

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

**João Augusto Navarro Cossich**

Maringá - PR

2014

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: ...

Maringá - PR

2014



---

---

# AGRADECIMENTOS

---

...



---

---

# RESUMO

---

Temos por objetivo nesta dissertação o estudo da teoria de controle e a aplicação desta para verificarmos a controlabilidade do sistema de controle linear.

Visando inicialmente o estudo de sistemas de controle, apresentamos alguns pré-requisitos essenciais para o desenvolvimento da teoria, dentre eles a noção de curvas localmente absolutamente contínuas em variedades suaves além do estudo de equações diferenciais de Carathéodory, as quais pertencem a uma classe mais geral de equações diferenciais ordinárias. Além disso, desenvolvemos uma noção muito importante relativo ao estudo de controlabilidade de sistemas: os conjuntos de controle.

Por fim, apresentamos condições necessárias e suficientes para que o sistema de controle linear seja controlável. Quando não temos restrições nos controles, tal condição é conhecida como Condição de Kalman. Já quando restringimos os controles a um subconjunto convexo e compacto de  $\mathbb{R}^m$  contendo a origem em seu interior, a controlabilidade se resume ao estudo de autovalores de matrizes.

**Palavras Chave:** Sistemas de Controle; Conjuntos de Controle; Controlabilidade; Grupos de Lie; Semigrupos.

---

---

# ABSTRACT

---

In this work, we studied the general results about control systems on a smooth manifold  $M$ , that is, a family of differential equations  $\dot{x}(x) = X(x(t), u(t))$  on  $M$ , where  $u : \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  belongs to a function set  $\mathcal{U}$  which we impose some weak regularities,  $X : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  is a  $C^1$  map such that for each  $u \in U$ , the function  $X_u : M \times TM$  is a vector field on  $M$ .

After that we present the control set notion, which is really important to study the controllability of general control systems, in particular the non linear cases.

Finally, we show the main results about the controllability of linear control systems on  $\mathbb{R}^d$ , which are a particular and very interesting class of control systems. The map  $X$  is given by  $X(x, u) = Ax + Bu$ , where  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  and  $B \in \mathbb{R}^{d \times m}$ .

**Key words:** Control Systems; Control Sets; Controllability; Lie Groups; Semigroups.

---

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Sistemas de Controle</b>	<b>11</b>
1.1 Preliminares . . . . .	11
1.2 Equações Diferenciais de Carathéodory . . . . .	16
1.3 Teoria Básica de Sistemas de Controle . . . . .	25
1.3.1 Propriedades de Regularidade das Soluções . . . . .	32
<b>2 Conjuntos de Controle</b>	<b>41</b>
2.1 Teoria Qualitativa de Sistemas de Controle . . . . .	41
2.2 Conjuntos de controle para ação de semigrupos . . . . .	64
2.2.1 Conjuntos de controle invariantes . . . . .	71
<b>3 Sistemas de Controle Linear</b>	<b>82</b>
3.1 Controlabilidade do Sistema Linear . . . . .	82
3.2 Controlabilidade do Sistema Linear com controle restrito . . . . .	98
<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>113</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

A Teoria Matemática de Controle é a área da matemática que trata dos princípios básicos subjacentes à análise e projeto de controle de sistemas. Tanto na engenharia quanto na matemática, controlar um objeto significa influenciar em seu comportamento de modo a alcançar uma meta desejada. A fim de implementar esta influência, os engenheiros constroem dispositivos que incorporam várias técnicas matemáticas. Estes dispositivos variam desde o motor à vapor de Watt, projetado durante a Revolução Industrial na Inglaterra, até aos sofisticados controladores de microprocessadores encontrados em itens como os CD players ou em robôs industriais e pilotos automáticos de aviões.

Um dos problemas mais simples da robótica pode nos ajudar a compreender matematicamente a teoria: o de controlar a posição de um conjunto rotacional de ligação simples usando-se um motor colocado no pivô. Este é apenas um pêndulo onde o motor é um dispositivo que aplica um torque como força externa.

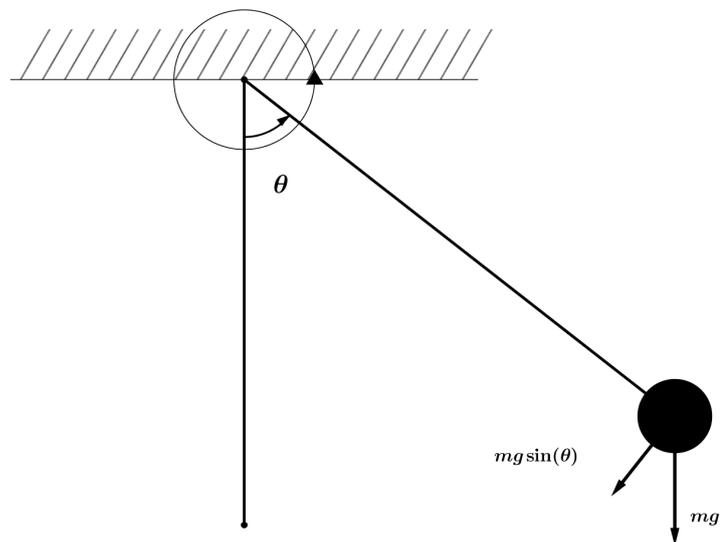


Figura 1: Pêndulo

Aqui,  $m$  é a massa do objeto,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $u(t)$  o valor do torque externo no instante  $t$  (sendo positivo no sentido antihorário). Aproximando  $\sin(\theta)$  por  $\theta$  e escolhendo unidades de tempo, massa e de distância de forma que  $m = g = 1$ , a dinâmica  $\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t)$  descreve o comportamento do sistema. Note que para cada função real  $u$  temos uma equação diferencial. Estas equações serão um dos tipos de objetos de interesse do nosso trabalho. De maneira geral, a teoria de controle analisa o comportamento de sistemas de controle, que podem ser vistos como uma família de equações diferenciais parametrizadas por funções  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  (para algum  $m \in \mathbb{N}$  fixado), assim como no caso do pêndulo.

Formalmente, um sistema de controle é constituído de um espaço estado  $M$ , o qual é uma variedade diferenciável conexa de classe  $C^\infty$ , um conjunto de funções de controle admissíveis  $\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  e uma dinâmica

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)) \quad (1)$$

onde  $X : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  é uma aplicação de classe  $C^1$  de  $M \times \mathbb{R}^m$  sobre o fibrado tangente  $TM$  de  $M$  e, para cada elemento  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  fixado, a aplicação  $X_u : M \rightarrow TM$  dada por  $X_u(x) = X(x, u)$  é um campo de vetores. Na literatura, exige-se que  $\mathcal{U}$  seja constituído de funções localmente integráveis. Neste trabalho, vamos iniciar com o estudo das soluções de (1), fixada uma condição inicial e uma função de controle  $u$ . Pelo fato de que as funções  $u \in \mathcal{U}$  podem não ser diferenciáveis (nem sequer contínuas), devemos utilizar a Teoria de Equações Diferenciais de Carathéodory para obtermos soluções únicas para o sistema. Observe também que estas soluções dependem do tempo  $t \in \mathbb{R}$ , da condição inicial  $x \in M$  e da função de controle  $u \in \mathcal{U}$ . A partir daí, denotando estas soluções por  $\varphi(t, x, u)$ , estudaremos a regularidade destas soluções com relação aos parâmetros  $t$  e  $x$ .

No segundo capítulo, estudaremos primeiramente as ideias de conjunto de controle desenvolvida por F. Colonius e W. Kliemann em [1]. Tais conjuntos são subconjuntos da variedade  $M$  onde se tem controlabilidade aproximada, isto é, qualquer ponto de um conjunto de controle pode ser arbitrariamente aproximado por valores de soluções a partir de qualquer outro ponto do mesmo conjunto. Em seguida, veremos resultados sobre conjuntos de controle para ação de semigrupos de grupos de Lie. Esta teoria foi desenvolvida por L. A. B. San Martin e foi um dos principais avanços da teoria de controle,

pois as ferramentas de álgebras e grupos de Lie proporcionaram o surgimento de resultados de suma relevância, principalmente para questões de controlabilidade de sistemas. A importância do estudo de conjuntos de controle é que, ao se estudar a controlabilidade de sistemas de controle não lineares, uma das dificuldades que se tem é a de encontrar ou saber se um sistema é ou não controlável. Caso haja a não controlabilidade de um sistema, podemos então procurar as regiões de  $M$  onde se tenha a controlabilidade (pelo menos aproximada), isto é, os conjuntos de controle.

Por fim, aplicaremos a teoria desenvolvida em [1] para desenvolvermos critérios de controlabilidade do sistema de controle linear em  $\mathbb{R}^d$ . Este tipo de sistema pode ser encontrado em muitos problemas físicos (o caso do pêndulo é um dos exemplos), além de ser um dos casos mais palpáveis de se estudar, principalmente pelo fato de podermos encontrar suas soluções de maneira explícita (fato este que dificilmente se tem em sistemas não lineares sobre uma variedade diferenciável qualquer).

# Sistemas de Controle

## 1.1 Preliminares

Nesta seção iniciaremos com um breve estudo de curvas localmente absolutamente contínuas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^d$  e um dos nossos desafios é o de definir este tipo de curvas em ambientes mais gerais, como em uma variedade diferenciável  $M$ . Outro objetivo desta seção é o de mostrar que curvas localmente absolutamente contínuas sobre variedades diferenciáveis são diferenciáveis em quase todo ponto de seu domínio, isto é, são diferenciáveis exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula. Estas curvas são de importância fundamental no desenvolvimento da teoria de controle, pois por definição estas curvas serão as soluções de Equações Diferenciais de Carathéodory, característica esta que a dinâmica de um sistema de controle possui.

Dessa forma, poderemos definir as soluções de um sistema de controle e mostrar resultados de existência e unicidade de solução do mesmo, uma vez fixada a condição inicial e a função de controle.

Seja  $M$  um espaço topológico de Hausdorff. Uma carta de  $M$  é um par  $(\phi, V)$ , onde  $V$  é um aberto de  $M$  e  $\phi$  é um homeomorfismo de  $V$  para um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^d$ . Um atlas  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  é o conjunto  $\mathfrak{U}$  de cartas  $(\phi_\alpha, V_\alpha)$  tal que os abertos  $V_\alpha$ 's cobrem  $M$  e sempre que  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ , então a aplicação  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \phi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$  é de classe  $C^r$ . Uma carta  $(\psi, V)$  é dita admissível relativamente ao atlas  $\mathfrak{U}$  se  $\mathfrak{U} \cup \{(\psi, V)\}$  continua sendo um atlas. Um atlas  $\mathfrak{U}$  é dito maximal se ele contém todas as cartas admissíveis em relação a  $\mathfrak{U}$ . O conjunto  $M$  munido de um atlas maximal é chamado de variedade diferenciável de classe  $C^r$ . Neste trabalho, assumiremos que  $M$  é de classe  $C^\infty$ , conexa e metrizável.

Se  $(\phi, V)$  é uma carta com  $x \in V$ , então dizemos que  $(\phi, V)$  é uma carta em  $x$ . Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  entre duas variedades de classe  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , é de classe  $C^r$  se para cada  $x \in M$ , existe uma carta  $(\phi, V_1)$  em  $x$  e uma carta  $(\psi, V_2)$  em  $f(x)$  tal que a aplicação  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(V_1) \rightarrow \psi(V_2)$  for de classe  $C^r$ .

Vamos enfim à definição formal de curvas localmente absolutamente contínuas.

**Definição 1.1.** *Uma curva  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é dita absolutamente contínua se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que para todo sistema finito  $\{[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n]\}$  de subintervalos disjuntos de  $I$  a implicação*

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \|\eta(\beta_i) - \eta(\alpha_i)\| < \epsilon$$

é válida, onde  $\|\cdot\|$  é uma norma arbitrária (porém fixada) em  $\mathbb{R}^d$ . A aplicação  $\eta$  é chamada de curva localmente absolutamente contínua se a restrição de  $\eta$  a todo intervalo compacto  $J \subset I$  é absolutamente contínua.

Note que a definição não depende da norma  $\|\cdot\|$  fixada, já que todas as normas em  $\mathbb{R}^d$  são equivalentes.

**Observação 1.2.** • *Podemos notar que toda curva absolutamente contínua é localmente absolutamente contínua.*

- *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Então toda curva  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  localmente lipschitziana é localmente absolutamente contínua. De fato, sejam  $K \subset I$  um compacto,  $c = c(K) > 0$  a constante de Lipschitz de  $\eta$  em  $K$  e tome  $\epsilon > 0$ . Considere  $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ . Assim, dado um sistema finito  $\{[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n]\}$  de intervalos disjuntos de  $K$  tal que  $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ , temos que*

$$\sum_{i=1}^n \|\eta(\beta_i) - \eta(\alpha_i)\| \leq \sum_{i=1}^n c|\beta_i - \alpha_i| = c \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

*Analogamente, podemos mostrar que toda curva lipschitziana é absolutamente contínua.*

- *Toda curva localmente absolutamente contínua  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é contínua, pois caso  $\eta$  não for contínua em um certo ponto  $x_0 \in I$ , então existe  $\epsilon > 0$  de forma que para todo  $\delta > 0$ , sempre que  $|y - x_0| < \delta$ , teremos*

$\|\eta(y) - \eta(x_0)\| \geq \epsilon$ . Considere  $K \subset I$  um intervalo compacto com  $x_0 \in K$ . Assim, para o  $\epsilon > 0$  acima, seja  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  de acordo com a continuidade absoluta de  $\eta|_K$  e tome  $y \in K$  tal que  $|y - x_0| < \delta$ . Desta forma, denotando por  $\alpha = \min\{y, x_0\}$  e por  $\beta = \max\{y, x_0\}$ , dado o sistema finito  $\{[\alpha, \beta]\}$  de  $K$ , temos que  $\beta - \alpha = |y - x_0| < \delta$ , logo  $\|\eta(y) - \eta(x_0)\| \geq \epsilon$ , o que é um absurdo, pois  $\eta$  é localmente absolutamente contínua.

O próximo resultado apresenta uma propriedade muito importante que curvas localmente absolutamente contínuas possuem e será utilizado na demonstração de resultados futuros, porém a sua prova foge ao escopo deste trabalho e não a faremos aqui. Todavia, sua demonstração pode ser encontrada em ([6] p. 323 Teorema 18.1.22).

**Proposição 1.3.** *Uma curva localmente absolutamente contínua  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  é diferenciável quase sempre em  $I$ .*

Dizer que uma determinada propriedade vale "quase sempre" (abreviado por q.s.) significa que ela vale sempre, exceto para um conjunto de medida de Lebesgue nula.

O próximo resultado nos dá uma maneira equivalente de verificar se uma curva é localmente absolutamente contínua.

**Proposição 1.4.** *Dada uma aplicação  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , definida sobre um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

*i)  $\eta$  é uma curva localmente absolutamente contínua;*

*ii) Para todo  $\tau \in I$  existe um intervalo compacto  $J_\tau \subset I$  tal que  $\tau \in \text{int}_I J_\tau$  (o interior de  $J_\tau$  com respeito a  $I$ ) e  $\eta|_{J_\tau}$  é absolutamente contínua.*

**Demonstração:** Sejam  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma curva localmente absolutamente contínua,  $\tau \in I$  e  $J_\tau \subset I$  um intervalo compacto tal que  $\tau \in \text{int}_I J_\tau$ , o qual pode ser obtido tomando-se algum intervalo compacto contido em  $[\tau - 1, \tau + 1] \cap I$  contendo  $\tau$ . Segue da definição de localmente absolutamente contínua que  $\eta|_{J_\tau}$  é absolutamente contínua.

Suponha agora que (ii) seja válida. Considere  $J \subset I$  um intervalo compacto. Então para todo  $\tau \in J$  existe um intervalo compacto  $J_\tau \subset I$  tal que  $\tau \in \text{int}_I J_\tau$  e  $\eta|_{J_\tau}$  é

absolutamente contínua. Como  $\tau \in \text{int}_J J_\tau \neq \emptyset$ , a compacidade de  $J$  implica que existem  $\tau_1, \dots, \tau_m$  tal que  $J \subset \bigcup_{i=0}^m J_{\tau_i}$ . Seja  $\tilde{J}_i := J \cap J_i$  para  $i = 1, \dots, m$ . Então  $J$  é igual à união dos intervalos compactos  $\tilde{J}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e (diminuindo o tamanho dos intervalos  $\tilde{J}_i$  se necessário) podemos assumir sem perda de generalidade que os intervalos  $\tilde{J}_i$  se interceptam somente em pontos de fronteira.

Devemos provar que  $\eta|_J$  é absolutamente contínua. Para tanto, dado  $\epsilon > 0$  escolha para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  um número  $\delta_i = \delta(\epsilon/m) > 0$  de acordo com a continuidade absoluta de  $\eta$  restrita a  $\tilde{J}_i$ . Seja  $\delta := \min\{\delta_i; i = 1, \dots, m\}$  e considere um sistema finito  $\{[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n]\}$  de subintervalos disjuntos de  $J$  com

$$\sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) < \delta. \quad (1.1)$$

Defina  $\tilde{J}_{ij} = \tilde{J}_i \cap [\alpha_j, \beta_j]$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Então  $\{\tilde{J}_{i1}, \dots, \tilde{J}_{in}\}$  é um sistema finito de subintervalos disjuntos e compactos de  $\tilde{J}_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , enquanto que alguns dos intervalos  $\tilde{J}_{ij}$  podem ser vazios. Para simplificar a notação, vamos substituir estes intervalos vazios por intervalos contendo um único ponto e assumir que existem  $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$  tais que  $\tilde{J}_{ij} = [\alpha_{ij}, \beta_{ij}]$ . De (1.1) temos que

$$\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) \leq \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) < \delta \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, m$$

e portanto a continuidade absoluta de  $\eta$  restrita a  $\tilde{J}_{ij}$  implica que

$$\sum_{j=1}^n \|\eta(\beta_{ij}) - \eta(\alpha_{ij})\| < \frac{\epsilon}{m}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Os intervalos  $[\alpha_j, \beta_j]$  podem ser escritos como a união dos intervalos  $[\alpha_{ij}, \beta_{ij}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com isso podemos assumir que  $\tilde{J}_i$  é ordenado com

$$\alpha_j = \alpha_{i_1 j} \leq \beta_{i_1 j} = \alpha_{i_2 j} \leq \beta_{i_2 j} = \alpha_{i_3 j} \leq \dots \leq \beta_{i_r j} = \beta_j$$

para algum  $r = r(j) \in \{1, \dots, m\}$  e  $i_1, i_2, \dots, i_r$  dependendo de  $j$ , com  $i_{k+1} = i_k + 1$  para

$k = 1, \dots, r - 1$ . Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \|\eta(\beta_j) - \eta(\alpha_j)\| &= \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=i_1(j)}^{i_r(j)j} \eta(\beta_{i_1(j)j}) - \eta(\alpha_{i_r(j)j}) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=i_1(j)}^{i_r(j)j} \|\eta(\beta_{i_1(j)j}) - \eta(\alpha_{i_r(j)j})\| \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \|\eta(\beta_{ij}) - \eta(\alpha_{ij})\| \\
&= \sum_{j=1}^m \underbrace{\sum_{i=1}^n \|\eta(\beta_{ij}) - \eta(\alpha_{ij})\|}_{< \epsilon/m} < \epsilon
\end{aligned}$$

o que mostra o desejado.  $\square$

Em vista da proposição anterior, a seguinte definição de curvas localmente absolutamente contínuas sobre variedades parece ser apropriada.

**Definição 1.5.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $d$  e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma aplicação  $\eta : I \rightarrow M$  é uma curva localmente absolutamente contínua se para todo  $\tau \in I$  existe um subintervalo compacto  $J_\tau$  de  $I$  com  $\tau \in \text{int}_I J_\tau$  tal que  $\eta(J_\tau)$  está contido no domínio  $V$  de uma carta  $(\phi, V)$  e a composta  $\phi \circ \eta : J_\tau \rightarrow \mathbb{R}^d$  é absolutamente contínua.*

**Proposição 1.6.** *i) Para  $M = \mathbb{R}^d$  as Definições 1.1 e 1.5 são equivalentes;*

*ii) A Definição 1.5 não depende da carta escolhida, isto é, se  $(\phi_1, V_1)$  e  $(\phi_2, V_2)$  são duas cartas de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $d$  e  $J \subset I$  é um intervalo compacto com  $\eta(J) \subset V_1 \cap V_2$  e tal que  $\phi_1 \circ \eta : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  é absolutamente contínua, então  $\phi_2 \circ \eta : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  também é absolutamente contínua.*

**Demonstração:** i) Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e suponha que  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  seja localmente absolutamente contínua no sentido da Definição 1.1. Considerando a carta  $(\text{id}_{\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d)$ , temos pela Proposição 1.4 que para todo  $\tau \in I$  existe um intervalo compacto  $J_\tau \subset I$  tal que  $\tau \in \text{int}_I J_\tau$ . Obviamente  $\eta(J_\tau) \subset \mathbb{R}^d$  e  $\text{id}_{\mathbb{R}^d} \circ \eta : J_\tau \rightarrow \mathbb{R}^d$  coincide com  $\eta|_{J_\tau}$ , a qual é absolutamente contínua. Para a recíproca basta considerarmos novamente a carta  $(\text{id}_{\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d)$  e o resultado segue da Proposição 1.4.

ii) Note que para todo sistema finito  $\{[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n]\}$  de intervalos disjuntos de  $J$  temos

$$\sum_{i=1}^n \|\phi_2 \circ \eta(\beta_i) - \phi_2 \circ \eta(\alpha_i)\| = \sum_{i=1}^n \|(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \circ \phi_1 \circ \eta(\beta_i) - (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \circ \phi_1 \circ \eta(\alpha_i)\|.$$

A mudança de coordenadas  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \phi_2(V_1 \cap V_2)$  é um difeomorfismo  $C^\infty$ , logo pelo Teorema de Tietze podemos estender  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  a uma função  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^\infty$  e com suporte compacto. Usando o Teorema do Valor Médio, temos que

$$\sum_{i=1}^n \|\phi_2 \circ \eta(\beta_i) - \phi_2 \circ \eta(\alpha_i)\| \leq \underbrace{\max_{x \in \text{supp}(\psi)} \|\psi'(x)\|}_{:=c} \sum_{i=1}^n \|\phi_1 \circ \eta(\beta_i) - \phi_1 \circ \eta(\alpha_i)\|.$$

Agora, dado  $\epsilon > 0$  escolha  $\delta = \delta(\epsilon/c)$  de acordo com a continuidade absoluta de  $\phi_1 \circ \eta$  em  $J$ . Logo se  $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ , então  $\sum_{i=1}^n \|\phi_1 \circ \eta(\beta_i) - \phi_1 \circ \eta(\alpha_i)\| < \epsilon/c$ , logo

$$\sum_{i=1}^n \|\phi_2 \circ \eta(\beta_i) - \phi_2 \circ \eta(\alpha_i)\| < c \frac{\epsilon}{c} = \epsilon,$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Como para curvas no espaço euclidiano, a seguinte proposição também é válida para curvas em variedades suaves.

**Proposição 1.7.** *Uma curva localmente absolutamente contínua  $\eta : I \rightarrow M$  é contínua e diferenciável quase sempre.*

**Demonstração:** falta provar a continuidade!!! Para mostrar a diferenciabilidade, cobrimos  $I$  com uma quantidade enumerável de intervalos compactos  $J_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tal que  $\eta(j_k)$  esteja contido no domínio de uma carta local  $(\phi_k, V_k)$  e  $\phi_k \circ \eta$  seja absolutamente contínua. Pela Proposição 1.3 temos que  $\phi_k \circ \eta$  é diferenciável quase sempre, portanto cada  $\eta|_{J_k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , é diferenciável quase sempre. Consequentemente  $\eta$  é diferenciável quase sempre em  $I$ , uma vez que a união enumerável de conjuntos de medida nula tem também medida nula.  $\square$

## 1.2 Equações Diferenciais de Carathéodory

Na sequência, introduziremos a noção de equações diferenciais de Carathéodory em subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^d$  e citaremos resultados sobre existência e unicidade de soluções

além da dependência diferenciável das condições iniciais.

É importante observar que, na teoria de equações diferenciais, a existência e a unicidade de solução é garantida quando a função  $f : I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $\dot{x}(t) = f(t, x)$  é contínua, lipschitziana na segunda variável, com  $D = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x - x_0\| \leq c\}$ , onde  $c$  é uma constante real positiva,  $x(t_0) = x_0$  é a condição inicial fixada e  $I$  um intervalo compacto contendo  $t_0$ . Carathéodory desenvolveu uma teoria de equações diferenciais que generaliza o caso anterior principalmente pelo fato de enfraquecer as hipóteses sobre a aplicação  $f$  e ainda assim obter teoremas de existência e unicidade e de regularidade das soluções. Vejamos agora com mais detalhes esta teoria.

**Definição 1.8.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $D \subset \mathbb{R}^d$  um subconjunto aberto e  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função com as seguintes propriedades:*

- i)  $f(\cdot, x) : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  é Lebesgue mensurável para cada  $x \in D$ ;*
- ii)  $f(t, \cdot) : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua para cada  $t \in I$ .*

*Então  $f$  é chamada de função de Carathéodory e a equação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.2}$$

*é chamada equação diferencial de Carathéodory. Uma solução de (1.2) é uma curva localmente absolutamente contínua  $\eta : J \rightarrow D$ , definida sobre algum intervalo  $J \subset I$  tal que*

$$\dot{\eta}(t) = f(t, \eta(t)), \quad \text{para quase todo } t \in J.$$

*Se  $\eta(t_0) = x_0$ , para algum  $(t_0, x_0) \in J \times D$  dizemos que  $\eta$  é uma solução do problema de valor inicial*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

**Observação 1.9.** • *As soluções de equações de Carathéodory também podem ser definidas como curvas contínuas que satisfazem a equação integral correspondente a (1.2), isto é,*

$$\eta(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \eta(s)) ds, \quad \text{para todo } t \in J.$$

*Em [12], por exemplo, as soluções são definidas dessa forma. Em [6] pode-se verificar que ambas as definições são equivalentes.*

A próxima proposição nos dá condições suficientes para a existência e unicidade de soluções.

**Teorema 1.10.** *Assuma que a função  $f$  da equação diferencial de Carathéodory (1.2) tenha as seguintes propriedades:*

*i) Para cada  $x_0 \in D$  existe um número real  $\delta > 0$  e uma função localmente integrável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tais que a bola  $B_\delta(x_0) \subset D$  e*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t)\|x - y\|, \quad \text{para todo } t \in I \text{ e } x, y \in B_\delta(x_0); \quad (1.4)$$

*ii) Para cada  $x_0 \in D$  fixado, existe uma função localmente integrável  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  com*

$$\|f(t, x_0)\| \leq \beta(t) \quad \text{para quase todo } t \in I. \quad (1.5)$$

Então para cada par  $(t_0, x_0) \in I \times D$  existe um intervalo (não vazio)  $J \subset I$ , aberto relativo a  $I$ , e existe uma solução  $\eta : J \rightarrow D$  do problema de valor inicial (1.3) com a seguinte propriedade: se  $\xi : J' \rightarrow D$  é uma outra solução qualquer de (1.3), onde  $J' \subset I$ , então  $J' \subset J$  e  $\xi = \eta|_{J'}$ . A solução  $\eta$  é chamada de solução maximal do problema de valor inicial (1.3) no intervalo  $I$ .

Para demonstrar este Teorema, precisamos de dois resultados técnicos. O primeiro deles é também conhecido como Lema de Gronwall.

**Lema 1.11.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $c \geq 0$  e duas funções  $\alpha, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  tais que  $\alpha$  é localmente integrável e  $\mu$  é contínua. Se existe  $t_0 \in I$  tal que*

$$\mu(t) \leq \nu(t) := c + \int_{t_0}^t \alpha(s)\mu(s)ds \quad (1.6)$$

para todo  $t \geq t_0$ ,  $t \in I$ , então

$$\mu(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} \quad (1.7)$$

**Demonstração:** Note que  $\dot{\nu}(t) = \alpha(t)\mu(t) \leq \alpha(t)\nu(t)$  quase sempre, logo

$$\dot{\nu}(t) - \alpha(t)\nu(t) \leq 0 \quad (1.8)$$

para quase todo  $t$ . Seja

$$\pi(t) = \nu(t)e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s)ds}.$$

Esta função é localmente absolutamente contínua e

$$\dot{\pi}(t) = (\dot{\nu}(t) - \alpha(t)\nu(t))e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} \leq 0$$

por (1.8), logo  $\pi$  é não crescente, e portanto,

$$\nu(t)e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} = \pi(t) \leq \pi(t_0) = \nu(t_0) = c$$

de onde segue a desigualdade desejada.  $\square$

O próximo lema será aplicado repetidamente na demonstração do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais de Charathéodory.

**Lema 1.12.** *Sejam  $L \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $X_0 \subset X \subset \mathbb{R}^d$  dois subconjuntos, funções  $f, g : L \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$  que satisfazem*

a)  $f(\cdot, x)$  e  $g(\cdot, x)$  são mensuráveis para cada  $x \in D$  fixado;

b)  $f(t, \cdot)$  e  $g(t, \cdot)$  são contínuas para cada  $t \in L$  fixado,

e funções contínuas  $\xi : L \rightarrow X$  e  $\zeta : L \rightarrow X_0$ . Se existem funções localmente integráveis  $\alpha, \beta : L \rightarrow \mathbb{R}_+$  tais que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t)\|x - y\| \quad (1.9)$$

para todo  $x, y \in X$  e todo  $t \in L$ , e

$$\|f(t, x) - g(t, x)\| \leq \beta(t) \quad (1.10)$$

para cada  $x \in X_0$  e todo  $t \in L$ . Então, se  $x_0$  e  $z_0$  são elementos arbitrários de  $\mathbb{R}^d$  e  $t_0 \in L$  e denotando

$$\tilde{\xi}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s))ds$$

e

$$\tilde{\zeta}(t) := z_0 + \int_{t_0}^t g(s, \zeta(s))ds$$

vale que

$$\|\tilde{\xi}(t) - \tilde{\zeta}(t)\| \leq \|x_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \alpha(s)\|\xi(s) - \zeta(s)\|ds + \int_{t_0}^t \beta(s)ds$$

para todo  $t \leq t_0$  tal que  $t \in L$ .

**Demonstração:** Note que

$$\|f(s, \xi(s)) - g(s, \zeta(s))\| \leq \|f(s, \xi(s)) - f(s, \zeta(s))\| + \|f(s, \zeta(s)) - g(s, \zeta(s))\|,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|f(s, \xi(s)) - g(s, \zeta(s))\| ds &\leq \int_{t_0}^t (\|f(s, \xi(s)) - f(s, \zeta(s))\| + \|f(s, \zeta(s)) - g(s, \zeta(s))\|) ds \\ &= \int_{t_0}^t \|f(s, \xi(s)) - f(s, \zeta(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|f(s, \zeta(s)) - g(s, \zeta(s))\| ds \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}(t) - \tilde{\zeta}(t)\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds - z_0 - \int_{t_0}^t g(s, \zeta(s)) ds\| \\ &\leq \|x_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \xi(s)) - g(s, \zeta(s))\| ds \\ &\leq \|x_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \xi(s)) - f(s, \zeta(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|f(s, \zeta(s)) - g(s, \zeta(s))\| ds \\ &\leq \|x_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \alpha(s) \|\xi(s) - \zeta(s)\| ds + \int_{t_0}^t \beta(s) ds. \end{aligned}$$

□

Antes de provar o Teorema (1.10), podemos observar que para cada compacto  $K \subset D$  existe uma função localmente integrável  $\gamma$  tal que

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma(t), \quad \text{para todo } t \in I, x \in K. \quad (1.11)$$

Com efeito, dado  $x_0 \in K$ , existem  $\delta > 0$  e funções  $\alpha, \beta$  que satisfazem as hipóteses do teorema. Portanto, para todo  $x \in B_\delta(x_0)$  e todo  $t \in I$ ,

$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x_0)\| + \|f(t, x) - f(t, x_0)\| \leq \beta(t) + \delta\alpha(t). \quad (1.12)$$

Denote por  $\gamma_{t_0}(t)$  a função  $\beta(t) + \delta\alpha(t)$ , a qual é localmente integrável também. Considere a cobertura aberta de  $K$  formada pelas bolas  $B_\delta(x_0)$ . Por compacidade existe uma subcobertura finita, correspondente a, digamos, bolas de raio  $\delta$  e centradas em  $x_1, \dots, x_l$ . Considere  $\gamma(t) := \max\{\gamma_{x_1}(t), \dots, \gamma_{x_l}(t)\}$ , a qual é localmente integrável e (1.12) nos dá a desigualdade (1.11).

Agora vamos finalmente demonstrar o Teorema (1.10).

**Demonstração do Teorema 1.10:** Assuma, sem perda de generalidade, que  $I \neq \{t_0\}$ , pois caso contrário, basta definirmos a função  $\eta(t_0) = x_0$  e verificar que esta é a solução maximal do problema de valor inicial (1.3). Mostraremos inicialmente que existe  $\epsilon > 0$  tal que o problema de valor inicial (1.3) admita uma única solução em  $[t_0, t_0 + \epsilon] \cap I$ . Se  $t_0$  é o máximo do intervalo  $I$ , então  $[t_0, t_0 + \epsilon] \cap I = \{t_0\}$  e o resultado segue de forma análoga ao argumento anterior, portanto vamos assumir que este não é o caso. Dado o ponto  $x_0$ , considere  $\delta > 0$  e funções localmente integráveis  $\alpha$  e  $\beta$  como nas hipóteses do Teorema. Note que pela integrabilidade local, as funções

$$a(t) := \int_{t_0}^{t_0+t} \alpha(s) ds \quad \text{e} \quad b(t) := \int_{t_0}^{t_0+t} \beta(s) ds$$

convergem para zero quando  $t \rightarrow 0^+$ . Note também que como  $\alpha$  e  $\beta$  são não negativas, temos que  $a$  e  $b$  também as são e além disso são não decrescentes. Com isso, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $t_0 + \epsilon \in I$  e

$$1) \ a(t) \leq a(\epsilon) = \lambda < 1, \text{ para todo } t \in [0, \epsilon], \text{ e}$$

2)  $a(t)\delta + b(t) \leq \alpha(\epsilon)\delta + b(\epsilon) < \delta$ , para todo  $t \in [0, \epsilon]$ . Considere a função constante  $\xi_0 : [t_0, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $\xi_0(t) = x_0$  e também a bola fechada de raio  $\delta$  centrada em  $\xi_0$  no espaço das funções contínuas  $C^0([t_0, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^d)$  de  $[t_0, t_0 + \epsilon]$  em  $\mathbb{R}^d$ , a qual denotaremos por  $\bar{\mathcal{B}}$ .

Introduza o operador

$$S : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow C^0([t_0, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^d)$$

definida por

$$(S\xi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds.$$

Como  $\xi$  é contínua, temos que  $\xi(t)$  pertence a algum compacto  $K$ , para todo  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon]$  e pelo comentário anterior,  $f(\cdot, \xi(\cdot))$  é localmente integrável, pois

$$\int_{t_0}^t \|f(s, \xi(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t \gamma(s) ds.$$

Portanto,  $S$  está bem definida e  $S\xi$  é absolutamente contínua para cada  $\xi$  (ver [17] Teorema 3.36).

Afirmamos agora que  $\bar{\mathcal{B}}$  é invariante por  $S$ . De fato, tome  $\xi \in \bar{\mathcal{B}}$  e aplique o Lema 1.12 com  $L = [t_0, t_0 + \epsilon]$ ,  $g \equiv 0$ , os mesmos  $\alpha, \beta, x_0, \xi$  e  $f$  como aqui,  $X = B_\delta(x_0)$ ,

$X_0 = \{x_0\}$ ,  $\zeta = \xi_0$  e  $z_0 = x_0$ . Assim

$$\tilde{\xi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds = (S\xi)(t) \quad \text{e} \quad \tilde{\zeta}(t) = x_0 = \xi_0(t)$$

e concluímos que

$$\|S\xi - \xi_0\|_\infty \leq \|\xi - \xi_0\|_\infty a(\epsilon) + b(\epsilon) < \delta,$$

a última desigualdade segue da Propriedade (2). Portanto  $S$  pode ser vista como uma aplicação  $\bar{\mathcal{B}} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ . Em seguida, mostraremos que  $S$  é uma contração.

Aplicando novamente o Lema 1.12, mas desta vez fazendo as seguintes escolhas: dados  $\xi, \zeta \in \bar{\mathcal{B}}$ , considere  $X = X_0 = B_\delta(x_0)$ ,  $\alpha, f, x_0$  como aqui,  $g = f$ ,  $\beta \equiv 0$ ,  $L = [t_0, t_0 + \epsilon]$  e  $z_0 = x_0$ . Assim

$$\tilde{\xi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds = (S\xi)(t)$$

e

$$\tilde{\zeta}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \zeta(s)) ds = (S\zeta)(t),$$

daí

$$\|S\xi - S\zeta\|_\infty \leq \lambda \|\xi - \zeta\|_\infty,$$

mostrando que  $S$  é uma contração. Assim, pelo Lema da Contração (ver [16] Lema 1 p. 12) existe um ponto fixo  $\xi$  de  $S$ , isto é,  $S\xi = \xi$ , e este é, portanto, uma solução de (1.3), pois

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds \quad \text{implica que} \quad \dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t))$$

em  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ . Se  $t_0$  não é o mínimo do intervalo  $I$ , com argumentos similares podemos provar que existe uma solução em algum intervalo da forma  $[t_0 - \epsilon, t_0]$ , e portanto, concatenando as duas soluções, concluímos que existe uma solução em um intervalo da forma  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ . Se  $t_0$  é um extremo do intervalo  $I$ , temos bem definida uma solução em um intervalo da forma  $[t_0 - \epsilon, t_0]$  ou  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ , e em qualquer caso obtemos uma solução definida em uma vizinhança de  $t_0$  em  $I$ . Além disso, este resultado de existência local independe da escolha da condição inicial  $x(t_0) = x_0$ .

