -periodic functions. The main assumption to obtain the result is that the linearization of the system in a fixed point has purely imaginary eigenvalues $\pm i$. In this case, the branch of periodic solutions has symmetries in an isotropy subgroup $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$, provided that Σ has a two-dimensional fixed-point subspace. Based on algebraic methods, we establish techniques in order to facilitate the determination of such isotropy subgroups. We finished the work with two examples of Hopf bifurcation with symmetry groups S_3 and $\mathbf{O}(2)$.

Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Teoria de grupos	2
1.1.1 Grupos de Lie	2
1.1.2 Representações e ações	4
1.1.3 Integral invariante	8
1.2 Irredutibilidade	9
1.3 Teoria invariante	19
1.4 Órbitas e subgrupos de isotropia	23
1.5 Subespaços de ponto fixo	25
2 Bifurcação de Hopf	30
2.1 O conceito de bifurcação de Hopf	30
2.2 Soluções periódicas e a redução de Liapunov-Schmidt	33
2.2.1 A definição do operador Φ	33
2.2.2 A redução de Liapunov-Schmidt	35
2.3 O Teorema de Hopf Padrão	43
3 Bifurcação de Hopf com simetria	46
3.1 O Lema dos Ramos Equivariantes	47
3.2 Simetria em bifurcação de Hopf	50
3.2.1 Condições para autovalores imaginários	51
3.2.2 Um teorema de Hopf simples com simetria	56

3.3	As ações do grupo do círculo	57
3.4	A redução de Liapunov-Schmidt e o Teorema de Hopf Equivariante	62
3.5	Subgrupos de isotropia de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$	67
3.6	Dimensão dos subespaços de ponto fixo	70
4	Exemplos de bifurcação de Hopf com simetria	76
4.1	Bifurcação de Hopf com grupo de simetrias S_3	76
4.1.1	Os subgrupos de isotropia de $S_3 \times \mathbf{S}^1$	77
4.1.2	Os subespaços de ponto fixo de dimensão 2	78
4.2	Bifurcação de Hopf com grupo de simetrias $\mathbf{O}(2)$	79
4.2.1	A ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$	80
4.2.2	Os subgrupos de isotropia de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$	80
4.2.3	Os subespaços de ponto fixo de dimensão 2	81
A	A redução de Liapunov-Schmidt com simetria	83
	Referências Bibliográficas	86
	Lista de Notações	89
	Índice Remissivo	90

Introdução

Bifurcação de soluções periódicas de sistemas diferenciais sob a variação de um parâmetro tem sido estudada nos últimos anos por muitos autores. A teoria geral de bifurcação descreve como as soluções para um dado sistema podem se ramificar conforme o parâmetro de bifurcação varia. Quando o interesse é bifurcação de Hopf, a redução de Liapunov-Schmidt é um procedimento facilitador, uma vez que reduz o estudo do sistema a um problema de pontos de equilíbrio. Mais especificamente, o termo “bifurcação de Hopf” se refere a um fenômeno em que uma solução de equilíbrio de uma equação de evolução evolui para uma órbita periódica conforme o parâmetro de bifurcação é variado. As condições para esta ocorrência foram primeiramente estabelecidas num sistema de dimensão finita por Eberhard Hopf, em 1942. Desde então, inúmeros trabalhos foram desenvolvidos nesta linha e em diferentes contextos (veja, por exemplo, [2, 4, 8, 13, 21, 23, 25, 30, 31]), no estudo de problemas relacionados ao assunto, incluindo a determinação da direção, da estabilidade e da periodicidade da solução periódica que bifurca no valor crítico do parâmetro de bifurcação.

Existe uma classe paralela de problemas de bifurcação, que são aqueles em presença de simetria (ou equivariância). Em muitos sistemas físicos, simetrias aparecem de forma natural e esta ocorrência nos fornece uma ferramenta útil na formulação e análise do modelo. Neste contexto, podemos verificar a existência de fenômenos que não são esperados se as simetrias não estão presentes, tais como bifurcações de alta codimensão, degenerescência, estabilidade e periodicidade de soluções, entre outros. Desta forma, a teoria equivariante tem sido desenvolvida como uma ferramenta para o estudo do comportamento qualitativo de sistemas diferenciais e sua importância em teoria de bifurcação tem motivado o desenvolvimento do assunto por diversos autores, como em [3, 9, 17, 29, 32, 36, 39].

Os resultados no presente trabalho estão relacionados ao estudo de bifurcação de Hopf em presença de simetria. Mais precisamente, nós estudamos um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs)

$$\frac{du}{dt} + F(u, \lambda) = 0, \quad (1)$$

com $u \in \mathbb{R}^n$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de bifurcação e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave, com $F(0, \lambda) \equiv 0$. Assumimos que $(dF)_{0,0}$ tem um par de autovalores puramente imaginários e que F comuta com a ação de um grupo de Lie compacto Γ , ou seja,

$$F(\gamma u, \lambda) = \gamma F(u, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad u \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Nosso objetivo é mostrar a existência de um ramo de soluções periódicas para (1), levando-se em consideração as propriedades simétricas de F . A linguagem natural para descrever tais propriedades é a de teoria de representação de grupos. O ponto principal é que o conjunto Γ formado por todas as simetrias de F tem estrutura de grupo e as equações diferenciais que regem o sistema permanecem inalteradas sob uma ação linear de Γ .

Um procedimento de fundamental importância em nosso trabalho é a redução de Liapunov-Schmidt, que induz uma ação do grupo do círculo \mathbf{S}^1 em um espaço de dimensão finita. Deste modo, a teoria de bifurcação de Hopf equivariante conduz também a questões algébricas relativas ao grupo de Lie compacto $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Importantes contribuições nesta direção foram dadas em [5, 10, 11, 12, 16, 18, 19, 20, 22, 35, 37], entre muitos outros trabalhos.

O presente texto está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos os conceitos elementares para o desenvolvimento do nosso estudo, tais como o da ação de um grupo de Lie Γ em um espaço vetorial, o da integral de Haar, que é uma forma de integração invariante por elementos de Γ , e a teoria invariante de grupos. Introduzimos também os conceitos de órbita e subgrupo de isotrofia, que nos dão informações sobre as particularidades de uma ação, além do conceito de subespaço de ponto fixo.

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de bifurcação de Hopf e provamos o Teorema de Hopf Padrão (Teorema 2.3.2), um resultado que garante, sob certas condições, a existência de uma família de órbitas periódicas para o sistema (1) bifurcando do ponto de equilíbrio $(u, \alpha) = (0, 0)$. Neste capítulo, não estamos supondo que F em (1) satisfaz (2), ou seja, F não possui simetria. Nossa principal ferramenta aqui é a redução de Liapunov-Schmidt, cujo método é apresentado no Apêndice A e que introduz no problema de bifurcação as simetrias do grupo do círculo \mathbf{S}^1 .

No Capítulo 3 são apresentados os principais resultados do nosso trabalho. Nosso principal objetivo neste capítulo é provar o Teorema de Hopf Equivariante, que é uma versão com simetria do Teorema de Hopf Padrão. Nós iniciamos com o Lema dos Ramos Equivariantes (Teorema 3.1.3), um resultado relacionado a bifurcação de pontos de equilíbrio com simetria que garante, sob certas condições, a existência de um ramo de soluções de equilíbrio para um sistema de equações diferenciais equivariantes. Provamos também um teorema de Hopf simples (Teorema 3.2.8), o qual identifica as soluções periódicas de (1) com apenas simetrias espaciais (elementos do grupo de simetrias Γ agindo em \mathbb{R}^n). As simetrias temporais são introduzidas no problema por meio de uma ação de \mathbf{S}^1 no espaço $\mathcal{C}_{2\pi}$ das funções contínuas 2π -periódicas. Assim, sob certas condições, o Teorema de Hopf Equivariante (Teorema 3.4.1) garante a existência de um ramo de

soluções periódicas para (1) com subgrupo de isotropia $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$. Os elementos de Σ são chamados de simetrias espaço-temporais. Uma das condições impostas pelo Teorema de Hopf Equivariante é que Σ tenha subespaço de ponto fixo bidimensional. Finalizamos, então, o capítulo estabelecendo duas formas de determinar a dimensão de um subespaço de ponto fixo de um subgrupo de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$.

No Capítulo 4, abordamos dois exemplos de problemas de bifurcação com simetria, sendo um deles S_3 -equivariante e o outro $\mathbf{O}(2)$ -equivariante. Para cada exemplo, nós encontramos as classes de conjugação dos subgrupos de isotropia, calculamos as dimensões dos respectivos subespaços de ponto fixo e aplicamos o Teorema de Hopf Equivariante.

A noção de simetria (ou equivariância) de um sistema de equações diferenciais consiste em uma transformação que preserva alguma estrutura particular. No retrato de fases do sistema, tal transformação simétrica aplica trajetórias em outras trajetórias do mesmo sistema. Na Figura 1.1(a) todas as rotações em torno da origem são simetrias e na Figura 1.1.(b) a reflexão com respeito ao eixo x é uma simetria. Neste trabalho, as transformações

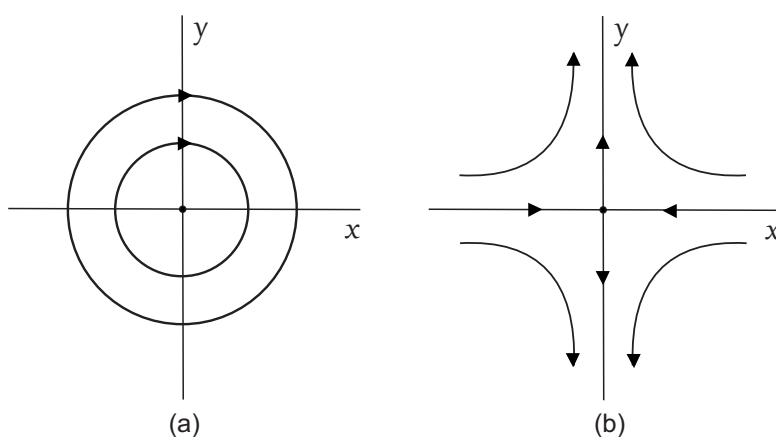


Figura 1.1: Retratos de fase de dois fluxos de campos vetoriais planares com simetrias.

simétricas são aplicações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e a estrutura que se preserva é um problema particular de bifurcação. O conjunto de todas tais transformações tem estrutura de grupo e sua descrição formal se dá por meio da teoria de representação de grupos.

Neste Capítulo, apresentamos os conceitos básicos que envolvem a ocorrência de simetria em sistemas dinâmicos. Para isso, introduzimos ferramentas importantes em teoria de representação de grupos, teoria invariante polinomial e teoria equivariante. Assumimos familiaridade com conceitos elementares de teoria de grupos.

1.1 Teoria de grupos

Nesta seção, nós tratamos de três tópicos principais: definições básicas e exemplos; teoria de representação e a existência de uma integral invariante, que nos permite identificar qualquer representação de um grupo de Lie compacto com um grupo de transformações ortogonais.

1.1.1 Grupos de Lie

Considere o conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem n com entradas reais. Tendo em vista que este conjunto pode ser identificado com \mathbb{R}^{n^2} , existe nele uma estrutura topológica bem estabelecida. Deste modo, torna-se possível a utilização dos conceitos de subconjuntos abertos e fechados de $M_n(\mathbb{R})$. Note que o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ composto por todas as matrizes não singulares de ordem n , denotado por $GL(n)$, possui estrutura de grupo se considerarmos a operação de multiplicação de matrizes. Além disso, $M_n(\mathbb{R})$ contém $GL(n)$ como um subconjunto aberto. Com efeito, $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, onde \det é a função contínua

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto |A|, \end{aligned} \tag{1.1}$$

com $|A|$ denotando o determinante da matriz A .

Para os nossos propósitos temos a seguinte definição:

Definição 1.1.1. *Um grupo Γ é chamado de **grupo de Lie** se ele é um subgrupo fechado de $GL(n)$, ou seja, Γ é um subconjunto fechado de $GL(n)$ com estrutura de grupo.*

Frequentemente, vamos nos referir a um grupo de Lie pelo nome do grupo abstrato associado a ele. Por exemplo, o grupo $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$ é isomorfo como um grupo abstrato ao subgrupo $\{I_n, -I_n\}$ de $GL(n)$, para qualquer n , onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Neste caso, nos referimos à \mathbf{Z}_2 como o grupo de Lie $\{I_n, -I_n\}$.

Apresentamos agora alguns exemplos de grupos de Lie que devemos usar no decorrer do trabalho. Daqui em diante, I_n denota a matriz identidade de ordem n , A^t denota a matriz transposta de A e $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua definida em (1.1).

Exemplo 1.1.2. 1. O **grupo n-dimensional ortogonal** $\mathbf{O}(n)$ que consiste de todas as matrizes A de ordem n satisfazendo

$$AA^t = A^t A = I_n,$$

juntamente com a operação de multiplicação de matrizes, é um grupo de Lie. De fato,

$$\det A \det A^t = \det(AA^t) = \det I_n = 1.$$

Logo, $(\det A)^2 = 1$, o que implica que $\det A = \pm 1$. Assim, $\mathbf{O}(n) = \det^{-1}(\{-1, 1\})$. Pela continuidade da função, $\mathbf{O}(n)$ é um subconjunto fechado de $GL(n)$. Note também que $\mathbf{O}(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$, pois $I_n \in \mathbf{O}(n)$ e se $A, B \in \mathbf{O}(n)$, então $AB \in \mathbf{O}(n)$.

2. O **grupo especial ortogonal** $\mathbf{SO}(n)$ de todas as matrizes $A \in \mathbf{O}(n)$ tais que $\det A = 1$ é um grupo de Lie. De fato, como $\mathbf{SO}(n) = \det^{-1}(\{1\})$, temos que ele é um subconjunto fechado de $GL(n)$. Além disso, $\mathbf{SO}(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$. Frequentemente, $\mathbf{SO}(n)$ é chamado de **grupo de rotação n-dimensional**. Em particular, $\mathbf{SO}(2)$ consiste precisamente das rotações planares

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

onde $\theta \in [0, 2\pi)$. De fato, $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Considere agora uma matriz $A \in \mathbf{SO}(2)$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Como $AA^t = I_2$ e $\det A = 1$, obtemos $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$,

$$ac + bd = 0 \quad \text{e} \quad ad - bc = 1. \quad (1.3)$$

Como $a^2 + b^2 = 1$, existe $\phi \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos \phi$ e $b = \sin \phi$. De modo análogo, existe $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $c = \sin \varphi$ e $d = \cos \varphi$. Substituindo tais condições em (1.3), segue que

$$\sin(\phi + \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(\phi + \varphi) = 1.$$

Logo, $\phi + \varphi = 0$, o que implica que $\phi = -\varphi$. Assim,

$$a = \cos \phi = \cos(-\varphi) = \cos \varphi \quad \text{e} \quad b = \sin \phi = \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi).$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

ou seja, existe $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $A = \mathbf{R}_\varphi$. Então, todo elemento de $\mathbf{SO}(2)$ é uma rotação planar. Pela relação estabelecida, podemos identificar $\mathbf{SO}(2)$ com o grupo do círculo

$$\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\},$$

uma vez que cada $z \in \mathbf{S}^1$ pode ser escrito como $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi)$. A identificação é dada por $\mathbf{R}_\theta \mapsto \theta$.

Da mesma forma, o grupo $\mathbf{O}(2)$ é gerado por $\mathbf{SO}(2)$ e pela reflexão

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

De fato, seja $A \in \mathbf{O}(2)$ tal que $A \notin \mathbf{SO}(2)$. Então $\det A = -1$ e, de modo análogo ao descrito para $\mathbf{SO}(2)$, é possível mostrar que $A = \mathbf{R}_\phi \kappa$ ou $A = \kappa \mathbf{R}_\phi$, para algum $\phi \in [0, 2\pi)$ e para κ como em (1.4). Portanto, $\mathbf{SO}(2)$ e κ geram o grupo $\mathbf{O}(2)$.

3. Seja \mathbf{Z}_n o grupo cíclico de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Podemos identificar \mathbf{Z}_n com o grupo de matrizes de ordem 2 gerado pela rotação $\mathbf{R}_{\frac{2\pi}{n}}$, como em (1.2). Assim, \mathbf{Z}_n é um grupo de Lie.
4. O **grupo diedral** \mathbf{D}_n de ordem $2n$ é gerado por \mathbf{Z}_n junto a um elemento de ordem 2 que não comuta com \mathbf{Z}_n . Assim, identificamos \mathbf{D}_n com o grupo de matrizes de ordem 2 gerado por $\mathbf{R}_{\frac{2\pi}{n}}$ e pela reflexão κ definida em (1.4). Portanto, \mathbf{D}_n é um grupo de Lie. Geometricamente, \mathbf{D}_n é o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados.
5. Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie.

Definição 1.1.3. Dizemos que um grupo de Lie é **compacto** se ele é compacto como um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} .

Como um grupo de Lie é fechado em $GL(n)$, ele é compacto se, e somente se, suas entradas nas matrizes que o define são limitadas. Disto segue que $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$ e todos os grupos finitos são compactos, mas $GL(n)$ não é. A compacidade é uma hipótese crucial para grande parte da teoria que desenvolvemos aqui.

Em todo o texto, denotamos por 1_Γ o elemento identidade do grupo Γ .

1.1.2 Representações e ações

Em nosso estudo, é essencial descrever a estrutura abstrata de um grupo de simetrias e de sua ação no espaço das variáveis. Como já mencionamos na Introdução, isto é feito por meio da teoria de representação de grupos, cujos conceitos básicos são apresentados a seguir. A partir de agora, V denota um espaço vetorial real de dimensão finita n , com $n \geq 1$.

Definição 1.1.4. Seja Γ um grupo de Lie munido de uma operação $*$. Dizemos que Γ age linearmente em V se existe uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma \times V &\rightarrow V \\ (\gamma, v) &\mapsto \gamma \cdot v, \end{aligned} \tag{1.5}$$

tal que

- (a) Para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ definida por $\rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v$ é linear.
- (b) Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, então $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot v) = (\gamma_1 * \gamma_2) \cdot v$.

A aplicação φ é chamada de **ação** de Γ em V . A aplicação $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$, $\gamma \mapsto \rho_\gamma$, é chamada de **representação** de Γ em V , onde $GL(V)$ é o grupo dos operadores lineares

invertíveis em V . Como para cada $\gamma \in \Gamma$, $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ é um operador linear, podemos associar a ρ_γ uma matriz $[\rho_\gamma]$ numa certa base de V . Neste caso, a ação de $\gamma \in \Gamma$ em $v \in V$ pode ser vista como a multiplicação de $[\rho_\gamma]$ pelo vetor v , ou seja $\gamma \cdot v = [\rho_\gamma]v$. No decorrer do texto, omitimos o ponto e escrevemos γv para $\gamma \cdot v$. Além disso, por um abuso de notação, denotamos $[\rho_\gamma]$ simplesmente por ρ_γ .

Os conceitos de ação e representação de um grupo em um espaço vetorial são essencialmente idênticos, divergindo apenas no ponto de vista. A ação φ nos mostra como um elemento $\gamma \in \Gamma$ transforma um dado elemento $v \in V$, enquanto que a representação ρ nos informa como $\gamma \in \Gamma$ transforma todo o espaço V . Além disso, $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$ define um homomorfismo de grupos. De fato, para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ quaisquer, temos $\rho(\gamma_1 * \gamma_2) = \rho_{\gamma_1 * \gamma_2}$. Ainda, para todo $v \in V$,

$$\rho_{\gamma_1 * \gamma_2}(v) = (\gamma_1 * \gamma_2)v = \gamma_1(\gamma_2 v) = \gamma_1(\rho_{\gamma_2}(v)) = \rho_{\gamma_1}(\rho_{\gamma_2}(v)) = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2}(v).$$

Logo, $\rho_{\gamma_1 * \gamma_2} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2}$, ou seja, $\rho(\gamma_1 * \gamma_2) = \rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2)$ como queríamos.

Finalmente, notamos que uma ação de Γ em V pode ser definida especificando (1.5) apenas nos geradores de Γ , uma vez que o item (b) da Definição 1.1.4 é satisfeita.

Vejamos alguns exemplos de ações:

- Exemplo 1.1.5.** 1. Como todo grupo de Lie Γ é um grupo de matrizes em $GL(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, ele tem uma ação natural em $V \cong \mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matrizes por um vetor: $(M, v) \mapsto Mv$, para todo $M \in \Gamma$, $v \in V$.
2. Todo grupo Γ tem uma ação trivial em $V \cong \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma v = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \Gamma$.
3. Seja S_3 o grupo de permutações do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$, ou seja,

$$S_3 = \{\sigma : X \rightarrow X; \sigma \text{ é uma bijeção}\}.$$

Note que S_3 é um grupo de Lie (pois é finito) que age em \mathbb{C}^3 da seguinte forma:

$$\sigma(z_1, z_2, z_3) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}), \quad (1.6)$$

para todo $\sigma \in S_3$, $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$.

4. Para cada inteiro k , o grupo do círculo S^1 tem uma ação em $V \cong \mathbb{C}$ dada por

$$\theta z = e^{ik\theta} z, \quad (1.7)$$

para todo $\theta \in S^1$ e $z \in \mathbb{C}$. De fato:

- Para cada $\theta \in S^1$, $\rho_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por $\rho_\theta(z) = e^{ik\theta} z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\rho_\theta(z_1 + \lambda z_2) = e^{ik\theta}(z_1 + \lambda z_2) = e^{ik\theta} z_1 + \lambda e^{ik\theta} z_2 = \rho_\theta(z_1) + \lambda \rho_\theta(z_2),$$

ou seja, ρ_θ é linear, para todo $\theta \in S^1$.

- Dados $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{S}^1$, temos

$$\theta_1(\theta_2 z) = \theta_1(e^{ik\theta_2} z) = e^{ik\theta_1} e^{ik\theta_2} z = e^{ik(\theta_1+\theta_2)} z = (\theta_1 + \theta_2)z,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Note que, se $k = 0$, temos a ação trivial definida no item anterior. Além disso, se $k = 1$, esta ação nos fornece uma representação ρ de \mathbf{S}^1 em \mathbb{R}^2 para a qual

$$\rho_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$. De fato, dado $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, escrevemos $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \rho_\theta(z) &= e^{i\theta}(x + iy) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) \\ &\cong \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Como $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$, cada ação de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} definida em (1.7) pode ser vista como uma ação de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{C} dada por

$$\mathbf{R}_\theta z = e^{ik\theta} z, \quad \forall \mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2), z \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

Cada ação em (1.8) se estende para uma ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} considerando também $\kappa z = \bar{z}$, onde κ é a reflexão dada em (1.4). A figura abaixo representa geometricamente o caso em que $k = 1$. A ação de R_θ em $B \in \mathbb{C}$, para $\theta = 60^\circ$, resulta no

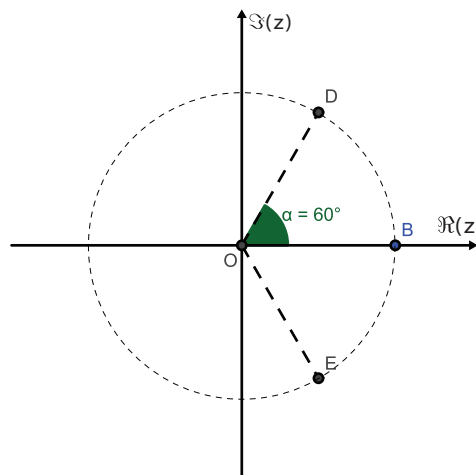


Figura 1.2: Representação geométrica da ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} .

ponto $D \in \mathbb{C}$. A ação de κ em $D \in \mathbb{C}$ nos fornece o ponto $E \in \mathbb{C}$.

Aqui estamos definindo uma ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} por meio dos geradores de $\mathbf{O}(2)$. Então, resta-nos mostrar que κ define uma ação. Para isto, consideramos $\rho_\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\rho_\kappa(z) = \bar{z}$. Assim, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\rho_\kappa(z_1 + \lambda z_2) = \overline{z_1 + \lambda z_2} = \bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2 = \rho_\kappa(z_1) + \lambda \rho_\kappa(z_2),$$

o que implica que ρ_κ é linear. Além disso,

$$\kappa(\kappa z) = \kappa \bar{z} = z = \kappa^2 z.$$

Agora, para todo $\theta \in \mathbf{SO}(2)$ e $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\theta(\kappa z) = \theta \bar{z} = e^{ik\theta} \bar{z} = (\theta \kappa) z \quad \text{e} \quad \kappa(\theta z) = \kappa(e^{ik\theta} z) = \overline{e^{ik\theta} z} = e^{-ik\theta} \bar{z} = (\kappa \theta) z,$$

uma vez que $\rho_\theta \rho_\kappa = \rho_{\theta \kappa}$ e $\rho_\kappa \rho_\theta = \rho_{\kappa \theta}$, respectivamente.

6. O grupo diedral \mathbf{D}_n define uma ação em \mathbb{C} dada por

$$\mathbf{R}_{\frac{2\pi}{n}} z = e^{i\frac{2\pi}{n}} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (1.9)$$

com κ definida em (1.4).

Muitas vezes, é possível descrever de modos distintos uma “mesma” ação de um grupo. Mais precisamente, duas ações podem ser isomorfas no seguinte sentido:

Definição 1.1.6. *Sejam V e W espaços vetoriais reais n -dimensionais e seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e W , com representações ρ e η , respectivamente. Dizemos que as ações de Γ em V e em W são **isomorfas**, ou que V e W são Γ -isomorfos, se existe um isomorfismo $A : V \rightarrow W$ tal que*

$$A(\rho_\gamma(v)) = \eta_\gamma(A(v)), \quad \forall v \in V, \gamma \in \Gamma.$$

Neste caso, dizemos que as representações ρ e η são Γ -**equivalentes** e chamamos A de Γ -isomorfismo entre V e W .

Como um exemplo, considere as ações de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} dadas em (1.7) para k e $-k$. Vamos mostrar que tais ações são isomorfas. De fato, considere as representações correspondentes ρ e η tais que

$$\rho_\theta(z) = e^{ik\theta} z \quad \text{e} \quad \eta_\theta(z) = e^{-ik\theta} z,$$

respectivamente. Defina $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $A(z) = \bar{z}$. Então, para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$,

$$A(\rho_\theta(z)) = A(e^{ik\theta} z) = \overline{e^{ik\theta} z} = e^{-ik\theta} \bar{z} = e^{-ik\theta} (A(z)) = \eta_\theta(A(z)),$$

como desejado.

1.1.3 Integral invariante

Nesta subseção, mostramos que todo grupo de Lie compacto $\Gamma \subset GL(n)$ pode ser identificado com um subgrupo fechado do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$. Tal identificação é feita na Proposição 1.1.8 usando a integral de Haar, uma forma de integração que é invariante sob translação por elementos de Γ . A prova da existência e unicidade desta integral é um resultado sofisticado que pode ser encontrado em [26]. Iniciamos com a seguinte definição abstrata:

Definição 1.1.7. *Sejam Γ um grupo de Lie e $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A operação*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \quad \text{ou} \quad \int_{\Gamma} f d\gamma$$

é uma **integral de Haar** sobre Γ se ela satisfaz as três seguintes condições:

1. *Linearidade:* $\int_{\Gamma} (\lambda f + \mu g) d\gamma = \lambda \int_{\Gamma} f d\gamma + \mu \int_{\Gamma} g d\gamma$, onde $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. *Positividade:* Se $f(\gamma) \geq 0$ para qualquer $\gamma \in \Gamma$, então $\int_{\Gamma} f d\gamma \geq 0$.
3. *Invariância por translação:* $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$, para qualquer $\delta \in \Gamma$ fixado.

Se Γ é compacto, então $\int_{\gamma \in \Gamma} 1$ é finita. Em nosso trabalho, assumimos que $\int_{\gamma \in \Gamma} 1 = 1$, ou seja, assumimos que a integral de Haar é **normalizada**. Para grupos compactos, a integral de Haar também é invariante sob translações à direita, ou seja

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma), \quad \forall \delta \in \Gamma \text{ fixado.}$$

O seguinte resultado mostra como a existência da integral de Haar conduz a uma ação de Γ por transformações ortogonais.

Proposição 1.1.8. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e seja ρ_{γ} a matriz associada a $\gamma \in \Gamma$ pela representação correspondente ρ . Então existe um produto interno em V tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$, ρ_{γ} é ortogonal.*

Demonstração: A ideia da demonstração é usar a integral de Haar para construir um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ Γ -invariante sobre V , ou seja, um produto interno que satisfaça

$$\langle \rho_{\delta}(v), \rho_{\delta}(w) \rangle_{\Gamma} = \langle v, w \rangle_{\Gamma},$$

para todo $\delta \in \Gamma$. A igualdade acima implica que, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\rho_{\gamma} \in \mathbf{O}(n)$. De fato, sendo V um espaço vetorial real de dimensão finita, segue que

$$\langle v, w \rangle_{\Gamma} = \langle \rho_{\gamma}(v), \rho_{\gamma}(w) \rangle_{\Gamma} = \langle v, \rho_{\gamma}^*(\rho_{\gamma}(w)) \rangle_{\Gamma} = \langle v, \rho_{\gamma}^t \rho_{\gamma}(w) \rangle_{\Gamma},$$

para quaisquer $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde ρ_{γ}^* denota a matriz adjunta de ρ_{γ} . Logo $\rho_{\gamma}^t \rho_{\gamma} = I_n$ para todo $\gamma \in \Gamma$, ou seja, a matriz ρ_{γ} é ortogonal.

Considere então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno qualquer sobre V e defina

$$\langle v, w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle,$$

para $v, w \in V$. Pela linearidade e positividade da integral de Haar e pelo fato de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ser um produto interno sobre V , segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ também é um produto interno sobre V .

Ademais, como ρ é um homomorfismo de grupos e a integral de Haar é invariante sob translações à direita, para $v, w \in V$ e $\delta \in \Gamma$ fixado, temos

$$\begin{aligned} \langle \rho_\delta(v), \rho_\delta(w) \rangle_\Gamma &= \int_\Gamma \langle \rho_\gamma(\rho_\delta(v)), \rho_\gamma(\rho_\delta(w)) \rangle = \int_\Gamma \langle \rho_{\gamma\delta}(v), \rho_{\gamma\delta}(w) \rangle \\ &= \int_\Gamma \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle = \langle v, w \rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

o que prova a Γ -invariância do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$. \square

Exemplo 1.1.9. Seja Γ um grupo de Lie finito de ordem $|\Gamma|$. Então a integral de Haar normalizada em Γ é dada por

$$\int_\Gamma f \equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma). \quad (1.10)$$

Também podemos definir a integral de Haar para aplicações a valores vetoriais, integrando separadamente cada componente. A definição abstrata que demos aqui é suficiente para nossos propósitos. Uma definição mais geral demanda um maior conhecimento sobre a medida de Haar. Para maiores detalhes, veja [7] ou [34].

O seguinte resultado envolvendo integração de Haar é explorado no Capítulo 3.

Teorema 1.1.10 (Teorema de Fubini). *Sejam Γ um grupo de Lie compacto, $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo fechado e $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$\int_\Gamma f d\gamma = \int_{\Gamma/\Sigma} \left(\int_\Sigma f d\sigma \right) d(\gamma\Sigma),$$

onde $\int_{\Gamma/\Sigma}$ denota a integral de Haar normalizada invariante à esquerda sobre Γ/Σ .

Demonstração: Veja Bröcker e Dieck [7, I, Proposition 5.16]. \square

1.2 Irredutibilidade

O estudo de uma representação de um grupo de Lie compacto pode ser feito por meio de sua decomposição em uma soma direta de representações mais simples, chamadas irredutíveis. Nesta seção, descrevemos as propriedades básicas desta decomposição e mostramos que ela sempre existe (Teorema 1.2.6). Em geral, tal decomposição não é única, mas existem condições que garantem sua unicidade.

Definição 1.2.1. *Seja Γ um grupo de Lie agindo linearmente em V . Um subespaço $W \subset V$ é chamado Γ -**invariante** se $\gamma w \in W$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $w \in W$. Uma representação ou ação de Γ em V é **irredutível** se os únicos subespaços Γ -invariantes de V são $\{0\}$ e V . Um subespaço $W \subset V$ é dito Γ -**irredutível**, ou simplesmente **irredutível**, se W é Γ -invariante e a ação de Γ em W é irredutível.*

Por exemplo, a ação de \mathbf{S}^1 em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definida por (1.7) é irredutível quando $k \neq 0$. De fato, geometricamente, os únicos subespaços de \mathbb{R}^2 que são invariantes por rotação são os triviais.

Uma das características fundamentais da ação de um grupo de Lie compacto é que subespaços invariantes sempre têm complementos invariantes. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.2.2. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Seja $W \subset V$ um subespaço Γ -invariante. Então existe um subespaço complementar Γ -invariante $Z \subset V$ tal que $V = W \oplus Z$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.1.8, existe um produto interno Γ -invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ em V . Tome $Z = W^\perp$, onde

$$W^\perp = \{v \in V; \langle w, v \rangle_\Gamma = 0, \forall w \in W\}.$$

A Γ -invariância do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ implica que W^\perp é um complemento Γ -invariante de W . De fato, sejam $w \in W$ e ρ a representação correspondente à ação de Γ em V . Como W é Γ -invariante, $\rho_{\gamma^{-1}}(w) \in W$, para cada $\gamma \in \Gamma$. Logo, existe $w_1 \in W$ tal que $\rho_{\gamma^{-1}}(w) = w_1$, ou seja, $w = \rho_\gamma(w_1)$. Seja agora $v \in W^\perp$. Então,

$$\langle w, \rho_\gamma(v) \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(w_1), \rho_\gamma(v) \rangle_\Gamma = \langle w_1, v \rangle_\Gamma = 0,$$

onde a segunda igualdade é consequência da Γ -invariância do produto interno. Portanto, $\gamma v = \rho_\gamma(v) \in W^\perp$, para todo $\gamma \in \Gamma$, conforme o desejado. \square

Segue diretamente da proposição anterior que toda representação de um grupo de Lie Γ compacto pode ser escrita como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis, como mostramos a seguir.

