UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

ANDERSON MACEDO SETTI

CRESCIMENTO DO NÚMERO DE SEMIGRUPOS NUMÉRICOS EM FUNÇÃO DO GÊNERO

Maringá-PR

2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Crescimento do Número de Semigrupos Numéricos em Função do Gênero

Anderson Macedo Setti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Junior.

Maringá-PR
2015

ANDERSON MACEDO SETTI

CRESCIMENTO DO NÚMERO DE SEMIGRUPOS NUMÉRICOS EM FUNÇÃO DO GÊNERO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Ednei Ap. Santulo Jr.

Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 2 de março de 2015.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu irmão, a minha namorada e a todos que admiram a matemática e querem se aventurar nessa linda ciência.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e força para seguir por esse caminho que me faz tão feliz e por ter me dado uma família batalhadora.

Aos meus pais Nelson Setti e Maria Elizabete Macedo Maciel que sempre me apoiaram e incentivaram a estudar e que mesmo nos momentos difíceis nunca deixaram de me ajudar no que era preciso para que eu estudasse. Agradeço também a eles e ao meu irmão Jefferson Macedo Setti, por sempre terem proporcionado um ambiente familiar agradável para que meus estudos se realizassem da melhor forma possível.

A minha querida, linda e amável Juliana Raupp dos Reis, que tanto me ajudou e por me fazer sorrir todos os dias.

Ao meu amigo Marcos Castelli que tanto me ajudou no Programa de Verão da Universidade Estadual de Maringá.

A todos os meus amigos do mestrado, em especial aos amigos Ademir Benteus Pampu, Bruno Alexandre Rodrigues, Giovana Higino de Souza e Richard Wagner Maciel Alves.

A todos os Professores de minha vida acadêmica em especial aos professores do mestrado.

Ao meu orientador Professor Doutor Ednei Aparecido Santulo Junior pela paciência e confiança depositada durante todo este trabalho.

A Fundação Araucária e a CAPES pelo apoio financeiro.

"A essência da Matemática reside na sua liberdade".

Moritz M. Cantor

Resumo

Neste trabalho são estudados os semigrupos numéricos a fim de verificar as conjecturas

$$\lim_{g\to\infty}\frac{n_{g+1}}{n_g}=\varphi,\ \lim_{g\to\infty}\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g}=1 \text{ e } n_{g+1}\geq n_g,$$

para g suficientemente grande, onde n_g é o número de semigrupos numéricos de gênero g e φ é a Proporção Áurea.

Palavras-chave: Semigrupo numérico, número de Frobenius, multiplicidade.

Abstract

In this work numerical semigroups are studied in order to verify that the following conjectures hold.

$$\lim_{g\to\infty}\frac{n_{g+1}}{n_g}=\varphi,\ \lim_{g\to\infty}\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g}=1 \text{ e } n_{g+1}\geq n_g,$$

for g sufficiently large; where n_g denotes the number of numerical semigroup of genus g and φ denotes the golden ratio.

Keywords: Numerical semigroup, Frobenius number, multiplicity.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de semigrupo numérico é bastante elementar e diversos conceitos relacionados são puramente aritméticos e seu estudo remonta ao final do século XIX quando foram alvo de estudos realizados por matemáticos como Frobenius e Sylvester. Um problema bastante famoso trata-se de determinar uma fórmula para o maior número natural que não pertence a um semigrupo numérico em função do conjunto mínimo de geradores do mesmo. Embora esse problema tenha uma solução razoavelmente simples para semigrupos com dois geradores, uma fórmula geral não pode ser encontrada (v. [4]). Nos casos com três e quatro geradores já aumenta muito a dificuldade do problema (v. [5], [6] por exemplo).

Durante a segunda metade do século passado, o estudo dos semigrupos numéricos e de famílias especiais de semigrupos numéricos ganhou nova força motivada pela aplicação dos mesmos à geometria algébrica (v. [8]) e algumas nomenclaturas, tais como multiplicidade, dimensão de mergulho e condutor derivam daí.

O problema estudado nessa dissertação também possui enunciado de fácil compreensão, mas sua solução está longe de ser trivial. O gênero de um semigrupo numérico é a quantidade (sempre finita) de números naturais que não pertencem a esse semigrupo. Em [2], foi conjecturado, baseado em evidências computacionais, que a sequência $n_1, n_2, \ldots, n_g, \ldots$ na qual n_g denota o número de semigrupos numéricos de gênero g comporta-se, conforme g cresce, como uma sequência do tipo Fibonacci. Mais precisamente, $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$ se $g \geq 3$ e $\lim\limits_{g \to \infty} \dfrac{n_g}{n_{g-1}} = \varphi$, onde φ denota a proporção áurea. No presente trabalho, estudamos a solução positiva para a segunda parte da conjectura apresentada por Zhai em [9]. Com relação à primeira parte da conjectura, é mostrado que, para um g suficientemente grande, $n_{g+1} \geq n_g$. A solução apresentada é baseada na análise do número de descendentes de um semigrupo, ideia introduzida por Bras-Amorós em [1] e refinada por Zhai para a solução do problema.

A dissertação está organizada da seguinte maneira.

No Capítulo 1 são introduzidos os conceitos e resultados básicos que serão amplamente utilizados ao longo do restante da dissertação. Nesse capítulo ainda é introduzido o conceito de descendente forte de um semigrupo numérico e de semigrupos fortemente e fracamente descendidos, que são conceitos-chave na resolução.

No Capítulo 2 são demonstrados os resultados principais da dissertação (Teorema 2.2, Teorema 2.22) assumindo como verdadeiro o Lema 2.1.

No Capítulo 3 é demonstrado o Lema 2.1 que foi assumido no capítulo anterior bem como um resultado auxiliar para a demonstração do mesmo.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo será dedicado aos conceitos essências para o início de nosso estudo sobre os *semigrupos numéricos*, desta forma iniciaremos com a definição de semigrupos numéricos, e destacaremos alguns elementos sobre os quais provaremos algumas propriedades, para ilustrar nosso estudo buscaremos expor alguns exemplos.

Definição 1.1. Um *semigrupo numérico* é um subconjunto Λ de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ contendo o elemento 0, fechado para a operação adição e com o complementar em relação a $\mathbb{N}$ finito.

Dado um semigrupo numérico Λ, definimos o *gênero* de Λ por $g(\Lambda) = |\mathbb{N} \setminus \Lambda|$, a *multiplicidade* de Λ por $m(\Lambda) = min(\Lambda \setminus \{0\})$ e o *número de Frobenius* de Λ por $f(\Lambda) = max(\mathbb{N} \setminus \Lambda)$. Os elementos de $\mathbb{N} \setminus \Lambda$ são chamados de lacunas de Λ.

Em nosso trabalho estudaremos os semigrupos numéricos que possuem gênero maior que zero.

Se Λ é um semigrupo numérico e $1 \in \Lambda$, claramente $\Lambda = \mathbb{N}$, e portanto, $g(\Lambda) = 0$. Assim, estamos interessados nos semigrupos numéricos que não contém o 1.

Exemplo 1.2. Dado $\Lambda = \{0, 2, 3, \ldots\}$, temos que $0 \in \Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}\setminus\Lambda = \{1\} \Rightarrow |\mathbb{N}\setminus\Lambda| = 1$ e se $a, b \in \Lambda$, então $a, b \neq 1$, se $a = b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \in \Lambda$, e se $a \neq 0$ ou $b \neq 0 \Rightarrow a \geq 2$ ou $b \geq 2 \Rightarrow a + b \geq 2$, logo $a + b \in \Lambda$. Portanto, Λ é um semigrupo numérico, em que $m(\Lambda) = 2$, $g(\Lambda) = 1$ e $f(\Lambda) = 1$. Ainda, pela observação acima Λ é o único semigrupo numérico de gênero 1.

Um semigrupo numérico Λ, possui um subconjunto G de *geradores mínimos*, no sentido de que se qualquer outro conjunto gera Λ, então contém G, os elementos de G são chamados de *geradores mínimos* de Λ. Pela definição de G temos que todo gerador mínimo não pode ser escrito como soma de elementos não nulos de Λ. Temos que G é sempre finito e se $G = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ então $mdc\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = 1$ e $\langle G \rangle = \{\lambda_1 n_1 + \ldots + \lambda_k n_k \,|\, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ (para mais detalhes ver [7]).

Definição 1.3. Seja Λ um semigrupo numérico, um gerador mínimo de Λ maior que $f(\Lambda)$ é chamado de *gerador efetivo* de Λ. O número de geradores efetivos de Λ é denotado por $h(\Lambda)$.

Exemplo 1.4. Tomemos Λ como no exemplo 1.2, vamos mostrar que $\Lambda = \langle 2, 3 \rangle$.

De fato, seja $A = \langle 2, 3 \rangle = \{2 \cdot x + 3 \cdot y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$, notemos que $1 \notin A$, pois um elemento genérico de A é da forma $2 \cdot x + 3 \cdot y$, com $x, y \in \mathbb{N}$, assim, se $x = y = 0$ então $2 \cdot x + 3 \cdot y = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$, e se $x \neq 0$ ou $y \neq 0 \Rightarrow x \geq 1$ ou $y \geq 1 \Rightarrow 2 \cdot x + 3 \cdot y \geq 2$, portanto, $1 \notin A$. Como $2 \cdot x + 3 \cdot y = 2 \cdot x + (2+1) \cdot y = 2 \cdot x + 2 \cdot y + y = 2 \cdot (x+y) + y$, fixando $y = 0$ e variando x em $\mathbb{N}$, obtemos todos os números pares, por outro lado, fixando $y = 1$ e variando x em $\mathbb{N}$, obtemos todos os ímpares menos o 1, assim $\{0, 2, 3, \ldots\} \subset A \Rightarrow \Lambda \subset A$, como $A \subseteq \mathbb{N}$ e $1 \notin A$, então $A = \Lambda$.

Temos que, $G = \{2, 3\}$, pois se $G \neq \{2, 3\}$ deveria existir um conjunto contido em $\{2, 3\}$ que gera Λ, mas as possibilidades para subconjuntos são $\{2\}$ e $\{3\}$, como $\langle 2 \rangle = \{2 \cdot x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ e $\langle 3 \rangle = \{3 \cdot x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, \ldots\}$, segue que $\langle 2 \rangle \subsetneq \Lambda$ e $\langle 3 \rangle \subsetneq \Lambda$. Portanto, $G = \{2, 3\}$, e como $f(\Lambda) = 1$, segue que os geradores efetivos de Λ são 2 e 3, logo $h(\Lambda) = 2$.

Seja Λ um semigrupo numérico e λ um gerador mínimo de Λ, provaremos que $\Lambda' = \Lambda \setminus \{\lambda\}$ é um semigrupo numérico.

De fato,

i) Como $0 \in \Lambda$ e $\lambda \neq 0$, então $0 \in \Lambda'$.

ii) Se $a, b \in \Lambda'$, então $a, b \in \Lambda \Rightarrow a+b \in \Lambda$, e $a, b \neq \lambda$, como λ é um gerador mínimo de Λ, então λ não é escrito como soma de elementos não-nulos de Λ, assim $a+b \neq \lambda$, logo $a + b \in \Lambda \setminus \{\lambda\} = \Lambda'$.

iii) Como $|\mathbb{N} \setminus \Lambda'| = |\mathbb{N} \setminus \Lambda| + 1$ e $|\mathbb{N} \setminus \Lambda|$ é finito segue que $|\mathbb{N} \setminus \Lambda'|$ é finito.

Portanto, Λ' é um semigrupo numérico.

Definição 1.5. Seja Λ um semigrupo numérico. Dizemos que um semigrupo numérico Λ' é descendente de Λ, se $\Lambda' = \Lambda \setminus \{\lambda\}$, com λ sendo um gerador efetivo de Λ.

Repare que Λ' é um semigrupo numérico, pois λ é um gerador mínimo, já que é um gerador efetivo.

Na definição acima é importante λ ser um gerador efetivo, pois isso garante que um semigrupo numérico descende de um único semigrupo numérico. Por exemplo, se $\Lambda' = \{6, 7, 9, 10, 12, 13, \ldots\}$ então $\Lambda' = \Lambda_1 \setminus \{8\} = \Lambda_2 \setminus \{11\}$, onde $\Lambda_1 = \langle 6, 7, 8, 9, 10\rangle = \{6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, \ldots\}$ e $\Lambda_2 = \langle 6, 7, 9, 10, 11\rangle = \{6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$.

Exemplo 1.6. Tomemos Λ como no exemplo 1.2. Pelo exemplo 1.4, os geradores efetivos de Λ são 2 e 3, assim $\Lambda' = \Lambda \setminus \{2\}$ e $\Lambda'' = \Lambda \setminus \{3\}$ são descendentes de Λ.

1.1 Tipos de Descendentes

Definição 1.7. Seja Λ um semigrupo numérico e $\Lambda' = \Lambda \setminus \{\lambda\}$ um descendente de Λ. Dizemos que este descendente é *não forte* se cada gerador efetivo de Λ' também é um gerador efetivo de Λ. Caso contrário, Λ' é dito ser um descendente *forte*, e neste caso o chamaremos de *semigrupo numérico fortemente descendido* ou simplesmente *fortemente descendido.*

No decorrer da seção exibiremos uma condição para que um semigrupo numérico seja fortemente descendido.

Definição 1.8. Seja Λ um semigrupo numérico. Se Λ' é um semigrupo numérico obtido a partir de Λ por uma série de descendentes não fortes, sem descendentes fortes, dizemos que Λ' é um descendente fraco de Λ.

Usaremos a convenção de que todo semigrupo numérico é um descendente fraco de si mesmo.

Definição 1.9. O número de semigrupos numéricos de gênero g será denotado por n_g.

Definição 1.10. O número de semigrupos numéricos Λ de gênero g que satisfazem $f(\Lambda) < 3m(\Lambda)$ será denotado por t_g.

Pelo exemplo 1.2 $n_1 = 1$, como $f(\Lambda) = 1$ e $m(\Lambda) = 2$ então $t_1 = 1$.

Lema 1.11. *Um semigrupo numérico Λ' é fortemente descendido se, e somente se, $f(\Lambda')+m(\Lambda')$ é um gerador efetivo de Λ'.*

Demonstração. Consideraremos dois casos

1º caso) $f(\Lambda') < m(\Lambda')$: Neste caso temos que $\Lambda' = \{0, m(\Lambda'), m(\Lambda') + 1, \ldots\} = \langle m(\Lambda'), \ldots, 2m(\Lambda') - 1\rangle$, onde $G = \{m(\Lambda'), \ldots, 2m(\Lambda') - 1\}$ é o conjunto dos geradores efetivos de Λ', (para mais detalhes ver [1]) e $f(\Lambda') = m(\Lambda') - 1$. Desta forma, Λ' é fortemente descendido de $\Lambda = \langle m(\Lambda') - 1, \ldots, 2m(\Lambda') - 3\rangle$ e $m(\Lambda') + f(\Lambda') = 2m(\Lambda') - 1$ é um gerador efetivo de Λ', como queríamos.

2º caso) $f(\Lambda') > m(\Lambda')$:($\Rightarrow$) Seja Λ' um descendente forte de Λ e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ o conjunto dos geradores efetivos de Λ. Por definição $\Lambda' = \Lambda \setminus \{\lambda_j\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, assim $f(\Lambda') = \lambda_j$. Sendo Λ' um descendente forte de Λ, Λ' possui um "novo" gerador efetivo, digamos λ. Como $\lambda > f(\Lambda') = \lambda_j$, existe $\lambda_r \in \Lambda$ tal que $\lambda = \lambda_j + \lambda_r$, pois se não existisse $\lambda_r \in \Lambda$ tal que $\lambda = \lambda_j + \lambda_r$ então λ seria um gerador efetivo de Λ, o que é um absurdo.

Se $\lambda_r > m(\Lambda')$ então $\lambda_r + \lambda_j > m(\Lambda') + \lambda_j \Rightarrow \lambda_r + \lambda_j - m(\Lambda') > \lambda_j \Rightarrow \lambda_r + \lambda_j = m(\Lambda') + \lambda_s$, $\lambda_s \in \Lambda'$, já que $\lambda_s = \lambda_r + \lambda_j - m(\Lambda') > \lambda_j = f(\Lambda')$, logo $\lambda_r + \lambda_j$ não é um gerador efetivo de Λ', pois é soma de dois elementos não nulos de Λ'. Assim, o único gerador efetivo possível para Λ' é $\lambda_j + m(\Lambda') = f(\Lambda') + m(\Lambda')$.

Portanto, $\lambda = f(\Lambda') + m(\Lambda')$.

($\Leftarrow$) Seja Λ' um descendente de Λ e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ o conjunto dos geradores efetivos de Λ. Vamos supor por absurdo que $\Lambda' = \Lambda \setminus \{\lambda_l\}$, $l \in \{1, \ldots, k\}$ não é um descendente forte de Λ. Como Λ' não é um descendente forte, $f(\Lambda')+m(\Lambda') = \lambda_j$, $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}$, então

$$\lambda_j = m(\Lambda') + f(\Lambda') = \underbrace{m(\Lambda)}_{\in \Lambda} + \underbrace{\lambda_l}_{\in \Lambda} \in \Lambda,$$

assim, λ_j não é um gerador efetivo de Λ, o que é um absurdo.

Portanto, Λ' é um descendente forte de Λ.

Isto termina a prova do resultado. □

Este Lema nos ajudará a limitar o número de semigrupos numéricos fortemente descendidos.

Definição 1.12. Seja Λ um semigrupo numérico, denotamos por $N_g(\Lambda)$ o número de descendentes fracos de Λ que possuem gênero g.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os semigrupos fortemente descendidos, então:

$$n_g = \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}} N_g(\Lambda).$$

De fato, devemos verificar que se Λ' é um semigrupo numérico qualquer de gênero g, então Λ' é descendente fraco de um semigrupo numérico fortemente descendido, isto é, descende de um semigrupo numérico $\Lambda \in \mathcal{S}$. Se Λ' é fortemente descendido, então $\Lambda' \in \mathcal{S}$ e como todo semigrupo numérico é descendente fraco de si mesmo, tomando $\Lambda = \Lambda'$ temos o desejado. Se Λ' não é fortemente descendido então ele é obtido a partir de um semigrupo numérico Λ por uma série de descendentes não fortes e no pior dos casos teremos $\Lambda = \langle 2, 3 \rangle$, que é fortemente descendido, já que $f(\Lambda) + m(\Lambda) = 1 + 2 = 3$ é um gerador efetivo de Λ, logo $\Lambda \in \mathcal{S}$. Portanto, segue a igualdade.

Definição 1.13. Definimos o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \forall \ n \geq 2$, sendo que, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Denotaremos por $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a Proporção Áurea.

Agora, exibiremos dois Lemas que ajudarão na prova do Lema 1.16.

Lema 1.14. $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}, \ \forall \ n \geq 2.$

Lema 1.15. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\binom{a}{b} \leq \varphi^{a+b}.$$

(Usaremos a convenção de que $\binom{a}{b} = 0$, se $b > a$.)

Demonstração. Para atingirmos o objetivo, faremos indução sobre $a + b$.

Se $a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow \binom{a}{b} = 1 = \varphi^{a+b}$.

Se $a + b = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$ ou $a = 0 \text{ e } b = 1$. Se $a = 1 \text{ e } b = 0 \Rightarrow \binom{a}{b} = 1 < \varphi^{a+b} = \varphi$, e se $a = 0 \text{ e } b = 1 \Rightarrow \binom{a}{b} = 0 < \varphi^{a+b} = \varphi$.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para toda soma $a + b \leq n$, vamos provar que ele é verdadeiro para $a + b = n + 1$.

De fato, temos que,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1} \leq \varphi^{a-1+b} + \varphi^{a-1+b-1} = \varphi^{a+b-1} + \varphi^{a+b-2} = \varphi^{a+b}.$$

A segunda passagem segue da hipótese de indução e a quarta do Lema 1.14.

Portanto, $\binom{a}{b} \leq \varphi^{a+b}, \ \forall\, a, b \in \mathbb{N}$. □

Lema 1.16. *Para qualquer semigrupo numérico Λ, temos que $N_g(\Lambda) \leq \binom{h(\Lambda)}{g-g(\Lambda)}$ e $N_g(\Lambda) \leq \varphi^{g-g(\Lambda)+h(\Lambda)}$.*

Demonstração. Lembremos que um descendente fraco de Λ é obtido removendo-se geradores efetivos de Λ, e $h(\Lambda)$ é o número de geradores efetivos de Λ.

Se o gênero de um descendente fraco Λ' de Λ é g, então devemos remover $g - g(\Lambda)$ geradores efetivos de Λ para obter Λ'.

Agora, vemos que há no máximo $\binom{h(\Lambda)}{g-g(\Lambda)}$ maneiras de escolher os $g-g(\Lambda)$ geradores efetivos para a remoção, assim Λ possui no máximo $\binom{h(\Lambda)}{g-g(\Lambda)}$ descendentes fracos de gênero g.

Portanto, $N_g(\Lambda) \leq \binom{h(\Lambda)}{g-g(\Lambda)}$.