Provaremos agora a seguinte afirmação de unicidade que nos ajudará a finalizar a demonstração: Se  $\xi$  e  $\zeta$  são duas soluções de (1.3) sobre um intervalo  $J \subset I$ ,  $t_0 \in J$ , então  $\xi = \zeta$  em  $J$ .

Mostraremos que estas soluções coincidem para todo  $t \in J$  tal que  $t \geq t_0$ . O caso  $t \leq t_0$  segue de maneira análoga. Para tanto, provaremos inicialmente que  $\xi$  e  $\zeta$  devem coincidir em algum intervalo (possivelmente pequeno) da forma  $[t_0, t_0 + \epsilon] \subset J$  para algum  $\epsilon > 0$ . (Se  $t_0$  é o máximo de  $J$ , então o resultado é válido, pois  $\xi$  e  $\zeta$  são soluções de (1.3)). Escolha  $\delta > 0$  como na condição (i) do enunciado do Teorema para o  $x_0$  dado. Pela continuidade de  $\xi$  e  $\zeta$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\xi(t), \zeta(t) \in B_\delta(x_0)$  para todo  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ . Aplicando mais uma vez o Lema 1.12, desta vez tomando  $X = X_0 = D$ ,  $f, x_0, \xi, \zeta, \alpha$  como aqui,  $z_0 = x_0$ ,  $g = f$ ,  $L = [t_0, t_0 + \epsilon]$  e  $\beta \equiv 0$ . Assim, sendo  $\xi$  e  $\zeta$  soluções de (1.3), temos

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds = \tilde{\xi}(t) \quad \text{e} \quad \zeta(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \zeta(s)) ds = \tilde{\zeta}(t),$$

então

$$\|\xi(t) - \zeta(t)\| \leq \int_{t_0}^t \alpha(s) \|\xi(s) - \zeta(s)\| ds$$

para todo  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon]$ . O Lema 1.11 implica que se tomarmos  $\mu(t) = \|\xi(s) - \zeta(s)\|$ ,  $\alpha$  como aqui e  $c = 0$ , teremos que  $\|\xi(t) - \zeta(t)\| = 0$ , com isso  $\xi(t) = \zeta(t)$  em um intervalo da forma  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ .

Agora, suponha por absurdo que existe  $t > t_0$  tal que  $t \in J$  e  $\xi(t) \neq \zeta(t)$ .

Defina

$$t_1 := \inf\{t \in J; t > t_0 \text{ e } \xi(t) \neq \zeta(t)\}.$$

Então  $\xi = \zeta$  em  $[t_0, t_1)$  e pela continuidade de  $\xi$  e  $\zeta$  temos que  $\xi(t_1) = \zeta(t_1)$ . A prova da unicidade local acima foi feita para qualquer condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , portanto podemos aplicá-la à condição  $x(t_1) = x_1$ , onde  $x_1 = \xi(t_1)$ . Segue daí que  $\xi = \zeta$  em algum intervalo da forma  $[t_1, t_1 + \epsilon]$ , para algum  $\epsilon > 0$ , contradizendo a definição de  $t_1$ , de onde segue que  $\xi(t) = \zeta(t)$  para todo  $t \in J$  tal que  $t \geq t_0$ .

Mostraremos agora que existe uma solução maximal. Para tanto, considere

$$\tau_{\min} := \inf\{t \in I; \text{ existe uma solução em } [t, t_0]\}$$

e

$$\tau_{\max} = \sup\{t \in I; \text{ existe uma solução em } [t_0, t]\}.$$

(Possivelmente,  $\tau_{\max} = +\infty$  ou  $\tau_{\min} = -\infty$ ). Do resultado de existência local temos que  $\tau_{\min} < \tau_{\max}$ . Considere o intervalo aberto  $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$ . Existe uma solução neste intervalo,

pois podemos construir duas seqüências  $(s_n)_\mathbb{N}$  e  $(t_n)_\mathbb{N}$  tais que

$$s_n \rightarrow \tau_{\min}, \quad s_n > \tau_{\min} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e

$$t_n \rightarrow \tau_{\min}, \quad t_n < \tau_{\max} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e por definição de  $\tau_{\min}$  e  $\tau_{\max}$  existe uma solução em cada intervalo  $(s_n, t_n)$  e além disto estas soluções coincidem em seus domínios comuns pela afirmação de unicidade.

Tomemos agora  $J$  da seguinte maneira: Se  $\tau_{\min}$  e  $\tau_{\max}$  pertencem ao interior de  $I$ , então

$$J := (\tau_{\min}, \tau_{\max}).$$

Se  $\tau_{\min}$  é o mínimo do intervalo  $I$  (isto é,  $I$  é da forma  $[\tau_{\min}, b]$  ou  $[\tau_{\min}, b)$ ), então  $\tau_{\min}$  é adicionado a  $J$  desde que exista uma solução em um intervalo incluindo  $\tau_{\min}$ . Similarmente para  $\tau_{\max}$ . Com esta definição,  $J$  é aberto relativo a  $I$  e não vazio.

Por fim, se  $\tau_{\min}$  está no interior de  $I$ , então não existe solução  $\zeta$  do problema de valor inicial definida em  $[\tau_{\min}, t_0]$ . Caso contrário, da afirmação de existência local aplicada a  $x(\tau_{\min}) = \xi(\tau_{\min}) = \zeta(\tau_{\min})$ , resultaria na existência de uma solução em algum intervalo da forma  $(\tau_{\min} - \epsilon, \tau_{\min}]$  e portanto, por concatenação de soluções, podemos definir uma solução em  $(\tau_{\min} - \epsilon, t_0]$ , o que contradiz a definição de  $\tau_{\min}$ . Similarmente para  $\tau_{\max}$ . Concluimos que qualquer solução do problema de valor inicial deve ter domínio contido em  $J$  e, com isso, a última parte do Teorema fica demonstrada pela afirmação de unicidade.  $\square$

A seguinte proposição pode ser encontrada em [6]. Ela nos dá não somente a existência e unicidade de solução como também a diferenciabilidade contínua com respeito à condição inicial.

**Proposição 1.13.** *Sejam  $I \subset D$  um intervalo aberto,  $D \subset \mathbb{R}^d$  um subconjunto aberto e  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função de Carathéodory e suponha que as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, d$ , existem e são funções de Carathéodory. Suponha ainda que cada função  $F \in \{f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}\}$  satisfaça a seguinte condição: Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times D$  existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tais que o conjunto*

$$Q := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; |t - t_0| \leq \delta_1, \|x - x_0\| \leq \delta_2\}$$

está contido em  $I \times D$  e que exista uma função integrável  $\rho : [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \rightarrow \mathbb{R}$  com

$$\|F(t, x)\| \leq \rho(t) \quad \text{para todo } (t, x) \in Q.$$

Então a solução  $\eta_{(t_0, x_0)}$  para cada problema de valor inicial (1.3) existe em algum intervalo aberto  $J(t_0, x_0) \subset I$  que contém  $t_0$  e é única. Além disso, a função  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida por

$$\Phi(t, t_0, x) := \eta_{(t_0, x)}(t), \quad G := \{(t, t_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; t \in J(t_0, x)\},$$

é contínua e continuamente diferenciável com respeito a  $x$ .

### 1.3 Teoria Básica de Sistemas de Controle

Nesta seção vamos finalmente introduzir sistemas de controle em variedades suaves e provar resultados básicos, em particular, a existência e unicidade de soluções de um sistema de controle e a dependência diferenciável das soluções com relação às condições iniciais.

**Definição 1.14.** *Sejam  $d, m \in \mathbb{N}$ ,  $M$  uma variedade suave (de classe  $C^\infty$ )  $d$ -dimensional,  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $X : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que  $X_u := X(\cdot, u) : M \rightarrow TM$  é um campo de vetores em  $M$  para cada  $u \in \mathbb{R}^m$  fixado (i.e.  $X(x, u) \in T_x M$  para todo  $x \in M$ ). Considere ainda um conjunto de funções de controle admissíveis*

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U\}.$$

Então a família de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)), \quad u \in \mathcal{U} \tag{1.13}$$

é chamado um sistema de controle, ou simplesmente sistema. A variedade  $M$  é chamada de espaço estado e a aplicação  $X$  é chamada de lado direito do sistema de controle.

Fixados  $u \in \mathcal{U}$  e  $x_0 \in M$

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{1.14}$$

é chamado de problema de valor inicial do par  $(x_0, u)$ . Uma solução de 1.14 é uma curva localmente absolutamente contínua  $\eta : I \rightarrow M$ , definida em um intervalo  $I$  com  $0 \in I$ , tal que  $\eta(0) = x_0$  e

$$\dot{\eta}(t) = X(\eta(t), u(t)) \quad \text{para quase todo } t \in I.$$

O conjunto  $\mathcal{U}$  é um subconjunto do conjunto  $L_{loc}^1(\mathbb{R}, U)$  constituído das funções  $u : \mathbb{R} \rightarrow U$  que são localmente integráveis (funções que são integráveis, no sentido de Lebesgue, em cada compacto  $K \subset \mathbb{R}$ ) e que gozam das seguintes propriedades:

1. Dados  $s \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathcal{U}$ , então a função  $u' : \mathbb{R} \rightarrow U$  dada por  $u'(t) = u(t + s)$  também pertence a  $\mathcal{U}$ ;

2. Dados  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  e  $s \in \mathbb{R}$ , então a  $s$ -concatenação de  $u_1$  por  $u_2$ , denotada por  $u_1 \wedge_s u_2$  e definida por

$$u_1 \wedge_s u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \leq s \\ u_2(t - s), & \text{se } t > s \end{cases}$$

também pertence a  $\mathcal{U}$ .

A propriedade 1 acima, nos induz a definir a aplicação shift  $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  dada por

$$\Theta(s, u) = \Theta_s u \text{ com } (\Theta_s u)(t) = u(t + s) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

É possível provar que  $\Theta$  está bem definida e que satisfaz

- $\Theta(0, u) = u$ ;
- $\Theta(t + s, u) = \Theta(t, \Theta(s, u))$ .

para todo  $t, s \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathcal{U}$ . Esta aplicação será útil para resultados futuros deste capítulo.

Em [1] (página 95) se define uma topologia em  $\mathcal{U}$  (a topologia fraca\*), o que torna possível mostrar a continuidade da aplicação shift.

Na literatura, é usual se considerar o conjunto  $\mathcal{U}$  como um dos seguintes conjuntos de funções (além do  $L_{loc}^1(\mathbb{R}, U)$ ):

$$\mathcal{U}_{pc} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U; \text{ } u \text{ é constante por partes } \}$$

$$L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U; \text{ } u \text{ é essencialmente limitada } \}$$

$$\mathcal{U}_{pco} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U; \text{ } u \text{ é contínua por partes } \}$$

Como as funções de controle podem ser apenas localmente integráveis, vemos aqui a necessidade de se utilizar a teoria de equações diferenciais de Carathéodory, pois

caso contrário não conseguiríamos obter soluções para a dinâmica de controle  $\dot{x}(t) = X(x(t), u(t))$ .

Vejam alguns exemplos de sistemas de controle.

**Exemplo 1.15.** Considere  $M = \mathbb{R}^d$  e  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Um sistema de controle é dito linear se é da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.15)$$

com  $U = \mathbb{R}^m$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  e  $B \in \mathbb{R}^{d \times m}$  são matrizes reais. Se  $U \subset \mathbb{R}^m$  é compacto, convexo e  $0 \in \text{int } U$ , denominaremos de sistema de controle linear com controle restrito.

**Exemplo 1.16.** Dados  $M = \mathbb{R}^d$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Diremos que a família de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_ix(t), \quad (1.16)$$

é um sistema de controle bilinear.

**Exemplo 1.17.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Um sistema de controle é dito afim se é constituído de uma família de equações diferenciais da forma

$$\dot{x}(t) = X_0x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_ix(t) \quad (1.17)$$

onde  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ ,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in U$  e  $X_0, X_1, \dots, X_m$  são campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$ .

Note que os Exemplos 1.15 e 1.16 são casos particulares do Exemplo 1.17.

O seguinte teorema garante a existência e a unicidade de solução para o problema de valor inicial (1.14).

**Teorema 1.18.** Considere o sistema de controle (1.13) e fixe  $(x_0, u) \in M \times \mathcal{U}$ . Então existe uma solução  $\eta : I \rightarrow M$  do problema de valor inicial (1.14), definida em um intervalo (não vazio) aberto  $I$  satisfazendo a seguinte propriedade: Se  $\xi : J \rightarrow M$  é outra solução de (1.14), então  $J \subset I$  e  $\xi = \eta|_J$ .

A solução  $\eta$  do teorema acima será denotada por

$$\varphi(\cdot, x_0, u) : I \rightarrow M \quad (1.18)$$

e será chamada de solução maximal do problema de valor inicial (1.14) ou simplesmente de trajetória. O intervalo  $I$  será denotado por  $I_{\max}(x_0, u)$ .

**Demonstração:** A demonstração será dividida em três passos.

Passo 1: Vamos mostrar que existe uma solução definida em um intervalo aberto  $J$  contendo 0. Para tanto, escolha uma carta  $(\phi, V)$  de  $M$  com  $x_0 \in V$ . Seja  $W := \phi(V) \subset \mathbb{R}^d$  e defina  $\tilde{X} : W \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  por

$$\tilde{X}(y, u) := \phi'_{\phi^{-1}(y)} X(\phi^{-1}(y), u) \text{ para todo } (y, u) \in W \times \mathbb{R}^m. \quad (1.19)$$

Note que  $T_y \mathbb{R}^d$  pode ser identificado canonicamente com  $\mathbb{R}^d$  para todo  $y \in W$  e portanto podemos assumir que o contradomínio de  $\tilde{X}$  é  $\mathbb{R}^d$  ao invés de  $T\mathbb{R}^d$ . Por construção  $\tilde{X}$  é uma função de classe  $C^1$  e pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$W \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\phi^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^d}} V \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{X} TV \xrightarrow{\phi'} TW \cong W \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^d,$$

onde  $\pi_2 : W \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é a projeção no segundo fator. Para a função de controle  $u \in \mathcal{U}$  fixada, defina

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times W &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, y) &\longmapsto f(t, y) := \tilde{X}(y, u(t)) \end{aligned}$$

e considere a equação diferencial

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)). \quad (1.20)$$

Vamos mostrar que  $f$  é uma função de Carathéodory. Para isto, considere para  $y \in W$  fixado a função  $f(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto \tilde{X}(y, u(t))$ . Tal função é mensurável, pois pode ser escrita como a seguinte composição de funções mensuráveis:

$$t \mapsto u(t) \mapsto (y, u(t)) \mapsto \tilde{X}(y, u(t)).$$

Agora fixe  $t \in \mathbb{R}$ . Então  $x \mapsto f(t, x) = \tilde{X}(x, u(t))$  é contínua, pois  $\tilde{X}$  é contínua. Isto mostra que (1.20) é uma equação diferencial de Carathéodory. Queremos agora mostrar que existe uma única solução do problema de valor inicial

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = \phi(x_0).$$

Iremos, portanto, mostrar que  $f$  satisfaz as condições (1.4) e (1.5) do Teorema 1.10: Fixe  $y_0 \in W$  e escolha  $\delta > 0$  tal que  $\text{fe}(B_\delta(y_0)) \subset W$ . Então pela desigualdade do valor médio temos que

$$\begin{aligned} \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| &= \|\tilde{X}(y_1, u(t)) - \tilde{X}(y_2, u(t))\| \\ &\leq \max_{y \in \text{fe}(B_\delta(y_0))} \left\| \frac{\partial \tilde{X}}{\partial y}(y, u(t)) \right\| \cdot \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $y_1, y_2 \in B_\delta(y_0)$ , já que  $B_\delta(y_0)$  é convexo. Assim, tomando  $\alpha(t) = \max_{y \in \text{fe}(B_\delta(y_0))} \left\| \frac{\partial \tilde{X}}{\partial y}(y, u(t)) \right\|$  temos que (1.4) é satisfeita. A condição (1.5) também é verificada, pois

$$\|f(t, y_0)\| = \|\tilde{X}(y_0, u(t))\| \leq \|\tilde{X}(y_0, u(t))\|$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, basta tomar  $\beta(t) = \|\tilde{X}(y_0, u(t))\|$ . Consequentemente, pelo Teorema 1.10 Existe uma solução maximal  $\tilde{\eta} : J \rightarrow W$  definida em um intervalo aberto e não vazio  $J$  satisfazendo  $\tilde{\eta}(0) = \phi(x_0)$ . Defina  $\eta : J \rightarrow M$  por  $\eta(t) := \phi^{-1} \circ \tilde{\eta}(t)$ . Note que  $\eta$  é localmente absolutamente contínua, pois como  $\eta(J) \subset V$  (o qual é o domínio da carta  $\phi$ ), então dado  $\tau \in J$  e  $J_\tau \subset J$  compacto com  $\tau \in \text{int}_J J_\tau$ , temos que  $\eta(J_\tau) \subset V$  e a composta  $\phi \circ \eta = \tilde{\eta} : J_\tau \rightarrow \mathbb{R}^d$  é absolutamente contínua, uma vez que  $\tilde{\eta}$  é localmente absolutamente contínua. Além disso, temos que

$$\dot{\eta}(t) = (\phi^{-1})'_{\tilde{\eta}(t)} \dot{\tilde{\eta}}(t) = (\phi^{-1})'_{\tilde{\eta}(t)} \tilde{X}(\tilde{\eta}(t), u(t)) = (\phi^{-1})'_{\phi(\eta(t))} \phi'_{\eta(t)} X(\eta(t), u(t)) = X(\eta(t), u(t))$$

para quase todo  $t \in J$ . Portanto  $\eta$  é solução do problema de valor inicial (1.14).

Passo 2: Vamos mostrar que quaisquer duas soluções  $\xi_i : J_i \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$  de (1.14) definidas nos intervalos abertos  $J_1$  e  $J_2$ , respectivamente, coincidem em  $J_1 \cap J_2$ . Para isto, considere o conjunto

$$A := \{t \in J_1 \cap J_2; \xi_1(t) = \xi_2(t)\}.$$

Como  $0 \in J_1 \cap J_2$ , temos que  $A \neq \emptyset$ . Pela continuidade de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ ,  $A$  é fechado em  $J_1 \cap J_2$ . Para ver que  $A$  também é aberto, fixe  $\tau \in A$  e considere o problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)), \quad x(\tau) = \xi_1(\tau) = \xi_2(\tau).$$

Então pela mesma construção do Passo 1, obtém-se uma solução local definida em um intervalo aberto contendo  $\tau$ . (falta provar que tal solução não depende da carta local!!!). Segue, portanto, do Teorema 1.10 que tal solução é localmente única. Isto implica que  $\xi_1$

e  $\xi_2$  coincidem em uma vizinhança de  $\tau$  e portanto  $A$  é aberto. Assim, como  $J_1 \cap J_2$  é conexo, concluímos que  $A = J_1 \cap J_2$ .

*Passo 3:* Provaremos a seguinte afirmação: Seja  $I$  a união de todos os intervalos abertos contendo 0 sobre os quais existe uma solução de (1.14). Então  $I$  é aberto e não vazio. Por definição, para  $\tau \in I$  arbitrário, encontramos um intervalo aberto  $I_\tau \subset I$  com  $\tau \in I_\tau$  sobre o qual está definido uma solução  $\xi$ . Definimos  $\eta : I \rightarrow M$  por  $\eta(\tau) := \xi(\tau)$ . Pelo Passo 2, a curva  $\eta$  é independente da solução individual  $\xi$  que usamos. Claramente  $\eta(0) = x_0$ . Além disso,  $\eta$  é localmente absolutamente contínua, uma vez que localmente  $\eta$  coincide com uma curva que tem esta propriedade. Também é verdade que  $\eta$  satisfaz a equação diferencial  $\dot{x}(t) = X(x(t), u(t))$  quase sempre. Por construção, qualquer outra solução  $\xi : J \rightarrow M$  de (1.14) satisfaz  $J \subset I$  e  $\xi = \eta|_J$ .  $\square$

A próxima proposição nos dá uma condição suficiente para que uma solução maximal seja definida sobre  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 1.19.** *Seja  $\eta : I \rightarrow M$  uma solução maximal do sistema de controle (1.13). Assuma que  $K \subset M$  seja um compacto tal que  $\eta(t) \in K$  para todo  $t \in I$ . Então  $I = \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Seja  $I = (a, b)$  com  $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$ . Vamos provar que  $b = \infty$  (a prova de que  $a = -\infty$  segue de maneira análoga). Suponha que  $b < \infty$  e seja  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência estritamente crescente com  $t_n \in (a, b)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $t_n \rightarrow b$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Por hipótese, todos os elementos da sequência  $(\eta(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  pertencem ao compacto  $K$ . Consequentemente, existe uma subsequência convergente, a qual por simplicidade será ainda denotada por  $(\eta(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Portanto seja  $z \in K$  tal que  $\eta(t_n) \rightarrow z$  e tome uma carta local  $(\phi, V)$  em torno de  $z$  com  $\phi(z) = 0$  e  $\text{fe}(B_1(0)) \subset \phi(V)$ , onde  $B_1(0)$  denota a bola aberta de raio 1 e centrada em  $0 \in \mathbb{R}^d$ . Considere  $\tilde{X} : \phi(V) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida como em (1.19), isto é, a versão local do sistema de controle (1.13) com respeito à carta  $(\phi, V)$  é dada por

$$\dot{y}(t) = \tilde{X}(y(t), u(t)), \quad u \in \mathcal{U}.$$

Como  $t_n \rightarrow b$  e  $(\eta(t_n)) \rightarrow z$ , podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\eta(t_n) \in V, \quad \phi(\eta(t_n)) \in B_{\frac{1}{4}}(0) \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } \int_{t_{n_0}}^b \|\tilde{X}(\phi(\eta(\tau)), u(\tau))\| d\tau < \frac{1}{4},$$

uma vez que a função  $\tau \mapsto \|\tilde{X}(\phi(\eta(\tau))), u(\tau)\|$  é localmente integrável. Sendo  $\eta$  contínua e  $V$  aberto, existe  $t \in (t_{n_0}, b)$  tal que  $\eta([t_{n_0}, t]) \subset V$ . Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi(\eta(t)) - \phi(\eta(t_{n_0}))\| &= \left\| \int_{t_{n_0}}^t \tilde{X}(\phi(\eta(\tau)), u(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_{n_0}}^t \|\tilde{X}(\phi(\eta(\tau)), u(\tau))\| d\tau \\ &\leq \int_{t_{n_0}}^b \|\tilde{X}(\phi(\eta(\tau)), u(\tau))\| d\tau \\ &< \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\|\phi(\eta(t))\| \leq \|\phi(\eta(t)) - \phi(\eta(t_{n_0}))\| + \|\phi(\eta(t_{n_0}))\| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente,  $\phi(\eta([t_{n_0}, b])) \subset B_{\frac{1}{2}}(0)$  e  $\eta([t_{n_0}, b]) \subset V$ . Para todo  $t \in (t_{n_0}, b)$  existe  $n = n(t) \in \mathbb{N}$  com  $t_n > t$ . Pela desigualdade triangular temos

$$\|\phi(\eta(t))\| \leq \|\phi(\eta(t)) - \phi(\eta(t_n))\| + \|\phi(\eta(t_n))\|.$$

Fazendo  $t \rightarrow b$ , então  $\|\phi(\eta(t_n))\| \rightarrow \|\phi(z)\| = 0$ , pois  $t_n > t$ , e também

$$\|\phi(\eta(t_n)) - \phi(\eta(t))\| \leq \int_{t_n}^t \|\tilde{X}(\phi(\eta(\tau)), u(\tau))\| d\tau \rightarrow 0.$$

Assim  $\lim_{t \rightarrow b} \|\phi(\eta(t))\| = 0$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow b} \phi(\eta(t)) = 0$ , de onde segue que  $\lim_{t \rightarrow b} \eta(t) = z$ . Assim, se definirmos  $\xi : (a, b] \rightarrow M$  por

$$\xi(t) = \begin{cases} \eta(t), & \text{se } a < t < b \\ z, & \text{se } t = b \end{cases}$$

temos que  $\xi$  é uma extensão contínua de  $\eta$  sobre o intervalo  $(a, b]$ , a qual é também uma solução de (1.13). Sendo  $\eta$  uma solução maximal, deveríamos ter  $(a, b] \subset (a, b)$ , o que é um absurdo. Portanto  $b = \infty$ .  $\square$

Em particular, se considerarmos  $M$  uma variedade compacta, pela proposição anterior temos que todas as soluções maximais estão definidas sobre  $\mathbb{R}$ .

**Corolário 1.20.** *Assuma que o lado direito  $X$  do sistema de controle (1.14) satisfaça*

$$X(x, u) = 0 \text{ para todo } x \in M - K \text{ e } u \in \mathbb{R}^m,$$

onde  $K \subset M$  é um compacto. Então todas as soluções maximais estão definidas em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Seja  $\eta : I \rightarrow M$  uma solução maximal. Assuma que exista  $\tau \in I$  tal que  $\eta(\tau) \in M - K$ . Como  $M - K$  é aberto em  $M$  e  $\eta$  é contínua, então  $\eta(t) \in M - K$  para todo  $t$  em algum intervalo da forma  $(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$  com  $\epsilon > 0$ . Segue que

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = X(\eta(t), u(t)) = 0 \text{ para quase todo } t \in (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon).$$

Consequentemente  $\eta$  é constante em  $(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$  e portanto em  $I$ , pois se  $p \in M$  é tal que  $\eta(t) = p$  para todo  $t \in (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ , então se supormos por absurdo que exista  $s \in I$  tal que  $\eta(s) \neq p$ , novamente pela continuidade de  $\eta$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $\eta(t) \neq p$  para todo  $t \in (s - \delta, s + \delta) \subset I$ , e com isso, se definirmos  $\xi(t) = p$  para todo  $t \in (s - \delta, s + \delta)$ , temos que

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = 0 = X(\xi(t), u(t)) \text{ para quase todo } t \in (s - \delta, s + \delta).$$

Seguiria então da maximalidade de  $\eta$  que  $\eta|_{(s-\delta, s+\delta)}(t) = \xi(t) = p$  para todo  $t \in (s - \delta, s + \delta)$ , o que é um absurdo. Assim  $\eta(t) \in \{p\}$  para algum  $p \in M$ . Como  $\{p\} \subset M$  é compacto, segue da proposição anterior que  $I = \mathbb{R}$ . Caso não exista  $\tau \in I$  tal que  $\eta(t) \notin K$ , então  $\eta(t) \in K$  para todo  $t \in I$  e portanto  $I = \mathbb{R}$  pela proposição anterior.  $\square$

Considerando novamente o sistema (1.13), as soluções maximais  $\varphi(\cdot, x, u)$  definem uma aplicação

$$\varphi : \mathcal{D} \rightarrow M, \quad (t, x, u) \mapsto \varphi(t, x, u), \quad (1.21)$$

onde

$$\mathcal{D} := \{(t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times \mathcal{U}; t \in I_{\max}(x, u)\}.$$

Em muitos casos vamos fixar um ou dois dos argumentos de  $\varphi$ . Para enfatizar quais argumentos estão sendo fixados, usaremos a seguinte notação:

$$\varphi_{t,u}(x) \equiv \varphi_{x,u}(t) \equiv \varphi_u(t, x) \equiv \varphi_t(x, u) \equiv \varphi(t, x, u).$$

### 1.3.1 Propriedades de Regularidade das Soluções

O objetivo desta subseção é provar a dependência contínua do cociclo  $\varphi$  sobre  $(t, x)$  e a dependência continuamente diferenciável sobre  $x$ .

A aplicação  $\varphi$  satisfaz a propriedade do cociclo, a qual é descrita pela seguinte proposição.

**Proposição 1.21.** *Se  $(x, u) \in M \times \mathcal{U}$  e  $s \in \mathbb{R}$ , então para todo  $t \in I_{\max}(x, u) - s$  tem-se*

$$\varphi(t + s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u)\Theta_s u).$$

**Demonstração:** Consideremos as funções  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$  e  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow M$  dadas por  $\xi(t) := \varphi(t + s, x, u)$  e  $\eta(t) := \varphi(t, \varphi(s, x, u), \Theta_s u)$ , respectivamente. Temos que

$$\xi(0) = \varphi(s, x, u) = \varphi(0, \varphi(s, x, u), \Theta_s u) = \eta(0).$$

Além disso,  $\xi$  e  $\eta$  são localmente absolutamente contínuas e portanto diferenciável quase sempre. Para a derivada de  $\xi$  obtemos

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t + s, x, u) = X(\varphi(t, x, u), u(t + s)) = X(\xi(t), (\Theta_s u)(t))$$

para quase todo  $t \in \mathbb{R}$ , e para  $\eta$  obtemos

$$\dot{\eta}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t, \varphi(s, x, u), \Theta_s u) = X(\varphi(t, \varphi(s, x, u), \Theta_s u), (\Theta_s u)(t)) = X(\eta(t), (\Theta_s u)(t)),$$

para quase todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\xi$  e  $\eta$  são soluções do problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = X(x(t), (\Theta_s u)(t)), \quad x(0) = \varphi(s, x, u),$$

e portanto coincidem em  $\mathbb{R}$  pela unicidade de solução. Logo  $\varphi(t, \varphi(s, x, u), \Theta_s u) = \eta(t) = \xi(t) = \varphi(t + s, x, u)$ .  $\square$

Esta proposição nos diz que é equivalente atingir um ponto a partir de  $x$  utilizando a função de controle  $u$  em tempo  $t + s$  e atingir o mesmo a partir de  $\varphi(s, x, u)$  usando a função de controle  $\Theta_s u$  em tempo  $t$ .

**Teorema 1.22.** *Considere o sistema de controle (1.13) e assuma que todas as soluções maximais estão definidas sobre  $\mathbb{R}$ . Então, para toda função de controle  $u \in \mathcal{U}$ , a aplicação  $\varphi_u : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  é contínua.*

**Demonstração:** Sendo  $M$  metrizable, considere  $d$  a métrica que induz a topologia dada em  $M$ . Mostraremos a continuidade de  $\varphi_u$  em um ponto arbitrário  $(t_*, x_*) \in \mathbb{R} \times M$  em cinco passos.

Passo 1: Pela desigualdade triangular, para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$  temos

$$d(\varphi(t, x, u), \varphi(t_*, x_*, u)) \leq d(\varphi(t, x, u), \varphi(t, x_*, u)) + d(\varphi(t, x_*, u), \varphi(t_*, x_*, u)).$$

Pela continuidade da solução  $\varphi(\cdot, x_*, u)$ , temos que  $d(\varphi(t, x_*, u), \varphi(t_*, x_*, u)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_*$ . Portanto devemos apenas mostrar que  $d(\varphi(t, x, u), \varphi(t_*, x_*, u)) \rightarrow 0$  quando  $(t, x) \rightarrow (t_*, x_*)$ . Assumiremos, sem perda de generalidade, que  $t_* > 0$

Passo 2: Para mostrar que a aplicação  $\varphi_u$  é contínua para todo  $(t_*, x_*) \in \mathbb{R} \times M$  ( $t_* > 0$ ), que é suficiente considerar o caso em que o conjunto  $\varphi([0, t_*], x_*, u)$  está contido no domínio de uma carta. Com efeito, suponha que  $\varphi(t_*, x_*, u)$  seja contínua para todo  $(t_*, x_*) \in \mathbb{R} \times M$  ( $t_* > 0$ ) de modo que  $\varphi([0, t_*], x_*, u)$  esteja contido no domínio de uma carta. De maneira geral, é possível encontrar uma quantidade finita de cartas

$$(\phi_1, V_1), (\phi_2, V_2), \dots, (\phi_n, V_n)$$

e tempos

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_*$$

de forma que

$$\varphi([t_{i-1}, t_i], x_*, u) \subset V_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Como  $x_*$  e  $\varphi(t_1, x_*, u)$  pertencem a  $V_1$ , pela nossa suposição temos que

$$\varphi(t, x, u) \rightarrow \varphi(t_1, x_*, u) \quad \text{para } (t, x) \rightarrow (t_*, x_*). \quad (1.22)$$

Assuma agora que  $(t, x) \rightarrow (t_2, x_*)$ . Então por (1.22) segue que

$$(t - t_1, \varphi(t_1, x, u)) \rightarrow (t_2 - t_1, \varphi(t_1, x_*, u)).$$

Como  $\varphi(t_1, x_*, u)$  e  $\varphi(t_2, x_*, u) = \varphi(t_2 - t_1, \varphi(t_1, x_*, u), \Theta_{t_1} u)$  estão contidos em  $V_2$ , pelo que assumimos, isto implica em

$$\varphi(t - t_1, \varphi(t_1, x, u), \Theta_{t_1} u) \rightarrow \varphi(t_2 - t_1, \varphi(t_1, x_*, u), \Theta_{t_1} u),$$

a qual, pela propriedade do cociclo pode ser escrito como

$$\varphi(t, x, u) \rightarrow \varphi(t_2, x_*, u).$$

Repetindo este processo, podemos mostrar que se  $(t, x, u) \rightarrow (t_*, x_*, u)$ , então  $\varphi(t, x, u) \rightarrow \varphi(t_*, x_*, u)$ . Portanto, de agora em diante assumiremos que  $\varphi([0, t_* + c], x_*, u)$  (para  $c > 0$  pequeno) está contido no domínio de uma carta  $(\phi, V)$ .

Passo 3: Consideremos a versão local do sistema de controle sobre  $M$  com respeito à carta  $(\phi, V)$ . O correspondente lado direito será denotado por  $\tilde{X} : \phi(V) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  (ver 1.19). Podemos assumir que  $\phi(V) = B_1(0)$  e  $\phi(x_*) = 0$ . Pela continuidade de  $\varphi(\cdot, x_*, u)$  o conjunto  $\phi \circ \varphi([0, t_* + c], x_*, u)$  é compacto e portanto existe  $r \in (0, 1)$  com

$$\phi \circ \varphi([0, t_* + c], x_*, u) \subset B_r(0) \subset B_1(0).$$

Seja  $\xi(t) = \phi \circ \varphi(t, x_*, u)$  para  $t \in [0, t_* + c]$ . Como  $\xi(0) = \varphi(x_*) = 0$  e

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= D\phi(\varphi(t, x_*, u)) \frac{d}{dt} \varphi(t, x_*, u) \\ &= D\phi(\varphi(t, x_*, u)) X(\varphi(t, x_*, u), u(t)) \\ &= \tilde{X}(\phi \circ \varphi(t, x_*, u), u(t)) \\ &= \tilde{X}(\xi(t), u(t)), \end{aligned}$$

temos que

$$\xi(t) = \int_0^t \tilde{X}(\xi(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \text{para todo } t \in [0, t_* + c].$$

Pela versão diferenciável do Lema de Urysohn, dados os fechados disjuntos  $\text{fe}(B_r(0))$  e  $\mathbb{R}^d \setminus B_1(0)$ , existe uma função  $\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tal que  $\theta(\text{fe}(B_r(0))) = \{1\}$  e  $\theta(\mathbb{R}^d \setminus B_1(0)) = \{0\}$ . Assim, o suporte de  $\theta$ ,  $\text{supp}\theta$ , está contido em  $B_1(0)$  e  $\theta(B_r(0)) = \{1\}$ . Dado o fechado  $\text{fe}(B_r(0)) \times \mathbb{R}^m$ , pelo Teorema de Tietze podemos estender  $\tilde{X}$  a uma  $\bar{X} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $\bar{X}|_{\text{fe}(B_r(0)) \times \mathbb{R}^m} = \tilde{X}$ . Considere a equação diferencial

$$\dot{y}(t) = \tilde{G}(y(t), u(t)) \tag{1.23}$$

com  $\tilde{G} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $\tilde{G}(y, u) = \theta(y)\bar{X}(y, u)$ . Observe que  $\tilde{G}$  é de classe  $C^1$ ,  $\tilde{G}(y, u) = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}^d \setminus B_1(0)$  e também  $\tilde{G}(y, u) = \tilde{X}(y, u)$  para todo  $(y, u) \in \text{fe}(B_r(0)) \times \mathbb{R}^m$ .