Corolário 1.2.3 (Teorema da redutibilidade completa). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existem subespaços Γ -irredutíveis V_1, V_2, \dots, V_s tais que*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s.$$

Demonstração: Podemos assumir V não nulo. Se V é Γ -irredutível, $V_1 = V$ e o resultado está provado. Se não, existe um subespaço $V_1 \subset V$ não nulo e Γ -irredutível. Tomamos V_1 como o subespaço Γ -invariante de V de menor dimensão. Pela Proposição 1.2.2, existe um complemento Γ -invariante Z para V_1 em V . Se Z é Γ -irredutível, temos $V_2 = Z$ e a prova está concluída. Se não, repetimos o processo em Z , escolhendo um subespaço Γ -invariante não nulo $V_2 \subset Z$. Como V tem dimensão finita, este processo termina produzindo a decomposição desejada. \square

Exemplo 1.2.4. 1. Defina uma ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^3 da seguinte forma: as rotações $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$ agem rotacionando o plano xy por um ângulo 2θ e mantendo o eixo z fixo, ou seja,

$$\mathbf{R}_\theta(x, y, z) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta, z).$$

Seja a reflexão $\kappa \in \mathbf{O}(2)$ agindo por $\kappa(x, y, z) = (x, -y, -z)$. Observe que

$$V_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_2 = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R} = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$$

são subespaços $\mathbf{O}(2)$ -irredutíveis de \mathbb{R}^3 . De fato, se $(x, y, 0) \in V_1$, então

$$\mathbf{R}_\theta(x, y, 0) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta, 0) \in V_1,$$

para todo $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$ e $\kappa(x, y, 0) = (x, -y, 0) \in V_1$.

De modo análogo, se $(0, 0, z) \in V_2$, então $\mathbf{R}_\theta(0, 0, z) = (0, 0, z) \in V_2$, para todo $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$ e $\kappa(0, 0, z) = (0, 0, -z) \in V_2$.

Portanto, V_1 e V_2 são subespaços $\mathbf{O}(2)$ -invariantes de \mathbb{R}^3 . Além disso, os únicos subespaços $\mathbf{O}(2)$ -invariantes de V_1 são $\{0\}$ e V_1 ; e de V_2 são $\{0\}$ e V_2 . Logo, $\mathbf{O}(2)$ age irredutivelmente em cada um deles. Como $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, decompos \mathbb{R}^3 como no Corolário 1.2.3.

Em geral, a decomposição de V como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis não é única. É possível entender a origem desta não unicidade e encontrar condições nas quais tal decomposição é única. O seguinte exemplo ilustra esta questão.

Exemplo 1.2.5. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ e considere $\mathbf{SO}(2)$ agindo em V pela multiplicação de matrizes à esquerda, ou seja, $(\mathbf{R}_\theta, A) \mapsto \mathbf{R}_\theta A$, para todo $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$, $A \in V$.

Observe que $V = V_1 \oplus V_2$, onde

$$V_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

são $\mathbf{SO}(2)$ -irredutíveis. De fato, dados $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$, $A \in V_1$ e $B \in V_2$, temos

$$\mathbf{R}_\theta A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta & 0 \\ a \sin \theta + b \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \in V_1$$

e

$$\mathbf{R}_\theta B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \cos \theta - d \sin \theta \\ 0 & c \sin \theta + d \cos \theta \end{bmatrix} \in V_2.$$

Assim, $V_1, V_2 \subset V$ são $\mathbf{SO}(2)$ -invariantes. Agora note que os únicos subespaços de V_1 são os triviais e os subespaços com a forma

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad V_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda b & 0 \end{bmatrix}; b \in \mathbb{R} \right\},$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado. Dados $\theta \in \mathbf{SO}(2)$ e $A \in V_3$ não nula, segue que

$$\mathbf{R}_\theta A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \theta & 0 \\ a \cos \theta & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\theta A \in V_3$ se, e somente se, $a \sin \theta = 0$. Como $a \neq 0$, isto ocorre somente se $\theta \in \{0, \pi\}$. Logo, $\mathbf{R}_\theta A \notin V_3$ para $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Para $B \in V_\lambda$ não nula, temos

$$\mathbf{R}_\theta B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \cos \theta - \lambda b \sin \theta & 0 \\ b \sin \theta + \lambda b \cos \theta & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{R}_\theta B \in V_\lambda$ se, e somente se, $(-\lambda^2 - 1)b = 0$, o que é impossível pois $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Logo $\theta B \notin V_\lambda$.

Portanto, V_1 é $\mathbf{SO}(2)$ -irredutível. De forma análoga, podemos provar que V_2 é $\mathbf{SO}(2)$ -irredutível. Considere agora o subespaço $\mathbf{SO}(2)$ -irredutível de V dado por

$$V'_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 8c & c \\ 8d & d \end{bmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Temos também que $V = V_1 \oplus V'_2$, ou seja, $V_1 \oplus V_2 = V = V_1 \oplus V'_2$, onde V_1 , V_2 e V'_2 são $\mathbf{SO}(2)$ -irredutíveis. Note ainda que V_2 e V'_2 são $\mathbf{SO}(2)$ -isomorfos. Para ver isto, tome o $\mathbf{SO}(2)$ -isomorfismo $T : V_2 \rightarrow V'_2$ definido por

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 8x & x \\ 8y & y \end{bmatrix},$$

para o qual $T(\mathbf{R}_\theta A) = \mathbf{R}_\theta T(A)$, para todo $\theta \in \mathbf{SO}(2)$, $A \in V_2$.

O exemplo anterior nos mostra que a razão para a não unicidade na decomposição de V como no Corolário 1.2.3 é a possibilidade de decompor V de modos distintos com subespaços Γ -isomorfos. Afirmamos isto, mais precisamente, no Corolário 1.2.8. O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 1.2.6. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V .*

- (a) *Existe um número finito (a menos de Γ -isomorfismos) de subespaços Γ -irredutíveis distintos de V . Chame-os de U_1, U_2, \dots, U_t .*
- (b) *Defina W_k como a soma de todos os subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos à U_k . Então*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_t. \quad (1.11)$$

Observação 1.2.7. Os subespaços W_k são chamados de **componentes isotópicas** de V do tipo U_k , para a ação de Γ . O nome reflete o fato de que todo subespaço irredutível de W_k tem o mesmo tipo de isomorfismo. Por construção, a decomposição (1.11) é única.

Antes de provar o Teorema 1.2.6 vamos mostrar como a não unicidade na escolha dos subespaços invariantes na Proposição 1.2.2 está diretamente relacionada à repetição das representações irredutíveis entre os V_j 's do Corolário 1.2.3.

Corolário 1.2.8. *Nas condições do teorema anterior, temos:*

- (a) *Se $W \subset V$ é Γ -irredutível, então $W \subset W_k$ para um único k tal que W é Γ -isomorfo a U_k .*
- (b) *Seja $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ a decomposição de V em uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis. Se as representações de Γ nos V_j 's são todas distintas (não Γ -equivalentes), então os únicos subespaços Γ -irredutíveis não nulos de V são V_1, \dots, V_s .*

Demonstração: O item (a) segue diretamente do Teorema 1.2.6. Como W é Γ -irredutível, W é Γ -isomorfo a um único U_k . Então, por definição, $W \subset W_k$. Para a prova do item (b), considere as componentes isotópicas W_k de V . Cada V_j é isomorfo à algum U_k , de modo que $V_j \subset W_k$, para algum k . Como os V_j 's são todos distintos (não Γ -isomorfos), segue que os W_k são justamente os V_j , que podem estar escritos em uma ordem diferente. Se $W \neq \{0\}$ é um subespaço Γ -irredutível de V , então, pelo item (a), $W \subset W_k$ para algum k . Mas $W_k = V_j$ para um j conveniente e a irredutibilidade de V_j implica que $W = V_j$, para algum j . \square

A prova do Teorema 1.2.6 depende dos dois seguintes lemas:

Lema 1.2.9. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em W e U um subespaço Γ -irredutível de W fixado. Suponha que $W = \sum_{\alpha} U_{\alpha}$, onde cada U_{α} é um subespaço Γ -invariante que é Γ -isomorfo a U . Então todo subespaço Γ -irredutível de W é Γ -isomorfo a U .*

Demonstração: O lema está enunciado de uma forma que permite que o índice α seja escolhido em um conjunto infinito. No entanto, nós começamos a demonstração mostrando que

$$W = U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_t} \tag{1.12}$$

é uma soma direta de um subconjunto finito dos U_{α} 's. A prova é feita por indução. Suponhamos que temos encontrado um subespaço

$$W' = U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_{t-1}} \subset W.$$

Se $W' = W$, o resultado está provado. Se não, algum U_{α_t} não está contido em W' . Então $U_{\alpha_t} \cap W' = \{0\}$, uma vez que U_{α_t} é Γ -irredutível e $U_{\alpha_t} \cap W' \subset U_{\alpha_t}$. Portanto, a soma $W' + U_{\alpha_t}$ é direta e temos o subespaço $W'' = W' \oplus U_{\alpha_t} = U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_t}$. Se $W'' = W$, provamos o desejado. Se não, repetimos o processo e como a dimensão de W é finita, (1.12) deve valer para algum t .

Consideramos então X um subespaço Γ -irredutível não nulo de W . Se $X = U_{\alpha_i}$, para algum $i \in \{1, \dots, t\}$, então X é isomorfo a U . Caso contrário, temos que

$$X \not\subset U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_{j-1}} \quad \text{e} \quad X \subset U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_j}, \quad (1.13)$$

para um único $j \in \{1, \dots, t\}$. De fato, X é irredutível e $X \not\subset U_{\alpha_1}$. Se $X \subset U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2}$, a condição (1.13) está provada. Se não, vamos verificar se $X \subset U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus U_{\alpha_3}$. Se for válido, a prova está terminada. Caso contrário, repetimos o processo. Por (1.12), temos que este processo tem fim e obtemos (1.13). Pela irredutibilidade de X e por (1.13), segue que

$$X \cap (U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_{j-1}}) = \{0\}. \quad (1.14)$$

Seja $\Pi : U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_j} \rightarrow U_{\alpha_j}$ a projeção definida por $(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_j}) \mapsto u_{\alpha_j}$. Então (1.14) implica que $\Pi|_X : X \rightarrow \Pi(X)$ é um Γ -isomorfismo. Assim, $\Pi(X) \subset U_{\alpha_j}$ é um subespaço Γ -invariante e por (1.13), $\Pi(X)$ é não nulo. Pela irredutibilidade de U_{α_j} , temos $\Pi(X) = U_{\alpha_j}$. Concluimos que X é Γ -isomorfo a U_{α_j} e, assim, Γ -isomorfo a U . \square

Lema 1.2.10. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Sejam X e Y subespaços Γ -invariantes de V tais que nenhum par de subespaços Γ -irredutíveis $W \subset X$ e $Z \subset Y$ são Γ -isomorfos. Então:*

- (a) $X \cap Y = \{0\}$;
- (b) Se $W \subset X \oplus Y$ é Γ -irredutível, então $W \subset X$ ou $W \subset Y$.

Demonstração: Como $X \cap Y$ é Γ -invariante, qualquer subespaço Γ -irredutível de $X \cap Y$ estaria contido nos subespaços X e Y . Assim, pela hipótese, temos que $X \cap Y$ não possui subespaços Γ -irredutíveis não nulos. Pelo Corolário 1.2.3, isso só é possível quando $X \cap Y = \{0\}$, provando o item (a).

Seja $W \subset X \oplus Y$ um subespaço Γ -irredutível. Como $W \cap X$ e $W \cap Y$ são subespaços Γ -invariantes de W , $W \cap X = \{0\}$ ou $W \subset X$ e $W \cap Y = \{0\}$ ou $W \subset Y$. Suponha que $W \not\subset X$ e $W \not\subset Y$, ou seja, $W \cap X = \{0\} = W \cap Y$. De modo análogo ao que fizemos na demonstração do Lema 1.2.9, consideramos as projeções $\Pi_X : X \oplus Y \rightarrow X$ e $\Pi_Y : X \oplus Y \rightarrow Y$ para obter que W é Γ -isomorfo a $\Pi_X(W)$ e a $\Pi_Y(W)$. De fato, como $W \cap X = \{0\} = W \cap Y$, as restrições $\Pi_X|_W$ e $\Pi_Y|_W$ são Γ -isomorfismos. Assim, $\Pi_X(W) \subset X$ e $\Pi_Y(W) \subset Y$ são subespaços Γ -irredutíveis Γ -isomorfos, o que contradiz a hipótese do lema. Portanto, $W \subset X$ ou $W \subset Y$, o que prova o item (b). \square

Estamos prontos agora para demonstrar o Teorema 1.2.6.

Demonstração do Teorema 1.2.6: Se V é Γ -irredutível, o teorema está provado. Suponha então que V não é Γ -irredutível e tome um subespaço Γ -irredutível $U_1 \subset V$, cuja existência é garantida pelo Corolário 1.2.3. Seja W'_1 a soma de todos os subespaços Γ -invariantes de V que são Γ -isomorfos a U_1 . Se $W'_1 = V$, provamos o resultado. Se $W'_1 \neq V$, tomamos um complemento Γ -invariante Z_1 para W'_1 e escrevemos $V = W'_1 \oplus Z_1$. Repetimos o processo em Z_1 , ou seja, consideramos $U_2 \subset Z_1$ um subespaço Γ -irredutível e

tomamos W'_2 como a soma de todos os subespaços Γ -invariantes de Z_1 que são Γ -isomorfos a U_2 . Se $W'_2 = Z_1$, temos $V = W'_1 \oplus W'_2$. Caso contrário, tomamos um complemento Γ -invariante Z_2 de W'_2 , para obter $Z_1 = W'_2 \oplus Z_2$. Repetimos agora o processo em Z_2 . Como a dimensão de V é finita, este processo tem fim com

$$V = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_s, \quad (1.15)$$

para um determinado s , onde cada W'_k é a soma dos subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a $U_k \subset V$. Por construção, se $i \neq j$, então U_i não é Γ -isomorfo a U_j . Ainda não sabemos se W'_k é a soma W_k de todos os subespaços Γ -invariantes de V que são Γ -isomorfos a U_k , porque definimos W'_k em Z_{k-1} (para $k \in \{2, \dots, s\}$), não em V . Para mostrar que, de fato, $W'_k = W_k$, vamos primeiramente mostrar que todo subespaço Γ -irredutível $U \subset V$ é Γ -isomorfo a U_j , para algum $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Com efeito, se $U \subset V$ é Γ -irredutível, pelo item (b) do Lema 1.2.10, segue que

$$U \subset W'_k, \quad (1.16)$$

para algum k . Pelo Lema 1.2.9, U é Γ -isomorfo a U_k , ou seja, o item (a) do Teorema 1.2.6 está provado. Também de (1.16) segue que $W'_k = W_k$. Assim, (1.15) implica em (1.11), provando o item (b) do Teorema. \square

Em nosso estudo, vamos precisar entender a estrutura de aplicações lineares que comutam com a ação de um grupo de Lie compacto. Esta discussão tem importantes implicações no estudo de problemas de bifurcação com simetria porque, neste caso, a linearização do problema também deve comutar com o grupo de simetrias. Nós discutimos este assunto daqui até o fim desta seção, destacando dois pontos: a irredutibilidade absoluta e o Teorema 1.2.17, cujo resultado garante que as componentes isotípicas são invariantes por qualquer aplicação linear que comuta com a ação de um grupo.

Definição 1.2.11. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V . Uma aplicação $g : V \rightarrow V$ comuta com a ação de Γ ou é Γ -equivariante se*

$$g(\gamma v) = \gamma g(v),$$

para todo $v \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Neste caso, $\gamma \in \Gamma$ é uma simetria de g e Γ é o grupo de simetrias.

Exemplo 1.2.12. 1. Considere a ação de $\mathbf{Z}_2 = \{\pm 1\}$ em \mathbb{R} como $(-1, x) \mapsto -x$. Defina $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \sin(x)$. Desta forma, temos que g é \mathbf{Z}_2 -equivariante, pois $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Na Figura 1.3 esboçamos o gráfico de g , no qual observamos que -1 (equivalente à rotação de ângulo π) é uma simetria de g .

2. Considere a ação de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{R}^2 definida pela multiplicação de matrizes

$$\mathbf{R}_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

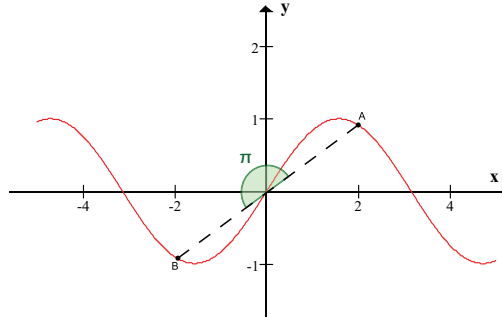


Figura 1.3: Gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Afirmamos que todas as aplicações lineares que comutam com esta ação têm a forma matricial

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. A prova desta afirmação é um cálculo simples. De fato, suponha que

$$\mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{R}_\theta, \quad (1.19)$$

para todo $\mathbf{R}_\theta \in \mathbf{SO}(2)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. De (1.19), obtemos $-c \sin \theta = b \sin \theta$ e $d \sin \theta = a \sin \theta$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Segue então que $b = -c$ e $a = d$. Assim, toda aplicação linear $\mathbf{SO}(2)$ -equivariante tem a forma matricial (1.18).

3. Considere a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^2 definida por (1.17) e por $\kappa(x, y) = (x, -y)$, onde κ é a reflexão definida em (1.4). Afirmamos que as únicas aplicações lineares que comutam com esta ação de $\mathbf{O}(2)$ são da forma aI , com $a \in \mathbb{R}$, onde $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o operador identidade. De fato, os múltiplos escalares da identidade comutam com qualquer representação de grupo pois eles comutam com qualquer matriz. Para provar a afirmação, considere M uma matriz que comuta com $\mathbf{O}(2)$. Como M comuta com $\mathbf{SO}(2)$, ela deve ter a forma (1.18). Agora, M também comuta com κ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

implicando que $b = 0$. Portanto $M = aI_2$ para algum $a \in \mathbb{R}$, como desejado.

Definição 1.2.13. *Uma representação de um grupo Γ em V é **absolutamente irredutível** se os únicos operadores lineares Γ -equivariantes em V são os múltiplos escalares do operador identidade. Um subespaço $W \subset V$ é dito **absolutamente Γ -irredutível** se W é Γ -invariante e a representação de Γ em W é absolutamente irredutível.*

Exemplo 1.2.14. 1. A representação de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{R}^2 dada no Exemplo 1.2.12 não é absolutamente irredutível, enquanto que a representação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^2 dada no mesmo exemplo é absolutamente irredutível.

2. Seja

$$\mathbb{R}_0^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3. \quad (1.20)$$

Considere a ação de S_3 em \mathbb{C}^3 dada por (1.6). O espaço vetorial \mathbb{R}_0^3 é S_3 -invariante, pois dados $\sigma \in S_3$ e $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_0^3$ temos

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}) \in \mathbb{R}_0^3,$$

com $x_{\sigma^{-1}(1)} + x_{\sigma^{-1}(2)} + x_{\sigma^{-1}(3)} = 0$.

Claramente, temos que $\mathbb{R}_0^3 \cong \mathbb{R}^2$ via o isomorfismo $(x, y) \mapsto (x, y, -x - y)$. Seja $g : \mathbb{R}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^3$ um operador linear S_3 -equivariante com representação matricial

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considerando o isomorfismo entre \mathbb{R}_0^3 e \mathbb{R}^2 , temos que o conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ I_2, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. B_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

é formado pelas representações de S_3 em \mathbb{R}_0^3 . Se g é S_3 -equivariante, devemos ter $AB_i = B_iA$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Calculando $AB_1 = B_1A$, concluímos que $a = d$ e $b = c$. Por $AB_i = B_iA$, para todo $2 \leq i \leq 5$, obtemos que $b = 0$. Assim, $A = aI_2$, para $a \in \mathbb{R}$. Portanto, g é um múltiplo escalar do operador identidade, o que implica que \mathbb{R}_0^3 é absolutamente S_3 -irredutível.

Para justificar a terminologia, provamos o seguinte lema:

Lema 1.2.15. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Se a ação de Γ é absolutamente irredutível, então ela é irredutível.*

Demonstração: Suponha que a ação de Γ em V não é irredutível. Logo, existe um subespaço próprio Γ -invariante $W \subset V$, com $W \neq \{0\}$. Pela Proposição 1.2.2, W possui um complemento W^\perp Γ -invariante. Defina $\Pi : W \oplus W^\perp \rightarrow V$ como a projeção sobre W com $\ker \Pi = W^\perp$. Então, $\Pi(w + w') = w$, para todo $w \in W$, $w' \in W^\perp$.

Afirmamos que Π comuta com a ação de Γ em V . De fato, dados $\gamma \in \Gamma$ e $v = w + w' \in V$, temos

$$\Pi(\gamma v) = \Pi(\gamma(w + w')) = \Pi(\gamma w + \gamma w') = \gamma w = \gamma \Pi(w + w') = \gamma \Pi(v),$$

a segunda igualdade seguindo da linearidade da ação de Γ em V . Logo, Π comuta com a ação de Γ em V . Como claramente Π não é um múltiplo escalar do operador identidade, a representação de Γ em V não é absolutamente irredutível, o que contraria a hipótese do lema. Logo, a ação de Γ em V é irredutível. \square

Lema 1.2.16. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e $A : V \rightarrow V$ um operador linear Γ -equivariante. Seja $W \subset V$ um subespaço Γ -irredutível. Então $A(W)$ é Γ -invariante e, ou $A(W) = \{0\}$ ou as representações de Γ em W e $A(W)$ são Γ -equivalentes.*

Demonstração: Vamos, inicialmente, mostrar a Γ -invariância de $A(W)$. Dado $z \in A(W)$, existe $w \in W$ tal que $A(w) = z$. Como A é Γ -equivariante,

$$\gamma z = \gamma A(w) = A(\gamma w),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Como $\gamma w \in W$, segue que $\gamma z \in A(W)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto, $A(W)$ é Γ -invariante.

Temos também que $\ker A$ é Γ -invariante. Com efeito, dados $a \in \ker A$ e $\gamma \in \Gamma$, temos $A(\gamma a) = \gamma A(a) = \gamma 0 = 0$. Logo, $\gamma a \in \ker A$, para todo $a \in \ker A$, $\gamma \in \Gamma$.

Como $\ker A$ e W são Γ -invariantes, $\ker A \cap W$ é um subespaço Γ -invariante de W . Como W é Γ -irredutível, $\ker A \cap W = \{0\}$ ou $\ker A \cap W = W$. Neste último caso, $W \subset \ker A$, ou seja, $A(W) = \{0\}$. Agora, se $\ker A \cap W = \{0\}$, então $A|_W$ é injetora e, portanto, é um isomorfismo linear sobre a sua imagem. Como A é Γ -equivariante, segue que $A(W)$ é Γ -isomorfo a W , como desejado. \square

O Lema 1.2.16 implica no seguinte resultado, que permite o estudo dos operadores lineares Γ -equivariantes na forma diagonal em blocos.

Teorema 1.2.17. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Decomponha V em componentes isotópicas $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_t$. Seja $A : V \rightarrow V$ um operador linear Γ -equivariante. Então*

$$A(W_k) \subset W_k, \tag{1.21}$$

para $k \in \{1, \dots, t\}$.

Demonstração: Pela definição de W_k , podemos escrevê-lo como $W_k = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, onde todos os V_j 's são subespaços Γ -isomorfos a algum Γ -irredutível U_k . Pelo Lema 1.2.16, $A(V_j) = \{0\}$ ou $A(V_j)$ é Γ -isomorfo a U_k . Em qualquer um dos casos, temos que $A(V_j) \subset W_k$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Como A é linear, segue (1.21). \square

Observação 1.2.18. Suponha que V seja Γ -irredutível e considere \mathcal{D}_Γ o conjunto de todos os operadores lineares $A : V \rightarrow V$ que são Γ -equivariantes. Temos então o seguinte resultado:

Teorema 1.2.19 (Theorem 2, p. 119, [27]). *Seja Γ agindo irredutivelmente em um \mathbb{K} -espaço vetorial V . Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{C}$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então \mathcal{D}_Γ é isomorfo a \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} (onde \mathbb{H} denota a álgebra dos quatérnios, com dimensão 4).*

Assim, temos que os conceitos de irredutibilidade e irredutibilidade absoluta são equivalentes para o caso complexo. Em nosso contexto, V é um espaço vetorial real e tal

equivalência não vale. O caso $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{R}$ ocorre se, e somente se, V é absolutamente irredutível. O caso $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{C}$ aparece repetidamente no contexto de bifurcação de Hopf, apresentado no Capítulo 3. A ação de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{R}^2 dada no Exemplo 1.2.12 representa a situação na qual $\mathcal{D}_{\mathbf{SO}(2)} \cong \mathbb{C}$. De fato, o isomorfismo $\mathcal{D}_{\mathbf{SO}(2)} \cong \mathbb{C}$ identifica cada matriz da forma (1.18) com um elemento $a + bi \in \mathbb{C}$.

Proposição 1.2.20. *Sejam Γ_1 e Γ_2 dois grupos de Lie compactos agindo em V e denote por $\mathcal{D}_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}$, \mathcal{D}_{Γ_1} e \mathcal{D}_{Γ_2} os conjuntos dos operadores lineares em V que comutam com a ação de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Então $\mathcal{D}_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} = \mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2}$.*

Demonstração: Dadas as ações de Γ_1 e Γ_2 em V , a ação de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ em V é definida como

$$(\gamma_1, \gamma_2)v = \gamma_1(\gamma_2v), \quad \forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2, v \in V.$$

Tome $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}$. Assim, dados $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ e $v \in V$, temos $A((\gamma_1, \gamma_2)v) = (\gamma_1, \gamma_2)A(v)$. Em particular, para $\gamma_1 = 1_{\Gamma_1}$, obtemos

$$A(\gamma_2v) = A(1_{\Gamma_1}(\gamma_2v)) = A((1_{\Gamma_1}, \gamma_2)v) = (1_{\Gamma_1}, \gamma_2)A(v) = 1_{\Gamma_1}(\gamma_2A(v)) = \gamma_2A(v).$$

Logo, $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_2}$. Analogamente, para $\gamma_2 = 1_{\Gamma_2}$, segue que $A(\gamma_1v) = \gamma_1A(v)$, o que implica que $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_1}$. Concluimos que $\mathcal{D}_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \subset \mathcal{D}_{\Gamma_2} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_1}$.

Reciprocamente, se $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_2} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_1}$, então dados $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ e $v \in V$, temos

$$A((\gamma_1, \gamma_2)v) = A(\gamma_1(\gamma_2v)) = \gamma_1A(\gamma_2v) = \gamma_1\gamma_2A(v) = (\gamma_1, \gamma_2)A(v).$$

Assim, $\mathcal{D}_{\Gamma_2} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_1} \subset \mathcal{D}_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}$. Portanto, $\mathcal{D}_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} = \mathcal{D}_{\Gamma_2} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_1}$. □

1.3 Teoria invariante

Um primeiro passo no estudo da estrutura algébrica de um sistema de equações diferenciais que comutam com a ação de um grupo Γ em V é determinar as funções que são invariantes por esta ação. Isto ocorre porque o conjunto de todas as aplicações Γ -equivariantes em V tem estrutura de módulo sobre o anel das funções invariantes. Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos da teoria invariante de grupos de Lie compactos, destacando dois resultados principais: o Teorema de Schwarz e o Teorema 1.3.10, que são ferramentas fundamentais na discussão da estrutura de germes de aplicações Γ -equivariantes. Começamos com a seguinte definição:

Definição 1.3.1. *Sejam W um espaço vetorial de dimensão finita e $v_0 \in V$. Considere $f : U_1 \subset V \rightarrow W$ uma aplicação suave definida em uma vizinhança U_1 de v_0 . Dizemos que o **germe** de f em v_0 , denotado por $f : (V, v_0) \rightarrow W$, é o conjunto*

$$\{g : U_2 \subset V \rightarrow W; \text{ existe uma vizinhança } U \text{ de } v_0 \text{ com } U \subset U_1 \cap U_2 \text{ e } f|_U = g|_U\}.$$

Em toda a parte, consideramos germes de funções ou de aplicações suaves na origem.

Definição 1.3.2. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Uma função a valores reais $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é Γ -invariante se $f(\gamma v) = f(v)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $v \in V$.*

Note que é suficiente verificar a condição de invariância apenas para um conjunto de geradores de Γ . Nós denotamos por $\mathcal{P}(\Gamma)$ o conjunto das funções polinomiais $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariantes e por $\mathcal{E}(\Gamma)$ o conjunto dos germes de funções $f : (V, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariantes. Note que $\mathcal{P}(\Gamma)$ tem estrutura de anel, pois somas e produtos de polinômios Γ -invariantes são também Γ -invariantes. Analogamente, $\mathcal{E}(\Gamma)$ tem estrutura de anel.

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 1.3.3. 1. Seja $\mathbf{Z}_2 = \{\pm 1\}$ agindo em \mathbb{R} como $(-1, x) \mapsto -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. As funções \mathbf{Z}_2 -invariantes são justamente as funções pares, uma vez que f é \mathbf{Z}_2 -invariante se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(x^2)$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$ é gerado por x^2 .

2. Seja \mathbf{S}^1 agindo em \mathbb{C} na forma padrão, ou seja,

$$\theta z = e^{i\theta} z, \quad \forall \theta \in \mathbf{S}^1, z \in \mathbb{C}. \quad (1.22)$$

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial \mathbf{S}^1 -invariante. Então, $f(e^{i\theta} z) = f(z)$, para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$ e $z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que existe uma função polinomial $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = h(z\bar{z}). \quad (1.23)$$

Para mostrar isso, usamos notação complexa. Escreva f como um polinômio nas coordenadas z, \bar{z} em \mathbb{C} como

$$f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad (1.24)$$

onde $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Como f é uma função a valores reais, temos $\bar{f} = f$, ou seja,

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \quad (1.25)$$

Ainda,

$$f(e^{i\theta} z) = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta. \quad (1.26)$$

Como $f(e^{i\theta} z) = f(z)$ como polinômios, obtemos de (1.24) e (1.26) a identidade $a_{\alpha\beta} = e^{i\theta(\alpha-\beta)} a_{\alpha\beta}$, para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$. Logo $\alpha = \beta$ ou $a_{\alpha\beta} = 0$. Assim, a \mathbf{S}^1 -invariância implica que

$$f(z) = \sum a_{\alpha\alpha} (z\bar{z})^\alpha.$$

Por (1.25), $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$. Então podemos definir $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \sum a_{\alpha\alpha} x^\alpha$$

e (1.23) está satisfeita. Neste caso, dizemos que $u(z) = z\bar{z}$ gera $\mathcal{P}(\mathbf{S}^1)$.

Motivados pelos exemplos anteriores, enunciaremos o seguinte:

Definição 1.3.4. *Um subconjunto finito $\{u_1, \dots, u_s\}$ de funções polinomiais Γ -invariantes é chamado de **base de Hilbert** para $\mathcal{P}(\Gamma)$ se para toda $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x))$.*

Ressaltamos que a base de Hilbert não é necessariamente única. A existência de uma tal base para $\mathcal{P}(\Gamma)$ é garantida no próximo resultado, iniciado por Hilbert e provado por Weyl. Nós omitimos a prova por envolver conceitos sofisticados de álgebra comutativa.

Teorema 1.3.5 (Teorema de Hilbert-Weyl). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

Demonstração: Veja Golubitsky [17, XII, Theorem 4.2]. □

Pode ser muito difícil encontrar uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$. Em muitos casos, tal objetivo envolve cálculos extensos e manipulações algébricas. Um resultado semelhante ao Teorema de Hilbert-Weyl é válido para germes Γ -invariantes de classe C^∞ . Mais especificamente, temos:

Teorema 1.3.6 (Teorema de Schwarz). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Seja $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$. Se $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$, então existe um germe suave $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)). \quad (1.27)$$

Demonstração: Veja Golubitsky [17, XII, Theorem 4.3]. □

Nós observamos aqui que a escolha de h em (1.27) nem sempre é única.

A partir de agora, denotamos por $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ o espaço das aplicações polinomiais Γ -equivariantes de V em V e por $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ o espaço dos germes $g : (V, 0) \rightarrow V$ de classe C^∞ Γ -equivariantes. O próximo lema implica que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel dos invariantes $\mathcal{P}(\Gamma)$ e, igualmente, que $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Lema 1.3.7. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V , $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$. Então $fg \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$.*

Demonstração: Para todo $\gamma \in \Gamma$ e todo $x \in V$, temos

$$(fg)(\gamma x) = f(\gamma x)g(\gamma x) = f(x)\gamma g(x) = \gamma f(x)g(x) = \gamma(fg)(x),$$

onde a terceira igualdade é decorrente da linearidade da ação de Γ em V e do fato de $f(x) \in \mathbb{R}$. Portanto $fg \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$. □

Exemplo 1.3.8. Considere \mathbf{Z}_2 agindo em \mathbb{R} por $(-1, x) \mapsto -x$. As aplicações $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbf{Z}_2 -equivariantes são justamente as funções ímpares, pois satisfazem $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = h(x^2)x$. Claramente, $h(x^2) \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$. Logo, a função $f(x) = x$ gera $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{Z}_2)$ sobre $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$.

Mais geralmente, temos:

Definição 1.3.9. Dizemos que as aplicações polinomiais Γ -equivariantes g_1, \dots, g_r geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ se toda $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ pode ser escrita como

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r,$$

onde $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Uma definição similar pode ser feita para $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$.

O próximo teorema é a versão equivariante dos Teoremas de Hilbert-Weyl e de Schwarz. O item (b) é uma versão simplificada do Teorema de Poénaru dado em [17, XII, Theorem 6.8].

Teorema 1.3.10. Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então,

- (a) O módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é finitamente gerado sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.
- (b) Sejam g_1, \dots, g_r os geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$. Então g_1, \dots, g_r geram o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Demonstração: Veja Golubitsky [17, XII, Theorem 6.8]. □

Portanto, pelo item (b) do Teorema 1.3.10, encontrar um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ se restringe a encontrar um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. A seguir, apresentamos dois diferentes grupos de Lie compactos Γ agindo em \mathbb{C} e os respectivos geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Exemplo 1.3.11. 1. Seja \mathbf{S}^1 com sua ação padrão em \mathbb{C} dada em (1.22). Afirmamos que toda aplicação $g \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{S}^1)$ tem a forma

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz, \quad (1.28)$$

onde $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial \mathbf{S}^1 -equivariante. Dado $z \in \mathbb{C}$, denotamos por $\Re(z)$ a parte real de z e por $\Im(z)$ a parte imaginária de z . Nas coordenadas z, \bar{z} , temos

$$g(z) = \sum_{j,k} b_{jk} z^j \bar{z}^k, \quad (1.29)$$

onde $b_{jk} \in \mathbb{C}$. A condição de equivariância de g implica que $g(z) = \theta^{-1}g(\theta z)$, ou seja,

$$g(z) = e^{-i\theta} \sum_{j,k} b_{jk} e^{i\theta(j-k)} z^j \bar{z}^k = \sum_{j,k} b_{jk} e^{i\theta(j-k-1)} z^j \bar{z}^k,$$

para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$. Por (1.29), segue que $b_{jk} = 0$ ou $j = k + 1$. Assim

$$g(z) = \sum_{k+1,k} b_{k+1,k} (z\bar{z})^k z,$$

com $b_{k+1k} \in \mathbb{C}$. Definimos agora $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(y) = \sum_{k+1,k} \Re(b_{k+1k})y^k \quad \text{e} \quad q(y) = \sum_{k+1,k} \Im(b_{k+1k})y^k.$$

Assim, g tem a forma (1.28). Como $\mathcal{P}(\mathbf{S}^1) = \langle z\bar{z} \rangle$, segue que $\{z, iz\}$ gera o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{S}^1)$ sobre $\mathcal{P}(\mathbf{S}^1)$.