Isto prova a primeira desigualdade, já a segunda desigualdade segue da primeira desigualdade e do Lema 1.15, pois

$$N_g(\Lambda) \leq \binom{h(\Lambda)}{g - g(\Lambda)} \leq \varphi^{h(\Lambda)+(g-g(\Lambda))} = \varphi^{g-g(\Lambda)+h(\Lambda)}.$$

Portanto, $N_g(\Lambda) \leq \varphi^{g-g(\Lambda)+h(\Lambda)}$. □

Este Lema será fundamental para limitarmos $N_g(\Lambda)$.

CAPÍTULO 2

ESTIMATIVA PARA O NÚMERO DE SEMIGRUPOS NUMÉRICOS

Iniciamos este capítulo sob a suposição de que o Lema 2.1, é verdadeiro, pois ele é fundamental para estimarmos o número de semigrupos numéricos. Por sua demonstração ser longa e técnica dedicaremos o próximo capítulo a ela.

Lema 2.1. *Seja $\mathcal{S}(m, f)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos fortemente descendidos com multiplicidade m e número de Frobenius f. Então*

$$\sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(m,f)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \leq 5(f-m+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1}.$$

O Teorema enunciado a seguir é importante para a demonstração das conjecturas no entanto para demonstra-lo é necessário expormos alguns resultados

Teorema 2.2.

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_g}{\varphi^g} = S$$

onde S é uma constante.

Almejamos neste capítulo estimar n_g, para isso faz-se necessário construirmos ferramentas que auxiliem sua estimativa.

Inicialmente particionaremos o conjunto $\mathcal{S}$ em três subconjuntos e somaremos sobre as três partes separadamente.

Seja $\mathcal{S}_1$ o subconjunto de $\mathcal{S}$ formado pelos semigrupos fortemente descendidos Λ tais que,

$$h(\Lambda) + g(\Lambda) < g.$$

Seja $\mathcal{S}_2$ o subconjunto de $\mathcal{S}$ formado pelos semigrupos fortemente descendidos Λ tais que,

$$h(\Lambda) + g(\Lambda) \geq g \qquad \text{e} \qquad g(\Lambda) - h(\Lambda) < \frac{g}{3}.$$

Finalmente, seja $\mathcal{S}_3$ o subconjunto de $\mathcal{S}$ formado pelos semigrupos fortemente descendidos Λ tais que

$$h(\Lambda) + g(\Lambda) \geq g \qquad \text{e} \qquad g(\Lambda) - h(\Lambda) \geq \frac{g}{3}.$$

Pela forma que definimos $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, e $\mathcal{S}_3$, temos que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \dot\cup \mathcal{S}_2 \dot\cup \mathcal{S}_3$, portanto, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, e $\mathcal{S}_3$, particionam $\mathcal{S}$. Assim, podemos escrever

$$n_g = n_{g,1} + n_{g,2} + n_{g,3}$$

onde, $n_{g,i} = \sum\limits_{\Lambda \in \mathcal{S}_i} N_g(\Lambda)$, $i = 1, 2, 3$.

Assim, a fim de estimarmos n_g, basta estimarmos $n_{g,1}$, $n_{g,2}$ e $n_{g,3}$.

Se $\Lambda \in \mathcal{S}_1$, pelo Lema 1.16, $N_g(\Lambda) = 0$, pois $h(\Lambda) < g - g(\Lambda)$, logo $\binom{h(\Lambda)}{g-g(\Lambda)} = 0$. Portanto, $n_{g,1} = 0$.

2.1 Estimando $n_{g,2}$

Nesta seção nossos esforços estarão direcionados a provar que $n_{g,2} = O(\varphi^g)$ e $n_{g,2} \leq t_g$.

Definição 2.3. Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos

$$\begin{aligned} O(\sigma(n)) \quad = \quad & \{\psi(n) \mid \text{se existem uma constante real positiva } c \text{ e } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tais que} \\ & 0 \leq \psi(n) \leq c\sigma(n),\ \forall\, n \geq n_0\}. \end{aligned}$$

Quando escrevermos $\psi(n) = O(\sigma(n))$, estaremos indicando que $\psi(n) \in O(\sigma(n))$.

Dado $\Lambda \in \mathcal{S}_2$, verificaremos que as seguintes propriedades são verdadeiras.

P1. Λ é fortemente descendido: Segue do fato que todo elemento de $\mathcal{S}$ é fortemente descendido e $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$.

P2. $2h(\Lambda) > g(\Lambda)$: Como $\Lambda \in \mathcal{S}_2$, temos que,

$$h(\Lambda) + g(\Lambda) \geq g \qquad \text{e} \qquad g(\Lambda) - h(\Lambda) < \frac{g}{3}.$$

Assim, multiplicando ambos os lados da segunda desigualdade por 3 obtemos que

$$g > 3g(\Lambda) - 3h(\Lambda),$$

então

$$\begin{aligned} h(\Lambda) + g(\Lambda) \geq g > 3g(\Lambda) - 3h(\Lambda) \quad &\Rightarrow \quad h(\Lambda) + g(\Lambda) > 3g(\Lambda) - 3h(\Lambda) \\ \Rightarrow 4h(\Lambda) > 2g(\Lambda) \quad &\Rightarrow \quad 2h(\Lambda) > g(\Lambda). \end{aligned}$$

Definição 2.4. Dizemos que qualquer semigrupo numérico satisfazendo as propriedades $(P1)$ e $(P2)$ é um *semigrupo numérico ordenadamente* ou simplesmente *ordenadamente*.

Ao invés de trabalharmos com semigrupos em $\mathcal{S}_2$ diretamente, será mais conveniente fazer observações sobre semigrupos numéricos ordenadamentes em geral e aplicá-los a $\mathcal{S}_2$.

Para provarmos a próxima proposição necessitamos de alguns Lemas.

Lema 2.5. *Seja Λ um semigrupo numérico, afirmamos que os geradores efetivos de Λ pertencem ao intervalo*

$$[f(\Lambda) + 1, f(\Lambda) + m(\Lambda)].$$

Demonstração. Seja λ um gerador efetivo de Λ, por definição $\lambda > f(\Lambda)$, logo $\lambda \geq f(\Lambda) + 1$.

Agora, suponha que $\lambda > f(\Lambda) + m(\Lambda)$, então

$$\begin{aligned} \lambda &= f(\Lambda) + m(\Lambda) + \lambda_r, \qquad \lambda_r > 0 \\ &= \underbrace{f(\Lambda) + \lambda_r}_{\in \Lambda} + \underbrace{m(\Lambda)}_{\in \Lambda} \in \Lambda \end{aligned}$$

o que é um absurdo, já que λ é um gerador efetivo de Λ, então $\lambda \leq f(\Lambda) + m(\Lambda)$.

Então, $\lambda \in [f(\Lambda) + 1, f(\Lambda) + m(\Lambda)]$, portanto, os geradores efetivos de Λ pertencem ao intervalo $[f(\Lambda) + 1, f(\Lambda) + m(\Lambda)]$. □

Deste resultado segue que

$$h(\Lambda) \leq m(\Lambda). \tag{2.1-1}$$

Lema 2.6. *Seja Λ um semigrupo numérico fortemente descendido com $f(\Lambda) > m(\Lambda)$, então Λ contém no máximo a metade dos inteiros do intervalo $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$.*

Demonstração. Como Λ é um semigrupo numérico fortemente descendido, pelo Lema 1.11, $f(\Lambda)+m(\Lambda)$ é um gerador efetivo de Λ. Para obtermos o desejado, vamos analisar dois casos:

1º caso) $f(\Lambda) + m(\Lambda)$ par: Temos que,

$$\begin{array}{rcl} m(\Lambda) \notin \Lambda & \text{ou} & f(\Lambda) \notin \Lambda \\ m(\Lambda) + 1 \notin \Lambda & \text{ou} & f(\Lambda) - 1 \notin \Lambda \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{m(\Lambda) + f(\Lambda)}{2} \notin \Lambda & \text{ou} & \dfrac{m(\Lambda) + f(\Lambda)}{2} \notin \Lambda \end{array}$$

pois se dois elementos de alguma linha pertencerem a Λ, teremos que $f(\Lambda)+m(\Lambda)$ não é gerador efetivo de Λ, já que é soma de dois elementos não nulos de Λ. Então, Λ contém no máximo a metade dos números inteiros do intervalo $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$.

2º caso) $f(\Lambda) + m(\Lambda)$ ímpar: Segue de forma análoga ao primeiro caso.

Então, em ambos os casos temos que Λ contém no máximo a metade dos inteiros de $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$, como queríamos. □

Deste resultado segue que, se Λ é ordenadamente com $f(\Lambda) > m(\Lambda)$ então ele possui pelo menos $\left(\frac{f(\Lambda)-m(\Lambda)+1}{2}\right)$ elementos ausentes em $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$.

Assim,

$$(m(\Lambda)-1) + \left(\frac{f(\Lambda)-m(\Lambda)+1}{2}\right) \leq g(\Lambda) \leq 2h(\Lambda)-1 \leq 2m(\Lambda)-1$$

reorganizando obtemos que

$$f(\Lambda) \leq 3m(\Lambda) - 1. \tag{2.1-2}$$

A segunda desigualdade segue da propriedade (P2), a terceira da desiguladade 2.1-1, já na primeira desigualdade usamos que,

$$\begin{aligned} g(\Lambda) &= \#\{\text{lacunas de } \Lambda \text{ em } \{1,\ldots,f(\Lambda)\}\} \\ &= \#\{\text{lacunas de } \Lambda \text{ em } \{1,\ldots,m(\Lambda)-1\}\} + \#\{\text{lacunas de } \Lambda \text{ em } \{m(\Lambda),\ldots,f(\Lambda)\}\} \\ &\geq (m(\Lambda)-1) + \left(\frac{f(\Lambda)-m(\Lambda)+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Lema 2.7. *Se Λ é um semigrupo numérico fortemente descendido com $f(\Lambda) > m(\Lambda)$, então $[m(\Lambda), 2m(\Lambda)-1]$ e $[f(\Lambda)-m(\Lambda)+1, f(\Lambda)]$ cobrem $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$.*

Demonstração. Devemos mostrar que,

$$[m(\Lambda), f(\Lambda)] \subset [m(\Lambda), 2m(\Lambda)-1] \cup [f(\Lambda)-m(\Lambda)+1, f(\Lambda)].$$

Usando a desigualdade 2.1-2, temos que $f(\Lambda) - m(\Lambda) + 1 \leq 2m(\Lambda)$, o que prova o resultado. □

Proposição 2.8. *Se Λ é um semigrupo numérico ordenadamente, então $f(\Lambda) < 2m(\Lambda)$.*

Demonstração. Primeiramente observe que se $f(\Lambda) < m(\Lambda)$ o resultado segue.

Suponha que $f(\Lambda) > m(\Lambda)$, então o número de elementos de Λ em $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$ é $f(\Lambda) - g(\Lambda)$.

De fato, todas as lacunas de Λ pertencem ao conjunto $\{1,\ldots,f(\Lambda)\}$ e todos os elementos de $\Lambda \setminus \{0\}$ são maiores ou igual a $m(\Lambda)$, logo $|\{\lambda \in \Lambda \,|\, m(\Lambda) \leq \lambda \leq f(\Lambda)\}| = f(\Lambda) - g(\Lambda)$.

Portanto, o número de elementos de Λ em $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$ é $f(\Lambda) - g(\Lambda)$.

Pelo Lema 2.7, os intervalos $[m(\Lambda), 2m(\Lambda) - 1]$ e $[f(\Lambda) - m(\Lambda) + 1, f(\Lambda)]$ cobrem $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$ e cada um deles é um sistema completo de restos módulo $m(\Lambda)$. Disto, pelo menos um desses intervalos contém ao menos a metade dos elementos de Λ em $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$, isto é, um desses intervalos contém no mínimo $\left(\frac{f(\Lambda)-g(\Lambda)}{2}\right)$ elementos de Λ que pertencem ao intervalo $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$. Sendo X o conjunto de tais elementos, não existe par de elementos distintos em X congruentes módulo $m(\Lambda)$.

Temos que os geradores efetivos de Λ estão no intervalo $[f(\Lambda)+1, f(\Lambda)+m(\Lambda)]$ que também é um sistema completo de restos módulo $m(\Lambda)$. Assim, para cada elemento de X existe um $\lambda \in [f(\Lambda) + 1, f(\Lambda) + m(\Lambda)]$ que é congruente a ele módulo $m(\Lambda)$, logo $[f(\Lambda)+1, f(\Lambda)+m(\Lambda)]$ possui pelo menos $\left(\frac{f(\Lambda)-g(\Lambda)}{2}\right)$ elementos que não são geradores efetivos de Λ.

Assim, Λ possui no máximo

$$m(\Lambda) - \left(\frac{f(\Lambda) - g(\Lambda)}{2}\right) \tag{2.1-3}$$

geradores efetivos. Então

$$\begin{aligned} g(\Lambda) &< 2h(\Lambda) \\ &\leq 2m(\Lambda) - (f(\Lambda) - g(\Lambda)) \\ &= 2m(\Lambda) - f(\Lambda) + g(\Lambda) \\ \Rightarrow g(\Lambda) &< 2m(\Lambda) - f(\Lambda) + g(\Lambda) \qquad (2.1\text{-}4) \end{aligned}$$

a primeira passagem segue da propriedade $(P2)$ e a segunda de 2.1-3.

Reorganizando a desigualdade 2.1-4, obtemos que $f(\Lambda) < 2m(\Lambda)$ como queríamos.

$\square$

Corolário 2.9. *Seja Λ um semigrupo numérico ordenadamente, então $m(\Lambda) \geq f(\Lambda) + h(\Lambda) - g(\Lambda)$.*

Demonstração. No caso em que $m(\Lambda) > f(\Lambda)$, temos que $f(\Lambda) = g(\Lambda)$ e $\Lambda = \langle m(\Lambda), \ldots, 2m(\Lambda) - 1\rangle \Rightarrow h(\Lambda) = m(\Lambda)$. Portanto, $m(\Lambda) \geq f(\Lambda) + h(\Lambda) - g(\Lambda)$.

Agora se $m(\Lambda) < f(\Lambda)$, dado $\lambda \in (\Lambda \cap [m(\Lambda), f(\Lambda)])$, então $\lambda + m(\Lambda) \in [f(\Lambda) + 1, f(\Lambda)+m(\Lambda)]$, pois $f(\Lambda) < 2m(\Lambda)$ pela Proposição 2.8, logo $\lambda+m(\Lambda) \geq m(\Lambda)+m(\Lambda) = 2m(\Lambda) \geq f(\Lambda) + 1$. Como $\lambda + m(\Lambda)$ é soma de dois elementos de Λ segue que ele não é um gerador efetivo de Λ.

Sabemos que existem $(f(\Lambda) - g(\Lambda))$ elementos de Λ em $[m(\Lambda), f(\Lambda)]$, assim existem $(f(\Lambda) - g(\Lambda))$ elementos de Λ em $[f(\Lambda)+1, f(\Lambda)+m(\Lambda)]$ que não são geradores efetivos de Λ. Como os geradores efetivos de Λ estão em $[f(\Lambda) + 1, f(\Lambda) + m(\Lambda)]$, então

$$h(\Lambda) \leq |\{f(\Lambda) + 1, \ldots, f(\Lambda) + m(\Lambda)\}| - (f(\Lambda) - g(\Lambda)) = m(\Lambda) - f(\Lambda) + g(\Lambda).$$

Portanto,

$$m(\Lambda) \geq f(\Lambda) + h(\Lambda) - g(\Lambda).$$

□

Corolário 2.10. *Seja Λ' um descendente fraco de um semigrupo numérico ordenadamente Λ, então $f(\Lambda') < 3m(\Lambda')$.*

Demonstração. Sabemos que os geradores efetivos de Λ estão no intervalo $[f(\Lambda)+1, f(\Lambda)+m(\Lambda)]$ pelo Lema 2.5. Pela propriedade $(P1)$ Λ é fortemente descendido, assim $f(\Lambda) + m(\Lambda)$ é gerador efetivo de Λ, pelo Lema 1.11, assim $f(\Lambda) + m(\Lambda)$ é o maior gerador efetivo de Λ. Conhecido que Λ' é obtido a partir de Λ pela remoção de geradores efetivos, então $f(\Lambda') \leq f(\Lambda) + m(\Lambda)$.

Pela Proposição 2.8, sabemos que $f(\Lambda) < 2m(\Lambda)$, e como $m(\Lambda') = m(\Lambda)$, então

$$\begin{aligned} f(\Lambda') &\leq f(\Lambda) + m(\Lambda) \\ &< 2m(\Lambda) + m(\Lambda) \\ &= 3m(\Lambda) \\ &= 3m(\Lambda'). \end{aligned}$$

Portanto, $f(\Lambda') \leq 3m(\Lambda')$. □

Corolário 2.11. $n_{g,2} \leq t_g$.

Demonstração. Por definição, $n_{g,2}$ conta o número de descendentes fracos de gênero g dos elementos de $\mathcal{S}_2$. Como todos os elementos de $\mathcal{S}_2$ são ordenadamentes, todos os descendentes fracos de elementos de $\mathcal{S}_2$ são contados em t_g pelo Corolário 2.10.

Portanto, $n_{g,2} \leq t_g$. □

Definição 2.12. *Sejam* Λ *um semigrupo numérico e* $\Delta \in \mathbb{Z}$. *Definimos a aplicação* $\tau(\Lambda, \Delta) = \{0\} \cup (\Lambda \setminus \{0\} + \Delta)$.

Em essência, $\tau(\Lambda, \Delta)$ é uma mudança dos elementos não nulos de Λ por Δ. Vamos verificar algumas propriedades de τ através de Lemas.

Lema 2.13. *Seja* Λ *um semigrupo numérico, e suponha que* $\Lambda' = \tau(\Lambda, \Delta)$ *é um semigrupo numérico. Então,* $f(\Lambda') = f(\Lambda) + \Delta$, $m(\Lambda') = m(\Lambda) + \Delta$ *e* $g(\Lambda') = g(\Lambda) + \Delta$.

Demonstração. Segue diretamenta da definição de τ. □

Lema 2.14. *Sejam* Λ *um semigrupo numérico e* Δ *um inteiro que satisfazem,* $f(\Lambda) < 2m(\Lambda) + \Delta$, *então* $\tau(\Lambda, \Delta)$ *é um semigrupo numérico.*

Demonstração. Seja $\Lambda' = \tau(\Lambda, \Delta)$, por hipótese $f(\Lambda) < 2m(\Lambda) + \Delta \Rightarrow m(\Lambda) > f(\Lambda) - m(\Lambda) - \Delta \Rightarrow m(\Lambda) \geq f(\Lambda) - m(\Lambda) - \Delta + 1$, então

$$\begin{aligned} m(\Lambda') &= m(\Lambda) + \Delta \\ &\geq (f(\Lambda) - m(\Lambda) - \Delta + 1) + \Delta \\ &= f(\Lambda) - m(\Lambda) + 1 \\ \Rightarrow m(\Lambda') &\geq f(\Lambda) - m(\Lambda) + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, todo elemento de Λ' é não negativo, logo $\Lambda' \subset \mathbb{N}$.

Vamos mostrar agora que dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda'$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ então $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda'$.

De fato,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\geq m(\Lambda') + m(\Lambda') \\ &= 2m(\Lambda') \\ &= 2(m(\Lambda) + \Delta) \\ &= 2m(\Lambda) + \Delta + \Delta \\ &> f(\Lambda) + \Delta \\ &= f(\Lambda') \end{aligned}$$

então, $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda'$.

Como $0 \in \Lambda'$, Λ' é fechado para a operação e $|\mathbb{N} \setminus \Lambda'| = |\mathbb{N} \setminus \Lambda| + \Delta < \infty$, segue que Λ' é um semigrupo numérico. $\square$

Lema 2.15. *Seja Λ um semigrupo numérico com $m(\Lambda) < f(\Lambda)$ e seja $L = L(\Lambda) = \{x \in [0, f(\Lambda) - m(\Lambda)] \mid m(\Lambda) + x \in \Lambda\}$. Se $f(\Lambda) < 2m(\Lambda)$, então $\lambda \in [f(\Lambda) + 1, f(\Lambda) + m(\Lambda)]$ é um gerador efetivo se, e somente se, $\lambda - 2m(\Lambda) \notin L + L$.*

Demonstração. Por definição λ é um gerador efetivo de Λ se, e somente se, não é escrito como soma de dois elementos não nulos de Λ, isto é, não existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \setminus \{0\}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$.

Como $\lambda \leq f(\Lambda) + m(\Lambda)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq m(\Lambda)$, precisamos considerar apenas a situação onde $\lambda_1, \lambda_2 \leq f(\Lambda)$, pois se $\lambda_1 \geq f(\Lambda)$ ou $\lambda_2 \geq f(\Lambda) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > f(\Lambda) + m(\Lambda) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > \lambda$.

Como $m(\Lambda) \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq f(\Lambda)$, então $\lambda_1, \lambda_2 \in L + m(\Lambda) = \{x \in [m(\Lambda), f(\Lambda)] \mid m(\Lambda) + x \in \Lambda\}$, logo, $\lambda_1 + \lambda_2 \in (L + m(\Lambda)) + (L + m(\Lambda))$, assim, λ é um gerador efetivo se, e somente se, $\lambda \notin (L + m(\Lambda)) + (L + m(\Lambda))$ se, e somente se, $\lambda - 2m(\Lambda) \notin L + L$.