Passo 4: Vamos estimar a distância entre a solução  $\xi$  e as soluções de (1.23). Seja  $\alpha(t) = \max_{y \in \text{supp}\theta} \|D_y \tilde{G}(y, u(t))\|$ . Como  $u$  é localmente integrável e  $D_y \tilde{G}$  é contínua, temos que  $\alpha$  é localmente integrável. Note que

$$\|\tilde{G}(y_1, u) - \tilde{G}(y_2, u)\| \leq \|D_y \tilde{G}(y, u)\| \|y_1 - y_2\| \leq \alpha(t) \|y_1 - y_2\|.$$

A solução maximal do problema de valor inicial  $y(0) = y$  para a equação (1.23) será denotada por  $\eta_y : I_{\max}(y, u) \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Pelo Corolário (1.20) temos que  $I_{\max}(y, u) = \mathbb{R}$  para todo  $y \in \mathbb{R}^d$ . Comparando estas soluções com  $\xi$  no intervalo  $[0, t_* + c]$  temos

$$\xi(t) - \eta_y(t) = \underbrace{(\phi(x_*) - y)}_{=0} + \int_0^t [\tilde{X}(\xi(\tau), u(\tau)) - \tilde{G}(\eta_y(\tau), u(\tau))] d\tau. \quad (1.24)$$

Como  $\xi(t) \in B_r(0)$  para todo  $\tau \in [0, t_* + c]$ , temos que  $\tilde{X}(\xi(\tau), u(\tau)) = \tilde{G}(\xi(\tau), u(\tau))$  para todo  $\tau \in [0, t_* + c]$ . Consequentemente, trocando  $\tilde{X}$  por  $\tilde{G}$  em (1.24), obtemos para  $t \in [0, t_* + c]$

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \eta_y(t)\| &\leq \|y\| + \int_0^t [\tilde{G}(\xi(\tau), u(\tau)) - \tilde{G}(\eta_y(\tau), u(\tau))] d\tau \\ &\leq \|y\| + \int_0^t \alpha(\tau) \|\xi(\tau) - \eta_y(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Lema (1.11) (Lema de Gronwall) isto implica em

$$\|\xi(t) - \eta_y(t)\| \leq \|y\| e^{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \leq \|y\| e^{\int_0^{t_*+c} \alpha(\tau) d\tau}.$$

*Passo 5:* Vamos finalmente mostrar a continuidade de  $\varphi(\cdot, \cdot, u)$  em  $(t_*, x_*)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , escolha  $\delta > 0$  tal que  $\max\{|t - t_*|, \|y\|\} < \delta$  implica em  $t \in [0, t_* + c]$  e  $\|y\| e^{\int_0^{t_*+c} \alpha(\tau) d\tau} < \epsilon$ . Podemos escolher  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $\eta_y(t) \in B_r(0)$  para todo  $t \in [0, t_* + c]$ . De fato, se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $t \in [0, t_* + c]$  tal que  $\eta_y(t) \geq r$ , então como  $\xi(t) \in B_r(0)$  para todo  $t \in [0, t_* + c]$ , se considerarmos  $\epsilon = \min_{t \in [0, t_* + c]} (r - \|\xi(t)\|)$ , existiria  $t' \in [0, t_* + c]$  tal que  $\eta_y(t') \geq r$  e  $\delta > 0$  tal que  $\max\{|t - t_*|, \|y\|\} < \delta$  implica em  $t \in [0, t_* + c]$  e  $\|y\| e^{\int_0^{t_*+c} \alpha(\tau) d\tau} < \epsilon$ . Logo teríamos que

$$\begin{aligned} r &\leq \eta(t') \leq \|\xi(t') - \eta(t')\| + \xi(t') \\ &< \epsilon + \|\xi(t')\| = \min_{t \in [0, t_* + c]} (r - \|\xi(t)\|) + \|\xi(t')\| \\ &\leq (r - \|\xi(t')\|) + \|\xi(t')\| = r \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Dessa forma, temos que

$$\eta_y(t) = y + \int_0^t \tilde{X}(\eta_y(\tau), u(\tau)) d\tau.$$

Portanto  $\phi^{-1} \circ \eta_y : [0, t_* + c] \rightarrow M$  é uma solução do sistema de controle original sobre  $M$ , isto é,

$$\phi^{-1} \circ \eta_y(t) = \varphi(t, \phi^{-1}(y), u).$$

Consequentemente, para  $(t, x) \rightarrow (t_*, x_*)$  obtemos  $\phi(x) \rightarrow \phi(x_*) = 0$  e portanto

$$\varphi(t, x, u) = \phi^{-1} \circ \eta_{\phi(x)}(t) \rightarrow \phi^{-1} \circ \xi(t_*) = \varphi(t_*, x_*, u).$$

Isto conclui a demonstração.  $\square$

Antes de mostrarmos as consequências deste teorema, vamos demonstrar o seguinte lema técnico.

**Lema 1.23.** *Sejam  $M$  uma variedade suave e  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  uma métrica em  $M$  que induz a sua topologia. Então para todo compacto não vazio  $K \subset M$ , existe  $\rho > 0$  tal que  $fe(N_\rho(K))$  é compacto.*

**Demonstração:** Como  $M$  é localmente compacto, para cada  $x \in K$  existe uma vizinhança  $K_x \subset M$  de  $x$  tal que  $fe(K_x)$  é compacto. Como  $K$  é compacto, existem  $x_1, \dots, x_n \in K$  tal que  $K \subset \bigcup_{i=1}^n fe(K_i)$ . Seja  $W := \bigcup_{i=1}^n fe(K_i)$ . Assim  $W$  é a união finita de conjuntos compactos, portanto  $W$  é uma vizinhança compacta de  $K$ . Suponha por absurdo que para todo  $\rho > 0$ , exista  $x \in M$  tal que  $d(x, K) < \rho$  e  $x \notin W$ . Então podemos construir sequências  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $y_n \in M - W$  e  $z_n \in K$  tais que  $d(y_n, z_n) < \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pela compacidade de  $K$ , existe uma subsequência  $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $z_{n_k} \rightarrow z$ , para algum  $z \in K$ . Consequentemente,  $y_{n_k} \rightarrow z$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Seja  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $z \in K_{x_i}$ , então para  $N$  suficientemente grande,  $y_N \in K_{x_i} \subset W$ , o que contradiz o fato de  $y_n \in M - W$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, existe  $\rho > 0$  tal que  $N_\rho(K) \subset W$ . Assim  $fe(N_\rho(K)) \subset W$  é compacto.  $\square$

**Corolário 1.24.** *Sobre as hipóteses do Teorema 1.22, sejam  $u \in \mathcal{U}$  e  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$  fixados. Então para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(\varphi(t, x, u), \varphi(t, x_0, u)) < \epsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, t_0].$$

**Demonstração:** Pelo lema anterior, existe  $\rho > 0$  tal que  $fe(B_\rho(x_0))$  é compacto. Portanto  $K := [0, t_0] \times fe(B_\rho(x_0))$  também é compacto. Pelo Teorema 1.22, temos que  $\varphi(\cdot, \cdot, u)$  é uniformemente contínua em  $K$ . Dessa forma, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta \in (0, \rho)$  tal que se  $d(x, x_0) < \delta$ , então  $d(\varphi(t, x, u), \varphi(t, x_0, u)) < \epsilon$ , para todo  $t \in [0, t_0]$ .  $\square$

**Corolário 1.25.** Ainda sobre as hipóteses do Teorema 1.22, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathcal{U}$  a aplicação  $\varphi_{t,u} : M \rightarrow M$  é um homeomorfismo com inversa  $\varphi_{-t,\Theta_t u}$ .

**Demonstração:** A continuidade de  $\varphi_{t,u}$  e  $\varphi_{-t,\Theta_t u}$  segue da Teorema 1.22. Usando a Proposição 1.21 e as propriedades de  $\Theta$ , temos que para todo  $x \in M$

$$\varphi_{t,u}(\varphi_{-t,\Theta_t u}(x)) = \varphi(t, \varphi(-t, x, \Theta_t u, u)) = \varphi(t, \varphi(-t, x, \Theta_t u, \Theta_{-t}\Theta_t u)) = \varphi(0, x, \Theta_t u) = x$$

e

$$\varphi_{-t,\Theta_t u}(\varphi_{t,u}(x)) = \varphi(-t, \varphi(t, x, u), \Theta_t, u) = \varphi(0, x, u) = x,$$

o que prova o resultado.  $\square$

**Lema 1.26.** Considere o sistema de controle (1.13) e assuma que  $M$  seja um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^d$ . Então, para cada  $u \in \mathcal{U}$ , a função  $(t, x) \mapsto \varphi_{t,u}(x)$  (onde estiver definida) é continuamente diferenciável com respeito a  $x$ .

**Demonstração:** Fixe  $u \in \mathcal{U}$  e defina

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) &\longmapsto X(x, u(t)). \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, vamos utilizar a Proposição 1.13. Para isto, note que como  $X$  é de classe  $C^1$ , então as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existem. Além disso, elas são funções de Carathéodory, pois para cada  $x \in D$  fixado, temos que  $f(\cdot, x) = X(x, u(\cdot))$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\cdot, x) = \frac{\partial X}{\partial x_i}(x, u(\cdot))$  são mensuráveis como composição de funções mensuráveis (ver também a prova do Teorema 1.18) e para  $t \in \mathbb{R}$  fixado, as funções  $f(t, \cdot) = X(\cdot, u(t))$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \cdot) = \frac{\partial X}{\partial x_i}(\cdot, u(t))$  são contínuas, pois  $X$  é de classe  $C^1$ . Agora fixe  $x_0 \in M$ . Escolha  $\delta_1 > 0$  qualquer e  $\delta_2 > 0$  de forma que a bola compacta  $B := \text{fe}(B_{\delta_2}(x_0)) \subset \mathbb{R}^d$  esteja contida em  $M$ . Tomando

$$Q := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; |t| < \delta_1 \text{ e } \|x - x_0\| \leq \delta\} \subset \mathbb{R} \times M,$$

então para todo  $(t, x) \in Q$  temos que

$$\|f(t, x)\| = \|X(x, u(t))\| \leq \max_{x \in B} \|X(x, u(t))\|$$

e

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) \right\| = \left\| \frac{\partial X}{\partial x_i}(x, u(t)) \right\| \leq \max_{x \in B} \left\| \frac{\partial X}{\partial x_i}(x, u(t)) \right\| \quad i = 1, \dots, d.$$

Assim, pela Proposição 1.13, existe uma única solução  $\varphi(\cdot, x_0, u)$  do problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

definida em um intervalo aberto  $J \subset \mathbb{R}$  contendo 0 e a aplicação  $\Phi : J \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $\Phi(t, 0, x) = \Phi(t, x) = \varphi_{t,u}(x)$  é diferenciavelmente contínua com respeito a  $x$ .  $\square$

**Teorema 1.27.** *Considere o sistema de controle (1.13) e assuma que as soluções maximais estejam definidas sobre  $\mathbb{R}$ . Então para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathcal{U}$ , a aplicação  $\varphi_{t,u}(x) : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  com inversa  $\varphi_{-t, \Theta_t u}$ .*

**Demonstração:** Seja  $(t_*, x_*, u_*) \in \mathbb{R} \times M \times \mathcal{U}$  escolhido arbitrariamente. Assuma, sem perda de generalidade, que  $t_* > 0$ . Queremos mostrar que a derivada de  $\varphi_{t_*, u_*} : M \rightarrow M$  existe em uma vizinhança de  $x_*$  e é contínua, de onde segue que  $\varphi_{t_*, u_*}$  é uma aplicação de classe  $C^1$ . Como  $t_*$  e  $u_*$  são escolhidos arbitrariamente, o resultado seguirá do Corolário 1.25. Escolha tempos  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_*$  e cartas  $(\phi_1, V_1), \dots, (\phi_n, V_n)$  de  $M$  tais que

$$\varphi([\tau_j, \tau_{j+1}], x_*, u_*) \subset V_{j+1} \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

A aplicação  $\varphi_{t_*, u_*}$  pode ser escrita como

$$\varphi_{t_*, u_*} = \varphi_{\tau_n - \tau_{n-1}, u_{n-1}} \circ \dots \circ \varphi_{\tau_2 - \tau_1, u_1} \circ \varphi_{\tau_1 - \tau_0, u_0}$$

com  $u_j = \Theta_{\tau_j} u_*$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , o qual segue aplicando-se indutivamente a propriedade do cociclo. Portanto, é suficiente mostrar que para  $j = 0, 1, \dots, n-1$  a aplicação  $\varphi_{\tau_{j+1} - \tau_j, u_j}$  é continuamente diferenciável em uma vizinhança do ponto  $x_j := \varphi(\tau_j, x_*, u_*)$ . Para isto, considere a versão local do sistema (1.13) para a função de controle  $u_j$  com respeito à carta  $(\phi_{j+1}, V_{j+1})$ :

$$\dot{y}(t) = \tilde{X}(y(t), u_j(t)), \quad \tilde{X}(y, u) = \phi'_{j+1}(\phi_{j+1}^{-1}(y))X(\phi_{j+1}^{-1}(y), u).$$

Denotemos as soluções deste sistema por  $\tilde{\varphi}(t, y, u_j)$ . Uma vez que  $\varphi([\tau_j, \tau_{j+1}], x_*, u_*) \subset V_{j+1}$ , temos que

$$\tilde{\varphi}(t, \phi_{j+1}(x_j), u_j) = \phi_{j+1}(\varphi(t + \tau_j, x_*, u_*)) \quad \text{para todo } t \in [0, \tau_{j+1} - \tau_j].$$

Pela dependência contínua do valor inicial (ver Corolário 1.24) existe uma vizinhança  $W \subset M$  de  $x_j$  tal que  $\varphi([0, \tau_{j+1} - \tau_j], W, u_j) \subset V_{j+1}$ . Portanto, obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi_{\tau_{j+1}-\tau_j, u_j}} & V_{j+1} \\ \phi_{j+1} \downarrow & & \downarrow \phi_{j+1} \\ \phi_{j+1}(W) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\tau_{j+1}-\tau_j, u_j}} & \phi_{j+1}(V_{j+1}) \end{array}$$

Pelo Lema 1.26, a aplicação  $\tilde{\varphi}_{\tau_{j+1}-\tau_j, u_j}$  é de classe  $C^1$  em  $\phi_{j+1}(W)$  e portanto  $\varphi_{\tau_{j+1}-\tau_j, u_j}$  também é continuamente diferenciável em  $W$ .  $\square$

---

# Conjuntos de Controle

---

Neste capítulo vamos provar propriedades básicas referentes à teoria qualitativa de sistemas de controle, dentre as quais se destacam a ideia de conjuntos de controle de um sistema. Inicialmente, usaremos a desenvolvida por F. Colonius e W. Kliemann em [1] e provaremos alguns resultados principais que aplicaremos no próximo capítulo, onde um dos nossos objetivos será encontrar conjuntos de controle para o sistema de controle linear. Por fim, estudaremos conjuntos de controle via ações de semigrupos de grupos de Lie criada por L.A.B. San Martin. Esta teoria é bastante rica devido às ferramentas da teoria de Lie que se pode utilizar para resolver os problemas. Uma de suas vantagens é que, a partir de propriedades do semigrupo, pode-se obter resultados sobre os conjuntos de controle e vice-versa.

No estudo de controlabilidade de sistemas de controle, a noção de conjuntos de controle é de muita relevância, principalmente pelo fato de ser uma tarefa difícil saber se um sistema é ou não controlável (isto é, se dados quaisquer pontos  $x, y \in M$ , existe  $t > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $y = \varphi(t, x, u)$ ) e, caso o sistema não seja controlável, uma pergunta natural que surge é: quais seriam as regiões de  $M$  onde há controlabilidade (aproximada)? Assim, a ideia de conjuntos de controle aparece para solucionar este tipo de problema.

## 2.1 Teoria Qualitativa de Sistemas de Controle

Iniciaremos esta seção definindo e explorando propriedades relativas às órbitas positivas e negativas a partir de um ponto  $x \in M$ . Tais conjuntos são necessários para se definir controlabilidade e conjuntos de controle de um sistema. Em seguida, veremos a noção de acessibilidade e acessibilidade local de um sistema, que nos ajudará a entender aspectos

topológicos dos conjuntos de controle.

**Observação 2.1.** *A partir de agora vamos considerar que as soluções maximais estão definidas sobre  $\mathbb{R}$ . De acordo com a Proposição 1.19 tal condição é satisfeita uma vez que as soluções do sistema de controle não deixam um compacto  $K \subset M$ . Assim, tal condição ocorre sempre que  $M$  é uma variedade compacta. Além disso, os clássicos sistemas de controle linear também satisfazem tal condição, como veremos a seguir, e também em sistemas de controle invariantes à direita em grupos de Lie em seus espaços homogêneos.*

Assumiremos que, dado um controle  $u \in U$ , a aplicação

$$\begin{aligned} X_u : M &\rightarrow TM \\ x &\mapsto X_u(x) = X(x, u) \end{aligned}$$

é um campo de vetores de classe  $C^\infty$  sobre  $M$ . Do Teorema 1.18, se considerarmos uma função de controle constante  $u(t) = u \in U$ , temos então que para cada  $x \in M$ , a equação diferencial autônoma  $\dot{x}(t) = X_u(x(t))$  possui soluções  $\varphi_x^u(t)$  localmente únicas com  $\varphi_x^u(0) = x$ . Iremos supor que os campos de vetores  $X_u$  sejam completos, isto é, que as soluções  $\varphi_x^u(t)$  existem globalmente para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim fica bem definido o fluxo  $\varphi^u(t, x) = \varphi_x^u(t)$  em  $\mathbb{R} \times M$ . Portanto as soluções  $\varphi_x^u(t)$  satisfazem

$$\frac{d}{dt}\varphi_x^u(t) = X_u(\varphi_x^u(t)), \varphi_x^u(0) = x_0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in M$ .

Dessa forma, se  $u \in \mathcal{U}$  é uma função de controle constante  $u(t) = u \in U$ , temos que  $\varphi(t, x, u) = \varphi_x^u(t)$ . Assim, um sistema de controle dá origem a diferentes trajetórias que dependem das funções de controle e das condições iniciais fixadas. Note que se considerarmos o conjunto das funções de controle  $\mathcal{U}_{pc}$ , as soluções (ou trajetórias) de um sistema de controle são concatenações de trajetórias de equações diferenciais autônomas.

Com isso, um sistema de controle pode ser interpretado utilizando o conjunto dos campos de vetores  $F = \{X_u; u \in U\}$ . Se  $U \subset \mathbb{R}^m$  é um conjunto unitário, então  $F$  é unitário e portanto um sistema de controle se reduz a uma equação diferencial. Portanto o estudo de sistemas de controle pode ser vista como o estudo de uma família de campos de vetores suaves.

Dado um sistema de controle e seu correspondente conjunto de campos de vetores completos  $F = \{X_u; u \in U\}$ . A cada  $X_u \in F$  e  $t \in \mathbb{R}$  temos um difeomorfismo  $\varphi_{t,u} : M \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  dado por  $\varphi_{t,u}(x) = \varphi(t, x, u)$  ( $u \in U$  é vista como a função de controle constante  $u(t) = u \in U$ ). Se  $t = 0$ , então  $\varphi_{0,u} = id_M$ . Além disso, dados  $t, s \in \mathbb{R}$ , pela Proposição (1.21), temos que

$$\varphi_{t+s,u}(x) = \varphi(t+s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), \Theta_s u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u) = \varphi_{t,u} \circ \varphi_{s,u}(x)$$

Esses difeomorfismos são de crucial importância no desenvolvimento da teoria.

**Definição 2.2.** Considerando-se o conjunto dos campos de vetores completos  $F = \{X_u; u \in U\}$  de um sistema de controle, define-se

$$\mathcal{G}_F = \{\varphi_{t_n, u_n} \circ \varphi_{t_{n-1}, u_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1, u_1}; u_i \in U, t_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$\mathcal{S}_F = \{\varphi_{t_n, u_n} \circ \varphi_{t_{n-1}, u_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1, u_1}; u_i \in U, t_i > 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{G}_F$  e  $\mathcal{S}_F$  são denominados grupo e semigrupo do sistema, respectivamente.

É possível mostrar que  $\mathcal{G}_F$  é de fato um grupo com a operação de composição e que  $\mathcal{S}_F \subset \mathcal{G}_F$  é um semigrupo com a mesma operação. Voltaremos a falar sobre o grupo e o semigrupo do sistema na Seção 2.2.

Em geral, usamos a técnica de concatenação para a construção de trajetórias de um sistema de controle em tempo positivo. Mais precisamente, seja  $F = \{X_u; u \in U\}$  o conjunto dos campos de vetores completos de um sistema de controle. Tomemos  $X_{u_1}, \dots, X_{u_n} \in F$  e definamos  $f : [0, T] \rightarrow F$  por

$$f(t) = X_{u_k}, \text{ se } t \in [s_{k-1}, s_k], \quad k = 1, \dots, n$$

onde  $s_0 = 0$ ,  $s_n = T$  e  $s_k = \sum_{i=0}^k t_i$ . Consideremos agora o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t)(x), \quad x(0) = x_0.$$

Observe que a solução deste problema é dada por

$$\varphi(t) = \varphi_{t-s_{k-1}, u_k} \circ \varphi_{s_{k-1}, u_{k-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1, u_1}(x_0)$$

para  $t \in [s_{k-1}, s_k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ . De fato,  $\varphi(0) = \varphi_{0,u_1}(x_0) = x_0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t) &= \frac{d}{dt}\varphi_{t,u_k}(\varphi_{-s_{k-1},u_k} \circ \varphi_{s_{k-1},u_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_1,u_1}(x_0)) \\ &= X_{u_k}(\varphi_{t,u_k}(\varphi_{-s_{k-1},u_k} \circ \varphi_{s_{k-1},u_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_1,u_1}(x_0))) \\ &= X_{u_k}(\varphi(t)) \\ &= f(t)(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Com isso, as trajetórias de um sistema de controle de tempo positivo são determinadas pelos campos de vetores em  $F$  e pelo correspondente semigrupo  $\mathcal{S}_F$ . Este argumento nos ajuda a construir alguns exemplos.

Com o objetivo de estudar controlabilidade, os seguintes conjuntos são de essencial importância.

**Definição 2.3.** *Sejam  $T > 0$  e  $x \in M$ . Definimos o conjunto dos pontos atingíveis a partir de  $x$  em tempo  $T$  e o conjunto dos pontos controláveis (ou conduzíveis) a  $x$  em tempo  $T$  por*

$$\mathcal{O}_T^+(x) = \{y \in M; \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(t, x, u) = y\}$$

e

$$\mathcal{O}_T^-(x) = \{y \in M; \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(t, y, u) = x\},$$

respectivamente.

De posse destes conjuntos, podemos definir o conjunto dos pontos atingíveis a partir de  $x \in M$  até em tempo  $T > 0$  e o conjunto dos pontos controláveis (ou conduzíveis) a  $x$  até em tempo  $T > 0$  por

$$\mathcal{O}_{\leq T}^+(x) = \{y \in M; \text{ existe } t \in [0, T] \text{ e } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(t, x, u) = y\}$$

e

$$\mathcal{O}_{\leq T}^-(x) = \{y \in M; \text{ existe } t \in [0, T] \text{ e } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(t, y, u) = x\},$$

respectivamente.

Definimos assim a órbita positiva e a órbita negativa de  $x$  por

$$\mathcal{O}^+(x) = \{y \in M; \text{ existe } t > 0 \text{ e } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(t, x, u) = y\} = \bigcup_{T>0} \mathcal{O}_{\leq T}^+$$

e

$$\mathcal{O}^-(x) = \{y \in M; \text{ existe } t > 0 \text{ e } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(t, y, u) = x\} = \bigcup_{T>0} \mathcal{O}_{\leq T}^+,$$

respectivamente.

Segue da definição de  $\mathcal{O}^+(x)$  e  $\mathcal{O}^-(x)$  que  $y \in \mathcal{O}^+(x)$  se, e somente se,  $x \in \mathcal{O}^-(y)$ .

Dados  $x, y \in M$  tais que  $y \in \mathcal{O}^+(x)$ , então  $\mathcal{O}^+(y) \subset \mathcal{O}^+(x)$ . Com efeito, seja  $z \in \mathcal{O}^+(y)$ . Então existem  $t_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tais que  $z = \varphi(t_1, y, u_1)$ . Mas  $y = \varphi(t_2, x, u_2)$ , para algum  $t_2 > 0$  e algum  $u_2 \in \mathcal{U}$ . Considere  $u_3 = u_2 \wedge_{t_2} u_1$  a  $t_2$ -concatenação de  $u_2$  e  $u_1$ . Pela Proposição (1.21) temos

$$\varphi(t_1 + t_2, x, u_3) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x, u_3), \Theta_{t_2} u_3).$$

Entretanto, para todo  $t \leq t_2$ ,  $u_3(t) = u_2(t)$ , logo  $\varphi(t_2, x, u_3) = \varphi(t_2, x, u_2)$ . Observe também que para todo  $t > 0$ ,  $t + t_2 > t_2$ , logo  $u_3(t + t_2) = u_1(t + t_2 - t_2) = u_1(t)$ , ou seja,  $(\Theta_{t_2} u_3)(t) = u_1(t)$  para  $t$  positivo. Assim temos que

$$\varphi(t_1 + t_2, x, u_3) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x, u_3), \Theta_{t_2} u_3) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x, u_2), u_1) \quad (2.1)$$

e portanto

$$\begin{aligned} z &= \varphi(t_1, y, u_1) \\ &= \varphi(t_1, \varphi(t_2, x, u_2), u_1) \\ &= \varphi(t_1 + t_2, x, u_3) \in \mathcal{O}^+(x). \end{aligned}$$

Isto mostra em particular que as órbitas positivas de um ponto  $x \in M$  são invariantes por trajetórias positivas, ou seja,  $\varphi(t, \mathcal{O}^+(x), u) \subset \mathcal{O}^+(x)$  para todo  $t > 0$  e todo  $u \in \mathcal{U}$ .

Analogamente, se  $y \in \mathcal{O}^-(x)$ , então  $\mathcal{O}^-(y) \subset \mathcal{O}^-(x)$ . Para ver isto, seja  $z \in \mathcal{O}^-(y)$ . Então  $y \in \mathcal{O}^+(z)$  e pelo que vimos antes,  $\mathcal{O}^+(y) \subset \mathcal{O}^+(z)$ . Mas como  $y \in \mathcal{O}^-(x)$ , então  $x \in \mathcal{O}^+(y)$ , portanto  $x \in \mathcal{O}^+(y) \subset \mathcal{O}^+(z)$ . Desta forma,  $z \in \mathcal{O}^-(x)$ .

Um dos objetivos principais deste trabalho é analisar as questões de controlabilidade de um sistema de controle. A pergunta principal é: dados  $x, y \in M$ , é possível obtermos  $t > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t, x, u) = y$ ? Formalmente:

**Definição 2.4.** Dizemos que o sistema de controle (1.13) é dito controlável a partir de  $x \in M$  se  $\mathcal{O}^+(x) = M$ . Caso o sistema satisfaça  $\mathcal{O}^+(x) = M$  para todo  $x \in M$ , então dizemos que o sistema é controlável.

As órbitas positiva e negativa do sistema satisfazem a seguinte propriedade:

**Proposição 2.5.** Sejam  $x, y, z \in M$ . Temos que:

i) se  $x \in \mathcal{O}^+(y)$  e  $y \in \mathcal{O}^+(z)$ , então  $x \in \mathcal{O}^+(z)$ ;

ii) se  $x \in \mathcal{O}^-(y)$  e  $y \in \mathcal{O}^-(z)$ , então  $x \in \mathcal{O}^-(z)$ .

**Demonstração:** Para mostrar (i), suponha que  $x \in \mathcal{O}^+(y)$  e que  $y \in \mathcal{O}^+(z)$ , então pelo que vimos anteriormente,  $\mathcal{O}^+(x) \subset \mathcal{O}^+(y)$  e  $\mathcal{O}^+(y) \subset \mathcal{O}^+(z)$ , portanto  $\mathcal{O}^+(x) \subset \mathcal{O}^+(z)$ .

Vamos agora mostrar (ii). Para tanto, tome  $x \in \mathcal{O}^-(y)$  e  $y \in \mathcal{O}^-(z)$ . Assim  $\mathcal{O}^-(x) \subset \mathcal{O}^-(y)$  e  $\mathcal{O}^-(y) \subset \mathcal{O}^-(z)$ , logo  $\mathcal{O}^-(x) \subset \mathcal{O}^-(z)$ .  $\square$

O próximo resultado será frequentemente usado para obtermos propriedades dos conjuntos de controle.

**Proposição 2.6.** Sejam  $x, y, z \in M$ .

i) Se  $x \in fe(\mathcal{O}^+(y))$  e  $y \in fe(\mathcal{O}^+(z))$ , então  $x \in fe(\mathcal{O}^+(z))$ ;

ii) Se  $x \in fe(\mathcal{O}^-(y))$  e  $y \in fe(\mathcal{O}^-(z))$ , então  $x \in fe(\mathcal{O}^-(z))$ .

**Demonstração:** Seja  $V_x$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $x \in fe(\mathcal{O}^+(y))$ , então existe  $t_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t_1, y, u_1) \in V_x$ , já que  $V_x \cap \mathcal{O}^+(y) \neq \emptyset$ . Pela continuidade de  $\varphi(t_1, \cdot, u_1)$  temos que existe uma vizinhança  $V_y$  de  $y$  tal que  $\varphi(t_1, V_y, u_1) \subset V_x$ . Por hipótese  $y \in fe(\mathcal{O}^+(z))$ , logo existe  $t_2 > 0$  e  $u_2 \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t_2, z, u_2) \in V_y$ , pois  $V_y \cap \mathcal{O}^+(z) \neq \emptyset$ . Usando agora a continuidade de  $\varphi(t_2, \cdot, u_2)$ , garantimos a existência de uma vizinhança  $V_z$  de  $z$  tal que  $\varphi(t_2, V_z, u_2) \subset V_y$ , assim  $\varphi(t_1, \varphi(t_2, V_z, u_2), u_1) \subset \varphi(t_1, V_y, u_1) \subset V_x$ , em particular  $\varphi(t_1, \varphi(t_2, z, u_2), u_1) \in V_x$ . Considerando  $u_3 = u_2 \wedge_{t_2} u_1 \in \mathcal{U}$  a  $t_2$ -concatenação de  $u_2$  e  $u_1$ , temos pela mesma argumentação da igualdade (2.1) que

$$\varphi(t_1 + t_2, z, u_3) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, z, u_2), u_1) \in V_x,$$

mas como  $\varphi(t_1 + t_2, z, u_2 \wedge_{t_2} u_1) \in \mathcal{O}^+(z)$  temos que  $V_x \cap \mathcal{O}^+(z) \neq \emptyset$ , isto é,  $x \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(z))$ , o que conclui (i).

Para mostrarmos (ii), seja  $V_x$  uma vizinhança de  $x$ . Usando que  $x \in \text{fe}(\mathcal{O}^-(y))$ , temos a existência de  $y' \in \mathcal{O}^-(y)$  tal que  $y' \in V_x$ . Logo existem  $t_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tais que  $y = \varphi(t_1, y', u_1)$ . Pelo Corolário (1.25) a aplicação  $\varphi(t_1, \cdot, u_1)$  é um homeomorfismo, logo  $\varphi(t_1, V_x, u_1)$  é uma vizinhança de  $y$ . Desta forma, como  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^-(z))$ , temos que  $\varphi(t_1, V_x, u_1)$  deve interceptar  $\mathcal{O}^-(z)$  em algum ponto  $z'$ . Portanto existem  $t_2 > 0$ ,  $u_2 \in \mathcal{U}$  e  $x' \in V_x$  tais que  $\varphi(t_2, z', u_2) = z$  e  $\varphi(t_1, x', u_1) = z'$ . Considerando novamente  $u_3 = u_1 \wedge_{t_1} u_2 \in \mathcal{U}$  e pela aplicando a mesma ideia da igualdade (2.1), obtemos

$$\varphi(t_1 + t_2, x', u_3) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x', u_1), u_2) = \varphi(t_2, z', u_2) = z,$$

isto é,  $x' \in V_x \cap \mathcal{O}^-(z)$ , donde  $x \in \text{fe}(\mathcal{O}^-(z))$ .  $\square$

**Proposição 2.7.** *Sejam  $x, y \in M$*

i) *Se  $y \in \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ , então  $\mathcal{O}^+(y) \subset \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ ;*

ii) *Se  $y \in \text{int}(\mathcal{O}^-(x))$ , então  $\mathcal{O}^-(y) \subset \text{int}(\mathcal{O}^-(x))$ .*

**Demonstração:** i) Se  $y \in \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ , então existe uma vizinhança  $V_y$  de  $y$  tal que  $V_y \subset \mathcal{O}^+(x)$ . Dado  $z \in \mathcal{O}^+(y)$ , existe  $t_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tal que  $z = \varphi(t_1, y, u_1)$ . Como  $V_y$  é aberto contendo  $y$  e  $\varphi_{t_1, u_1}$  é um homeomorfismo, segue que  $\varphi_{t_1, u_1}(V_y) = \varphi(t_1, V_y, u_1)$  é uma vizinhança de  $y$  em  $M$ . Como as órbitas positivas são invariantes por trajetórias positivas, temos que

$$\varphi_{t_1, u_1}(\mathcal{O}^+(x)) \subset \mathcal{O}^+(x).$$

Assim,  $z \in \varphi_{t_1, u_1}(V_y) \subset \mathcal{O}^+(x)$ , mostrando que  $z \in \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ .

ii) Como por hipótese  $y \in \text{int}(\mathcal{O}^-(x))$ , então existe um aberto  $V_y$  contendo  $y$  e tal que  $V_y \subset \mathcal{O}^-(x)$ . Assim, dado  $z \in \mathcal{O}^-(y)$ , existem  $t_2 > 0$  e  $u_2 \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t_2, z, u_2) = y$ . Como  $V_y$  é um aberto e  $\varphi_{t_2, u_2}$  é um homeomorfismo, temos que  $\varphi_{t_2, u_2}^{-1}(V_y)$  é um aberto em  $M$  contendo  $z$ . Vamos mostrar que

$$\varphi_{t_2, u_2}^{-1}(\mathcal{O}^-(x)) \subset \mathcal{O}^-(x).$$

De fato, dado  $z' \in \varphi_{t_2, u_2}^{-1}(\mathcal{O}^-(x))$ , então  $\varphi(t_2, z', u_2) \in \mathcal{O}^-(x)$ , isto é, existem  $t_3 > 0$  e  $u_3 \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t_3, \varphi(t_2, z', u_2), u_3) = x$ . Tomando  $u_4 = u_2 \wedge_{t_2} u_3$  a  $t_2$ -concatenação de  $u_2$

e  $u_3$ , temos que  $\varphi(t_2+t_3, z', u_4) = x$  (pelos mesmos argumentos de (2.1)), logo  $z' \in \mathcal{O}^-(x)$ , de onde segue que  $\varphi_{t_2, u_2}^{-1}(\mathcal{O}^-(x)) \subset \mathcal{O}^-(x)$ . Dessa forma,  $z$  é ponto interior de  $\mathcal{O}^-(x)$  e, portanto,  $\mathcal{O}^-(y) \subset \text{int}(\mathcal{O}^-(x))$ .  $\square$

**Corolário 2.8.** *Seja  $x \in M$ . Se  $x \in \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ , então  $\mathcal{O}^+(x)$  é aberto em  $M$ . O mesmo ocorre com a órbita negativa.*

**Demonstração:** Se  $x \in \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ , então pela proposição anterior temos que  $\mathcal{O}^+(x) \subset \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$  e portanto  $\mathcal{O}^+(x) = \text{int}(\mathcal{O}^+(x))$ , mostrando que  $\mathcal{O}^+(x)$  é aberto. Analogamente prova-se para  $\mathcal{O}^-(x)$ .  $\square$

Apresentaremos antes a definição de acessibilidade local e de acessibilidade de um sistema de controle.

**Definição 2.9.** *Dizemos que um sistema de controle é localmente acessível em  $x \in M$  se para todo  $T > 0$  tivermos*

$$\text{int}(\mathcal{O}_{\leq T}^+(x)) \neq \emptyset \text{ e } \text{int}(\mathcal{O}_{\leq T}^-(x)) \neq \emptyset.$$

*Se esta condição é válida para todo  $x \in M$ , dizemos que o sistema é localmente acessível.*

**Definição 2.10.** *Um sistema de controle é acessível a partir de  $x \in M$  se*

$$\text{int}(\mathcal{O}^+(x)) \neq \emptyset \text{ e } \text{int}(\mathcal{O}^-(x)) \neq \emptyset.$$

*Se o sistema é acessível a partir de todo  $x \in M$ , dizemos que o sistema é acessível.*

**Observação 2.11.** *Podemos notar que se o sistema é localmente acessível, então o mesmo também é acessível. Com efeito, como*

$$\mathcal{O}_{\leq T}^+(x) \subset \mathcal{O}^+(x)$$

*para todo  $T > 0$  e todo  $x \in M$ , temos que*

$$\text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^+(x) \subset \text{int}\mathcal{O}^+(x).$$

*Logo, se o sistema é localmente acessível, então  $\text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^+(x) \neq \emptyset$  e portanto  $\text{int}\mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ .*

Um conceito que será usado em seguida é a noção de álgebra de Lie, a qual é, por definição, um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  (trabalharemos sobre o corpo  $\mathbb{R}$ , mas pode ser definida em geral sobre um corpo  $\mathbb{K}$  qualquer) munido de uma operação interna  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , chamada de colchete, que satisfaz as seguintes condições: *i*) bilinearidade; *ii*)  $[X, Y] = -[Y, X]$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  (antissimétrico); *iii*)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ . Alguns exemplos comuns são o conjunto das matrizes quadradas  $d \times d$ , denotado por  $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$  munido do colchete  $[X, Y] = XY - YX$  e espaço  $\mathfrak{X}(M)$  dos campos de vetores  $C^\infty$  em  $M$  com o colchete definido por  $[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$ , com  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função a valores reais de classe  $C^\infty$ . Dado um subconjunto  $P$  de  $\mathfrak{g}$ , definimos a álgebra de Lie gerada por  $P$ , denotada por  $\mathcal{L}(P)$ , como sendo o conjunto que contém o espaço gerado por  $P$ ,  $\langle P \rangle$  e dos possíveis colchetes entre quantidades finitas de elementos de  $\langle P \rangle$ .