2. Seja $\mathbf{O}(2)$ com sua ação padrão em \mathbb{C} dada por

$$\mathbf{R}_\theta z = e^{i\theta} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}. \quad (1.30)$$

Afirmamos que toda aplicação $g \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{O}(2))$ tem a forma

$$g(z) = p(z\bar{z})z, \quad (1.31)$$

onde $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para provar isto, observe que g é em particular \mathbf{S}^1 -equivariante, o que implica, pelo exemplo anterior, que g tem a forma (1.28). Agora, g também satisfaz $g(\kappa z) = \kappa g(z)$, ou seja, $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$. Logo, para todo $z \in \mathbb{C}$, devemos ter

$$p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz = g(z) = \overline{g(\bar{z})} = \overline{p(\bar{z}z)\bar{z} + q(\bar{z}z)i\bar{z}},$$

donde segue que $q(z\bar{z}) = -q(z\bar{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Concluimos então que $q \equiv 0$. Portanto, g tem a forma (1.31). Notamos que $\mathcal{P}(\mathbf{O}(2)) = \langle z\bar{z} \rangle$, pois $\mathcal{P}(\mathbf{SO}(2)) = \langle z\bar{z} \rangle$ (pelo Exemplo 1.3.3, uma vez que $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$) e $z\bar{z}$ também é invariante pela ação de κ . Portanto, z é o único gerador de $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{O}(2))$ sobre $\mathcal{P}(\mathbf{O}(2))$.

1.4 Órbitas e subgrupos de isotropia

Existem duas noções simples usadas para descrever os aspectos de uma ação de um grupo Γ em um espaço vetorial: as órbitas e os subgrupos de isotropia. Estes conceitos ajudam a descrever a estrutura das soluções de um sistema de equações diferenciais com simetria. Mais precisamente, equações Γ -equivariantes não distinguem entre as soluções na mesma órbita. Já os subgrupos de isotropia medem a “quantidade” de simetrias de Γ presentes em uma solução. Para o que segue, Γ é um grupo de Lie compacto agindo em V .

Definição 1.4.1. *A órbita de uma ação de Γ em $x \in V$ é o conjunto*

$$\Gamma x = \{\gamma x; \gamma \in \Gamma\}.$$

Seja $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante tal que $f(x) = 0$. Então f se anula em toda a órbita de Γ em x , pois $f(\gamma x) = \gamma f(x) = \gamma 0 = 0$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Em outras palavras, equações simétricas não podem distinguir entre pontos de uma mesma órbita.

Definição 1.4.2. *O subgrupo de isotropia de $x \in V$ é o conjunto*

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma; \gamma x = x\}.$$

Entendemos o subgrupo de isotropia como o conjunto das simetrias de x sob a ação de Γ . O próximo lema mostra como se relacionam os subgrupos de isotropia de pontos em uma mesma órbita. Lembramos que se $\Sigma \subset \Gamma$ é um subgrupo e $\gamma \in \Gamma$, então o conjunto

$$\gamma\Sigma\gamma^{-1} = \{\gamma\sigma\gamma^{-1}; \sigma \in \Sigma\}$$

é chamado de subgrupo conjugado a Σ . A classe de conjugação de Σ consiste de todos os subgrupos de Γ que são conjugados a Σ .

Lema 1.4.3. *Pontos de uma mesma órbita de Γ têm subgrupos de isotropia conjugados. Mais precisamente, $\Sigma_{\gamma x} = \gamma\Sigma_x\gamma^{-1}$.*

Demonstração: Sejam $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Suponha que $\sigma \in \Sigma_x$, ou seja, $\sigma x = x$. Então,

$$\gamma\sigma\gamma^{-1}(\gamma x) = \gamma\sigma(\gamma^{-1}\gamma)x = \gamma\sigma x = \gamma x.$$

Logo, $\gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Sigma_{\gamma x}$ e, portanto, $\gamma\Sigma_x\gamma^{-1} \subset \Sigma_{\gamma x}$.

Considere agora $\delta \in \Sigma_{\gamma x}$, ou seja, $\delta\gamma x = \gamma x$. Afirmamos que $\gamma^{-1}\delta\gamma \in \Sigma_x$. De fato,

$$(\gamma^{-1}\delta\gamma)x = \gamma^{-1}(\delta\gamma x) = \gamma^{-1}\gamma x = x.$$

Logo $\gamma^{-1}\delta\gamma \in \Sigma_x$ e, assim, $\gamma^{-1}\Sigma_{\gamma x}\gamma \subset \Sigma_x$. Portanto, $\Sigma_{\gamma x} = \gamma\Sigma_x\gamma^{-1}$. \square

Um modo conveniente de descrever geometricamente a ação de Γ em V é reunir em um conjunto W todos os pontos de V que têm subgrupos de isotropia conjugados. Nós chamamos W de um **tipo de órbita** da ação.

Exemplo 1.4.4. Considere a ação do grupo \mathbf{D}_n em \mathbb{C} como em (1.9). Tome $n = 5$. Temos que cada vértice do polígono é levado a outro vértice por \mathbf{D}_n e, assim, formam uma única órbita na ação de \mathbf{D}_n .

Para o vértice no eixo real, temos que seu subgrupo de isotropia é o grupo \mathbf{Z}_2 (gerado por κ). Pelo Lema 1.4.3, os outros vértices do polígono têm subgrupos de isotropia conjugados a \mathbf{Z}_2 . Ademais, todos os pontos nas retas que ligam a origem a um vértice têm o mesmo subgrupo de isotropia. Com efeito, se $t \neq 0$, pela linearidade da ação, segue que $\Sigma_{tz} = \Sigma_z$, para $z \in \mathbb{C}$.

Se consideramos um ponto próximo ao eixo real, temos que sua órbita tem $2n$ pontos e o único elemento de \mathbf{D}_5 que os fixa é a identidade. Logo, todos os pontos das arestas do polígono têm a identidade como subgrupo de isotropia. Por fim, a origem forma uma órbita e é fixada por \mathbf{D}_5 . Na figura abaixo apresentamos uma representação geométrica desta descrição das órbitas.

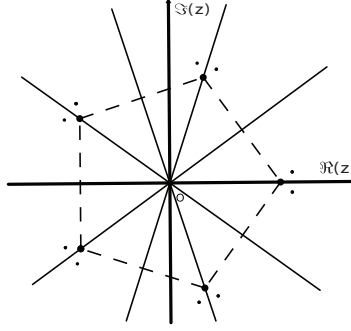


Figura 1.4: Subgrupos de isotropia da ação de \mathbf{D}_5 em \mathbb{C} .

1.5 Subespaços de ponto fixo

Uma das características mais interessantes das aplicações Γ -equivariantes é que sua equivariância força a existência de subespaços invariantes, chamados subespaços de ponto fixo. Nesta seção, nós descrevemos a estrutura de tais subespaços e apresentamos uma fórmula para calcular suas dimensões envolvendo a integração de Haar.

Definição 1.5.1. *Seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. O subespaço de ponto fixo de Σ é definido por*

$$\text{Fix}_V(\Sigma) = \{x \in V; \sigma x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Quando não houver confusão, denotamos $\text{Fix}_V(\Sigma)$ simplesmente por $\text{Fix}(\Sigma)$. Na Figura 1.4, $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \{I_2, \kappa\}$ é um subgrupo de \mathbf{D}_5 e observamos que $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2)$ é o eixo real.

Mostramos agora que $\text{Fix}(\Sigma)$ é um subespaço vetorial de V . De fato, para cada $\sigma \in \Sigma$ define $\varphi_\sigma : V \rightarrow V$ como $\varphi_\sigma(x) = \sigma x - x$. Note que cada φ_σ é linear e que

$$\text{Fix}(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \ker \varphi_\sigma.$$

Como cada kernel é um subespaço vetorial de V , segue que $\text{Fix}(\Sigma)$ é um subespaço vetorial de V . Note que os subespaços de ponto fixo mais simples são $\text{Fix}(\{1_\Gamma\})$ e $\text{Fix}(\Gamma)$. Claramente, $\text{Fix}(\{1_\Gamma\}) = V$ e $\text{Fix}(\Gamma)$ é um subespaço de V no qual Γ age trivialmente.

Proposição 1.5.2. *Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita Γ -isomorfos. Então, $\text{Fix}_V(\Gamma)$ e $\text{Fix}_W(\Gamma)$ são Γ -isomorfos.*

Demonstração: Sejam ρ e η as representações correspondentes às ações de Γ em V e W , respectivamente. Como V e W são Γ -isomorfos, existe um isomorfismo linear $A : V \rightarrow W$ tal que $A(\rho_\gamma(v)) = \eta_\gamma(A(v))$, para todo $v \in V$, $\gamma \in \Gamma$. Dado $v_1 \in \text{Fix}_V(\Gamma)$, segue pela definição que $\rho_\gamma(v_1) = v_1$ e, portanto,

$$\eta_\gamma(A(v_1)) = A(\rho_\gamma(v_1)) = A(v_1), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Assim, $A(v_1) \in \text{Fix}_W(\Gamma)$, o que implica que $A(\text{Fix}_V(\Gamma)) \subset \text{Fix}_W(\Gamma)$. Portanto, como A é um isomorfismo entre V e W , temos que $A|_{\text{Fix}_V(\Gamma)} : \text{Fix}_V(\Gamma) \rightarrow \text{Fix}_W(\Gamma)$ é linear e injetora. Além disso, dado $w \in \text{Fix}_W(\Gamma) \subset W$, existe um único $v \in V$ tal que $A(v) = w$. Logo,

$$A(\rho_\gamma(v)) = \eta_\gamma(A(v)) = \eta_\gamma(w) = w = A(v), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Pela injetividade de A , $\rho_\gamma(v) = v$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Assim, $v \in \text{Fix}_V(\Gamma)$ e a sobrejetividade de $A|_{\text{Fix}_V(\Gamma)}$ está provada. Portanto, $\text{Fix}_V(\Gamma)$ e $\text{Fix}_W(\Gamma)$ são Γ -isomorfos. \square

Proposição 1.5.3. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e W , com $V \cap W = \{0\}$. Então,*

$$\text{Fix}_{V \oplus W}(\Sigma) = \text{Fix}_V(\Sigma) \oplus \text{Fix}_W(\Sigma).$$

Demonstração: Seja $v + w \in \text{Fix}_{V \oplus W}(\Sigma)$, com $v \in V$ e $w \in W$. Logo,

$$\sigma v + \sigma w = \sigma(v + w) = (v + w), \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Como $V \cap W = \{0\}$, $v \in \text{Fix}_V(\Sigma)$ e $w \in \text{Fix}_W(\Sigma)$. Logo, $v + w \in \text{Fix}_V(\Sigma) + \text{Fix}_W(\Sigma)$. Claramente a soma é direta, pois $\text{Fix}_V(\Sigma) \subset V$ e $\text{Fix}_W(\Sigma) \subset W$.

Reciprocamente, dado $v + w \in \text{Fix}_V(\Sigma) \oplus \text{Fix}_W(\Sigma)$, temos que $\sigma v = v$ e $\sigma w = w$, para todo $\sigma \in \Sigma$. Assim,

$$\sigma(v + w) = \sigma v + \sigma w = v + w, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

donde $v + w \in \text{Fix}_{V \oplus W}(\Sigma)$. Portanto $\text{Fix}_{V \oplus W}(\Sigma) = \text{Fix}_V(\Sigma) \oplus \text{Fix}_W(\Sigma)$. \square

Nós provamos agora que se f é uma função Γ -equivariante, o subespaço de ponto fixo é invariante sob f , mais precisamente:

Lema 1.5.4. *Sejam $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. Então, $f(\text{Fix}(\Sigma)) \subset \text{Fix}(\Sigma)$.*

Demonstração: Sejam $\sigma \in \Sigma$ e $x \in \text{Fix}(\Sigma)$ quaisquer. Então, $\sigma x = x$ e

$$f(x) = f(\sigma x) = \sigma f(x),$$

pois f comuta com a ação de Σ em V . Portanto, $f(x) \in \text{Fix}(\Sigma)$, como desejado. \square

Uma consequência imediata do Lema 1.5.4 é a existência de soluções triviais para aplicações Γ -equivariantes. De fato, se $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$ e f é Γ -equivariante, então $\{0\}$ deve ser invariante por f , ou seja, $f(0) = 0$. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.5.5. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo ortogonalmente em V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$;

- (b) Toda aplicação Γ -equivariante $f : V \rightarrow V$ satisfaz $f(0) = 0$ (sempre existem soluções triviais);
- (c) A única função linear Γ -invariante é a função nula.

Demonstração: Mostramos primeiramente que (b) implica em (a). Para isto, afirmamos que para todo $v \in \text{Fix}(\Gamma)$, a aplicação constante $f(x) = v$ é Γ -equivariante. De fato,

$$\gamma f(x) = \gamma v = v = f(\gamma x), \quad \forall x \in V, \gamma \in \Gamma,$$

onde a segunda igualdade segue, uma vez que $v \in \text{Fix}(\Gamma)$. Assim, se (b) é válido, temos $v = f(0) = 0$, ou seja, $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$.

Para mostrar que (a) implica em (c), seja $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear Γ -invariante. Pelo Teorema da Representação de Riez (veja [28]), existe $v \in V$ tal que $L(x) = \langle v, x \rangle_\Gamma$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ é um produto interno Γ -invariante em V . Afirmamos que $v \in \text{Fix}(\Gamma)$. De fato, como L é Γ -invariante, então

$$\langle v, x \rangle_\Gamma = L(x) = L(\gamma^{-1}x) = \langle v, \gamma^{-1}x \rangle_\Gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

Como Γ age ortogonalmente em V ,

$$\langle v, x \rangle_\Gamma = \langle v, \gamma^{-1}x \rangle_\Gamma = \langle v, \gamma^t x \rangle_\Gamma = \langle \gamma v, x \rangle_\Gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

Portanto, $\gamma v = v$, para todo $\gamma \in \Gamma$, ou seja, $v \in \text{Fix}(\Gamma)$. Agora, como $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$, segue que $v = 0$ e assim $L(x) = \langle 0, x \rangle_\Gamma = 0$, para todo $x \in V$. Logo, segue o item (c).

Finalmente, provamos que (c) implica em (b). Seja $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante. Devemos mostrar que $f(0) = 0$. Para isto, defina $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(x) = \langle f(0), x \rangle_\Gamma,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ é um produto interno Γ -invariante. A linearidade de L segue da linearidade do produto interno. Além disso, L é Γ -invariante, pois

$$L(\gamma x) = \langle f(0), \gamma x \rangle_\Gamma = \langle \gamma^{-1} f(0), x \rangle_\Gamma = \langle f(\gamma^{-1} 0), x \rangle_\Gamma = \langle f(0), x \rangle_\Gamma = L(x),$$

onde a segunda igualdade segue pela ortogonalidade da ação de Γ em V . Por hipótese, $L \equiv 0$. Logo, $L(x) = \langle f(0), x \rangle_\Gamma = 0$, para todo $x \in V$, ou seja, $f(0) = 0$. \square

Dado um subgrupo $\Sigma \subset \Gamma$, existe uma fórmula para calcular a dimensão de $\text{Fix}(\Sigma)$ que depende somente do traço da representação de $\sigma \in \Sigma$. Usamos a notação $\text{tr}(\sigma)$ para denotar o traço da matriz de representação $\rho_\sigma \in GL(V)$.

Teorema 1.5.6 (Fórmula do traço). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo de Lie. Então*

$$\dim \text{Fix}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \text{tr}(\sigma), \quad (1.32)$$

onde \int_{Σ} denota a integral de Haar normalizada sobre Σ .

Demonstração: Definimos a transformação linear $A : V \rightarrow V$ por

$$A(v) = \left(\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma \right) (v).$$

Mais especificamente, para $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ e $\sigma = (\sigma_{ij})$, temos

$$A(v) = \begin{bmatrix} \int_{\Sigma} \sigma_{11} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Sigma} \sigma_{n1} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Das propriedades da integral de Haar, segue que A é linear e como a integral de Haar é invariante sob translação, vemos que

$$\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma' \sigma = \int_{\sigma \in \Sigma} \sigma = A,$$

onde $\sigma' \in \Sigma$ é fixado. Segue que

$$\begin{aligned} A^2 &= A \circ A = A \left(\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma \right) = \int_{\sigma' \in \Sigma} \sigma' \left(\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma \right) \\ &= \int_{\sigma' \in \Sigma} \left(\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma' \sigma \right) = \int_{\sigma' \in \Sigma} A = A \int_{\sigma' \in \Sigma} 1 = A. \end{aligned}$$

Portanto, A é uma projeção linear, donde segue que

$$(a) V = \ker A \oplus \operatorname{Im} A \quad \text{e} \quad (b) A|_{\operatorname{Im} A} = I. \quad (1.33)$$

Segue diretamente de (1.33) que $\operatorname{tr}(A) = \dim \operatorname{Im} A$. Além disso,

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} \int_{\Sigma} \sigma_{11} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Sigma} \sigma_{n1} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{nn} \end{bmatrix} \right) = \int_{\Sigma} (\sigma_{11} + \cdots + \sigma_{nn}) = \int_{\Sigma} \operatorname{tr}(\sigma).$$

Logo,

$$\dim \operatorname{Im} A = \int_{\Sigma} \operatorname{tr}(\sigma). \quad (1.34)$$

Afirmamos que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Fix}(\Sigma)$. Para provar isto, observe que $\operatorname{Fix}(\Sigma) \supset \operatorname{Im} A$. De fato, por (b) de (1.33) temos que se $y \in \operatorname{Im} A$, então $A(y) = y$. Como $\operatorname{Im} A$ é Σ -invariante temos que $\sigma y \in \operatorname{Im} A$, para todo $\sigma \in \Sigma$. Então $A(\sigma y) = \sigma y$ e segue que

$$\sigma y = A(\sigma y) = A(y) = y, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

onde a segunda igualdade se dá pela invariância de A sob translação a direita. Logo, $y \in \operatorname{Fix}(\Sigma)$, como desejado.

Suponha agora que $x \in \operatorname{Fix}(\Sigma)$. Logo $\sigma x = x$, para todo $\sigma \in \Sigma$ e

$$A(x) = \left(\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma \right) (x) = \int_{\sigma \in \Sigma} x = x \int_{\sigma \in \Sigma} 1 = x,$$

ou seja, $x \in \text{Im}A$. Logo, $\text{Fix}(\Sigma) \subset \text{Im}A$ e vale a igualdade $\text{Im}A = \text{Fix}(\Sigma)$. Então, por (1.34),

$$\dim \text{Fix}(\Sigma) = \dim \text{Im}A = \int_{\Sigma} \text{tr}(\sigma),$$

o que prova o resultado. □

Bifurcação de Hopf

Uma bifurcação de Hopf, também conhecida como bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf, é caracterizada pela existência de um par de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação. Isto implica que ela ocorre somente em sistemas de equações diferenciais constituídos por duas ou mais equações. Assim sendo, uma bifurcação de Hopf refere-se ao aparecimento de uma órbita periódica a partir de um estado de equilíbrio quando o parâmetro de bifurcação cruza um valor crítico. Este tipo de bifurcação é muito interessante, pois simultaneamente à perda de estabilidade do ponto de equilíbrio pode ocorrer o aparecimento de um ciclo limite que envolve este ponto.

Neste capítulo, estudamos bifurcação de Hopf para sistemas de EDOs sem simetria. Nosso principal objetivo é provar o Teorema de Hopf Padrão (Teorema 2.3.2), que é o resultado mais simples a fornecer condições suficientes para a ocorrência de um ramo de soluções periódicas. Além disso, mostramos que uma bifurcação de Hopf pode ser tratada como uma bifurcação de ponto de equilíbrio com simetria do grupo do círculo \mathbf{S}^1 .

Este capítulo é organizado como segue: Na Seção 2.1, introduzimos o conceito de bifurcação de Hopf. Na Seção 2.2, nós mostramos como órbitas periódicas podem ser caracterizadas como os zeros de uma certa aplicação Φ , que reduzida pelo método de Liapunov-Schmidt nos fornece uma equação cujas soluções enumeram as órbitas periódicas. Tal equação reduzida possui, de um modo natural, as simetrias do grupo do círculo \mathbf{S}^1 . Na Seção 2.3, nós apresentamos o principal resultado deste capítulo, o Teorema de Hopf Padrão, e analisamos a existência de órbitas periódicas.

2.1 O conceito de bifurcação de Hopf

Considere um sistema autônomo de EDOs da forma

$$\frac{du}{dt} + F(u, \lambda) = 0, \quad (2.1)$$

onde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o germe de uma aplicação de classe C^∞ , u é a variável de estado e λ é o parâmetro de bifurcação. Suponha que $F(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja,

$u = 0$ é um ponto de equilíbrio para (2.1), para todo λ .

O conjunto

$$S = \{(u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; F(u, \lambda) = 0\}$$

é chamado de **conjunto solução** de F . Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja $n(\lambda)$ o número de u 's para os quais (u, λ) é uma solução de $F(u, \lambda) = 0$. Como nosso estudo é local, supomos que $F(u, \lambda) = 0$ possa estar definida em alguma vizinhança de um ponto $(u_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e que $n(\lambda)$ contém apenas o número de soluções nesta vizinhança. Temos então a seguinte definição:

Definição 2.1.1. Dizemos que $(u_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $F(u_0, \lambda_0) = 0$ é um **ponto de bifurcação** se $n(\lambda)$ mudar conforme λ varia em uma vizinhança de λ_0 .

Aqui assumimos que $F(u_0, \lambda_0) = 0$ para evitar complicações. Note que se (u_0, λ_0) é um ponto de bifurcação, então $\det(dF)_{u_0, \lambda_0} = 0$, onde $(dF)_{u_0, \lambda_0}$ é a matriz jacobiana de ordem n obtida diferenciando F com relação à u no ponto (u_0, λ_0) . De fato, pelo Teorema da Função Implícita, se $\det(dF)_{u_0, \lambda_0} \neq 0$, então $F(u, \lambda) = 0$ pode ser resolvida unicamente para u como uma função de λ . Ou seja, para cada λ perto de λ_0 , existe uma única solução de $F(u, \lambda) = 0$ perto de u_0 . Neste caso, $n(\lambda) = 1$ para λ perto de λ_0 , o que implica que (u_0, λ_0) não é um ponto de bifurcação.

Nós agora apresentamos a definição central deste capítulo:

Definição 2.1.2. Dizemos que o sistema (2.1) sofre uma **bifurcação de Hopf** em $\lambda = 0$ se a matriz $(dF)_{0,0}$ tem um par de autovalores puramente imaginários.

Sob hipóteses adicionais, a condição apresentada na Definição 2.1.2 implica na ocorrência de órbitas periódicas. Mais precisamente, o Teorema de Hopf Padrão (Teorema 2.3.2) garante a existência de uma família a um parâmetro de soluções periódicas para (2.1) provinda de $(u, \lambda) = (0, 0)$, se duas hipóteses sobre F são satisfeitas: seja $A_\lambda = (dF)_{0, \lambda}$ a matriz jacobiana de F ao longo das soluções de equilíbrio. A primeira hipótese de Hopf é dada por

$$\begin{aligned} i) A_0 \text{ tem autovalores simples } \pm i; \\ ii) A_0 \text{ não tem outros autovalores no eixo imaginário.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se redimensionamos o tempo t em (2.1) tomando $t = \gamma s$, para $\gamma \in \mathbb{R}$ fixado e positivo, obtemos

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} = \gamma \frac{du}{dt}$$

e como consequência

$$\frac{du}{ds} + \gamma F(u, \lambda) = 0.$$

Neste caso, a linearização A_λ é multiplicada por γ . Assim, podemos interpretar (2.2) como uma afirmação de que A_0 tem um par de autovalores puramente imaginários não nulos que foram redimensionados para $\pm i$.

Afirmamos que A_λ tem autovalores simples da forma $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, onde $\sigma(0) = 0$, $\omega(0) = 1$ e σ e ω são funções suaves. Isto decorre do fato de A_λ ter entradas reais que dependem suavemente de λ e dos autovalores $\pm i$ de A_0 serem simples. Assim, a segunda hipótese de Hopf é dada por

$$\sigma'(0) \neq 0, \quad (2.3)$$

assim, os autovalores imaginários de A_λ cruzam transversalmente o eixo imaginário (com velocidade não nula) conforme λ cruza $\lambda_0 = 0$.

Apresentamos dois exemplos elementares no plano em que ocorre bifurcação de Hopf.

Exemplo 2.1.3. Considere o sistema (2.1), onde $u \in \mathbb{R}^2$ e

$$F(u, \lambda) = - \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} u. \quad (2.4)$$

Começamos esboçando os retratos de fases do sistema conforme λ varia. O retrato de fase é uma representação geométrica de todas as trajetórias (soluções) de um sistema dinâmico no plano. Esta é uma ferramenta importante no estudo de sistemas autônomos planares, pois a configuração das trajetórias no retrato de fase revela informações sobre a existência de atratores, repulsores e ciclos limites. Com condição inicial $u(0) = (a, 0)$, a solução para (2.1) é dada por $u(t) = ae^{\lambda t}(\cos(t), \sin(t))$. O retrato de fase para este sistema é dado na Figura 2.1.

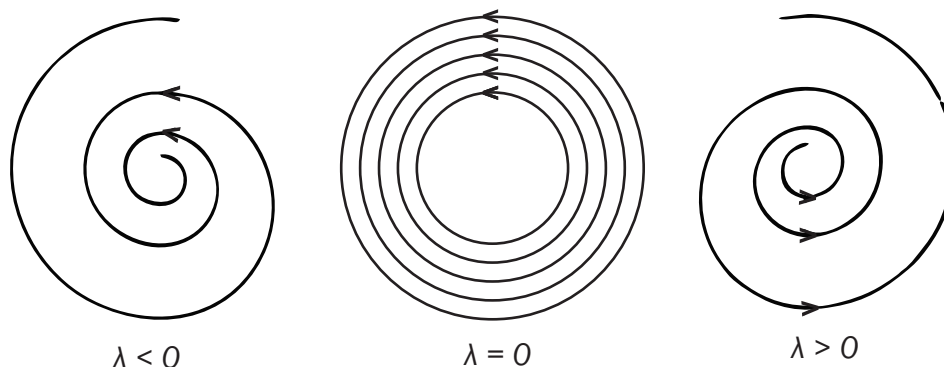


Figura 2.1: Retrato de fase do sistema (2.4).

Para $\lambda < 0$ o ponto de equilíbrio $u = 0$ é estável, pois as órbitas se espiralizam para a origem. Para $\lambda > 0$, o ponto de equilíbrio $u = 0$ é instável, pois as órbitas se afastam da origem. No entanto, para $\lambda = 0$, o ponto de equilíbrio é um centro (nem atrator, nem repulsor) e cada órbita é 2π -periódica. Esta é a família a um parâmetro de órbitas periódicas cuja existência é garantida por Hopf. Note que neste exemplo A_λ tem autovalores da forma $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, onde $\sigma(\lambda) = -\lambda$ e $\omega(\lambda) = 1$. Portanto, (2.2) e (2.3) são satisfeitas.

Exemplo 2.1.4. Considere agora o sistema (2.1), onde

$$F(u, \lambda) = - \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} u + \|u\|^2 u. \quad (2.5)$$

Os retratos de fases para este sistema são dados na Figura 2.2. Neste exemplo, termos de

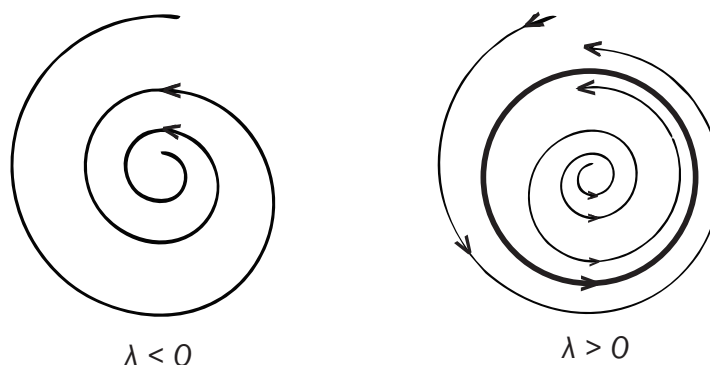


Figura 2.2: Retrato de fase do sistema (2.5).

ordem mais alta são adicionados a F . Então, para cada $\lambda > 0$, existe exatamente uma solução periódica para (2.5), que é estável no sentido de que todas as órbitas próximas se aproximam dela à medida que $t \rightarrow \infty$. Tal solução é chamada de **ciclo limite** (uma órbita fechada e isolada). Em outras palavras, ocorre uma troca de estabilidade do ponto de equilíbrio $u = 0$ quando $\lambda < 0$ para a solução periódica quando $\lambda > 0$.

2.2 Soluções periódicas e a redução de Liapunov-Schmidt

Por generalidade, vamos supor que a equação (2.1) depende de parâmetros auxiliares. Seja então $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e considere o sistema de EDOs

$$\frac{du}{dt} + F(u, \alpha) = 0, \quad (2.6)$$

onde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ combina o parâmetro de bifurcação $\lambda = \alpha_0$ com k parâmetros auxiliares. Em todo este capítulo, vamos supor que $A_\alpha = (dF)_{0,\alpha}$ satisfaz (2.2) e que $F(0, \alpha) \equiv 0$.

Iniciamos construindo um operador Φ a partir de (2.6), com a propriedade de que as soluções para $\Phi = 0$ correspondem às soluções periódicas de (2.6) com período de aproximadamente 2π . Aplicamos então a redução de Liapunov-Schmidt (ver Apêndice A) a Φ , a fim de obter uma equação reduzida que nos auxilie na tarefa de encontrar as soluções de $\Phi = 0$.

2.2.1 A definição do operador Φ

Seja $\mathcal{C}_{2\pi}$ o espaço de Banach das funções contínuas 2π -periódicas de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n , com a norma

$$\|u\| = \max_s |u(s)|. \quad (2.7)$$

Seja $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ o espaço de Banach das funções em $\mathcal{C}_{2\pi}$ que são continuamente diferenciáveis (a derivada existe em cada ponto do domínio e é contínua), com a norma

$$\|u\|_1 = \|u\| + \left\| \frac{du}{ds} \right\|. \quad (2.8)$$

Nós queremos ver o sistema (2.6) como um operador Φ definido em $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ e reduzir o problema de encontrar soluções periódicas para (2.6) ao de encontrar soluções para $\Phi = 0$. Todavia, existe um problema técnico com esta abordagem. De fato, nós precisamos considerar funções com períodos variados e o conjunto de todas as funções periódicas não é um espaço vetorial. Entretanto, podemos contornar esta dificuldade introduzindo um parâmetro extra τ que corresponde a um tempo reescalado. Mais especificamente, para $s = (1 + \tau)t$, temos que (2.6) pode ser reescrito como

$$(1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha) = 0. \quad (2.9)$$

Estamos interessados nas soluções 2π -periódicas de (2.9). Para um dado valor τ , uma solução 2π -periódica de (2.9) corresponde a uma solução periódica de (2.6) com período $\frac{2\pi}{(1+\tau)}$. As soluções periódicas de pequena amplitude de (2.6) têm períodos de aproximadamente 2π . Isso implica que $\tau \approx 0$.

Definimos $\Phi : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$ por

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = (1 + \tau) \frac{du}{ds} + \tilde{F}(u, \alpha), \quad (2.10)$$

onde $\tilde{F} : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$ é tal que $\tilde{F}(u, \alpha)(s) = F(u(s), \alpha)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, a equação $\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$ caracteriza as soluções 2π -periódicas de (2.9). Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $\tau \in \mathbb{R}$, temos

$$\Phi(0, \alpha, \tau) \equiv 0,$$

uma vez que $F(0, \alpha) \equiv 0$.

Observamos agora a existência de simetria na equação (2.10), um fato de fundamental importância em nosso estudo. Mais especificamente, identifique o grupo do círculo \mathbf{S}^1 com $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbf{S}^1 = \{\theta \in [0, 2\pi)\}$ é um grupo com a operação de soma módulo 2π . Considere a **ação mudança de fase** de \mathbf{S}^1 em $\mathcal{C}_{2\pi}$ definida por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{S}^1 \times \mathcal{C}_{2\pi} &\rightarrow \mathcal{C}_{2\pi} \\ (\theta, u) &\mapsto \theta u, \end{aligned}$$

onde

$$(\theta u)(s) = u(s - \theta), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Afirmamos que Φ em (2.10) comuta com esta ação de \mathbf{S}^1 . De fato, dados $u \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $\tau \in \mathbb{R}$, segue da definição de Φ que

$$\Phi(\theta u, \alpha, \tau) = (1 + \tau) \frac{d(\theta u)}{ds} + \tilde{F}(\theta u, \alpha), \quad \forall \theta \in \mathbf{S}^1.$$

Para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\tilde{F}(\theta u, \alpha)(s) = F(\theta u(s), \alpha) = F(u(s - \theta), \alpha) = \tilde{F}(u, \alpha)(s - \theta) = \theta \tilde{F}(u, \alpha)(s).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left[(1 + \tau) \frac{d(\theta u)}{ds} + \tilde{F}(\theta u, \alpha) \right] (s) &= (1 + \tau) \frac{du(s - \theta)}{ds} + \tilde{F}(\theta u, \alpha)(s) \\ &= (1 + \tau) \frac{\theta du(s)}{ds} + \theta \tilde{F}(u, \alpha)(s) \\ &= \theta \left[(1 + \tau) \frac{du}{ds} + \tilde{F}(u, \alpha) \right] (s). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\Phi(\theta u, \alpha, \tau) = \theta \Phi(u, \alpha, \tau), \quad \forall \theta \in \mathbf{S}^1, \quad (2.12)$$

como desejado. Portanto, Φ é \mathbf{S}^1 -equivariante.