Portanto, λ é um gerador efetivo de Λ se, e somente se, $\lambda - 2m(\Lambda) \notin L + L$. $\square$

Corolário 2.16. *Seja Λ um semigrupo numérico, e suponha que $\Lambda' = \tau(\Lambda, \Delta)$ também é um semigrupo numérico. Suponha ainda que $f(\Lambda) < 2m(\Lambda)$ e $f(\Lambda') < 2m(\Lambda')$. Então, Λ é fortemente descendido se, e somente se, Λ' é, e $m(\Lambda) - h(\Lambda) = m(\Lambda') - h(\Lambda')$.*

Demonstração. No caso em que $m(\Lambda) > f(\Lambda)$, temos que $\Lambda = \langle m(\Lambda), \ldots, 2m(\Lambda) - 1\rangle \Rightarrow m(\Lambda) = h(\Lambda)$ e $\Lambda' = \langle m(\Lambda'), \ldots, 2m(\Lambda') - 1\rangle \Rightarrow m(\Lambda') = h(\Lambda')$. Portanto, $m(\Lambda) - h(\Lambda) = m(\Lambda') - h(\Lambda')$.

Se $m(\Lambda) < f(\Lambda)$, sejam $L(\Lambda) = \{x \in [0, f(\Lambda) - m(\Lambda)] \mid m(\Lambda) + x \in \Lambda\}$ e $L(\Lambda') = \{x \in [0, f(\Lambda') - m(\Lambda')] \mid m(\Lambda') + x \in \Lambda'\}$, afirmamos que $L(\Lambda) = L(\Lambda')$.

De fato,

$$\begin{aligned} x \in L(\Lambda) &\Leftrightarrow x \in [0, f(\Lambda) - m(\Lambda)] \quad \text{e} \quad m(\Lambda) + x \in \Lambda \\ &\Leftrightarrow x \in [0, f(\Lambda) + \Delta - m(\Lambda) - \Delta] \quad \text{e} \quad m(\Lambda) + \Delta + x \in \Lambda' \\ &\Leftrightarrow x \in [0, f(\Lambda') - m(\Lambda')] \quad \text{e} \quad m(\Lambda') + x \in \Lambda' \\ &\Leftrightarrow x \in L(\Lambda'). \end{aligned}$$

Portanto, $L(\Lambda) = L(\Lambda')$, por simplicidade denotaremos $L(\Lambda)$ e $L(\Lambda')$ por L.

Seja K o conjunto formado pelos números inteiros do intervalo $[f(\Lambda)+1, f(\Lambda)+m(\Lambda)]$ que não são geradores efetivos de Λ e seja K' o conjunto formado pelos números inteiros do intervalo $[f(\Lambda')+1, f(\Lambda')+m(\Lambda')]$ que não são geradores efetivos de Λ'. Vamos mostrar que existe uma bijeção entre esses conjuntos e como $|K| = m(\Lambda) - h(\Lambda)$ e $|K'| = m(\Lambda') - h(\Lambda')$, então $m(\Lambda) - h(\Lambda) = m(\Lambda') - h(\Lambda')$.

Dado $\lambda \in K$, pelo Lema 2.15, $(\lambda - 2m(\Lambda)) \in L + L$, assim $\lambda \geq 2m(\Lambda)$, então,

$$\begin{aligned}
\lambda + 2\Delta &\geq 2m(\Lambda) + 2\Delta \\
&= 2(m(\Lambda) + \Delta) \\
&= 2m(\Lambda') \\
&\geq f(\Lambda') + 1
\end{aligned}$$

na terceira passagem utilizamos o Lema 2.13, e na quarta a hipótese. Como $\lambda \leq f(\Lambda) + m(\Lambda)$, usando o Lema 2.13 novamente, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda + 2\Delta &\leq f(\Lambda) + m(\Lambda) + 2\Delta \\
&= (f(\Lambda) + \Delta) + (m(\Lambda) + \Delta) \\
&= f(\Lambda') + m(\Lambda').
\end{aligned}$$

Assim, $\lambda + 2\Delta \in [f(\Lambda')+1, f(\Lambda')+m(\Lambda')]$ e

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\Delta) - 2m(\Lambda') &= \lambda - 2m(\Lambda') + 2\Delta \\
&= \lambda - 2(m(\Lambda') - \Delta) \\
&= \lambda - 2m(\Lambda) \in L + L
\end{aligned}$$

pelo Lema 2.15, segue que $\lambda + 2\Delta$ não é um gerador efetivo de Λ', logo $\lambda + 2\Delta \in K'$.

Assim, obtemos uma aplicação injetora de K em K', $\lambda \mapsto \lambda + 2\Delta$. Com um raciocínio análogo obtemos uma aplicação injetora de K' em K, $\lambda \mapsto \lambda - 2\Delta$.

Como estas funções são inversas uma da outra, segue que estas funções são bijetoras, e portanto, $|K| = m(\Lambda) - h(\Lambda) = m(\Lambda') - h(\Lambda') = |K'|$.

Pelo Lema 1.11, Λ é fortemente descendido se, e somente se, $f(\Lambda) + m(\Lambda) \notin K$ se, e somente se, $f(\Lambda) + m(\Lambda) + 2\Delta = (f(\Lambda) + \Delta) + (m(\Lambda) + \Delta) = f(\Lambda') + m(\Lambda') \notin K'$ se, e somente se, Λ' é fortemente descendido. Portanto, Λ é fortemente descendido se, e somente se, Λ' é fortemente descendido.

Isto termina a prova do resultado. $\square$

Definição 2.17. O conjunto dos semigrupos numéricos fortemente descendidos que possuem gênero g e h geradores efetivos será denotado por $M(g, h)$.

Lema 2.18. $|M(g, h)| = |M(2g - 2h + 1, g - h + 1)|$, *sempre que* $g < 2h$.

Demonstração. Vamos mostrar que existe uma aplicação bijetora entre $M(g, h)$ e $M(2g-2h + 1, g - h + 1)$.

Seja $\Delta = 2h - g - 1$, como $2h > g \Rightarrow 2h - g > 0 \Rightarrow 2h - g - 1 \geq 0$, logo $\Delta \geq 0$. Os semigrupos numéricos de $M(g, h)$ e $M(2g - 2h + 1, g - h + 1)$ são ordenadamentes, pois são fortemente descendidos, $2h > g$ e $2(g - h + 1) = 2g - 2h + 2 > 2g - 2h + 1$.

Dado $\Lambda \in M(2g-2h+1, g-h+1)$, pela Proposição 2.8, temos que $f(\Lambda) < 2m(\Lambda) \Rightarrow f(\Lambda) < 2m(\Lambda) + \Delta$, assim $\Lambda' = \tau(\Lambda, \Delta)$ é um semigrupo numérico pelo Lema 2.14.

Pelo Lema 2.13,

$$
\begin{aligned}
f(\Lambda') &= f(\Lambda) + \Delta \\
&< (2m(\Lambda) + \Delta) + \Delta \\
&= 2(m(\Lambda) + \Delta) \\
&= 2m(\Lambda'),
\end{aligned}
$$

assim, pelo Colorário 2.16, Λ' é fortemente descendidio e $m(\Lambda) - h(\Lambda) = m(\Lambda') - h(\Lambda')$, então,

$$
\begin{aligned}
h(\Lambda') &= m(\Lambda') - m(\Lambda) + h(\Lambda) \\
&= \Delta + h(\Lambda) \\
&= (2h - g - 1) + (g - h + 1) \\
&= h
\end{aligned}
$$

logo, $h(\Lambda') = h$.

Pelo Lema 2.13, temos que

$$\begin{aligned} g(\Lambda') &= g(\Lambda) + \Delta \\ &= (2g - 2h + 1) + (2h - g - 1) \\ &= g \end{aligned}$$

então, $g(\Lambda') = g$.

Assim, Λ' é fortemente descendido, tem gênero g e h geradores efetivos, então $\Lambda' \in M(g, h)$.

Obtemos, então uma aplicação injetora de $M(2g - 2h + 1, g - h + 1)$ em $M(g, h)$ $\Lambda \mapsto \Lambda' = \tau(\Lambda, \Delta)$. De forma análoga obtemos uma aplicação injetora de $M(g, h)$ em $M(2g - 2h + 1, g - h + 1)$, $\Lambda \mapsto \tau(\Lambda, -\Delta)$. Como estas funções são inversas uma da outra segue que elas são bijetoras.

Portanto, $|M(g, h)| = |M(2g - 2h + 1, g - h + 1)|$. □

Lema 2.19. $\sum_{i=0}^{\infty} |M(2i + 1, i + 1)|\varphi^{-i}$ *converge.*

Demonstração. Seja Λ um semigrupo numérico qualquer de $M(2i+1, i+1)$. Como cada elemento de Λ em $[f(\Lambda)+1, 2m(\Lambda)-1]$ é um gerador efetivo de Λ, então $h(\Lambda) \geq 2m(\Lambda) - f(\Lambda) - 1$.

Como $f(\Lambda) \geq g(\Lambda)$, temos que

$$\begin{aligned} f(\Lambda) &\geq g(\Lambda) \\ &= 2i + 1 \\ &= 2h(\Lambda) - 1 \\ &\geq 2(2m(\Lambda) - f(\Lambda) - 1) - 1 \\ \Rightarrow f(\Lambda) &\geq 4m(\Lambda) - 2f(\Lambda) - 3 \\ \Rightarrow 2f(\Lambda) &\geq 4m(\Lambda) - 2f(\Lambda) - 3 + f(\Lambda) \\ \Rightarrow 3 + 4(f(\Lambda) - m(\Lambda)) &\geq f(\Lambda). \end{aligned}$$

Tendo provado que $3 + 4(f(\Lambda) - m(\Lambda)) \geq f(\Lambda)$ e sendo válido que $f(\Lambda) \geq m(\Lambda) - 1$, pois $f(\Lambda) + 1 \geq m(\Lambda)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} |M(2i+1, i+1)|\varphi^{-i} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\Lambda \in M(2i+1,i+1)} \varphi^{-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\Lambda \in M(2i+1,i+1)} \varphi^{(-2i-1)+(i+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\Lambda \in M(2i+1,i+1)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \\
&\leq \sum_{\substack{m,f \\ f \geq m-1 \\ f \leq 3+4(f-m)}} \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(m,f)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \\
&\leq \sum_{\substack{m,f \\ f \geq m-1 \\ f \leq 3+4(f-m)}} \left(5\,(f-m+2) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{f-m-1} \right) \\
&= 5 \sum_{\substack{m,f \\ f \geq m-1 \\ f \leq 3+4(f-m)}} (f-m+2) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{f-m-1} \\
&\leq 5 \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2)(3+4k) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k-1} \\
&\leq 5 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(3+4k) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

na quarta passagem utilizamos as observações acima, na quinta o Lema 2.1 e na sétima substituímos $(f-m)$ por k e usamos que há no máximo $(3+4k)$ possibilidades para f.

Vamos utilizar o Teste da Razão para provar que a série $5 \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$, é convergente, onde $a_k = (3+4k)(k+2) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k-1}$.

Temos que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{(3+4(k+1))(k+1+2) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k+1-1}}{(3+4k)(k+2) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k-1}} \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{(4k+7)(k+3) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k}}{(4k+3)(k+2) \left(\frac{1.618}{\varphi} \right)^{k-1}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)\lim_{k\to\infty}\frac{(4k^2+19k+21)}{(4k^2+11k+6)} \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)\lim_{k\to\infty}\frac{(\frac{4k^2}{k^2}+\frac{19k}{k^2}+\frac{21}{k^2})}{(\frac{4k^2}{k^2}+\frac{11k}{k^2}+\frac{6}{k^2})} \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right) \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Logo, a série $5\sum_{k\in\mathbb{N}} a_n$ é converge, digamos para a.

Observemos que as reduzidas da série $\sum_{i=0}^{\infty}|M(2i+1,i+1)|\varphi^{-i}$ formam uma sequência limitada por a, portanto, a série $\sum_{i=0}^{\infty}|M(2i+1,i+1)|\varphi^{-i}$ é convergente. □

Lema 2.20. $F_n \leq \varphi^{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução.

Para $n = 0$, $F_0 = 0$ e $\varphi^{0-1} = \varphi^{-1} > 0$, logo $F_0 < \varphi^{0-1}$.

Se $n = 1$, $F_1 = 1$ e $\varphi^{1-1} = \varphi^0 = 1$, então $F_1 = \varphi^{1-1}$.

Tomando $n = 2$, $F_2 = 1$ e $\varphi^{2-1} = \varphi^1 = \varphi$, então $F_2 < \varphi^{2-1}$.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para todo natural menor ou igual a n. Provaremos que o resultado é válido para $n+1$, isto é, $F_{n+1} \leq \varphi^n$.

Temos que,

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&\leq \varphi^{n-1} + \varphi^{(n-1)-1} \\
&= \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \\
&= \varphi^n.
\end{aligned}$$

Então, $F_{n+1} \leq \varphi^n$. A segunda passagem segue da hipótese de indução e a última do Lema 1.14.

Portanto, $F_n \leq \varphi^{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$ □

O trabalho desenvolvido nesta seção tem se direcionado a demonstrarmos que $n_{g,2} = O(\varphi^g)$. Os resultados obtidos até aqui nos põem em condições de conseguirmos sua demonstração.

Dado $\Lambda \in \mathcal{S}_2$ temos que $h(\Lambda) + g(\Lambda) \geq g$ e $g(\Lambda) - h(\Lambda) < \frac{g}{3}$, assim,

$$\begin{aligned}
n_{g,2} &= \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_2} N_g(\Lambda) \\
&= \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{S}_2 \\ g(\Lambda) - h(\Lambda) = i}} N_g(\Lambda) \\
&\leq \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{S}_2 \\ g(\Lambda) - h(\Lambda) = i}} \binom{h(\Lambda)}{g - g(\Lambda)} \\
&\leq \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} \sum_{i < h \leq g - i} |M(h+i, h)| \binom{h}{g - i - h} \\
&\leq \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} \sum_{h = i+1}^{g-i} |M(h+i, h)| \binom{h}{g - i - h} \\
&= \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} \Bigg[|M(2i+1, i+1)| \binom{i+1}{g - 2i - 1} + \\
&\quad |M(2i+2, i+2)| \binom{i+2}{g - 2i - 2} + \ldots + \\
&\quad |M(g, g-i)| \binom{g-i}{0} \Bigg] \\
&= \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} |M(2i+1, i+1)| \sum_{h=i+1}^{g-i} \binom{h}{g - i - h} \\
&\leq \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} |M(2i+1, i+1)| F_{g-i+1} \\
&\leq \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} |M(2i+1, i+1)| \varphi^{g-i} \\
&= \varphi^g \sum_{0 \leq i < \frac{g}{3}} |M(2i+1, i+1)| \varphi^{-i} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

A terceira passagem segue do Lema 1.16. A quarta passagem vale, pois se $\Lambda \in \mathcal{S}_2$ e $g(\Lambda) - h(\Lambda) = i$, então Λ é fortemente descendido pela propriedade ($P1$), com gênero $g(\Lambda) = h(\Lambda) + i$ e com $h(\Lambda)$ geradores efetivos, logo $\Lambda \in M(h(\Lambda) + i, h(\Lambda))$. Ainda, $i < h(\Lambda) \leq g - i$, pois $g \geq g(\Lambda)$ e $2h(\Lambda) > g(\Lambda)$ pela propriedade ($P2$), logo $i = g(\Lambda) - h(\Lambda) < 2h(\Lambda) - h(\Lambda) = h(\Lambda) \Rightarrow i < h(\Lambda)$ e como $h(\Lambda) = g(\Lambda) - i \leq g - i \Rightarrow i < h(\Lambda) \leq g - i$, tomando $h(\Lambda) = h$, segue a desigualdade.

Para verificarmos a sétima passagem, devemos provar que $|M(h+i, h)| = |M(2i+$

$1, i+1)|,\ h = i+2, \ldots, i+(g-2i)$, podemos escrever $h = i+j,\ j = 2, \ldots, g-2i$. Temos que,

$$|M(h+i,h)| = |M((i+j)+i, i+j)| = |M(2i+j, i+j)|,$$

como $2(i+j) > 2i+j$, segue do Lema 2.18 que

$$|M(2i+j, i+j)| = |M(2(2i+j)-2(i+j)+1, (2i+j)-(i+j)+1)| = |M(2i+1, i+1)|.$$

Portanto, $|M(h+i,h)| = |M(2i+1,i+1)|,\ h = i+2, \ldots, i+(g-2i)$.

A oitava passagem segue do fato que,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{h=i+1}^{g-i} \binom{h}{g-i-h} \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} \binom{h}{g-i-h} = F_{g-i+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{h=i+1}^{g-i} \binom{h}{g-i-h} \leq F_{g-i+1}.$$

A nona passagem segue do Lema 2.20.

Portanto,

$$n_{g,2} \ \leq \ \varphi^g \sum_{0\leq i<\frac{g}{3}} |M(2i+1,i+1)|\varphi^{-i}.$$

Como, $\sum\limits_{0\leq i<\frac{g}{3}} |M(2i+1,i+1)|\varphi^{-i} > 0$ e finito, tomando $c = \sum\limits_{0\leq i<\frac{g}{3}} |M(2i+1,i+1)|\varphi^{-i}$, temos que,

$$0 \leq n_{g,2} \leq c\varphi^g,\ \forall\ g \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $n_{g,2} = O(\varphi^g)$.

2.2 Estimando $n_{g,3}$

Nesta seção mostraremos que $n_{g,3} = o(\varphi^g)$.

Definição 2.21. Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos

$$\begin{aligned} o(\sigma(n)) &= \{\psi(n) \mid \text{se para toda constante real positiva } c \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ &\quad 0 \leq \psi(n) < c\sigma(n), \ \forall\, n \geq n_0\}. \end{aligned}$$

Quando escrevermos $\psi(n) = o(\sigma(n))$, estaremos indicando que $\psi(n) \in o(\sigma(n))$.

Se $\sigma(n) \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, claramente $\psi(n) = o(\sigma(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{\sigma(n)} = 0$.

Seja Λ um semigrupo numérico qualquer de $\mathcal{S}_3$. Como os números no intervalo $[f(\Lambda)+1, 2m(\Lambda)-1]$ são geradores efetivos de Λ, então

$$h(\Lambda) \geq 2m(\Lambda) - f(\Lambda) - 1. \tag{2.2-5}$$

Como $\Lambda \in \mathcal{S}_3$, vale que

$$g(\Lambda) - h(\Lambda) \geq \frac{g}{3}. \tag{2.2-6}$$

Combinando as desigualdades 2.2-5 e 2.2-6, temos que

$$\begin{aligned} g(\Lambda) \geq \frac{g}{3} + h(\Lambda) &\geq \frac{g}{3} + (2m(\Lambda) - f(\Lambda) - 1) \\ \Rightarrow \frac{g(\Lambda)}{2} &\geq \frac{g}{6} + m(\Lambda) - \frac{f(\Lambda)}{2} - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -m(\Lambda) &\geq \frac{g}{6} - \frac{f(\Lambda)}{2} - \frac{1}{2} - \frac{g(\Lambda)}{2} \\ \Rightarrow f(\Lambda) - m(\Lambda) &\geq \frac{g}{6} - \frac{1}{2} + \left(\frac{f(\Lambda)}{2} - \frac{g(\Lambda)}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $f(\Lambda) \geq g(\Lambda)$, então

$$\begin{aligned} f(\Lambda) - m(\Lambda) &\geq \frac{g}{6} - \frac{1}{2} \\ &> \frac{g}{6} - 1. \end{aligned}$$

Notemos que se $N_g(\Lambda) > 0$, então

$$m(\Lambda) \leq g(\Lambda) + 1 \leq g + 1.$$

Combinando esses fatos com os Lemas 1.16 e 2.1, encontramos que

$$n_{g,3} \leq 5\varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} (6k+7)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
n_{g,3} &= \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_3} N_g(\Lambda) \\
&\leq \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{S}_3 \\ m(\Lambda) \leq g+1}} \varphi^{(g-g(\Lambda)+h(\Lambda))} \\
&= \varphi^g \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{S}_3 \\ m(\Lambda) \leq g+1}} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \\
&\leq \varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} \sum_{\substack{f-m=k \\ m \leq g+1}} \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(m,f)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \\
&\leq \varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} \sum_{\substack{f-m=k \\ m \leq g+1}} 5(f-m+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1} \\
&\leq \varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} \sum_{\substack{f-m=k \\ m \leq g+1}} 5(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1} \\
&\leq 5\varphi^g(g+1) \sum_{k>\frac{g}{6}-1} (k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1} \\
&= 5\varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} (g+1)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1} \\
&\leq 5\varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} (6k+7)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Na sétima passagem usamos que temos no máximo $(g+1)$ possibilidades para m, e na nona que sendo $k > \frac{g}{6} - 1 \Rightarrow 6k + 6 > g \Rightarrow 6k + 7 > g + 1$.