Nos resultados referentes a conjuntos de controle, exigiremos frequentemente acessibilidade local a partir de um ponto  $x \in M$ . Esta propriedade é garantida pela condição do posto de acessibilidade: Seja  $\mathcal{L}(F) \subset \mathfrak{X}(M)$  a álgebra de Lie gerada por  $F = \{X_u; u \in \mathcal{U}\}$ , ou seja, a álgebra de Lie gerada pelos campos de vetores  $X_u(x) = X(x, u)$ . Dado  $x \in M$ , denote por  $\Delta_{\mathcal{L}(F)}(x)$  o conjunto

$$\{Y(x); Y \in \mathcal{L}(F)\},$$

o qual é um subespaço vetorial de  $T_x M$  com as operações usuais. Diremos que o sistema de controle 1.13 satisfaz a condição do posto de acessibilidade se

$$\dim \Delta_{\mathcal{L}(F)}(x) = \dim M = d, \quad \text{para todo } x \in M,$$

ou em outras palavras se  $\Delta_{\mathcal{L}(F)}(x) = T_x M$  para todo  $x \in M$ .

A afirmação de que a condição do posto de acessibilidade implica em acessibilidade local é garantida pelo Teorema devido a Krener.

**Teorema 2.12.** *Dado o sistema de controle 1.13 em uma variedade  $M$  com campos de vetores  $F$ , se a condição do posto é verificada, então o sistema é localmente acessível e, em particular, acessível.*

A demonstração deste resultado foge do objetivo deste trabalho, entretanto ela pode ser encontrada em [1](Teorema A.4.4 p. 526).

**Exemplo 2.13.** Consideremos  $M = \mathbb{R}^d$  e o sistema de controle afim (1.17) do Exemplo 1.17 com  $U \subset \mathbb{R}^m$  é tal que  $0 \in U$  e  $\langle U \rangle = \mathbb{R}^m$ , onde  $\langle U \rangle$  denota o subespaço gerado por  $U$  (observe que se  $0 \in \text{int } U$ , então esta condição é certamente verificada). Se  $F = \{X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i; u = (u_1, \dots, u_m) \in U\}$  é o correspondente conjunto dos campos de vetores do sistema, então  $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(\{X_0, X_1, \dots, X_m\})$ , onde  $\mathcal{L}(\{X_0, X_1, \dots, X_m\})$  representa a álgebra de Lie gerada por  $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ . De fato, é suficiente mostrar que o espaço vetorial gerado por  $F$ ,  $\langle F \rangle$ , coincide com o espaço vetorial gerado por  $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ ,  $\langle X_0, X_1, \dots, X_m \rangle$ . Seja  $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  a aplicação dada por  $G(x) = [X_1(x) \ \dots \ X_m(x)]$  ( $G(x)$  é a matriz cuja  $i$ -ésima coluna são as entradas de  $X_i(x)$ ). Note que cada elemento  $X_u = X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i \in F$  é, por definição, combinação linear dos  $X_i$ 's, portanto  $\langle F \rangle \subset \langle X_0, X_1, \dots, X_m \rangle$ . Reciprocamente, usando  $u = 0$ , podemos ver que  $X_0 \in F$  e portanto  $G(x)u = \sum_{i=1}^m u_i X_i = X_u(x) - X_0(x) \in \langle F \rangle$  para todo  $u = (u_1, \dots, u_m) \in U$  e todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Para ver que cada  $X_i \in \langle F \rangle$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , fixado qualquer  $i$ , escreva o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^m$  da forma  $e_i = \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j u_j$  para alguns  $u_j$ 's  $\in U$  e números reais  $\alpha_j$ ,  $j \in \Lambda$  (note que estamos assumindo que  $\langle U \rangle = \mathbb{R}^m$ ). Assim

$$X_i(x) = G(x)e_i = \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j G(x)u_j \in \langle F \rangle.$$

Isto mostra que  $\langle F \rangle = \langle X_0, X_1, \dots, X_m \rangle$ . Assim segue a afirmação.

**Observação 2.14.** Todo sistema de controle linear  $\dot{x} = Ax + Bu$  em  $\mathbb{R}^d$  é um sistema de controle afim (basta considerar  $X_0(x) = Ax$  e os campos de vetores constantes  $X_i(x) = b_i$ , onde  $b_i$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz  $B$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ). Sabemos que dados dois campos de vetores  $X$  e  $Y$  sobre  $\mathbb{R}^d$ , o colchete de Lie entre eles é definido como

$$[X, Y](x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Assim,  $[X_i, X_j] = 0$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , uma vez que  $X_i(x) = b_i$  são campos constantes em  $\mathbb{R}^d$ . Além disso, temos que

$$[X_i, X_0](x) = X_0'(x)X_i(x) - X_i'(x)X_0(x) = Ab_i$$

e

$$[X_0, X_0](x) = [A, A](x) = 0.$$

Portanto, qualquer iteração  $[[\cdots, [[X_{i_1}, X_{i_2}], X_{i_3}], \cdots, X_{i_l}]$  com  $l > 1$  é necessariamente nula, a menos que tenha a forma  $[[\cdots, [[b_i, A], A], \cdots, ], A](x) = A^{l-1}b_i$  (ou da forma  $[[\cdots, [[A, b_i], A], \cdots, ], A](x) = -A^{l-1}b_i$ ). Segue do Teorema de Cayley-Hamilton que  $A^l$  é combinação linear de  $I, A, A^2, \cdots, A^{d-1}$  sempre que  $l \geq d$ , logo se para  $l \geq 0$ ,  $A^l = \sum_{i=1}^d a_{i,l}A^{i-1}$  para alguns  $a_{1,l}, \cdots, a_{d,l} \in \mathbb{R}$ , então  $A^l b_j = \sum_{i=1}^d a_{i,l}A^{i-1}b_j$  para todo  $j \in \{1, \cdots, m\}$ . Concluimos que a álgebra de Lie  $\mathcal{L}(F)$  gerada pelos campos  $X_u(x) = Ax + Bu$  é dada por

$$\langle X_0, X_1, \cdots, X_m, X_0X_1, \cdots, X_0X_m, \cdots, X_0^{d-1}X_1, \cdots, X_0^{d-1}X_m \rangle,$$

ou seja,

$$\langle A, b_1, \cdots, b_m, Ab_1, \cdots, Ab_m, \cdots, A^{d-1}b_1, \cdots, A^{d-1}b_m \rangle$$

Com isso, dado  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Delta_{\mathcal{L}(F)}(x) = \langle Ax, b_1, \cdots, b_m, Ab_1, \cdots, Ab_m, \cdots, A^{d-1}b_1, \cdots, A^{d-1}b_m \rangle.$$

Dessa forma, a condição do posto de acessibilidade no caso do sistema de controle linear é equivalente à condição

$$\text{posto} [Ax \ B \ AB \ \cdots \ A^{d-1}B] = d \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

É importante notarmos que na observação anterior, basta considerarmos  $U \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $0 \in U$  e  $\langle U \rangle = \mathbb{R}^m$  como no Exemplo (2.13). Com isso, esta caracterização da condição do posto de acessibilidade vale, em particular, para o sistema de controle linear com controle restrito.

**Definição 2.15.** Um subconjunto  $C \subset M$  é controlável a partir de  $x \in M$  se  $C \subset \mathcal{O}^+(x)$  e é dito arbitrariamente aproximado a partir de  $x \in M$  se  $C \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Se as propriedades acima são válidas para todo  $x \in C$ , dizemos que  $C$  é controlável e aproximadamente controlável, respectivamente.

Finalmente, vamos à definição de conjunto de controle.

**Definição 2.16.** Um conjunto  $\emptyset \neq D \subset M$  é um conjunto de controle de um sistema de controle se:

- i)* para todo  $x \in D$ , existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t, x, u) \in D$ , para todo  $t \geq 0$ , e  $\varphi(0, x, u) = x$ ;
- ii)* para todo  $x \in D$ , tem-se  $D \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$ ;
- iii)*  $D$  é maximal com as propriedades (i) e (ii).

A condição (iii) se traduz da seguinte forma: se  $D' \supset D$  e satisfaz as condições (i) e (ii) da definição anterior, então  $D' = D$ .

A condição (i) nos diz que dado um ponto qualquer de  $D$ , existe pelo menos uma trajetória positiva a partir deste ponto que permanece inteiramente contida em  $D$ . Esta exigência é introduzida para excluir casos triviais, pois todo conjunto unitário de  $M$  satisfaz a condição (ii). De fato, se  $\{x\} \subset M$  e  $V_x$  é uma vizinhança de  $x$ , como a trajetória  $\varphi(\cdot, x, u) : \mathbb{R} \rightarrow M$  é contínua qualquer que seja  $u \in \mathcal{U}$ , então existe uma vizinhança  $V_0$  de  $0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(V_0, x, u) \subset V_x$  (pois  $\varphi(0, x, u) = x$ , para todo  $u \in \mathcal{U}$ ). Tomando  $t \in V_0$  tal que  $t > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$ , temos que  $\varphi(t, x, u) \in V_x \cap \mathcal{O}^+(x)$ , isto é,  $V_x \cap \mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ , mostrando que  $\{x\} \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$ . Veremos que esta condição será naturalmente satisfeita se um conjunto  $D \subset M$  satisfaz (ii) e possui interior não vazio.

A condição (ii) nos diz que  $D$  é aproximadamente controlável. Esta condição é equivalente a dizer que dados  $x, y \in D$  arbitrários, tem-se  $y \in fe(\mathcal{O}^+(x))$ , isto é,  $y$  pode ser arbitrariamente aproximado por uma trajetória a partir de  $x$ .

A condição (iii) é imposta para evitar problemas técnicos. Veremos que se  $D_0$  satisfaz as propriedades (i) e (ii), então ele está contido em um conjunto maximal com estas propriedades, isto é, em um conjunto de controle.

Uma classe especial de conjuntos de controle são os conjuntos de controle invariantes.

**Definição 2.17.** Um conjunto de controle  $C \subset M$  é chamado de conjunto de controle invariante se  $fe(C) \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$  para todo  $x \in C$ . Caso contrário, diremos que  $C$  é variante.

Observe que pontos suficientemente próximos de um conjunto de controle invariante  $C$  podem ser arbitrariamente aproximados a partir de qualquer ponto  $x$  de  $C$ . Veremos mais adiante que os sistemas de controle lineares têm um único conjunto de controle, o qual pode ser ou não invariante.

Para explorar propriedades de invariância de um conjunto de controle com respeito às funções de controle, usaremos a seguinte definição.

**Definição 2.18.** *Um conjunto  $L \subset M$  é chamado positivamente invariante se  $\mathcal{O}^+(x) \subset L$  para todo  $x \in L$ .*

Note que um conjunto positivamente invariante não é necessariamente um conjunto de controle, já que a condição (ii) pode não ser satisfeita.

Os próximos exemplos mostram que um sistema de controle devem ter muitos ou nenhum conjunto de controle, além disto, eles mostram que um conjunto de controle depende do conjunto de valores de controle  $U$ .

**Exemplo 2.19.** *Seja  $M = \mathbb{R}$  e considere o seguinte sistema de controle*

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}.$$

*Se  $U \subset (0, +\infty)$ , então o sistema acima não possui conjunto de controle. De fato, suponha por absurdo que exista um conjunto de controle  $D \subset \mathbb{R}$ . As soluções gerais do sistema são dadas por*

$$\varphi(t, x, u) = x + \int_0^t u(s) ds,$$

*onde  $\int_0^t u(s) ds$  é uma função positiva e crescente com respeito a  $t$ . Pela propriedade (i) da Definição 2.16, temos que dado  $x \in D$ , existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t, x, u) \in D$ , para todo  $t \geq 0$ . Portanto tome  $y > x$  tal que  $y = \varphi(t_1, x, u)$ , com  $t_1 > 0$ . Então  $y \in D$ . Notemos agora que se  $z \in \mathcal{O}^+(y)$ , então  $z > y$ , logo  $\mathcal{O}^+(y) \subset (y, +\infty)$ . Desta forma, por (ii) da Definição 2.16 deveríamos ter  $x \in D \subset fe(\mathcal{O}^+(y)) \subset [y, +\infty)$ , o que é um absurdo, pois  $x < y$ . Suponha agora que  $U = \{0\}$ . Neste caso, temos que todo conjunto unitário de  $\mathbb{R}$  é um conjunto de controle. Com efeito, temos que as soluções do sistema são da forma  $\varphi(t, x, u) = x$ . Considere portanto  $\{y\}$  um conjunto unitário de  $\mathbb{R}$ . Então quaisquer que sejam  $t \geq 0$  e  $u \in \mathcal{U}$ , temos  $\varphi(t, y, u) = y \in \{y\}$ , o que mostra (i). Para provarmos (ii),*

basta notarmos que  $y = \varphi(t, y, u) \in \mathcal{O}^+(y)$ , ou seja,  $\{y\} \subset \mathcal{O}^+(y)$ . Agora se  $D' \supset \{y\}$  e satisfaz (i) e (ii), então dado  $z \in D'$  temos que  $z \in D' \subset \mathcal{O}^+(y)$ . Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^+(y) &= \{z \in M; \text{ existe } t > 0 \text{ e } u \in \mathcal{U} \text{ com } z = \varphi(t, y, u)\} \\ &= \{\varphi(t, y, u) \in M; t > 0 \text{ e } u \in \mathcal{U}\} \\ &= \{y\} \end{aligned}$$

de onde segue que  $z = y$ , isto é,  $D' = \{y\}$ , o que mostra a condição (iii). Assim  $\{y\}$  é um conjunto de controle. Pelo que foi observado acima, temos que

$$fe(\{y\}) = \{y\} = \mathcal{O}^+(y) = fe(\mathcal{O}^+(y)),$$

donde concluímos que  $\{y\}$  é um conjunto de controle invariante. Como  $\{y\}$  foi tomado arbitrariamente, temos o desejado.

Começaremos agora o nosso estudo sistemático de conjuntos de controle. Primeiramente mostraremos que não podemos retornar a um conjunto de controle.

**Proposição 2.20.** *Seja  $D$  um conjunto maximal com a propriedade de que para todo  $x \in D$  tem-se  $D \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$  e suponha que para algum elemento  $x \in D$  existe  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  com  $\varphi(T, x, u) \in D$ . Então  $\varphi(t, x, u) \in D$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

**Demonstração:** Considere  $D' = D \cup E$ , onde  $E = \{\varphi(t, x, u); 0 \leq t \leq T\}$ . Nosso objetivo será mostrar que  $D'$  satisfaz a condição (ii) da Definição 2.16 e o resultado seguirá da maximalidade de  $D$ , uma vez que  $D' \supset D$ .

Inicialmente vamos mostrar que  $D' \subset fe(\mathcal{O}^+(y))$  para todo  $y \in D$ . Com efeito, seja  $y \in D$ . Por hipótese temos que  $D \subset fe(\mathcal{O}^+(y))$ . Além disto, dado  $\varphi(t, x, u) \in E$ , é claro que  $\varphi(t, x, u) \in \mathcal{O}^+(x) \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$  e que  $x \in D \subset fe(\mathcal{O}^+(y))$ . Segue então da Proposição (2.6) que  $\varphi(t, x, u) \in fe(\mathcal{O}^+(y))$ , mostrando que  $E \subset fe(\mathcal{O}^+(y))$ . Assim  $D' = D \cup E \subset fe(\mathcal{O}^+(y))$  para todo  $y \in D$ .

Nos resta mostrar agora que  $D' \subset fe(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$  para todo  $\varphi(t, x, u) \in E$ . Para tanto, notemos que  $D \subset fe(\mathcal{O}^+(\varphi(T, x, u)))$ , pois  $\varphi(T, x, u) \in D$ . Observe também que  $\mathcal{O}^+(\varphi(T, x, u)) \subset \mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u))$ . De fato, se  $t = T$ , então  $\varphi(T, x, u) =$

$\varphi(0, \varphi(T, x, u), u) = \varphi(0, \varphi(t, x, u), u) \in \mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u))$ . Agora se  $T > t$ , então  $T - t > 0$  e pela Proposição (1.21) temos que

$$\varphi(T, x, u) = \varphi(T - t, \varphi(t, x, u), \Theta_t u) \in \mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)).$$

mostrando que  $\mathcal{O}^+(\varphi(T, x, u)) \subset \mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u))$ . Assim  $\text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(T, x, u))) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$ , e portanto  $D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(T, x, u))) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$ , ou melhor, para cada  $y \in D$ , temos que  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$ . Como  $\varphi(t, x, u) \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$  e  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$ , pela Proposição (2.6) concluímos que  $\varphi(t, x, u) \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$ , ou seja,  $E \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$  e com isso  $D' = D \cup E \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(\varphi(t, x, u)))$ , para todo  $\varphi(t, x, u) \in E$ , de onde segue que  $D' \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , para todo  $x \in D'$ , o que mostra o resultado.  $\square$

A proposição a seguir nos mostra que a condição (i) da Definição 2.16 pode ser omitida, se  $D$  tem interior não vazio.

**Proposição 2.21.** *Seja  $D \subset M$  um conjunto maximal com a propriedade que para todo  $x \in D$  tem-se  $D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  e suponha que  $\text{int}(D) \neq \emptyset$ . Então  $D$  é um conjunto de controle.*

**Demonstração:** Vamos mostrar inicialmente que  $D$  satisfaz a condição (i) da Definição 2.16. Sejam  $x \in D$  e  $x' \in \text{int}(D)$ . Então existe uma vizinhança  $V_{x'}$  de  $x'$  tal que  $V_{x'} \subset \text{int } D$ . Como por hipótese  $x' \in D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , então  $V_{x'} \cap \mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ , ou seja, existe  $y \in V_{x'} \cap \mathcal{O}^+(x)$ . Logo existe  $T_0 > 0$  e  $u_0 \in \mathcal{U}$  tal que  $y = \varphi(T_0, x, u_0) \in V_{x'}$ .

Considere agora  $y' \in \text{int}(D)$  com  $y' \neq y$ . Então existe uma vizinhança  $V_{y'}$  tal que  $V_{y'} \subset \text{int}(D)$ . Como  $D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$ , então existe  $T_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tal que  $z := \varphi(T_1, y, u_1) \in V_{y'}$ . Sendo  $M$  Hausdorff, existem vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $y$  e  $z$ , respectivamente, tais que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Pela continuidade de  $\varphi(T_1, \cdot, u_1)$  existe uma vizinhança  $V$  de  $y$  tal que  $\varphi(T_1, V, u_1) \subset V_z$ , onde  $V_z := V_{y'} \cap V_2$ . Considere a vizinhança  $V_y = V \cap V_1 \cap V_{x'}$  de  $y$ . Observe que  $V_y, V_z \subset \text{int}(D)$ ,  $V_y \cap V_z = \emptyset$  e  $\varphi(T_1, V_y, u_1) \subset V_z$ .

Pelos mesmos argumentos anteriores, existem  $T_2 > 0$  e  $u_2 \in \mathcal{U}$  tais que  $\varphi(T_2, z, u_2) \in V_y$ . Note que como  $\varphi(T_1, V_y, u_1) \subset V_z$ , temos que  $\varphi(T_1, \varphi(T_2, z, u_2), u_1) \in V_z$  e a partir de  $V_z$  retornar a  $V_y$  pelo fato de que  $D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  para todo  $x \in D$ .

Por fim, defina a trajetória  $\varphi(t, x, u)$ ,  $t \geq 0$ , partindo de  $x$  e atingindo  $y$  com tempo  $T_0$  e controle  $u_0$ . A partir de  $y$  atinja  $z$  com tempo  $T_1$  e com controle  $u_1$ . Retorne

para  $V_y$  a partir de  $z$  em tempo  $T_2$  e controle  $u_2$  e repita este processo iteradamente. É importante notar que em cada volta partindo de um ponto de  $V_y$  até um ponto de  $V_z$  e depois retornando a  $V_y$  é necessário um tempo maior do que  $T_1$ . A trajetória assim obtida fica bem definida para todo  $t \geq 0$  e pela Proposição 2.20 ela está contida inteiramente em  $D$ . Pela aleatoriedade de  $x \in D$ , temos que  $D$  satisfaz (i).  $\square$

**Proposição 2.22.** *Seja  $D_0 \subset M$  um conjunto satisfazendo as propriedades (i) e (ii) da Definição 2.16. Então  $D_0$  está contido em um conjunto de controle.*

**Demonstração:** Considere o conjunto

$$\Omega = \{D' \subset M; D' \supset D_0 \text{ e } D' \text{ satisfaz (i) e (ii) da Definição 2.16}\}.$$

Defina  $D = \bigcup_{D' \in \Omega} D'$ . Mostraremos que  $D$  é um conjunto de controle. Com efeito, dado  $x \in D$  arbitrário, então  $x \in D'$ , para algum  $D' \in \Omega$ . Como  $D'$  satisfaz (i) da Definição 2.16, existe uma trajetória  $\varphi(\cdot, x, u)$  tal que  $\varphi(0, x, u) = x$  e  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t, x, u) \in D' \subset D$  para todo  $t \geq 0$ , o que mostra a propriedade (i) para  $D$ .

Mostremos agora a propriedade (ii). Para tanto, sejam  $x, y \in D$ . Então existem  $D'_1, D'_2 \in \Omega$  tais que  $x \in D'_1$  e  $y \in D'_2$ . Além disto existe  $z \in D_0$  tal que  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(z))$  e  $z \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , pois  $D'_1, D'_2 \in \Omega$ . Assim pela Proposição 2.6 temos que  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Como  $x, y \in D$  foram tomados de forma arbitrária temos que  $D$  satisfaz (ii). Como a maximalidade de  $D$  com respeito a (i) e (ii) é clara, segue o resultado.  $\square$

**Proposição 2.23.** *Dois conjuntos de controle  $D$  e  $D'$  ou coincidem ou são disjuntos.*

**Demonstração:** Suponha que  $D \cap D' \neq \emptyset$ . Vamos mostrar que  $D \cup D'$  é um conjunto de controle. De fato, seja  $x \in D \cup D'$ . Suponha sem perda de generalidade que  $x \in D$ . Sendo  $D$  um conjunto de controle, existe  $u \in \mathcal{U}$  e uma trajetória  $\varphi(\cdot, x, u)$  com  $\varphi(0, x, u) = x$  e  $\varphi(t, x, u) \in D \subset D \cup D'$ , para todo  $t \geq 0$ , mostrando que  $D \cup D'$  satisfaz a condição (i) da Definição 2.16.

Sejam agora  $x, y \in D \cup D'$ . Se  $x, y \in D$ , então  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , pois  $D$  é um conjunto de controle. Da mesma forma concluímos que se  $x, y \in D'$ , então  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que  $x \in D$  e que  $y \in D'$ . Tome  $z \in D \cap D'$ .

Então  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(z))$  (pois  $z \in D'$ ) e  $z \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  (pois  $z \in D$ ). Assim pela Proposição 2.6 temos que  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Em qualquer caso temos que  $D \cup D' \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , para todo  $x \in D \cup D'$ .  $\square$

**Proposição 2.24.** *Seja  $C \subset M$  satisfazendo:*

a) *para cada  $x \in C$ , existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t, x, u) \in C$ , para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(0, x, u) = x$ ;*

b)  *$\text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , para todo  $x \in C$ ;*

c)  *$C$  é maximal com relação a (b).*

*Então  $C$  é um conjunto de controle invariante. Em particular, se  $C$  é fechado e  $\text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  para todo  $x \in C$ , então  $C$  é um conjunto de controle invariante.*

**Demonstração:** Como  $C$  satisfaz (a), então  $C$  satisfaz (i) da Definição 2.16. A condição (b) implica na condição (ii) de conjunto de controle, uma vez que  $C \subset \text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , para todo  $x \in C$ . Vamos mostrar agora que  $C$  satisfaz (iii) da Definição 2.16. Com efeito, seja  $D' \supset C$  satisfazendo (i) e (ii) da Definição 2.16. Tome  $y \in D'$  qualquer. Como  $D'$  satisfaz (ii) e  $C \subset D'$  então  $C \subset D' \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$  e  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) = \text{fe}(C)$ , para algum  $x \in C$ .

Note que  $\text{fe}(C) \subset \text{fe}(\text{fe}(\mathcal{O}^+(y))) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$ . Além disto, dado  $z \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$ , como  $y \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , então  $z \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) = \text{fe}(C)$ , pela Proposição 2.6. Assim  $\text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$  e portanto

$$\text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) = \text{fe}(C) \subset \text{fe}(D') \subset \text{fe}(\text{fe}(\mathcal{O}^+(y))) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y)), \quad \forall y \in D',$$

isto é,  $\text{fe}(D') = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$  para todo  $y \in D'$ , mostrando que  $D'$  satisfaz (b). Pela maximalidade de  $C$  com respeito a (b), temos que  $C = D'$

Observe que se  $C$  é fechado e satisfaz (b), então  $C = \text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  para todo  $x \in C$ . Como  $\mathcal{O}^+(x) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) = C$  para todo  $x \in C$  temos que  $C$  satisfaz (a), pois dado  $x \in C$  e  $u \in \mathcal{U}$  temos que  $\varphi(t, x, u) \in \mathcal{O}^+(x) \subset C$ , para todo  $t \geq 0$ . Além disso, se  $D' \subset M$  satisfaz (b) e  $D' \supset C$ , vimos que  $\text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$  para todo  $y \in D'$ , e sendo  $C$  fechado, temos  $C = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$ . Com isso

$$D' \subset \text{fe}(D') = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) = C,$$

donde  $D' \subset C$ , logo  $D' = C$ , mostrando que  $C$  é maximal com respeito a (b).  $\square$

No caso de acessibilidade local, conjuntos de controle invariantes gozam de uma lista de boas propriedades. Em particular eles são positivamente invariantes.

**Lema 2.25.** *Seja  $C$  um conjunto de controle invariante de um sistema de controle localmente acessível a partir de todo  $x \in fe(C)$ . Então*

- 1)  $int(C) \neq \emptyset$ ;
- 2)  $fe(int(C)) = C$  e  $C$  é conexo;
- 3)  $int(C)$  e  $C$  são positivamente invariantes;
- 4)  $int(C) \subset \mathcal{O}^+(x)$  para todo  $x \in C$  e  $int(C) = \mathcal{O}^+(x)$  para todo  $x \in int(C)$ ;
- 5) se o sistema é localmente acessível sobre  $M$ , então existe uma quantidade enumerável de conjuntos de controle invariantes em  $M$ .

**Demonstração:** Afirmamos inicialmente que se  $y \in fe(C)$ , então  $fe(\mathcal{O}^+(y)) \subset fe(C)$ . De fato, seja  $y \in fe(C)$  e suponha por absurdo que  $fe(\mathcal{O}^+(y)) \not\subset fe(C)$ , então existe  $y' \in fe(\mathcal{O}^+(y)) \setminus fe(C)$ . Em particular  $y' \in M \setminus fe(C)$  o qual é aberto, logo existe uma vizinhança  $V_{y'}$  de  $y'$  tal que  $V_{y'} \subset M \setminus fe(C)$ . Como  $y' \in fe(\mathcal{O}^+(y))$ , dada a vizinhança  $V_{y'}$ , temos que  $V_{y'} \cap \mathcal{O}^+(y) \neq \emptyset$ , ou seja, existe um difeomorfismo  $g = \varphi_{t,u}$  tal que  $z := gy \in V_{y'}$ , para algum  $t > 0$  e algum  $u \in \mathcal{U}$ . Sendo  $g$  um difeomorfismo, existe uma vizinhança  $V_y$  de  $y$  tal que  $gV_y = V_{y'} \subset M \setminus fe(C)$ . Usando o fato de que  $y \in fe(C)$ , temos que dada a vizinhança  $V_y$  de  $y$ ,  $V_y \cap C \neq \emptyset$ , isto é, existe  $x \in C$  tal que  $x \in V_y$ . Portanto  $x \in C \cap V_y$  e como  $gV_y = V_{y'} \subset M \setminus fe(C)$ , tem-se que  $gx \notin fe(C)$ , o que é um absurdo, pois sendo  $C$  um conjunto de controle invariante, deveríamos ter  $fe(C) = fe(\mathcal{O}^+(x))$ , ou seja,  $gx \in \mathcal{O}^+(y) \subset fe(\mathcal{O}^+(y)) = fe(C)$ .

Notemos agora que como o sistema é localmente acessível, então  $C$  é fechado. Para isto, iremos mostrar que  $fe(C)$  satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.16 e assim, como  $fe(C) \supset C$ , seguirá da maximalidade de  $C$  que  $fe(C) = C$ . Dado  $x \in fe(C)$ , segue da acessibilidade local que existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$  tal que  $V_x \subset \mathcal{O}^+(x)$ , pois  $int(\mathcal{O}^+(x)) \neq \emptyset$ . Pela observação anterior temos que  $x \in V_x \subset fe(\mathcal{O}^+(x)) \subset fe(C)$ , assim  $V_x \cap C \neq \emptyset$ , isto é, existe  $y \in V_x \subset \mathcal{O}^+(x)$  tal que  $y \in C$ . Assim  $\mathcal{O}^+(y) \subset \mathcal{O}^+(x)$ ,

logo  $\text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Sendo  $C$  um conjunto de controle invariante, temos que  $\text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , donde  $\text{fe}(C) = \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Dessa forma, como  $\mathcal{O}^+(x) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) \subset \text{fe}(C)$  para todo  $x \in \text{fe}(C)$ , temos que  $\text{fe}(C)$  satisfaz (i) da Definição 2.16. Além disso, como  $C \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  para todo  $x \in \text{fe}(C)$ , temos que  $\text{fe}(C)$  satisfaz a condição (ii), como queríamos demonstrar.

Voltemos agora às afirmações:

1) Como o sistema é localmente acessível, dado  $x \in C$ , temos que

$$\emptyset \neq \text{int}(\mathcal{O}^+(x)) \subset \text{int}(\text{fe}(\mathcal{O}^+(x))) \subset \text{int}(C).$$

2) Sabemos que  $C = \text{fe}(C)$  e como  $\text{fe}(\text{int}(C)) \subset \text{fe}(C)$ , então  $\text{fe}(\text{int}(C)) \subset C$ .

Para a inclusão contrária, tome  $x \in C$ . Então  $\mathcal{O}^+(x) \subset C$  e portanto  $\text{int } \mathcal{O}^+(x) \subset \text{int } C$ . Como  $\text{int } \mathcal{O}^+(x)$  é denso em  $\mathcal{O}^+(x)$  (ver [1] Proposição A.4.9 p. 527) e  $\mathcal{O}^+(x)$  é denso em  $C$ , então  $C = \text{fe}(C) = \text{fe}(\text{int } \mathcal{O}^+(x)) \subset \text{fe}(\text{int } C)$ .

Para mostrar a conexidade, suponha por absurdo que  $C$  seja desconexo. Então existem subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $M$  abertos em  $C$  e não vazios tais que  $C = A \cup B$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Sejam  $a \in A$  e  $b \in B$ . Como  $C$  satisfaz a condição (ii) da Definição 2.16, temos que  $b \in \mathcal{O}^+(a)$ . Como  $B$  é aberto em  $C$ , existe uma vizinhança  $V_b$  de  $b$  tal que  $V_b \subset B$ . Para o aberto  $V_b$ , temos que  $V_b \cap \mathcal{O}^+(a) \neq \emptyset$ , isto é, existem  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tais que  $\varphi(T, a, u) \in V_b$ . Considere o caminho  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  dado por  $\gamma(t) = \varphi(t, a, u)$ . Como  $\gamma$  é contínuo e  $[0, T]$  é conexo, temos que o conjunto imagem de  $\gamma$ ,  $\text{Im}\gamma$ , é conexo em  $M$ . Observe que  $a = \varphi(0, a, u) \in A \cap \text{Im}\gamma$  e  $\varphi(T, a, u) \in B \cap \text{Im}\gamma$ . Além disso,  $A \cap \text{Im}\gamma$  e  $B \cap \text{Im}\gamma$  são abertos em  $\text{Im}\gamma$ , disjuntos, e como  $\text{Im}\gamma \subset \mathcal{O}^+(a) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) = C$ , temos que

$$(A \cap \text{Im}\gamma) \cup (B \cap \text{Im}\gamma) = (A \cup B) \cap \text{Im}\gamma = C \cap \text{Im}\gamma = \text{Im}\gamma.$$

Portanto  $A \cap \text{Im}\gamma$  e  $B \cap \text{Im}\gamma$  formam uma cisão não trivial de  $\text{Im}\gamma$ , o que é contradiz o fato de  $\text{Im}\gamma$  ser conexo, de onde segue a conexidade de  $C$ .

3) A invariância positiva de  $C$  segue do fato de que  $\mathcal{O}^+(x) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) = \text{fe}(C) = C$ .

Vamos mostrar agora que  $\text{int } C$  é positivamente invariante. Para tanto, suponha por absurdo que existe  $x \in \text{int } C$  tal que  $\mathcal{O}^+(x)$  não esteja contido em  $\text{int } C$ . Então

existem  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $y := \varphi(T, x, u) \notin \text{int } C$ . Como  $\text{int } C$  é aberto, existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$  tal que  $V_x \subset C$ . Como  $\varphi(T, \cdot, u)$  é um difeomorfismo, temos que  $\varphi(T, V_x, x)$  é uma vizinhança de  $\varphi(T, x, u)$ . Assim

$$\varphi(T, V_x, u) \cap (M \setminus \text{int } C) \neq \emptyset,$$

pois  $\varphi(T, x, u) \in \varphi(T, V_x, u) \cap (M \setminus \text{int } C)$ . Dessa forma, temos que  $\varphi(T, V_x, u) \cap (M \setminus C) \neq \emptyset$ , pois caso contrário, deveríamos ter  $\varphi(T, V_x, u) \subset C$ . Assim,  $\varphi(T, x, u) \in \text{int } C$  (pois  $\varphi(T, V_x, u)$  é uma vizinhança de  $\varphi(T, x, u)$  inteiramente contida em  $C$ ), o que é um absurdo. Portanto, existe  $y \in V_x \subset C$  tal que  $z := \varphi(T, y, u) \in (M \setminus C)$ , o que é uma contradição, pois pelo fato de  $C$  ser positivamente invariante, deveríamos ter

$$z \in \mathcal{O}^+(y) \subset C.$$

Portanto,  $\text{int } C$  é positivamente invariante.

4) Sejam  $x \in C$  e  $y \in \text{int } C$ . Sendo  $C$  fechado, temos que

$$\text{fe}(\mathcal{O}^+(x)) = \text{fe}(C) = C.$$

Como  $y \in \text{int } C \subset C$  e o sistema é localmente acessível em  $y$ , temos que  $\text{int } \mathcal{O}^-(y) \cap \text{int } C \neq \emptyset$ . Portanto existe  $z \in \mathcal{O}^+(x) \cap \text{int } \mathcal{O}^-(y) \cap \text{int } C$ . Dessa forma, como  $z \in \mathcal{O}^-(y)$ , então  $y \in \mathcal{O}^+(z)$ . Segue da Proposição 2.5 que  $y \in \mathcal{O}^+(x)$ . Pela invariância positiva de  $\text{int } C$ , segue que  $\mathcal{O}^+(y) = \text{int } C$ , sempre que  $y \in \text{int } C$ .

5) Finalmente, como  $M$  é separável, isto é,  $M$  admite um subconjunto enumerável  $E$  tal que  $\text{fe}(E) = M$  e além disso o interior de um conjunto de controle invariante é não vazio, então para cada um conjunto de controle invariante  $C$ , o aberto  $\text{int } C$  contém um elemento  $m$  de  $E$ . Como os conjuntos de controle são disjuntos, então cada conjunto de controle invariante  $C$  contém um elemento  $m_C$  de  $E$  que não pertence a nenhum outro conjunto de controle invariante. Como  $E$  é enumerável, então temos que a quantidade de conjuntos de controle invariantes é no máximo enumerável.  $\square$

Algumas propriedades de conjuntos de controle invariantes listadas no lema anterior também se verificam para conjuntos de controle variantes com interior não vazio.

**Lema 2.26.** *Se  $D$  é um conjunto de controle do sistema 1.13 com interior não vazio.*

i) Se o sistema é localmente acessível a partir de todo  $x \in fe(D)$ , então o conjunto  $D$  é conexo e  $fe(intD) = fe(D)$ ;

ii) Se  $y \in intD$  é localmente acessível, então  $y \in \mathcal{O}^+(x)$  para todo  $x \in D$ ;

iii) Se o sistema é localmente acessível a partir de todo  $y \in intD$ , então  $intD \subset \mathcal{O}^+(x)$  para todo  $x \in D$ . Além disso, para todo  $y \in intD$  tem-se

$$D = fe(\mathcal{O}^+(y)) \cap \mathcal{O}^-(y).$$

iv) O número de conjuntos de controle com interior não vazio é no máximo enumerável.

**Demonstração:** i) Para ver que  $D \subset fe(int D)$ , seja  $x \in D$ . Como  $int D \neq \emptyset$  e  $D \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$ , então existe  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tais que  $\varphi(T, x, u) \in int D$ . Segue da continuidade de  $\varphi(T, \cdot, u)$  que existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$  tal que  $\varphi(T, V_x, u) \subset int D$ . Como  $x \in D \subset fe(\mathcal{O}^+(y)) = fe(int \mathcal{O}^+(y))$  para  $y \in D$ , temos que o aberto  $int(\mathcal{O}^+(y)) \cap V_x$  é não vazio. Além disso, temos que  $int(\mathcal{O}^+(y)) \cap V_x$  está contido em  $D$ . De fato, dado  $z \in int(\mathcal{O}^+(y)) \cap V_x$ , temos que existem  $t_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tais que  $z = \varphi(t_1, y, u_1) \in V_x$ . Assim, tomando a  $t_1$ -concatenação de  $u_1$  e  $u$ , temos que  $y = \varphi(0, y, u_1 \wedge_{t_1} u) \in D$  e  $\varphi(T+t_1, y, u_1 \wedge_{t_1} u) = \varphi(T, \varphi(t_1, y, u_1), u) \in \varphi(T, V_x, u) \subset int D$ . Portanto, pela Proposição 2.20, temos que  $\varphi(t, y, u_1 \wedge_{t_1} u) \in D$  para todo  $t \in [0, T+t_1]$ . Em particular, temos que  $z = \varphi(t_1, y, u_1) = \varphi(t_1, y, u_1 \wedge_{t_1} u) \in D$ , uma vez que para  $t \leq t_1$  tem-se  $u_1 \wedge_{t_1} u(t) = u_1(t)$ .