2.2.2 A redução de Liapunov-Schmidt

Tendo caracterizado as soluções periódicas de (2.6) como as soluções da equação

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = 0, \quad (2.13)$$

resolvemos agora (2.13) usando a redução de Liapunov-Schmidt. A linearização de Φ em $(u, \alpha, \tau) = (0, 0, 0)$ é dada pelo operador linear $\mathcal{L} : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$,

$$\mathcal{L}u = \frac{du}{ds} + A_0 u, \quad (2.14)$$

onde A_0 é a matriz $(dF)_{0,0}$.

Seja \mathcal{L}^* o operador adjunto de \mathcal{L} com respeito ao produto interno sobre $\mathcal{C}_{2\pi}$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{v(s)^t} u(s) ds. \quad (2.15)$$

Então, $\mathcal{L}^* : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$ é dado por

$$\mathcal{L}^* \omega = -\frac{d\omega}{ds} + A_0^t \omega, \quad (2.16)$$

onde t indica transposição. De fato, sejam $u, \omega \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ quaisquer. Como estamos trabalhando com o corpo dos reais, vamos omitir a conjugação que aparece no produto interno (2.15). Temos que

$$\langle \mathcal{L}u, \omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(s)^t \frac{du(s)}{ds} ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(s)^t A_0 u(s) ds. \quad (2.17)$$

Pela técnica de integração por partes, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \omega(s)^t \frac{d\omega(s)}{ds} ds = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\omega(s)}{ds} \right)^t u(s) ds. \quad (2.18)$$

Além disso, como $\omega(s)^t A_0 u(s) \in \mathbb{R}$, $\omega(s)^t A_0 u(s) = (\omega(s)^t A_0 u(s))^t = u(s)^t A_0^t \omega(s)$. Do mesmo modo, $\left(\frac{d\omega(s)}{ds} \right)^t u(s) = u(s)^t \frac{d\omega(s)}{ds}$. Então, por (2.17) e (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, \omega \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\omega(s)}{ds} \right)^t u(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)^t A_0^t \omega(s) ds \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)^t \frac{d\omega(s)}{ds} ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)^t A_0^t \omega(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)^t \left(-\frac{d\omega(s)}{ds} + A_0^t \omega(s) \right) ds \\ &= \left\langle -\frac{d\omega}{ds} + A_0^t \omega, u \right\rangle = \left\langle u, -\frac{d\omega}{ds} + A_0^t \omega \right\rangle, \end{aligned}$$

o que implica que $\mathcal{L}^* \omega = -\frac{d\omega}{ds} + A_0^t \omega$, pela unicidade do operador adjunto.

A seguinte proposição é de fundamental importância para estabelecermos a redução de Liapunov-Schmidt.

Proposição 2.2.1. *Assuma que o sistema (2.6) satisfaz (2.2). Então,*

- (a) $\dim \ker \mathcal{L} = 2$;
- (b) *Existe uma base $\{v_1, v_2\}$ para $\ker \mathcal{L}$ com a seguinte propriedade: se identificamos $\ker \mathcal{L}$ com \mathbb{R}^2 por meio da aplicação*

$$(x, y) \mapsto xv_1 + yv_2, \quad (2.19)$$

então a ação de \mathbf{S}^1 em $\ker \mathcal{L}$ é dada por

$$\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

- (c) *Existe uma decomposição \mathbf{S}^1 -invariante de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dada por*

$$\mathcal{C}_{2\pi} = \text{Im} \mathcal{L} \oplus \ker \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

Esta decomposição induz uma decomposição de $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ dada por

$$\mathcal{C}_{2\pi}^1 = \ker \mathcal{L} \oplus M, \quad (2.22)$$

onde $M = \text{Im} \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^1$.

Demonstração:

(a) Considere o sistema linear de EDOs com coeficientes constantes

$$\mathcal{L}u = 0, \quad (2.23)$$

onde $\mathcal{L} = (d\Phi)_{0,0,0}$ é como em (2.14) e $u \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$. Note que $u \in \ker \mathcal{L}$ se, e somente se, u é uma solução de (2.23). A solução geral de (2.23) é uma soma de exponenciais, cujos expoentes são os autovalores de A_0 , multiplicadas pelos respectivos autovetores. Apenas os autovalores $\pm i$ conduzem à soluções 2π -periódicas. Seja $c \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de A_0 associado ao autovalor $-i$, ou seja,

$$A_0 c = -ic. \quad (2.24)$$

Como estamos interessados em soluções reais, temos que

$$v_1(s) = \Re(e^{is}c) \quad \text{e} \quad v_2(s) = \Im(e^{is}c) \quad (2.25)$$

formam uma base para $\ker \mathcal{L}$, uma vez que c é autovetor de $-A_0$ associado a i . Portanto $\dim \ker \mathcal{L} = 2$.

(b) Consideramos aqui a base (2.25) para $\ker \mathcal{L}$ e a ação de \mathbf{S}^1 em $\mathcal{C}_{2\pi}$ definida em (2.11). Lembramos que $\Re(z_1 z_2) = \Re(z_1)\Re(z_2) - \Im(z_1)\Im(z_2)$ e $\Im(z_1 z_2) = \Re(z_1)\Im(z_2) + \Re(z_2)\Im(z_1)$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$. Como $\ker \mathcal{L} \subset \mathcal{C}_{2\pi}$, podemos considerar a ação de \mathbf{S}^1 restrita a $\ker \mathcal{L}$ e, assim,

$$\begin{aligned} \theta v_1(s) &= v_1(s - \theta) = \Re(e^{i(s-\theta)}c) = \cos(s - \theta)\Re(c) - \sin(s - \theta)\Im(c) \\ &= \cos \theta [\cos(s)\Re(c) - \sin(s)\Im(c)] + \sin \theta [\sin(s)\Re(c) + \cos(s)\Im(c)] \\ &= \cos \theta \Re(e^{is}c) + \sin \theta \Im(e^{is}c) = \cos \theta v_1(s) + \sin \theta v_2(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta v_2(s) &= v_2(s - \theta) = \Im(e^{i(s-\theta)}c) = \cos(s - \theta)\Im(c) + \sin(s - \theta)\Re(c) \\ &= \cos \theta [\cos(s)\Im(c) + \sin(s)\Re(c)] - \sin \theta [\cos(s)\Re(c) - \sin(s)\Im(c)] \\ &= \cos \theta \Im(e^{is}c) - \sin \theta \Re(e^{is}c) = \cos \theta v_2(s) - \sin \theta v_1(s), \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Portanto, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \theta(xv_1 + yv_2) &= x\theta v_1 + y\theta v_2 \\ &= x \cos \theta v_1 + x \sin \theta v_2 + y \cos \theta v_2 - y \sin \theta v_1 \\ &= [x \cos \theta - y \sin \theta]v_1 + [x \sin \theta + y \cos \theta]v_2. \end{aligned}$$

O resultado segue identificando $\ker \mathcal{L}$ com \mathbb{R}^2 conforme (2.19).

(c) Seja \mathcal{L}^* como em (2.16). Primeiramente, vamos construir uma base para $\ker \mathcal{L}^*$. Temos que $w \in \ker \mathcal{L}^*$ se, e somente se, $\frac{dw}{ds} = A_0^t w$. Como os autovalores de A_0 e A_0^t são os mesmos, a hipótese (2.2) vale para A_0^t . Seja então $d \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de A_0^t associado ao autovalor i , ou seja,

$$A_0^t d = id \quad (2.26)$$

e sejam

$$v_1^*(s) = \Re(e^{is}d) \quad \text{e} \quad v_2^*(s) = \Im(e^{is}d). \quad (2.27)$$

Então, por meio dos mesmos argumentos utilizados para encontrar uma base de $\ker \mathcal{L}$, concluímos que $\{v_1^*, v_2^*\}$ forma uma base para $\ker \mathcal{L}^*$.

É possível normalizar c em (2.24) e d em (2.26) de modo que

$$d^t c = 0 \quad \text{e} \quad \bar{d}^t c = \bar{c}^t c = 2. \quad (2.28)$$

De fato, seja a um autovetor qualquer de A_0^t e seja $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $A_0^t a = \mu a$. Então

$$-ia^t c = a^t(-ic) = a^t(A_0 c) = (A_0^t a)^t c = (\mu a)^t c = \mu a^t c. \quad (2.29)$$

Desta maneira, $a^t c = 0$ se $\mu \neq -i$. Então, como d é um autovetor associado ao autovalor i , $d^t c = 0$. Afirmamos agora que $\bar{d}^t c \neq 0$. De fato, se $\bar{d}^t c = 0$, então $\sum_{i=1}^n c_i \bar{d}_i = 0$, onde c_i e d_i são as entradas das matrizes colunas c e d , respectivamente. Logo, c é ortogonal a \bar{d} , que é um autovetor de A_0^t associado ao autovalor $-i$. Por (2.29), c também é ortogonal a todos os autovetores de A_0^t associados aos autovalores diferentes de $-i$. Assim, c é ortogonal a todos os autovetores de A_0^t , o que implica que c é o vetor nulo. Mas isto é uma contradição, pois c é autovetor de A_0 . Portanto, $\bar{d}^t c \neq 0$ e então podemos redimensionar d tal que $\bar{d}^t c = 2$. Com um raciocínio análogo, podemos escolher c em (2.24) tal que $\bar{c}^t c = 2$.

Usando (2.28) e substituindo (2.25) e (2.27) em (2.15), obtemos as fórmulas

$$\langle v_j^*, v_k^* \rangle = \frac{1}{2} \bar{d}^t d \delta_{jk} \quad \text{e} \quad \langle v_j^*, v_k \rangle = \langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}, \quad (2.30)$$

onde $j, k \in \{1, 2\}$ e

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Verificamos agora a validade da decomposição (2.21). Por [6, Proposição A.2.], $\mathcal{L} : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$ é um operador Fredholm de índice nulo (veja Apêndice A, Definições 1.0.1 e 1.0.2). Pela Proposição 1.0.3 do Apêndice A, existe um subespaço fechado N de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tal que

$$\mathcal{C}_{2\pi} = N \oplus \text{Im} \mathcal{L}.$$

Além disso, $\dim \ker \mathcal{L} = \text{codim Im} \mathcal{L}$, ou seja, $\ker \mathcal{L}$ tem a dimensão do subespaço complementar N . Como $\ker \mathcal{L} \subset \mathcal{C}_{2\pi}$, é suficiente mostrar que

$$\text{Im} \mathcal{L} \cap \ker \mathcal{L} = \{0\}.$$

Segue de [15, VII, (1.4)] que $\text{Im} \mathcal{L} = (\ker \mathcal{L}^*)^\perp$. Seja $v \in \text{Im} \mathcal{L} \cap \ker \mathcal{L}$. Como $v \in \ker \mathcal{L}$, podemos escrever $v = xv_1 + yv_2$. Além disso, $v \in \text{Im} \mathcal{L} = (\ker \mathcal{L}^*)^\perp$, ou seja, $\langle v, v_j^* \rangle = 0$, para $j = 1, 2$. Por (2.30), concluímos que $x = y = 0$, implicando que $v = 0$. Isto verifica (2.21). Como $\mathcal{C}_{2\pi}^1 \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ e $\ker \mathcal{L} \subset \mathcal{C}_{2\pi}^1$, a decomposição (2.22) segue diretamente de (2.21), onde $M = \text{Im} \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^1$.

Resta mostrar que $\ker \mathcal{L}$ e $\text{Im} \mathcal{L}$ são \mathbf{S}^1 -invariantes. De fato, como Φ é \mathbf{S}^1 -equivariante, obtemos de (2.12) que

$$(d\Phi)_{\theta u, \alpha, \tau} \theta = \theta (d\Phi)_{u, \alpha, \tau},$$

para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$. Logo, $\mathcal{L} = (d\Phi)_{0,0,0}$ comuta com a ação de \mathbf{S}^1 em $\mathcal{C}_{2\pi}$. Se $v \in \ker \mathcal{L}$, então

$$\mathcal{L}(\theta v) = \theta \mathcal{L}(v) = 0, \quad \forall \theta \in \mathbf{S}^1$$

e, portanto, $\theta v \in \ker \mathcal{L}$, mostrando que $\ker \mathcal{L}$ é \mathbf{S}^1 -invariante. Do mesmo modo, se $w \in \text{Im} \mathcal{L}$, então $w = \mathcal{L}(v)$ para algum $v \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$. Assim,

$$\theta w = \theta \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(\theta v) \in \text{Im} \mathcal{L},$$

implicando que $\text{Im} \mathcal{L}$ é \mathbf{S}^1 -invariante. \square

Vamos agora usar a Proposição 2.2.1 para estabelecer a redução de Liapunov-Schmidt na resolução de (2.13). Para a discussão abaixo, nos referimos aos 5 passos descritos no Apêndice A. Lembramos que o operador $\mathcal{L} = (d\Phi)_{0,0,0}$ é como em (2.14).

Aplicando a redução de Liapunov-Schmidt

1º Passo: Para $\mathcal{X} = \mathcal{C}_{2\pi}^1$ e $\mathcal{Y} = \mathcal{C}_{2\pi}$, escolhemos N e M de acordo com as decomposições (2.21) e (2.22), isto é, $N = \ker \mathcal{L}$ e $M = \text{Im} \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^1$.

2º Passo: Decompomos $\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$ no par de equações:

$$(a) E\Phi(u, \alpha, \tau) = 0 \quad e \quad (b) (I - E)\Phi(u, \alpha, \tau) = 0,$$

onde $E : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \text{Im} \mathcal{L}$ é a projeção associada à decomposição (2.21), com $\ker E = \ker \mathcal{L}$.

3º Passo: Tendo em vista a decomposição (2.22), escrevemos $u = v + w \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$, onde $v \in \ker \mathcal{L}$ e $w \in M$. Aplicamos o Teorema da Função Implícita para resolver $E\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$ para w como uma função de v , α e τ . Obtemos então uma aplicação $W : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de modo que

$$E\Phi(v + W(v, \alpha, \tau), \alpha, \tau) = 0.$$

4º Passo: Definimos a aplicação reduzida $\phi : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \ker \mathcal{L}$ como

$$\phi(v, \alpha, \tau) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha, \tau), \alpha, \tau).$$

5º Passo: Tomando as bases $\{v_1, v_2\}$ para $\ker \mathcal{L}$ e $\{v_1^*, v_2^*\}$ para $\ker \mathcal{L}^*$ obtidas em (2.25) e (2.27), respectivamente, definimos as funções $g_j : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_j(x, y, \alpha, \tau) = \langle v_j^*, \phi(xv_1 + yv_2, \alpha, \tau) \rangle, \quad (2.31)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $j = 1, 2$.

Note que $\Phi \equiv 0$ se, e somente se, $\phi \equiv 0$. Além disso, g_1 e g_2 são as funções coordenadas da aplicação reduzida ϕ nas coordenadas de $\ker \mathcal{L}$ dadas em (2.19). Como $M = \text{Im} \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^1$ e $N = \ker \mathcal{L}$ são subespaços \mathbf{S}^1 -invariantes, concluímos da Proposição 1.0.4 (Apêndice A) que ϕ comuta com a ação de \mathbf{S}^1 em $\ker \mathcal{L}$. Portanto,

$$\phi(\theta v, \alpha, \tau) = \theta \phi(v, \alpha, \tau), \quad (2.32)$$

para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$, $(v, \alpha, \tau) \in \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}$, onde a ação de \mathbf{S}^1 em $\ker \mathcal{L}$ é dada por (2.20).

Nosso próximo passo é mostrar que ϕ tem a forma (2.34), o que é uma consequência de (2.32). Para isto, precisamos do seguinte resultado:

Lema 2.2.2. *Seja $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave que comuta com a ação de \mathbf{S}^1 em \mathbb{R}^2 dada por (2.20). Então existem funções suaves $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\tilde{\phi}(x, y) = p(x^2 + y^2)(x, y) + q(x^2 + y^2)(-y, x). \quad (2.33)$$

Demonstração: Começamos escrevendo $\tilde{\phi}$ como

$$\tilde{\phi}(x, y) = (\tilde{\phi}_1(x, y), \tilde{\phi}_2(x, y)),$$

onde $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Como $\tilde{\phi}$ comuta com a ação de \mathbf{S}^1 , em particular $\tilde{\phi}$ comuta com a rotação de ângulo π , cuja ação em \mathbb{R}^2 é dada por $\pi(x, y) = (-x, -y)$. Logo,

$$\tilde{\phi}(-x, -y) = \tilde{\phi}(\pi(x, y)) = \pi \tilde{\phi}(x, y) = (-\tilde{\phi}_1(x, y), -\tilde{\phi}_2(x, y)).$$

Em particular, se $x = s$ e $y = 0$, então $\tilde{\phi}(-s, 0) = (-\tilde{\phi}_1(s, 0), -\tilde{\phi}_2(s, 0))$. Dessa forma, $\tilde{\phi}_j(-s, 0) = -\tilde{\phi}_j(s, 0)$, para $j = 1, 2$. Definimos $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(s) = \tilde{\phi}_1(s, 0)$ e $g(s) = \tilde{\phi}_2(s, 0)$. Então, $f(-s) = -f(s)$ e $g(-s) = -g(s)$, implicando que f e g são funções ímpares em s . Pelo Exemplo 1.3.8, existem funções suaves $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(s) = p(s^2)s$ e $g(s) = q(s^2)s$ e, portanto,

$$\tilde{\phi}_1(s, 0) = p(s^2)s \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}_2(s, 0) = q(s^2)s.$$

Agora, dado um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escolhemos um ângulo θ tal que $\theta(s, 0) = (x, y)$, onde $s^2 = x^2 + y^2$. Note que esta escolha é possível pois (x, y) pertence à circunferência de raio s centrada na origem. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, y) &= \tilde{\phi}(\theta(s, 0)) = \theta \tilde{\phi}(s, 0) = \theta[(p(s^2)s, 0) + (0, q(s^2)s)] \\ &= p(s^2)\theta(s, 0) + q(s^2)\theta(0, s) \\ &= p(x^2 + y^2)\theta(s, 0) + q(x^2 + y^2)\theta(0, s). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\theta(0, s) = (-y, x)$. De fato, temos que $\theta(0, s)$ e $\theta(s, 0)$ são perpendiculares, pois $(0, s)$ e $(s, 0)$ são perpendiculares e a rotação preserva ângulos. Além disso,

$\theta(0, s)$ tem comprimento igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Logo, $\theta(0, s) = (-y, x)$ ou $\theta(0, s) = (y, -x)$. Analisando (x, y) em cada quadrante e checando o sinal, obtemos $\theta(0, s) = (-y, x)$. Portanto,

$$\tilde{\phi}(x, y) = p(x^2 + y^2)(x, y) + q(x^2 + y^2)(-y, x).$$

□

Proposição 2.2.3. *Nas coordenadas de $\ker \mathcal{L}$ definidas em (2.19), a aplicação reduzida ϕ tem a forma*

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(x, y) + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(-y, x), \quad (2.34)$$

onde $p, q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são germes suaves satisfazendo $q_\tau(0, 0, \tau) = -1$ e $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = p_\tau(0, 0, \tau) = 0$.

Demonstração: A diferença entre as igualdades (2.33) e (2.34) é a presença na aplicação ϕ de parâmetros auxiliares. Entretanto, não há dificuldades em estender aqui o Lema 2.2.2, uma vez que \mathbf{S}^1 não age nos parâmetros α e τ . Mais precisamente, escrevendo $\phi(x, y, \alpha, \tau) = (\phi_1(x, y, \alpha, \tau), \phi_2(x, y, \alpha, \tau))$, temos que

$$\phi(-x, -y, \alpha, \tau) = \phi(\pi(x, y), \alpha, \tau) = \pi\phi(x, y, \alpha, \tau) = (-\phi_1(x, y, \alpha, \tau), -\phi_2(x, y, \alpha, \tau)),$$

onde $(x, y) \in \ker \mathcal{L}$. Para $x = s$ e $y = 0$, temos $\phi_j(-s, 0, \alpha, \tau) = -\phi_j(s, 0, \alpha, \tau)$, para todo $j \in \{1, 2\}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $\tau \in \mathbb{R}$, definimos $f_{\alpha, \tau}(s) = \phi_1(s, 0, \alpha, \tau)$ e $h_{\alpha, \tau}(s) = \phi_2(s, 0, \alpha, \tau)$, para as quais $f_{\alpha, \tau}(-s) = -f_{\alpha, \tau}(s)$ e $h_{\alpha, \tau}(-s) = -h_{\alpha, \tau}(s)$. Portanto, $f_{\alpha, \tau}$ e $h_{\alpha, \tau}$ são funções ímpares em s , de modo que existem germes suaves $p, q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\phi_1(s, 0, \alpha, \tau) = f_{\alpha, \tau}(s) = p(s^2, \alpha, \tau)s \quad \text{e} \quad \phi_2(s, 0, \alpha, \tau) = h_{\alpha, \tau}(s) = q(s^2, \alpha, \tau)s.$$

De forma análoga ao que fizemos no lema anterior, para cada $(x, y) \in \ker \mathcal{L}$, escolhemos um ângulo θ tal que $\theta(s, 0) = (x, y)$, onde $s^2 = x^2 + y^2$, a fim de obter

$$\begin{aligned} \phi(x, y, \alpha, \tau) &= \phi(\theta(s, 0), \alpha, \tau) = \theta\phi(s, 0, \alpha, \tau) \\ &= \theta(p(s^2, \alpha, \tau)s, q(s^2, \alpha, \tau)s) \\ &= p(s^2, \alpha, \tau)\theta(s, 0) + q(s^2, \alpha, \tau)\theta(0, s) \\ &= p(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(x, y) + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(-y, x). \end{aligned}$$

Resta mostrar que $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = p_\tau(0, 0, \tau) = 0$ e $q_\tau(0, 0, \tau) = -1$. Para isto, usamos as fórmulas apresentadas em [15, VII, (1.14)], onde os autores calculam as derivadas das funções g_1 e g_2 definidas em (2.31) a partir das derivadas da aplicação original Φ . Então, de [15, VII, (1.14)] itens (a) e (e) temos que

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0) &= \frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = 0 \\ \text{ii)} \quad \frac{\partial^2 g_j}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau) &= \langle v_j^*, (d\Phi_\tau)_{(0,0,\tau)}v_1 - (d^2\Phi)_{(0,0,\tau)}(v_1, \mathcal{L}^{-1}E\Phi_\tau(0, 0, \tau)) \rangle, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $j \in \{1, 2\}$, v_1 é o primeiro vetor da base de $\ker \mathcal{L}$, $\{v_1^*, v_2^*\}$ é base de $\ker \mathcal{L}^*$,

$$(d\Phi_\tau)_{(u,\alpha,\tau)}v_1 = \left. \frac{d\Phi_\tau(u + tv_1, \alpha, \tau)}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.36)$$

e

$$(d^2\Phi)_{(u,\alpha,\tau)}(w_1, w_2) = \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \Phi(u + t_1w_1 + t_2w_2, \alpha, \tau) \right|_{t_1=t_2=0},$$

com $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$. Como g_1 e g_2 são as funções coordenadas de ϕ , temos por (2.34) que

$$g_1(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)x \quad \text{e} \quad g_2(x, 0, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau)x, \quad (2.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, 0, \alpha, \tau) &= 2p_x(x^2, \alpha, \tau)x^2 + p(x^2, \alpha, \tau), \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, 0, \alpha, \tau) &= 2q_x(x^2, \alpha, \tau)x^2 + q(x^2, \alpha, \tau). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = p(0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = q(0, 0, 0).$$

Do item i) de (2.35), concluímos que $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0$. Ainda precisamos mostrar que $p_\tau(0, 0, \tau) = 0$ e $q_\tau(0, 0, \tau) = -1$. De (2.37), temos que

$$p_\tau(0, 0, \tau) = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau) \quad \text{e} \quad q_\tau(0, 0, \tau) = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau). \quad (2.38)$$

Por (2.10), temos $\Phi_\tau(u, \alpha, \tau) = \frac{du}{ds}$. Assim, $\Phi_\tau(0, 0, \tau) = 0$, ou seja, $\mathcal{L}^{-1}E\Phi_\tau(0, 0, \tau) = 0$, o que implica que $(d^2\Phi)_{(0,0,\tau)}(v_1, \mathcal{L}^{-1}E\Phi_\tau(0, 0, \tau)) = 0$. Portanto o item ii) de (2.35) torna-se

$$\frac{\partial^2 g_j}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau) = \langle v_j^*, (d\Phi_\tau)_{(0,0,\tau)}v_1 \rangle. \quad (2.39)$$

Além disso, temos $(d\Phi_\tau)_{(0,0,\tau)}v_1 = \frac{dv_1}{ds}$. Afirmamos que

$$(d\Phi_\tau)_{(0,0,\tau)}v_1 = -v_2. \quad (2.40)$$

De fato, considerando v_1 e v_2 como em (2.25) e tomando $c = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$v_1(s) = a \cos s - b \sin s \quad \text{e} \quad v_2(s) = a \sin s + b \cos s,$$

donde

$$\frac{dv_1}{ds} = -(a \sin s + b \cos s) = -v_2,$$

o que prova a afirmação. Substituindo (2.40) em (2.39) e usando (2.30), obtemos

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau) = \langle v_1^*, -v_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau) = \langle v_2^*, -v_2 \rangle = -1.$$

Portanto, por (2.38) concluímos que $p_\tau(0, 0, \tau) = 0$ e $q_\tau(0, 0, \tau) = -1$. \square

Estamos aptos agora a provar o resultado principal desta seção:

Teorema 2.2.4. *Suponha que o sistema (2.6) satisfaz a hipótese (2.2). Então existe um germe suave $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma*

$$g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x,$$

com $r(0, 0) = 0$, tal que localmente soluções para $g(x, \alpha) = 0$ com $x \geq 0$ estão em correspondência biunívoca com órbitas de soluções periódicas de pequena amplitude para o sistema (2.6) com período próximo a 2π .

Demonstração: Considere ϕ como em (2.34). Então, $u = (x, y) \in \ker \mathcal{L}$ é uma solução para $\phi \equiv 0$ se, e somente se, uma das seguintes relações vale:

$$(a) x = y = 0, \quad (b) p \equiv q \equiv 0. \quad (2.41)$$

Em (2.41)(a) obtemos a solução trivial $u = 0$, enquanto que em (2.41)(b) obtemos as soluções 2π -periódicas do sistema (2.9). Queremos eliminar a redundância das soluções periódicas quando associadas à ação de \mathbf{S}^1 . Portanto, assumimos $y = 0$ e $x \geq 0$, visto que qualquer vetor pode ser expresso nesta forma por meio de uma rotação adequada do plano. Diante destas condições, $\phi \equiv 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $p(x^2, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, podemos resolver a equação $q(x^2, \alpha, \tau) = 0$ perto da origem para $\tau = \tau(x^2, \alpha)$, uma vez que $q(0, 0, 0) = 0$ e $q_\tau(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Definimos agora $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha)) \quad \text{e} \quad g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x, \quad (2.42)$$

onde $r(0, 0) = 0$. Então a equação

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = 0 \quad (2.43)$$

tem soluções periódicas com $x^2 + y^2 > 0$ apenas se $\tau = \tau(x^2 + y^2, \alpha)$. Além disso, todas as soluções de (2.43) podem ser obtidas de uma solução de

$$g(x, \alpha) = p(x^2, \alpha, \tau(x^2, \alpha))x = 0,$$

com $x \geq 0$, por uma rotação apropriada. Uma vez que as soluções de (2.43) estão localmente em correspondência biunívoca com as soluções periódicas de (2.6), o resultado está provado. \square

2.3 O Teorema de Hopf Padrão

Nesta seção, nós discutimos sobre a existência de soluções periódicas para o sistema de EDOs (2.6). Nosso objetivo aqui é provar o Teorema 2.3.2, que fornece condições suficientes para que exista uma família de órbitas periódicas para (2.6). Relembramos

que $\alpha = (\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, onde λ é o parâmetro de bifurcação e também assumimos que $A_\alpha = (dF)_{0,\alpha}$ têm autovalores simples da forma $\Sigma(\alpha) = \sigma(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ que variam suavemente com α e satisfazem $\sigma(0) = 0$ e $\omega(0) = -1$. Começamos com o seguinte resultado:

Proposição 2.3.1. *Considere a função $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (2.42). Então, $r_\lambda(0, 0) = \sigma_\lambda(0)$.*

Demonstração: Aplicando a regra da cadeia na igualdade $r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha))$, encontramos

$$r_\lambda(z, \alpha) = p_\lambda(z, \alpha, \tau(z, \alpha)) + p_\tau(z, \alpha, \tau(z, \alpha))\tau_\lambda(z, \alpha),$$

onde $r_\lambda(0, 0) = p_\lambda(0, 0, 0) + p_\tau(0, 0, 0)\tau_\lambda(0, 0)$. Uma vez que $p_\tau(0, 0, \tau) = 0$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, temos

$$r_\lambda(0, 0) = p_\lambda(0, 0, 0).$$

Relembramos de (2.37) que

$$p(x^2, \alpha, \tau)x = g_1(x, 0, \alpha, \tau), \quad (2.44)$$

onde g_1 é definida em (2.31). Diferenciando (2.44) com respeito a λ e depois com respeito a x , temos

$$r_\lambda(0, 0) = p_\lambda(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \lambda}(0, 0, 0, 0).$$

Do item (e) de [15, VII, (1.14)] segue que

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \lambda}(0, 0, 0, 0) = \langle v_1^*, (d\Phi_\lambda)_{(0,0,0)}v_1 - (d^2\Phi)_{(0,0,0)}(v_1, \mathcal{L}^{-1}E\Phi_\lambda(0, 0, 0)) \rangle. \quad (2.45)$$

Da definição de Φ em (2.10), temos que $\Phi_\lambda(u, \alpha, \tau) = \tilde{F}_\lambda(u, \alpha)$, onde $\tilde{F}(u, \alpha)(s) = F(u(s), \alpha)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Em particular, $\Phi_\lambda(0, \alpha, \tau) = 0$ e $(d\Phi_\lambda)_{(0,0,0)} = A_\lambda(0)$, uma vez que $F(0, \alpha) \equiv 0$ e $(d\tilde{F}_\lambda)_{0,0} = A_\lambda(0)$, respectivamente. Aqui, $A_\lambda(0)$ denota a derivada de A_α com relação a λ em $\alpha = 0$. Assim, (2.45) torna-se

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \lambda}(0, 0, 0, 0) = \langle v_1^*, A_\lambda(0)v_1 \rangle. \quad (2.46)$$

Agora, de (2.25) e (2.27), temos

$$v_1 = \frac{1}{2}(e^{is}c + e^{-is}\bar{c}) \quad \text{e} \quad v_1^* = \frac{1}{2}(e^{is}d + e^{-is}\bar{d}), \quad (2.47)$$

onde c e d são os autovetores de A_0 e A_0^t considerados em (2.24) e (2.26), respectivamente, tais que (2.28) é válida. Substituindo (2.47) em (2.46) e usando (2.15), obtemos

$$r_\lambda(0, 0) = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \lambda}(0, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}\Re(\bar{d}^t A_\lambda(0)c). \quad (2.48)$$

Para verificar que $r_\lambda(0, 0) = \sigma_\lambda(0)$, considere $\Sigma(\alpha) = \sigma(\alpha) - i\omega(\alpha)$ o autovalor de A_α e seja $c(\alpha)$ o autovetor associado tal que $c(0) = c$. Desta forma,

$$A_\alpha c(\alpha) = \Sigma(\alpha)c(\alpha). \quad (2.49)$$

Multiplicando (2.49) por \bar{d}^t , diferenciando com respeito à λ e calculando em $\alpha = 0$, obtemos

$$\bar{d}^t A_\lambda(0)c + \bar{d}^t A_0 c_\lambda = \Sigma_\lambda(0)\bar{d}^t c + \Sigma(0)\bar{d}^t c_\lambda. \quad (2.50)$$

Agora, observe que

$$\bar{d}^t A_0 c_\lambda = (\overline{A_0^t d})^t c_\lambda = (\overline{id})^t c_\lambda = -i\bar{d}^t c_\lambda = \Sigma(0)\bar{d}^t c_\lambda,$$

uma vez que $A_0^t d = id$ e $\Sigma(0) = -i$. Então, (2.50) torna-se

$$\bar{d}^t A_\lambda(0)c = \Sigma_\lambda(0)\bar{d}^t c.$$

Assim sendo, usando que $\bar{d}^t c = 2$, obtemos de (2.48) que

$$\begin{aligned} r_\lambda(0, 0) &= \frac{1}{2}\Re(\bar{d}^t A_\lambda(0)c) = \frac{1}{2}\Re(\Sigma_\lambda(0)\bar{d}^t c) \\ &= \frac{1}{2}\Re(2(\sigma_\lambda(0) + i\omega_\lambda(0))) = \sigma_\lambda(0), \end{aligned}$$

como desejado. \square

Teorema 2.3.2 (Teorema de Hopf Padrão). *Seja o sistema de EDOs (2.6) satisfazendo as condições (2.2) e*

$$\sigma_\lambda(0) \neq 0. \quad (2.51)$$

Então existe uma família a $(k+1)$ -parâmetros de órbitas periódicas para (2.6) bifurcando da solução de equilíbrio $u = 0$ em $\alpha = 0$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.4, podemos reduzir o estudo de encontrar órbitas periódicas para (2.6) ao de resolver o problema escalar

$$g(x, \alpha) = 0, \quad (2.52)$$

uma vez que (2.2) é satisfeito. Como $g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x$, para alguma função r tal que $r(0, 0) = 0$, as soluções não triviais de (2.52) podem ser obtidas resolvendo

$$r(x^2, \alpha) = 0. \quad (2.53)$$

Como $\sigma_\lambda(0) \neq 0$, segue pela Proposição 2.3.1 que $r_\lambda(0, 0) \neq 0$, onde $\lambda = \alpha_0$ é o parâmetro de bifurcação. Como $r(0, 0) = 0$, pelo Teorema da Função Implícita, podemos resolver (2.53) para λ como uma função de x^2 e $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, ou seja, $\lambda = \mu(x^2, \alpha')$ para alguma função $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Em outras palavras, se $r_\lambda(0, 0) \neq 0$, então (2.6) tem uma família a $(k+1)$ -parâmetros de soluções periódicas que bifurcam da solução trivial, como desejado. \square

Bifurcação de Hopf com simetria

A teoria de bifurcação com simetria se utiliza da combinação de métodos de diversas áreas da matemática, como a teoria de grupos e a teoria de singularidades. Tal prática é necessária, uma vez que o estudo de problemas de bifurcação com simetria apresenta certas dificuldades, já que simetrias forçam a ocorrência de autovalores com multiplicidade alta. Entretanto, as técnicas usadas para simplificar a análise de problemas de bifurcação com simetria exploram as mesmas simetrias que causam a complicação inicial.