Vamos mostrar que a série

$$5\varphi^g \sum_{k>\frac{g}{6}-1} a_k, \text{ onde } a_k = (6k+7)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1}$$

é convergente.

Como g é sempre maior ou igual a zero, então $\frac{g}{6} - 1 \geq -1$, logo $k > 0$. Assim,

$(6k+7)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1} \geq 0$ então,

$$\sum_{k>\frac{g}{6}-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Assim, mostrando a convergência da série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, segue a convergência da série $5\varphi^g \sum\limits_{k>\frac{g}{6}-1} a_k$.

Fazendo uso do Teste da Razão, mostraremos que a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(6(k+1)+7)((k+1)+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{(k+1)-1}}{(6k+7)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(6k+13)(k+3)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k}}{(6k+7)(k+2)\left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{k-1}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(6k^2+31k+39)}{(6k^2+19k+14)}\left(\frac{1.618}{\varphi}\right) \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right) \lim_{k\to\infty} \frac{(6k^2+31k+39)}{(6k^2+19k+14)} \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right) \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{6k^2}{k^2}+\frac{31k}{k^2}+\frac{39}{k^2}}{\frac{6k^2}{k^2}+\frac{19k}{k^2}+\frac{14}{k^2}} \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right) \lim_{k\to\infty} \frac{6+\frac{31}{k}+\frac{39}{k^2}}{6+\frac{19}{k}+\frac{14}{k^2}} \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right) 1 \\
&= \left(\frac{1.618}{\varphi}\right) \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Portanto, a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente, então a série $5\varphi^g \sum\limits_{k>\frac{g}{6}-1} a_k$ é convergente.

Seja $c_g = 5 \sum\limits_{k>\frac{g}{6}-1} a_k$, vamos mostrar que $\varphi^g c_g = o(\varphi^g)$, para isto devemos provar que para toda constante real positiva c existe $g_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \varphi^g c_g < c\varphi^g,\ \forall g \geq g_0$, isto é equivalente a provarmos que $c_g < c,\ \forall g \geq g_0$.

Dado uma constante real positiva c, pelo Critério de Cauchy aplicado a série $\sum\limits_{k>\frac{g}{g}-1} a_k$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| &< \frac{c}{2 \cdot 5}, \ \forall\, n \geq n_0, \forall\, p \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) &< \frac{c}{2 \cdot 5}, \ \forall\, n \geq n_0, \forall\, p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tomando $g_0 = 6n_0 + 6 \Rightarrow \frac{g_0}{6} - 1 = n_0$, temos que

$$a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+1} + a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+2} + \ldots + a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+p} < \frac{c}{2 \cdot 5}, \ \forall\, p \in \mathbb{N}$$

então,

$$\lim_{p\to\infty} \left(a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+1} + a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+2} + \ldots + a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+p} \right) \leq \frac{c}{2 \cdot 5} < \frac{c}{5}.$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} \left(a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+1} + a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+2} + \ldots + a_{\left(\frac{g_0}{6}-1\right)+p} \right) &= \frac{c_{g_0}}{5} \\ \Rightarrow \frac{c_{g_0}}{5} &< \frac{c}{5} \\ \Rightarrow c_{g_0} &< c. \end{aligned}$$

Como $c_g \leq c_{g_0}, \ \forall\ g \ \geq g_0$, então $c_g < c, \ \forall g \geq g_0$. Portanto, $\varphi^g c_g = o(\varphi^g)$.

Como $n_{g,3} \leq 5\varphi^g \sum\limits_{k>\frac{g}{6}-1} a_k$, então $n_{g,3} = o(\varphi^g)$.

De fato, dado uma constante real positiva c, como $\varphi^g c_g = o(\varphi^g)$, existe $g_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \varphi^g c_g < c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0 \Rightarrow 0 \leq n_{g,3} < c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0$.

Portanto, $n_{g,3} = o(\varphi^g)$.

2.3 Estimando n_g

Nesta seção estimaremos o número de semigrupos numéricos, provaremos as Conjecturas

$$\sup_{g\in\mathbb{N}} t_g\varphi^{-g} < \infty \tag{2.3-7}$$

$$\lim_{g\to\infty} t_g\varphi^{-g} = S \tag{2.3-8}$$

$$S < \infty, \tag{2.3-9}$$

demonstraremos o Teorema 2.2 e por último provaremos o Teorema abaixo.

Teorema 2.22.

$$\lim_{g\to\infty} \frac{t_g}{n_g} = 1 \tag{2.3-10}$$

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_{g+1}}{n_g} = \varphi \tag{2.3-11}$$

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g} = 1 \tag{2.3-12}$$

$$n_{g+1} \geq n_g, \text{para g suficientemente grande.} \tag{2.3-13}$$

Nas seções anteriores provamos que:

$$\begin{aligned} n_{g,1} &= 0. \\ n_{g,2} &\leq t_g. \\ n_{g,2} &= O(\varphi^g). \\ n_{g,3} &= o(\varphi^g). \end{aligned}$$

Inicialmente vamos estimar o número de semigrupos numéricos, mostrando que $n_g = O(\varphi^g)$.

De fato, como $n_{g,2} = O(\varphi^g)$, existem uma constante real positiva c e $g_1 \in \mathbb{N}$, tais que

$$0 \leq n_{g,2} \leq c\varphi^g, \ \forall\ g \geq g_1.$$

Como $n_{g,3} = o(\varphi^g)$, então para toda constante real positiva $d > 0$, existe $g_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq n_{g,3} < d\varphi^g, \ \forall\, g \geq g_2.$$

Tomando $d = c$, existe g_2' tal que

$$0 \leq n_{g,3} < c\varphi^g, \ \forall\, g \geq g_2'.$$

Assim,

$$0 \leq n_{g,2} + n_{g,3} \quad \leq \quad c\varphi^g + c\varphi^g = 2c\varphi^g, \quad \forall\, g \geq max\{g_1, g_2'\}.$$

Portanto, $n_g = n_{g,2} + n_{g,3} = O(\varphi^g)$.

Necessitamos fazer as seguintes verificações para prosseguirmos.

(i) $t_g = O(\varphi^g)$.

(ii) $n_g - t_g = o(\varphi^g)$.

(i) Como $t_g \leq n_g = n_{g,2} + n_{g,3} = O(\varphi^g)$, existem uma constante real positiva c e $g_0 \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq n_{g,2} + n_{g,3} \leq c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0 \Rightarrow 0 \leq t_g \leq c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0$.

Portanto,

$$t_g = O(\varphi^g).$$

(ii) Devemos verificar que para toda constante real positiva c, existe $g_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq n_g - t_g < c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0$.

De fato, temos que $n_{g,3} = o(\varphi^g)$ e $n_g - t_g \leq n_{g,3}$, pois $n_g - t_g = n_{g,2} + n_{g,3} - t_g = n_{g,3} + (n_{g,2} - t_g) \leq n_{g,3}$. Assim, dada uma constante real positiva c, existe $g_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq n_{g,3} < c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0$, então $0 \leq n_g - t_g \leq n_{g,3} < c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0 \Rightarrow 0 \leq n_g - t_g < c\varphi^g, \ \forall g \geq g_0$.

Portanto,

$$n_g - t_g = o(\varphi^g).$$

Vamos à prova da Conjectura 2.3-7. Como $t_g = O(\varphi^g)$, existem uma constante real positiva c e $g_0 \in \mathbb{N}$ tais que $0 \leq t_g \leq c\varphi^g,\ \forall g \geq g_0 \Rightarrow 0 \leq t_g\varphi^{-g} \leq c,\ \forall g \geq g_0$.

Portanto,

$$\sup_{g \in \mathbb{N}} t_g \varphi^{-g} < \infty.$$

Segue imediatamente que,

$$\lim_{g\to\infty} t_g\varphi^{-g} = S < \infty,$$

ficando provadas as Conjecturas 2.3-8 e 2.3-9.

Fazendo uso da Conjectura 2.3-8, verificaremos o Teorema 2.2. Como $n_g - t_g = o(\varphi^g)$, temos que

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_g - t_g}{\varphi^g} = 0$$

então,

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_g}{\varphi^g} = \lim_{g\to\infty} \frac{t_g}{\varphi^g}.$$

Portanto,

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_g}{\varphi^g} = S.$$

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 2.22. Utilizando o Teorema 2.2 e a igualdade 2.3-8, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{g\to\infty} \frac{t_g}{n_g} &= \lim_{g\to\infty} \frac{\frac{t_g}{\varphi^g}}{\frac{n_g}{\varphi^g}} \\ &= \frac{\lim_{g\to\infty} \frac{t_g}{\varphi^g}}{\lim_{g\to\infty} \frac{n_g}{\varphi^g}} \\ &= \frac{S}{S} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{g\to\infty} \frac{t_g}{n_g} = 1.$$

Para provaremos a igualdade 2.3-11, faremos uso do Teorema 2.2. Temos que,

$$S = \lim_{g\to\infty} n_g \varphi^{-g} = \lim_{g\to\infty} n_{g+1} \varphi^{-(g+1)}$$

$$\Rightarrow \varphi S = \varphi \lim_{g\to\infty} n_{g+1} \varphi^{-(g+1)} = \lim_{g\to\infty} n_{g+1} \varphi^{-g}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\lim_{g\to\infty} \frac{n_{g+1}}{n_g} &= \lim_{g\to\infty} \frac{n_{g+1}\varphi^{-g}}{n_g \varphi^{-g}} \\
&= \frac{\lim\limits_{g\to\infty} n_{g+1}\varphi^{-g}}{\lim\limits_{g\to\infty} n_g \varphi^{-g}} \\
&= \frac{\varphi S}{S} \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{g\to\infty} \frac{n_{g+1}}{n_g} = \varphi.$$

Vamos verificar a veracidade da igualdade 2.3-12, usando o Teorema 2.2. Temos que,

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{g\to\infty} n_g \varphi^{-g} \\
&= \lim_{g\to\infty} n_{g-1} \varphi^{-(g-1)} \\
&= \lim_{g\to\infty} n_{g-2} \varphi^{-(g-2)}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\varphi^2 S = \varphi^2 \lim_{g\to\infty} n_g \varphi^{-g} = \lim_{g\to\infty} n_g \varphi^{-g+2}$$

e

$$\varphi S = \varphi \lim_{g\to\infty} n_{g-1} \varphi^{-(g-1)} = \lim_{g\to\infty} n_{g-1} \varphi^{-(g-2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{g\to\infty}\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g} &= \lim_{g\to\infty}\left[\left(\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g}\right)\left(\frac{\varphi^{-g+2}}{\varphi^{-g+2}}\right)\right]\\
&= \lim_{g\to\infty}\frac{n_{g-1}\varphi^{-g+2}+n_{g-2}\varphi^{-g+2}}{n_g\varphi^{-g+2}}\\
&= \frac{\lim\limits_{g\to\infty}\left(n_{g-1}\varphi^{-g+2}+n_{g-2}\varphi^{-g+2}\right)}{\lim\limits_{g\to\infty} n_g\varphi^{-g+2}}\\
&= \frac{\lim\limits_{g\to\infty} n_{g-1}\varphi^{-g+2}+\lim\limits_{g\to\infty} n_{g-2}\varphi^{-g+2}}{\lim\limits_{g\to\infty} n_g\varphi^{-g+2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi S+S}{\varphi^2 S}\\
&= \frac{S(\varphi+1)}{\varphi^2 S}\\
&= \frac{\varphi+1}{\varphi^2}\\
&= \frac{\varphi+\varphi^0}{\varphi^2}\\
&= \frac{\varphi^2}{\varphi^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

na nona igualdade usamos o Lema 1.14.

Portanto,

$$\lim_{g\to\infty}\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g}=1.$$

Finalmente mostraremos a desigualdade 2.3-13.

Suponha por absurdo que $n_{g+1}<n_g$, então $\frac{n_{g+1}}{n_g}<1 \Rightarrow \lim\limits_{g\to\infty}\frac{n_{g+1}}{n_g}\leq 1$, o que é um absurdo, pois $\lim\limits_{g\to\infty}\frac{n_{g+1}}{n_g}=\varphi$.

Portanto, $n_{g+1}\geq n_g$, para g suficientemente grande.

CAPÍTULO 3

PROVA DO LEMA 2.1

Seja S um conjunto finito de inteiros positivos e sejam m, f e d inteiros positivos satisfazendo $d < f$. Podemos considerar esses números sem relações com semigrupos numéricos, mas vamos aplicar nossos resultados onde m é a multiplicidade e f é o número de Frobenius de um semigrupo numérico.

Definição 3.1. Dizemos que um subconjunto $U \subset S$ é $(m, f, d)-$*admissível* se as condições seguintes são satisfeitas:

(i) Não existem dois elementos em U cuja soma seja $f + m$.

(ii) Se $x \in U$ e $x + m \in S$, então $x + m \in U$.

Quando estiver claro no contexto que um conjunto é $(m, f, d)-$admissível por conveniência de notação o chamaremos simplesmente de admissível.

Exemplo 3.2. O subconjunto $\emptyset$ é um subconjunto admissível de S, pois não existem dois elementos em $\emptyset$ cuja soma seja $f + m$, logo vale (i), e não contradiz (ii).

$\mathcal{A}_{(m,f,d)}(S)$ denotará o conjunto de todos os subconjuntos $(m, f, d)-$admissíveis de S. Quando não houver risco de confusão, denotaremos $\mathcal{A}_{(m,f,d)}(S)$ simplesmente por $\mathcal{A}(S)$.

Exemplo 3.3. Seja $S = \{x\}$, $x \in \mathbb{N}^*$ tal que $x + x \neq f + m$. Os subconjuntos admissíveis de S são $\emptyset$ e S.

De fato, pelo exemplo anterior sabemos que $\emptyset$ é admissível. S é admissível, pois não existem dois elementos em S cuja soma seja $f+m$, então (i) é satisfeito, e não contradiz (ii), pois S possui um único elemento.

Portanto, $\mathcal{A}_{(m,f,d)}(S) = \{\emptyset, S\}$.

Seja $U \subset S$ um subconjunto admissível, definimos:

$$\begin{aligned} E(U,S) &= \{x \in S \,|\, x, x+m \notin U \,\mathrm{e}\, x-d \in U\} \\ E'(U,S) &= \{x \in U \,|\, x+m \in U\} \\ s(U,S) &= |E(U,S)| - |E'(U,S)|. \end{aligned}$$

Observe que o conjunto $E'(U,S)$ independe de S, mas é conveniente escrevermos dessa forma para ficarmos com uma notação padronizada e também para lembrarmos que U é um subconjunto admissível de S.

Exemplo 3.4. Seja S como no exemplo 3.2, sabemos que $\emptyset$ é admissível, logo

$$\begin{aligned} E(\emptyset,S) &= \{x \in S \,|\, x, x+m \notin \emptyset \,\mathrm{e}\, x-d \in \emptyset\} = \emptyset \\ E'(\emptyset,S) &= \{x \in \emptyset \,|\, x+m \in \emptyset\} = \emptyset \\ s(\emptyset,S) &= |E(\emptyset,S)| - |E'(\emptyset,S)| = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Seja S como no exemplo 3.3, sabemos que os subconjuntos admissíveis de S são $\emptyset$ e S. Assim,

$$\begin{aligned} E(S,S) &= \{x \in S \,|\, x, x+m \notin S \,\mathrm{e}\, x-d \in S\} = \emptyset \\ E'(S,S) &= \{x \in S \,|\, x+m \in S\} = \emptyset \\ s(S,S) &= |E(S,S)| - |E'(S,S)| = 0. \end{aligned}$$

$E(\emptyset,S)$, $E'(\emptyset,S)$ e $s(\emptyset,S)$ já foram determinados no exemplo anterior.

Definimos o $(m,f,d)-$*peso* do conjunto S por

$$\sum_{U \in \mathcal{A}_{(m,f,d)}(S)} \varphi^{-s(U,S)}$$

e o denotaremos por $w_{(m,f,d)}(S)$, ou simplesmente $w(S)$ quando estiver claro no contexto os valores de m, f e d. Se $S = \emptyset$, definimos que $w(S) = 1$.

Exemplo 3.6. Seja S como no exemplo 3.3, sabemos que $\mathcal{A}(S) = \{\emptyset, S\}$, $s(\emptyset, S) = 0$ e $s(S, S) = 0$, logo

$$\begin{aligned}
w(S) &= \sum_{U \in \mathcal{A}_{(m,f,d)}(S)} \varphi^{-s(U,S)} \\
&= \sum_{U \in \{\emptyset, S\}} \varphi^{-s(U,S)} \\
&= \varphi^{-s(\emptyset,S)} + \varphi^{-s(S,S)} \\
&= \varphi^0 + \varphi^0 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S) = 2$.

O seguinte Lema, que é fundamental para a prova do Lema 2.1, é enunciado aqui, mas sua prova requer uma construção de resultados, por isso será adiada por enquanto.

Lema 3.7. *Sejam m, f, e d inteiros positivos tal que $d < f$ e seja $S = \{m + d + 1, m + d + 2, \ldots, f - 1\}$. Então,*

$$w_{(m,f,d)}(S) \leq 1.618^{|S|+d+2}.$$

Definição 3.8. $\mathcal{S}(m, f, d)$ denotará o subconjunto de $\mathcal{S}(m, f)$ consistindo dos semigrupos numéricos cujo segundo menor elemento não nulo é $m + d$.

Para qualquer $\Lambda \in \mathcal{S}(m, f)$, sabemos que $f + 1 \in \Lambda$, logo $m + d \leq f + 1$, exceto no caso em que $m = f + 1$, neste caso $d = 1$, assim $m + d = f + 2$. Então, $d \leq f - m + 2$, logo

$$\mathcal{S}(m, f) = \bigcup_{d=1}^{f-m+2} \mathcal{S}(m, f, d). \tag{3.0-1}$$

Finalmente exibiremos a demonstração do Lema 2.1:

Demonstração. Fixe m, f e d e defina

$$S = \{m+d+1, m+d+2, \ldots, f-1\}.$$

Para cada $\Lambda \in \mathcal{S}(m,f,d)$, como Λ é fortemente descendido, então $f+m$ é um gerador efetivo de Λ pelo Lema 1.11, assim, não há dois elementos em Λ cuja soma seja $f+m$, logo não existem dois elementos em $\Lambda \cap S$ cuja soma seja $f+m$. Além disso, se $x \in \Lambda \cap S$ e $x+m \in S$ então $x+m \in \Lambda \cap S$, pois $x+m \in \Lambda$, já que Λ é um semigrupo numérico e $x, m \in \Lambda$. Portanto, $\Lambda \cap S$ é um subconjunto admissível de S.

Agora utilizaremos os conjuntos

$$\begin{aligned} E(\Lambda \cap S, S) &= \{x \in S \mid x, x+m \notin \Lambda \cap S \ e \ x-d \in \Lambda \cap S\} \\ E'(\Lambda \cap S, S) &= \{x \in \Lambda \cap S \mid x+m \in \Lambda \cap S\} \end{aligned}$$

para dar uma cota superior para o número de geradores efetivos de Λ.

Se $x \in S$ e $x+m \notin S$, então $x+m \in [f, f+m-1]$, ainda se $x+m \in \Lambda$, então $x+m > f$, logo $x+m \in [f+1, f+m-1]$. Resumindo, se $x \in S$, $x+m \notin S$ e $x+m \in \Lambda$, então $x+m \in [f+1, f+m-1]$.

Suponha que $x \in E(\Lambda \cap S, S)$, por definição $x-d \in \Lambda \cap S \Rightarrow x-d \in \Lambda$. Como $m+d \in \Lambda$, então $(x-d)+(m+d) = x+m \in \Lambda$ e não é um gerador efetivo de Λ. Portanto, se $x \in E(\Lambda \cap S, S)$ então $x \in S$, $x+m \notin S$ e $x+m \in \Lambda$, logo $x+m \in [f+1, f+m-1]$.

Suponha agora que $x \in \Lambda \cap S$ e $x \notin E'(\Lambda \cap S, S)$, como $x \in \Lambda$, então $x+m \in \Lambda$, assim pela definição de $E'(\Lambda \cap S, S)$ segue que $x+m \notin S$, logo $x+m \geq f$ e como $x+m \in \Lambda$ segue que $x+m \geq f+1$, então $x+m \in [f+1, f+m-1]$. Ainda, $x+m$ não é um gerador efetivo de Λ, pois $x, m \in \Lambda$.

Como $E(\Lambda \cap S, S) \cap ((\Lambda \cap S) \setminus E'(\Lambda \cap S, S)) = \emptyset$, então existem pelo menos

$$\begin{aligned} |E(\Lambda \cap S)| + |(\Lambda \cap S) \setminus E'(\Lambda \cap S)| &= |E(\Lambda \cap S)| + |\Lambda \cap S| - |E'(\Lambda \cap S)| \\ &= |\Lambda \cap S| + s(\Lambda \cap S) \end{aligned}$$

elementos de Λ no intervalo $[f+1, f+m-1]$ que não são geradores efetivos de Λ.