Assim, dado uma vizinhança  $W$  qualquer de  $x$ , então  $W \cap V_x$  é também uma vizinhança de  $x$ . Como pelo que foi observado  $x \in fe(int(\mathcal{O}^+(y)))$ , temos que  $W \cap V_x \cap \mathcal{O}^+(y) \neq \emptyset$ . Observe que  $V_x \cap \mathcal{O}^+(y) = int(V_x \cap \mathcal{O}^+(y)) \subset int D$ , portanto

$$\emptyset \neq W \cap V_x \cap \mathcal{O}^+(y) \subset W \cap int D,$$

mostrando que  $x \in fe(int D)$ . Com isso,  $D \subset fe(int D)$ , de onde segue que  $fe(D) \subset fe(int D)$ . Como  $fe(int D) \subset fe(D)$ , temos que  $fe(D) = fe(int D)$ .

A conexidade de  $D$  é provada da mesma maneira que na demonstração do item (2) do Lema 2.25.

ii) Seja  $x \in D$ . Usando a acessibilidade local em  $y \in \text{int } D$  podemos encontrar  $t > 0$  tal que  $\text{int } \mathcal{O}_{\leq t}^-(y) \subset \text{int } D$ . Tome  $z \in \text{int } \mathcal{O}_{\leq t}^-(y)$ . Então existe uma vizinhança  $V_z$  de  $z$  tal que  $V_z \subset \mathcal{O}_{\leq t}^-(y) \subset \mathcal{O}^-(y)$ . Como  $z \in \text{int } D \subset D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ , dada a vizinhança  $V_z$ , temos que existe  $z' \in V_z \cap \mathcal{O}^+(x) \subset \mathcal{O}^-(y)$ , ou seja,  $z' \in \mathcal{O}^+(x)$  e  $y \in \mathcal{O}^+(z')$ . Segue do item (i) da Proposição 2.5 que  $y \in \mathcal{O}^+(x)$ .

iii) Notemos que dado  $y \in \text{int } D$ , então  $D' := \text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) \cap \mathcal{O}^-(y)$  possui interior não vazio, pois  $\text{int } D \subset \text{int } D'$ . De fato, como  $D \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$ , então  $\text{int } D \subset \text{int } \text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Além disso, dado  $x \in \text{int } D$ , então  $y \in \text{int } D \subset \mathcal{O}^+(x)$ , logo  $x \in \mathcal{O}^-(y)$ , mostrando que  $\text{int } D \subset D'$ , ou seja,  $\emptyset \neq \text{int } D \subset \text{int } D'$ .

Mostraremos agora que  $D'$  satisfaz a condição (ii) da Definição 2.16. Com efeito, sejam  $x, z \in D'$ . Então por definição de  $D'$ ,  $z \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(y))$ . Temos ainda que como  $x \in \mathcal{O}^-(y)$ , então  $y \in \mathcal{O}^+(x) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Segue portanto do item (i) da Proposição 2.6 que  $z \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ .

Temos ainda que  $D'$  é maximal com relação à condição (ii) da Definição 2.16. Com efeito, seja  $C$  um subconjunto de  $M$  satisfazendo  $C \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$  e tal que  $D' \subset C$ . Tome  $x \in C$ . Como  $y \in \text{int } D \subset C$ , então  $x \in \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ . Pelo fato de  $y \in \text{int } D$ , existe uma vizinhança  $V_y$  de  $y$  tal que  $V_y \subset \text{int } D$ . Assim,  $V_y \cap \mathcal{O}^+(x) \neq \emptyset$ . Dessa forma, considere  $z \in V_y$  tal que  $z \in \mathcal{O}^+(x)$ . Como  $z \in V_y \subset \text{int } D \subset \mathcal{O}^-(y)$ , então  $y \in \mathcal{O}^+(z)$ . Segue do item (i) da Proposição 2.5 que  $y \in \mathcal{O}^+(x)$ , isto é,  $x \in \mathcal{O}^-(y)$ , mostrando que  $D' = C$ .

Concluimos pela Proposição 2.22 que  $D'$  está contido em algum conjunto de controle  $\tilde{D}$ . Como  $y \in (D \cap D') \subset (D \cap \tilde{D})$ , temos que  $D = \tilde{D}$ , portanto  $\text{fe}(\mathcal{O}^+(y)) \cap \mathcal{O}^-(y) = D' \subset \tilde{D} = D$ . Para mostrarmos a inclusão contrária, tome  $x \in D$ . Como  $y \in \text{int } D$ , pelo item anterior temos que  $y \in \text{int } D \subset \mathcal{O}^+(x)$ , de onde segue que  $x \in \mathcal{O}^-(y)$ . Além disso, pelo item (i) temos  $\text{fe}(D) = \text{fe}(\text{int } D)$  e pelo item (ii) sabemos que  $\text{int } D \subset \mathcal{O}^+(y)$ , então

$$x \in D \subset \text{fe}(D) = \text{fe}(\text{int } D) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(y)).$$

O que conclui a igualdade.

iv) A demonstração é completamente análoga à que foi feita no item (5) da

proposição anterior.  $\square$

Antes de finalizarmos esta seção, faremos um breve comentário sobre o sistema de controle em tempo reverso.

Dado um sistema de controle como em (1.13), obtemos o sistema de controle em tempo reverso com controles  $u \in \mathcal{U}$

$$\dot{x}(-t) = -X(x(t), u(t)) \quad (2.2)$$

. fazendo a substituição  $t \mapsto -t$ . Note que o conjunto dos campos de vetores completos deste sistema, denotado por  $F^-$ , é dado por  $F^- = \{-X_u; u \in U\} = -F$ . Com isso, a álgebra de Lie  $\mathcal{L}(F^-)$  coincide com a álgebra de Lie  $\mathcal{L}(F)$ . Portanto, (2.2) satisfaz a condição do posto de acessibilidade se, e somente se, (1.13) a satisfaz.

Se denotarmos por  $\varphi^-(t, x, u)$  a solução de (2.2) para cada  $x \in M$  e  $u \in \mathcal{U}$ , temos o seguinte lema que relaciona  $\varphi$  e  $\varphi^-$ .

**Lema 2.27.** *Seja  $T \in \mathbb{R}$ . Então para todo  $x, y \in M$  e todo  $u \in \mathcal{U}$ , temos que  $\varphi(T, x, u) = y$  se, e somente se,  $\varphi^-(T, y, v) = x$ , onde  $v(t) = u(T - t)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $x, y \in M$  e  $u \in \mathcal{U}$ . Suponha que  $\eta(t) := \varphi(t, x, u)$  satisfaça  $\eta(T) = \varphi(T, x, u) = y$ . Como  $\eta$  satisfaz

$$\dot{\eta}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t, x, u) = X(\varphi(t, x, u), u(t)) = X(\eta(t), u(t)), \quad \eta(0) = \varphi(0, x, u) = x,$$

podemos definir  $\xi(t) = \eta(T - t)$  e notar que

$$\dot{\xi}(t) = -\dot{\eta}(T - t) = -X(\eta(T - t), v(t)) = -X(\xi(t), v(t))$$

além disso,  $\xi(0) = \eta(T) = y$ , ou seja,  $\xi$  satisfaz a equação  $\dot{x}(t) = -X(x(t), v(t))$  com condição inicial  $x(0) = y$ . Pela unicidade de solução, temos que  $\xi(t) = \varphi^-(t, y, v)$ . Concluímos que  $x = \eta(0) = \xi(T) = \varphi^-(T, y, v)$ . A recíproca segue de maneira análoga, basta definir  $\xi(t) = \varphi^-(t, x, v)$ ,  $\eta(t) = \xi(T - t)$  e verificar que  $\eta$  satisfaz  $\dot{x}(t) = X(x(t), u(t))$  com condição inicial  $x(0) = x$ . Assim  $\eta(t) = \varphi(t, x, u)$ . Logo, se  $x = \xi(T) = \varphi^-(T, y, v)$ , então  $y = \xi(0) = \eta(T) = \varphi(T, x, u)$ .  $\square$

Se denotarmos por  $\mathcal{O}^+(x)^-$  e por  $\mathcal{O}^-(x)^-$  as órbitas positiva e negativa do sistema (2.2), respectivamente, então temos a seguinte consequência do lema anterior.

**Corolário 2.28.** *Dado  $y \in M$ , temos que  $\mathcal{O}^-(y) = \mathcal{O}^+(y)^-$ .*

**Demonstração:** Sejam  $y \in M$  e  $x \in \mathcal{O}^-(y)$ , então existe  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tais que  $\varphi(T, x, u) = y$ . Pelo lema anterior, isto ocorre se, e somente se,  $\varphi^-(T, y, v) = x$ , onde  $v(t) = u(T - t)$ , ou seja,  $y \in \mathcal{O}^-(x)^-$ , que acontece se, e somente,  $x \in \mathcal{O}^+(y)^-$ .  $\square$

Este último resultado nos ajudará a calcular o conjunto de controle do sistema linear com controles restritos.

## 2.2 Conjuntos de controle para ação de semigrupos

Dados o grupo e o semigrupo  $\mathcal{G}_F$  e  $\mathcal{S}_F$  de um sistema de controle (ver Definição 2.2) com  $F = \{X_u; u \in U\}$  o seu conjunto dos campos de vetores completos de classe  $C^\infty$ , podemos definir a órbita através de  $x \in M$  por

$$\mathcal{G}_F(x) = \{y \in M; \text{ existe } \Phi \in \mathcal{G} \text{ com } y = \Phi(x)\}$$

e as órbitas positivas e negativas através de  $x$  por

$$\mathcal{S}_F(x) = \{y \in M; \text{ existe } \Phi \in \mathcal{S} \text{ com } y = \Phi(x)\}$$

$$\mathcal{S}_F^-(x) = \{y \in M; \text{ existe } \Phi \in \mathcal{S} \text{ com } x = \Phi(y)\},$$

respectivamente.

Por definição,  $\mathcal{G}_F(x)$  coincide com  $M$  para algum  $x \in M$  (e portanto para todo  $x \in M$ ) se, e somente se,  $\mathcal{G}_F$  age transitivamente em  $M$ .

Existem casos (por exemplo o sistema de controle bilinear) em que o grupo do sistema  $\mathcal{G}$  é um grupo de Lie, isto é, uma variedade suave munida de uma estrutura de grupo tal que a aplicação que associa cada par  $(g, h) \in G \times G$  e leva em  $g * h^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ , onde  $*$  representa a operação do grupo. Desta forma, a ideia de L. A. B. San Martin aparece como uma forma de generalizar os casos acima citados. A grosso modo, considera-se uma ação (à esquerda) transitiva  $\theta : G \times M \rightarrow M$  de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $M$ , ou seja, uma aplicação suave entre  $G \times M$  e  $M$  que satisfaz: *i*)  $\theta(e, x) = x$ , para todo  $x \in M$  ( $e$  representa o elemento neutro de  $G$ ); *ii*)  $\theta(g * h, x) = \theta(g, \theta(h, x))$ , para

todo  $(g, h, x) \in G \times G \times M$  e; *iii*) dados  $x, y \in M$ , existe  $g \in G$  tal que  $y = \theta(g, x)$ . Além disso, a fim de representar o semigrupo  $\mathcal{S}$  do sistema, ele considerou um semigrupo  $S$  do grupo de Lie  $G$ , o qual é, por definição, um subconjunto de  $G$  fechado para a operação do grupo. A partir daí se desenvolve os conceitos fundamentais da teoria de semigrupos de grupos de Lie. A fim de dar uma ideia geral desta teoria e de apontar para onde os estudos sobre sistemas de controle caminham, apresentaremos apenas resultados básicos concernentes à conjuntos de controle para ação de semigrupos de grupos de Lie.

Podemos observar que se considerarmos o conjunto das funções de controle admissíveis  $\mathcal{U}_{pc}$  (o conjunto das funções  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  constantes por partes), temos que  $\mathcal{S}_F(x) = \mathcal{O}^+(x)$  (analogamente  $\mathcal{S}_F^-(x) = \mathcal{O}^-(x)$ ). Para ver isto, seja  $y \in \mathcal{S}_F(x)$ . Então existem  $t_1, \dots, t_n \geq 0$  e  $u_1, \dots, u_n \in U$  tais que  $y = \varphi_{t_n, u_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_1, u_1}$ . Considere  $u \in \mathcal{U}_{pc}$  dada por  $u(t) = u_1$ , se  $t \in [0, t_1]$  e  $u(t) = u_i$ , se  $t \in (\sum_{j=1}^{i-1} t_j, \sum_{j=1}^i t_j]$ ,  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Assim, se  $T = \sum_{i=1}^n t_i$ , temos que  $y = \varphi(T, x, u) \in \mathcal{O}^+(x)$ , mostrando que  $\mathcal{S}_F(x) \subset \mathcal{O}^+(x)$ . Para a inclusão contrária, tome  $z \in \mathcal{O}^+(x)$ . Então existe  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}_{pc}$  tais que  $z = \varphi(T, x, u)$ . Considere os subintervalos  $I_1, \dots, I_n$  de  $[0, T]$  disjuntos (ordenados de forma que se  $t \in I_i$  e  $s \in I_j$ , com  $i < j$ , então  $t < s$ ) tais que  $[0, T] = I_1 \cup \dots \cup I_n$  e  $u(t) = u_i$  para  $t \in I_i$ , para  $u_1, \dots, u_n \in U$  dois a dois distintos. Tome a partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  do intervalo  $[0, T]$  formada pelos pontos 0 e  $T$  além dos pontos de descontinuidade de  $u$ . Assim

$$y = \varphi(T, x, u) = \varphi_{t_n - t_{n-1}, u_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_2 - t_1, u_2} \varphi_{t_1, u_1}(x) \in \mathcal{S}_F(x).$$

Portanto  $\mathcal{S}_F(x) = \mathcal{O}^+(x)$ . Similarmente mostra-se que  $\mathcal{S}_F^-(x) = \mathcal{O}^-(x)$ .

Ao longo desta seção,  $S$  será um semigrupo com interior não vazio de um grupo de Lie  $G$  que age transitivamente (à esquerda) sobre a variedade  $M$ . Denotaremos a ação transitiva (à esquerda)  $\theta(g, x)$  simplesmente por  $gx$  e a operação  $*$  do grupo  $G$  entre dois elementos  $g, h \in G$  por  $gh$ . Além disto, se  $H$  é um subconjunto de  $G$ , então dado  $x \in M$ , usaremos a notação  $Hx$  para o conjunto

$$\{hx; h \in H\}.$$

**Definição 2.29.** *O semigrupo  $S$  é acessível a partir de  $x \in M$  se  $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$  e é acessível se for acessível a partir de todo  $x \in M$ .*

**Observação 2.30.** Note que se o semigrupo  $S$  possui pontos interiores e a aplicação  $g \mapsto gx$  é aberta e diferenciável, então os semigrupos  $S$  e  $S^{-1} := \{x^{-1}; x \in S\}$  são acessíveis, visto que  $(\text{int } S)x \subset \text{int } (Sx)$  e que  $(\text{int } S)x$  é aberto. Para ver isto, tome  $y \in (\text{int } S)x$ , então existe  $g \in \text{int } S$  tal que  $gx = y$ . Como  $g \in \text{int } S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $g$  tal que  $V \subset \text{int } S$ . Assim  $Vx$  é um aberto contendo  $y$  e que está contido em  $Sx$ , logo  $y \in (\text{int } S)x$  e portanto  $(\text{int } S)x \subset \text{int } (Sx)$ . Similarmente mostra-se que  $(\text{int } S^{-1})x$  é um aberto contido em  $\text{int } (S^{-1}x)$ .

**Lema 2.31.** O interior de um semigrupo  $S$  é um ideal de  $S$ .

**Demonstração:** Dado  $g \in \text{int } S$ , então existe uma vizinhança  $V$  de  $g$  tal que  $V \subset S$ . Dessa forma, tomando  $h \in S$  um elemento qualquer, temos que  $Vh$  é uma vizinhança de  $gh$  com  $Vh \subset S$ , logo  $gh \in \text{int } S$ .  $\square$

**Definição 2.32.** O semigrupo  $S$  é controlável a partir de  $x \in M$  se  $Sx = M$  e é controlável sobre  $M$  se for controlável a partir de todo  $x \in M$ .

**Definição 2.33.** Um conjunto de controle para o semigrupo  $S$  é um subconjunto  $D \subset M$  satisfazendo:

i)  $\text{int } D \neq \emptyset$ ;

ii)  $D \subset \text{fe } (Sx)$ , para todo  $x \in D$ ;

iii)  $D$  é maximal com relação às propriedades (i) e (ii), ou seja, se  $D' \subset D$  e satisfaz (i) e (ii), então  $D' = D$ .

Assim como na Definição 2.16, a condição (ii) é central para que se tenha controlabilidade aproximada em  $D$ . As condições (i) e (ii) são impostas para excluir casos triviais, como por exemplo, conjuntos unitários de  $M$ . A condição (iii) é puramente técnica. Veremos mais adiante que qualquer subconjunto de  $M$  satisfazendo (i) e (ii) está contido em um conjunto de controle.

O seguinte lema técnico será frequentemente usado ao longo desta seção.

**Lema 2.34.** Sejam  $x, y, z \in M$ . Se  $x \in \text{fe } (Sy)$  e  $y \in \text{fe } (Sz)$ , então  $x \in \text{fe } (Sz)$ .

**Demonstração:** Consideremos sequências  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos de  $S$  tais que  $g_n y \rightarrow x$  e  $h_n z \rightarrow y$ . Então, dada uma vizinhança  $V$  de  $x$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $g_{n_0} y \in V$ . Como a ação é contínua e  $h_n z \rightarrow y$ , temos que  $g_{n_0} h_n z \rightarrow g_{n_0} y$ . Assim, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $g_{n_0} h_{n_1} z \in V$ . Portanto,  $x \in \text{fe}(Sz)$ .  $\square$

Os próximos dois resultados nos ajudam a entender melhor os conjuntos de controle. O primeiro deles mostra que conjuntos de controle não se interceptam. O segundo foi previamente dito no comentário subsequente à Definição 2.33.

**Proposição 2.35.** *Dois conjuntos de controle  $D$  e  $D'$  são coincidentes ou são disjuntos.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $D \cap D' \neq \emptyset$  e tomemos  $x \in D \cap D'$ . Como  $\text{int } D \neq \emptyset$ , temos que  $\text{int}(D \cup D') \neq \emptyset$ . Sejam  $y, z \in D \cup D'$  elementos quaisquer. Pela condição (ii) da Definição 2.33,  $y \in \text{fe}(Sx)$  e  $x \in \text{fe}(Sz)$ . Pelo lema anterior concluimos que  $y \in \text{fe}(Sz)$ . Com isso, mostramos que  $D \cup D' \subset \text{fe}(Sz)$ , para todo  $z \in D \cup D'$ . Assim  $D \cup D'$  satisfaz as duas primeiras condições da Definição 2.33 e contém  $D$ . Pela maximalidade de  $D$ , temos que  $D \cup D' = D$ , logo  $D \subset D'$  e, novamente pela maximalidade dos conjuntos de controle, concluimos que  $D = D'$ .  $\square$

**Proposição 2.36.** *Todo subconjunto  $D \subset M$  satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 2.33 está contido em um conjunto de controle.*

**Demonstração:** Considere a família

$$\Omega := \{C \subset M; D \subset C \text{ e } C \text{ satisfaz (i) e (ii) da Definição 2.33}\}$$

ordenada pela relação de inclusão de conjuntos.

Considere em  $\Omega$  uma cadeia arbitrária  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  e denotemos por  $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ . Temos que  $\text{int } U \neq \emptyset$ , pois  $\text{int } C_\alpha \neq \emptyset$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ . Assim,  $U$  satisfaz a condição (i) da Definição 2.33. Agora tome  $x, y \in U$ . Então existem  $\alpha_1, \alpha \in \Lambda$  tais que  $x \in C_{\alpha_1}$  e  $y \in C_\alpha$ . Como  $C_{\alpha_1} \subset C_\alpha$  ou  $C_\alpha \subset C_{\alpha_1}$ , mostrando que  $U$  satisfaz a condição (ii) da Definição 2.33. Assim  $U \in \Omega$ .

Portanto todo subconjunto totalmente ordenado de  $\Omega$  é limitado superiormente. Pelo Lema de Zorn,  $\Omega$  possui elementos maximais. Seja  $C_M$  um desses elementos

maximais. Então  $D \subset C_M$  e  $C_M$  é o conjunto de controle procurado, de onde concluimos o resultado.  $\square$

**Proposição 2.37.** *Com as mesmas notações e hipóteses anteriores, se  $x \in M$ , então  $S(\text{int}(Sx)) \subset \text{int}(Sx)$  e  $S(\text{fe}(Sx)) \subset \text{fe}(Sx)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $g \in S$  e  $z \in \text{int}(Sx)$ . Como  $z \in \text{int}(Sx)$ , então existe um aberto  $U \subset M$  tal que  $z \in U \subset Sx$ . Logo  $gU$  é um aberto e  $gz \in gU \subset Sx$ . Assim  $gz \in \text{int}(Sx)$ , mostrando que  $S(\text{int}(Sx)) \subset \text{int}(Sx)$ . Agora sejam  $g \in S$  e  $y \in \text{fe}(Sx)$ , então existe uma sequência  $(g_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $Sx$  tal que  $g_n x \rightarrow y$ . Como a ação é contínua, então  $gg_n x \rightarrow gy$ . Assim  $gy \in \text{fe}(Sx)$ , portanto  $S(\text{fe}(Sx)) \subset \text{fe}(Sx)$ .  $\square$

Da propriedade (ii) da Definição 2.33 nota-se que não podemos garantir a existência de controlabilidade em todo  $D$ , todavia podemos tomar um subconjunto de  $D$  onde haja controlabilidade.

**Definição 2.38.** *Seja  $D$  um conjunto de controle para o semigrupo  $S$ . O conjunto de transitividade para  $D$  é o subconjunto  $D_0$  dado por*

$$D_0 := \{x \in D; \text{ existe } g \in \text{int } S \text{ tal que } gx = x\}.$$

A partir de agora exploraremos propriedades do conjunto de transitividade.

**Proposição 2.39.** *Seja  $D$  um conjunto de controle para o semigrupo  $S$  e seja  $D_0$  o seu conjunto de transitividade. Então:*

$$i) D_0 = ((\text{int } S)D) \cap D;$$

$$ii) \text{ Se } D_0 \neq \emptyset, \text{ então } D \subset (\text{int } S)^{-1}x \text{ para todo } x \in D_0.$$

**Demonstração:** Para mostrarmos (i), seja  $x_0 \in D_0$ . Então  $x_0 \in (\text{int } S)x_0 \cap D \subset ((\text{int } S)D) \cap D$ , mostrando que  $D_0 \subset ((\text{int } S)D) \cap D$ .

Para a inclusão contrária, seja  $x_0 \in ((\text{int } S)D) \cap D$ . Então existem  $h \in \text{int } S$  e  $y \in D$  tais que  $hy = x_0$ . Como  $D \subset \text{fe}(Sx_0)$  e  $D$  possui pontos interiores, então  $Sx_0 \cap D \neq \emptyset$ . Seja  $z \in Sx_0 \cap D$ . Temos que  $(\text{int } S)^{-1}x_0 \cup D \neq \emptyset$ , pois  $x_0 = hy$  o que implica em  $y = h^{-1}x_0$ .

Agora como  $D \subset \text{fe}(Sz)$  e  $(\text{int } S)^{-1}x_0 \cup D \neq \emptyset$ , então  $Sz \cap (\text{int } S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$  (visto que se  $x' \in (\text{int } S)^{-1}x_0 \cup D \neq \emptyset$ , então  $x' \in D \subset \text{fe}(Sz)$ ). Assim  $Sz \cup (Sz)'$ , onde  $(Sz)'$  denota o conjunto dos pontos aderentes de  $Sz$ . Se  $x' \in Sz$ , então  $Sz \cap (\text{int } S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$ . Se  $x' \in (Sz)'$ , então existe uma sequência de pontos de  $Sz$  convergindo para  $x'$ , em outras palavras, todo aberto contendo  $x'$  contém pelo menos um elemento de  $Sz$ . Como  $(\text{int } S)^{-1}$  é aberto, então  $(\text{int } S)^{-1}x_0$  ainda é um aberto e contém  $x'$ . Assim, como  $x'$  é um ponto de acumulação de  $Sz$  temos que existe pelo menos um elemento de  $Sz$  em  $(\text{int } S)^{-1}x_0$ , isto é,  $Sz \cap (\text{int } S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$ .

Como  $Sz \cap (\text{int } S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$ . Então existem  $g \in S$  e  $h \in \text{int } S$  tal que  $gx = h^{-1}x_0$ . Como  $z \in Sz$ , então  $z = sx_0$  e assim  $hgz = x_0 = hgsx_0$  o que implica em  $x_0 = hgsx_0$  como  $hgs \in \text{int } S$  visto que  $x_0 \in D$  concluímos que  $x_0 \in D_0$ .

Vamos agora demonstrar (ii). Para isto, tomemos  $x \in D_0$  e  $y \in D$ . Pelo item anterior temos que  $(\text{int } S)^{-1}x \cap D \neq \emptyset$ . Como  $D \subset \text{fe}(Sy)$ , então  $Sy \cap (\text{int } S)^{-1}x \neq \emptyset$ . Logo existem  $g \in S$  e  $h \in \text{int } S$  com  $gy = h^{-1}x$  e então  $y = g^{-1}h^{-1}x$ . Como  $g^{-1}h^{-1} \in (\text{int } S)^{-1}$ , então  $y \in (\text{int } S)^{-1}x$ . Portanto  $D_0 \neq \emptyset$  e então  $D \subset (\text{int } S)^{-1}x$  para todo  $x \in D_0$ .  $\square$

**Proposição 2.40.** *Considerando as mesmas hipóteses da proposição anterior, temos:*

- i) Se  $D_0 \neq \emptyset$ , então  $D_0 = (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$ ;
- ii) Para todo  $x, y \in D_0$ , existe  $g \in \text{int } S$  com  $gx = y$ ;
- iii) Se  $D_0 \neq \emptyset$ , então  $D_0$  é denso em  $D$ .

**Demonstração:** (i) Sejam  $x, y \in D_0$ . Pelo item (ii) da proposição anterior temos que  $y \in (\text{int } S)^{-1}x$  e  $x \in (\text{int } S)^{-1}y$ . Logo  $x = h^{-1}y$  para algum  $h \in \text{int } S$  o que implica em  $y = hx$ . Assim  $y \in (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$  e portanto  $D_0 \subset (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$ .

Fixemos agora  $x \in D_0$  e seja  $y \in (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$ . Então existem  $g, h \in \text{int } S$  tais que  $y = gx = h^{-1}x$ . Assim  $y = ghy$ , ou seja,  $y \in (\text{int } S)y$ . Nos resta mostrar que  $y \in D$  e o resultado segue do item (i) da proposição anterior. Para tanto, mostraremos que  $D' = D \cup \{y\}$  satisfaz as duas primeiras condições de conjunto de controle. Como  $D$  é um conjunto de controle, concluiremos pela maximalidade de  $D$  que  $D = D'$ .

Note primeiramente que  $\text{int } D' \neq \emptyset$ , pois  $\text{int } D \neq \emptyset$ . Assim  $D'$  satisfaz a

primeira condição da definição de conjunto de controle. Para mostrarmos a segunda condição, seja  $z \in D'$ . Então  $z \in D$  ou  $z = y$ . Se  $z \in D$ , como  $D \in \text{fe}(Sz)$ , resta mostrar que  $y \in \text{fe}(Sz)$ . Logo, tomando o  $x \in D_0$  fixado anteriormente, temos que  $y = gx$  com  $g \in \text{int } S$ . Desta forma  $y \in Sx \subset \text{fe}(Sx)$ . Como  $x \in \text{fe}(Sz)$  (pois  $x \in D$  e  $z \in D$ ), então  $y \in \text{fe}(Sz)$ . Portanto  $D' \subset \text{fe}(Sz)$  para todo  $z \in D$ . Caso  $z = y$ , então dado o  $x \in D_0$  fixado anteriormente, temos que  $y = h^{-1}x$  com  $h \in \text{int } S$ . Assim  $x = hy$ , ou seja,  $x \in Sy \subset \text{fe}(Sy)$ . Portanto, se  $w \in D$ , então  $w \in \text{fe}(Sy)$ , logo  $w \in \text{fe}(Sz)$  pelo Lema 2.34. Com isso, concluímos que  $D'$  satisfaz a segunda condição da Definição 2.33 e assim  $D' = D$  de onde segue que  $y \in D$ .

(ii) Considerando que  $x, y \in D_0$ , temos que  $D_0 \neq \emptyset$ . Sabemos que  $D_0 = (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$  pelo item anterior, logo  $y \in (\text{int } S)x$ . Então existe  $h \in \text{int } S$  tal que  $y = hx$ .

(iii) Como  $D_0 \neq \emptyset$ , tome  $x \in D_0$ . Pelo item (i) desta proposição, temos que  $D_0 = (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$ . Sabemos que  $(\text{int } S)x$  e  $(\text{int } S)^{-1}x$  são abertos. Tome  $y \in \text{fe}((\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x)$ . Então existe uma sequência  $(h_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos de  $(\text{int } S)x$  tal que  $h_n x \rightarrow y$ . Como  $h_n x \rightarrow y$ , temos que para qualquer aberto contendo  $y$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0$ , implica que  $h_n x$  pertence a este aberto. Desta forma, a partir de um certo  $n_0$ ,  $h_n x \in (\text{int } S)^{-1}x$ , pois este é um aberto contendo  $y$ , ou seja,  $h_n x \in (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x$ . Então,  $y \in \text{fe}((\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x) = \text{fe}(D_0)$ . Logo,

$$[\text{fe}((\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x)] \subset \text{fe}(D_0).$$

Pelo item (ii) da Proposição 2.39  $D \subset (\text{int } S)^{-1}x$ . Além disso,  $D \subset \text{fe}(Sx) \subset \text{fe}((\text{int } S)x)$ . De fato, dado  $y \in Sx$ ,  $y = gx$  para algum  $g \in S$  e pelo fato de  $x \in D_0$ ,  $x = hx$ , com  $h \in \text{int } S$ , assim  $y = ghx$ , e como  $gh \in \text{int } S$ , temos que  $y \in (\text{int } S)x$ , então  $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}((\text{int } S)x)$ . Logo  $D \subset (\text{fe}((\text{int } S)x) \cap (\text{int } S)^{-1}x) \subset \text{fe}(D_0)$ . Assim  $D = \text{fe}(D_0) \cap D = \text{fe}(D_0)^D$ , onde  $\text{fe}(D_0)^D$  denota o fecho de  $D_0$  em  $D$ . Portanto  $D_0$  é denso em  $D$ .  $\square$

**Proposição 2.41.** *Com as mesmas hipóteses da Proposição 2.39:*

i)  $D_0$  é  $S$ -invariante em  $D$  no seguinte sentido:

$$\text{se } h \in S, x \in D_0 \text{ e } hx \in D, \text{ então } hx \in D_0.$$

*ii) Se  $SD \subset D$  ou se  $S^{-1}D \subset D$ , então  $D_0 \neq \emptyset$ . No segundo caso,  $D_0 = D$ .*

**Demonstração:** (i) Tomemos  $h \in S$  e  $x \in D_0$ , então existe  $g \in \text{int } S$  tal que  $gx = x$ . Logo  $hx = hgx$  e conseqüentemente  $hx \in (\text{int } S)x$ . Temos por hipótese que  $hx \in D$ . Pelo item (ii) da Proposição 2.39  $D \subset (\text{int } S)^{-1}x$ , assim  $hx \in (\text{int } S)^{-1}x$ . Portanto  $hx \in (\text{int } S)x \cap (\text{int } S)^{-1}x = D_0$ .

(ii) Suponhamos que  $SD \subset D$ . Então  $(\text{int } S)D \subset D$  e conseqüentemente  $((\text{int } S)D) \cap D \neq \emptyset$ . Assim, pelo item (i) da Proposição 2.39 temos que  $D_0 \neq \emptyset$ .

Suponhamos agora que  $S^{-1}D \subset D$ , então  $(\text{int } S)^{-1}D \subset D$  e assim  $((\text{int } S)^{-1}D) \cap D \neq \emptyset$ . Seja  $x \in ((\text{int } S)^{-1}D) \cap D$ , então existem  $h \in \text{int } S$  e  $y \in D$  tais que  $y = hx$ . Logo  $y \in (\text{int } S)x \subset (\text{int } S)D$  e portanto  $((\text{int } S)) \cap D \neq \emptyset$ . Segue novamente do item (i) da Proposição 2.39 que  $D_0 \neq \emptyset$ .

Fixemos  $x \in D$ . Temos então que  $(\text{int } S)^{-1}x$  é um aberto e está contido em  $D$ , pois  $(\text{int } S)^{-1}D \subset D$ . Assim  $(\text{int } S)^{-1}x \cap D \neq \emptyset$ . Desta forma

$$(\text{int } S)^{-1}x = (\text{int } S)^{-1}x \cap D \subset D \subset \text{fe } (Sx),$$

de onde segue que  $Sx \cap (\text{int } S)^{-1}x \neq \emptyset$ . Logo existem  $g \in S$  e  $h \in \text{int } S$  tal que  $gx = h^{-1}x$ , ou seja,  $hgx = x$ . Portanto  $x \in (\text{int } S)x$  e assim  $x \in D_0$ , conseqüentemente  $D \subset D_0$ . Como já tínhamos que  $D_0 \subset D$ , então  $D = D_0$ .  $\square$

**Definição 2.42.** *Se o conjunto de transitividade  $D_0$  de um conjunto de controle  $D$  é não vazio, então  $D_0$  é chamado de conjunto de controle efetivo.*

### 2.2.1 Conjuntos de controle invariantes

Denotemos por  $\Gamma$  o conjunto de todos os conjuntos controláveis. Em  $\Gamma$  existe uma ordem natural dada pela ação do semigrupo. Notemos que não é a ordem dada pela inclusão, mesmo porque vimos que se dois conjuntos de controle para o mesmo semigrupo se interceptam, então eles são iguais.

**Definição 2.43.** *Sejam  $D_1, D_2 \in \Gamma$ . Definimos  $D_1 \leq D_2$  se existir  $x \in D_1$  tal que  $\text{fe } (Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$ .*

**Proposição 2.44.** *Se  $D_1, D_2 \in \Gamma$  e  $D_1 \leq D_2$ , então  $D_2 \cap \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$  para todo  $x \in D_1$ .*

**Demonstração:** Como  $D_1 \leq D_2$ , existe  $x_0 \in D_1$  tal que  $D_2 \cap \text{fe}(Sx_0) \neq \emptyset$ . Seja  $y \in D_2 \cap \text{fe}(Sx_0)$  e consideremos um elemento arbitrário  $x \in D_1$ . Pelo item (ii) da Definição 2.33 temos que  $x_0 \in \text{fe}(Sx)$ . Pelo Lema 2.34 concluímos que  $y \in \text{fe}(Sx)$  e portanto  $D_2 \cap \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposição 2.45.** *A relação " $\leq$ " é uma relação de ordem parcial.*

**Demonstração:** Para mostrarmos a reflexividade, notemos que se  $D$  é um conjunto de controle, então  $x \in \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in D$ . Portanto  $D \leq D$ .

Mostraremos agora a transitividade da relação  $\leq$ . Para isto, sejam  $D_1, D_2, D_3$  conjuntos de controle com  $D_1 \leq D_2$  e  $D_2 \leq D_3$ . Então existem  $x \in D_1$  e  $y \in D_2$  com  $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$  e  $\text{fe}(Sy) \cap D_3 \neq \emptyset$ . Tomemos  $z \in \text{fe}(Sx) \cap D_2$ . Pela proposição anterior  $\text{fe}(Sz) \cap D_3 \neq \emptyset$ . Mas  $z \in \text{fe}(Sx)$  implica em  $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx)$ . Assim  $\text{fe}(Sx) \cap D_3 \neq \emptyset$  e portanto  $D_1 \leq D_3$ .

Por fim, mostraremos que a relação  $\leq$  é antissimétrica. Sejam  $D_1, D_2 \in \Gamma$  e suponhamos que  $D_1 \leq D_2$  e  $D_2 \leq D_1$ . Pela proposição anterior temos que  $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$ , para todo  $x \in D_1$ , e também  $\text{fe}(Sy) \cap D_1 \neq \emptyset$ , para todo  $y \in D_2$ . Mostraremos que  $D_1 \cup D_2$  satisfazem as duas primeiras condições da definição de conjunto de controle.