No caso de bifurcação de Hopf sem simetria apresentado no Capítulo 2, o fenômeno da ocorrência de órbitas periódicas foi reduzido, pelo método de Liapunov-Schmidt, a um problema de bifurcação de pontos de equilíbrio. Neste capítulo, nosso objetivo é estudar bifurcação de Hopf em famílias de equações diferenciais equivariantes com a condição de que $\pm i$ são autovalores da linearização em um ponto fixo. Nosso método aqui também é baseado na redução de Liapunov-Schmidt e é uma versão equivariante da abordagem apresentada no Capítulo 2.

Este capítulo é dividido como segue: Na Seção 3.1, nós provamos o Lema dos Ramos Equivariantes, um resultado útil no estudo de problemas de bifurcação de pontos de equilíbrio com simetria, uma vez que nos fornece uma propriedade analítica (a existência de um ramo de soluções com certas propriedades simétricas), desde que garantimos uma propriedade algébrica (a existência de subgrupos de isotropia com subespaços de ponto fixo unidimensionais).

Na Seção 3.2, encontramos condições necessárias para a ocorrência de autovalores puramente imaginários em equações diferenciais equivariantes e mostramos que, genericamente, o autoespaço imaginário satisfaz uma destas condições. Além disso, apresentamos nesta seção uma versão simples do Teorema de Hopf com simetria, o Teorema 3.2.8, com condições análogas às do Teorema de Hopf Padrão. Este resultado é interessante, porém identifica somente as soluções periódicas com simetrias espaciais.

Na Seção 3.3, nós introduzimos as simetrias espaço-temporais em termos de uma ação do grupo do círculo \mathbf{S}^1 . Nesta seção, nós apresentamos duas ações de \mathbf{S}^1 que são necessárias para a prova da versão equivariante do Teorema de Hopf Padrão apresentada

na Seção 3.4.

A Seção 3.4 é a mais importante do capítulo, uma vez que aborda o resultado principal deste trabalho, o Teorema de Hopf Equivariante. Este teorema é um resultado de existência e unicidade de órbitas periódicas e generaliza o Teorema 3.2.8 para subgrupos $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ com $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) = 2$.

As seções 3.5 e 3.6 exigem uma certa familiaridade com técnicas da teoria de grupos. Na Seção 3.5, nós mostramos que todo subgrupo de isotropia próprio Σ de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ pode ser escrito como um subgrupo “twisted”, cuja definição envolve a existência de um homomorfismo $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$, onde H é um subgrupo de Γ . Na Seção 3.6, nós provamos dois resultados que estabelecem condições para que o subespaço de ponto fixo $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ seja bidimensional, no caso em que \mathbb{R}^n é Γ -simples do tipo $V \oplus V$.

Daqui em diante, Γ é um grupo de Lie compacto agindo linearmente em \mathbb{R}^n . Consideramos um sistema de EDOs

$$\frac{du}{dt} + F(u, \lambda) = 0, \quad (3.1)$$

onde $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de bifurcação e $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o germe de uma aplicação suave Γ -equivariante, ou seja,

$$F(\gamma u, \lambda) = \gamma F(u, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, u \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Note que Γ age trivialmente no espaço \mathbb{R} dos parâmetros. Soluções de equilíbrio para (3.1) satisfazem $\frac{du}{dt} = 0$, isto é,

$$F(u, \lambda) = 0. \quad (3.3)$$

Assumimos que $F(0, \lambda) \equiv 0$, ou seja, a solução trivial $u = 0$ é um ponto de equilíbrio de (3.1). Nós notamos que como F comuta com Γ , se $u(t)$ é uma solução para (3.1), então $\gamma u(t)$ também é, para todo $\gamma \in \Gamma$. Existe uma consequência semelhante para soluções periódicas, a saber, se $u(t)$ é uma solução T -periódica de (3.1), então $\gamma u(t)$ também é, para todo $\gamma \in \Gamma$. Nestes casos, dizemos que γ é uma simetria de $u(t)$.

3.1 O Lema dos Ramos Equivariantes

O principal resultado desta seção é o Teorema 3.1.3, também conhecido como Lema dos Ramos Equivariantes. Com certas condições sobre um subgrupo Σ de Γ , ele afirma que existe um único ramo de soluções para (3.3) com subgrupo de isotropia Σ . Começamos com a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Um problema de bifurcação Γ -equivariante na origem é um germe Γ -equivariante $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $F(0, 0) = 0$ e $(dF)_{0,0} = 0$.*

Na definição acima exigimos que $(dF)_{0,0} = 0$. Se $(dF)_{0,0}$ é não nula, então podemos usar a redução de Liapunov-Schmidt com simetria (veja Apêndice A) para reduzir F ao caso onde o jacobiano se anula.

O próximo resultado, cuja prova é omitida aqui, identifica uma classe de problemas de bifurcação com simetria.

Proposição 3.1.2. *Seja $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma família a um parâmetro de aplicações Γ -equivariantes com $F(0,0) = 0$. Seja $W = \ker(dF)_{0,0}$. Então, genericamente, a ação de Γ em W é absolutamente irredutível.*

Demonstração: Veja [17, XIII, Proposition 3.2]. □

Assim, para problemas de bifurcação Γ -equivariantes, genericamente a ação de Γ em \mathbb{R}^n é absolutamente irredutível e, portanto, irredutível. Quando $\Gamma = \{1_\Gamma\}$, todo subespaço de \mathbb{R}^n é Γ -invariante. Dessa forma, se $(dF)_{0,0} \neq 0$, pela irredutibilidade da ação de Γ em $\ker(dF)_{0,0}$ temos $\dim \ker(dF)_{0,0} = 1$. Portanto, quando não existem simetrias, genericamente esperamos autovalores simples.

Usamos a Proposição 3.1.2 da seguinte forma: se F é um problema de bifurcação Γ -equivariante, aplicamos a regra da cadeia na igualdade $F(\gamma u, \lambda) = \gamma F(u, \lambda)$ a fim de obter

$$(dF)_{0,\lambda} \gamma = \gamma (dF)_{0,\lambda},$$

que é válido para todo $\gamma \in \Gamma$. A irredutibilidade absoluta de Γ implica que as únicas matrizes que comutam com Γ são as múltiplas escalares da identidade. Desta forma, $(dF)_{0,\lambda} = c(\lambda)I_n$. Como $(dF)_{0,0} = 0$, temos $c(0) = 0$. Assumimos também a hipótese

$$c'(0) \neq 0. \tag{3.4}$$

Enunciamos agora o Lema dos Ramos Equivariantes, que apesar de ter uma prova simples, faz parte da base de muitos resultados em bifurcação de pontos de equilíbrio com simetria.

Teorema 3.1.3. *(Lema dos Ramos Equivariantes) Suponha que Γ age absolutamente irredutivelmente em \mathbb{R}^n e seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um problema de bifurcação Γ -equivariante satisfazendo (3.4). Se Σ é um subgrupo de isotropia de Γ satisfazendo*

$$\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1, \tag{3.5}$$

então existe um único ramo suave de soluções para (3.3) tal que o subgrupo de isotropia de cada solução é Σ .

Observação 3.1.4. Podemos reescrever o Lema dos Ramos Equivariantes da seguinte forma: genericamente, um problema de bifurcação Γ -equivariante tem soluções correspondendo a todos os subgrupos de isotropia com subespaços de ponto fixo unidimensionais. Como Σ satisfaz (3.5), segue que Σ é um subgrupo de isotropia maximal, ou seja, não

existe um subgrupo de isotropia Δ satisfazendo $\Sigma \subsetneq \Delta \subsetneq \Gamma$. Para ver isto, suponha que Δ é um subgrupo de isotropia tal que $\Sigma \subsetneq \Delta \subseteq \Gamma$. Então $\text{Fix}(\Delta) \subsetneq \text{Fix}(\Sigma)$, donde $\text{Fix}(\Delta) = \{0\}$. Como Δ é um subgrupo de isotropia Σ_u de algum $u \in \mathbb{R}^n$, então $\delta u = u$, para todo $\delta \in \Delta$. Portanto, $u \in \text{Fix}(\Delta) = \{0\}$, ou seja, $u = 0$. Assim, $\Delta = \Sigma_0 = \Gamma$, mostrando que Σ é maximal. Logo, o Lema dos Ramos Equivariantes nos fornece um método para encontrar soluções correspondendo a uma classe de subgrupos de isotropia maximais.

Mais geralmente, temos:

Teorema 3.1.5. *Seja Γ agindo linearmente em \mathbb{R}^n tal que*

- (a) $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$;
- (b) $\Sigma \subset \Gamma$ é um subgrupo de isotropia satisfazendo (3.5);
- (c) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um problema de bifurcação Γ -equivariante satisfazendo

$$(dF_\lambda)_{0,0}(u_0) \neq 0, \quad (3.6)$$

onde $u_0 \in \text{Fix}(\Sigma)$ é não nulo.

Então existe um único ramo suave de soluções $(tu_0, \lambda(t))$ para a equação $F(u, \lambda) = 0$.

Observação 3.1.6. Duas observações são importantes para entender porque o Teorema 3.1.3 segue do Teorema 3.1.5. Primeiro, uma ação irredutível não trivial de Γ em \mathbb{R}^n satisfaz $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$. De fato, como Γ age irredutivelmente em \mathbb{R}^n , os únicos subespaços Γ -invariantes de \mathbb{R}^n são os triviais. Agora, se $u \in \text{Fix}(\Gamma)$, então $\gamma u = u \in \text{Fix}(\Gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Logo, $\text{Fix}(\Gamma)$ é um subespaço Γ -invariante de \mathbb{R}^n e, portanto, $\text{Fix}(\Gamma) = \mathbb{R}^n$ ou $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$. Como $\Gamma \neq \{1_\Gamma\}$, segue que $\text{Fix}(\Gamma) \neq \mathbb{R}^n$. Assim, $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$.

Segundo, quando Γ age absolutamente irredutivelmente em \mathbb{R}^n , $(dF_\lambda)_{0,0}(u_0) = kc'(0)$, para alguma constante $k \neq 0$. Consequentemente, (3.4) é equivalente a (3.6). A vantagem da hipótese (3.4) sobre a (3.6) é que ela vale simultaneamente para todos os subgrupos Σ de Γ . A vantagem do Teorema 3.1.5 é que ele não exige que a ação de Γ seja irredutível em \mathbb{R}^n . Entretanto, uma outra condição de não degenerescência, a (3.6), é exigida para cada subgrupo Σ satisfazendo (3.5). Observe que, como o ramo de soluções $(tu_0, \lambda(t))$ está em $\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}$, cada solução para $t \neq 0$ tem como simetrias o subgrupo de isotropia Σ .

Demonstração do Teorema 3.1.5: Segue do Lema 1.5.4 que $F|_{\text{Fix}(\Sigma)} : \text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Fix}(\Sigma)$. Visto que $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$, temos $F(tu_0, \lambda) = h(t, \lambda)u_0$, onde $0 \neq u_0 \in \text{Fix}(\Sigma)$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pela Proposição 1.5.5, F tem uma solução trivial, uma vez que $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$. Logo, $h(0, \lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Em termos da expansão de Taylor de h , podemos escrever

$$F(tu_0, \lambda) = k(t, \lambda)tu_0, \quad (3.7)$$

para alguma função $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Derivando (3.7) com relação a t , calculando em $t = 0$ e lembrando que F é um problema de bifurcação, obtemos

$$k(0, 0)u_0 = (dF)_{0,0}u_0 = 0,$$

ou seja, $k(0, 0) = 0$. Além disso, de (3.7) também obtemos $k_\lambda(0, 0)u_0 = (dF_\lambda)(u_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, resolvemos $k(t, \lambda) = 0$ para um único $\lambda = \lambda(t)$, a fim de obter $F(tu_0, \lambda(t)) = 0$, como desejado. \square

Exemplo 3.1.7. Considere \mathbf{D}_n agindo em \mathbb{C} como em (1.9). O subgrupo de isotropia de todo ponto no eixo real é o subgrupo \mathbf{Z}_2 gerado pela reflexão κ , onde $\kappa z = \bar{z}$. Claramente, $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2) = \mathbb{R}$ e $\dim \text{Fix}(\mathbf{Z}_2) = 1$. Portanto, usando o Lema dos Ramos Equivariantes, concluímos que genericamente problemas de bifurcação \mathbf{D}_n -equivariantes possuem soluções com simetria \mathbf{Z}_2 .

3.2 Simetria em bifurcação de Hopf

Considere o sistema de EDOs (3.1), onde F satisfaz (3.2) e $F(0, \lambda) \equiv 0$. Lembramos da Definição 2.1.2 que o sistema (3.1) sofre uma bifurcação de Hopf em $\lambda = 0$ se $(dF)_{0,0}$ tem um par de autovalores puramente imaginários. Sob hipóteses adicionais de não degenerescência, esta condição garante a existência de um ramo de soluções periódicas para (3.1). No Teorema de Hopf Padrão, a hipótese de não degenerescência é que os autovalores puramente imaginários sejam simples. Entretanto, como no contexto equivariante as simetrias podem forçar a ocorrência de autovalores múltiplos, o Teorema de Hopf Padrão não se aplica diretamente neste contexto.

De um modo mais geral, em presença de simetrias podemos não obter autovalores complexos. De fato, se Γ age absolutamente irredutivelmente em \mathbb{R}^n , então $(dF)_{0,0}$ é um múltiplo da identidade e, neste caso, todos os seus autovalores são reais.

Embora as simetrias possam causar complicações na análise de uma bifurcação de Hopf, elas também simplificam tal análise na medida que impõem restrições na forma da aplicação F .

Os casos discutidos abaixo são modelos simples que servem como exemplos para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf no contexto equivariante.

Exemplo 3.2.1. 1. Considere a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definida em (1.30).

Pelo Exemplo 1.2.12, esta ação é absolutamente irredutível e então os únicos operadores lineares $\mathbf{O}(2)$ -equivariantes são os múltiplos reais do operador identidade.

Assim, para um sistema da forma (3.1), onde $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ comuta com a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$, não pode ocorrer bifurcação de Hopf, visto que todos os autovalores de $(dF)_{0,0}$ são reais.

Suponhamos agora que $\mathbf{O}(2)$ age em $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ pela ação diagonal

$$\gamma(z_1, z_2) = (\gamma z_1, \gamma z_2), \quad \forall \gamma \in \mathbf{O}(2), (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Por meio de cálculos simples, concluímos que os operadores lineares que comutam com a ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^4 são aqueles que têm a forma matricial

$$\begin{bmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se assumimos $a = d = 0$, $b = -1$ e $c = 1$, obtemos os autovalores $\pm i$ (de multiplicidade 2). Portanto, neste caso é possível ocorrer uma bifurcação de Hopf. No entanto, o Teorema de Hopf Padrão não se aplica pois os autovalores $\pm i$ não são simples.

2. Seja $\mathbf{SO}(2)$ agindo em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ como em (1.17). Vimos no Exemplo 1.2.12 que esta ação não é absolutamente irredutível. A ação da rotação $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathbf{SO}(2)$ induz a aplicação $\mathbf{SO}(2)$ -equivariante com forma matricial $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, cujos autovalores são $\pm i$. Assim, uma bifurcação de Hopf pode ocorrer para um sistema de ordem 2 com grupo de simetrias $\mathbf{SO}(2)$.

3.2.1 Condições para autovalores imaginários

Nosso objetivo nesta subseção é encontrar condições sobre a ação de Γ em \mathbb{R}^n que permita que $(dF)_{0,0}$ tenha autovalores puramente imaginários. Para isso, consideramos uma aplicação linear arbitrária $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que comuta com a ação de Γ em \mathbb{R}^n . Note que L pode ser escrita como $(dF)_{0,0}$ para alguma aplicação Γ -equivariante F . De fato, defina $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $F(u, \lambda) = L(u)$. Então, $F(\gamma u, \lambda) = L(\gamma u) = \gamma L(u) = \gamma F(u, \lambda)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $u \in \mathbb{R}^n$ e $(dF)_{0,0} = L$. Desta forma, uma bifurcação de Hopf pode ocorrer apenas quando alguma aplicação linear Γ -equivariante L tem autovalores puramente imaginários. Pelo Corolário 1.2.3, nós podemos decompor \mathbb{R}^n em uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_k. \quad (3.8)$$

Então, temos válido o seguinte resultado:

Lema 3.2.2. *Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear Γ -equivariante tendo um autovalor não real. Então, considerando a decomposição (3.8), uma das afirmações ocorre:*

- (a) *Alguma representação absolutamente irredutível de Γ ocorre no mínimo duas vezes (por Γ -isomorfismos);*
- (b) *A ação de Γ em algum V_j não é absolutamente irredutível.*

Demonstração: Suponhamos que (a) e (b) não são válidas. Logo, todos os V_j 's são absolutamente irredutíveis e são dois a dois não-isomorfos. O Teorema 1.2.17 implica que, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $L(V_j) \subset V_j$. Além disso, a irredutibilidade absoluta de V_j implica que $L|_{V_j} = \mu_j I|_{V_j}$, onde $\mu_j \in \mathbb{R}$. Assim, os autovalores de L são exatamente os

μ_j 's, $j = 1, \dots, k$, todos reais. Mas isto contraria a hipótese de que L possui um autovalor não real. Portanto, uma das condições (a) ou (b) ocorre. \square

O Lema 3.2.2 motiva a seguinte definição.

Definição 3.2.3. *Um subespaço $W \subset \mathbb{R}^n$ é dito Γ -simples se*

- (a) $W \cong V \oplus \tilde{V}$, onde V e \tilde{V} são absolutamente Γ -irreduzíveis e Γ -isomorfos; ou
- (b) W é Γ -irreduzível mas não é absolutamente Γ -irreduzível.

De agora em diante, denotamos o caso (a) da Definição 3.2.3 por $W \cong V \oplus V$, representando a soma de dois subespaços absolutamente Γ -irreduzíveis Γ -isomorfos. Além disso, usamos o termo **não-absolutamente Γ -irreduzível** para significar um subespaço que satisfaz o item (b) da Definição 3.2.3.

Exemplo 3.2.4. Considere S_3 agindo em \mathbb{C}^3 como em (1.6). Seja

$$\mathbb{C}_0^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \quad (3.9)$$

um subespaço vetorial de \mathbb{C}^3 .

Note que $\mathbb{C}_0^3 = \mathbb{R}_0^3 \oplus i\mathbb{R}_0^3$, onde \mathbb{R}_0^3 é o espaço definido em (1.20). Pelo item 2. do Exemplo 1.2.14 temos que \mathbb{R}_0^3 é absolutamente S_3 -irreduzível. Como $\mathbb{C}_0^3 \cong \mathbb{R}_0^3 \oplus \mathbb{R}_0^3$, concluímos que \mathbb{C}_0^3 é S_3 -simples.

Para os próximos resultados, também exigimos alguma notação para os autoespaços. Suponhamos que $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear e $\mu \in \mathbb{C}$. Definimos o **autoespaço** E_μ e o **autoespaço generalizado** G_μ de L associado a μ (ambos reais) como

$$E_\mu = \begin{cases} \{u \in \mathbb{R}^n; (L - \mu I_n)u = 0\} & (\mu \in \mathbb{R}) \\ \{u \in \mathbb{R}^n; (L - \mu I_n)(L - \bar{\mu} I_n)u = 0\} & (\mu \notin \mathbb{R}) \end{cases}$$

e

$$G_\mu = \begin{cases} \{u \in \mathbb{R}^n; (L - \mu I_n)^n u = 0\} & (\mu \in \mathbb{R}) \\ \{u \in \mathbb{R}^n; (L - \mu I_n)^n (L - \bar{\mu} I_n)^n u = 0\} & (\mu \notin \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Definimos também o **autoespaço imaginário** de L como a soma de todos E_μ 's para os quais μ é um imaginário puro.

Da Definição 3.2.3, podemos reenunciar o Lema 3.2.2 como: *Se L tem um autovalor puramente imaginário, então \mathbb{R}^n deve conter um subespaço Γ -invariante Γ -simples. A seguinte proposição mostra que, na situação genérica, o autoespaço imaginário é ele próprio Γ -simples.*

Proposição 3.2.5. *Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma família a um parâmetro de aplicações Γ -equivariantes e suponha que $(dF)_{0,0}$ tenha autovalores puramente imaginários $\pm i\omega$. Seja $G_{i\omega}$ o autoespaço generalizado de $(dF)_{0,0}$ associado a $i\omega$. Então, genericamente, $G_{i\omega}$ é Γ -simples. Além disso $G_{i\omega} = E_{i\omega}$.*

Demonstração: Decompomos \mathbb{R}^n como a soma de $G_{i\omega}$ e todos os autoespaços generalizados restantes:

$$\mathbb{R}^n = G_{i\omega} \oplus G_{\mu_1} \oplus \dots \oplus G_{\mu_r}.$$

Pelo Lema 3.2.2, $G_{i\omega}$ contém um subespaço Γ -invariante U da forma (a) ou (b) da Definição 3.2.3. Se $G_{i\omega} = U$, segue que $G_{i\omega}$ é Γ -simples. Caso contrário, existe um complemento Γ -invariante $W \neq \{0\}$ para U tal que $G_{i\omega} = U \oplus W$. Definimos $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a única aplicação linear tal que $M|_U \equiv 0$, $M|_{G_{\mu_i}} \equiv 0$, para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ e $M|_W \equiv I_W$. Consideramos a perturbação de F dada por $F_\epsilon(u, \lambda) = F(u, \lambda) + \epsilon M(u)$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}$. Como $(dF_\epsilon)_{0,0} = (dF)_{0,0} + \epsilon M$, os autovalores de $(dF_\epsilon)_{0,0}$ são $\pm i\omega$ em U , $\epsilon \pm i\omega$ em W e μ_i em G_{μ_i} . Assim, o autoespaço generalizado de $(dF_\epsilon)_{0,0}$ associado a $i\omega$ é U , que é Γ -simples. Então, genericamente, $G_{i\omega}$ é Γ -simples. Resta mostrar que $G_{i\omega} = E_{i\omega}$. Para isto, analisamos os possíveis subespaços Γ -invariantes de $G_{i\omega}$. Considerando $G_{i\omega}$ como um espaço vetorial complexo, temos que $G_{i\omega}$ é gerado por autovetores complexos. Logo, $G_{i\omega}$ é a parte real do autoespaço associado a $i\omega$, ou seja, $G_{i\omega} = E_{i\omega}$. \square

Como estamos focando aqui em bifurcações de Hopf, vamos assumir que todos os autovalores de $(dF)_{0,0}$ estão sobre o eixo imaginário. Além disso, assumimos que 0 não é um autovalor de $(dF)_{0,0}$. Sob certas condições, o próximo lema mostra que podemos assumir $(dF)_{0,0} = J$, onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

para $m = \frac{n}{2}$.

Lema 3.2.6. *Suponha que \mathbb{R}^n é Γ -simples e que $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação Γ -equivariante tal que $(dF)_{0,0}$ possui $\pm i$ como autovalores. Então,*

- (a) *Os autovalores de $(dF)_{0,\lambda}$ são os complexos conjugados $\sigma(\lambda) \pm i\rho(\lambda)$, cada um de multiplicidade m . Além disso, σ e ρ são funções suaves de λ ;*
- (b) *Existe uma aplicação linear invertível Γ -equivariante $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$(dF)_{0,0} = SJS^{-1}.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que \mathbb{R}^n é da forma (a) da Definição 3.2.3, ou seja, $\mathbb{R}^n = V \oplus V$, onde V é absolutamente Γ -irredutível. A ação de Γ em \mathbb{R}^n é definida diagonalmente por $\gamma(v, w) = (\gamma v, \gamma w)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $(v, w) \in V \oplus V$. Seja $L : V \oplus V \rightarrow V \oplus V$ uma aplicação linear Γ -equivariante, cuja forma matricial pode ser escrita em blocos como

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

para matrizes A , B , C e D de ordem m . Como L comuta com a ação diagonal de Γ em \mathbb{R}^n , as matrizes A , B , C e D comutam com a ação de Γ em V . Dessa forma, pela

irreduzibilidade absoluta de Γ em V , segue que

$$L = \begin{bmatrix} aI_m & bI_m \\ cI_m & dI_m \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, donde

$$L - \mu I = \begin{bmatrix} (a - \mu)I_m & bI_m \\ cI_m & (d - \mu)I_m \end{bmatrix}.$$

Então, por [24, § 53, Exercise 9], o polinômio característico de L é dado por

$$\det(L - \mu I) = [(a - \mu)(d - \mu) - bc]^m. \quad (3.12)$$

Desta forma, cada autovalor de L tem multiplicidade m , a menos que $(a - \mu)(d - \mu) - bc$ tenha duas raízes reais iguais, quando a multiplicidade do autovalor é $2m$.

Tomamos agora $L = (dF)_{0,\lambda}$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Para $\lambda = 0$, como $(dF)_{0,0}$ tem um par de autovalores puramente imaginários conjugados, cada autovalor de L tem multiplicidade m . Para $\lambda \neq 0$, os autovalores $\sigma(\lambda) \pm i\rho(\lambda)$ também têm multiplicidade m e a suavidade de σ e ρ segue de (3.12), uma vez que (3.12) é polinomial.

Para provar o item (b) quando $\mathbb{R}^n = V \oplus V$, ainda considere $(dF)_{0,0}$ na forma (3.11). Como i é autovalor de $(dF)_{0,0}$, (3.12) implica que $a + d = 0$ e $ad - bc = 1$. Se $a = 0$, então $d = 0$ e $bc = -1$. Neste caso,

$$(dF)_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & bI_m \\ -b^{-1}I_m & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, para

$$S = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -b^{-1}I_m \end{bmatrix},$$

provamos o item (b). Se $a \neq 0$, definimos

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta I_m & -\sin \theta I_m \\ \sin \theta I_m & \cos \theta I_m \end{bmatrix},$$

que tem a forma (3.11) e, portanto, comuta com Γ . Escolhemos θ tal que $\cot(2\theta) = \frac{(b+c)}{2a}$. Neste caso, como $a + d = 0$, temos

$$R_\theta (dF)_{0,0} R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (a \sin 2\theta - c \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) I_m \\ (a \sin 2\theta - b \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta) I_m & 0 \end{bmatrix}.$$

Denotando $h = a \sin 2\theta - c \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta$, segue que $h(a \sin 2\theta - b \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta) = -1$, o que mostra que $-h^{-1} = a \sin 2\theta - b \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta$. Notamos que

$$J = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -hI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & hI_m \\ -h^{-1}I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -h^{-1}I_m \end{bmatrix},$$

assim

$$S = R_\theta^{-1} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -h^{-1}I_m \end{bmatrix}$$

fornece a similaridade exigida.

Suponhamos agora que \mathbb{R}^n é não-absolutamente Γ -irreduzível como no item (b) da Definição 3.2.3. Então o conjunto \mathcal{D}_Γ formado pelos operadores lineares Γ -equivariantes é isomorfo a \mathbb{C} ou a \mathbb{H} (veja Observação 1.2.18). Além disto, a ação de \mathcal{D}_Γ em \mathbb{R}^n o torna um espaço vetorial sobre \mathcal{D}_Γ . Podemos então assumir $\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_\Gamma^k$, onde $k = \frac{n}{2}$ se $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{C}$ ou $k = \frac{n}{4}$ se $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{H}$. Ainda, $d \in \mathcal{D}_\Gamma$ age em \mathcal{D}_Γ^k pela multiplicação por coordenadas, ou seja,

$$(d, (d_1, \dots, d_k)) \mapsto (dd_1, \dots, dd_k).$$

Assim, os autovalores de d agindo em \mathcal{D}_Γ^k são aqueles de d agindo em \mathcal{D}_Γ repetidos k vezes, uma vez que a representação de d em \mathcal{D}_Γ^k é dada pela matriz

$$\eta_d = \begin{bmatrix} \rho_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_d \end{bmatrix}$$

composta por k blocos, onde ρ_d é a matriz da representação de d em \mathcal{D}_Γ . Além disso, a ação de Γ em \mathbb{R}^n é \mathcal{D}_Γ -linear, pois dados $d \in \mathcal{D}_\Gamma$ e $\gamma \in \Gamma$, temos $\gamma d = d\gamma$.

Como $(dF)_{0,\lambda}$ comuta com Γ , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos identificar $(dF)_{0,\lambda}$ com algum $d = d(\lambda) \in \mathcal{D}_\Gamma$. Note que $d(\lambda)$ varia suavemente com λ , uma vez que $(dF)_{0,\lambda}$ varia.

Vamos supor que $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{C}$. Pelo isomorfismo, podemos escrever a matriz de $d(\lambda)$ na forma

$$\begin{bmatrix} a(\lambda)I_m & -b(\lambda)I_m \\ b(\lambda)I_m & a(\lambda)I_m \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde $a(\lambda), b(\lambda) \in \mathbb{R}$. Neste caso, os autovalores de $d(\lambda)$ agindo em \mathbb{C} são $a(\lambda) \pm ib(\lambda)$, cada um com multiplicidade $m = n/2$. Isto prova a parte (a) do lema. Como os autovalores de $(dF)_{0,0}$ são $\pm i$, por (3.13) a matriz de $d(0)$ é J , provando a parte (b) do lema para este caso.

Suponhamos agora que $\mathcal{D}_\Gamma \cong \mathbb{H}$. Então, dado $d(\lambda) \in \mathcal{D}_\Gamma$, podemos associá-lo a um elemento $\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)i + \gamma(\lambda)j + \delta(\lambda)k \in \mathbb{H}$, com $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda), \delta(\lambda) \in \mathbb{R}$. Neste caso, a representação matricial de $d(\lambda) \in \mathcal{D}_\Gamma$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \alpha(\lambda) & -\beta(\lambda) & -\gamma(\lambda) & -\delta(\lambda) \\ \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & -\delta(\lambda) & \gamma(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) & \alpha(\lambda) & -\beta(\lambda) \\ \delta(\lambda) & -\gamma(\lambda) & \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{bmatrix},$$

com uma escolha adequada de base (veja [38]). Assim, os autovalores de $d(\lambda)$ agindo em \mathbb{H} são $\alpha(\lambda) \pm i\sqrt{\beta(\lambda)^2 + \gamma(\lambda)^2 + \delta(\lambda)^2}$, cada um com multiplicidade 2. Como os

autovalores de $d(\lambda)$ agindo em \mathcal{D}_Γ^k são os mesmos de $d(\lambda)$ agindo em \mathcal{D}_Γ repetido k vezes, cada autovalor $\alpha(\lambda) \pm i\sqrt{\beta(\lambda)^2 + \gamma(\lambda)^2 + \delta(\lambda)^2}$ tem multiplicidade $2k = m$, provando a parte (a) do lema para este caso. Ainda, como $(dF)_{0,0}$ tem autovalores $\pm i$, temos $\alpha(0) = 0$ e $\beta(0)^2 + \gamma(0)^2 + \delta(0)^2 = 1$. Assim, $d(0)$ é associado ao quatérnio puro unitário $\beta(0)i + \gamma(0)j + \delta(0)k$. Por [14], existe um quatérnio unitário q tal que $qd(0)q^{-1} = i$. Agora, a multiplicação por i em \mathbb{H} tem a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que pode ser transformada em J por uma mudança de coordenadas. Assim, a parte (b) está provada. \square

3.2.2 Um teorema de Hopf simples com simetria

Nesta subseção, apresentamos um teorema de Hopf com simetria que tem como ideia selecionar um subespaço no qual os autovalores são simples para, então, aplicar o Teorema de Hopf Padrão. Este resultado apresenta um ponto negativo, pois leva em conta somente soluções com simetrias espaciais. Um contexto mais geral que considera também soluções periódicas com simetrias temporais é descrito na Seção 3.4. Para o momento, temos a seguinte:

Definição 3.2.7. *Uma solução periódica u tem uma **simetria espacial** $\gamma \in \Gamma$ se para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\gamma u(t) = u(t)$.*

Teorema 3.2.8. *Considere o sistema (3.1), onde \mathbb{R}^n é Γ -simples, $(dF)_{0,0} = J$ e $\sigma'(0) \neq 0$. Seja Σ um subgrupo de isotropia de Γ tal que $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) = 2$. Então existe um único ramo de soluções periódicas de pequena amplitude para (3.1), de período aproximadamente 2π , cujas simetrias espaciais são Σ .*

Demonstração: Pelo Lema 1.5.4, $F(\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) \times \mathbb{R}) \subset \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$. Assim, restringindo o sistema (3.1) ao $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$, obtemos um sistema 2×2 que satisfaz as hipóteses do Teorema de Hopf Padrão para $k = 0$, uma vez que os autovalores de $(dF)_{0,0}|_{\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)}$ são $\pm i$ e a condição $\sigma'(0) \neq 0$ é válida por hipótese. Pela definição de $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$, as soluções deste sistema são precisamente aquelas com simetrias espaciais contidas em Σ . Portanto, existe um único ramo de soluções periódicas para (3.1) com grupo de simetrias Σ , como desejado. \square

Observação 3.2.9. Quando $\mathbb{R}^n \cong V \oplus V$ e $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ é bidimensional, utilizamos as Proposições 1.5.2 e 1.5.3 para concluir que $\text{Fix}_V(\Sigma)$ é unidimensional. Assim, nas condições do teorema anterior tal subespaço fornece um ramo de soluções periódicas em bifurcação de Hopf em $V \oplus V$. Estes subespaços de ponto fixo são precisamente aqueles considerados no Lema dos Ramos Equivariantes.

3.3 As ações do grupo do círculo

Diante da necessidade de incorporar simetrias temporais em nossos resultados, nós discutimos nesta seção a importância da ação mudança de fase do grupo do círculo \mathbf{S}^1 no espaço $\mathcal{C}_{2\pi}$ das funções 2π -periódicas definida em (2.11). Apresentamos também nesta seção uma ação diferente, mas relacionada, de \mathbf{S}^1 em um espaço de dimensão finita, que pode ser identificada com a exponencial da linearização J (Lema 3.3.3). Ambas as ações de \mathbf{S}^1 são necessárias para a prova da versão equivariante do Teorema de Hopf Padrão.

Para o que segue, supomos que $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função 2π -periódica em t (caso contrário, podemos reescalar o tempo e obter período igual a 2π).

Definição 3.3.1. Dizemos que $(\gamma, \theta) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ é uma *simetria espaço-temporal* de uma função periódica $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se

$$\gamma u(t) = u(t - \theta), \quad (3.14)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, a ação espacial de γ em \mathbb{R}^n é compensada por uma mudança de fase.

Pela definição acima, a simetria (γ, θ) é uma mistura de simetrias espacial e temporal. Mais especificamente, as simetrias espaciais são os elementos de Γ agindo em \mathbb{R}^n como na Definição 3.2.7, enquanto que as simetrias temporais podem ser consideradas como elementos de \mathbf{S}^1 agindo em $\mathcal{C}_{2\pi}$ pela ação (2.11).