Como todos os geradores efetivos de Λ pertencem ao intervalo $[f+1, f+m]$, segue que,

$$\begin{aligned} h(\Lambda) &\leq m - (|\Lambda \cap S| + s(\Lambda \cap S)) \\ \Rightarrow h(\Lambda) &\leq m - |\Lambda \cap S| - s(\Lambda \cap S). \end{aligned} \tag{3.0-2}$$

Temos também que,

$$\begin{aligned} g(\Lambda) = f - |\Lambda \cap [1, f]| &= f - |\{m, m+d\} \dot{\cup} (\Lambda \cap S)| \\ \Rightarrow g(\Lambda) &= f - 2 - |\Lambda \cap S| \\ \Rightarrow |\Lambda \cap S| &= f - g(\Lambda) - 2, \end{aligned} \tag{3.0-3}$$

e

$$|S| = f - m - d - 1 \Rightarrow f - m = |S| + d + 1. \tag{3.0-4}$$

Substituindo a igualdade 3.0-3 em 3.0-2, temos que

$$h(\Lambda) \leq m - (f - g(\Lambda) - 2) - s(\Lambda \cap S) \Rightarrow g(\Lambda) - h(\Lambda) \geq f - m - 2 + s(\Lambda \cap S).$$

Substituindo a igualdade 3.0-4, na desigualdade acima obtemos que,

$$g(\Lambda) - h(\Lambda) \geq |S| + d - 1 + s(\Lambda \cap S) \Rightarrow -g(\Lambda) + h(\Lambda) \leq -|S| - d + 1 - s(\Lambda \cap S).$$

Abaixo usaremos esta desigualdade, o Lema 3.7 e ainda o fato de que para cada $\Lambda \in \mathcal{S}(m, f, d)$, $\Lambda \cap S \in \mathcal{A}(S)$.

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(m,f,d)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} &\leq \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(m,f,d)} \varphi^{-|S|-d+1-s(\Lambda \cap S)} \\ &= \varphi^{-|S|-d+1} \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(m,f,d)} \varphi^{-s(\Lambda \cap S)} \\ &\leq \varphi^{-|S|-d+1} \sum_{U \in \mathcal{A}(S)} \varphi^{-s(U)} \\ &= \varphi^{-|S|-d+1} w(S) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varphi^{-|S|-d+1} \cdot 1.618^{|S|+d+2} \\
&= \varphi \cdot 1.618^2 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{|S|+d} \\
&\leq 5 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{|S|+d} \\
&= 5 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-d-1+d} \\
&= 5 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1}.
\end{aligned}
$$

Usando 3.0-1, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\Lambda \in S(m,f)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} &= \sum_{\Lambda \in S(m,f,1)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} + \ldots + \sum_{\Lambda \in S(m,f,f-m+2)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \\
&\leq 5 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1} + \ldots + 5 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1} \\
&= (f-m+2) \left(5 \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1}\right) \\
&= 5(f-m+2) \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sum_{\Lambda \in S(m,f)} \varphi^{-g(\Lambda)+h(\Lambda)} \leq 5(f-m+2) \left(\frac{1.618}{\varphi}\right)^{f-m-1}.
$$

□

3.1 Prova do Lema 3.7

Esta seção será dedicada a prova do Lema 3.7. Vamos continuar considerando S, m, f e d como no início do capítulo.

Seja k um inteiro positivo, definimos

$$
V_k(S) = \{s \in S \mid s > k\}.
$$

Inicialmente vamos provar que o peso do conjunto $V_k(S)$ é menor ou igual ao peso do conjunto S, em especial temos o seguinte Lema.

Lema 3.9. *Nas condições acima temos que* $w(V_k(S)) \leq w(S)$.

Demonstração. Primeiramente verificaremos que se U é um subconjunto admissível de $V_k(S)$, então U é um subconjunto admissível de S, para isso devemos verificar os dois itens da definição 3.1.

(i) Não existem dois elementos em U cuja soma seja $f+m$: Segue do fato que U é um subconjunto admissível de $V_k(S)$.

(ii) Se $x \in U$ e $x+m \in S$, então $x+m \in U$: Como $x \in U$ então $x \in V_k(S)$, logo $x > k \Rightarrow x+m > k$, como $x+m \in S$, então $x+m \in V_k(S)$ e como U é um subconjunto admissível de $V_k(S)$ segue que $x+m \in U$ como queríamos.

Portanto, U é um subconjunto admissível de S. Disto segue que $\mathcal{A}(V_k(S)) \subseteq \mathcal{A}(S)$. Provaremos agora que $E(U, V_k(S)) = E(U,S)$ e $E'(U, V_k(S)) = E'(U,S)$.

- $E(U, V_k(S)) = E(U,S)$: ($\subseteq$) Dado $x \in E(U, V_k(S)) \Rightarrow x \in V_k(S)$, $x, x+m \notin U$ e $x-d \in U \Rightarrow x \in S$, $x, x+m \notin U$ e $x-d \in U \Rightarrow x \in E(U,S)$, logo $E(U, V_k(S)) \subseteq E(U,S)$.

  ($\supseteq$) Dado $x \in E(U,S) \Rightarrow x \in S$, $x, x+m \notin U$ e $x-d \in U$. Como $U \subset V_k(S)$ então $x-d > k \Rightarrow x > k$, logo $x \in V_k(S)$. Então, $x \in V_k(S)$, $x, x+m \notin U$ e $x-d \in U \Rightarrow x \in E(U, V_k(S))$, assim, $E(U,S) \subseteq E(U, V_k(S))$.

  Portanto, $E(U, V_k(S)) = E(U,S)$.

- $E'(U, V_k(S)) = E'(U,S)$: Segue diretamente das definições de $E'(U, V_k(S))$ e $E'(U,S)$.

Utilizando estes fatos temos que

$$\begin{aligned} w(V_k(S)) &= \sum_{U \in \mathcal{A}(V_k(S))} \varphi^{-s(U, V_k(S))} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{A}(V_k(S))} \varphi^{-(|E(U,V_k(S))| - |E'(U,V_k(S))|)} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{A}(V_k(S))} \varphi^{-(|E(U,S)| - |E'(U,S)|)} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{A}(V_k(S))} \varphi^{-s(U,S)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{U \in \mathcal{A}(S)} \varphi^{-s(U,S)} \\ &= w(S). \end{aligned}$$

Portanto, $w(V_k(S)) \leq w(S)$. $\square$

Outra observação importante é que o peso é sub-multiplicativo em certo sentido. Em particular, temos o seguinte Lema.

Lema 3.10. *Se S_1 e S_2 são conjuntos tal que $f+m \notin S_1 + S_2$, e além disso para quaisquer $s_1 \in S_1$ e $s_2 \in S_2$, temos que $s_1 \not\equiv s_2 \mod m$, então $w(S_1 \cup S_2) \leq w(S_1)w(S_2)$.*

Demonstração. Seja $S = S_1 \cup S_2$. Por hipótese, segue que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, pois se existisse $x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow x = s_1 \in S_1$ e $x = s_2 \in S_2 \Rightarrow s_1 \equiv s_2 \mod m$, o que contraria nossa hipótese, então $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Vamos provar que se U é um subconjunto admissível de S, então $U \cap S_1$ é um subconjunto admissível de S_1, para isso devemos verificar a definição 3.1.

(i) Não existem dois elementos em $U \cap S_1$ cuja soma seja $f+m$: Segue diretamente do fato de U ser admissível.

(ii) Se $x \in U \cap S_1$ e $x+m \in S_1$, então $x+m \in U \cap S_1$: Como $x \in U \cap S_1$ então $x \in U$, e como $x+m \in S_1$ então $x+m \in S$, logo $x+m \in U$, pois U é um subconjunto admissível de S, logo $x+m \in U \cap S_1$.

Portanto, $U \cap S_1$ é um subconjunto admissível de S_1. De forma análoga, verifica-se que $U \cap S_2$ é um subconjunto admissível de S_2.

Assim, existe uma bijeção entre os subconjuntos admissíveis U de S com os pares de subconjuntos admissíveis $(U \cap S_1, U \cap S_2)$ de S_1 e S_2.

Agora verificaremos que

$$|E(U,S)| \geq |E(U \cap S_1, S_1)| + |E(U \cap S_2, S_2)|.$$

Dado $x \in E(U \cap S_1, S_1) = \{x \in S_1 \,|\, x, x+m \notin U \cap S_1 \,\text{e}\, x-d \in U \cap S_1\}$ temos que, $x \in S_1 \subset S$ e $x \notin U \cap S_1$, então $x \notin U$, e $x-d \in U \cap S_1 \Rightarrow x-d \in U$. Como $x+m \notin U \cap S_1$ então $x+m \notin U$, pois se $x+m \in U$, então $x+m \notin S_1$, logo $x+m \in S_2$, o que é um absurdo, já que $x \in S_1$ e assim $x \equiv x + m \mod m$, o que contraria a hipótese. Resumindo, $x \in S$, $x, x + m \notin U$ e $x - d \in U$, assim, $x \in E(U, S)$. Portanto, $E(U \cap S_1, S_1) \subset E(U, S)$.

De forma análoga, se verifica que $E(U \cap S_2, S_2) \subset E(U, S)$ e como $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ então $E(U \cap S_1, S_1) \cap E(U \cap S_2, S_2) = \emptyset$, logo

$$|E(U,S)| \quad \geq \quad |E(U \cap S_1, S_1)| + |E(U \cap S_2, S_2)|.$$

Com um raciocínio análogo, podemos verificar que,

$$|E'(U,S)| \quad = \quad |E'(U \cap S_1, S_1)| + |E'(U \cap S_2, S_2)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
s(U,S) &= |E(U,S)| - |E'(U,S)| \\
&\geq (|E(U \cap S_1, S_1)| + |E(U \cap S_2, S_2)|) - (|E'(U \cap S_1, S_1)| + |E'(U \cap S_2, S_2)|) \\
&= (|E(U \cap S_1, S_1)| - |E'(U \cap S_1, S_1)|) + (|E(U \cap S_2, S_2)| - |E'(U \cap S_2, S_2)|) \\
&= s(U \cap S_1, S_1) + s(U \cap S_2, S_2).
\end{aligned}$$

Usando estes fatos, temos que

$$\begin{aligned}
w(S) &= \sum_{U \in \mathcal{A}(S)} \varphi^{-s(U,S)} \\
&= \sum_{\substack{U \cap S_1 \in \mathcal{A}(S_1) \\ U \cap S_2 \in \mathcal{A}(S_2)}} \varphi^{-s((U \cap S_1) \cup (U \cap S_2), S)} \\
&\leq \sum_{\substack{U \cap S_1 \in \mathcal{A}(S_1) \\ U \cap S_2 \in \mathcal{A}(S_2)}} \varphi^{-s(U \cap S_1, S_1) - s(U \cap S_2, S_2)} \\
&= \sum_{U \cap S_1 \in \mathcal{A}(S_1)} \varphi^{-s(U \cap S_1, S_1)} \sum_{U \cap S_2 \in \mathcal{A}(S_2)} \varphi^{-s(U \cap S_2, S_2)} \\
&= w(S_1) w(S_2).
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S) \leq w(S_1) w(S_2)$. $\square$

Utilizaremos este Lema para limitar o peso de um conjunto particionando-o e limitando o peso de cada parte separadamente.

Seja r um número inteiro entre 0 e $m-1$. Defina $S(r)$ como sendo o conjunto de todos os números no intervalo $[m, f]$ que são congruentes a r ou $f-r$ módulo m. Seja $I(r)$ o número de inteiros no intervalo $[m, f]$ congruentes a r módulo m. Assim,

$$\begin{aligned} S(r) &= \{x \in [m, f] \,|\, x \equiv r \bmod m \,\text{ou}\, x \equiv f-r \bmod m\} \\ &= \{x \in [m, f] \,|\, x \equiv r \bmod m\} \cup \{x \in [m, f] \,|\, x \equiv f-r \bmod m\} \\ &= \{x = r+qm \,|\, x \in [m, f]\} \cup \{x = f-r-km \,|\, x \in [m, f]\} \\ &= \{r+m, r+2m, \ldots, r+I(r)m\} \cup \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(I(r)-1)m\}. \end{aligned}$$

Da definição de $I(r)$ segue que $\{x = r+qm \,|\, x \in [m, f]\} = \{r+m, r+2m, \ldots, r+I(r)m\}$. Resta verificar que $\{x = f-r-km \,|\, x \in [m, f]\} = \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(I(r)-1)m\}$. Com efeito, como $f-r$ é o maior elemento de $[m, f]$ congruente a $f-r$ módulo m, basta provarmos que $f-r-(I(r)-1)m$ é o menor elemento de $[m, f]$ congruente a $f-r$ módulo m, para isso basta verificar que,

$$f-r-(I(r)-1)m \geq m > f-r-I(r)m.$$

De fato, como $f \geq r+I(r)m \Rightarrow f-r-(I(r)-1)m \geq m$ e como $r+(I(r)+1)m > f \Rightarrow m > f-r-I(r)m$.

Portanto,

$$S(r) = \{r+m, r+2m, \ldots, r+I(r)m\} \cup \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(I(r)-1)m\}.$$

Agora, assumiremos que $r \not\equiv f-r \mod m$, e provaremos que um subconjunto admissível U de $S(r)$ é da forma,

$$\begin{aligned} U &= \{r+(i+1)m, r+(i+2)m, \ldots, r+I(r)m\} \cup \\ &\quad \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(j-1)m\} \end{aligned}$$

com $i, j \in [0, I(r)]$ e $i \geq j$.

Por conveniência denotaremos $\{r+(i+1)m, r+(i+2)m, \ldots, r+I(r)m\}$ por A e $\{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(j-1)m\}$ por B. Observe que se $i = I(r)$ então $A = \emptyset$ e se $j = 0$ então $B = \emptyset$.

Seja U um subconjunto admissível de $S(r)$, pela condição (ii) da definição 3.1, segue que U é da forma

$$\begin{aligned} U &= \{r+(i+1)m, r+(i+2)m, \ldots, r+I(r)m\} \cup \\ & \quad \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(j-1)m\}, \end{aligned}$$

com $i, j \in [0, I(r)]$.

Vamos verificar que a condição $i \geq j$ é essencial para a condição (i) da definição 3.1.

De fato, suponha por absurdo que $i < j$, sendo $i < I(r)$, $j > 0$, segue que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, e como $i < j \Rightarrow j = i + l$, $l > 0$. Temos que $f - r - (j-1)m \in B$ e $r + (i+l)m = r + jm \in A$, então existem dois elementos em U cuja soma seja $f + m$, pois $(f - r - (j-1)m) + (r + jm) = f + m$, o que é um absurdo. Portanto, $i \geq j$.

Vamos verificar que a soma de quaisquer dois elementos de U é sempre diferente de $f + m$. Se somarmos quaisquer dois elementos de A ou B, o que resulta é sempre diferente de $f + m$, pois caso contrário teríamos que $r \equiv f - r \mod m$, o que é um absurdo. Resta verificarmos que se somarmos um elemento de A com um elemento de B o que resulta é diferente de $f+m$, em especial como $i \geq j$, segue que $(r+(i+1)m)+(f-r-(j-1)m) > f+m$. De fato, suponha por absurdo que

$$\begin{aligned} (r+(i+1)m)+(f-r-(j-1)m) &\leq f+m \\ \Rightarrow f+(i-j+2)m &\leq f+m \\ \Rightarrow (i-j+2)m &\leq m \\ \Rightarrow i-j+2 &\leq 1 \\ \Rightarrow i &\leq j-1 \\ \Rightarrow i &< j \end{aligned}$$

o que é um absurdo, logo $(r+(i+1)m)+(f-r-(j-1)m) > f+m$, então a soma de um elemento de A com um elemento de B é sempre maior do que $f+m$.

Então, a soma de quaisquer dois elementos de U é sempre diferente de $f + m$.

Portanto,

$$\begin{aligned} U &= \{r+(i+1)m, r+(i+2)m, \ldots, r+I(r)m\} \cup \\ & \quad \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(j-1)m\} \end{aligned}$$

com $i, j \in [0, I(r)]$ e $i \geq j$.

Dizemos que o subconjunto $U \subset S(r)$ admissível tem assinatura $(i, j, I(r))$.

O próximo Lema determina completamente o tamanho de $E'(U, S(r))$ através da assinatura de U.

Antes de enunciá-lo, notemos que se $r \not\equiv f - r \mod m$, então

$$\begin{aligned} & \{r+m, r+2m, \ldots, r+I(r)m\} \cap \\ & \cap \{f-r, f-r-m, \ldots, f-r-(I(r)-1)m\} = \emptyset \end{aligned} \tag{3.1-5}$$

e $|S(r)| = 2I(r)$.

Lema 3.11. *Suponha que um subconjunto admissível U de $S(r)$ tem assinatura $(i, j, I(r))$. Então*

$$|E'(U, S(r))| = \begin{cases} j-1, & se \quad i = I(r)\, e\, 1 \leq j \leq I(r). \\ I(r)-i-1 & se \quad 0 \leq i \leq I(r)-1\, e\, j = 0. \\ I(r)-i+j-2 & se \quad I(r) > i \geq j > 0. \\ 0 & se \quad i = I(r)\, e\, j = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que U tem assinatura $(i, j, I(r))$. Pelo que provamos acima, estes casos cobrem todas as possibilidades de assinatura de U.

Defina $A = \{r+(i+1)m, r+(i+2)m, \ldots, r+(I(r)-1)m\}$ e $B = \{f-r-m, f-r-2m, \ldots, f-r-(j-1)m\}$. Por definição $E'(U, S(r)) = \{x \in U \,|\, x+m \in U\}$, então $E'(U, S(r)) = A \dot{\cup} B$, a união é disjunta por 3.1-5. Vamos analisar os quatro casos do enunciado.

1º caso) $i = I(r)$ e $1 \leq j \leq I(r)$: Como $i = I(r) \Rightarrow A = \emptyset$, logo $|E'(U, S(r))| = |B| = j - 1$.

2º caso) $0 \leq i \leq I(r) - 1$ e $j = 0$: Sendo $j = 0 \Rightarrow B = \emptyset$, assim, $|E'(U, S(r))| = |A| = I(r) - i - 1$.

3º caso) $I(r) > i \geq j > 0$: Como $I(r) > i \geq j > 0$, então $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, logo, $|E'(U, S(r))| = |A| + |B| = (I(r) - i - 1) + (j - 1) = I(r) - i + j - 2$.

4º caso) $i = I(r)$ e $j = 0$: Sendo $i = I(r)$ e $j = 0$, temos que $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$, assim $|E'(U, S(r))| = |A| + |B| = 0$.

Portanto, temos o desejado. □

Seja l o número entre 0 e $m - 1$ congruente a $f - r$ módulo m. Seja $N(r)$ o menor inteiro não negativo n tal que $r + nd \geq l - nd$. Finalmente, defina

$$T(r) = \bigcup_{i=0}^{N(r)-1} S(r + id).$$

(Se $N(r) = 0$, tome $T(r) = \emptyset$).

Iremos determinar algumas cotas para $w(S(r))$ e $w(T(r))$.

Lema 3.12. *Seja r um inteiro satisfazendo $0 \leq r \leq m - 1$ e $r \not\equiv f - r \bmod m$. Então as seguintes cotas são verdadeiras:*

(a) Se $I(r) = 1$, então $|S(r)| = 2$, e

(i) $w(S(r)) \leq 3$.

(ii) $w(S(r) \setminus \{r + m\}) \leq 2 < 0.7640 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(iii) $w(S(r) \setminus \{r + m, f - r\}) = 1 < 0.3820 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(b) Se $I(r) = 2$, então $|S(r)| = 4$, e

(i) $w(S(r)) \leq 4 + 2\varphi < 1.0559 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(ii) $w(S(r) \setminus \{r + m\}) \leq 4 + \varphi < 0.8198 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(iii) $w(S(r) \setminus \{r + m, f - r - m\}) \leq 4 < 0.5837 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

Demonstração. Vamos determinar as possibilidades de assinaturas dos subconjuntos admissíveis $U \subset S(r)$ e então limitar $w(S(r))$, usando a desigualdade,

$$\begin{aligned} w(S(r)) &= \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-s(U)} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{|E'(U,S(r))| - |E(U,S(r))|} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{U\in\mathcal{A}(S(r))} \varphi^{|E'(U,S(r))|}$$

e o Lema 3.11.

(a) Se $I(r)=1$, então $S(r)=\{r+m\}\cup\{f-r\}$, segue que $|S(r)|=2$ pela igualdade 3.1-5.

(i) Os subconjuntos admissíveis de $S(r)$ são aqueles que possuem assinaturas $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,1)$ digamos U_1, U_2 e U_3 respectivamente, assim, $\mathcal{A}(S(r))=\{U_1,U_2,U_3\}$. Pelo Lema 3.11, $|E'(U_1,S(r))|=0$, $|E'(U_2,S(r))|=0$ e $|E'(U_3,S(r))|=0$.

Então,

$$\begin{aligned} w(S(r)) &\leq \sum_{U\in\mathcal{A}(S(r))} \varphi^{|E'(U,S(r))|} \\ &= \varphi^{|E'(U_1,S(r))|}+\varphi^{|E'(U_2,S(r))|}+\varphi^{|E'(U_3,S(r))|} \\ &= \varphi^0+\varphi^0+\varphi^0 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S(r))\leq 3$.