Como  $D_1$  e  $D_2$  possuem pontos interiores, então  $\text{int}(D_1 \cup D_2) \neq \emptyset$ , logo  $D_1 \cup D_2$  satisfaz a condição (i) da Definição 2.33. Note que se  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , então pela Proposição 2.35 tem-se  $D_1 = D_2$  e a prova está concluída. Agora se  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , então tome  $x \in D_1 \cup D_2$ . Se  $x \in D_1$ , então  $D_1 \subset \text{fe}(Sx)$  e, como  $D_2 \leq D_1$ , temos também que  $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$ . Tomemos  $y \in \text{fe}(Sx) \cap D_2$ . Então  $D_2 \subset \text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sx)$ . Portanto  $D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sx)$ . Usando o mesmo argumento, concluímos que  $D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sx)$  para  $x \in D_2$ . Isto mostra que  $D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in D_1 \cup D_2$ , de onde segue a condição (ii) da definição de conjunto de controle. Pela maximalidade de  $D_1$  e  $D_2$  com respeito às condições (i) e (ii), temos que  $D_1 = D_1 \cup D_2 = D_2$ .  $\square$

Um conjunto de controle maximal é um conjunto  $D \in \Gamma$  que satisfaz a seguinte propriedade: se  $C \in \Gamma$  e  $D \leq C$ , então  $C = D$ .

**Definição 2.46.** *Um conjunto de controle invariante para  $S$  é um subconjunto não vazio  $C \subset M$  satisfazendo:*

- i)  $fe(Sx) = fe(C)$ , para todo  $x \in C$ ;*
- ii)  $C$  é maximal com respeito a (i).*

A seguir mostraremos alguns resultados sobre conjuntos de controle invariantes. O primeiro diz respeito a um conceito topológico.

**Proposição 2.47.** *Se  $S$  é acessível, então todo conjunto de controle invariante para  $S$  é fechado. Além disso, se  $C$  é um destes conjuntos, então  $\text{int } C \neq \emptyset$ .*

**Demonstração:** Sejam  $C$  um conjunto de controle invariante e  $x \in fe(C)$ . Tomando  $y \in C$  temos que  $fe(Sy) = fe(C)$ , ou seja,  $x \in fe(Sy)$ . Pela Proposição 2.37, temos que  $S(fe(Sy)) \subset fe(Sy)$ , portanto  $Sx \subset fe(Sy) = fe(C)$ . Como  $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$ , então  $Sx \cap C \neq \emptyset$ . Tome  $x' \in Sx \cap C$ . Temos que

$$fe(C) = fe(Sx') \subset fe(Sx) \subset fe(C).$$

Assim  $fe(Sx) = fe(C) = fe(fe(C))$ , para todo  $x \in fe(C)$ , ou seja,  $fe(C)$  satisfaz (i) da Definição 2.46 e ainda  $C \subset fe(C)$ . Como  $C$  é maximal com relação a (i) da definição de conjuntos de controle invariantes, temos que  $C = fe(C)$ , mostrando que  $C$  é fechado. Observe também que  $Sx \subset fe(C) = C$ , como  $\text{int}(Sx)$  é um aberto não vazio em  $C$ , temos também que  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ .  $\square$

O próximo resultado nos mostra uma relação entre conjuntos de controle e a ordem definida em  $\Gamma$ .

**Proposição 2.48.** *Se  $D$  é um conjunto de controle invariante para um semigrupo  $S$ , então  $D$  é maximal com respeito à relação de ordem parcial definida anteriormente.*

**Demonstração:** Seja  $D'$  um conjunto de controle tal que  $D \leq D'$ . Então  $fe(Sx) \cap D' \neq \emptyset$  para algum  $x \in D$ . Como  $D$  é um conjunto de controle invariante, temos que  $D = fe(Sx)$ , logo  $D \cap D' \neq \emptyset$ . Portanto pela Proposição 2.35 temos que  $D = D'$ .  $\square$

Vamos mostrar agora que um conjunto de controle invariante é de fato um conjunto de controle.

**Proposição 2.49.** *Se  $S$  é acessível, então todo conjunto de controle invariante é um conjunto de controle.*

**Demonstração:** Seja  $C$  um conjunto de controle invariante para a ação de  $S$ . Pela Proposição 2.47,  $\text{int } C \neq \emptyset$  e  $C$  é fechado. Logo  $C \subset \text{fe}(C) = \text{fe}(Sx)$  para todo  $x \in C$ . Resta mostrar a maximalidade de  $C$  como conjunto de controle. Suponha por absurdo que existe  $D$  contendo  $C$  tal que  $D \subset \text{fe}(Sx)$  para todo  $x \in D$ . Neste caso,  $\text{fe}(Sz) = \text{fe}(C) \subset \text{fe}(D)$  para todo  $z \in C$ , e portanto  $\text{fe}(D) = \text{fe}(Sz)$  para todo  $z \in C$ . Resta provar que  $\text{fe}(Sz)$  está contido no fecho de  $C$  para todo  $z \in D$  que não esteja contido em  $C$ . Tomemos  $y \in \text{fe}(Sz)$  e  $x \in C$ . Como  $y \in \text{fe}(Sz)$  e  $z \in \text{fe}(Sx)$ , então  $y \in \text{fe}(Sx) = \text{fe}(C)$ . Portanto  $\text{fe}(Sx) = \text{fe}(D)$  para todo  $x \in D$ , o que contraria a maximalidade de  $C$  como conjunto de controle invariante.  $\square$

Da mesma forma que fizemos para conjuntos de controle, podemos conhecer melhor o conjunto de transitividade de um conjunto de controle invariante. Para o próximo resultado, precisamos do conceito de variedade homogênea: se  $G$  é um grupo de Lie e  $L$  é um subgrupo fechado de  $G$ , então é possível definir um atlas sobre o quociente  $G/L$  de modo que se torne uma variedade diferenciável (ver Teorema 3.58 pg 120 de [4]). A variedade  $G/L$  é chamada de variedade homogênea.

**Proposição 2.50.** *Suponha que  $M = G/L$  seja um espaço homogêneo compacto e seja  $S$  um semigrupo de  $G$  com interior não vazio. Sejam  $C$  um conjunto de controle invariante para a ação de  $S$  sobre  $M$  e  $C_0 = (\text{int } S)C$  o seu conjunto de transitividade. Então:*

- i)  $C_0 = \text{int}(Sx)$ , para todo  $x \in C_0$ ;
- ii)  $SC_0 \subset C_0 = Sy = (\text{int } S)y$ , para todo  $y \in C_0$ ;
- iii)  $\text{fe}(C_0) = C$ ;
- iv)  $C_0 = \{x \in C; \text{ existe } g \in \text{int } S \text{ com } gx = x\}$ ;
- v)  $C_0 = \{x \in C; \text{ existe } g \in \text{int } S \text{ com } g^{-1}x \in C\}$ .

**Demonstração:** i) Como  $S$  é acessível, pela Proposição 2.47 temos que  $C$  é fechado. Em particular,  $C$  é invariante pela ação de  $S$  (pois  $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(C) = C$ ). Assim  $C_0 = (\text{int } S)C \subset C$ . Logo  $\text{fe}(Sy) = \text{fe}(C) = C$  para todo  $y \in C_0$ , ou seja,  $Sy$  é

denso em  $C$  para todo  $y \in C_0$ . Temos também que  $(\text{int } S)^{-1}$  é um aberto interceptando  $C$ , pois se  $y \in C_0$ , então  $y = hx$  com  $h \in \text{int } S$  e  $x \in C$ . Desta forma,  $h^{-1}y = x \in C$  e conseqüentemente  $(\text{int } S)^{-1}y \cap C \neq \emptyset$ . Como  $Sy$  é denso em  $C$ , temos que  $(\text{int } S)^{-1}y \cap Sy \neq \emptyset$ . Assim existe  $h \in \text{int } S$  e  $g \in S$  tais que  $h^{-1}y = gy$ . Isto mostra que  $y \in (\text{int } S)Sy$  e

$$\text{int } (Sy) \subset Sy \subset S(\text{int } S)Sy \subset (\text{int } S)y \subset \text{int } (Sy),$$

sendo a última inclusão válida porque dado  $x \in (\text{int } S)y$ , então  $x = hy$  para algum  $h \in \text{int } S$ , assim existe uma vizinhança  $V \subset S$  de  $h$  tal que  $Vy \subset Sy$  é uma vizinhança de  $hy$ , logo  $x = hy \in \text{int } (Sy)$ . Com as inclusões acima temos que  $\text{int } (Sy) = (\text{int } S)y = Sy$ . Assim  $\text{int } (Sy)$  é aberto,  $S$ -invariante e denso em  $C$ , já que  $Sy$  o é. Tomemos  $x, y \in C_0$ . Temos que  $(\text{int } S)^{-1}z \cap C \neq \emptyset$  e  $sy$  é denso em  $C$ , então  $(\text{int } S)^{-1}z \cap Sy \neq \emptyset$ . Tomemos  $h \in (\text{int } S)$  e  $g \in S$  tais que  $h^{-1}z = gy$ , então  $z = hgy$  e assim

$$z \in (\text{int } S)Sy \subset (\text{int } S)y \subset \text{int } (Sy) \subset Sy.$$

Logo  $\text{int } (Sz) = Sz \subset Sy = \text{int } (Sy)$ . Analogamente temos que  $\text{int } (Sy) \subset \text{int } (Sz)$ , de onde segue que  $\text{int } (Sy) = \text{int } (Sz)$ . Desta forma, dado  $z \in C_0$ , então  $z \in \text{int } (Sy)$  para todo  $y \in C_0$  e reciprocamente, dado  $z \in \text{int } (Sy)$ , então  $z \in (\text{int } S)y$ , o que implica em  $z \in (\text{int } S)C = C_0$ . Portanto  $C_0 = \text{int } (Sx)$ , para todo  $x \in C_0$

ii) Se  $y \in C_0$ , já mostramos que  $Sy = (\text{int } S)y$ , então  $Sy \subset (\text{int } S)y \subset (\text{int } S)C$ , assim  $SC_0 \subset C_0$ . Por (i), temos que  $C_0 = \text{int } (Sy) = (\text{int } S)y = Sy$ , portanto  $SC_0 \subset C_0 = Sy = (\text{int } S)y$ .

iii) Dado  $x \in C_0$ , temos que  $C_0 = Sx$ , então  $\text{fe } (C_0) = \text{fe } (Sx) = \text{fe } (C) = C$ .

iv) Se  $x \in C_0$ , então  $C_0 \text{int } (Sx) \subset (\text{int } S)x$ . Assim  $x \in (\text{int } S)x$ . Reciprocamente, se  $x \in C$  e  $x \in (\text{int } S)x$ , então  $x \in (\text{int } S)C = C_0$ . Portanto temos a igualdade.

v) Se  $x \in C_0$ , então  $x = gy$ , com  $y \in C$  e  $g \in \text{int } S$ , assim  $g^{-1}x = y \in C$ . Agora se  $x \in C$  e  $g^{-1}x \in C$ , com  $g \in \text{int } S$ , seja  $y \in C$  tal que  $g^{-1}x = y$ , então temos que  $x = gy$ , ou seja  $x \in (\text{int } S)C = C_0$ , portanto temos que

$$C_0 = \{x \in C; \text{ existe } g \in \text{int } S \text{ com } g^{-1}x \in C\}.$$

□

**Observação 2.51.** *Notemos que como estamos trabalhando com semigrupos com pontos interiores então para conjuntos de controle invariantes, seu conjunto de transitividade  $C_0$  é sempre diferente do vazio, ou seja, o conjunto de controle invariante é sempre efetivo.*

Veremos agora que se  $C$  é fechado, então para termos  $C$  como um conjunto de controle invariante, basta a primeira condição da Definição 2.46.

**Proposição 2.52.** *Se um subconjunto não vazio  $C \subset M$  satisfaz a condição (i) da Definição 2.46 e  $C$  é fechado, então  $C$  é um conjunto de controle invariante para  $S$ .*

**Demonstração:** Basta mostrar a maximalidade de  $C$ . Suponha que  $C'$  seja um subconjunto de  $M$  contendo  $C$  e satisfazendo a condição (i) da Definição 2.46. Dado  $x \in C$ , temos também que  $x \in C'$ , logo

$$C \subset C' \subset \text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(C) = C.$$

Portando  $C' = C$ . □

**Proposição 2.53.** *Se  $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$ , então  $C$  é um conjunto de controle invariante para  $S$*

**Demonstração:** Como  $C$  é a intersecção de fechados, então  $C$  é fechado. Desta forma, pela proposição anterior, para mostrarmos que  $C$  é um conjunto de controle invariante, basta mostramos que  $C = \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in C$ . Tomemos  $y \in C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx)$ . Em particular  $y \in \text{fe}(Sx)$  para todo  $x \in C$ , de onde segue que  $C \subset \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in C$ . Para a inclusão contrária, seja  $y \in \text{fe}(Sz)$  para um  $z$  qualquer pertencente a  $C$ . Como  $z \in \text{fe}(Sx)$  para todo  $x \in M$ , temos que  $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx)$  para todo  $x \in M$ , o que implica que  $y \in \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in M$ . Logo  $y \in C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx)$ .

Assim  $\text{fe}(Sz) \subset C$  para todo  $z \in C$ , o que prova que  $\text{fe}(Sz) = C = \text{fe}(C)$ , para todo  $z \in C$ . Para provarmos a unicidade, como  $C$  intercepta o fecho de todas as  $S$ -órbitas, então  $C$  intercepta qualquer outro conjunto de controle invariante para a ação de  $S$  em  $M$ . Segue da Proposição 2.35 que  $C$  é único. □

**Proposição 2.54.** *Suponhamos que  $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$  seja o único conjunto de controle invariante para a ação de  $S$  e que exista um conjunto de controle invariante para  $S^{-1}$ , digamos  $C^-$ , tal que  $(\text{int } C) \cap \text{int } C^- \neq \emptyset$ . então  $S$  age transitivamente em  $M$ .*

**Demonstração:** Temos que  $C$  é fechado e  $Sx \subset \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in C$ . Então  $SC \subset \bigcup_{x \in C} \text{fe}(Sx) = \text{fe}(C) = C$ . Daí, pelo item (ii) da Proposição 2.41, temos que  $C_0 \neq \emptyset$ . Se  $x \in C_0$ , então pelo item (i) da Proposição 2.39,  $x \in (\text{int } S)^{-1}x$  e uma vez que  $x \in C$ , temos pela definição de  $C$  que  $x \in \text{fe}(Sy)$ , para todo  $y \in M$ . Assim,  $x \in (\text{int } S)^{-1}x \cap \text{fe}(Sy)$ . Logo, existe uma sequência  $(h_n y)_{\mathbb{N}}$  em  $Sy$  tal que  $h_n y \rightarrow x \in (\text{int } S)^{-1}x$ . Desta forma, existe um número natural  $n_0$  tal que se  $n > n_0$ , então  $h_n y \in (\text{int } S)^{-1}x$ . Assim, dado  $n > n_0$ , temos que existe  $g \in \text{int } S$  tal que  $h_n y = g^{-1}x$ , ou seja,  $gh_n y = x$ , o que significa que se  $x \in C_0$  e  $y \in M$ , então  $x \in Sy$ . Consequentemente, para todo  $y \in M$ , existe  $s \in S$  tal que  $sy = x$ . Então  $s^{-1}x = y$ , para todo  $y \in M$ , logo  $S^{-1}x = M$ . Pelo item (iii) da Proposição 2.40  $C_0$  é denso em  $C$ . Desta forma  $(\text{int } C^-) \cap C_0 \neq \emptyset$ . Tomemos  $x \in (\text{int } C^-) \cap C_0$ . Como  $x \in C_0$ , temos que  $S^{-1}x = M$ , e uma vez que  $S^{-1}x \subset C^-$  (pois  $C^-$  é  $S^{-1}$ -invariante), temos que  $C^- = M$ .

Já que  $SC^- \subset M = C^-$ , ou seja,  $(S^{-1})^{-1}C^- \subset C^-$ , temos pelo item (ii) da Proposição 2.41 que  $C_0^- = C^- = M$ . Assim  $S^{-1}x = M$ , para todo  $x \in M$ , ou seja, dados  $x, y \in M$  quaisquer, existe  $g \in S$  tal que  $g^{-1}x = y$ , ou equivalentemente,  $gy = x$ . Portanto  $S$  age transitivamente em  $M$ .  $\square$

Nos dois próximos resultados, estabeleceremos uma condição suficiente sobre a variedade para a existência de conjunto de controle invariante.

**Proposição 2.55.** *Se  $N \subset M$  é um subconjunto compacto e invariante para a ação de  $S$ , então para todo  $x \in N$ ,  $\text{fe}(Sx)$  contém um conjunto de controle invariante.*

**Demonstração:** Fixemos  $x \in N$  e consideremos a família

$$\mathcal{F} = \{\text{fe}(Sy); \text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sx), y \in M\}.$$

Temos que  $\mathcal{F}$  é não vazia, pois  $\text{fe}(Sx) \in \mathcal{F}$ . Munimos  $\mathcal{F}$  com a relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos e tomemos uma cadeia arbitrária  $\{\text{fe}(Sy)\}_{y \in I \subset M}$  em  $\mathcal{F}$ . Temos que  $Sx \subset N$  e  $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(N) = N$ .

Assim, a cadeia tomada forma uma sequência de subconjuntos compactos encaixados. Logo  $\bigcap_{y \in ICM} \text{fe}(Sy) \neq \emptyset$ . Tomando  $z \in \bigcap_{y \in ICM} \text{fe}(Sy)$ , temos que  $\text{fe}(Sz) \in \mathcal{F}$  e  $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sy)$ , para todo  $y \in I$ , portanto  $\text{fe}(Sz)$  é um limitante inferior da cadeia. Pelo Lema de Zorn,  $\mathcal{F}$  possui um elemento minimal, digamos  $C = \text{fe}(Sw)$ . Tomando  $h \in C$  e  $a \in \text{fe}(Sh)$ , temos que  $a \in \text{fe}(Sh)$  e  $h \in \text{fe}(Sw)$ , logo  $a \in \text{fe}(Sw) = C$ . Logo  $\text{fe}(Sh) \subset C$ . Como  $\text{fe}(Sh) \in \mathcal{F}$  e  $C$  é minimal em  $\mathcal{F}$ , devemos ter  $\text{fe}(Sh) = C = \text{fe}(C)$ , para todo  $h \in C$ . Portanto  $C$  é um conjunto de controle invariante.  $\square$

**Corolário 2.56.** *Se  $M$  é uma variedade compacta, então existe ao menos um conjunto de controle invariante para a ação de  $S$  sobre  $M$ .*

Finalmente, mostraremos que se um conjunto de controle é maximal com relação a ordem dada pela ação do semigrupo  $S$ , então ele é um conjunto de controle invariante.

**Proposição 2.57.** *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $D$  um conjunto de controle para a ação do semigrupo  $S \subset G$ . Se  $D$  é maximal com respeito a ordem  $\leq$ , então  $D$  é um conjunto de controle invariante.*

**Demonstração:** Basta provar que  $\text{fe}(Sx) = \text{fe}(D)$  para todo  $x \in D$ , pois a maximalidade de  $D$  como conjunto de controle invariante segue da maximalidade de  $D$  como conjunto de controle. De fato, se  $C$  é um subconjunto de  $M$  que contém  $D$  e satisfaz  $\text{fe}(Sx) = \text{fe}(C)$ , para todo  $x \in C$ , então  $C \subset \text{fe}(C) = \text{fe}(Sx) = \text{fe}(D)$ , para todo  $x \in C$ . Assim,  $\text{fe}(Sx) \cap C \neq \emptyset$ , para todo  $x \in D$ , o que implica em  $D \leq C$ . Mas  $D$  é um conjunto de controle maximal, logo temos  $C = D$ .

Como  $D$  é um conjunto de controle, temos que  $D \subset \text{fe}(Sx)$ , para todo  $x \in D$ . Suponha por absurdo que exista  $x_0 \in D$  tal que  $\text{fe}(Sx_0) \not\subset \text{fe}(D)$ , e considere  $z \in (\text{fe}(Sx_0) \setminus \text{fe}(D))$ . Temos que  $\text{fe}(Sz) \cap D = \emptyset$ , pois se  $\text{fe}(Sz) \cap D \neq \emptyset$ , então tomando  $D \cup \{z\}$ , temos:

a)  $\text{int}(D \cup \{z\}) \neq \emptyset$ , pois  $\text{int} D \neq \emptyset$

b)  $(D \cup \{z\}) \subset \text{fe}(Sy)$  para todo  $y \in D \cup \{z\}$ . De fato, se  $y \in D \cup \{z\}$ , então  $y \in D$  ou  $y = z$ .

Se  $y \in D$ , então  $D \subset \text{fe}(Sy)$ . Além disso,  $z \in \text{fe}(Sx_0)$  e  $x_0 \in \text{fe}(Sy)$ , para todo  $y \in D$ , então  $z \in \text{fe}(Sy)$ , para todo  $y \in D$  e assim  $D \cup \{z\} \subset \text{fe}(Sy)$ , para todo  $y \in D$ . Se  $y = z$ , então tome  $a \in \text{fe}(Sz) \cap D$ . Assim  $x \in \text{fe}(Sa)$  para todo  $x \in D$  e  $a \in \text{fe}(Sz)$ , então  $x \in \text{fe}(Sz)$  para todo  $x \in D$  e ainda  $z \in \text{fe}(Sx_0)$ . Como  $x_0 \in D$ , acabamos de ver que  $x_0 \in \text{fe}(Sz)$ , então  $z \in \text{fe}(Sz)$ . Logo  $(D \cup \{z\}) \subset \text{fe}(Sz)$ .

Portanto  $D \cup \{z\}$  satisfaz as duas primeiras condições da definição de conjunto de controle, logo pela maximalidade de  $D$ ,  $D = D \cup \{z\}$ , ou seja,  $z \in D$ , o que é uma contradição. Portanto  $\text{fe}(Sz) \cap D = \emptyset$  para todo  $z \in (\text{fe}(Sx_0) \setminus \text{fe}(D))$ . Como  $M$  é compacta, temos que  $\text{fe}(Sz)$  é compacto e é invariante pela ação de  $S$  pela Proposição 2.37. Logo  $\text{fe}(Sz)$  contém um conjunto de controle  $D'$  que é disjunto de  $D$ , pois  $\text{fe}(Sz) \cap D = \emptyset$ . Mas  $z \in \text{fe}(Sx_0)$  implica em  $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx_0)$ , assim  $D' \cap \text{fe}(Sx_0) \neq \emptyset$ , com  $x_0 \in D$ , pois  $D' \subset \text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx_0)$ . Assim, pela Definição 2.43,  $D \leq D'$ , o que contraria o fato de  $D$  ser um conjunto de controle maximal com relação a "  $\leq$  ", pois  $D \neq D'$ . Portanto  $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(D)$  para todo  $x \in D$ , concluindo assim o desejado.  $\square$

**Exemplo 2.58.** *Seja  $G = (\mathbb{R}, +)$  e em  $G$  tomemos  $S = \mathbb{R}^+$  o semigrupo constituído dos números reais positivos. Considere a ação  $\theta : G \times G \rightarrow G$  dada por  $\theta(x, y) = x + y$ . Então em  $G$  não existe conjuntos de controle para a ação de  $S$ , visto que se  $D$  fosse um conjunto de controle para a ação de  $S$ , então  $D \subset \text{fe}(Sx)$  para todo  $x \in D$ . Como  $\text{int } D \neq \emptyset$ , existe um intervalo aberto e limitado  $J \subset \mathbb{R}$  tal que  $J \subset D$ . Tomando o ponto médio  $m$  de  $J$  e um ponto  $x_0 \in J$  qualquer tal que  $x_0 > m$ , temos que  $\text{fe}(Sx_0) = \{y \in \mathbb{R}; y \geq x_0\}$ . Assim  $D \subset \text{fe}(Sx_0)$ , o que é um absurdo, pois em  $J$  existem elementos menores que  $x_0$ . Portanto não existe conjunto de controle para a ação de  $S$ .*

**Exemplo 2.59.** *Sejam  $G = SL(2, \mathbb{R})$  (o grupo das matrizes reais  $2 \times 2$  de determinante igual a 1) e  $S \subset G$  o semigrupo das matrizes com entradas não negativas. Temos que  $S$  é um semigrupo de interior não vazio. Consideremos ainda  $M = \mathbb{P}^1$  o espaço projetivo 1-dimensional e a ação  $\theta : G \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dada por  $\theta(g, [v]) = [gv]$ . Afirmamos que o conjunto*

$$C = \{[(x_1, x_2)]; x_1, x_2 \geq 0\}$$

*é um conjunto de controle invariante para a ação de  $S$  sobre  $\mathbb{P}^1$ .*

Com efeito, sejam  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  elementos de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $[x], [y] \in \text{int } C$ , então  $x_i, y_i > 0$  para  $i = 1, 2$ . Assim tomando

$$g = \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} & 0 \\ \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} \end{pmatrix} \in S$$

temos que

$$g[x] = \left[ \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} & 0 \\ \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} [y] = [y].$$

Isto diz que  $[y] \in S[x]$  e portanto  $\text{int } C \subset S[x]$  para todo  $[x] \in \text{int } C$ . Tomando agora  $[x] \in (C - \text{int } C)$ . Então  $[x] = [(x_1, x_2)]$  deve ter pelo menos uma das entradas nula. Assim, tomando

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S \quad \text{com } a, b, c, d > 0,$$

temos que

$$g[x] = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \right]$$

pertence ao interior de  $C$ , pois as duas coordenadas são estritamente positivas. Logo, dado  $[x] \in (C - \text{int } C)$ , existe  $g_0 \in S$  tal que  $g_0[x] \in \text{int } C$ , digamos  $g_0[x] = [y]$  e já vimos anteriormente que para quaisquer dois elementos  $[y], [y_0] \in \text{int } C$ , existe  $g \in S$  tal que  $g[y_0] = [y]$ . Concluimos então que dado  $[y] \in \text{int } C$ , existe uma matriz  $gg_0 \in S$  tal que  $gg_0[x] = [y]$ . Desse fato segue que  $\text{int } C \subset S[x]$ , para todo  $[x] \in C$ , e com isso temos que  $C \subset \text{fe}(\text{int } C) \subset \text{fe}(S[x])$ , para todo  $[x] \in C$ . Para a inclusão contrária, temos que dado  $g \in S$  e  $[x] \in C$ , então  $g[x] \in C$ , pois todas as entradas de  $g$  são não negativas. Assim  $S[x] \subset C$ , para todo  $[x] \in C$  e, conseqüentemente,  $\text{fe}(S[x]) \subset \text{fe}(C)$ , para todo  $[x] \in C$ . Como  $C$  é fechado, segue da Proposição 2.52 que  $C$  é um conjunto de controle invariante para a ação de  $S$ .

Vamos agora calcular o conjunto de transitividade de  $C$ , denotado por  $C_0$ . Vimos acima que  $SC \subset C$ , então pelo item (ii) da Proposição 2.41 temos que  $C_0 \neq \emptyset$  e pelo item (iii) da Proposição 2.40, temos que  $C_0$  é denso em  $C$ . Como  $\mathbb{P}^1$  é um espaço homogêneo compacto, segue do item (ii) da Proposição 2.2.1 que  $C_0 = S[x]$ , para todo  $x \in C_0$ . Tomemos  $[x] \in C_0 \cap \text{int } C$ . Então  $[x] = [(x_1, x_2)]$  possui todas as suas entradas positivas. Portanto

$$C_0 = S[x] = \left\{ \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \right\} = \left\{ \left[ \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \right] \right\} = \text{int } C.$$

Mostraremos a seguir que o complementar de  $C$  em  $\mathbb{P}^1$ , que denotaremos por  $D$ , é um conjunto de controle para a ação de  $S$ . Entretanto,  $D$  não é um conjunto de controle invariante, pois  $D$  é aberto e sabemos pela Proposição 2.47 que os conjuntos de controle invariantes para semigrupos de interior não vazio são fechados. A condição (i) da definição de conjunto de controle é satisfeita, pois como  $D$  é aberto,  $D = \text{int } D \neq \emptyset$ . Para a condição (ii) devemos mostrar que  $D \subset \text{fe}(S[x])$  para todo  $[x] \in D$ . Para isto, sejam  $[x] = [(x_1, x_2)]$ ,  $[y] = [(y_1, y_2)] \in D$ . Então  $x_1, y_1 < 0$  e  $x_2, y_2 > 0$ . Logo, tomando

$$g = \left(\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{y_2} \end{pmatrix} \right] \in S$$

temos que

$$g[x] = \left[\left(\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{y_2} \end{pmatrix} \right] \right] \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \left(\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}\right) [y] = [y].$$

Isto mostra que  $[y] \in S[x]$  e conseqüentemente  $D \subset S[x]$  para todo  $[x] \in D$ . Portanto  $D \subset \text{fe}(S[x])$  para todo  $[x] \in D$ . A condição (iii) da Definição 2.33 segue do fato de que conjuntos controláveis são disjuntos. Portanto  $D$  é um conjunto controlável.

**Observação 2.60.** Os resultados apresentados no exemplo anterior generalizam-se para  $\mathbb{P}^d$ ,  $d > 1$ . O octante com todas as coordenadas não negativas é um conjunto controlável invariante para a ação de  $S$  em  $\mathbb{P}^d$  e o seu complementar é um conjunto controlável, mas não é invariante.

# Sistemas de Controle Linear

Neste capítulo iremos descrever a controlabilidade de uma das classes mais simples de sistemas de controle, os sistemas de controle linear em  $\mathbb{R}^d$ .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{d \times m}$  e  $u : \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ .

Primeiramente não iremos impor qualquer tipo de restrição nos controles, isto é, iremos supor que os controles  $u$  assumem valores em  $U = \mathbb{R}^m$  e poderemos notar que este tipo de situação pode ser resolvido simplesmente com argumentos de álgebra linear. Em seguida algumas restrições sobre os controles serão impostas e veremos que neste caso os problemas ficam bem mais elaborados.

Uma das vantagens de se estudar este caso particular de sistema de controle é que, através da fórmula da variação das constantes, podemos obter a seguinte solução do sistema de controle linear, fixada a condição inicial  $x(0) = x_0$  e  $u \in \mathcal{U}$ :

$$\varphi(t, x_0, u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Com esta solução, podemos explicitar de maneira mais elegante os critérios de controlabilidade.

## 3.1 Controlabilidade do Sistema Linear

Nesta seção, como dissemos anteriormente, iremos supor que a imagem dos controles  $U$  coincida com  $\mathbb{R}^m$ . Assim, temos o sistema de controle linear (sem restrição aos controles)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (3.3)$$

Ao longo deste capítulo usaremos  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{pco}$  (o conjunto de funções contínuas por partes), e as seguintes notações:

$$\mathcal{R}(T) := \mathcal{O}_T^+(0) \text{ e } \mathcal{R} := \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(T) = \mathcal{O}^+(0);$$

$$\mathcal{C}(T) := \mathcal{O}_T^-(0) \text{ e } \mathcal{C} := \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{C}(T) = \mathcal{O}^-(0).$$

O interesse especial são sistemas onde todo ponto pode ser atingível. Notemos o seguinte lema:

**Lema 3.1.** *Sejam  $S > T \geq 0$ . Então*

- i)  $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(S)$ ;*
- ii) se  $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S)$ , então  $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(t)$ , para todo  $t \geq T$ ;*
- iii)  $\mathcal{R}(T)$  e  $\mathcal{R}$  são subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração:** i) Dado  $y \in \mathcal{R}(T)$ , então existe  $u \in \mathcal{U}$  com  $\varphi(T, 0, u) = y$  Defina

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, S - T) \\ u(t - (S - T)), & \text{se } t \in [S - T, S] \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \varphi(S, 0, v) &= \int_0^S e^{(S-s)A} Bv(s) ds \\ &= \int_0^S e^{(S-T+T-s)A} Bv(s) ds \\ &= e^{TA} \int_0^{S-T} e^{(S-T-s)A} Bv(s) ds + \int_{S-T}^S e^{(S-T-s)A} Bv(s) ds \\ &= e^{TA} \int_0^{S-T} e^{(S-T-s)A} B0 ds + \int_{S-T}^S e^{(S-T-s)A} Bu(s - (S - T)) ds \\ &= \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto  $y \in \mathcal{R}(S)$ .

- iii) Sejam  $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ , então existem  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  tais que

$$y_i = \varphi(T, 0, u_i) = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu_i(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

Assim, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , segue da linearidade da integral que

$$\lambda y_1 + y_2 = \int_0^T e^{(T-s)A} B[\lambda u_1(s) + u_2(s)] ds = \varphi(T, 0, \lambda u_1 + u_2) \in \mathcal{R}(T),$$

mostrando que  $\mathcal{R}(T)$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$ . Pelo item (i) e pelo que acabamos de mostrar, temos que  $\mathcal{R}$  é uma união de subespaços vetoriais encaixantes, de onde segue que  $\mathcal{R}$  é também um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$ .

ii) Suponha que  $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$ . Seja  $x \in \mathcal{R}(2S - T)$ , então existe  $u \in \mathcal{U}$  com

$$x = \varphi(2S - T, 0, u) = \int_0^{2S-T} e^{(2S-T-s)A} B u(s) ds.$$

Como  $\varphi(S, 0, u) \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S)$ , existe  $v \in \mathcal{U}$  tal que

$$\varphi(S, 0, u) = \varphi(T, 0, v) = \int_0^T e^{(T-s)A} B v(s) ds.$$

Defina

$$w(t) = \begin{cases} v(t), & \text{se } t \in [0, T] \\ u(t - (S - T)), & \text{se } t \in [T, S] \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \varphi(S, 0, w) &= \int_0^T e^{(S-s)A} B w(s) ds + \int_T^S e^{(S-s)A} B w(s) ds \\ &= e^{(S-T)A} \int_0^T e^{(T-s)A} B v(s) ds + \int_T^S e^{(S-s)A} B u(s - (S - T)) ds \\ &= e^{(S-T)A} \int_0^S e^{(S-s)A} B u(s) ds + \int_S^{2S-T} e^{(2S-T-s)A} B u(s) ds \\ &= \int_0^S e^{(2S-T-s)A} B u(s) ds + \int_S^{2S-T} e^{(2S-T-s)A} B u(s) ds \\ &= \int_0^{2S-T} e^{(2S-T-s)A} B u(s) ds \\ &= x. \end{aligned}$$

Portanto  $x \in \mathcal{R}(S)$  e como  $S < 2S - T$  segue que  $\mathcal{R}(2S - T) = \mathcal{R}(S)$ . Indutivamente podemos mostrar que  $\mathcal{R}(nS - T) = \mathcal{R}(S)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , logo para todo  $t \geq S$  temos que, pelo item (i),  $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(t)$ . Entretanto, tomando  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $nS - T \geq t$  tem-se que  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{R}(nS - T) = \mathcal{R}(S)$ , de onde segue que  $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(S)$ , para todo  $t \geq S$ .  $\square$

Como consequência deste lema, temos que  $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}$  para todo  $t > 0$ . De fato, é claro que  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{R}$ , para todo  $t > 0$ , portanto nos resta provar a inclusão contrária. Para

isto, seja  $x \in \mathcal{R}$ , então existe  $T > 0$  tal que  $x \in \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(t)$ , para todo  $t \geq T$  (por (i)). Agora basta mostrar que  $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(T)$  para todo  $t < T$ . Suponha por absurdo que existe  $t_1 < T$  tal que  $\mathcal{R}(t_1) \subsetneq \mathcal{R}(T)$ . Pela contra-positiva de (ii), temos que  $\mathcal{R}(T) \subsetneq \mathcal{R}(S)$ , para todo  $S > T$ . Tomando  $t_2 = T$  e  $t_3 = t_2 + 1$  temos que  $t_1 < t_2 < t_3$  e  $\mathcal{R}(t_1) \subsetneq \mathcal{R}(t_2) \subsetneq \mathcal{R}(t_3)$ . Procedendo iteradamente, considerando-se  $t_1$  e  $t_n = t_{n-1} + 1$  para  $n \geq 2$  construímos uma seqüência de subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^d$  encaixantes  $\mathcal{R}(t_1) \subsetneq \mathcal{R}(t_2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{R}(t_n) \subsetneq \cdots$ , o que é um absurdo, pois  $\dim(\mathbb{R}^d) = d < +\infty$ , de onde segue a afirmação.

Além disso,  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^d$  se, e somente se,  $\mathcal{O}_t^+(x_0) = \mathbb{R}^d$ , para algum (e portanto para todo)  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  e para todo  $t > 0$ . Com efeito, seja  $t > 0$  e suponha que  $\mathbb{R}^d = \mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$ . Então dados  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d$ , temos que a diferença  $x_1 - \varphi(t, x_0, 0) \in \mathcal{R}(t)$ , logo existe  $u \in \mathcal{U}$  com  $x_1 - \varphi(t, x_0, 0) = \varphi(t, 0, u)$  e portanto  $x_1 = \varphi(t, x_0, 0) + \varphi(t, 0, u) = \varphi(t, x_0, u)$ . Com isso concluímos que  $x_1 \in \mathcal{O}_t^+(x_0)$ , ou seja,  $\mathbb{R}^d \subset \mathcal{O}_t^+(x_0)$ , de onde segue que  $\mathbb{R}^d = \mathcal{O}_t^+(x_0)$ . Reciprocamente, note que

$$\mathcal{O}_t^+(x_0) = \left\{ e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds; \quad u \in \mathcal{U} \right\} = e^{tA}x_0 + \mathcal{R}.$$

Logo  $\mathbb{R}^d = \mathcal{O}_t^+(x_0) = e^{tA}x_0 + \mathcal{R}(t) = e^{tA}x_0 + \mathcal{R}$ , de onde segue que  $\mathbb{R}^d = \mathcal{R}$ , como queríamos. Concluímos então que o sistema de controle linear é controlável se, e somente se, é controlável a partir da origem de  $\mathbb{R}^d$ .

Resultados análogos são válidos para  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}(t)$  e  $\mathcal{O}_t^-(x_0)$ .