O conjunto

$$\Sigma_u = \{(\gamma, \theta) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1; \gamma u(t) = u(t - \theta), \forall t \in \mathbb{R}\} \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$$

de todas as simetrias espaço-temporais de u forma um subgrupo de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Além disso, existe uma ação natural de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ no espaço $\mathcal{C}_{2\pi}$ definida por

$$(\gamma, \theta)u(t) = \gamma u(t + \theta), \quad (3.15)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $(\gamma, \theta) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ e $u \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Note que podemos reescrever (3.14) como

$$(\gamma, \theta)u(t) = u(t),$$

o que mostra que Σ_u é justamente o subgrupo de isotropia de u com respeito à ação (3.15).

Como já mencionamos, o objetivo principal deste trabalho é generalizar ao contexto equivariante o Teorema de Hopf Padrão. Mais especificamente, queremos garantir a existência de soluções periódicas para (3.1), com período próximo a 2π , quando F satisfaz (3.2). Nossa abordagem aqui é também baseada na redução de Liapunov-Schmidt, considerando agora uma ação arbitrária de Γ em \mathbb{R}^n . Os detalhes da redução vão ser apresentados na Seção 3.4. Para o momento, considere o sistema (3.1), onde F é Γ -equivariante.

Por simplicidade, escolhemos a escala de tempo de modo que $L = (dF)_{0,0}$ tenha autovalores $\pm i$. Então, redimensionamos o tempo como $s = (1 + \tau)t$, onde τ é um parâmetro próximo de 0, obtendo o sistema

$$(1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \lambda) = 0.$$

Definimos agora o operador $\Phi : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_{2\pi}$ por

$$\Phi(u, \lambda, \tau) = (1 + \tau) \frac{du}{ds} + \tilde{F}(u, \lambda) \quad (3.16)$$

como em (2.10), onde $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ é o espaço das funções em $\mathcal{C}_{2\pi}$ que são continuamente diferenciáveis e $\tilde{F} : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$ é tal que $\tilde{F}(u, \lambda)(s) = F(u(s), \lambda)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Desta forma, uma solução para $\Phi(u, \lambda, \tau) = 0$ corresponde a uma solução $\frac{2\pi}{1+\tau}$ -periódica para (3.1). Considere $\mathcal{L} = (d\Phi)_{0,0,0} : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$, o operador linear definido por

$$\mathcal{L}u = \frac{du}{ds} + Lu, \quad (3.17)$$

onde $L = (dF)_{0,0}$. Nosso objetivo imediato é mostrar que Φ em (3.16) comuta com a ação (3.15) de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\mathcal{C}_{2\pi}$. Para o nosso propósito, precisamos primeiro descrever a ação de \mathbf{S}^1 em $\ker \mathcal{L}$ e o próximo lema nos auxilia neste processo.

Lema 3.3.2. *Assuma que L não tenha autovalores ki , onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq \pm 1$. Então $\ker \mathcal{L}$ pode ser identificado com o autoespaço E_i de L associado ao autovalor i .*

Demonstração: Uma função v pertence a $\ker \mathcal{L}$ se, e somente se, v é 2π -periódica e satisfaz

$$\frac{dv}{ds} + Lv = 0.$$

Para esta EDO linear, a solução geral é da forma $v(s) = e^{-sL}v_0$, onde $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Estamos interessados apenas nas soluções 2π -periódicas e uma solução geral é 2π -periódica apenas quando $v_0 \in E_{ki}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Por hipótese, $E_{ki} = \{0\}$, a menos que $k = \pm 1$. Portanto, $v \in \ker \mathcal{L}$ se, e somente se, $v(s) = e^{-sL}v_0$, com $v_0 \in E_i$. Identificando $v \in \ker \mathcal{L}$ com seu ponto inicial $v_0 \in E_i$, obtemos a identificação desejada. \square

A seguir, nós mostramos que a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\mathcal{C}_{2\pi}$ induz uma ação em $\ker \mathcal{L}$.

Lema 3.3.3. *Considere o operador Φ definido em (3.16). Então,*

- (a) Φ comuta com a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\mathcal{C}_{2\pi}$ definida em (3.15).
- (b) A ação de Γ em $\ker \mathcal{L} \cong E_i$ é a restrição da ação de Γ em \mathbb{R}^n . Além disso, a ação de \mathbf{S}^1 em $\ker \mathcal{L}$ é dada por $\theta v = e^{-\theta J}v$, onde J é dada em (3.10).

Demonstração: Considerando a linearidade da ação (3.15) e a Γ -equivariância de F em (3.1), temos

$$\begin{aligned}
(\gamma, \theta)\Phi(u, \lambda, \tau)(s) &= (\gamma, \theta) \left[(1 + \tau) \frac{du(s)}{ds} + \tilde{F}(u, \lambda)(s) \right] \\
&= (1 + \tau) \gamma \frac{du(s + \theta)}{ds} + \gamma \tilde{F}(u, \lambda)(s + \theta) \\
&= (1 + \tau) \frac{d(\gamma u(s + \theta))}{ds} + \gamma F(u(s + \theta), \lambda) \\
&= (1 + \tau) \frac{d[(\gamma, \theta)u(s)]}{ds} + F(\gamma u(s + \theta), \lambda) \\
&= (1 + \tau) \frac{d[(\gamma, \theta)u(s)]}{ds} + F((\gamma, \theta)u(s), \lambda) \\
&= (1 + \tau) \frac{d[(\gamma, \theta)u](s)}{ds} + \tilde{F}((\gamma, \theta)u, \lambda)(s) = \Phi((\gamma, \theta)u, \lambda, \tau)(s),
\end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, o que prova o item (a).

Como Φ comuta com a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, $\ker \mathcal{L}$ é um subespaço $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariante. No Lema 3.3.2 identificamos $v_0 \in E_i$ com a função $v(s) = e^{-sL}v_0$, que pode ser substituída por $v(s) = e^{-sJ}v_0$, uma vez que E_i é genericamente Γ -simples. Como J comuta com Γ , segue que e^{-sJ} comuta com Γ . Assim, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma v(s) = \gamma e^{-sJ}v_0 = e^{-sJ}\gamma v_0$ que é a solução periódica identificada com γv_0 . Para ação de \mathbf{S}^1 temos

$$\theta v(s) = v(s + \theta) = e^{-(s+\theta)J}v_0 = e^{-\theta J}(e^{-sJ}v_0) = e^{-\theta J}v(s),$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, o que prova o item (b). \square

Observação 3.3.4. 1. Pelo Lema 3.3.3, a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\ker \mathcal{L}$ é dada por

$$(\gamma, \theta)v = \gamma e^{-\theta J}v,$$

para todo $(\gamma, \theta) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ e $v \in \ker \mathcal{L}$.

2. Pela Proposição 3.2.5, genericamente podemos assumir que $E_i \cong \ker \mathcal{L}$ é Γ -simples. No caso em que $\ker \mathcal{L} = V \oplus V$, onde V é absolutamente Γ -irredutível, a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ pode ser descrita de outra forma: dados $v = (x, y) \in V \oplus V$ e $(\gamma, \theta) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$, temos

$$(\gamma, \theta)(x, y) = \gamma [x|y] \mathbf{R}_\theta,$$

onde \mathbf{R}_θ é a matriz de rotação (1.2) e $[x|y]$ é a matriz $m \times 2$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix},$$

com $m = \frac{n}{2}$ e $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in V$. De fato, a exponencial $e^{-\theta J}$ é escrita como

$$e^{-\theta J} = \begin{bmatrix} \cos \theta I_m & \sin \theta I_m \\ -\sin \theta I_m & \cos \theta I_m \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

donde

$$e^{-\theta J}v = \begin{bmatrix} \cos \theta I_m & \sin \theta I_m \\ -\sin \theta I_m & \cos \theta I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta \\ \vdots \\ x_m \cos \theta + y_m \sin \theta \\ y_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta \\ \vdots \\ y_m \cos \theta - x_m \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Identificamos (3.19) com a matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta & y_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta \\ \vdots & \vdots \\ x_m \cos \theta + y_m \sin \theta & y_m \cos \theta - x_m \sin \theta \end{bmatrix} = [x|y] R_\theta.$$

Assim, $(\gamma, \theta)v = \gamma e^{-\theta J}v = \gamma [x|y] R_\theta$, como desejado.

3. Se diagonalizarmos a matriz $e^{-\theta J}$ dada em (3.18) sobre \mathbb{C} , temos que ela é formada por m blocos dois a dois diagonais do tipo \mathbf{R}_θ , que é precisamente a ação padrão de \mathbf{S}^1 em \mathbb{R}^2 . Deste modo, quando \mathbb{R}^n é Γ -simples, a ação de \mathbf{S}^1 em \mathbb{R}^n pode ser escrita como uma soma direta de m representações isomorfas à representação padrão de \mathbf{S}^1 em \mathbb{R}^2 .

O próximo resultado nos diz que no caso genérico a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\ker \mathcal{L}$ é não-absolutamente irredutível do tipo “complexa”. Para o que segue \mathcal{D}_Γ , $\mathcal{D}_{\mathbf{S}^1}$ e $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1}$ denotam os espaços vetoriais dos operadores lineares em $\ker \mathcal{L}$ que são Γ , \mathbf{S}^1 e $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -equivariantes, respectivamente.

Lema 3.3.5. *Seja \mathcal{L} definida como em (3.17) e assuma que $\ker \mathcal{L}$ é Γ -simples. Então,*

- (a) *As matrizes I e J formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1}$ e, portanto, $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1} \cong \mathbb{C}$.*
(b) *O grupo $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ age não-absolutamente irredutivelmente em $\ker \mathcal{L}$.*

Demonstração:

- (a) No caso em que $\ker \mathcal{L} \cong V \oplus V$, onde V é absolutamente Γ -irredutível, consideramos um operador linear $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -equivariante $A : V \oplus V \rightarrow V \oplus V$. Pela Proposição 1.2.20, $A \in \mathcal{D}_\Gamma \cap \mathcal{D}_{\mathbf{S}^1}$. Como A é Γ -equivariante, por (3.11), existem escalares $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$A(v, w) = \begin{bmatrix} aI_m & bI_m \\ cI_m & dI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av + bw \\ cv + dw \end{bmatrix},$$

ou seja, $A(v, w) = (av + bw, cv + dw)$, para $(v, w) \in V \oplus V$. Como A comuta com \mathbf{S}^1 , A deve comutar com todas as matrizes de rotação. Assim, por cálculos semelhantes aos realizados no item 1. do Exemplo 1.2.12, concluímos que $a = d$ e $c = -b$. Então,

$$A(v, w) = (av + bw, -bv + aw) = a(v, w) - b(-w, v).$$

A ação de J em $V \oplus V$ é dada por

$$J(v, w) = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ v \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, concluímos que $A = aI - bJ$. Portanto $\{I, J\}$ é uma base para $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1}$. Se $\ker \mathcal{L}$ é não-absolutamente Γ -irredutível e $\mathcal{D}_{\Gamma} \cong \mathbb{C}$, então identificamos os operadores lineares Γ -equivariantes com \mathbb{C} : I é identificado com 1 e J identificado com i . Assim, $\{I, J\}$ é uma base para \mathcal{D}_{Γ} . Como J comuta com a ação de \mathbf{S}^1 , temos $\mathcal{D}_{\Gamma} \subset \mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1}$. Pela Proposição 1.2.20, concluímos que $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1} = \mathcal{D}_{\Gamma}$. Portanto, $\{I, J\}$ é uma base para $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1}$.

Quando $\ker \mathcal{L}$ é não-absolutamente Γ -irredutível e $\mathcal{D}_{\Gamma} \cong \mathbb{H}$, os operadores lineares Γ -equivariantes são identificados com $1, i, j, k \in \mathbb{H}$. Identificamos a ação de \mathbf{S}^1 com um subgrupo do círculo de \mathbb{H} , a saber, $\{\cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{H}; \theta \in [0, 2\pi)\}$. Neste caso, os operadores lineares Γ -equivariantes isomorfos a j e k não comutam com a ação de \mathbf{S}^1 , pois não comutam com o operador isomorfo a i . Assim, os operadores $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -equivariantes são gerados por I e J , que são os elementos em \mathcal{D}_{Γ} identificados com 1 e i , respectivamente. Assim, $\{I, J\}$ é uma base para $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1}$ e o item (a) está provado.

- (b) Como $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1} \cong \mathbb{C}$, pela Observação 1.2.18 segue que $\ker \mathcal{L}$ não é absolutamente $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -irredutível. Pela Definição 3.2.3(b), basta provar que $\ker \mathcal{L}$ é $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -irredutível. Começamos considerando o caso em que $\ker \mathcal{L}$ é não-absolutamente Γ -irredutível. Suponha que existe um subespaço W de $\ker \mathcal{L}$, tal que $W \neq \{0\}$ e $W \neq \ker \mathcal{L}$, que seja $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariante. Então W é Γ -invariante, o que é um absurdo pois $\ker \mathcal{L}$ é Γ -irredutível. Logo, $\ker \mathcal{L}$ é $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -irredutível.

Consideramos agora $\ker \mathcal{L} = V \oplus V$, onde V é absolutamente Γ -irredutível. Se V' é um subespaço $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariante de $V \oplus V$, então V' é Γ -invariante. Pela Γ -irredutibilidade de V , temos que V' é um dos seguintes subespaços: $\{0\} \oplus \{0\}$, $V \oplus \{0\}$, $\{0\} \oplus V$ ou $V \oplus V$. Notamos que os subespaços $V \oplus \{0\}$ e $\{0\} \oplus V$ não são $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariantes, uma vez que não são \mathbf{S}^1 -invariantes. De fato, a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ leva elementos de $V \oplus \{0\}$ em elementos de $\{0\} \oplus V$ e vice-versa. Dessa forma, os únicos subespaços $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariantes de $V \oplus V$ são os triviais, o que mostra que a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\ker \mathcal{L}$ é irredutível. \square

Os resultados apresentados até aqui mostram que em bifurcação de Hopf com simetria, devemos considerar a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\ker \mathcal{L}$ mais propriamente do que a ação de Γ , fato que é essencial em nossos estudos. Além disso, existe uma analogia completa com os resultados para bifurcações de pontos de equilíbrio: para bifurcação de pontos de equilíbrio, genericamente E_0 é absolutamente Γ -irredutível e $\mathcal{D}_{\Gamma} \cong \mathbb{R}$, enquanto que para bifurcação de Hopf, genericamente E_i é não-absolutamente $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -irredutível e $\mathcal{D}_{\Gamma \times \mathbf{S}^1} \cong \mathbb{C}$.

3.4 A redução de Liapunov-Schmidt e o Teorema de Hopf Equivariante

Como já mencionado, o resultado mais importante deste trabalho é o Teorema 3.4.1, que generaliza o Teorema de Hopf Padrão ao contexto com simetria. Nesta seção, nós apresentamos a sua prova quando $k = 0$. Para isto, mostramos as generalidades que estabelecem a existência da aplicação ϕ em (3.24) reduzida por Liapunov-Schmidt, que é usada para demonstrar a existência de soluções periódicas com simetrias espaço-temporais.

Como usual, consideramos o sistema (3.1), onde $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o germe de uma aplicação suave Γ -equivariante. Assumimos a hipótese genérica de que \mathbb{R}^n é Γ -simples e escolhemos coordenadas tais que

$$(dF)_{0,0} = J, \quad (3.20)$$

onde J é como em (3.10). Isto é possível pelo Lema 3.2.6, que também estabelece os autovalores de $(dF)_{0,\lambda}$ como $\sigma(\lambda) \pm i\rho(\lambda)$, cada um de multiplicidade m , com $\sigma(0) = 0$ e $\rho(0) = 1$. Assumimos também que os autovalores de $(dF)_{0,\lambda}$ cruzam o eixo imaginário com velocidade não nula, ou seja

$$\sigma'(0) \neq 0. \quad (3.21)$$

Vamos dar início às formalidades do processo de redução de Liapunov-Schmidt, seguindo os passos descritos no Apêndice A. Recordamos que $\mathcal{C}_{2\pi}$ e $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ são espaços de Banach com as normas (2.7) e (2.8), respectivamente. Consideramos o operador $\Phi : \mathcal{C}_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$ definido em (3.16). Então, $\mathcal{L} = (d\Phi)_{0,0,0}$ é o operador linear

$$\mathcal{L} = \frac{d}{ds} + J.$$

Por (2.16), o operador adjunto de \mathcal{L} com respeito ao produto interno (2.15) é dado por

$$\mathcal{L}^* = -\frac{d}{ds} + J^t = -\frac{d}{ds} - J = -\mathcal{L}. \quad (3.22)$$

Como \mathcal{L} é um operador Fredholm de índice nulo (veja [6, Proposição A.2.]), existe a decomposição por subespaços $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} = \ker \mathcal{L} \oplus \text{Im} \mathcal{L},$$

que induz a decomposição

$$\mathcal{C}_{2\pi}^1 = \ker \mathcal{L} \oplus M,$$

onde $M = \text{Im} \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^1$. Seja $E : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \text{Im} \mathcal{L}$ a projeção linear com núcleo $\ker \mathcal{L}$. Decomponemos $\Phi(u, \lambda, \tau) = 0$ no par de equações

$$(a) E\Phi(u, \lambda, \tau) = 0 \quad \text{e} \quad (b) (I - E)\Phi(u, \lambda, \tau) = 0. \quad (3.23)$$

Escrevemos $u = v + w \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$, com $v \in \ker \mathcal{L}$ e $w \in M$. Pelo Teorema da Função Implícita, resolvemos (3.23)(a) para w como uma função de v , λ e τ . Este processo nos fornece $W : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de modo que $w = W(v, \lambda, \tau)$. Substituímos w em (3.23)(b) e obtemos a aplicação reduzida $\phi : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \ker \mathcal{L}$ definida por

$$\phi(v, \lambda, \tau) = (I - E)\Phi(v + W(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau). \quad (3.24)$$

Como ϕ é definida em $\ker \mathcal{L}$, segue que $(d\phi)_{0,0,0} = 0$.

Portanto, pela redução de Liapunov-Schmidt, obtemos as soluções 2π -periódicas para $\Phi \equiv 0$ (que correspondem às soluções $\frac{2\pi}{1+\tau}$ -periódicas para (3.1)) resolvendo a equação $\phi \equiv 0$.

O ponto principal aqui é que, pela Proposição 1.0.4, se Φ comuta com a ação de um grupo, então sob certas condições ϕ também comuta com a ação deste grupo. Pelo Lema 3.3.3(a), sendo $M = \text{Im} \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{2\pi}^1$ e $N = \ker \mathcal{L}$ subespaços $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariantes, temos que ϕ comuta com a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\ker \mathcal{L}$. Além disso, como $\ker \mathcal{L}$ é $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -irredutível, então $\text{Fix}_{\ker \mathcal{L}}(\Gamma \times \mathbf{S}^1) = \{0\}$, uma vez que este é um subespaço $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -invariante de $\ker \mathcal{L}$ e a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ não é a trivial. Pela Proposição 1.5.5, $\phi \equiv 0$ possui uma solução trivial $v = 0$.

A ideia que devemos ter em mente para o restante deste capítulo é que uma bifurcação de Hopf para sistemas Γ -equivariantes se reduz a uma bifurcação de pontos de equilíbrio para sistemas $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -equivariantes.

Para o próximo resultado, $\text{Fix}(\Sigma)$ denota $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$. Note que $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ é isomorfo a $\text{Fix}_{\ker \mathcal{L}}(\Sigma)$, pois \mathbb{R}^n é Γ -simples e então $\mathbb{R}^n = E_i \cong \ker \mathcal{L}$. As simetrias espaço-temporais aparecem no Teorema de Hopf Equivariante por meio de um subgrupo de isotropia $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ agindo em \mathbb{R}^n .

Teorema 3.4.1 (Teorema de Hopf Equivariante). *Seja o sistema de EDOs (3.1), onde F é o germe de uma aplicação Γ -equivariante satisfazendo (3.20) e (3.21). Suponha que $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ seja um subgrupo de isotropia agindo em \mathbb{R}^n tal que $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 2$. Então, existe um único ramo de soluções periódicas de pequena amplitude para (3.1) com período próximo a 2π , tendo Σ como seu grupo de simetrias.*

Demonstração: As hipóteses do teorema nos permitem aplicar a redução de Liapunov-Schmidt descrita anteriormente. As soluções periódicas de pequena amplitude de (3.1), de período próximo a 2π , correspondem aos zeros da equação reduzida $\phi \equiv 0$ em (3.24). Então, encontrar as soluções periódicas para (3.1) com grupo de simetrias Σ é equivalente a encontrar os zeros de ϕ com subgrupo de isotropia Σ , resolvendo $\phi|_{\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \equiv 0$.

Como ϕ comuta com a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ em $\ker \mathcal{L}$, temos que $\phi(\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2) \subset \text{Fix}(\Sigma)$. Afirmamos que $\phi|_{\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2}$ tem a forma

$$\phi(v, \lambda, \tau) = p(\|v\|^2, \lambda, \tau)v + q(\|v\|^2, \lambda, \tau)Jv, \quad (3.25)$$

para $p, q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves. De fato, primeiro observamos que $\phi|_{\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2}$ comuta com a ação padrão de \mathbf{S}^1 . Note que, dados $\sigma \in \Sigma$, $\theta \in \mathbf{S}^1$ e $w \in \text{Fix}(\Sigma)$, temos $(1_\Gamma, \theta)w =$

$(1_\Gamma, \theta)\sigma w = \sigma(1_\Gamma, \theta)w$, donde $(1_\Gamma, \theta)w \in \text{Fix}(\Sigma)$. Portanto, $\text{Fix}(\Sigma)$ é $\{1_\Gamma\} \times \mathbf{S}^1$ -invariante e $\phi|_{\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2}$ comuta com $\{1_\Gamma\} \times \mathbf{S}^1$, visto que $\{1_\Gamma\} \times \mathbf{S}^1 \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$.

Pelo item 3. da Observação 3.3.4, \mathbb{R}^n é uma soma direta de m representações irreduzíveis de \mathbf{S}^1 de dimensão 2, todas equivalentes à representação padrão de \mathbf{S}^1 em \mathbb{R}^2 . Pelo Teorema 1.2.6, existe apenas uma componente isotópica de \mathbb{R}^n para a ação de \mathbf{S}^1 . Além disso, a ação de \mathbf{S}^1 em qualquer subespaço \mathbf{S}^1 -invariante de \mathbb{R}^n de dimensão 2, em particular em $\text{Fix}(\Sigma)$, é a ação padrão. Agora, identificamos $\text{Fix}(\Sigma)$ com \mathbb{R}^2 pela aplicação $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha w_1 + \beta w_2$, onde $\{w_1, w_2\}$ é uma base de $\text{Fix}(\Sigma)$. Assim, a ação de $\theta \in \mathbf{S}^1$ nas coordenadas do $\text{Fix}(\Sigma)$ é dada pela multiplicação por \mathbf{R}_θ .

Denotamos $\phi|_{\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2}$ nas coordenadas (α, β) por $\tilde{\phi}$. Como $\tilde{\phi}$ comuta com \mathbf{S}^1 , o Lema 2.2.2 implica que existem funções suaves $p, q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{\phi}(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = p(\alpha^2 + \beta^2, \lambda, \tau)(\alpha, \beta) + q(\alpha^2 + \beta^2, \lambda, \tau)(-\beta, \alpha).$$

Dado $v = (\alpha, \beta) \in \text{Fix}(\Sigma)$, temos $\|v\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ e $Jv = J(\alpha, \beta) = (-\beta, \alpha)$. Assim, (3.25) segue da forma de $\tilde{\phi}$. Além disso, como $(d\phi)_{0,0,0} = 0$, os termos lineares desaparecem na equação reduzida, ou seja, $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0$. Afirmamos que

$$p_\tau(0, 0, 0) = 0, \quad q_\tau(0, 0, 0) = -1 \quad \text{e} \quad p_\lambda(0, 0, 0) = \sigma'(0) \neq 0. \quad (3.26)$$

Vamos demonstrar (3.26) no Lema 3.4.3. Por enquanto, vamos considerá-la válida para concluir a prova deste teorema. Estamos, portanto, nas condições da Proposição 2.2.3. O restante da prova procede exatamente como nas demonstrações dos Teoremas 2.2.4 e 2.3.2. Portanto, existe um ramo de soluções periódicas de pequena amplitude para o sistema (3.1) com período 2π . Como tais soluções estão sobre $\text{Fix}(\Sigma)$, elas têm subgrupo de isotropia $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$, como desejado. \square

Antes de provarmos a afirmação (3.26), demonstramos o seguinte lema:

Lema 3.4.2. *Seja A uma matriz de ordem n e seja $v \in \ker \mathcal{L}$. Então,*

- (a) *Se A comuta com J , então $Av \in \ker \mathcal{L}$;*
- (b) *$(I - E) : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \ker \mathcal{L}$ é uma projeção ortogonal;*
- (c) *$(I - E)Av = \bar{A}v$, onde*

$$\bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{tJ} A e^{-tJ} dt. \quad (3.27)$$

Demonstração:

- (a) Temos que $\mathcal{L}v = 0$. Como $\mathcal{L} = \frac{d}{ds} + J$, temos

$$\mathcal{L}(Av) = \left(\frac{d}{ds} + J\right)(Av) = A\left(\frac{d}{ds} + J\right)v = A\mathcal{L}v = 0,$$

onde a segunda igualdade segue pois A comuta com J e com $\frac{d}{ds}$. Assim, $Av \in \ker \mathcal{L}$.

(b) A aplicação $(I - E) : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \ker \mathcal{L}$ é uma projeção com núcleo $\text{Im} \mathcal{L}$, pois $E : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \text{Im} \mathcal{L}$ é uma projeção com núcleo $\ker \mathcal{L}$. Para provar que $I - E$ é ortogonal, vamos mostrar que $\ker \mathcal{L}$ e $\text{Im} \mathcal{L}$ são ortogonais com respeito ao produto interno (2.15).

Por (3.22), $\mathcal{L}^* = -\mathcal{L}$. Assim, dados $v \in \ker \mathcal{L}$ e $u \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$, obtemos

$$0 = -\langle \mathcal{L}v, u \rangle = -\langle v, \mathcal{L}^*u \rangle = \langle v, -\mathcal{L}^*u \rangle = \langle v, \mathcal{L}u \rangle.$$

Portanto v é ortogonal à $\text{Im} \mathcal{L}$ e assim $\ker \mathcal{L}$ e $\text{Im} \mathcal{L}$ são ortogonais.

(c) Denote $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$, onde B, C, D e E são matrizes quadradas de ordem $m = \frac{n}{2}$.

Por (3.27),

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B + E & C - D \\ D - C & B + E \end{bmatrix}$$

e, claramente, esta matriz comuta com as matrizes da forma (3.18). Então, \bar{A} comuta com J . Pelo item (a), $\bar{A}v \in \ker \mathcal{L}$. Além disso, como $\ker \mathcal{L}$ e $\text{Im} \mathcal{L}$ são ortogonais, para todo $x \in \ker \mathcal{L}$, temos que

$$\langle Av, x \rangle = \langle (I - E)Av + EAv, x \rangle = \langle (I - E)Av, x \rangle + \langle EAv, x \rangle = \langle (I - E)Av, x \rangle,$$

uma vez que $\langle EAv, x \rangle = 0$. Portanto, para mostrar que $\bar{A}v = (I - E)Av$ é suficiente provar que, para todo $x \in \ker \mathcal{L}$,

$$\langle \bar{A}v, x \rangle = \langle Av, x \rangle.$$

Aqui, denotamos a transposta por T para não gerar confusão com o tempo t . Então,

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}v, x \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)^T \bar{A}v(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)^T \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{tJ} A e^{-tJ} dt \right) v(s) ds \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{s=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} (e^{-tJ} x(s))^T A (e^{-tJ} v(s)) dt ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Se $z(s) \in \ker \mathcal{L}$, temos $z(s) = e^{-sJ} z(0)$ e $z(s+t) = e^{-tJ} z(s)$. Substituindo $x(s+t) = e^{-tJ} x(s)$ e $v(s+t) = e^{-tJ} v(s)$ em (3.28), obtemos

$$\langle \bar{A}v, x \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} x(s+t)^T Av(s+t) dt ds. \quad (3.29)$$

Sejam $s' = s + t$ e $t' = t$. Como x e v são 2π -periódicas, podemos escrever (3.29) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}v, x \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{s'=0}^{2\pi} \int_{t'=0}^{2\pi} x(s')^T Av(s') dt' ds' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t'=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{s'=0}^{2\pi} x(s')^T Av(s') ds' \right) dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t'=0}^{2\pi} \langle Av, x \rangle dt' = \langle Av, x \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $(I - E)Av = \bar{A}v$. □

Lema 3.4.3. *Nas hipóteses do Teorema 3.4.1, as igualdades dadas em (3.26) são válidas.*

Demonstração: Utilizando a $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ -equivariância de ϕ , obtemos por (3.25) que

$$\phi(v, \lambda, \tau) = a(\lambda, \tau)v + b(\lambda, \tau)Jv + \mathcal{O}(\|v\|^2), \quad (3.30)$$

onde $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in \ker \mathcal{L}$ e $\mathcal{O}(\|v\|^2)$ é formado por termos não lineares de ϕ . Então,

$$a(\lambda, \tau) = p(0, \lambda, \tau) \quad \text{e} \quad b(\lambda, \tau) = q(0, \lambda, \tau). \quad (3.31)$$

Vamos encontrar fórmulas explícitas para as funções a e b . Para isso, considere $A_\lambda = (dF)_{0,\lambda}$, que tem autovalores $\sigma(\lambda) \pm i\rho(\lambda)$ de multiplicidade $\frac{n}{2}$, com $\sigma(0) = 0$ e $\rho(0) = 1$. Por hipótese, $A_0 = J$ e $\sigma'(0) \neq 0$. Então, pela expansão de Taylor de F com respeito à $u \in \mathbb{R}^n$ em torno de $u = 0$, obtemos

$$F(u, \lambda) = A_\lambda u + \mathcal{O}(\|u\|^2). \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) em (3.16), temos que

$$\Phi(u, \lambda, \tau) = \left((1 + \tau) \frac{d}{ds} + A_\lambda \right) u + \mathcal{O}(\|u\|^2).$$

Por [6, Proposição 2.7(a)], a função $W(v, \lambda, \tau)$ definida implicitamente não possui termos lineares em v . Assim,

$$\Phi(v + W(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau) = \Phi(v, \lambda, \tau) + \mathcal{O}(\|v\|^2). \quad (3.33)$$

Pela expansão de Taylor de Φ com respeito à $v \in \ker \mathcal{L}$ em torno do ponto $v = 0$, obtemos

$$\Phi(v, \lambda, \tau) = \Phi(0, \lambda, \tau) + (d_v \Phi)_{0,\lambda,\tau} v + \mathcal{O}(\|v\|^2) = (d_v \Phi)_{0,\lambda,\tau} v + \mathcal{O}(\|v\|^2),$$

pois $\Phi(0, \lambda, \tau) = F(0, \lambda) = 0$. Além disso,

$$(d_v \Phi)_{0,\lambda,\tau} = \left[(1 + \tau) \frac{d}{ds} + A_\lambda \right]_{0,\lambda,\tau}. \quad (3.34)$$

Como $v \in \ker \mathcal{L}$, temos $\mathcal{L}v = \frac{dv}{ds} + Jv = 0$. Por (3.34)

$$(d_v \Phi)_{0,\lambda,\tau} v = [-(1 + \tau)J + A_\lambda] v,$$

donde $\Phi(v, \lambda, \tau) = [-(1 + \tau)J + A_\lambda] v + \mathcal{O}(\|v\|^2)$. Utilizando (3.24) e (3.33), temos

$$\begin{aligned} \phi(v, \lambda, \tau) &= (I - E)\Phi(v + W(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau) \\ &= (I - E)[-(1 + \tau)J + A_\lambda] v + \mathcal{O}(\|v\|^2) \\ &= [-(1 + \tau)\bar{J} + \bar{A}_\lambda] v + \mathcal{O}(\|v\|^2), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde a última igualdade segue do item (c) do Lema 3.4.2, com $\bar{J} = J$ e

$$\bar{A}_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{tJ} A_\lambda e^{-tJ} dt. \quad (3.36)$$

Como \bar{A} comuta com $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, segue que $\bar{A}_\lambda = \bar{a}(\lambda)I + \bar{b}(\lambda)J$, para funções $\bar{a}, \bar{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (veja o Lema 3.3.5). As equações (3.30) e (3.35) nos fornecem

$$a(\lambda, \tau) = \bar{a}(\lambda) \quad \text{e} \quad b(\lambda, \tau) = -(1 + \tau) + \bar{b}(\lambda).$$

Desta forma, obtemos as identidades $a_\tau \equiv 0$ e $b_\tau \equiv -1$. Em particular,

$$p_\tau(0, 0, 0) = a_\tau(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad q_\tau(0, 0, 0) = b_\tau(0, 0) = -1.$$

Afirmamos agora que $a_\lambda(0, 0) = \sigma'(0)$. De fato, como $\text{tr}(J) = 0$, temos $\text{tr}(\bar{A}_\lambda) = n\bar{a}(\lambda)$. Por (3.36), $\text{tr}(A_\lambda) = \text{tr}(\bar{A}_\lambda)$. Como os autovalores de A_λ são $\sigma(\lambda) \pm i\rho(\lambda)$ de multiplicidade $\frac{n}{2}$, então $\text{tr}(A_\lambda) = n\sigma(\lambda)$ e conseqüentemente $\bar{a}(\lambda) = \sigma(\lambda)$. Deste modo, $a(\lambda, \tau) = \sigma(\lambda)$ e $a_\lambda(0, 0) = \sigma'(0)$, como desejado. Por (3.31), temos que

$$p_\lambda(0, 0, 0) = a_\lambda(0, 0) = \sigma'(0) \neq 0.$$

□

3.5 Subgrupos de isotropia de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$

Para aplicar o Teorema de Hopf Equivariante a um sistema com grupo de simetrias Γ , precisamos considerar os subgrupos de isotropia $\Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ que possuem subespaço de ponto fixo de dimensão 2. Nesta seção, obtemos dois resultados úteis neste processo. O primeiro deles é a Proposição 3.5.2, que caracteriza os subgrupos de isotropia próprios de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ como subgrupos “twisted”. O segundo resultado, o Lema 3.5.4, apresenta um método para determinar as classes de conjugação dos subgrupos twisted (fechados) de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, usando apenas informações da teoria de grupos sobre Γ . Os métodos para determinar as dimensões dos correspondentes subespaços de ponto fixo são apresentados na próxima seção. Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 3.5.1. *Sejam H um subgrupo de Γ e $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ um homomorfismo de grupos. Dizemos que*

$$H^\theta = \{(h, \theta(h)) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1; h \in H\},$$

é um subgrupo twisted de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$.