(ii) Agora mostraremos que, $w(S(r)\setminus\{r+m\})\leq 2<0.7640\cdot 1.618^{|S(r)|}$. Pelo exemplo 3.3, sabemos que $\mathcal{A}(S(r)\setminus\{r+m\})=\{\emptyset, S(r)\setminus\{r+m\}\}$, já que $(f-r)+(f-r)\neq f+m$, pois $r\not\equiv f-r \mod m$. Temos que, $|E'(\emptyset,S(r)\setminus\{r+m\})|=0$ e $|E'(S(r)\setminus\{r+m\},S(r)\setminus\{r+m\})|=0$.

Então,

$$\begin{aligned} w(S(r)\setminus\{r+m\}) &\leq \sum_{U\in\mathcal{A}(S(r)\setminus\{r+m\})} \varphi^{|E'(U,S(r)\setminus\{r+m\})|} \\ &= \varphi^{|E'(\emptyset,S(r)\setminus\{r+m\})|}+\varphi^{|E'(S(r)\setminus\{r+m\},S(r)\setminus\{r+m\})|} \\ &= \varphi^0+\varphi^0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S(r)\setminus\{r+m\})\leq 2<0.7640\cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(iii) Como $S(r)\setminus\{r+m,f-r\}=\emptyset$, por definição $w(S(r)\setminus\{r+m,f-r\})=1$.

Portanto, $w(S(r)\setminus\{r+m,f-r\})=1<0.3820\cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(b) Se $I(r) = 2$, então $S(r) = \{r+m, r+2m\} \cup \{f-r, f-r-m\}$, pela igualdade 3.1-5 $|S(r)| = 4$.

(i) Vamos provar que, $w(S(r)) \leq 4 + 2\varphi < 1.0559 \cdot 1.618^{|S(r)|}$. Os subconjuntos admissíveis de $S(r)$ são aqueles que possuem assinaturas $(2,0,2)$, $(2,1,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$, $(0,0,2)$ e $(2,2,2)$, digamos U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, e U_6 respectivamente, assim, $\mathcal{A}(S(r)) = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$.

Pelo Lema 3.11, temos que, $|E'(U_1, S(r))| = 0$, $|E'(U_2, S(r))| = 0$, $|E'(U_3, S(r))| = 0$, $|E'(U_4, S(r))| = 0$, $|E'(U_5, S(r))| = 1$ e $|E'(U_6, S(r))| = 1$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
w(S(r)) &\leq \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{|E'(U,S(r))|} \\
&= \varphi^{|E'(U_1,S(r))|} + \varphi^{|E'(U_2,S(r))|} + \varphi^{|E'(U_3,S(r))|} + \varphi^{|E'(U_4,S(r))|} + \varphi^{|E'(U_5,S(r))|} \\
&\quad + \varphi^{|E'(U_6,S(r))|} \\
&= \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^1 + \varphi^1 \\
&= 4 + 2\varphi.
\end{aligned}
$$

Portanto, $w(S(r)) \leq 4 + 2\varphi < 1.0559 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(ii) Antes de provarmos o desejado, verificaremos que se $U \subset S(r) \setminus \{r+m\}$ então U é um subconjunto admissível de $S(r) \setminus \{r+m\}$ se, e somente se, U é um subconjunto admissível de $S(r)$.

Seja U um subconjunto admissível de $S(r) \setminus \{r+m\}$ para provarmos que U é um subconjunto admissível de $S(r)$ devemos provar os dois itens da definição 3.1. O primeiro vale, pois U é um subconjunto admissível de $S(r) \setminus \{r+m\}$. Para provarmos o segundo item devemos verificar que se $x \in U$ e $x+m \in S(r)$ então $x+m \in U$. Suponha por absurdo que $x+m \notin U \Rightarrow x+m \notin S(r) \setminus \{r+m\}$, logo $x+m = r+m \Rightarrow x = r$, o que é um absurdo, pois $x = r \notin U$, então $x+m \in U$. Portanto, U é um subconjunto admissível de $S(r)$.

Suponha agora que U é um subconjunto admissível de $S(r)$, para mostrarmos que U é um subconjunto admissível de $S(r) \setminus \{r+m\}$ devemos verificar os dois itens da definição 3.1. O primeiro item vale, pois U é um subconjunto admissível de $S(r)$. Resta verificar que se, $x \in U$ e $x+m \in S(r) \setminus \{r+m\}$, então $x+m \in U$. De fato, se $x \in U$

e $x+m \in S(r)\setminus\{r+m\}$, então $x \in U$ e $x+m \in S(r)$, logo $x+m \in U$, pois U é um subconjunto admissível de $S(r)$. Portanto, U é um subconjunto admissível de $S(r)\setminus\{r+m\}$.

Isto garante que o número de subconjuntos admissíveis de $S(r)\setminus\{r+m\}$ é igual ao número de subconjuntos admissíveis de $S(r)$ que estão contidos em $S(r)\setminus\{r+m\}$.

Sabemos que os subconjuntos admissíveis de $S(r)$ são aqueles que possuem assinaturas $(2,0,2)$, $(2,1,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$, $(0,0,2)$ e $(2,2,2)$, então os subconjuntos admissíveis de $S(r)\setminus\{r+m\}$ são os subconjuntos admissíveis de $S(r)$ que possuem assinaturas $(2,0,2)$, $(2,1,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$, e $(2,2,2)$, digamos U_1, U_2, U_3, U_4 e U_5 respectivamente.

Como U_1, U_2, U_3, U_4 e U_5 são subconjuntos admissíveis de $S(r)$, e $E'(U_i, S(r)\setminus\{r+m\}) = E'(U_i, S(r))$, $i = 1,\ldots,5$, podemos utilizar o Lema 3.11 para determinar $|E'(U_i, S(r)\setminus\{r+m\})|$, $i = 1,2,3,4,5$.

Pelo Lema 3.11, $|E'(U_1, S(r)\setminus\{r+m\})| = 0$, $|E'(U_2, S(r)\setminus\{r+m\})| = 0$, $|E'(U_3, S(r)\setminus\{r+m\})| = 0$, $|E'(U_4, S(r)\setminus\{r+m\})| = 0$ e $|E'(U_5, S(r)\setminus\{r+m\})| = 1$.

Então,

$$
\begin{aligned}
w(S(r)\setminus\{r+m\}) &\leq \sum_{U\in\mathcal{A}(S(r)\setminus\{r+m\})} \varphi^{|E'(U,S(r)\setminus\{r+m\})|} \\
&= \varphi^{|E'(U_1,S(r)\setminus\{r+m\})|} + \varphi^{|E'(U_2,S(r)\setminus\{r+m\})|} + \varphi^{|E'(U_3,S(r)\setminus\{r+m\})|} \\
&\quad + \varphi^{|E'(U_4,S(r)\setminus\{r+m\})|} + \varphi^{|E'(U_5,S(r)\setminus\{r+m\})|} \\
&= \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^1 \\
&= 4 + \varphi.
\end{aligned}
$$

Portanto, $w(S(r)\setminus\{r+m\}) \leq 4+\varphi < 0.8198 \cdot 1.618^{|S(r)|}$.

(iii) De forma análoga ao que fizemos no item anterior é possível mostrarmos que se $U \subset S(r)\setminus\{r+m, f-r-m\}$ então U é um subconjunto admissível de $S(r)\setminus\{r+m, f-r-m\}$ se, e somente se, U é um subconjunto admissível de $S(r)$.

Como os subconjuntos admissíveis de $S(r)$ são aqueles que possuem assinaturas $(2,0,2)$, $(2,1,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$, $(0,0,2)$ e $(2,2,2)$, então os subconjuntos admissíveis de $S(r)\setminus\{r+m, f-r-m\}$ são os subconjuntos admissíveis de $S(r)$ que possuem assinaturas $(2,0,2)$, $(2,1,2)$, $(1,0,2)$ e $(1,1,2)$, digamos U_1, U_2, U_3 e U_4 respectivamente.

Pelo Lema 3.11, $|E'(U_1, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})| = 0$, $|E'(U_2, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})| = 0$, $|E'(U_3, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})| = 0$, $|E'(U_4, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})| = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} w(S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\}) &\leq \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})} \varphi^{|E'(U, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})|} \\ &= \varphi^{|E'(U_1, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})|} + \varphi^{|E'(U_2, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})|} \\ &\quad + \varphi^{|E'(U_3, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})|} + \varphi^{|E'(U_4, S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\})|} \\ &= \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^0 + \varphi^0 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S(r) \setminus \{r+m, f-r-m\}) \leq 4 < 0.5837 \cdot 1.618^{|S(r)|}$. □

Lema 3.13. *Seja r um inteiro satisfazendo $0 \leq r \leq m-1$ e $r \not\equiv f-r \mod m$. Também suponha que $I(r) \geq 3$. Então $|S(r)| = 2I(r)$, e*

$$w(S(r)) \leq 0.8755 \cdot 1.618^{|S(r)|}.$$

Demonstração. Da igualdade 3.1-5, segue que $|S(r)| = 2I(r)$. Vamos particionar $\mathcal{A}(S(r)) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, de acordo com os quatro casos no enunciado do Lema 3.11, mais explicitamente:

1. A_1 consiste dos subconjuntos admissíveis $U \subset S(r)$ que possuem assinaturas $(I(r), j, I(r))$, com $1 \leq j \leq I(r)$.

2. A_2 consiste dos subconjuntos admissíveis $U \subset S(r)$ que possuem assinaturas $(i, 0, I(r))$, com $0 \leq i \leq I(r) - 1$.

3. A_3 consiste dos subconjuntos admissíveis $U \subset S(r)$ que possuem assinaturas $(i, j, I(r))$, com $I(r) > i \geq j > 0$.

4. A_4 consiste do subconjunto admissível $U \subset S(r)$ que possui assinatura $(I(r), 0, I(r))$, (neste caso temos somente o conjunto vazio).

Pelo Lema 3.11,

$$\sum_{U \in A_1} \varphi^{|E'(U, S(r))|} = \sum_{j=1}^{I(r)} \varphi^{j-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi^0 + \varphi^1 + \ldots + \varphi^{I(r)-1} \\
&= \sum_{k=0}^{I(r)-1} \varphi^k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{U \in A_2} \varphi^{|E'(U,S(r))|} &= \sum_{i=0}^{I(r)-1} \varphi^{I(r)-i-1} \\
&= \varphi^{I(r)-1} + \varphi^{I(r)-2} + \ldots + \varphi^0 \\
&= \varphi^0 + \ldots + \varphi^{I(r)-2} + \varphi^{I(r)-1} \\
&= \sum_{k=0}^{I(r)-1} \varphi^k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{U \in A_3} \varphi^{|E'(U,S(r))|} &= \sum_{I(r)>i\geq j>0} \varphi^{I(r)-i+j-2} \\
&= \sum_{I(r)-1\geq i\geq j\geq 1} \varphi^{I(r)-i+j-2} \\
&= \sum_{i=1}^{I(r)-1} \varphi^{I(r)-i-1} + \sum_{i=2}^{I(r)-1} \varphi^{I(r)-i} + \ldots + \sum_{i=I(r)-1}^{I(r)-1} \varphi^{2I(r)-i-3} \\
&= \left(\varphi^{I(r)-2} + \varphi^{I(r)-3} + \ldots + \varphi^1 + \varphi^0\right) + \left(\varphi^{I(r)-2} + \varphi^{I(r)-3} + \ldots + \varphi^1\right) \\
&\quad + \ldots + \left(\varphi^{I(r)-2}\right) \\
&= 1 \cdot \varphi^0 + 2 \cdot \varphi^1 + \ldots + (I(r)-1)\varphi^{I(r)-2} \\
&= \sum_{k=0}^{I(r)-2} (k+1)\varphi^k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{U \in A_4} \varphi^{|E'(U,S(r))|} &= \varphi^{|E'(\emptyset,S(r))|} \\
&= \varphi^0 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
w(S(r)) &= \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-s(U,S(r))} \\
&= \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-(|E(U,S(r))|-|E'(U,S(r))|)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{U\in\mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-|E(U,S(r))|+|E'(U,S(r))|} \\
&\le \sum_{U\in\mathcal{A}(S(r))} \varphi^{|E'(U,S(r))|} \\
&= \sum_{U\in A_1} \varphi^{|E'(U,S(r))|} + \sum_{U\in A_2} \varphi^{|E'(U,S(r))|} + \sum_{U\in A_3} \varphi^{|E'(U,S(r))|} + \sum_{U\in A_4} \varphi^{|E'(U,S(r))|} \\
&= \sum_{k=0}^{I(r)-1} \varphi^k + \sum_{k=0}^{I(r)-1} \varphi^k + \sum_{k=0}^{I(r)-2} (k+1)\varphi^k + 1 \\
&= 1 + 2\sum_{k=0}^{I(r)-1} \varphi^k + \sum_{k=0}^{I(r)-2} (k+1)\varphi^k \\
&= 1 + 2\varphi^{I(r)-1} + 2\sum_{k=0}^{I(r)-2} \varphi^k + \sum_{k=0}^{I(r)-2} (k+1)\varphi^k \\
&= 1 + 2\varphi^{I(r)-1} + \sum_{k=0}^{I(r)-2} (k+3)\varphi^k.
\end{aligned}
$$

Denotemos esta última expressão por W_N, onde $N = I(r)$. Provaremos por indução que $W_N \le 0.8755 \cdot 1.618^{2N}$ quando $N \ge 3$.

Se $N = 3$,

$$
\begin{aligned}
W_3 &= 1 + 2\varphi^{3-1} + \sum_{k=0}^{3-2}(k+3)\varphi^k \\
&= 1 + 2\varphi^2 + \sum_{k=0}^{1}(k+3)\varphi^k \\
&= 1 + 2\varphi^2 + (3\varphi^0 + 4\varphi^1) \\
&= 4 + 4\varphi + 2\varphi^2 \\
&< 0.8755 \cdot 1.618^6.
\end{aligned}
$$

Então, $W_3 < 0.8755 \cdot 1.618^{2\cdot 3}$.

Se $N = 4$,

$$
\begin{aligned}
W_4 &= 1 + 2\varphi^{4-1} + \sum_{k=0}^{4-2}(k+3)\varphi^k \\
&= 1 + 2\varphi^3 + \sum_{k=0}^{2}(k+3)\varphi^k \\
&= 1 + 2\varphi^3 + (3\varphi^0 + 4\varphi^1 + 5\varphi^2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= 4+4\varphi+5\varphi^2+2\varphi^3 \\ &< 0.8755\cdot 1.618^8. \end{aligned}$$

Então, $W_4 < 0.8755 \cdot 1.618^{2\cdot 4}$.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para todo natural maior ou igual a 4 e menor ou igual a N, provaremos que ele é válido para $N+1$, isto é, estamos supondo que $W_N \leq 0.8755 \cdot 1.618^{2N}$ e provaremos que $W_{N+1} \leq 0.8755 \cdot 1.618^{2(N+1)}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)W_N &= \left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)\left(1+2\varphi^{N-1}+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^k\right) \\
&= \varphi+\frac{1}{\varphi}+2\varphi^N+2\varphi^{N-2}+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^{k+1}+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^{k-1} \\
&= \varphi+\frac{1}{\varphi}+2\varphi^N+2\varphi^{N-2}+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^{k+1} \\
&\quad +(3\varphi^{-1}+4\varphi^0+\ldots+(N+1)\varphi^{N-3}) \\
&= \varphi+\frac{4}{\varphi}+2\varphi^N+2\varphi^{N-2}+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^{k+1}+\sum_{k=0}^{N-3}(k+4)\varphi^k \\
&> 1+2\varphi^N+2\varphi^{N-2}+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^{k+1}+\sum_{k=0}^{N-3}(k+4)\varphi^k \\
&> 1+2\varphi^N+2\varphi^0+\sum_{k=0}^{N-2}(k+3)\varphi^{k+1}+\sum_{k=0}^{N-3}(k+4)\varphi^k \\
&= 1+2\varphi^N+2\varphi^0+(3\varphi+4\varphi^2+\ldots+(N+1)\varphi^{N-1})+\sum_{k=0}^{N-3}(k+4)\varphi^k \\
&= 1+2\varphi^N+(2\varphi^0+3\varphi^1+4\varphi^2+\ldots+(N+1)\varphi^{N-1}) \\
&\quad +(4\varphi^0+5\varphi^1+\ldots+N\varphi^{N-4}+(N+1)\varphi^{N-3}) \\
&= 1+2\varphi^N+(3\varphi^0+4\varphi^1+\ldots+(N-1)\varphi^{N-4}+N\varphi^{N-3} \\
&\quad +(N+1)\varphi^{N-2}+(N+2)\varphi^{N-1})+(3\varphi^0+4\varphi^1+\ldots+(N-1)\varphi^{N-4} \\
&\quad +N\varphi^{N-3})-\varphi^{N-2}-\varphi^{N-1} \\
&= 1+2\varphi^N+\sum_{k=0}^{N-1}(k+3)\varphi^k+(3\varphi^0+4\varphi^1+\ldots+(N-1)\varphi^{N-4}+N\varphi^{N-3}) \\
&\quad -\varphi^{N-2}-\varphi^{N-1} \\
&\geq 1+2\varphi^N+\sum_{k=0}^{N-1}(k+3)\varphi^k+[(N-1)\varphi^{N-4}+N\varphi^{N-3}]-\varphi^{N-2}-\varphi^{N-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 2\varphi^N + \sum_{k=0}^{N-1}(k+3)\varphi^k + [(N-1) + N\varphi - \varphi^2 - \varphi^3]\varphi^{N-4} \\
&> 1 + 2\varphi^N + \sum_{k=0}^{N-1}(k+3)\varphi^k \\
&= W_{N+1}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
W_{N+1} &< \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right) W_N \\
&< 1.618^2 \cdot W_N \\
&\leq 1.618^2 \cdot 0.8755 \cdot 1.618^{2N} \\
&= 0.8755 \cdot 1.618^{2(N+1)}
\end{aligned}
$$

então, $W_{N+1} \leq 0.8755 \cdot 1.618^{2(N+1)}$. Portanto, $W_N \leq 0.8755 \cdot 1.618^{2N}$, $\forall\, N \geq 3$.

Portanto, $w(S(r)) \leq 0.8755 \cdot 1.618^{|S(r)|}$, $\forall\, I(r) \geq 3$. □

Antes de provarmos o próximo lema vamos verificar alguns resultados que ajudarão em sua prova e a tornará mais elegante.

Suponha que $0 \leq r \leq m-1$ e $r \not\equiv f - r \mod m$, então:

(i) $I(r) = I(r + id)$, $\forall\, i \in \{0, \ldots, N(r) - 1\}$.

(ii) $S(r + id) \cap S(r + jd) = \emptyset$, $\forall\, i, j \in \{0, \ldots, N(r) - 1\}$, $i \neq j$.

(i) Por definição,

$$
\begin{aligned}
I(r) &= |\{x \in [m, f] \,|\, x \equiv r \bmod m\}| = |\{r + m, r + 2m, \ldots, r + I(r)m\}| \\
I(r + id) &= |\{x \in [m, f] \,|\, x \equiv (r + id) \bmod m\}|.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que $I(r+id) = |\{(r+id)+m, (r+id)+2m, \ldots, (r+id)+I(r)m\}|$, para isso devemos verificar que $r+id < m$, $r+id+I(r)m \leq f$ e $r+id+(I(r)+1)m > f$.

De fato, como $N(r)$ é o menor inteiro não negativo n, tal que $r + nd \geq l - nd$ onde $l \in [0, m-1]$ e $l \equiv f - r \mod m$, e sendo $i < N(r)$, então $r + id < l - id \leq l < m$, logo $r + id < m$. Como $l \equiv f - r \mod m \Rightarrow l = f - r - mq \Rightarrow f = r + qm + l$, $l \in$

$[0, m-1]$, logo $q = I(r)$. Como $i < N(r)$, então $r + id < l - id < l \Rightarrow id < l$, disto segue que $r+id+I(r)m < r+l+I(r)m = f$. Sendo $f < r+(I(r)+1)m \Rightarrow f < r+id+(I(r)+1)m$. Então, $I(r+id) = |\{(r+id)+m, (r+id)+2m, \ldots, (r+id)+I(r)m\}|$.

Portanto, $I(r) = I(r+id)$, $\forall\, i \in \{0, \ldots, N(r)-1\}$, disto segue que $I(r+id) = I(r+jd)$, $\forall\, i, j \in \{0, \ldots, N(r)-1.\}$

(ii) Fixe $i, j \in \{0, \ldots, N(r)-1\}$ com $i \neq j$. Sejam,

$$\begin{aligned}
A &= \{(r+id)+m, (r+id)+2m, \ldots, (r+id)+I(r)m\} \\
B &= \{f-(r+id), f-(r+id)-m, \ldots, f-(r+id)-(I(r)-1)m\} \\
C &= \{(r+jd)+m, (r+jd)+2m, \ldots, (r+jd)+I(r)m\} \\
D &= \{f-(r+jd), f-(r+jd)-m, \ldots, f-(r+jd)-(I(r)-1)m\}.
\end{aligned}$$

Temos que $S(r+id) = A\dot{\cup}B$ e $S(r+jd) = C\dot{\cup}D$. A fim, de mostrarmos que $S(r+id)\cap S(r+jd) = \emptyset$, basta verificarmos que $A\cap C = \emptyset$, $A\cap D = \emptyset$, $B\cap C = \emptyset$ e $B\cap D = \emptyset$.