Nosso interesse é caracterizar o conjunto  $\mathcal{R}$  em termos do par de matrizes  $(A, B)$ . Para tanto, necessitamos do seguinte resultado de álgebra linear.

**Lema 3.2.** *Sejam  $V \subset \mathbb{R}^d$  um subespaço vetorial e  $A$  uma transformação linear sobre  $\mathbb{R}^d$ . Então o menor subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$  invariante por  $A$  e que contém  $V$ , o qual será denotado por  $\langle A|V \rangle$ , é dado por*

$$\langle A|V \rangle = V + AV + \cdots + A^{d-1}V$$

**Demonstração:** A existência de um menor subespaço com tal propriedade é garantida pelo fato de que  $\mathbb{R}^d$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^d$  contendo  $V$  e invariante por  $A$ . Além disso, a interseção de todos os subespaços com esta propriedade ainda goza da mesma.

Como  $V \subset \langle A|V \rangle$  e  $\langle A|V \rangle$  é  $A$ -invariante, segue que  $A^k V \subset \langle A|V \rangle$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e portanto, sendo  $\langle A|V \rangle$  um subespaço vetorial, temos que

$$V + AV + \cdots + A^{d-1}V \subset \langle A|V \rangle.$$

Para a inclusão contrária, como  $V \subset V + AV + \cdots + A^{d-1}V$ , basta mostrarmos que  $V + AV + \cdots + A^{d-1}V$  é  $A$ -invariante. Seja  $\chi_A$  o polinômio característico de  $A$ , o qual é dado por

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1z + a_0,$$

onde  $I$  denota a matriz identidade  $d \times d$  e os coeficientes  $a_i \in \mathbb{R}$ . Utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton temos que

$$\chi_A(A) = A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$

e portanto

$$A^d = -a_{d-1}A^{d-1} - \cdots - a_1A - a_0I.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A(V + AV + \cdots + A^{d-1}V) &= AV + A^2V + \cdots + A^dV \\ &= AV + A^2V + \cdots + (-a_{d-1}A^{d-1} - \cdots - a_1A - a_0I)V \\ &\subset AV + A^2V + \cdots + A^{d-1}V + (V + AV + \cdots + A^{d-1}V) \\ &= V + AV + \cdots + A^{d-1}V \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. □

Para  $t > 0$ , definamos a seguinte matriz sobre  $\mathbb{R}^d$ , a qual será muito útil para a prova dos próximos resultados:

$$W_t := \int_0^t e^{\tau A} B B^T e^{\tau A^T} d\tau,$$

onde  $A^T$  e  $B^T$  denotam as transpostas das matrizes  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Podemos verificar que  $W_t$  é simétrica ( $W_t^T = W_t$ ) e positiva semi-definida ( $x^T W_t x \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ).

**Lema 3.3.** *Para todo  $t > 0$  tem-se que  $\langle A|V \rangle = \text{Im}(W_t)$ .*

**Demonstração:** É suficiente mostrar que os complementos ortogonais coincidem, ou seja, que  $\langle A|V \rangle^\perp = (\text{Im}(W_t)^\perp)$ . Seja  $x \in \langle A|V \rangle^\perp$ , então  $x^T A^k B = 0$ , para todo  $k = 0, 1, \dots$ , uma vez que  $\langle (x^T A^k B)^T, y \rangle = x^T A^k B y = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $k = 0, 1, \dots$ , pelo fato de  $A^k B y \in \langle A|V \rangle$ . Consequentemente

$$x^T e^{At} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^T t^k A^k B = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Logo  $x^T W_t = 0$ . Assim, se  $z = W_t y \in \text{Im}(W_t)$ , então

$$\langle x, z \rangle = \langle x, W_t y \rangle = x^T W_t y = 0,$$

mostrando que  $x \in (\text{Im}(W_t))^\perp$ .

Seja agora  $x \in (\text{Im} W_t)^\perp$  para algum  $t > 0$ . Então

$$0 = \langle x, W_t x \rangle = x^T W_t x = \int_0^t |B^T e^{\tau A^T} x|^2 d\tau$$

e portanto

$$x^T e^{\tau A} B = 0 \quad \text{para todo } \tau \geq 0. \quad (3.4)$$

Em particular para  $\tau = 0$  temos  $x^T B = 0$ . Sucessivas derivações em (3.4) e avaliando em  $\tau = 0$  nos dá

$$x^T A B = x^T A^2 B = \dots = x^T A^{d-1} B = 0.$$

Logo, se  $B y_1 + A B y_2 + \dots + A^{d-1} B y_d \in \text{Im} B + A \text{Im} B + \dots + A^{d-1} \text{Im} B = \langle A | \text{Im} B \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \langle x, B y_1 + A B y_2 + \dots + A^{d-1} B y_d \rangle &= x^T (B y_1 + A B y_2 + \dots + A^{d-1} B y_d) \\ &= \underbrace{x^T B}_{=0} y_1 + \underbrace{x^T A B}_{=0} y_2 + \dots + \underbrace{x^T A^{d-1} B}_{=0} y_d \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto  $x \in (\text{Im} B + A \text{Im} B + \dots + A^{d-1} \text{Im} B)^\perp = (\langle A | \text{Im} B \rangle)^\perp$ , donde segue a igualdade.

□

O próximo teorema caracteriza o conjunto  $\mathcal{R}$  em termos do par  $(A, B)$ .

**Teorema 3.4.** *O sistema (3.3) satisfaz*

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} = \text{Im}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{d-1} B] = \langle A | \text{Im} B \rangle.$$

A notação  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  representa a matriz  $d \times (dm)$  cujas colunas são formadas pelas colunas de  $B, AB, \dots, A^{d-1}B$ , consecutivamente. Esta matriz será chamada de matriz de Kalman e o subespaço  $\text{Im}[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B] \subset \mathbb{R}^d$  de espaço de Kalman.

**Demonstração:** A última igualdade segue do Lema 3.2. Vamos mostrar apenas que  $\mathcal{R} = \langle A|\text{Im}B \rangle$ , a igualdade  $\mathcal{C} = \langle A|\text{Im}B \rangle$  segue de maneira análoga.

Seja  $x \in \mathcal{R}$ , então existe  $u \in \mathcal{U}$  e  $t > 0$  com  $x = \varphi(t, 0, u)$ . Tomando  $\tau \in [0, t]$  qualquer, como  $A^k \text{Im}B \subset \langle A|\text{Im}B \rangle$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ , então  $\frac{(t-\tau)^k}{k!} A^k B u(\tau) \in \langle A|\text{Im}B \rangle$ , e portanto

$$e^{(t-\tau)A} B u(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} A^i B u(\tau) \in \langle A|\text{Im}B \rangle.$$

Dessa forma, segue da definição da integral de Riemann e do fato de que todo subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$  é fechado que

$$x = \varphi(t, 0, u) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau \in \langle A|\text{Im}B \rangle.$$

Para a inclusão contrária, considere  $x \in \langle A|\text{Im}B \rangle$ . Pelo Lema 3.2 existe  $z \in \mathbb{R}^d$  com

$$x = W_t z = \int_0^t e^{As} B B^T e^{A^T s} z ds.$$

Considere o controle  $u \in \mathcal{U}$  dado por

$$u(\tau) = B^T e^{A^T(t-\tau)} z \quad \text{para } t \in [0, t].$$

Assim, fazendo a mudança  $s = t - \tau$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0, u) &= \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{(t-\tau)A} B B^T e^{A^T(t-\tau)} z d\tau \\ &= \int_t^0 e^{sA} B B^T e^{sA^T} z (-ds) \\ &= \int_0^t e^{sA} B B^T e^{sA^T} z ds \\ &= W_t z \\ &= x \end{aligned}$$

portanto  $x \in \mathcal{R}(t)$ .  $\square$

O seguinte resultado segue imediatamente do teorema anterior e caracteriza a controlabilidade completa do sistema de controle linear com controles irrestritos em termos do par  $(A, B)$ . Por vezes, o sistema de controle linear com  $U = \mathbb{R}^m$  será denotado pelo par  $(A, B)$ , uma vez que ele fica completamente determinado pelas matrizes  $A$  e  $B$ .

**Teorema 3.5.** *Para o sistema (3.3), o conjunto dos pontos atingíveis a partir da origem satisfaz  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^d$  se, e somente se, a matriz de Kalman  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  possui posto  $d$ . Neste caso, o sistema (ou também o par  $(A, B)$ ) é chamado completamente controlável.*

**Demonstração:** Se  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^d$ , então pelo teorema anterior  $\text{Im}[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B] = \mathbb{R}^d$ , ou seja, a matriz  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  tem posto  $d$ . Reciprocamente, se  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  possui posto  $d$ , então  $\mathcal{R} = \text{Im}[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B] = \mathbb{R}^d$ .  $\square$

**Exemplo 3.6.** *O pêndulo linearizado (com amortecimento  $k \geq 0$ ) é descrito por*

$$\ddot{\phi}(t) - k\dot{\phi}(t) - \phi(t) = u(t)$$

ou fazendo  $x_1 = \phi$  e  $x_2 = \dot{\phi}$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

A matriz de Kalman com  $d = 2$  é

$$[B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

a qual possui posto 2, portanto o sistema é completamente controlável.

**Exemplo 3.7.** *Assuma que o corpo de um avião está inclinado em  $\phi$  radianos (seu ângulo de inclinação) com respeito à horizontal. Ele está voando a uma velocidade constante (não nula) de  $c$  metros por segundo e sua trajetória de vôo forma um ângulo de  $\alpha$  radianos com a horizontal (se  $\alpha > 0$ , o avião está ganhando altitude e caso  $\alpha < 0$ , então ele está perdendo altitude). Denotando por  $h$  a altura do avião em metros e assumindo que os ângulos são pequenos, as quantidades acima referidas estão relacionadas pelas equações*

diferenciais linearizadas:

$$\dot{\alpha} = a(\phi - \alpha)$$

$$\ddot{\phi} = -\omega(\phi - \alpha - bu)$$

$$\dot{h} = c\alpha$$

onde  $\omega > 0$  é uma constante representando uma frequência natural de oscilação e  $a, b$  são constantes positivas. O controle  $u$  é proporcional à posição dos elevadores (ver figura 3.1). (Elevadores são superfícies móveis localizados na cauda da aeronave. Um modelo mais completo sobre as questões espaciais e de orientação do avião exigiria incluir outras superfícies: Por exemplo, o leme, também na cauda, proporciona um controle direcional e os ailerons nas asas criam torques opostos para afetar a atitude lateral do avião. Além disso, o impulso do motor afeta a velocidade).

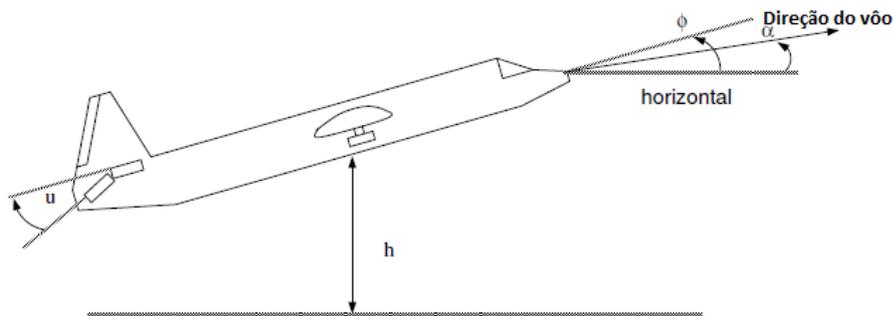


Figura 3.1:

Podemos modelar o sistema acima da seguinte forma: com  $d = 4$  e  $m = 1$ , faça  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \phi$ ,  $x_3 = \dot{\phi}$  e  $x_4 = h$ . Obtemos com isso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} u$$

o qual é um sistema linear. Após cálculos elementares, podemos ver que a matriz de Kalman  $[B \ AB \ A^2B \ A^3B]$  do sistema, com

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -ab & a^2b \\ 0 & -b & 0 & \omega^2b \\ -b & 0 & \omega^2b & -\omega^2ab \\ 0 & 0 & 0 & -abc \end{bmatrix}$$

a qual possui posto 4, logo este sistema é controlável.

A fim de obtermos uma caracterização da controlabilidade do par  $(A, B)$  em termos dos autovalores da matriz  $A$ , precisamos do seguinte resultado.

**Lema 3.8.** *Assuma que o par  $(A, B)$  não seja controlável, com  $\dim \mathcal{R} = r < d$ . Então existe uma matriz  $d \times d$  inversível  $T$  tal que as matrizes  $\tilde{A} = T^{-1}AT$  e  $\tilde{B} = T^{-1}B$  têm a forma de blocos*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{r \times (d-r)}$ ,  $A_3 \in \mathbb{R}^{(d-r) \times (d-r)}$  e  $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ . Além disso, o par  $(A_1, B_1)$  é controlável em  $\mathbb{R}^r$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{S}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^d$  tal que

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$$

Sejam  $\{v_1, \dots, v_r\}$  uma base de  $\mathcal{R}$  e  $\{w_1, \dots, w_{d-r}\}$  uma base de  $\mathcal{S}$ . Assim  $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{d-r}\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^d$ . Considere

$$T := [v_1 \ \dots \ v_r \ w_1 \ \dots \ w_{d-r}].$$

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= T^{-1}A[v_1 \ \dots \ v_r \ w_1 \ \dots \ w_{d-r}] \\ &= [T^{-1}Av_1 \ \dots \ T^{-1}Av_r \ T^{-1}Aw_1 \ \dots \ T^{-1}Aw_{d-r}]. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\mathcal{R}$  é  $A$ -invariante, existem  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  tais que  $Av_i = \sum_{j=1}^r A_{ij}v_j + \sum_{j=r+1}^d A_{ij}w_{j-r} \in \mathcal{R}$ , logo  $\alpha_{ij} = 0$  se  $i > r$  e  $j \leq r$ , de onde segue que  $Av_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}v_j$ , e

portanto  $T^{-1}Av_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}T^{-1}v_j = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}e_j$ ,  $1 \leq i \leq r$ , assim

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= T^{-1}A[v_1 \ \dots \ v_r \ w_1 \ \dots \ w_{d-r}] \\ &= [T^{-1}Av_1 \ \dots \ T^{-1}Av_r \ T^{-1}Aw_1 \ \dots \ T^{-1}Aw_{d-r}] \\ &= \left[ \sum_{j=1}^r \alpha_{1j}e_j \ \dots \ \sum_{j=1}^r \alpha_{rj}e_j \ T^{-1}Aw_1 \ \dots \ T^{-1}Aw_{d-r} \right], \end{aligned}$$

mostrando que  $\tilde{A}$  é da forma desejada. Semelhantemente, se denotarmos por  $b_1, \dots, b_m$  as colunas da matriz  $B$ , então para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  temos  $b_i \in \text{Im}B \subset \mathcal{R}$ , logo existem  $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq r$ , tais que

$$b_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij} v_j + 0w_1 + \dots + 0w_{d-r},$$

portanto

$$T^{-1}b_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij} T^{-1}v_j = \sum_{j=1}^r \beta_{ij} e_j, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\},$$

com isso,

$$\begin{aligned} T^{-1}B &= [T^{-1}b_1 \quad \dots \quad T^{-1}b_m] \\ &= \left[ \sum_{j=1}^r \beta_{1j} e_j \quad \dots \quad \sum_{j=1}^r \beta_{mj} e_j \right], \end{aligned}$$

mostrando que  $\tilde{B} = T^{-1}B$  tem a forma desejada. Nos resta mostrar que o par  $(A_1, B_1)$  é controlável. Para isto, note que

$$\begin{aligned} r &= \text{posto}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{r-1}B \quad \dots \quad A^{d-1}B] \\ &= \text{posto}[T^{-1}B \quad T^{-1}ATT^{-1}B \quad \dots \quad T^{-1}A^{r-1}TT^{-1}B \quad \dots \quad T^{-1}A^{d-1}TT^{-1}B] \\ &= \text{posto}[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{r-1}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{d-1}\tilde{B}] \\ &= \text{posto} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{r-1} B_1 & \dots & A_1^{d-1} B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{posto}[B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{r-1} B_1 \quad \dots \quad A_1^{d-1} B_1] \end{aligned}$$

Entretanto, se tomarmos o polinômio característico da matriz  $(r \times r)$   $A_1$ , podemos ver (pelo Teorema de Cayley-Hamilton) que para cada inteiro positivo  $s$  tal que  $r \leq s < d$ , existem  $\alpha_{s,i} \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  tais que

$$A_1^s = \alpha_{s,r-1} A_1^{r-1} + \dots + \alpha_{s,1} A_1 + \alpha_{s,0} I_{r \times r},$$

logo

$$A_1^s B_1 = \alpha_{s,r-1} A_1^{r-1} B_1 + \dots + \alpha_{s,1} A_1 B_1 + \alpha_{s,0} B_1,$$

mostrando que  $A_1^s B_1$ ,  $r \leq s < d$ , é combinação linear de  $B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{r-1} B_1$ .

Portanto

$$\begin{aligned} r &= \text{posto}[B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{r-1} B_1 \quad \dots \quad A_1^{d-1} B_1] \\ &= \text{posto}[B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{r-1} B_1], \end{aligned}$$

de onde segue que  $(A_1, B_1)$  é controlável.  $\square$

Conforme as notações introduzidas no lema acima, fazendo a mudança de variáveis  $x(t) = Ty(t)$ , o sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  pode ser escrito como  $T\dot{y}(t) = ATy(t) + Bu(t)$ , de onde segue que

$$\dot{y}(t) = T^{-1}ATy(t) + T^{-1}Bu(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}u(t), \quad (3.5)$$

a qual é chamada de decomposição de controlabilidade de Kalman. Se escrevermos  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  com  $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$  e  $y_2(t) \in \mathbb{R}^{d-r}$ , então (3.5) ainda pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) &= A_1y_1(t) + A_2y_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}_2(t) &= A_3y_2(t) \end{cases}$$

ou ainda como

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.6)$$

Como o polinômio característico de uma matriz é invariante por mudança de coordenadas, temos que  $\chi_A(z) = \det(zI - A) = \det(zI - \tilde{A}) = \chi_{\tilde{A}}(z)$ . Porém,  $\chi_{\tilde{A}}$  pode ser decomposto como  $\chi_{\tilde{A}}(z) = \det(zI - A_1)\det(zI - A_3) = \chi_{A_1}(z)\chi_{A_3}(z)$ . Denotemos os polinômios característicos de  $A_1$ ,  $\chi_{A_1}$ , e de  $A_3$ ,  $\chi_{A_3}$  por  $\chi_c$  e  $\chi_u$ , respectivamente. Note que  $A_1$  é a matriz que representa a restrição de  $A$  a  $\mathcal{R}$ , portanto  $\chi_c$  não depende da escolha da base de  $\mathcal{R}$ . Se  $r = 0$  convencionamos que  $\chi_c = 1$ .

**Definição 3.9.** *Os polinômios  $\chi_c$  e  $\chi_u$  são chamados, respectivamente, de parte controlável e não-controlável do polinômio característico  $\chi_A$  (com respeito ao par  $(A, B)$ ).*

Com isso, obtemos o seguinte critério de controlabilidade, que na literatura é conhecido como Critério de Hautus .

**Teorema 3.10.** *Para o sistema () as seguintes condições são equivalentes:*

- i) o par  $(A, B)$  é controlável;*
- ii)  $\text{posto}[zI - A \ B] = d$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ ;*
- iii)  $\text{posto}[zI - A \ B] = d$ , para todo autovalor  $z$  de  $A$ .*

**Demonstração:** É claro que (ii) implica em (iii). Para mostrar que (iii) implica em (ii) considere  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z$  não é autovalor de  $A$  (pois caso contrário não há o que provar).

Dessa forma, a submatriz  $[zI - A]$  de ordem  $d \times d$  da matriz  $d \times (d + m)$   $[zI - A \ B]$  tem posto  $d$ , ou seja,  $\det[zI - A] \neq 0$ , mostrando que  $\text{posto}[zI - A \ B] = d$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . É bom observar que como a controlabilidade do par  $(A, B)$  é caracterizada por uma condição de posto matricial e, portanto, pela não-nulidade de determinantes de certas submatrizes, podemos concluir que o par  $(A, B)$  é controlável se, e somente se, é controlável sobre o corpo  $\mathbb{C}$ . Assim, podemos assumir que estamos trabalhando sobre o corpo  $\mathbb{C}$ .

Mostraremos agora que (i) implica em (ii). Suponha que  $\text{posto}[zI - A \ B] < d$  para algum  $z \in \mathbb{C}$ . Então existe  $p \in \mathbb{C}^d$  não nulo tal que  $p$  é ortogonal a  $\text{Im}[zI - A \ B]$ , isto é,  $p^T A = zp^T$  ( $p$  é um autovetor à esquerda de  $A$  associado ao autovalor  $z$ ) e  $p^T B = 0$  devido às seguintes equivalências

$$\begin{aligned} p \text{ é ortogonal a } \text{Im}[zI - A \ B] &\Leftrightarrow p \in (\text{Im}[zI - A \ B])^\perp \\ &\Leftrightarrow p \in (\text{Ker}[zI - A \ B]^T) \\ &\Leftrightarrow [zI - A \ B]^T p = 0 \\ &\Leftrightarrow p^T [zI - A \ B] = 0 \\ &\Leftrightarrow p^T [zI - A] \text{ e } p^T B = 0 \\ &\Leftrightarrow p^T A = zp^T \text{ e } p^T B = 0. \end{aligned}$$

Por indução podemos verificar que  $p^T A^k B = z^k p^T B = 0$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ . Dessa forma, dado  $y = Bx_1 + ABx_2 + \dots + A^{d-1}Bx_d \in \text{Im}[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq i \leq d$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle p, y \rangle &= \langle p, Bx_1 + ABx_2 + \dots + A^{d-1}Bx_d \rangle \\ &= \langle p, Bx_1 \rangle + \langle p, ABx_2 \rangle + \dots + \langle p, A^{d-1}Bx_d \rangle \\ &= p^T Bx_1 + p^T ABx_2 + \dots + p^T A^{d-1}Bx_d \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto significa que  $p$  é ortogonal ao subespaço de Kalman, ou seja  $\text{posto}[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B] < d$ , mostrando que  $(A, B)$  não é controlável.

Por fim, vamos mostrar que (ii) implica em (i). Suponha que o par  $(A, B)$  não seja controlável. Então podemos escrever o sistema (3.3) da forma (3.6) com  $r < d$ . Considere  $z$  um autovalor de  $A_3^T$  com autovetor  $q_1 \in \mathbb{C}^{d-r}$ . Note que  $z$  é também um

autovalor de  $\tilde{A}$  com autovetor à esquerda  $q := \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$  e  $q^T \tilde{B} = 0$ . Portanto  $p := (T^T)^{-1}q \neq 0$ , onde  $T$  é dada no Lema 3.8, satisfaz

$$p^T[(zI - A)T \ B] = q^T T^{-1}[(zI - T\tilde{A}T^{-1})T \ T\tilde{B}] = [zq^T - q^T \tilde{A} \ q^T \tilde{B}] = 0,$$

mostrando que  $\text{posto}[(zI - A)T \ B] < d$ . Como o espaço gerado pelas colunas de  $[(zI - A)T \ B]$  coincide com o espaço gerado pelas colunas de  $[zI - A \ B]$  (pois  $T$  é inversível), então

$$d > \text{posto}[(zI - A)T \ B] = \text{posto}[zI - A \ B],$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Agora, vamos estabelecer a seguinte conexão entre os conceitos concernentes à controlabilidade para o caso do sistema de controle linear.

**Teorema 3.11.** *Para o sistema de controle linear, são equivalentes:*

- i) o sistema satisfaz a condição do posto de acessibilidade;*
- ii) o sistema é localmente acessível;*
- iii) o sistema é acessível;*
- iv) o sistema é controlável.*

**Demonstração:** Temos que (i) implica em (ii) pelo Teorema 2.12. Além disso, (ii) implica em (iii) pela Observação 2.14. Suponha agora que o sistema seja acessível, isto é, que  $\text{int}(\mathcal{O}^+(x)) \neq \emptyset$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , em particular  $\text{int}\mathcal{R} = \text{int}(\mathcal{O}^+(0)) \neq \emptyset$ . Como  $\mathcal{R}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$ , temos que  $\text{int}\mathcal{R} \neq \emptyset$  se, e somente se,  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^d$ , ou seja, o sistema é controlável. Com isso, provamos que (iii) implica (iv). Por fim, basta mostrarmos que (iv) implica em (i). Para isto, se o sistema é controlável, então a matriz de Kalman  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  tem posto  $d$ . Dessa forma, dado  $x \in \mathbb{R}^d$  qualquer, temos que

$$[Ax \ B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$$

também possui posto  $d$ . Ora, vimos na Observação 2.14 que a condição acima equivale a dizer que a condição do posto de acessibilidade no caso do sistema de controle linear é verificada, como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação 3.12.** Note que se o sistema linear  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  com  $U = \mathbb{R}^m$  é controlável, então o sistema linear com controle restrito  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^m$  é compacto, convexo e  $0 \in \text{int } U$ , satisfaz a condição do posto de acessibilidade, uma vez que esta condição depende basicamente das entradas das matrizes  $A$  e  $B$  e de um ponto  $x \in \mathbb{R}^d$  fixado (porém arbitrário). A demonstração deste fato é a mesma feita na implicação (iv)  $\Rightarrow$  (i) do teorema anterior.

Para finalizar esta seção, vamos verificar que conjuntos de controle do sistema (3.3).

**Teorema 3.13.** O conjunto  $\mathcal{R}$  é um conjunto de controle invariante do sistema (3.3).

**Demonstração:** Mostraremos inicialmente que  $\mathcal{R}$  satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da definição de conjunto de controle. Para mostrarmos (i), tome  $x \in \mathcal{R}$  e considere qualquer  $u \in \mathcal{U}$ . Como as soluções de (3.3) satisfazem

$$\varphi(t, x, u) = \varphi(t, x, 0) + \varphi(t, 0, u)$$

e  $\varphi(t, 0, u) \in \mathcal{R}$  por definição, nos resta mostrar que  $\varphi(t, x, 0) \in \mathcal{R}$  e, sendo  $\mathcal{R}$  um subespaço vetorial, concluiremos que  $\varphi(t, x, u) \in \mathcal{R}$ . Sabemos, pelo Teorema 3.4, que  $\mathcal{R} = \langle A | \text{Im} B \rangle$ . Como  $x \in \mathcal{R}$ , então  $A^k x \in \mathcal{R}$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ , pois  $\mathcal{R}$  é  $A$ -invariante. Portanto

$$\varphi(t, x, 0) = e^{tA}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i x \in \mathcal{R}.$$

Provaremos agora que  $\mathcal{R}$  satisfaz (ii). De fato, dados quaisquer  $x, y \in \mathcal{R}$ , como  $\mathcal{R} = \mathcal{C}$  (ver Teorema 3.4), existem  $t_1 \geq 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tais que  $0 = \varphi(t_1, x, u_1)$ . Além disso, existem  $t_2 \geq 0$  e  $u_2 \in \mathcal{U}$  tais que  $y = \varphi(t_2, 0, u_2)$ . Assim

$$y = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x, u_1), u_2) = \varphi(t_2 + t_1, x, u_1 \wedge_{t_1} u_2) \in \mathcal{O}^+(x) \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x)),$$

mostrando que  $\mathcal{R} \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(x))$ .

Para mostrarmos a maximalidade, se  $D' \supset \mathcal{R}$  satisfaz (i) e (ii), como  $0 \in \mathcal{R} \subset D'$ , segue da propriedade (ii) e do fato de  $\mathcal{R}$  ser um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$  (portanto  $\mathcal{R}$  é fechado em  $\mathbb{R}^d$ ) que

$$\mathcal{R} \subset D' \subset \text{fe}(\mathcal{O}^+(0)) = \text{fe}(\mathcal{R}) = \mathcal{R},$$

provando que  $D' = \mathcal{R}$ . Assim  $\mathcal{R}$  é um conjunto de controle.

Por fim, note que para todo  $x \in \mathcal{R} = \mathcal{O}^+(0)$  tem-se  $\mathcal{O}^+(x) \subset \mathcal{O}^+(0) = \mathcal{R}$ , logo

$$fe(\mathcal{O}^+(x)) \subset fe(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

Como já temos que  $fe(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$ , segue então que  $\mathcal{R} = fe(\mathcal{R}) = fe(\mathcal{O}^+(x))$ , para todo  $x \in \mathcal{R}$ , mostrando que  $\mathcal{R}$  é um conjunto de controle invariante.  $\square$

Observe entretanto que  $\mathcal{R}$  não é o único conjunto de controle de um sistema de controle linear. De fato, considere o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \text{com } u(t) \in \mathbb{R}.$$

Após cálculos elementares, podemos ver que para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi(t, (x_0, y_0), u) = (x_0, y_0 + \int_0^t u(s) ds)$$

e com isso

$$\mathcal{O}^+(x_0, y_0) = \{(x_0, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Dessa forma, se considerarmos  $D_{(x_0, y_0)} = \mathcal{O}^+(x_0, y_0)$ , temos que  $D_{(x_0, y_0)}$  é um conjunto de controle, para cada  $(x_0, y_0)$  fixado. Com efeito, a condição (i) é válida por definição de  $D_{(x_0, y_0)}$ . Sejam agora  $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in D_{(x_0, y_0)}$ . Então  $v_1 = w_1 = x_0$ . Considere  $t = 1$  e o controle constante  $u(s) = w_2 - v_2$ , então

$$\varphi(1, v, u) = (v_1, v_2 + \int_0^1 u(s) ds) = (x_0, v_2 + \int_0^1 (w_2 - v_2) ds) = (x_0, w_2) = w,$$

ou seja,  $w \in \mathcal{O}^+(v)$  e pela arbitrariedade de  $w$  e de  $v$  segue que  $D_{(x_0, y_0)} \subset \mathcal{O}^+(v)$ , para todo  $v \in D_{(x_0, y_0)}$ . Por fim, para mostrar a maximalidade de  $D_{(x_0, y_0)}$ , considere  $D'$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  contendo  $D_{(x_0, y_0)}$  e satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 2.16. Seja  $w \in D_{(x_0, y_0)} \subset D'$ , então  $\mathcal{O}^+(w) \subset \mathcal{O}^+(x_0, y_0)$ . Logo

$$D_{(x_0, y_0)} = \mathcal{O}^+(x_0, y_0) \subset D' \subset fe(\mathcal{O}^+(w)) \subset fe(\mathcal{O}^+(x_0, y_0)) = fe(D_{(x_0, y_0)}) = D_{(x_0, y_0)},$$

pois  $D_{(x_0, y_0)}$  é fechado, e portando  $D' = D_{(x_0, y_0)}$ . Assim, temos uma quantidade não enumerável de conjuntos de controle.

## 3.2 Controlabilidade do Sistema Linear com controle restrito

Consideraremos agora o sistema linear em  $\mathbb{R}^d$  com controles restritos da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), u \in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U; \text{ } u \text{ é localmente integrável}\}, \quad (3.7)$$

com  $U \subset \mathbb{R}^m$  compacto, convexo e  $0 \in \text{int } U$ . Note que, em geral, um sistema de controle linear pode ser completamente controlável quando  $U = \mathbb{R}^m$  (sem restrição de controle), enquanto que se restringirmos a imagem dos controles a um subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  o sistema pode passar a não ser controlável, como podemos ver no seguinte exemplo.

**Exemplo 3.14.** *Considere o sistema de controle linear  $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$  em  $\mathbb{R}$  ( $d = m = 1$ ). Note que se  $U$  coincidissem com  $\mathbb{R}$ , o par  $(A, B) = (-1, 1)$  seria controlável, uma vez que a matriz de Kalman seria a matriz  $1 \times 1$ ,  $[B] = [1]$ , a qual tem posto 1. Entretanto, se tomarmos  $U = [-1, 1]$ , o sistema não é controlável. Com efeito, suponha que podemos transferir o estado  $x = 0$  ao estado  $z = 2$ . Então existiria  $u \in \mathcal{U}$  e  $t > 0$  tal que  $\varphi(t, x, u) = z$ . Porém,*

$$2 = z = \varphi(t, x, u) = \int_0^t e^{-(t-s)} u(s) ds,$$

e como  $u(s) \in [-1, 1]$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , temos que

$$-(1 - e^{-t}) = - \int_0^t e^{-(t-s)} ds \leq 2 \leq \int_0^t e^{-(t-s)} ds = 1 - e^{-t}.$$

A desigualdade  $2 \leq 1 - e^{-t}$  implica que  $e^{-t} \leq -1$ , o que é um absurdo. Portanto o sistema com controle restrito não é controlável.

A fim de não causarmos confusão com relação ao conjunto dos pontos atingíveis em tempo  $T > 0$  a partir de  $0 \in \mathbb{R}^d$ , denotaremos por  $\mathcal{R}_U(T)$  ao conjunto

$$\mathcal{O}_T^+(0) \{x \in \mathbb{R}^d; \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(T, 0, u) = x\}$$

e por  $\mathcal{R}_U := \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}_U(T) = \mathcal{O}^+(0)$  a órbita positiva a partir de  $0 \in \mathbb{R}^d$ . Analogamente denotamos o conjunto dos pontos conduzíveis à origem de  $\mathbb{R}^d$  em tempo  $T > 0$  por

$$\mathcal{C}_U(T) := \{x \in \mathbb{R}^d; \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ com } \varphi(T, x, u) = 0\} = \mathcal{O}_T^-(0)$$

e à órbita negativa de  $0 \in \mathbb{R}^d$  por  $\mathcal{C}_U := \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{C}_U(T) = \mathcal{O}^-(0)$ . Note que se tomarmos  $U = \mathbb{R}^m$ , então  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^m}(T) = \mathcal{R}(T)$  e  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{R}$ . Do mesmo modo  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}(T) = \mathcal{C}(T)$  e  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{C}$

Inicialmente, vamos estabelecer o seguinte resultado que será usado para caracterizar os conjuntos de controle do sistema (3.7):

**Teorema 3.15.** *Seja  $U$  uma vizinhança limitada de  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Então  $\mathcal{R}_U = \mathbb{R}^d$  se, e somente se,*

- a) o par  $(A, B)$  é controlável;
- b) todos os autovalores da matriz  $A$  possuem parte real não negativa.

Para provarmos o Teorema 3.15, precisamos de alguns resultados preliminares. Vamos começar com uma propriedade do conjunto  $\mathcal{R}_U(T)$  dado no seguinte lema:

**Lema 3.16.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $S, T \geq 0$ . Então*

$$\mathcal{R}_U(T) + e^{TA}\mathcal{R}_U(S) = \mathcal{R}_U(S + T).$$

**Demonstração:** Sejam

$$x_1 = \int_0^T e^{(T-s)A} B u_1(s) ds \in \mathcal{R}_U(T) \quad \text{e} \quad x_2 = \int_0^S e^{(S-s)A} B u_2(s) ds \in \mathcal{R}_U(S).$$

com controles  $u_i : \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $i = 1, 2$ . Fazendo a mudança de variáveis  $\tau \mapsto \tau - S$ , podemos escrever

$$x_1 = \int_S^{S+T} e^{(S+T-s)A} B u_1(s - S) ds.$$

Note que  $e^{TA}x_2 = \int_0^S e^{(S+T-s)A} B u_2(s) ds$ , logo

$$x_1 + e^{TA}x_2 = \int_S^{S+T} e^{(S+T-s)A} B u_1(s - S) ds + \int_0^S e^{(S+T-s)A} B u_2(s) ds = \int_0^{S+T} e^{(S+T-s)A} B w(s) ds \in \mathcal{R}_U(S+T)$$

onde

$$w(t) = \begin{cases} u_2(s), & \text{se } s \in [0, S] \\ u_1(s - S), & \text{se } s \in [S, S + T] \end{cases}$$

Portanto  $\mathcal{R}_U(T) + e^{TA}\mathcal{R}_U(S) \subset \mathcal{R}_U(S+T)$ . Reciprocamente, seja  $x = \int_0^{S+T} e^{(S+T-s)A} B u(s) ds \in$

$\mathcal{R}_U(S + T)$ . Fazendo  $\tau \mapsto \tau + S$ , temos

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{S+T} e^{(S+T-s)A} Bu(s) ds \\ &= \int_S^{S+T} e^{(S+T-s)A} Bu(s) ds + \int_0^S e^{(S+T-s)A} Bu(s) ds \\ &= \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s + S) ds + e^{TA} \int_0^S e^{(S-s)A} Bu(s) ds \in \mathcal{R}_U(T) + e^{TA} \mathcal{R}_U(S). \end{aligned}$$

Isso mostra que  $\mathcal{R}_U(S + T) \subset \mathcal{R}_U(T) + e^{TA} \mathcal{R}_U(S)$ , de onde segue a igualdade desejada.