Para o que segue, vamos utilizar a projeção canônica $\pi : \Gamma \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \Gamma$.

Proposição 3.5.2. *Seja Σ um subgrupo de isotropia de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ agindo em um espaço Γ -simples \mathbb{R}^n , com $\Sigma \neq \Gamma \times \mathbf{S}^1$. Assuma $H = \pi(\Sigma)$. Então,*

- (a) $\pi : \Sigma \rightarrow H$ é um isomorfismo;
 (b) Existe um homomorfismo $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ tal que $\Sigma = H^\theta$.

Demonstração:

- (a) Como \mathbb{R}^n é Γ -simples, pelo item 3. da Observação 3.3.4, o único elemento de \mathbb{R}^n fixado pela ação de $\theta \in \mathbf{S}^1$ é o vetor nulo, uma vez que o único elemento fixado por \mathbf{S}^1 agindo em \mathbb{R}^2 é o $(0, 0)$. Assim, como $\Sigma \neq \Sigma_0 = \Gamma \times \mathbf{S}^1$, concluímos que $\Sigma \cap (\{1_\Gamma\} \times \mathbf{S}^1) = \{(1_\Gamma, 0)\}$. Como $\ker \pi = \{1_\Gamma\} \times \mathbf{S}^1$, obtemos $\Sigma \cap \ker \pi = \{(1_\Gamma, 0)\}$. Portanto, $\pi^* = \pi|_\Sigma : \Sigma \rightarrow H$ é injetora. Além disso, π^* é linear e sobrejetora, uma vez que $H = \pi(\Sigma)$. Deste modo, π^* é bijetora. Ademais, π^* é um homomorfismo, pois dados $(\gamma_1, \theta_1), (\gamma_2, \theta_2) \in \Sigma$, temos

$$\pi^*((\gamma_1, \theta_1)(\gamma_2, \theta_2)) = \pi^*(\gamma_1\gamma_2, \theta_1 + \theta_2) = \gamma_1\gamma_2 = \pi^*(\gamma_1, \theta_1)\pi^*(\gamma_2, \theta_2).$$

Portanto, π^* é um isomorfismo, como queríamos.

- (b) Seja $\sigma = (\gamma, \varphi) \in \Sigma \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$. Então, $\gamma = \pi^*(\sigma) \in H$ e $\varphi \in \mathbf{S}^1$. Uma vez que π^* é bijetora, para cada $h \in H$, existe um único $\varphi \in \mathbf{S}^1$ tal que $(h, \varphi) \in \Sigma$ e, assim, está bem definida a aplicação $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ por $\theta(h) = \varphi$. Portanto, todo $\sigma \in \Sigma$ pode ser escrito unicamente como $(h, \theta(h))$, tal que $h \in H$. Mostramos agora que $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ é um homomorfismo de grupos. Como Σ é um subgrupo de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, dados $(h, \theta(h)), (k, \theta(k)) \in \Sigma$, temos

$$(h, \theta(h))(k, \theta(k)) = (hk, \theta(h)\theta(k)) \in \Sigma,$$

com $h, k \in H$. Como $hk \in H$, existe um único $\theta(hk) \in \mathbf{S}^1$ tal que $(hk, \theta(hk)) \in \Sigma$. Logo, $\theta(hk) = \theta(h)\theta(k)$, como queríamos. Pela Definição 3.5.1,

$$H^\theta = \{(h, \theta(h)) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1; h \in H\} = \Sigma.$$

□

Observação 3.5.3. 1. O homomorfismo $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ definido na Proposição 3.5.2 é denominado **twist**.

2. Nós pensamos nos elementos de Γ como simetrias espaciais (agindo em \mathbb{R}^n) e nos elementos de \mathbf{S}^1 como simetrias temporais (agindo nas soluções periódicas pela ação de mudança de fase). Logo, $\sigma = (h, \theta(h)) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ é uma simetria espacial se $\theta(h) = 0$ e uma simetria espaço-temporal se $\theta(h) \neq 0$. Portanto, as simetrias espaciais de um dado subgrupo de isotropia $H^\theta \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ formam o seguinte subgrupo normal de H :

$$K = \ker \theta.$$

Como já mencionamos, para aplicar o Teorema 3.4.1 é preciso primeiro encontrar as classes de conjugação dos subgrupos de isotropia de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. A Proposição 3.5.2 reduz este problema ao problema de encontrar todos os subgrupos twisted de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Entretanto, determinar quando dois subgrupos twisted são conjugados é uma questão delicada. O próximo lema apresenta duas condições suficientes que nos auxiliam nesta questão.

Lema 3.5.4. (a) *Sejam H^θ e L^ψ subgrupos twisted conjugados em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Então H e L são subgrupos conjugados de Γ .*

(b) *Sejam H^θ e H^ψ subgrupos twisted de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ com simetrias espaciais $K_\theta = \ker \theta$ e $K_\psi = \ker \psi$. Se H^θ e H^ψ são conjugados em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, então existe $\gamma \in N_\Gamma(H)$ tal que $K_\psi = \gamma^{-1}K_\theta\gamma$, onde $N_\Gamma(H) = \{\gamma \in \Gamma; \gamma H \gamma^{-1} = H\}$ é o subgrupo normalizador de H em Γ .*

Demonstração: Sejam H^θ e L^ψ conjugados em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Logo, existe $(\gamma, \varphi) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ tal que $(\gamma, \varphi)^{-1}H^\theta(\gamma, \varphi) = L^\psi$. Se $(h, \theta(h)) \in H^\theta$, temos

$$(\gamma, \varphi)^{-1}(h, \theta(h))(\gamma, \varphi) = (\gamma^{-1}h\gamma, \varphi^{-1}\theta(h)\varphi) = (\gamma^{-1}h\gamma, \theta(h)) \in L^\psi, \quad (3.37)$$

onde a última igualdade segue pois \mathbf{S}^1 é abeliano. Então $\gamma^{-1}h\gamma \in L$ e assim $\gamma^{-1}H\gamma \subset L$. Do mesmo modo, para $(\alpha, \beta) = (\gamma, \varphi)^{-1} \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ temos $(\alpha, \beta)^{-1}L^\psi(\alpha, \beta) = H^\theta$. Se $(l, \psi(l)) \in L^\psi$, então

$$(\alpha, \beta)^{-1}(l, \psi(l))(\alpha, \beta) = (\alpha^{-1}l\alpha, \beta^{-1}\psi(l)\beta) = (\alpha^{-1}l\alpha, \psi(l)) \in H^\theta.$$

Logo, $\alpha^{-1}l\alpha \in H$, o que implica que $\alpha^{-1}L\alpha \subset H$. Desta forma, $L \subset \alpha H \alpha^{-1} = \gamma^{-1}H\gamma$. Portanto $\gamma^{-1}H\gamma = L$, para algum $\gamma \in \Gamma$, ou seja, H e L são subgrupos conjugados em Γ , provando o item (a).

Consideramos agora H^θ e H^ψ subgrupos twisted conjugados em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Assim, existe $(\gamma, \varphi) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ tal que $(\gamma, \varphi)^{-1}H^\theta(\gamma, \varphi) = H^\psi$. Pela demonstração do item anterior, $\gamma^{-1}H\gamma = H$, o que implica que $\gamma \in N_\Gamma(H)$. Além disso, por (3.37), dado $h \in H$ existe $h' \in H$ tal que $(\gamma^{-1}h\gamma, \theta(h)) = (h', \psi(h'))$, ou seja, $\gamma^{-1}h\gamma = h'$ e $\theta(h) = \psi(\gamma^{-1}h\gamma)$. Assim, se $u \in K_\theta$, então $\psi(\gamma^{-1}u\gamma) = \theta(u) = 0$, implicando que $\gamma^{-1}u\gamma \in K_\psi$. Desta forma, $\gamma^{-1}K_\theta\gamma \subset K_\psi$. Do mesmo modo, dado $v \in K_\psi$, temos que $\theta(\gamma v \gamma^{-1}) = \psi(v) = 0$ e assim $\gamma v \gamma^{-1} \in K_\theta$. Logo, $\gamma K_\psi \gamma^{-1} \subset K_\theta$, o que implica que $K_\psi \subset \gamma^{-1}K_\theta\gamma$. Portanto $K_\psi = \gamma^{-1}K_\theta\gamma$, o que prova o item (b). \square

É importante ressaltar que não temos garantida as recíprocas dos itens (a) e (b) do lema anterior. Vejamos um exemplo em que a recíproca do item (b) é falsa.

Suponha que $\Gamma = H = \mathbf{Z}_3 = \langle \omega \rangle$ e defina $\theta, \psi : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ por $\theta(\omega) = \frac{2\pi}{3}$ e $\psi(\omega) = -\frac{2\pi}{3}$. Como $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{S}^1$ é abeliano, H^θ é conjugado a H^ψ somente se $H^\theta = H^\psi$, o que acontece se, e somente se, $\theta = \psi$, que é falso. Assim, H^θ e H^ψ não são conjugados. Entretanto, como $\ker \theta = \ker \psi = \{1_\Gamma\}$, temos $\ker \theta = 1_\Gamma \ker \psi 1_\Gamma^{-1}$, com $1_\Gamma \in N_\Gamma(H)$.

Observe que no item (b) do Lema 3.5.4 determinamos a classe de conjugação do par (H, K) em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, onde $K = \ker \theta$. Mas (H, K) não determina H^θ de forma única, uma vez que θ não é determinado unicamente.

Introduzimos agora alguma terminologia. Seja H^θ um subgrupo twisted de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, com $K = \ker \theta$, onde $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ é um homomorfismo de grupos. Pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo de grupos, H/K é isomorfo a $\theta(H)$. Note que $\theta(H)$ é um subgrupo fechado

de \mathbf{S}^1 . De fato, como o subgrupo de isotropia $H^\theta = H \times \theta(H)$ é um subgrupo de Lie, ele é fechado em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, implicando que H e $\theta(H)$ são subgrupos fechados em Γ e \mathbf{S}^1 , respectivamente. Por [33, Página 279], os únicos subgrupos fechados de \mathbf{S}^1 são

$$\{0\}, \mathbf{Z}_n \ (n = 2, 3, 4, \dots) \text{ e } \mathbf{S}^1. \quad (3.38)$$

Portanto, H/K é isomorfo a um dos subgrupos descritos em (3.38). Dizemos que um twist θ é **trivial**, \mathbf{Z}_n ou \mathbf{S}^1 , conforme $\theta(H) = \{0\}$, \mathbf{Z}_n ou \mathbf{S}^1 , respectivamente.

3.6 Dimensão dos subespaços de ponto fixo

Nesta seção, discutimos métodos gerais para determinar a dimensão do subespaço de ponto fixo de um subgrupo twisted H^θ de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ agindo em um espaço Γ -simples do tipo (a) da Definição 3.2.3. A fim de obter condições para aplicar o Teorema de Hopf Equivariante, nosso interesse aqui é determinar quando

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2. \quad (3.39)$$

Para isto, provamos dois resultados principais. O primeiro deles, o Teorema 3.6.2, estabelece (3.39) para twists dos tipos $\{0\}$, \mathbf{Z}_2 , \mathbf{Z}_3 , \mathbf{Z}_4 e \mathbf{Z}_6 em termos das dimensões dos subespaços de ponto fixo de certos subgrupos de Γ agindo em V . O segundo, o Teorema 3.6.4, estabelece (3.39) em termos do número de vezes que uma certa representação de H relacionada ao twist aparece na representação de H em V .

Daqui em diante, \mathbb{R}^n é um espaço vetorial Γ -simples do tipo $V \oplus V$, onde V é absolutamente Γ -irredutível, sob a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$. Além disso, com base nos resultados da seção anterior, todo subgrupo de isotropia próprio em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ é um twisted H^θ para algum subgrupo H de Γ e algum homomorfismo $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$. Como $H^\theta \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ age em \mathbb{R}^n pela ação herdada de $\Gamma \times \mathbf{S}^1$, obtemos pela fórmula do traço (1.32) que

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \int_{H^\theta} \text{tr}((h, \theta(h))), \quad (3.40)$$

onde $h \in H$. Vamos mostrar que

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2 \int_H \text{tr}(h) \cos \theta(h), \quad (3.41)$$

onde $\text{tr}(h)$ denota o traço da representação de h restrita a V . De fato, como Γ age diagonalmente em \mathbb{R}^n , podemos escrever a ação de $h \in H$ em $V \oplus V$ na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \rho_h|_V & 0 \\ 0 & \rho_h|_V \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

onde $\rho_h|_V$ é a representação de h restrita a V . A ação de $\theta(h) \in \mathbf{S}^1$ em \mathbb{R}^n pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \cos \theta(h) I_m & \sin \theta(h) I_m \\ -\sin \theta(h) I_m & \cos \theta(h) I_m \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Como $(h, \theta(h)) = (h, 0)(1_\Gamma, \theta(h))$, podemos escrever a representação de $(h, \theta(h))$ em $V \oplus V$ pela multiplicação das matrizes (3.42) e (3.43), obtendo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta(h)\rho_h|_V & \sin\theta(h)\rho_h|_V \\ -\sin\theta(h)\rho_h|_V & \cos\theta(h)\rho_h|_V \end{bmatrix}.$$

Assim, o traço da representação de $(h, \theta(h))$ em $V \oplus V$ é igual a $2 \cos\theta(h)\text{tr}(h)$ e (3.41) segue de (3.40).

O Teorema 3.6.2 é uma consequência imediata das seguintes fórmulas:

Lema 3.6.1. *Seja $H^\theta \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ um subgrupo de isotropia agindo em $V \oplus V$ e seja $K = \ker \theta$. Então,*

- (a) *Se $\theta(H) = \{0\}$, então $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2 \dim \text{Fix}_V(H)$.*
- (b) *Se $\theta(H) = \mathbf{Z}_2$, então $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2(\dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(H))$.*
- (c) *Se $\theta(H) = \mathbf{Z}_3$, então $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(H)$.*
- (d) *Se $\theta(H) = \mathbf{Z}_4$, então $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(L)$, onde L é o único subgrupo tal que $K \subset L \subset H$ e $|H/L| = 2$.*
- (e) *Se $\theta(H) = \mathbf{Z}_6$, então $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \dim \text{Fix}_V(H) + \dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(M) - \dim \text{Fix}_V(N)$, onde N e M são os únicos subgrupos entre K e H tais que $|H/N| = 3$ e $|H/M| = 2$.*

Demonstração:

- (a) Se $\theta(H) = \{0\}$, então $\cos\theta(h) = 1$, para todo $h \in H$. Logo,

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2 \int_H \text{tr}(h) \cos\theta(h) = 2 \int_H \text{tr}(h) = 2 \dim \text{Fix}_V(H),$$

onde a última igualdade segue de (1.32).

Para a prova dos itens (b) a (e), obtemos da fórmula do traço (1.32) que $\dim \text{Fix}_V(\Delta) = \int_\Delta \text{tr}(h)$, para $\Delta = H, K, L, N$ e M . Além disso, pelo Teorema 1.1.10,

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2 \int_H \text{tr}(h) \cos\theta(h) = 2 \int_{H/K} \left(\int_{h \in K} \text{tr}(h) \cos\theta(h) \right) d(hK). \quad (3.44)$$

Se $|H/K| = m$ (o índice de K em H é m), então K possui m classes laterais em H . Deste modo, temos a decomposição de H como a união disjunta $H = K \dot{\cup} \delta_1 K \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \delta_{m-1} K$, onde $\delta_i \in H \setminus K$ e $\delta_i \notin \delta_j K$, para todo $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$. Então, por (1.10)

$$\int_{H/K} \left(\int_{h \in K} \text{tr}(h) \cos\theta(h) \right) d(hK) = \frac{1}{|H/K|} \sum_{hK \in H/K} \int_K \text{tr}(h) \cos\theta(h).$$

Portanto, (3.44) torna-se

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \frac{2}{m} \left(\int_K \text{tr}(h) \cos\theta(h) + \sum_{j=1}^{m-1} \int_K \text{tr}(\delta_j h) \cos(\delta_j h) \right). \quad (3.45)$$

Do mesmo modo, pelo Teorema 1.1.10 e por (1.10) segue que

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_V(H) &= \int_H \text{tr}(h) = \int_{H/K} \left(\int_K \text{tr}(h) \right) d(hK) \\ &= \frac{1}{m} \left(\int_K \text{tr}(h) + \sum_{j=1}^{m-1} \int_K \text{tr}(\delta_j h) \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

(b) Para $\theta(H) = \mathbf{Z}_2$, $\cos \theta(h) = 1$ se $h \in K$ e $\cos \theta(h) = -1$ se $h \in H \setminus K$. Como $H/K \cong \theta(H) = \mathbf{Z}_2$, $|H/K| = 2$ e segue por (3.45) que

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \int_K \text{tr}(h) - \int_K \text{tr}(\delta h),$$

para $\delta \in H \setminus K$ fixado. Além disso, por (3.46),

$$\dim \text{Fix}_V(H) = \frac{1}{2} \left(\int_K \text{tr}(h) + \int_K \text{tr}(\delta h) \right).$$

Assim,

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) + 2 \dim \text{Fix}_V(H) = 2 \int_K \text{tr}(h) = 2 \dim \text{Fix}_V(K),$$

como queríamos.

(c) Considere $\theta(H) = \mathbf{Z}_3$. Então $\cos \theta(h) = 1$ para $h \in K$ e $\cos \theta(h) = -\frac{1}{2}$ para $h \in H \setminus K$. Como $H/K \cong \theta(H) = \mathbf{Z}_3$, segue respectivamente por (3.45) e (3.46) que

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \frac{2}{3} \left(\int_K \text{tr}(h) - \frac{1}{2} \int_K \text{tr}(\delta_1 h) - \frac{1}{2} \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \right)$$

e

$$\dim \text{Fix}_V(H) = \frac{1}{3} \left(\int_K \text{tr}(h) + \int_K \text{tr}(\delta_1 h) + \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \right),$$

para $\delta_1, \delta_2 \in H \setminus K$ fixados tais que $\delta_1 \notin \delta_2 K$ e $\delta_2 \notin \delta_1 K$. Assim,

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) + \dim \text{Fix}_V(H) &= \frac{2}{3} \int_K \text{tr}(h) - \frac{1}{3} \int_K \text{tr}(\delta_1 h) - \frac{1}{3} \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_K \text{tr}(h) + \frac{1}{3} \int_K \text{tr}(\delta_1 h) + \frac{1}{3} \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \\ &= \int_K \text{tr}(h) = \dim \text{Fix}_V(K), \end{aligned}$$

como desejado.

(d) Para $\theta(H) = \mathbf{Z}_4 = \langle \xi \rangle$, as classes laterais de K em H são dadas por $H_k = \theta^{-1}(\xi^k)$, onde $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $H_0 = K$. Sem perda de generalidade tomamos $H_k = \delta_k K$ com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim, $\cos \theta(h) = 1$ se $h \in K$, $\cos \theta(h) = 0$ se $h \in H_1 \cup H_3$ e $\cos \theta(h) = -1$ se $h \in H_2$. Além disso, por (3.45) temos que

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \frac{1}{2} \left(\int_K \text{tr}(h) - \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \right).$$

Note que o único subgrupo L entre K e H de índice $|H/L| = 2$ é $L = H_0 \dot{\cup} H_2$. Assim, pelo Teorema 1.1.10 e por (1.10) segue que

$$\dim \text{Fix}_V(L) = \int_L \text{tr}(h) = \int_{L/K} \left(\int_K \text{tr}(h) \right) d(hK) = \frac{1}{2} \left(\int_K \text{tr}(h) + \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \right),$$

uma vez que $|L/K| = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(L) &= \int_K \text{tr}(h) - \frac{1}{2} \left(\int_K \text{tr}(h) + \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \right) \\ &= \dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta), \end{aligned}$$

como desejado.

- (e) Para $\theta(H) = \mathbf{Z}_6 = \langle \xi \rangle$, as classes laterais de K em H são dadas por $H_k = \theta^{-1}(\xi^k)$, onde $k \in \{0, \dots, 5\}$ e $H_0 = K$. Tomamos $H_k = \delta_k K$, para $k \in \{0, \dots, 5\}$. Assim, $\cos \theta(h) = 1$ se $h \in H_0$, $\cos \theta(h) = \frac{1}{2}$ se $h \in H_1 \cup H_5$, $\cos \theta(h) = -1$ se $h \in H_3$ e $\cos \theta(h) = -\frac{1}{2}$ se $h \in H_2 \cup H_4$. Portanto, de (3.45) e (3.46) segue respectivamente que

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) &= \frac{1}{3} \left(\int_K \text{tr}(h) + \frac{1}{2} \int_K \text{tr}(\delta_1 h) - \frac{1}{2} \int_K \text{tr}(\delta_2 h) \right. \\ &\quad \left. - \int_K \text{tr}(\delta_3 h) - \frac{1}{2} \int_K \text{tr}(\delta_4 h) + \frac{1}{2} \int_K \text{tr}(\delta_5 h) \right) \end{aligned}$$

e

$$\dim \text{Fix}_V(H) = \frac{1}{6} \left(\int_K \text{tr}(h) + \sum_{j=1}^5 \int_K \text{tr}(\delta_j h) \right).$$

Note que os únicos subgrupos N e M entre K e H tais que $|H/N| = 3$ e $|H/M| = 2$ são $N = H_0 \cup H_3$ e $M = H_0 \cup H_2 \cup H_4$. Como $H/K \cong \theta(H) = \mathbf{Z}_6$, decorre que $|H/K| = 6$, $|N/K| = 2$ e $|M/K| = 3$. Novamente do Teorema 1.1.10 e por (1.10) temos

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_V(N) &= \int_N \text{tr}(h) = \int_{N/K} \left(\int_K \text{tr}(h) \right) d(hK) \\ &= \frac{1}{|N/K|} \sum_{hK \in N/K} \int_K \text{tr}(h) = \frac{1}{2} \left(\int_K \text{tr}(h) + \int_K \text{tr}(\delta_3 h) \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_V(M) &= \int_M \text{tr}(h) = \int_{M/K} \int_K \text{tr}(h) d(hK) \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_K \text{tr}(h) + \int_K \text{tr}(\delta_2 h) + \int_K \text{tr}(\delta_4 h) \right). \end{aligned}$$

Cálculos diretos agora mostram que $\dim \text{Fix}_V(H) + \dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(N) - \dim \text{Fix}_V(M) = \dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta)$, como desejado \square

Teorema 3.6.2. *Nas condições do Lema 3.6.1, $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2$ se uma das seguintes condições é válida:*

- (a) $\theta(H) = \{0\}$ e $\dim \text{Fix}_V(H) = 1$.
- (b) $\theta(H) = \mathbf{Z}_2$ e $\dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(H) = 1$.
- (c) $\theta(H) = \mathbf{Z}_3$ e $\dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(H) = 2$.
- (d) $\theta(H) = \mathbf{Z}_4$ e $\dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(L) = 2$, onde L é o único subgrupo tal que $K \subset L \subset H$ e $|H/L| = 2$.
- (e) $\theta(H) = \mathbf{Z}_6$ e $\dim \text{Fix}_V(H) + \dim \text{Fix}_V(K) - \dim \text{Fix}_V(N) - \dim \text{Fix}_V(M) = 2$, onde N e M são os únicos subgrupos entre K e H tais que $|H/N| = 3$ e $|H/M| = 2$.

Antes da prova do segundo resultado principal desta seção, nós introduzimos novos conceitos: se V é um espaço vetorial real, chamamos de **caracter** de uma representação ρ de Γ em V a função $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(\gamma) = \text{tr}(\rho_\gamma),$$

onde $\text{tr}(\rho_\gamma)$ é o traço da matriz de $\rho_\gamma \in GL(V)$. Se χ_1 e χ_2 são os caracteres das representações irredutíveis ρ_1 e ρ_2 de Γ , então valem as seguintes relações de ortogonalidade para caracteres:

$$\int_{\Gamma} \chi_1(\gamma)\chi_2(\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{se } \rho_1, \rho_2 \text{ não são equivalentes} \\ 1, & \text{se } \rho_1 \sim \rho_2 \text{ são absolutamente irredutíveis} \\ 2, & \text{se } \rho_1 \sim \rho_2 \text{ são não-absolutamente irredutíveis} \end{cases} \quad (3.48)$$

onde \int_{Γ} é a integral de Haar normalizada sobre Γ e \sim denota a equivalência de representações. Para maiores detalhes, veja [1].

Para cada twist $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$, se $\theta(H) = \{0\}$ ou $\theta(H) = \mathbf{Z}_2$, definimos uma representação irredutível $\rho_\theta : H \rightarrow GL(\mathbb{R})$ como

$$\rho_\theta(h)x = (\cos \theta(h))x, \quad (3.49)$$

para todo $h \in H$ e $x \in \mathbb{R}$. Se $\theta(H) \neq \{0\}$ e $\theta(H) \neq \mathbf{Z}_2$, definimos uma representação irredutível $\rho_\theta : H \rightarrow GL(\mathbb{C})$ como

$$\rho_\theta(h)z = e^{i\theta(h)}z, \quad (3.50)$$

para todo $h \in H$ e $z \in \mathbb{C}$. Note que no primeiro caso ρ_θ é absolutamente H -irredutível (pois os únicos operadores lineares em \mathbb{R} são os múltiplos da identidade, em particular os que comutam com ρ_θ) e no segundo caso ρ_θ é não-absolutamente H -irredutível (pois é equivalente à representação de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} , que é não-absolutamente irredutível).

Agora decomponha V em subespaços H -irredutíveis como

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k. \quad (3.51)$$

Definimos a **multiplicidade** de ρ_θ na ação de H em V como o número de V_j 's nos quais as representações de H são equivalentes a ρ_θ . Temos então o seguinte resultado:

Lema 3.6.3. *Seja $H^\theta \subset \Gamma \times \mathbf{S}^1$ um subgrupo de isotropia agindo em $V \oplus V$. Então a dimensão de $\text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta)$ é igual a 2 vezes a multiplicidade de ρ_θ na ação de H em V .*

Demonstração: Seja ρ uma representação irredutível de Γ em V . Denotamos por χ_θ o caracter de ρ_θ e por χ o caracter de $\rho|_H$ (ρ restrita a H). Além disso, denotamos por $\mu(\theta)$ a multiplicidade de ρ_θ na ação de H em V . Queremos mostrar que $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2\mu(\theta)$. Por (3.49) e (3.50) temos que

$$\chi_\theta(h) = \text{tr}(\rho_\theta(h)) = \begin{cases} \cos \theta(h), & \text{se } \theta(H) = \{0\} \text{ ou } \theta(H) = \mathbf{Z}_2 \\ 2 \cos \theta(h), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela igualdade (3.41),

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2 \int_H \chi(h) \cos \theta(h). \quad (3.52)$$

Suponha $\theta(H) = \{0\}$ ou $\theta(H) = \mathbf{Z}_2$. Então (3.52) torna-se

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2 \int_H \chi(h) \chi_\theta(h). \quad (3.53)$$

Observe que a representação $\rho|_H$ não é necessariamente irredutível. Considere então a decomposição de V em subespaços H -irredutíveis como em (3.51) e denote por ρ_j a representação de H em cada V_j . Além disso, denote por χ_j o caracter de ρ_j . Como ρ_θ é absolutamente irredutível, pelas relações de ortogonalidade dadas em (3.48) temos $\int_H \chi_j(h) \chi_\theta(h) = 1$ para todo ρ_j equivalente a ρ_θ . Para todas as outras representações ρ_i não equivalentes a ρ_θ temos $\int_H \chi_i(h) \chi_\theta(h) = 0$. Neste caso, $\int_H \chi(h) \chi_\theta(h) = \mu(\theta)$, uma vez que $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_k$. Assim, segue de (3.53) que $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2\mu(\theta)$.

Se $\theta(H) \neq \{0\}$ e $\theta(H) \neq \mathbf{Z}_2$, (3.52) torna-se

$$\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = \int_H \chi(h) \chi_\theta(h).$$

Neste caso, para cada representação ρ_j equivalente a ρ_θ temos $\int_H \chi_j(h) \chi_\theta(h) = 2$, pois ρ_θ é não-absolutamente irredutível. Para ρ_i não equivalente a ρ_θ vale que $\int_H \chi_i(h) \chi_\theta(h) = 0$. Novamente, como $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_k$, temos $\int_H \chi(h) \chi_\theta(h) = 2\mu(\theta)$ e o resultado segue. \square

O próximo teorema segue diretamente do lema anterior.

Teorema 3.6.4. *Nas condições do Lema 3.6.3, $\dim \text{Fix}_{V \oplus V}(H^\theta) = 2$ precisamente quando ρ_θ ocorre somente uma vez na representação de H em V .*

Exemplos de bifurcação de Hopf com simetria

Neste capítulo, apresentamos dois exemplos de bifurcação de Hopf com simetria. Vamos usar as ferramentas apresentadas no Capítulo 3, em particular das Seções 3.5 e 3.6, que introduzem formas eficientes de determinar os subespaços de ponto fixo bidimensionais, necessários para a aplicação do Teorema de Hopf Equivariante. Nosso objetivo é aplicar os resultados para provar a existência de ramos de soluções periódicas em sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma (3.1) com grupo de simetrias S_3 e $O(2)$, ou seja, F em (3.1) é S_3 e $O(2)$ -equivariante, respectivamente. Começamos com o caso equivariante por S_3 .

4.1 Bifurcação de Hopf com grupo de simetrias S_3

Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{C}_0^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3.$$

Considere a ação de S_3 em \mathbb{C}_0^3 definida como em (1.6), ou seja

$$\sigma(z_1, z_2, z_3) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}),$$

para todo $\sigma \in S_3$, $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}_0^3$. Como usual, vamos denotar

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Pelo Exemplo 3.2.4, temos que \mathbb{C}_0^3 é S_3 -simples. Note que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_0^3 = 4$.

Desejamos analisar a existência genérica de ramos de soluções periódicas próximas ao ponto de bifurcação $(x, \lambda) = (0, 0)$ para o sistema (3.1), onde $F : \mathbb{C}_0^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0^3$ comuta com a restrição da ação (1.6) a \mathbb{C}_0^3 . Supomos que F satisfaz (3.20) e (3.21), onde $m = 2$. Sob as hipóteses acima, nós assumimos a ação de S^1 em \mathbb{C}_0^3 dada por

$$\theta(z_1, z_2, z_3) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2, e^{i\theta} z_3),$$

para todo $\theta \in S^1$, $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}_0^3$. Então $S_3 \times S^1$ age em \mathbb{C}_0^3 como

$$(\sigma, \theta)(z_1, z_2, z_3) = \sigma(\theta(z_1, z_2, z_3)),$$

para $(\sigma, \theta) \in S_3 \times \mathbf{S}^1$ e $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}_0^3$.

Nas duas próximas subseções, nós determinamos as outras condições necessárias para a aplicação do Teorema de Hopf Equivariante.

4.1.1 Os subgrupos de isotropia de $S_3 \times \mathbf{S}^1$

Como um primeiro passo, precisamos determinar os subgrupos de isotropia da ação de $S_3 \times \mathbf{S}^1$ em \mathbb{C}_0^3 . Pelo Lema 1.4.3, pontos de uma mesma órbita possuem subgrupos de isotropia conjugados. Além disso, por [12, Proposition 3.2], existem cinco tipos de órbitas para a ação de $S_3 \times \mathbf{S}^1$ em \mathbb{C}_0^3 , com os seguintes representantes para cada tipo: $(0, 0, 0)$, $(a, -a, 0)$, $(a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a)$, $(2a, -a, -a)$ e $(a, b, -(a+b))$, onde $a, b > 0$ e $b < a$. Agora, vamos determinar o subgrupo de isotropia para cada representante, seguindo as notações consideradas em [12]. Assim, temos que:

- (i) O elemento $(0, 0, 0)$ é fixado por todos os elementos de $S_3 \times \mathbf{S}^1$. Além disso, o único elemento fixado por $S_3 \times \mathbf{S}^1$ é $(0, 0, 0)$, visto que a ação não é a trivial. Logo, $S_3 \times \mathbf{S}^1$ é o subgrupo de isotropia de $(0, 0, 0)$.
- (ii) Para que $(\sigma, \theta) \in S_3 \times \mathbf{S}^1$ fixe $(a, -a, 0)$, devemos ter

$$\sigma(e^{i\theta}a, -e^{i\theta}a, 0) = (\sigma, \theta)(a, -a, 0) = (a, -a, 0). \quad (4.1)$$

Para $\sigma \in \{(13), (23), (123), (132)\}$, não existe $\theta \in \mathbf{S}^1$ tal que (σ, θ) satisfaça (4.1). Claramente $((1), 0) \in S_3 \times \mathbf{S}^1$ satisfaz (4.1) e

$$((12), \pi)(a, -a, 0) = (-e^{i\pi}a, e^{i\pi}a, 0) = (a, -a, 0).$$

Logo, $\tilde{\mathbf{Z}}_2 = \{((1), 0), ((12), \pi)\} \subset S_3 \times \mathbf{S}^1$ é o subgrupo de isotropia de $(a, -a, 0)$.

- (iii) Se $(\sigma, \theta) \in S_3 \times \mathbf{S}^1$ pertence ao subgrupo de isotropia de $(a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a)$, então

$$\sigma(e^{i\theta}a, e^{i(\theta+\frac{2\pi}{3})}a, e^{i(\theta+\frac{4\pi}{3})}a) = (\sigma, \theta)(a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a) = (a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a). \quad (4.2)$$

Não existe $\theta \in \mathbf{S}^1$ tal que (σ, θ) satisfaz (4.2), para $\sigma \in \{(13), (12), (23)\}$. Além disso,

$$\left((123), \frac{2\pi}{3} \right) (a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a) = (123)(e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a, a) = (a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a)$$

e

$$\left((132), \frac{4\pi}{3} \right) (a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a) = (132)(e^{i\frac{4\pi}{3}}a, a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a) = (a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a).$$

Portanto $\tilde{\mathbf{Z}}_3 = \{((1), 0), ((123), \frac{2\pi}{3}), ((132), \frac{4\pi}{3})\} \subset S_3 \times \mathbf{S}^1$ é o subgrupo de isotropia de $(a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a)$.

- (iv) Um elemento $(\sigma, \theta) \in S_3 \times \mathbf{S}^1$ fixa $(2a, -a, -a)$ se satisfaz

$$\sigma(e^{i\theta}2a, -e^{i\theta}a, -e^{i\theta}a) = (\sigma, \theta)(2a, -a, -a) = (2a, -a, -a). \quad (4.3)$$

- Se $\sigma \in \{(12), (13), (123), (132)\}$, não existe $\theta \in \mathbf{S}^1$ de modo que (σ, θ) satisfaça (4.3). Ainda, cálculos diretos mostram que $((23), 0)$ e $((1), 0)$ satisfazem (4.3). Assim, $S_1 \times S_2 = \{((1), 0), ((23), 0)\} \subset S_3 \times \mathbf{S}^1$ é o subgrupo de isotropia de $(2a, -a, -a)$.
- (v) O único elemento de $S_3 \times \mathbf{S}^1$ que fixa $(a, b, -(a+b))$ é $((1), 0)$. Logo, $\{((1), 0)\} \subset S_3 \times \mathbf{S}^1$ é o subgrupo de isotropia de $(a, b, -(a+b))$.