$A\cap C = \emptyset$: Suponha por absurdo que $A\cap C \neq \emptyset$, então $r+id+I(r)m = r+jd+I(r)m$, pois se $r+id+I(r)m \neq r+jd+I(r)m$, podemos supor sem perda de generalidade que $r+id+I(r)m < r+jd+I(r)m$, usando que $A\cap C \neq \emptyset$, existe $x \in A\cap C \Rightarrow x = r+id+qm = r+jd+km$, $q, k \in [1, I(r)]$, assim $r+id+(q+I(r)-k)m = r+jd+I(r)m$, e como $f \geq r+jd+I(r)m > r+id+I(r)m \Rightarrow f \geq r+id+(q+I(r)-k)m > r+id+I(r)m$, o que é um absurdo, pois o maior elemento de A é $r+id+I(r)m$. Logo, $r+id+I(r)m = r+jd+I(r)m \Rightarrow i = j$, o que contraria nossa hipótese. Portanto $A\cap C = \emptyset$.

$B\cap D = \emptyset$: Segue a mesma linha de raciocínio do caso anterior.

$A\cap D = \emptyset$: Suponha por absurdo que $A\cap D \neq \emptyset$, então $r+id+m = f-r-jd-(I(r)-1)m$, o que implica que $A = D$. Se $x \in A = D$ o elemento que somado a ele resulta em $f+m$ esta em B e em C, logo $B = C$, e assim $r+jd+m = f-r-id-(I(r)-1)m$. Como $r+id+m = f-r-jd-(I(r)-1)m = (f-r-I(r)m)-jd+m = l-jd+m > r+jd+m \Rightarrow r+id+m > r+jd+m \Rightarrow i > j$, e como $r+jd+m = f-r-id-(I(r)-1)m$, de forma análoga obtemos que $i < j$, logo $i = j$, o que é um absurdo, pois contraria nossa hipótese. Portanto,

$A \cap D = \emptyset$.

$B \cap C = \emptyset$: Análogo ao caso anterior.

Portanto, $S(r+id) \cap S(r+jd) = \emptyset$. Disto segue que $S(r+0d) \cap S(r+1d) \cap \ldots \cap S(r+(N(r)-1)d) = \emptyset$.

Corolário 3.14. *Seja r um inteiro satisfazendo $0 \leq r \leq m-1$ e $r \not\equiv f-r \mod m$. Suponha também que $I(r) \geq 3$. Então,*

$$w(T(r)) \leq 1.618^{|T(r)|}.$$

Demonstração. Como provamos que $S(r+0d) \cap S(r+1d) \cap \ldots \cap S(r+(N(r)-1)d) = \emptyset$, e como $T(r) = \bigcup_{i=0}^{N(r)-1} S(r+id)$ então $|T(r)| = \sum_{i=0}^{N(r)-1} |S(r+id)|$.

Vamos fazer uso dos Lemas 3.10 e 3.13, para provarmos que

$$w(T(r)) \leq 1.618^{|T(r)|}.$$

A fim de utilizarmos o Lema 3.10, precisamos provar que $f+m \notin S(r+id) + \left(\bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)\right)$ e se $x \in S(r+id)$ e $y \in \bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)$ então $x \not\equiv y \mod m, i \in \{0, \ldots, N(r)-1\}$.

De fato, se $x \in S(r+id)$ sabemos que o elemento que somado a ele resulta em $f+m$ pertence ao conjunto $S(r+id)$ e como $S(r+id) \cap \left(\bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)\right) = \emptyset$, então $f+m \notin S(r+id) + \left(\bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)\right)$. Agora se existisse $x \in S(r+id)$ e $y \in \bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)$ tal que $x \equiv y \mod m$, então $x = y+qm$, e como $m \leq x \leq f \Rightarrow m \leq y+qm \leq f$, assim $y+qm \in S(r+id)$ e $y+qm \in \bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)$, o que é um absurdo, assim não existe $x \in S(r+id)$ e $y \in \bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N(r)-1} S(r+jd)$ tal que $x \equiv y \mod m$.

Então, pelo Lema 3.10

$$w\left(S(r+id)\cup\left(\bigcup_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N(r)-1}S(r+jd)\right)\right)\leq w(S(r+id))w\left(\bigcup_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N(r)-1}S(r+jd)\right)$$

logo

$$\begin{aligned}
w(T(r)) &= w\left(\bigcup_{i=0}^{N(r)-1}S(r+id)\right)\\
&= w\left(S(r+0d)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{N(r)-1}S(r+id)\right)\right)\\
&\leq w(S(r+0d))w\left(\bigcup_{i=1}^{N(r)-1}S(r+id)\right)\\
&\vdots\\
&\leq w(S(r+0d))\dots w(S(r+(N(r)-1)d))\\
&= \prod_{i=0}^{N(r)-1}w(S(r+id)).
\end{aligned}$$

Como $0\leq r+id\leq m-1, \forall\, i\in\{0,\dots,N(r)-1\}$, para usarmos o Lema 3.13, resta verificar que $r+id\not\equiv f-r-id \mod m$, já que $I(r)\geq 3$ e $I(r)=I(r+id)$.

De fato, suponha que $r+id\equiv f-r-id \mod m$, então devemos ter $r+id = f-r-id-I(r)m$, e como $f=r+l+I(r)m$ então $l=r+2id$, o que é um absurdo, pois $r+id<l-id\Rightarrow r+2id<l$. Então $r+id\not\equiv f-r-id \mod m$.

Assim, pelo Lema 3.13

$$\begin{aligned}
w(T(r)) &\leq \prod_{i=0}^{N(r)-1}w(S(r+id))\\
&\leq \prod_{i=0}^{N(r)-1}0.8755\cdot 1.618^{|S(r+id)|}\\
&\leq \prod_{i=0}^{N(r)-1}1.618^{|S(r+id)|}\\
&= 1.618^{|T(r)|}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$w(T(r)) \leq 1.618^{|T(r)|}.$$

□

Agora iremos limitar o peso de $S(r)$ no caso em que $0 \leq r \leq m-1$ e $r \equiv f - r \mod m$.

Lema 3.15. *Seja r um inteiro satisfazendo $0 \leq r \leq m-1$ e $r \equiv f-r \mod m$ (se tal inteiro existe). Então, $|S(r)| = I(r)$, e*

$$w(S(r)) \leq 1.618^{|S(r)|}.$$

Demonstração. Seja l o resto da divisão de f por m, então

$$f = mq_1 + l, \qquad 0 \leq l \leq m-1.$$

Como $r \equiv f - r \mod m$, então $r = f - r - q_2 m \Rightarrow 2r = f - q_2 m$. Temos que, $f - q_2 m = mq_1 + l - q_2 m = qm + l$, onde $q = q_1 - q_2$, afirmamos que $q = 0$ ou $q = 1$, pois se $q > 1$ então $qm \geq 2m > 2m - 2$, o que é um absurdo, pois $l + qm = 2r \in [0, 2m-2]$. Assim, $2r = l$ ou $2r = l + m$, logo $r = \frac{l}{2}$ ou $\frac{l+m}{2}$.

Por hipótese, $r \equiv f - r \mod m$, logo $r + m \equiv f - r \mod m$, $r + 2m \equiv f - r \mod m, \ldots, r + I(r)m \equiv f - r \mod m$ (observe que $r + I(r)m = f - r$). Logo

$$S(r) = \{r+m, r+2m, \ldots, r+I(r)m\}.$$

Portanto, $|S(r)| = I(r)$.

Seja $\emptyset \neq U \subseteq S(r)$ um subconjunto admissível, então

$$U = \{r+im, r+(i+1)m, \ldots, r+I(r)m\} \quad i \leq I(r).$$

Vamos verificar que a soma de quaisquer dois elementos de U é maior que $f+m$.

Suponha por absurdo que existem $x, y \in U$ tais que $x+y \leq f+m$, como $x+y \neq f+m$, pois U é admissível, então $x + y < f + m$. Como $x, y \in U$, então $x = r + mk_1$, $y =$

$r + mk_2$, $i \leq k_1, k_2 \leq I(r)$. Então,

$$\begin{aligned}(r + mk_1) + (r + mk_2) &< f + m \\ &= (f - r) + (r + m) \\ &= (r + I(r)m) + (r + m) \\ &= (I(r) + 1)m + 2r\end{aligned}$$

então $k_1 + k_2 \leq I(r)$. Como $k_1, k_2 \geq i \Rightarrow i \leq k_1 + k_2 \leq I(r)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $k_1 \leq k_2$, então $i \leq k_1 + k_1 = 2k_1 \leq I(r)$.

Afirmamos que $(r + (I(r) + 1 - k_1)m) \in U$. Devemos verificar que $i \leq I(r) + 1 - k_1 \leq I(r)$. Sabemos que $I(r) \geq 2k_1 = k_1 + k_1 \geq k_1 + i > k_1 + i - 1 \Rightarrow I(r) > k_1 + i - 1 \Rightarrow I(r) + 1 - k_1 \geq i$, e como $k_1 \geq i \geq 1 \Rightarrow I(r) + 1 - k_1 \leq I(r)$.

Portanto, $r + (I(r) + 1 - k_1)m \in U$.

Como $r + k_1 m \in U$, então existem dois elementos em U cuja soma é $f + m$, que são $r + k_1 m$ e $r + (I(r) + 1 - k_1)m$, o que é um absurdo, já que U é admissível.

Portanto, a soma de quaisquer dois elementos de U é maior que $f + m$.

Disto temos que,

$$\begin{aligned}2(r + im) > f + m = 2r + (I(r) + 1)m \\ \Rightarrow 2i > I(r) + 1 \\ \Rightarrow i \geq \frac{I(r) + 1}{2} + 1 \\ \Rightarrow \frac{I(r) + 1}{2} + 1 \leq i \leq I(r).\end{aligned}$$

Temos que $E'(U, S(r)) = \{x \in U \mid x + m \in U\} = \{r + im, r + (i + 1)m, \ldots, r + (I(r) - 1)m\}$ e como $s(U, S(r)) = |E(U, S(r))| - |E'(U, S(r))| \geq -|E'(U, S(r))| = -(I(r) - i)$, então

$$\begin{aligned}w(S(r)) &= \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-s(U,S(r))} \\ &= 1 + \sum_{\substack{U \in \mathcal{A}(S(r)) \\ U \neq \emptyset}} \varphi^{-s(U,S(r))}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1 + \sum_{\substack{U \in \mathcal{A}(S(r)) \\ U \neq \emptyset}} \varphi^{|E'(U,S(r))|} \\
&= 1 + \sum_{\frac{I(r)+1}{2}+1 \leq i \leq I(r)} \varphi^{I(r)-i} \\
&= 1 + \sum_{i=\frac{I(r)+1}{2}+1}^{I(r)} \varphi^{I(r)-i} \\
&= 1 + (\varphi^{\frac{I(r)-1}{2}-1} + \varphi^{\frac{I(r)-1}{2}-2} + \ldots + \varphi^{0}) \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{\frac{I(r)-1}{2}-1} \varphi^{i} \\
&= 1 + \frac{\varphi^{\frac{I(r)-1}{2}} - 1}{\varphi - 1} \\
&= 1 + \left(\frac{\varphi^{\frac{I(r)-1}{2}} - 1}{\varphi - 1}\right)\left(\frac{\varphi + 1}{\varphi + 1}\right) \\
&= 1 + \frac{\varphi^{\frac{I(r)-1}{2}+1} + \varphi^{\frac{I(r)-1}{2}} - \varphi - 1}{\varphi^2 + \varphi - \varphi - 1} \\
&= 1 + \frac{\varphi^{\frac{I(r)-1}{2}+2} - \varphi^2}{\varphi} \\
&= 1 + \varphi^{\frac{I(r)-1}{2}+1} - \varphi.
\end{aligned}
$$

Vamos provar por indução que $(1 + \varphi^{\frac{N-1}{2}+1} - \varphi) \leq 1.618^{N}$, onde $N = I(r)$ e segue que $w(S(r)) \leq 1.618^{|S(r)|}$.

Se $N = 1$, então $1 + \varphi^{\frac{1-1}{2}+1} - \varphi = 1 + \varphi - \varphi = 1 \leq 1.618$.

Suponha o resultado válido para N e mostraremos que ele vale para $N + 1$, isto é, estamos supondo válido que $1 + \varphi^{\frac{N-1}{2}+1} - \varphi \leq 1.618^{N}$ e vamos provar que $1 + \varphi^{\frac{(N+1)-1}{2}+1} - \varphi \leq 1.618^{N+1}$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
1 + \varphi^{\frac{(N+1)-1}{2}+1} - \varphi &= 1 + \varphi^{\frac{N-1}{2}+1}\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi \\
&\leq 1 + (1.618^{N} + \varphi - 1)\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi \\
&= 1 + 1.618^{N}\varphi^{\frac{1}{2}} + \varphi^{\frac{3}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi \\
&= (1 + \varphi^{\frac{3}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi) + 1.618^{N}\varphi^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 1.618^{N}\varphi^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leq 1.618^N \cdot 1.618 \\ &= 1.618^{N+1}. \end{aligned}$$

Então, $1 + \varphi^{\frac{(N+1)-1}{2}+1} - \varphi \leq 1.618^{N+1}$, logo $1 + \varphi^{\frac{N-1}{2}+1} - \varphi \leq 1.618^N$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$.

Portanto,

$$w(S(r)) \leq 1.618^{|S(r)|}.$$

□

Já limitamos o peso de $T(r)$ quando $I(r) \geq 3$, agora iremos limitar o peso de $T(r)$ quando $I(r) = 1$ e $I(r) = 2$, mas para isto precisaremos de alguns lemas.

Seja U um subconjunto admissível de $T(r) = \bigcup_{i=0}^{N(r)-1} S(r+id)$, então $U = U_0 \cup \ldots \cup U_{N(r)-1}$, onde $U_i = \{(r+id)+(a_i+1)m, (r+id)+(a_i+2)m, \ldots, (r+id)+I(r)m\} \cup \{f-(r+id), f-(r+id)-m, \ldots, f-r-(b_i-1)m\}$, $i \in \{0, \ldots, N(r)-1\}$ e $a_i \geq b_i$. No restante do capítulo U sempre denotará um subconjunto admissível de $T(r)$, $U = U_0 \cup \ldots \cup U_{N(r)-1}$.

Temos que $U_i = U \cap S(r+id)$ é um subconjunto admissível de $S(r+id)$ com assinatura $(a_i, b_i, I(r))$.

Seja $e'_i(U)$ o número de elementos em $E'(U, T(r))$ que são congruentes a $r+id$ ou $f-r-id$ módulo m. Então

$$\begin{aligned} e'_i(U) &= |\{x \in E'(U,T(r)) \,|\, x \equiv r+id \bmod m \text{ ou } x \equiv f-r-id \bmod m\}| \\ &= |\{x \in E'(U,T(r)) \,| x \in U_i\}| \\ &= |E'(U_i, T(r))| \end{aligned}$$

$$= |E'(U_i, S(r+id))|.$$

Assim, $e'_i(U)$ é determinado pelo Lema 3.11.

Seja $e_i(U)$ o número de elementos em $E(U,T(r))$ congruentes a $r+(i+1)d$ ou $f-r-id$ módulo m, o valor de $e_i(U)$ será determinado no próximo Lema.

Lema 3.16. *O valor de $e_i(U)$ depende só da assinatura de U_i e U_{i+1}. Em particular, se suas* *assinaturas são $(a_i, b_i, I(r))$ e $(a_{i+1}, b_{i+1}, I(r))$, respectivamente, então*

$$e_i(U) = \begin{cases} I(r) - a_i + \max\{b_{i+1} - b_i - 1, 0\}, & \textit{se} \quad b_i > 0 \, \textit{e} \, a_{i+1} = I(r) \\ \max\{a_{i+1} - a_i - 1, 0\} + b_{i+1}, & \textit{se} \quad b_i = 0 \, \textit{e} \, a_{i+1} < I(r) \\ \max\{a_{i+1} - a_i - 1, 0\} + \max\{b_{i+1} - b_i - 1, 0\}, & \textit{se} \quad b_i > 0 \, \textit{e} \, a_{i+1} < I(r) \\ I(r) - a_i + b_{i+1}, & \textit{se} \quad b_i = 0 \, \textit{e} \, a_{i+1} = I(r). \end{cases}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} e_i(U) &= |\{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv r + (i+1)d \bmod m \, \text{ou} \, x \equiv f - r - id \bmod m\}| \\ &= |\{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv r + (i+1)d \bmod m\}| \\ &\quad + |\{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv f - r - id \bmod m\}| \\ &= |A| + |B|, \end{aligned}$$

onde, $A = \{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv r + (i+1)d \bmod m\}$ e $B = \{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv f - r - id \bmod m\}$.

Iremos determinar $|A|$ e $|B|$ separadamente. Primeiramente determinaremos $|A|$.

Temos que,

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv r + (i+1)d \bmod m\} \\ &= \{x \in E(U, T(r)) \,|\, x = r + (i+1)d + km\} \\ &= \{r + (i+1)d + km \in T(r) \,|\, r + (i+1)d + km, r + (i+1)d + (k+1)m \notin U \text{ e} \\ &\quad r + id + km \in U\}. \end{aligned}$$

Como $r + (i+1)d + (k+1)m \notin U \Rightarrow r + (i+1)d + (k+1)m \notin U_{i+1} \Rightarrow k+1 < a_{i+1} + 1$ ou $a_{i+1} = I(r) \Rightarrow a_{i+1} > k$ ou $a_{i+1} = I(r)$, e como $r + id + km \in U \Rightarrow r + id + km \in U_i \Rightarrow a_i + 1 \leq k \leq I(r)$.

Assim, se $a_{i+1} = I(r) \Rightarrow a_i + 1 \leq k \leq I(r) \Rightarrow |A| = I(r) - a_i$, e se $a_{i+1} < I(r) \Rightarrow a_i + 1 \leq k < a_{i+1} \Rightarrow |A| = \max\{a_{i+1} - a_i - 1, 0\}$.

Vamos determinar $|B|$.

$$\begin{aligned} B &= \{x \in E(U, T(r)) \,|\, x \equiv f - r - id \bmod m\} \\ &= \{x \in E(U, T(r)) \,|\, x = f - r - id - km\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \{f - r - id - km \in T(r) \mid f - r - id - km, f - r - id - (k-1)m \notin U \text{ e} \\
& f - r - (i+1)d - km \in U\}.
\end{aligned}
$$

Como $f-r-id-(k-1)m \notin U \Rightarrow f-r-id-(k-1)m \notin U_i \Rightarrow k-1 > b_i-1$ ou $b_i = 0$, e como $f - r - (i+1)d - km \in U \Rightarrow f - r - (i+1)d - km \in U_{i+1} \Rightarrow 0 \leq k \leq b_{i+1} - 1$.

Se $b_i = 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq b_{i+1} - 1 \Rightarrow |B| = b_{i+1}$, e se $b_i > 0 \Rightarrow b_i < k \leq b_{i+1} - 1 \Rightarrow |B| = \max\{b_{i+1} - b_i - 1, 0\}$.

Portanto,

$$
e_i(U) = \begin{cases}
I(r) - a_i + \max\{b_{i+1} - b_i - 1, 0\}, & \text{se} \quad b_i > 0 \text{ e } a_{i+1} = I(r) \\
\max\{a_{i+1} - a_i - 1, 0\} + b_{i+1}, & \text{se} \quad b_i = 0 \text{ e } a_{i+1} < I(r) \\
\max\{a_{i+1} - a_i - 1, 0\} + \max\{b_{i+1} - b_i - 1, 0\}, & \text{se} \quad b_i > 0 \text{ e } a_{i+1} < I(r) \\
I(r) - a_i + b_{i+1}, & \text{se} \quad b_i = 0 \text{ e } a_{i+1} = I(r).
\end{cases}
$$

□

Para cada par de assinaturas (u, v), existe um número $G(u, v)$ tal que se U_i tem assinatura u e U_{i+1} tem assinatura v, então $e_i(U) - e'_i(U) = G(u, v)$.

Observe que $G(u, v)$ não depende de i ou U, pois sempre conseguimos construir um conjunto $U \subset T(r)$ admissível com U_i tendo assinatura u e U_{i+1} tendo assinatura v.