□

**Corolário 3.17.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $T \geq 0$  e um número inteiro  $q \geq 1$ . Então*

$$\mathcal{R}_U(T) + e^{TA} \mathcal{R}_U(T) + \dots + e^{(q-1)TA} \mathcal{R}_U(T) = \mathcal{R}_U(qT).$$

**Demonstração:** A demonstração será feita por indução sobre  $q$ . Note que para  $q = 1$  o resultado é óbvio. Suponha que a igualdade seja válida para  $q > 1$ , isto é,

$$\mathcal{R}_U(T) + e^{TA} \mathcal{R}_U(T) + \dots + e^{(q-1)TA} \mathcal{R}_U(T) = \mathcal{R}_U(qT)$$

Então pelo lema anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_U(T) + e^{TA} \mathcal{R}_U(T) + \dots + e^{(q-1)TA} \mathcal{R}_U(T) + e^{qTA} \mathcal{R}_U(T) &= \mathcal{R}_U(qT) + e^{qTA} \mathcal{R}_U(T) \\ &= \mathcal{R}_U(qT + T) \\ &= \mathcal{R}_U((q + 1)T), \end{aligned}$$

mostrando que a igualdade é válida para todo inteiro  $q \geq 1$ . □

**Proposição 3.18.** *Se  $U \subset \mathbb{R}^m$  é convexo e  $0 \in U$ , então  $\mathcal{R}_U$  é convexo. Além disso, se  $(A, B)$  é controlável e  $U \subset \mathbb{R}^m$  é uma vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^m$ , então  $\mathcal{R}_U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração:** Notemos inicialmente que se  $0 \in U$ , então dados  $S > T \geq 0$  temos que  $\mathcal{R}_U(T) \subset \mathcal{R}_U(S)$ . A demonstração deste fato é idêntica à que foi feita no item (i) do Lema 3.1. Assim,  $\mathcal{R}_U$  é a união crescente dos conjuntos  $\mathcal{R}_U(T)$ ,  $T \geq 0$ . Com

isso, se mostrarmos que cada  $\mathcal{R}_U(T)$  é convexo, teremos que  $\mathcal{R}_U$  também será. Sejam  $x, y \in \mathcal{R}_U(T)$  e  $t \in [0, 1]$ . Então existem  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  tais que  $x = \int_0^T e^{(T-s)A} B u_1(s) ds$  e  $y = \int_0^T e^{(T-s)A} B u_2(s) ds$ . Como  $U$  é convexo, temos que  $[(1-t)u_1 + tu_2](s) \in U$ , para todo  $s \in [0, T]$ . Assim

$$\begin{aligned} (1-t)x + ty &= (1-t) \int_0^T e^{(T-s)A} B u_1(s) ds + t \int_0^T e^{(T-s)A} B u_2(s) ds \\ &= \int_0^T e^{(T-s)A} B [(1-t)u_1 + tu_2](s) ds \in \mathcal{R}_U(T), \end{aligned}$$

mostrando que  $\mathcal{R}_U(T)$  é convexo. Portanto  $\mathcal{R}_U$  é convexo.

Assuma agora que o par  $(A, B)$  é controlável e que  $U$  seja uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Provaremos inicialmente que para cada  $T > 0$ ,  $\mathcal{R}_U(T)$  contém uma vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^d$ . Para tanto, fixe  $T > 0$  e considere  $U_0 \subset U$  uma vizinhança convexa de  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Concluiremos a demonstração se mostrarmos que  $0 \in \mathbb{R}^d$  pertence ao interior de  $\mathcal{R}_{U_0}(T)$ , uma vez que  $\mathcal{R}_{U_0}(T) \subset \mathcal{R}_U(T)$ . Por um abuso de notação vamos substituir, para o resto deste parágrafo,  $U$  por  $U_0$  e portanto assumir que  $U$  é também convexo. Seja  $\{e_1, \dots, e_d\}$  uma base de  $\mathbb{R}^d$  e considere  $e_0 = -\sum_{i=1}^d e_i$ . Sendo  $(A, B)$  controlável, para cada  $i = 0, 1, \dots, d$  existem controles  $u_i$  contínuos por partes (que não necessariamente assumem valores em  $U$ ) tais que

$$e_i = \varphi(T, 0, u_i).$$

Considere  $\mu > 0$  tal que  $\frac{1}{\mu}u_i(t) \in U$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $i = 0, 1, \dots, d$  (tal  $\mu$  existe porque  $U$  é uma vizinhança de  $0$  e os  $u_i$ 's são contínuas por partes) e considere

$$u'_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}u_i(t), & \text{se } t \in [0, T] \\ 0, & \text{se } t < 0 \text{ ou } t > T \end{cases}$$

Portanto  $e'_i := \frac{1}{\mu}e_i = \varphi(T, 0, u'_i) \in \mathcal{R}_U(T)$  para cada  $i$ . Tome  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$  tais que  $|\epsilon_i| \leq \frac{1}{2(d+1)}$  para todo  $i$ . Então

$$\frac{\epsilon_1}{\mu}e_1 + \dots + \frac{\epsilon_d}{\mu}e_d = \sum_1^d \left( \frac{1-\epsilon}{d+1} + \epsilon_i \right) e'_i + \left( \frac{1-\epsilon}{d+1} + \epsilon_i \right) e'_0$$

com  $\epsilon = \sum_{i=1}^d \epsilon_i$ . Observe que como  $|\epsilon_i| \leq \frac{1}{2(d+1)}$  para todo  $i$ , esta combinação linear é convexa. Como cada  $e'_i$  pertence a  $\mathcal{R}_U(T)$  e este é convexo, temos que  $\frac{\epsilon_1}{\mu}e_1 + \dots + \frac{\epsilon_d}{\mu}e_d \in$

$\mathcal{R}_U(T)$  para todo  $\epsilon_i$  suficientemente pequeno. Dessa forma, temos que a bola aberta  $B_{\frac{1}{2\mu(d+1)}}(0)$  centrada na origem e de raio  $\frac{1}{2\mu(d+1)}$  está contida em  $\mathcal{R}_U(T)$ . De fato, basta notar que se  $x \in B_{\frac{1}{2\mu(d+1)}}(0)$  é escrito como  $\sum_{i=1}^d x_i e_i$  para alguns  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ , então

$$\max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq \|x\| < \frac{1}{2\mu(d+1)}$$

de onde segue que  $|\mu x_i| = \mu |x_i| \leq \frac{1}{2(d+1)}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , e com isso

$$\sum_{i=1}^d x_i e_i = \sum_{i=1}^d \frac{\mu x_i}{\mu} e_i \in \mathcal{R}_U(T).$$

Com isso, mostramos que existe uma vizinhança  $V$  de 0 tal que  $V \subset \mathcal{R}_U(T)$ .

Finalmente, vamos mostrar que  $\mathcal{R}_U$  é aberto. Sejam  $S > 0$  e uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^d$  de 0 tal que  $V \subset \mathcal{R}_U(S)$ . Tome  $x \in \mathcal{R}_U$ . Queremos mostrar que existe uma vizinhança de  $x$  contida em  $\mathcal{R}_U$ . Considere o controle  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $x = \varphi(T, 0, u)$ . Como a aplicação  $e^{TA}$  é um isomorfismo, temos que  $W := e^{TA}V$  é aberto. Para cada  $y = e^{TA}v \in W$  temos

$$y + x = e^{TA}v + \varphi(T, 0, u) \in \mathcal{O}_T^+(v).$$

Portanto,  $x + W$  é um aberto contido em  $\mathcal{O}_T^+(v) \subset \mathcal{O}^+(v)$ . Mas como  $v \in V \subset \mathcal{R}_U(S) \subset \mathcal{R}_U$ , temos que

$$x = x + 0 \in x + W \subset \mathcal{O}^+(v) \subset \mathcal{R}_U.$$

Desta forma,  $x + W$  é uma vizinhança de  $x$  contida em  $\mathcal{R}$ . □

Para cada autovalor  $\lambda$  de  $A$  e cada inteiro positivo  $k$ , consideremos

$$J_{k,\lambda} = \ker(\lambda I - A)^k$$

(o qual é um subespaço de  $\mathbb{C}^d$ ) e tomemos o conjunto das partes reais

$$J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}} := \operatorname{Re}(J_{k,\lambda}) = \{\operatorname{Re}(v); v \in J_{k,\lambda}\}$$

(que é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$ ). Observe que se  $v \in J_{k,\lambda}$ ,  $v = v_1 + iv_2$ , com  $v_j \in \mathbb{R}^d$ ,  $j = 1, 2$ , então por definição  $v_1 \in J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}^d}$  e, além disso, a parte imaginária  $v_2 \in J_{k,\lambda}$ , pois  $(-iv_2)$  pertence a  $J_{k,\lambda}$ . Temos também que  $J_{0,\lambda} = J_{0,\lambda}^{\mathbb{R}^d} = \{0\}$ .

Seja  $L$  a soma dos diferentes  $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}^d}$  com  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$  e seja  $M$  a soma dos vários espaços  $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}^d}$  com  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . É possível mostrar que cada um destes subespaços é  $A$ -invariante. Da decomposição de Jordan, sabemos que cada elemento de  $\mathbb{C}^d$  pode ser escrito como soma de elementos nos diferentes subespaços  $J_{k,\lambda}$ 's. Tomando então a parte real, podemos escrever  $\mathbb{R}^d$  como a soma direta de  $L$  e  $M$ .

Precisaremos da seguinte observação geral.

**Lema 3.19.** *Se  $C$  é aberto e convexo em  $\mathbb{R}^d$  e  $L$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^d$  contido em  $C$ , então  $C + L = C$ .*

**Demonstração:** Temos que  $C = C + 0 \subset C + L$ . Considere agora  $x \in C$  e  $y \in L$ , então para todo  $\epsilon \neq 0$  tem-se

$$x + y = \frac{1}{1 + \epsilon}[(1 + \epsilon)x] + \left(\frac{\epsilon}{1 + \epsilon}\right)\left[\left(\frac{1 + \epsilon}{\epsilon}\right)y\right]. \quad (3.8)$$

Como  $C$  é aberto  $(1 + \epsilon)x \in C$  para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Sendo  $L$  um subespaço vetorial,  $\left(\frac{1 + \epsilon}{\epsilon}\right)y \in L \subset C$ . Portanto, sendo  $C$  convexo e (3.8) uma combinação linear convexa, temos que  $x + y \in C$ , mostrando que  $C + L \subset C$ , donde segue a igualdade.  $\square$

O principal lema técnico é o que virá na sequência. Para simplificar a notação, fixe um autovalor  $\lambda = \alpha + \beta i$  de  $A$  com  $\alpha \geq 0$  e denote  $J_k^{\mathbb{R}} := J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$ .

**Lema 3.20.** *Assuma que  $(A, B)$  é controlável e  $U \subset \mathbb{R}^m$  é uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Então  $J_k^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{R}_U$  para todo inteiro positivo  $k$ .*

**Demonstração:** Substitua  $U$  por um subconjunto aberto e convexo contendo  $0 \in \mathbb{R}^m$ . O resultado será demonstrado via indução sobre  $k$ . Quando  $k = 0$ , temos que  $J_0^{\mathbb{R}} = \{0\} \subset \mathcal{R}_U$  (basta tomar o controle nulo). Suponha que  $J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{R}_U$  para algum  $k \geq 1$  e tome  $\tilde{v} \in J_{k,\lambda}$ . Escreva  $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + i\tilde{v}_2$ . Devemos mostrar que  $\tilde{v}_1 \in J_k^{\mathbb{R}}$  pertence a  $\mathcal{R}_U$ .

Inicialmente tome  $T > 0$  tal que  $e^{\lambda T j} = e^{\alpha T j}$  para todo  $j = 0, 1, \dots$  (Se  $\beta = 0$  pode-se tomar qualquer  $T > 0$ . Caso contrário tome  $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$ ). Escolha agora  $\delta > 0$  tal que  $v_1 := \delta \tilde{v}_1 \in \mathcal{R}_U(T)$  (pois  $\mathcal{R}_U(T)$  é uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^d$ ). Seja  $v := \delta v$ . Como  $v \in J_{k,\lambda} = \operatorname{Ker}(\lambda I - A)^k$  tem-se que

$$e^{t(A - \lambda I)}v = \left(I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k + \dots\right)v = v + w, \quad (3.9)$$

onde  $w = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t^i}{i!} (\lambda I - A)^i \in J_{k-1}v$ . De (3.9) segue que  $e^{tA}e^{-t\lambda}v = v + w$ , isto é,  $e^{\lambda t}v = e^{tA}v - e^{t\lambda}w$ . Assim

$$e^{\alpha t}v = e^{\lambda t}v = e^{tA}v - e^{t\lambda}w = e^{tA}v - e^{\alpha t}w, \quad (3.10)$$

para todo  $t = Tj$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Decompondo  $w = w_1 + iw_2$  em partes real e imaginária e tomando as partes reais em (3.10) temos

$$e^{\alpha t}v_1 = e^{tA}v_1 - e^{\alpha t}w_1,$$

para todo  $t = Tj$ ,  $j = 0, 1, \dots$ .

Por fim, tome um inteiro  $q \geq \frac{1}{\delta}$ . Então

$$\left( \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha Tj} \right) v_1 = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha Tj} v_1 + w'$$

onde  $w' = - \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha Tj} w_1 \in J_{k-1}^{\mathbb{R}}$ , uma vez que  $w_1 \in J_{k-1}^{\mathbb{R}}$ . Como  $v_1 \in \mathcal{R}_U(T)$ , temos pelo

Corolário 3.17 que  $pv_1 \in \mathcal{R}_U(qT)$ , onde  $p = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha Tj}$ . Por hipótese de indução, temos que  $J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{R}_U$ . Segue do Lema 3.19 que

$$pv_1 \in \mathcal{R}_U(T) + J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{R}_U + J_{k-1}^{\mathbb{R}} = \mathcal{R}_U.$$

Note que como  $\alpha \geq 0$ , tem-se

$$p = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha Tj} \geq \sum_{j=0}^{q-1} 1 = q \geq \frac{1}{\delta}.$$

Portanto  $p\delta\tilde{v}_1 = pv_1 \in \mathcal{R}_U$ . Por outro lado,  $p\delta \geq 1$  implica que

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{p\delta} p\delta\tilde{v}_1 + \left(1 - \frac{1}{p\delta}\right) 0$$

é uma combinação linear convexa. Como  $p\delta\tilde{v}_1$  e  $0$  pertencem a  $\mathcal{R}_U$ , segue da convexidade de  $\mathcal{R}_U$  que  $\tilde{v}_1 \in \mathcal{R}_U$ .  $\square$

**Corolário 3.21.** *Suponha que  $(A, B)$  é controlável e  $U \in \mathbb{R}^m$  é uma vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^m$ . Então  $L \subset \mathcal{R}_U$ .*

**Demonstração:** Como antes, podemos assumir sem perda de generalidade que  $U$  é convexo. Como pelo lema anterior temos que  $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{R}_U$  para todo autovalor  $\lambda$  com parte real não negativa e para todo inteiro positivo  $k$  e além disso  $L$  é a soma de todos os espaços  $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$  com parte real de  $\lambda$  maior do que ou igual a 0, segue que  $L \subset \mathcal{R}_U$ .  $\square$

**Corolário 3.22.** *Suponha que  $(A, B)$  é controlável e  $U \subset \mathbb{R}^m$  é uma vizinhança convexa e limitada da origem. Então existe um subconjunto  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathcal{R}_U = \mathcal{B} + L$  e  $\mathcal{B}$  é limitado, convexo e aberto relativo a  $M$ .*

**Demonstração:** Afirmamos inicialmente que  $\mathcal{R}_U = (\mathcal{R}_U \cap M) + L$ . Com efeito, aplicando o Lema 3.19 e o Corolário 3.21 segue que

$$(\mathcal{R}_U \cap M) + L \subset \mathcal{R}_U + L = \mathcal{R}_U.$$

Por outro lado, dado  $v \in \mathcal{R}_U$ , podemos escrever  $v = x + y$  com  $x \in M$  e  $y \in L$ . Devemos mostrar que  $x \in \mathcal{R}_U$ . Mas  $x = v - y \in \mathcal{R}_U + L = \mathcal{R}_U$  (novamente pelo Lema 3.19), o que conclui a afirmação.

Seja agora  $\mathcal{B} := \mathcal{R}_U \cap M$ . Este conjunto é aberto e convexo em  $M$ , pois  $\mathcal{R}_U$  é aberto e convexo. Nos resta mostrar que  $\mathcal{B}$  é limitado.

Considere a projeção  $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sobre  $M$ , isto é,  $P(x + y) = x$  se  $x \in M$  e  $y \in L$ . Note que  $PA = AP$ , pois como  $L$  e  $M$  são  $A$ -invariantes, temos que dado  $v = x + y \in M \oplus L = \mathbb{R}^d$ , então  $Ax \in M$  e  $Ay \in L$ , logo

$$PAv = P(A(x + y)) = Ax = A(P(x + y)) = APv.$$

Indutivamente temos que  $PA^k = A^kP$  para todo inteiro não negativo  $k$ . Assim  $Pe^{tA} = e^{tA}P$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Escolha  $x \in \mathcal{R}_U \cap M$  qualquer. Como  $x \in \mathcal{R}_U$  existe  $T > 0$  e  $u \in \mathcal{U}$  tal que

$$x = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds.$$

De  $x \in M$ ,  $x = Px$ , logo

$$x = Px = \int_0^T Pe^{(T-s)A} Bu(s) ds = \int_0^T e^{(T-s)A} x(s) ds,$$

onde  $x(s) = PBu(s) \in M \cap PB(U)$  para todo  $s$ . Como a restrição de  $A$  a  $M$  tem seus autovalores com parte real negativa, então (ver [16] Teorema 10 p. 73) existem constantes  $c, \mu > 0$  tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq ce^{-\mu t}\|x\|$$

para todo  $t \geq 0$  e para todo  $x \in M$ . Como  $PB(U)$  é limitado, existe uma constante  $c'$  tal que se  $x \in PB(U)$ ,

$$\|e^{tA}x\| \leq c'e^{-\mu t}$$

para todo  $t \geq 0$ . Logo, para o elemento  $x \in \mathcal{R}_U \cap M$  tomado acima arbitrariamente, temos que

$$\|x\| \leq \int_0^T \|e^{(T-s)A}x(s)\| ds \leq \int_0^T c'e^{-\mu(T-s)} ds = c' \int_0^T e^{-\mu(T-s)} ds = \frac{c'}{\mu}(1 - e^{-\mu T}) \leq \frac{c'}{\mu},$$

provando que  $\mathcal{B}$  é limitado.  $\square$

**Demonstração do Teorema 3.15:** Suponha que  $\mathcal{R}_U = \mathbb{R}^d$ . Como  $\mathbb{R}^d = \mathcal{R}_U \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^d$ , temos que  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^d$ , isto é, o par  $(A, B)$  é controlável, o que mostra (a). Para mostrarmos (b), suponha que existe um autovalor  $\lambda = \alpha + \beta i$  de  $A$  com  $\alpha < 0$ . Então  $L$  é um subespaço próprio de  $\mathbb{R}^d$  e  $M \neq \{0\}$ . Assuma, sem perda de generalidade, que  $U$  é convexo e limitado. Assim pelo Corolário 3.22 temos que  $\mathbb{R}^d = \mathcal{R}_U = L + \mathcal{B} \subsetneq \mathbb{R}^d$ , com  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$  limitado, o que é um absurdo. Logo (b) também é válida.

Reciprocamente, assuma que (a) e (b) sejam válidos. De (b) segue que  $L = \mathbb{R}^d$  e pelo Corolário 3.21 temos que  $\mathbb{R}^d = L \subset \mathcal{R}_U$ , de onde segue que  $\mathcal{R}_U = \mathbb{R}^d$ .  $\square$

Note que dado um sistema de controle  $\dot{x}(t) = X(x(t), u(t))$  como em (1.13) assumindo que as soluções estão definidas sobre todo  $t \in \mathbb{R}$ , se fizermos a substituição  $t \mapsto -t$

**Corolário 3.23.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  uma vizinhança limitada da origem  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Então  $\mathcal{C}_U = \mathbb{R}^d$  se, e somente se,*

a) o par  $(A, B)$  é controlável;

b) a matriz  $A$  não possui autovalores com parte real positiva.

**Demonstração:** Suponha que  $\mathcal{C}_U = \mathbb{R}^d$  e considere o sistema em tempo reverso

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) - Bu(t). \quad (3.11)$$

Denote por  $\mathcal{R}_U^- = \mathcal{O}^+(0)^-$ . Pelo Corolário 2.28, temos que  $\mathbb{R}^d = \mathcal{C}_U = \mathcal{R}_U^-$ . Aplicando o Teorema 3.15 no sistema acima, temos que o par  $(-A, -B)$  é controlável e que a matriz  $-A$  não possui autovalores com parte real negativa. Mas como

$$\begin{aligned} \text{Im}[-B \quad (-A)(-B) \quad (-A)^{d-1}(-B)] &= \text{Im}[-B \quad AB \quad (-1)^d A^{d-1}B] \\ &= \text{Im}[B \quad AB \quad A^{d-1}B], \end{aligned}$$

temos que  $(-A, -B)$  é controlável se, e somente se,  $(A, B)$  é controlável. Além disso, se  $-A$  não possui autovalores com parte real negativa, então  $A$  não possui autovalores com parte real positiva.

Reciprocamente, suponha que (a) e (b) sejam válidos. Vimos acima que (a) implica que o par  $(-A, -B)$  é controlável e além disso, por (b) temos que  $-A$  não possui autovalores com parte real negativa. Considerando novamente o sistema em tempo reverso, pelo Teorema 3.15 temos que  $\mathcal{R}_U = \mathbb{R}^d$ . Entretanto, segue novamente do Corolário 2.28 que  $\mathcal{C}_U = \mathcal{R}_U^- = \mathbb{R}^d$ , o que conclui o resultado.  $\square$

O seguinte teorema é o mais importante deste capítulo e caracteriza os conjuntos de controle além da controlabilidade do sistema (3.7). Note que dado um sistema de controle  $\dot{x}(t) = X(x(t), u(t))$  como em (1.13) assumindo que as soluções estão definidas sobre todo  $t \in \mathbb{R}$ , se fizermos a substituição  $t \mapsto -t$

**Teorema 3.24.** *Considere o sistema (3.7) com  $U \subset \mathbb{R}^m$  é convexo e compacto com  $0 \in \text{int } U$ . Assuma que o par  $(A, B)$  é controlável, isto é, posto  $[B \quad AB \quad \dots \quad A^{d-1}B] = d$ . Se isto não for satisfeito, podemos trabalhar no espaço de Kalman*

$$\langle A | \text{Im } B \rangle = \text{Im} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{d-1}B]$$

correspondente a  $U = \mathbb{R}^m$ .

a) O sistema (3.7) possui exatamente um conjunto de controle  $D$  com interior não-vazio,  $D = \mathcal{C} \cap \text{fe}(\mathcal{R}_U)$ . Além disso, temos as seguintes afirmações:

a.1) O conjunto de controle  $D$  é invariante se a parte real de todos os autovalores de  $A$  é negativa; neste caso  $D = \mathcal{R}_U$ .

a.2) O conjunto de controle  $D$  é aberto se todos os autovalores de  $A$  possuem parte real positiva e neste caso  $D = \mathcal{C}_U$ .

b) O sistema (3.7) é controlável se, e somente se todos os autovalores de  $A$  possuem parte real nula.

**Demonstração:** (a) A condição de controlabilidade do par  $(A, B)$  garante que no tempo  $T = 1$  as órbitas positiva e negativa coincidem com  $\mathbb{R}^d$ , isto é,  $\mathcal{R}(1) = \mathcal{C}(1) = \mathbb{R}^d$ . Denote o conjunto das funções essencialmente limitadas (funções que são limitadas, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula)  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  por  $L_1([0, 1], \mathbb{R}^m)$  e considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ u &\longmapsto f(u) = \varphi(1, 0, u) \end{aligned}$$

É sabido que tanto  $L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$  quanto  $\mathbb{R}^d$  são espaços de Banach com as normas

$$\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\| = \inf_{\lambda(N)=0} \sup_{t \in \mathbb{R}-N} \|u(t)\|$$

(onde o ínfimo é tomado sobre todos os conjuntos  $N \subset \mathbb{R}$  de medida de Lebesgue  $\lambda$  nula) e com a norma euclidiana, respectivamente. Como  $f(u) = \varphi(1, 0, u) = \int_0^1 e^{(1-s)A} B u(s) ds$ , temos que  $f$  é linear. Temos também que  $f$  é contínua, pois

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\| &= \left\| \int_0^1 e^{(1-s)A} B u_1(s) ds - \int_0^1 e^{(1-s)A} B u_2(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 e^{(1-s)A} B [u_1(s) - u_2(s)] ds \right\| \\ &\leq e^{\|A\|} \|B\| \|u_1 - u_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Além disso, segue do fato de  $\mathcal{R}(1) = \mathbb{R}^d$  que  $f$  é sobrejetora. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que  $f$  é aberta. Dessa forma, para todo  $\rho > 0$ , temos que  $f(B_\rho^\infty(0)) \subset \mathbb{R}^d$  é aberto, onde  $B_\rho^\infty(0)$  denota a bola de centro 0 e raio  $\rho$  em  $L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ . Uma vez que  $f(0) = 0$ , segue que  $0 \in f(B_\rho^\infty(0))$ , para todo  $\rho > 0$ . Assim, para cada  $\rho > 0$  existe  $\epsilon = \epsilon(\rho) > 0$  tal que  $B_\epsilon(0) \subset f(B_\rho^\infty(0))$ , onde  $B_\epsilon(0)$  denota a bola de centro 0 e raio  $\epsilon$  em  $\mathbb{R}^d$ . Como  $0 \in \text{int } U \subset \mathbb{R}^m$ , existe  $\rho' > 0$  tal que  $B_{\rho'}(0) \subset U$ . Pelo que foi observado antes, existe  $\epsilon' > 0$  tal que

$$B_{\epsilon'}(0) \subset f(B_{\rho'}^\infty(0)).$$

Dessa forma, dado  $x \in B_{\rho'}(0)$ , existe  $u \in B_{\rho'}^\infty(0)$  tal que

$$x = f(u) = \varphi(1, 0, u) \in \mathcal{R}_U(1),$$

pois  $\|u(t)\| \leq \|u\|_\infty < \rho'$ , ou seja,  $u(t) \in B_{\rho'}(0) \subset U$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto  $B_{\rho'}(0) \subset \mathcal{R}_U(1)$ , mostrando que  $0 \in \text{int } \mathcal{R}_U(1)$ . Note que

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{C}_U(1) &\Leftrightarrow \varphi(1, x, u) = 0 \text{ para algum } u \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow e^A x + \varphi(1, 0, u) = 0 \text{ para algum } u \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow x = -e^{-A} \varphi(1, 0, u) \in -e^{-A} \mathcal{R}_U(1) \text{ para algum } u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Mostrando que  $\mathcal{C}_U(1) = -e^{-A} \mathcal{R}_U(1)$ . Com isso, se  $0 \in \text{int } \mathcal{R}_U(1)$ , então  $0 \in \text{int } \mathcal{C}_U(1)$ , uma vez que  $-e^{-A}$  é um isomorfismo. Concluimos que  $0 \in \text{int } \mathcal{R}_U(1) \cap \text{int } \mathcal{C}_U(1)$ .

Considere  $D_0 = \mathcal{R}_U \cap \mathcal{C}_U$ , então dado  $x \in D_0$  existe  $T_1 > 0$  e  $u_1 \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(T_1, x, u_1) = 0$ . Da mesma forma, como  $0 \in \mathcal{R}_U(1) \cap \mathcal{C}_U(1)$ , temos que existe  $T_2 > 0$  e  $u_2 \in \mathcal{U}$  tal que  $x = \varphi(T_2, 0, u_2)$ . Defina uma trajetória  $\varphi(t, x, u)$ ,  $t \geq 0$ , partindo de  $x$  e atingindo 0 em tempo  $T_1$  e controle  $u_1$ . Em seguida, retornando a  $x$  em tempo  $T_2$  e controle  $u_2$  e repita este processo iteradamente (observe que dado  $t' \in [0, T_1]$ , temos que  $\varphi(t', x, u_1) \in \mathcal{C}_U$ , pois  $\varphi(T_1 - t', \varphi(t', x, u_1), \Theta_{t'} u_1) = \varphi(T_1, x, u_1) = 0$ . Além disso, como  $x \in D_0 \subset \mathcal{R}_U$ , temos que  $\varphi(t', x, u_1) \in \mathcal{O}^+(x) \subset \mathcal{R}_U$ , assim  $\varphi(t, x, u_1) \in D_0$  para todo  $t \in [0, T_1]$ . Analogamente mostra-se que  $\varphi(t, x, u_2) \in D_0$  para todo  $t \in [0, T_2]$ ). Cada volta que a trajetória faz partindo de  $x$  até 0 e retornando a  $x$  necessita de um tempo  $T_1 + T_2$ , assim  $\varphi(t, x, u)$  fica bem definida e  $\varphi(t, x, u) \in D_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e com isso, temos que  $D_0$  satisfaz a condição (i) da definição de conjunto de controle. Além disso, dado  $x \in D_0$ , temos em particular que  $x \in \mathcal{C}_U$ , ou seja,  $0 \in \mathcal{O}^+(x)$ . Assim  $\mathcal{R}_U \subset \mathcal{O}^+(x)$ , logo

$$D_0 = \mathcal{R}_U \cap \mathcal{C}_U \subset \mathcal{R}_U \subset \mathcal{O}^+(x),$$

mostrando que  $D_0$  satisfaz (ii) da Definição 2.16. Dessa forma, pela Proposição 2.22  $D_0$  está contido em um conjunto de controle  $D$ , de onde segue que

$$0 \in \text{int } \mathcal{R}_U(1) \cap \text{int } \mathcal{C}_U(1) = \text{int } (\mathcal{R}_U(1) \cap \mathcal{C}_U(1)) \subset \text{int } D_0 \subset \text{int } D,$$

ou seja, 0 pertence ao interior de algum conjunto de controle  $D$ . A hipótese de controlabilidade do par  $(A, B)$  implica que a condição do posto de acessibilidade é válida

(ver comentário subsequente à Observação 2.14), portando pelo Lema 2.26 temos que  $D = \mathcal{C}_U \cap \text{fe}(\mathcal{R}_U)$ . A afirmação (a.1) segue imediatamente do Corolário 3.23. Já a afirmação (a.2) segue do Teorema 3.15 e da Corolário 2.8, uma vez que  $0 \in \text{int } D = \text{int } \mathcal{C}_U$ .

Vamos agora provar a unicidade de  $D$ . Para isto, seja  $D'$  um conjunto de controle com interior não vazio. Se provarmos que  $D \cap D' \neq \emptyset$ , então pela Proposição 2.23 teremos que  $D' = D$ . Como pelo item (iii) do Lema 2.26  $\text{int } D \subset \mathcal{O}^+(x)$ , para todo  $x \in D$ , podemos encontrar um ponto  $x \in \text{int } D$ , um número  $\mu > 1$ , tempos  $T_2 > T_1 > 0$  e um controle  $T_2$ -periódico  $u \in \mathcal{U}$  tais que

$$\varphi(T_1, x, u) = \mu x \quad \text{e} \quad \varphi(T_2, x, u) = x.$$

Assim, dado  $\alpha \in [0, 1]$ , tem-se

$$\begin{aligned} \varphi(T_1, \alpha x, \alpha u) &= \alpha e^{T_1 A} x + \int_0^{T_1} e^{(T_1-s)A} B(\alpha u(s)) ds \\ &= \alpha (e^{T_1 A} x + \int_0^{T_1} e^{(T_1-s)A} B u(s) ds) \\ &= \alpha \varphi(T_1, x, u) \\ &= \alpha \mu x. \end{aligned}$$

Analogamente  $\varphi(T_2, \alpha x, \alpha u) = \alpha x$ . Portanto, todos os pontos  $\alpha x$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  pertencem ao conjunto de controle  $D'$ . Como a origem está contida no interior do conjunto de controle  $D$ , segue que  $D \cap D' \neq \emptyset$ , de onde segue a unicidade.

(b) Suponha que o sistema 3.7 seja controlável, então por definição,  $\mathcal{O}^+(x) = \mathbb{R}^d$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Em particular,  $\mathbb{R}^d = \mathcal{O}^+(0) = \mathcal{R}_U$ . Assim, pelo Teorema 3.15, todos os autovalores de  $A$  possuem parte real não negativa. Observe também que dado  $x \in \mathbb{R}^d$ , temos que  $0 \in \mathbb{R}^d = \mathcal{O}^+(x)$ , logo  $x \in \mathcal{O}^-(0) = \mathcal{C}_U$  de onde segue que  $\mathcal{C}_U = \mathbb{R}^d$ . Portanto, pelo Corolário 3.23,  $A$  não possui autovalores com parte real positiva. Dessa forma, todos os autovalores de  $A$  devem ter parte real nula.

Reciprocamente, suponha que todos os autovalores de  $A$  possuam parte real nula. Como o par  $(A, B)$  é controlável, temos pelo Teorema 3.15 e pelo Corolário 3.23 que  $\mathcal{R}_U = \mathcal{C}_U = \mathbb{R}^d$ . Tome  $x, y \in \mathbb{R}^d$  quaisquer. Como  $x \in \mathbb{R}^d = \mathcal{C}_U$  e  $y \in \mathbb{R}^d = \mathcal{R}_U$ , então existem  $t_1, t_2 > 0$  e  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  tais que  $0 = \varphi(t_1, x, u_1)$  e  $y = \varphi(t_2, 0, u_2)$ . Logo, tomando

$u_3 = u_1 \wedge_{t_1} u_2$  a  $t_1$ -concatenação de  $u_1$  e  $u_2$ , temos que

$$y\varphi(t_2, \varphi(t_1, x, u_1), u_2) = \varphi(t_2 + t_1, x, u_3) \in \mathcal{O}^+(x).$$

Portanto  $\mathcal{O}^+(x) = \mathbb{R}^d$ . Como  $x$  foi tomado de forma arbitrária, temos que o sistema 3.7 é controlável.  $\square$

**Exemplo 3.25.** *Considere o sistema de controle linear bidimensional*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad u(t) \in [-1, 1]$$

*Após cálculos elementares, podemos verificar que as soluções são dadas por*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_0 \\ e^{-t} y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t u(s) \begin{pmatrix} e^{t-s} \\ e^{s-t} \end{pmatrix} ds.$$

*Observe que  $D = (-1, 1) \times [-1, 1]$  é um conjunto de controle do sistema (3.7) (ver figura 3.2). Como  $\text{int } D \neq \emptyset$ , temos pelo teorema anterior que  $D$  é o único conjunto de controle com interior não vazio.*

*Note que as bordas  $\Gamma_1 = \{-1\} \times (-1, 1)$  e  $\Gamma_2 = \{1\} \times (-1, 1)$  são removidas, pois se estes conjuntos fossem unidos a  $D$ , então dado  $x \in \Gamma_1$ , podemos ver que  $fe(\mathcal{O}^+(x)) \subset \Gamma_1 \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \leq -1\}$ . Analogamente se  $x \in \Gamma_2$ ,  $fe(\mathcal{O}^+(x)) \subset \Gamma_2 \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \geq 1\}$ . Em qualquer caso temos uma contradição, pois deveríamos ter  $D \subset fe(\mathcal{O}^+(x))$ .*

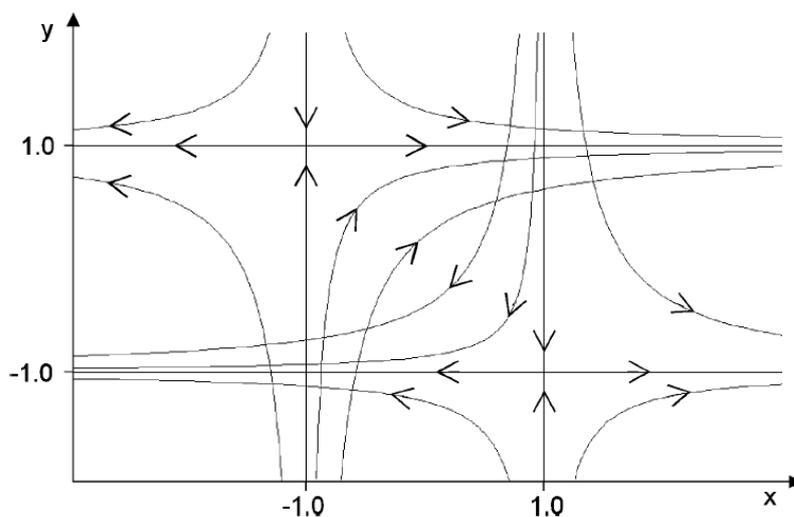


Figura 3.2: Retrato de fase para  $u = 1$  e  $u = -1$

---

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] COLONIUS F.; KLIEMANN W. *The Dynamics of Control* Birkhäuser, 2000.
- [2] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [3] AGRACHEV A. A.; Sachkov Y. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer, 2004.
- [4] WARNER F. W. *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups* Scott, Foresman and Company, 1971
- [5] FILIPPOV A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides* Kluwer, 1988.
- [6] KURZWEIL J. *Ordinary Differential Equations - Introduction to the Theory of Ordinary Differential Equations in the Real Domain* Elsevier, 1986.
- [7] LEE E. B. ; MARKUS L.-*Foundations of Optimal Control Theory* R. E. Krieger, 1967.
- [8] ELLIOTT D. L. *Bilinear Control Systems - Matrices in Action* Springer, 2009.
- [9] V. JURDJEVIC *Geometric Control Theory* Cambridge, 2006.
- [10] HALE J.K. *Ordinary Differential Equations* Krieger, 1980.
- [11] HEIJ C.; RAN A.; VAN SCHAGEN F. *Introduction to Mathematical Systems Theory - Linear Systems, Identification and Control* Birkhäuser, 2007.
- [12] Sontag E. *Mathematical Control Theory* 2.ed. Springer, 1998.

- [13] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária, 4.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [14] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [15] LIMA E.L. *Varietades Diferenciáveis* Publicações Matemáticas, 2011.
- [16] SOTOMAYOR J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias* Projeto Euclides, 1979.
- [17] FOLLAND G. B. *Real Analysis* John Wiley and Sons, 1984.
- [18] San Martin L.A.B.; Tonelli P. A., *Semigroup Actions on Homogeneous Spaces*. Semigroup Forum 50 (1995), 59-88.