Na Tabela 4.1 listamos as cinco classes de conjugação dos subgrupos de isotropia para a ação de $S_3 \times \mathbf{S}^1$ em \mathbb{C}_0^3 , juntamente com os representantes da órbita.

Representante da órbita	Subgrupo de Isotropia
$(0, 0, 0)$	$S_3 \times \mathbf{S}^1$
$(a, -a, 0), a > 0$	$\tilde{\mathbf{Z}}_2$
$(a, e^{i\frac{2\pi}{3}}a, e^{i\frac{4\pi}{3}}a), a > 0$	$\tilde{\mathbf{Z}}_3$
$(2a, -a, -a), a > 0$	$S_1 \times S_2$
$(a, b, -(a+b)), a > b > 0$	$\{((1), 0)\}$

Tabela 4.1: Subgrupos de isotropia da ação de $S_3 \times \mathbf{S}^1$ em \mathbb{C}_0^3 .

Utilizando a Proposição 3.5.2, temos que todos os subgrupos de isotropia da ação de $S_3 \times \mathbf{S}^1$, exceto o próprio $S_3 \times \mathbf{S}^1$, são subgrupos twisted, ou seja, têm a forma $H^\theta = \{(h, \theta(h)); h \in H\}$ para algum subgrupo H de S_3 e para algum homomorfismo $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$. Vamos determinar agora os subgrupos de S_3 que descrevem cada subgrupo de isotropia como um subgrupo twisted:

- (i) A Proposição 3.5.2 não se aplica ao subgrupo $S_3 \times \mathbf{S}^1$.
- (ii) Seja $H_1 = \{(1), (12)\} \subset S_3$. Defina o homomorfismo de grupos $\theta_1 : H_1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ por $\theta_1((12)) = \pi$. Dessa forma, obtemos $H_1^{\theta_1} = \{((1), 0), ((12), \pi)\} = \tilde{\mathbf{Z}}_2$.
- (iii) Tomando $H_2 = \{(1), (123), (132)\} \subset S_3$ e definindo o homomorfismo $\theta_2 : H_2 \rightarrow \mathbf{S}^1$ como $\theta_2((123)) = \frac{2\pi}{3}$, obtemos $H_2^{\theta_2} = \{((1), 0), ((123), \frac{2\pi}{3}), ((132), \frac{4\pi}{3})\} = \tilde{\mathbf{Z}}_3$.
- (iv) Considere $H_3 = \{(1), (23)\} \subset S_3$ e o homomorfismo $\theta_3 : H_3 \rightarrow \mathbf{S}^1$ dado por $\theta_3((23)) = 0$. Então, $H_3^{\theta_3} = \{((1), 0), ((23), 0)\} = S_1 \times S_2$.
- (v) Seja $H_4 = \{(1)\} \subset S_3$ e considere o homomorfismo $\theta_4 : H_4 \rightarrow \mathbf{S}^1$ dado por $\theta_4((1)) = 0$. Assim, $H_4^{\theta_4} = \{((1), 0)\}$.

4.1.2 Os subespaços de ponto fixo de dimensão 2

Como já mencionamos, estamos interessados apenas nos subgrupos de isotropia com subespaço de ponto fixo 2-dimensional. Nesta subseção, utilizamos os resultados obtidos na Seção 3.6, mais especificamente o Lema 3.6.1 e o Teorema 3.6.4, para determinar as dimensões dos respectivos subespaços de ponto fixo para os subgrupos listados na Tabela 4.1. Temos o seguinte:

- (i) Claramente, $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(S_3 \times \mathbf{S}^1) = 0$.

(ii) Visto que $\theta_1(H_1) = \mathbf{Z}_2$, do Lema 3.6.1 temos

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(\tilde{\mathbf{Z}}_2) = 2(\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(K_1) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_1)),$$

onde $K_1 = \ker \theta_1 = \{(1)\}$. Assim, como $\text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_1) = \{(x_1, x_1, -2x_1); x_1 \in \mathbb{R}\}$ e $\text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(K_1) = \mathbb{R}_0^3$, segue que $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(K_1) = 2$ e $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_1) = 1$. Portanto, $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(\tilde{\mathbf{Z}}_2) = 2$.

(iii) Temos $\theta_2(H_2) = \mathbf{Z}_3$, então o Lema 3.6.1 nos fornece que

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(\tilde{\mathbf{Z}}_3) = \dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(K_2) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_2),$$

onde $K_2 = \ker \theta_2 = \{(1)\}$. Note que $\text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_2) = \{(0, 0, 0)\}$ e $\text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(K_2) = \mathbb{R}_0^3$. Então, $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(\tilde{\mathbf{Z}}_3) = \dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(K_2) = 2$.

(iv) Como $\theta_3(H_3) = \{0\}$, o Lema 3.6.1 implica em

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(S_1 \times S_2) = 2 \dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_3).$$

Uma vez que $\text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_3) = \{(-2x_2, x_2, x_2); x_2 \in \mathbb{R}\}$, temos $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_3) = 1$ e então $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(S_1 \times S_2) = 2$.

(v) Como $\theta_4(H_4) = \{0\}$, pelo Lema 3.6.1 temos que

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(\{((1), 0)\}) = 2 \dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_1).$$

Note que $\text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_1) = \mathbb{R}_0^3$, o que implica em $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_0^3}(H_1) = 2$. Portanto,

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_0^3}(\{((1), 0)\}) = 4.$$

Assim, os subgrupos de isotropia de $S_3 \times S^1$ com subespaços de ponto fixo 2-dimensionais são $\tilde{\mathbf{Z}}_2$, $\tilde{\mathbf{Z}}_3$ e $S_1 \times S_2$. Pelo Teorema de Hopf Equivariante, para cada subgrupo Σ no conjunto $\{\tilde{\mathbf{Z}}_2, \tilde{\mathbf{Z}}_3, S_1 \times S_2\}$, temos garantida a existência de um único ramo de soluções periódicas de pequena amplitude para o sistema (3.1) com período próximo a 2π , tendo Σ como seu grupo de simetrias.

4.2 Bifurcação de Hopf com grupo de simetrias $\mathbf{O}(2)$

Nesta seção, verificamos a ocorrência de bifurcação de Hopf com grupo de simetrias $\mathbf{O}(2)$. Para isso, consideramos a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definida em (1.30). No item 2. do Exemplo 1.2.12, mostramos que esta ação é absolutamente $\mathbf{O}(2)$ -irredutível. Portanto, o espaço $W = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ é $\mathbf{O}(2)$ -simples, considerando $\mathbf{O}(2)$ agindo em W pela ação diagonal da ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} , ou seja,

$$\varphi(w_1, w_2) = (e^{i\varphi} w_1, e^{i\varphi} w_2) \quad \text{e} \quad \kappa(w_1, w_2) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2), \quad (4.4)$$

para todo $\varphi \in \mathbf{SO}(2)$ e $(w_1, w_2) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Consideramos o sistema (3.1), onde $F : W \times \mathbb{R} \rightarrow W$ comuta com a ação (4.4) e satisfaz (3.20) e (3.21) para $m = 2$. O primeiro passo em nosso estudo é encontrar as classes de conjugação dos subgrupos de isotropia de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ agindo em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Antes, vamos especificar a ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ que é usada neste processo. Daqui em diante, denotamos as rotações \mathbf{R}_φ de $\mathbf{O}(2)$ por φ .

4.2.1 A ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$

A ação padrão de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ considerada até o momento é dada por

$$(\gamma, \theta)(w_1, w_2) = \gamma(e^{i\theta}w_1, e^{i\theta}w_2),$$

para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$, onde $\gamma \in \mathbf{O}(2)$ age como em (4.4).

O objetivo aqui é reescrever esta ação de um modo mais conveniente para os nossos cálculos. Mais especificamente, em [17, XVII, §1(b)], os autores mostram que $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ pode ser escrito como $Z_1 \oplus Z_2$, onde $Z_1 = \mathbb{C}\{(1, i)\}$ e $Z_2 = \kappa Z_1$ são subespaços $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1$ -invariantes. Nas coordenadas $(z_1, z_2) \in Z_1 \oplus Z_2$, podemos reescrever a ação de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = Z_1 \oplus Z_2$ por

$$(a) \varphi(z_1, z_2) = (e^{-i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2) \quad \text{e} \quad (b) \kappa(z_1, z_2) = (z_2, z_1), \quad (4.5)$$

onde $\varphi \in \mathbf{SO}(2)$. Os detalhes desta construção são omitidos aqui.

A partir de agora, consideramos a ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $Z_1 \oplus Z_2$ dada por

$$(\gamma, \theta)(z_1, z_2) = \gamma(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2),$$

onde $\gamma \in \mathbf{O}(2)$ age em $Z_1 \oplus Z_2$ como em (4.5).

4.2.2 Os subgrupos de isotropia de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$

Vamos determinar os subgrupos de isotropia da ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = Z_1 \oplus Z_2$. Para $(\varphi, \theta) \in \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1$ e $(z_1, z_2) \in Z_1 \oplus Z_2$, temos

$$(\varphi, \theta)(z_1, z_2) = (e^{i(\theta-\varphi)}z_1, e^{i(\theta+\varphi)}z_2). \quad (4.6)$$

Note que $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1$ age em $Z_1 \oplus Z_2$ por meio de rotações e a ação de $\{\kappa\} \times \mathbf{S}^1$ apenas permuta a ordem das coordenadas. Assim, podemos tomar como representantes das órbitas elementos de $Z_1 \oplus Z_2$ na forma $(z_1, z_2) = (a, b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \geq b \geq 0$, uma vez que se $b > a$ podemos agir por κ e obter $b < a$.

Por [17, XVII, §1(c)], existem 4 tipos de órbitas para a ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, cujos representantes são: $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) e (a, b) , onde $a, b > 0$ e $b < a$. Para o que segue, usamos as notações de [17]. Para cada representante, vamos descrever os subgrupos de isotropia desta ação:

- (i) Claramente, $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ é o subgrupo de isotropia de $(0, 0)$.
- (ii) Os elementos de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ do tipo $(\kappa\varphi, \theta)$ e $(\varphi\kappa, \theta)$, para $\varphi \in \mathbf{SO}(2)$, não podem pertencer ao subgrupo de isotropia de $(a, 0)$, uma vez que κ permuta a ordem das coordenadas. Por (4.6), para um elemento $(\varphi, \theta) \in \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1$ fixar $(a, 0)$ precisamos ter $\theta - \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$, ou seja $\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}$. Assim, o subgrupo de isotropia de $(a, 0)$ é $\widetilde{\mathbf{SO}}(2) = \{(\theta, \theta) \in \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1\}$.
- (iii) O elemento (a, b) , com $a > b > 0$ não é fixado por nenhum elemento de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ dos tipos $(\kappa\varphi, \theta)$ e $(\varphi\kappa, \theta)$, com $\varphi \in \mathbf{SO}(2)$, pelo mesmo argumento utilizado no item (ii). Assim, resta verificar se existe $(\varphi, \theta) \in \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1$ que fixa (a, b) . Por (4.6), (φ, θ) existe se, e somente se, $\theta \pm \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Assim, $(\varphi, \theta) = (0, 0)$ ou $(\varphi, \theta) = (\pi, \pi)$. Nós denotamos o subgrupo de isotropia de (a, b) por $\mathbf{Z}_2^c = \{(0, 0), (\pi, \pi)\}$.
- (iv) Por (4.6), um elemento $(\varphi, \theta) \in \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{S}^1$ fixa o representante (a, a) somente se $\theta \pm \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Isto nos fornece os elementos $(0, 0)$ e (π, π) . Além disso, como $(\kappa, \theta)(a, a) = (e^{i\theta}a, e^{i\theta}a)$, temos que $(\kappa, 0)$ também fixa (a, a) . Assim, o subgrupo de isotropia de (a, a) é $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c = \{(0, 0), (\kappa, 0), (\pi, \pi), (\kappa\pi, \pi)\}$.

Portanto, obtemos as classes de conjugação dos subgrupos de isotropia da ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$. Estas informações estão organizadas na Tabela 4.2, juntamente com os representantes das órbitas. Pela Proposição 3.5.2, temos que os subgrupos $\widetilde{\mathbf{SO}}(2)$, \mathbf{Z}_2^c e $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c$

Representante da órbita	Subgrupo de Isotropia
$(0, 0)$	$\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$
$(a, 0), a > 0$	$\widetilde{\mathbf{SO}}(2)$
$(a, b), a > b > 0$	\mathbf{Z}_2^c
$(a, a), a > 0$	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c$

Tabela 4.2: Subgrupos de isotropia da ação de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

podem ser escritos como subgrupos twisted. De fato:

- (i) A Proposição 3.5.2 não se aplica ao subgrupo de isotropia $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$.
- (ii) Considere o homomorfismo $\theta_1 : \mathbf{SO}(2) \rightarrow \mathbf{S}^1$ dado por $\theta_1(\varphi) = \varphi$. Assim,

$$\mathbf{SO}(2)^{\theta_1} = \widetilde{\mathbf{SO}}(2).$$

- (iii) Considere o subgrupo $\mathbf{Z}_2 = \langle \pi \rangle \subset \mathbf{O}(2)$ e defina o homomorfismo $\theta_2 : \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{S}^1$ por $\theta_2(\pi) = \pi$. Dessa forma, temos $\mathbf{Z}_2^{\theta_2} = \mathbf{Z}_2^c$.
- (iv) Sejam $H = \langle \pi, \kappa \rangle \subset \mathbf{O}(2)$ e $\theta_3 : H \rightarrow \mathbf{S}^1$ o homomorfismo de grupos definido por $\theta_3(\kappa) = 0$ e $\theta_3(\pi) = \pi$. Então, $H^{\theta_3} = \{(0, 0), (\kappa, 0), (\pi, \pi), (\kappa\pi, \pi)\} = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c$.

4.2.3 Os subespaços de ponto fixo de dimensão 2

Temos agora todas as ferramentas necessárias para determinar a dimensão dos subespaços de ponto fixo dos subgrupos de isotropia listados na Tabela 4.2. Assim como

fizemos na Subseção 4.1.2, aqui não vamos especificar quais são os subespaços de ponto fixo, nos restringindo apenas ao cálculo de suas dimensões. Para cada caso, temos:

- (i) Claramente, $\text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1) = \{(0, 0)\}$. Logo, $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1) = 0$.
- (ii) Note que $\theta_1(\mathbf{SO}(2)) = \mathbf{S}^1$, que é diferente de $\{0\}$ e \mathbf{Z}_2 . Por (3.50), temos definida a representação irredutível $\rho_{\theta_1}(h)z = e^{i\theta_1(h)}z$, que é equivalente à representação padrão de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{C} . Além disso, note que \mathbb{C} é $\mathbf{SO}(2)$ -irredutível por esta ação. Então, a multiplicidade de ρ_{θ_1} na representação de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{C} é igual a um. Pelo Teorema 3.6.4, segue que $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\widetilde{\mathbf{SO}}(2)) = 2$.
- (iii) Note que $\theta_2(\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$. Então, pelo Lema 3.6.1, obtemos

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2^c) = 2(\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}}(K_2) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2)),$$

onde $K_2 = \ker \theta_2 = \{0\}$. Uma vez que $\text{Fix}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2) = \{0\}$ e $\text{Fix}_{\mathbb{C}}(K_2) = \mathbb{C}$, temos $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2^c) = 4$.

- (iv) Pelo Lema 3.6.1, como $\theta_3(H) = \mathbf{Z}_2$, temos

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c) = 2(\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}}(K_3) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{C}}(H)),$$

onde $K_3 = \ker \theta_3 = \langle \kappa \rangle$. Como $\text{Fix}_{\mathbb{C}}(K_3) = \mathbb{R}$ e $\text{Fix}_{\mathbb{C}}(H) = \{0\}$, concluímos que $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c) = 2$.

Assim, os únicos subgrupos de isotropia de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ com subespaços de ponto fixo 2-dimensionais são $\widetilde{\mathbf{SO}}(2)$ e $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c$. Portanto, pelo Teorema de Hopf Equivariante, para cada subgrupo $\Sigma \in \{\widetilde{\mathbf{SO}}(2), \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c\}$, existe um único ramo de soluções periódicas de pequena amplitude para o sistema (3.1) com período próximo a 2π , tendo Σ como seu grupo de simetrias.

A redução de Liapunov-Schmidt com simetria

Tratamos aqui do método de redução de Liapunov-Schmidt. Este é um método importante no estudo de problemas de bifurcações, visto que reduz equações de bifurcação de pontos de equilíbrio definidas em espaços de Banach em bifurcações de zeros de uma aplicação associada definida em um espaço de dimensão finita. Utilizamos este método de redução nos Capítulos 2 e 3, que para nossos propósitos é descrito apenas no contexto com simetria, ou seja, quando o operador Φ em (A.1) comuta com um grupo de Lie compacto. Para a aplicação do método é necessário que a linearização de Φ seja um operador Fredholm de índice nulo. Introduzimos então os seguintes conceitos:

Definição 1.0.1. *Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} espaços de Banach. Um operador linear limitado $\mathcal{L} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é dito **Fredholm** se $\ker \mathcal{L}$ é um subespaço de dimensão finita de \mathcal{X} e $\text{Im} \mathcal{L}$ é um subespaço fechado de \mathcal{Y} com codimensão finita.*

Definição 1.0.2. *Se \mathcal{L} é um operador Fredholm, o **índice de \mathcal{L}** é o inteiro*

$$i(\mathcal{L}) = \dim \ker \mathcal{L} - \text{codim } \text{Im} \mathcal{L}.$$

Quando $i(\mathcal{L}) = 0$ dizemos que \mathcal{L} é um operador Fredholm de índice nulo.

O próximo resultado é de grande importância no processo de redução.

Proposição 1.0.3. *Se $\mathcal{L} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é Fredholm, então existem subespaços fechados M e N de \mathcal{X} e \mathcal{Y} , respectivamente, tal que $\mathcal{X} = \ker \mathcal{L} \oplus M$ e $\mathcal{Y} = N \oplus \text{Im} \mathcal{L}$.*

Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} espaços de Banach sob ações lineares de um grupo de Lie compacto Γ . Seja

$$\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \Phi(0, 0) = 0, \quad (\text{A.1})$$

uma aplicação suave Γ -equivariante, onde $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $\alpha_0 = \lambda$ é o parâmetro de bifurcação. Suponha que a diferencial $\mathcal{L} = (d\Phi)_{0,0}$ de Φ com respeito a u na origem seja um operador Fredholm de índice nulo. Queremos usar a redução de Liapunov-Schmidt para resolver a equação $\Phi(u, \alpha) = 0$, para u e α perto da origem. Dividimos o

procedimento em cinco passos, seguindo [15, Chapter VII]. O ponto principal aqui é que a equação reduzida herda as simetrias de Φ , desde que durante o processo de redução a simetria seja respeitada.

1º Passo: Decomponha os espaços \mathcal{X} e \mathcal{Y} como

$$(a) \mathcal{X} = \ker \mathcal{L} \oplus M \quad e \quad (b) \mathcal{Y} = N \oplus \text{Im} \mathcal{L}, \quad (\text{A.2})$$

onde M , N , $\ker \mathcal{L}$ e $\text{Im} \mathcal{L}$ são subespaços Γ -invariantes (veja Definição 1.2.1).

Pela Proposição 1.0.3, estas decomposições são possíveis, posto que \mathcal{L} é Fredholm por hipótese. Ainda, $\dim \ker \mathcal{L} = \dim N = s < \infty$, pois \mathcal{L} é de índice nulo.

2º Passo: Considere $E : \mathcal{Y} \rightarrow \text{Im} \mathcal{L}$ a projeção associada à decomposição (A.2)(b) e I o operador identidade em \mathcal{Y} . A equação $\Phi(u, \alpha) = 0$ pode ser substituída pelas duas equações equivalentes

$$(a) E\Phi(u, \alpha) = 0 \quad e \quad (b) (I - E)\Phi(u, \alpha) = 0. \quad (\text{A.3})$$

3º Passo: Escreva $u \in \mathcal{X}$ como $u = v + w$, onde $v \in \ker \mathcal{L}$ e $w \in M$. Pela regra da cadeia, a derivada de $E\Phi$ com respeito à variável w na origem é

$$(E(d\Phi)_{0,0})|_M = (E\mathcal{L})|_M = \mathcal{L}|_M,$$

pois $E|_{\text{Im} \mathcal{L}} = I$. Entretanto, $\mathcal{L} : M \rightarrow \text{Im} \mathcal{L}$ é invertível, pois $\ker \mathcal{L} \cap M = \{0\}$. Assim, o Teorema da Função Implícita garante que podemos resolver (A.3)(a) para w como uma função de v e α . Este procedimento nos fornece uma única aplicação $W : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ tal que

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0. \quad (\text{A.4})$$

4º Passo: Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} &\rightarrow N \\ (v, \alpha) &\mapsto (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Chamamos ϕ de **aplicação reduzida**. Como W satisfaz (A.4), segue que $\phi(v, \alpha) = \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)$, ou seja, $\Phi(u, \alpha) = 0$ se, e somente se, $\phi(v, \alpha) = 0$.

5º Passo: Escolha uma base $\{v_1, \dots, v_s\}$ para $\ker \mathcal{L}$ e uma base $\{v_1^*, \dots, v_s^*\}$ para N . Defina a aplicação $g : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^s$ por

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_s v_s, \alpha) \rangle,$$

para $i = 1, \dots, s$ e $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$. Note que $\phi(v, \alpha) = 0$ se, e somente se, $g_i(x, \alpha) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Assim, os zeros de Φ estão em correspondência biunívoca com os zeros da aplicação g .

Mostramos então que a aplicação ϕ obtida na redução de Liapunov-Schmidt é uma aplicação Γ -equivariante. Para provar isto, usamos o fato de que Φ é Γ -equivariante, ou seja, $\Phi(\gamma u, \alpha) = \gamma \Phi(u, \alpha)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $u \in \mathcal{X}$.

Proposição 1.0.4. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em \mathcal{X} e \mathcal{Y} . Considere Φ uma aplicação definida conforme (A.1) e seja $\phi : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$ a equação reduzida (A.5). Se os subespaços M e N obtidos em (A.2) são Γ -invariantes, então a aplicação ϕ comuta com a ação de Γ em $\ker \mathcal{L}$; em símbolos*

$$\phi(\gamma v, \lambda) = \gamma \phi(v, \alpha), \quad \forall v \in \ker \mathcal{L} \text{ e } \gamma \in \Gamma.$$

Demonstração: Seja $E : \mathcal{Y} \rightarrow \text{Im} \mathcal{L}$ a projeção associada à decomposição (A.2)(b) com núcleo N . Seja $u = v + w \in \mathcal{Y}$ qualquer, onde $v \in \text{Im} \mathcal{L}$ e $w \in N$. Pela linearidade de E e da ação de Γ em \mathcal{Y} , temos que

$$\gamma E(u) = \gamma v = E(\gamma v) = E(\gamma v + \gamma w) = E(\gamma u), \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

onde a segunda e a terceira igualdades seguem pois $\text{Im} \mathcal{L}$ e N são subespaços Γ -invariantes, respectivamente. Logo, E é Γ -equivariante. Além disso, pela Γ -equivariância de I , temos que $I - E$ também é Γ -equivariante.

Seja $W : \ker \mathcal{L} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ a aplicação obtida no 3º Passo da redução. Afirmamos que $W(\gamma v, \alpha) = \gamma W(v, \alpha)$, para todo $v \in \ker \mathcal{L}$ e $\gamma \in \Gamma$. Para provar isto, fixamos $\gamma \in \Gamma$ e definimos $W_\gamma(v, \alpha) = \gamma^{-1} W(\gamma v, \alpha)$. Logo,

$$E\Phi(v + W_\gamma(v, \alpha), \alpha) = E\Phi(\gamma^{-1}(\gamma v + W(\gamma v, \alpha)), \alpha) = \gamma^{-1} E\Phi(\gamma v + W(\gamma v, \alpha), \alpha) = 0,$$

pois $E\Phi$ é Γ -equivariante e (A.4) é válida para todo $v \in \ker \mathcal{L}$, em particular para γv . Assim W_γ também resolve a equação $E\Phi(u, \alpha) = 0$ e

$$W_\gamma(0, 0) = \gamma^{-1} W(0, 0) = \gamma^{-1} 0 = 0.$$

Pela unicidade de soluções para o Teorema da Função Implícita, concluímos que $W_\gamma(v, \alpha) = W(v, \alpha)$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Assim,

$$\gamma W(v, \alpha) = \gamma W_\gamma(v, \alpha) = \gamma(\gamma^{-1} W(\gamma v, \alpha)) = W(\gamma v, \alpha),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in \ker \mathcal{L}$, o que prova a afirmação.

Como W , Φ e $I - E$ são Γ -equivariantes, temos

$$\begin{aligned} \phi(\gamma v, \alpha) &= (I - E)\Phi(\gamma v + W(\gamma v, \alpha), \alpha) \\ &= (I - E)\Phi(\gamma(v + W(v, \alpha)), \alpha) \\ &= (I - E)(\gamma \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha)) \\ &= \gamma(I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \\ &= \gamma \phi(v, \alpha), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in \ker \mathcal{L}$, como desejado. Portanto, a equação reduzida ϕ herda as simetrias da equação original Φ . \square

Bibliografia

- [1] Adams, J. F. [1969] *Lectures on Lie Groups*, University of Chicago Press, New York.
- [2] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. e Maier, A.G. [1971] Theory of bifurcations of Dynamical Systems on a plane, *Israel Program Sci. Transl.*
- [3] Antoneli, F., Dias, A. P. S. e Matthews, P. C. [2007] Invariants, Equivariants and Characters in Symmetric Bifurcation Theory, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, Section A, Mathematics **137**, 01-36.
- [4] Arnold, V. I. [1983] *Geometrical Methods in the theory of Ordinary Differential Equations*, Grundlehren Math. Wiss. **250**, Springer-Verlag, New York.
- [5] Ashwin, P. e Podvigina, O. [2003] Hopf bifurcation with cubic symmetry and instability of ABC flow, *Proc. Roy. Soc. A* **459**, 1801 - 1827.
- [6] Benito, R. N. [2005] *A Redução de Liapunov-Schmidt e a Bifurcação de Hopf*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP.
- [7] Bröcker, T. e Dieck, T. tom [1995] *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, NY.
- [8] Çelik, C. [2008] The stability and Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons and Fractals* **37**, 87-99.
- [9] Chossat, P. e Lauterbach, R. [2000] Methods in equivariant bifurcations and dynamical systems, *Adv. Ser. Nonlinear Dynam.*, World Scientific.
- [10] Chossat, P., Ortega, J. P. e Ratin, T. S. [2002] Hamiltonian Hopf bifurcation with symmetry, *Arch. Rational Mech. Anal.* **163**, 1 - 33.
- [11] Dias, A. P. S. e Stewart, I. [1999] Hopf bifurcation on a simple cubic lattice, *Dynam. Stab. Syst.* **14**, 3 - 55.

- [12] Dias, A. P. S. e Paiva, R. C. [2005] Hopf bifurcation with S_3 -symmetry, *Portugal. Math.* **63**, 127 - 155.
- [13] Dias, F. S. e Mello, L. F. [2013] Hopf bifurcations and small amplitude limit cycles in Rucklidge systems. *Electron. J. Differential Equations* **48**, 1 - 9.
- [14] Gattass, M. e Biasi, S. C. [2002] *Utilização de quatérnios para representação de rotações em 3D*, Monografia.
- [15] Golubitsky, M. e Schaeffer, D. G. [1984] *Singularities and groups in Bifurcation Theory*, Vol I, Appl. Math. Sci. **51**, Springer-Verlag, NY.
- [16] Golubitsky, M. e Stewart, I. [1985] Hopf bifurcation in the presence of symmetry, *Arch. Rational Mech. Anal.* **87**, 107 - 165.
- [17] Golubitsky, M., Stewart, I. e Schaeffer, D. G. [1985] *Singularities and groups in Bifurcation Theory*, Vol II, Appl. Math. Sci. **69**, Springer-Verlag, NY.
- [18] Golubitsky, M. e Stewart, I. [1986] *Hopf bifurcation with dihedral group symmetry: coupled nonlinear oscillators*, In: Multiparameter Bifurcation Theory (M. Golubitsky and J.M. Guckenheimer eds), Contemp. Math. **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 131 - 173.
- [19] Golubitsky, M. e Roberts, M. [1987] A classification of degenerate Hopf bifurcation with $O(2)$ symmetry, *J. Differential Equations.* **69**, 216 - 264.
- [20] Golubitsky, M. e Stewart, I. [1993] An algebraic criterion for symmetric Hopf bifurcation, *Proc. Roy. Soc. London A* **440**, 727-732.
- [21] Guckenheimer, J., Myers, M. e Sturmfels, B. [1997] Computing Hopf Bifurcations I, *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (1), 1 - 21.
- [22] Haaf, H., Roberts, M. e Stewart, I. [1993] A Hopf bifurcation with spherical symmetry, *Z. Angew. Math. Phys.* **43**, 793 - 826.
- [23] Hale, J. e Kocak, H. [1991] *Dynamics and Bifurcation*, Texts in Applied Mathematics **3**, Spring-Verlag, NY.
- [24] Halmos, P. R. [1974] *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Spring-Verlag, NY.
- [25] Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. e Wan, Y. H. [1981] Theory and applications of Hopf bifurcation. *London Math. Soc.: Hopf Lecture Note Series* **41**, Cambridge University Press, Cambridge.
- [26] Hochschild, G. [1965] *The Structure of Lie Groups*, Holden-Day, São Francisco.
- [27] Kirillov, A. A. [1976] *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, NY.

- [28] Kreyszig, E. [1978] *Introductory Functional Analysis with Applications*, Editora John Willey Sons., NY.
- [29] Manoel, M. e Stewart, I. [1999] Degenerate bifurcations with $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -symmetry, *Internat. J. Bifur. Chaos* **9**, 1653 - 1667.
- [30] Marsden, J. e McCracken, M. [1976] *The Hopf bifurcation and its applications*. Appl. Math. Sci. **19**. Springer- Verlag, NY.
- [31] Mees, A. I. e Chua, L.O. [1979] The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems, *IEEE Trans. Circuits Systems*, **26** (4), 235 - 254.
- [32] Melbourne, I. [1986] A Singularity Theory Analysis of Bifurcation Problems with Octahedral Symmetry, *Dynam. Stabil. Syst.*, 293 - 321.
- [33] Morris, S. A. [1987] The circle group, *Bull. Austral. Math. Soc.* **36**, Cambridge University Press, 279 - 282.
- [34] Nachbin, L. [1976] *The Haar Integral*, R. E. Krieger Pub. Co.
- [35] Rodrigues, A. M. S. A. [2007] *Bifurcation of Dynamical Systems with Symmetry*, Tese de doutorado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- [36] Sattinger, D. H. [1979] *Group Theory Methods in Bifurcation Theory*. LNM **762**, Springer-Verlag, NY.
- [37] Swift, J. [1988] Hopf bifurcation with the symmetry of the square, *Nonlinearity* **1**, 333-377.
- [38] Trindade, M. A. e Sampaio, R. [2000] Uma Revisão sobre a Parametrização de Rotações Finitas na Dinâmica de Corpos Rígidos, *J. Braz. Soc. Mech. Sci.* **22**, Campinas.
- [39] Vanderbauwhede, A. [1982] Local bifurcation and symmetry, *Res. Notes Math.* **75** Pitman, Boston, MA.

Lista de Notações

Γ	grupo de Lie;
$M_n(\mathbb{R})$	conjunto das matrizes de ordem n com entradas reais;
$GL(n)$	matrizes não singulares de ordem n com entradas reais;
$GL(V)$	espaço vetorial das aplicações lineares invertíveis $V \mapsto V$;
\int_{Γ}	integral de Haar normalizada;
$\Re(z)$	parte real do número $z \in \mathbb{C}$;
$\Im(z)$	parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$;
I	operador identidade;
I_n	matriz identidade de ordem n ;
\mathcal{D}_{Γ}	espaço vetorial dos operadores Γ -equivariantes;
$\mathcal{P}(\Gamma)$	anel das funções Γ -invariantes;
$\mathcal{E}(\Gamma)$	anel dos germes Γ -invariantes;
$\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$	módulo das aplicações Γ -equivariantes sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$;
$\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$	módulo dos germes Γ -equivariantes sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$;
Γx	órbita da ação de Γ em x ;
Σ_x	subgrupo de isotropia de x ;
$\text{Fix}_V(\Sigma)$	subespaço de ponto fixo de um subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$;
\mathcal{L}^*	operador adjunto do operador \mathcal{L} ;
E_{μ}	autoespaço real associado ao autovalor μ ;
G_{μ}	autoespaço generalizado real associado ao autovalor μ ;
E_i	autoespaço imaginário;
H^{θ}	subgrupo twisted em $\Gamma \times \mathbf{S}^1$ para um homomorfismo $\theta : H \rightarrow \mathbf{S}^1$.

- órbita, 23
- índice, 83
- ação, 4
- ação mudança de fase, 34
- ações isomorfas, 7
- aplicação Γ -equivariante, 15
- aplicação reduzida, 84
- autoespaço
 - generalizado real, 52
 - imaginário real, 52
- autoespaço real, 52
- base de Hilbert, 21
- bifurcação de Hopf, 31
- caracter, 74
- ciclo limite, 33
- componentes isotópicas, 12
- função invariante, 20
- geradores de um módulo, 22
- germe, 19
- grupo
 - cíclico de orden n , 4
 - de Lie, 2
 - de Lie compacto, 4
 - de rotações n -dimensional, 3
 - diedral, 4
 - ortogonal, 2
- integral
 - de Haar, 8
 - de Haar normalizada, 8
- irredutibilidade absoluta, 16
- multiplicidade de uma representação, 74
- não-absolutamente irredutível, 52
- operador Fredholm, 83
- ponto de bifurcação, 31
- problema de bifurcação, 47
- representação , 4
 - irredutível, 10
- representações equivalentes, 7
- simetria
 - espaço-temporal, 57
 - espacial, 56
- subespaço
 - Γ -simples, 52
 - de ponto fixo, 25
 - invariante, 10
 - irredutível, 10
- subgrupo
 - twisted*, 67
 - de isotropia, 24