Seja u_i a assinatura de U_i, para cada $i \in \{0, \ldots, N(r) - 1\}$. Então,

$$
\begin{aligned}
s(U, T(r)) &= |E(U, T(r))| - |E'(U, T(r))| \\
&\geq (e_0(U) + \ldots + e_{N(r)-1}(U)) - (e'_0(U) + \ldots + e'_{N(r)-1}(U)) \\
&= \sum_{i=0}^{N(r)-2} (e_i(U) - e'_i(U)) + (e_{N(r)-1}(U) - e'_{N(r)-1}(U)) \\
&= \sum_{i=0}^{N(r)-2} G(u_i, u_{i+1}) + (e_{N(r)-1}(U) - e'_{N(r)-1}(U)) \\
&\geq \sum_{i=0}^{N(r)-2} G(u_i, u_{i+1}) - e'_{N(r)-1}(U).
\end{aligned}
$$

Então,

$$
w(T(r)) = \sum_{U \in \mathcal{A}(T(r))} \varphi^{-s(U, T(r))}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{U\in\mathcal{A}(T(r))} \varphi^{-\sum_{i=0}^{N(r)-2} G(u_i,u_{i+1})+e'_{N(r)-1}(U)} \\
&= \sum_{U\in\mathcal{A}(T(r))} \left(\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$w(T(r)) \leq \sum_{U\in\mathcal{A}(T(r))} \left(\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})}\right).$$

Vamos escrever esta última passagem de uma forma mais conveniente para provarmos o próximo Lema.

Dado $U \in \mathcal{A}(T(r))$, $U = U_0 \cup \ldots \cup U_{N(r)-1}$. Seja $\{s_1, \ldots, s_k\}$ o conjunto de todas as possíveis assinaturas de $U_i = U \cap S(r + id)$, $i \in \{0, \ldots, N(r) - 1\}$.

Vamos fazer uma mudança de notação para conseguirmos saber qual é a assinatura do conjunto admissível U_i, $i \in \{0, \ldots, N(r) - 1\}$.

Seja $U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-1})} \in \mathcal{A}(T(r))$, $U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-1})} = U_0 \cup \ldots \cup U_{N(r)-1}$, estamos indicando que U_i tem assinatura s_{l_i}, $l_i \in \{1, \ldots, k\}$.

Como $e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-1})})$ depende só da assinatura de $U_{N(r)-1}$, então:

$$\begin{aligned}
\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,1})})} &= \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l'_0,\ldots,l'_{N(r)-2,1})})}, \quad \forall\, l_i, l'_j \in \{1, \ldots, k\} \\
&\vdots \qquad \vdots \\
\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,k})})} &= \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l'_0,\ldots,l'_{N(r)-2,k})})}, \quad \forall\, l_i, l'_j \in \{1, \ldots, k\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{U\in\mathcal{A}(T(r))} \left(\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,1})}\in\mathcal{A}(T(r))} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,1})})} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})} + \ldots \\
&+ \sum_{U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,k})}\in\mathcal{A}(T(r))} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,k})})} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})}.
\end{aligned}$$

Como $l_i \in \{1, \ldots, k\}$, temos k possibilidades para cada l_i, assim,

$$\sum_{U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,1})}\in\mathcal{A}(T(r))} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,1})})} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})} + \ldots$$

$$+ \sum_{U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,k})}\in\mathcal{A}(T(r))} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,k})})} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})} =$$

$$\sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,1})})} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})} + \ldots$$

$$+ \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(l_0,\ldots,l_{N(r)-2,k})})} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})} =$$

$$\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(1,\ldots,1)})} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})} + \ldots$$

$$+\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(k,\ldots,k)})} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})}.$$

Então,

$$\sum_{U\in\mathcal{A}(T(r))} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(u_i,u_{i+1})} =$$

$$\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(1,\ldots,1)})} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})} + \ldots$$

$$+\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(k,\ldots,k)})} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w(T(r)) \;\leq\; & \varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(1,\ldots,1)})} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})} + \ldots \\ & +\varphi^{e'_{N(r)-1}(U^{(k,\ldots,k)})} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \ldots \sum_{l_0=1}^{k} \prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i},s_{l_{i+1}})}. \end{aligned} \tag{3.1-6}$$

Lema 3.17. *Seja r um inteiro, e sejam $\{s_1,\ldots,s_k\}$ as possíveis assinaturas de $U\cap S(r+id)$, U subconjunto admissível de $T(r)$. Seja v um vetor $k-$dimensional cuja $j-$ésima entrada é o* *valor de* $\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}$ *quando* $u_{N(r)-1} = s_j$. *Também, seja* 1 *o vetor* $k-$*dimensional cujas todas as entradas são iguais a 1. Finalmente, seja* M *a matriz* k x k *cuja entrada* ij *é* $\varphi^{-G(s_i,s_j)}$. *Então,*

$$w(T(r)) \quad \leq \quad 1^T M^{N(r)-1} v.$$

Demonstração. Seja $W'_N = 1^T M^{N-1}$, vamos provar por indução sobre N, que

$$W'_N \quad = \quad \begin{bmatrix} \sum_{l_{N-2}=1}^{k} \cdots \sum_{l_0=1}^{k} \left(\left(\prod_{i=0}^{N-3} \varphi^{-G(s_{l_i}, s_{l_{i+1}})} \right) \varphi^{-G(s_{l_{N-2}}, s_1)} \right) \\ \vdots \\ \sum_{l_{N-2}=1}^{k} \cdots \sum_{l_0=1}^{k} \left(\left(\prod_{i=0}^{N-3} \varphi^{-G(s_{l_i}, s_{l_{i+1}})} \right) \varphi^{-G(s_{l_{N-2}}, s_k)} \right) \end{bmatrix}^T \tag{3.1-7}$$

para todo $N \geq 2$.

Se $N = 2$,

$$\begin{aligned} W'_2 \quad &= \quad 1^T M \\ &= \quad \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{-G(s_1,s_1)} & \ldots & \varphi^{-G(s_1,s_k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{-G(s_k,s_1)} & \ldots & \varphi^{-G(s_k,s_k)} \end{bmatrix} \\ &= \quad \begin{bmatrix} \sum_{l_0=1}^{k} \varphi^{-G(s_{l_0},s_1)} & \ldots & \sum_{l_0=1}^{k} \varphi^{-G(s_{l_0},s_k)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

logo a igualdade 3.1-7 se verifica quando $N = 2$.

Assumindo o resultado verdadeiro para W'_N o resultado segue de $W'_{N+1} = W'_N M$.

Vamos provar agora que

$$w(T(r)) \leq 1^T M^{N(r)-1} v.$$

Se $N(r) = 0$, por definição $w(T(r)) = 0$.

Se $N(r) = 1$, então $1^T M^0 v = 1^T\ id\ v = 1^T v = \underbrace{\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}}_{s_1} + \ldots + \underbrace{\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}}_{s_k}$, e como $T(r) = \bigcup_{i=0}^{N(r)-1} S(r+id) = S(r)$, então $w(T(r)) = w(S(r))$, assim

$$w(S(r)) \quad = \quad \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-s(U,S(r))}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{-(|E(U,S(r))|-|E'(U,S(r))|)} \\
&\leq \sum_{U \in \mathcal{A}(S(r))} \varphi^{|E'(U,S(r))|} \\
&= \underbrace{\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}}_{s_1} + \ldots + \underbrace{\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}}_{s_k}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $w(T(r)) \leq 1^T M^{N(r)-1} v$, quando $N(r) = 1$.

Se $N(r) \geq 2$, usando 3.1-7, temos que

$$
\begin{aligned}
1^T M^{N(r)-1} v &= \begin{bmatrix} \sum\limits_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \cdots \sum\limits_{l_0=1}^{k} \left(\left(\prod\limits_{i=0}^{N(r)-3} \varphi^{-G(s_{l_i}, s_{l_{i+1}})} \right) \varphi^{-G(s_{l_{N(r)-2}}, s_1)} \right) \\ \vdots \\ \sum\limits_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \cdots \sum\limits_{l_0=1}^{k} \left(\left(\prod\limits_{i=0}^{N(r)-3} \varphi^{-G(s_{l_i}, s_{l_{i+1}})} \right) \varphi^{-G(s_{l_{N(r)-2}}, s_k)} \right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \\ \vdots \\ \varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}}_{u_{N(r)-1}=s_1} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \cdots \sum_{l_0=1}^{k} \underbrace{\prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i}, s_{l_{i+1}})}}_{s_{l_{N(r)-1}}=s_1} + \ldots \\
&+ \underbrace{\varphi^{e'_{N(r)-1}(U)}}_{u_{N(r)-1}=s_k} \sum_{l_{N(r)-2}=1}^{k} \cdots \sum_{l_0=1}^{k} \underbrace{\prod_{i=0}^{N(r)-2} \varphi^{-G(s_{l_i}, s_{l_{i+1}})}}_{s_{l_{N(r)-1}}=s_k}.
\end{aligned}
$$

Então, por 3.1-6, segue que $w(T(r)) \leq 1^T M^{N(r)-1} v$, quando $N(r) \geq 2$.

Portanto,

$$w(T(r)) \leq 1^T M^{N(r)-1} v.$$

□

Utilizaremos a notação deste Lema na prova dos dois Lemas seguintes, e faremos uso do *software MATLAB* para calcular o polinômio característico da matriz M e calcular $1^T M^N v$, para alguns valores de N.

Lema 3.18. *Se $I(r) = 1$, então $w(T(r)) \leq 1.1460 \cdot 1.618^{|T(r)|}$.*

Demonstração. Seja U um subconjunto admissível de $T(r)$, as possíveis assinaturas de $U_i = U \cap S(r + id)$ são $s_1 = (1, 0, 1)$, $s_2 = (1, 1, 1)$ e $s_3 = (0, 0, 1)$.

Vamos determinar a matriz,

$$M = \begin{bmatrix} \varphi^{-G(s_1,s_1)} & \varphi^{-G(s_1,s_2)} & \varphi^{-G(s_1,s_3)} \\ \varphi^{-G(s_2,s_1)} & \varphi^{-G(s_2,s_2)} & \varphi^{-G(s_2,s_3)} \\ \varphi^{-G(s_3,s_1)} & \varphi^{-G(s_3,s_2)} & \varphi^{-G(s_3,s_3)} \end{bmatrix}.$$

Usando os Lemas 3.11 e 3.16, vamos determinar $\varphi^{-G(s_1,s_1)}$, $\varphi^{-G(s_2,s_1)}$ e $\varphi^{-G(s_3,s_1)}$ as demais entradas da matriz M são determinadas de forma análoga.

- $\varphi^{-G(s_1,s_1)}$: Pela notação do Lema 3.16, temos que $a_i = 1$, $b_i = 0$, $a_{i+1} = 1$, $b_{i+1} = 0$ e $I(r) = 1$, assim $e_i(U) = I(r) - a_i + b_{i+1} = 1 - 1 + 0 = 0$, já pela notação do Lema 3.11, $i = 1$, $j = 0$ e $I(r) = 1$, logo $e'_i(U) = 0$. Então $\varphi^{-G(s_1,s_1)} = \varphi^{-(e_i(U)-e'_i(U))} = 1$.

- $\varphi^{-G(s_2,s_1)}$: Pela notação do Lema 3.16, temos que $a_i = 1$, $b_i = 1$, $a_{i+1} = 1$, $b_{i+1} = 0$ e $I(r) = 1$, assim $e_i(U) = I(r) - a_i + \max\{b_{i+1} - b_i - 1, 0\} = 1 - 1 + \max\{0 - 1 - 1, 0\} = 0$, pela notação do Lema 3.11, $i = 1$, $j = 1$ e $I(r) = 1$, logo $e'_i(U) = j - 1 = 0$. Então $\varphi^{-G(s_2,s_1)} = \varphi^{-(e_i(U)-e'_i(U))} = 1$.

- $\varphi^{-G(s_3,s_1)}$: Pela notação do Lema 3.16, temos que $a_i = 0$, $b_i = 0$, $a_{i+1} = 1$, $b_{i+1} = 0$ e $I(r) = 1$, assim $e_i(U) = I(r) - a_i + b_{i+1} = 1 - 0 + 0 = 1$, pela notação do Lema 3.11, $i = 0$, $j = 0$ e $I(r) = 1$, logo $e'_i(U) = I(r) - i - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$. Então $\varphi^{-G(s_3,s_1)} = \varphi^{-(e_i(U)-e'_i(U))} = \varphi^{-1}$.

Assim,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \varphi^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que já determinamos acima $e'_{N(r)-1}(U)$ quando a assinatura de $U_{N(r)-1}$ é igual a s_1, s_2 ou s_3, logo

$$v = \begin{bmatrix} \varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \\ \varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \\ \varphi^{e'_{N(r)-1}(U)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Lema 3.17, temos que

$$w(T(r)) \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varphi^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & 1 \end{bmatrix}^{N(r)-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denote o lado direito da desigualdade acima por V_N, quando $N(r) = N$. Vamos provar que

$$V_N \leq 3 \cdot 1.618^{2N-2}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} V_1 &\leq 3 \cdot 1.618^{2 \cdot 1 - 2} \\ V_2 &\leq 3 \cdot 1.618^{2 \cdot 2 - 2} \\ V_3 &\leq 3 \cdot 1.618^{2 \cdot 3 - 2}. \end{aligned}$$

O polinômio característico da matriz M, é

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})\lambda + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2}).$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton $p(M) = 0$, então

$$\begin{aligned} M^3 &= 3M^2 + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})M + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2}) \\ \Rightarrow M^{(N+3)-1} &= 3M^{(N+2)-1} + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})M^{(N+1)-1} + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})M^{(N-1)} \\ \Rightarrow 1^T M^{(N+3)-1} v &= 3 \cdot 1^T M^{(N+2)-1} v + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2}) 1^T M^{(N+1)-1} v \\ &\quad + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2}) 1^T M^{(N-1)} v \\ \Rightarrow V_{N+3} &= 3V_{N+2} + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})V_{N+1} + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})V_N, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

Vamos provar por indução sobre N que $V_{N+3} \leq 3 \cdot 1.618^{2(N+3)-2}$.

Se $N = 1$, temos que

$$\begin{aligned} V_4 &= 3V_3 + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})V_2 + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})V_1 \\ &\leq 3 \cdot 3 \cdot 1.618^4 + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2}) \cdot 3 \cdot 1.618^2 + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2}) \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 53.12 \\ &\leq 3 \cdot 1.618^{2\cdot 4-2} \\ &= 3 \cdot 1.618^{2N-2}. \end{aligned}$$

Suponha que o resultado seja verdadeiro para todo natural entre 1 e N, e vamos provar que ele é verdadeiro para $N+1$, isto é, que

$$V_{N+4} \leq 3 \cdot 1.618^{2(N+4)-2}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} V_{N+4} &= 3V_{N+3} + (-3 + 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})V_{N+2} + (1 - 2\varphi^{-1} + \varphi^{-2})V_{N+1} \\ &\leq 3V_{N+3} + (-1.38)V_{N+2} + 0.146V_{N+1} \\ &\leq 3 \cdot 3 \cdot 1.618^{2(N+3)-2} + (-1.38) \cdot 3 \cdot 1.618^{2(N+2)-2} + 0.146 \cdot 3 \cdot 1.618^{2(N+1)-2} \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 1.618^{2N+4} + (-1.38) \cdot 3 \cdot 1.618^{2N+2} + 0.146 \cdot 3 \cdot 1.618^{2N} \\ &= 3 \cdot 1.618^{2N}(3 \cdot 1.618^4 - 1.38 \cdot 1.618^2 + 0.146) \\ &< 3 \cdot 1.618^{2N} \cdot 1.618^6 \\ &= 3 \cdot 1.618^{2(N+4)-2}. \end{aligned}$$

Então, $V_{N+4} \leq 3 \cdot 1.618^{2(N+4)-2}$, assim $V_{N+3} \leq 3 \cdot 1.618^{2(N+3)-2}$, $\forall N \geq 1$.

Como já verificamos que $V_N \leq 3 \cdot 1.618^{2N-2}$, quando $N = 1, 2, 3$ segue que $V_N \leq 3 \cdot 1.618^{2N-2}$, $\forall N \geq 1$.

Como $I(r) = 1$, então $|S(r + id)| = 2$, $\forall i \in \{0, \dots, N(r) - 1\}$, então $|T(r)| = 2N(r)$. Assim,

$$\begin{aligned} w(T(r)) &\leq 1^T M^{N(r)-1} v \\ &= V_{N(r)} \\ &\leq 3 \cdot 1.618^{2N(r)-2} \\ &\leq 1.140 \cdot 1.618^2 \cdot 1.618^{2N(r)-2} \\ &= 1.140 \cdot 1.618^{2N(r)} \\ &= 1.140 \cdot 1.618^{|T(r)|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$w(T(r)) \leq 1.140 \cdot 1.618^{|T(r)|}.$$

□

Lema 3.19. *Se $I(r) = 2$, então*

$$w(T(r)) \leq 1.0559 \cdot 1.618^{|T(r)|}.$$

Demonstração. Dado $U \in \mathcal{A}(T(r))$, as possíveis assinaturas de $U_i = U \cap S(r + id)$, $i \in \{0, \dots, N(r) - 1\}$ são $s_1 = (2, 0, 2)$, $s_2 = (2, 1, 2)$, $s_3 = (1, 0, 2)$, $s_4 = (1, 1, 2)$, $s_5 = (0, 0, 2)$ e $s_6 = (2, 2, 2)$.

De forma análoga ao que fizemos no Lema anterior, temos que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \varphi^{-1} & 1 & \varphi^{-1} & 1 & \varphi^{-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & 1 & \varphi^{-1} & 1 & \varphi^{-3} \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & 1 & 1 & 1 & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & \varphi & 1 & \varphi & \varphi^{-3} \\ \varphi & \varphi & \varphi & \varphi & \varphi & \varphi \end{bmatrix}$$

e

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \varphi \\ \varphi \end{bmatrix}.$$

Pelo Lema 3.17, sabemos que

$$w(T(r)) \leq 1^T M^{N(r)-1} v. \tag{3.1-8}$$

Assim para provarmos que $w(T(r)) < 1.0559 \cdot 1.618^{|T(r)|}$, basta provarmos que

$$1^T M^{N(r)-1} v \quad \leq \quad 1.0559 \cdot 1.618^{|T(r)|}.$$

Denotemos por V'_N o lado direito da desigualdade 3.1-8, quando $N(r) = N$, vamos provar por indução que

$$V'_N \quad \leq \quad (4 + 2\varphi)1.618^{4N-4},$$

mas antes precisamos verificar que $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Temos que,

$$\begin{aligned} V'_1 &= (4 + 2\varphi)1.618^0 \\ V'_2 &\leq (4 + 2\varphi)1.618^{4\cdot 2-4} \\ V'_3 &\leq (4 + 2\varphi)1.618^{4\cdot 3-4} \\ V'_4 &\leq (4 + 2\varphi)1.618^{4\cdot 4-4} \\ V'_5 &\leq (4 + 2\varphi)1.618^{5\cdot 4-4}, \end{aligned}$$

assim, $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$, para $N = 1, 2, 3, 4$.

O polinômio característica da matriz M é

$$p(\lambda) \quad = \quad \lambda^6 - (7.236\cdots)\lambda^5 + (10.708\cdots)\lambda^4 - (3.965\cdots)\lambda^3 + (0.278\cdots)\lambda^2.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton $p(M) = 0$, então

$$M^6 \quad = \quad (7.236\cdots)M^5 - (10.708\cdots)M^4 + (3.965\cdots)M^3 - (0.278\cdots)M^2$$

multiplicando a equação acima por M^{N-6}, temos

$$M^N \quad = \quad (7.236\cdots)M^{N-1} - (10.708\cdots)M^{N-2} + (3.965\cdots)M^{N-3} - (0.278\cdots)M^{N-4}$$

multiplicando a equação acima a esquerda por 1^T e a direita por v, temos

$$\begin{aligned} 1^T M^N v &= (7.236\cdots)1^T M^{N-1}v - (10.708\cdots)1^T M^{N-2}v + (3.965\cdots)1^T M^{N-3}v \\ &\quad -(0.278\cdots)1^T M^{N-4}v \end{aligned}$$

então,

$$V'_{N+1} = (7.236\cdots)V'_N - (10.708\cdots)V'_{N-1} + (3.965\cdots)V'_{N-2} - (0.278\cdots)V'_{N-3}.$$

Já verificamos acima que $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$, quando $N = 1, 2, 3, 4$, então resta verificar que $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$, para $N > 4$. Suponha que $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$ para todo natural entre 4 e N, e vamos provar que o resultado é verdadeiro para $N + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} V'_{N+2} &= (7.236\cdots)V'_{N+1} - (10.708\cdots)V'_N + (3.965\cdots)V'_{N-1} - (0.278\cdots)V'_{N-2} \\ &\leq (7.236\cdots)V'_{N+1} - (10.708\cdots)V'_N + (3.965\cdots)V'_{N-1} \\ &\leq (7.236\cdots)V'_{N+1} - (10.708\cdots)V'_N + (3.965\cdots)V'_N \\ &\leq (7.237)V'_{N+1} - (10.707 - 3.966)V'_N \\ &\leq (7.237)V'_{N+1} - (10.707 - 3.966)V'_{N+1} \cdot \frac{1}{6.8} \\ &= \left(7.237 - \frac{10.707 - 3.966}{6.8}\right) V'_{N+1} \\ &\leq 6.8V'_{N+1}. \end{aligned}$$

Então, $V'_{N+2} \leq 6.8V'_{N+1}$, assim $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$, $\forall N > 4$.

Portanto, $V'_{N+1} \leq 6.8V'_N$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Utilizamos acima que $V'_K \geq 0$, $\forall K \in \mathbb{N}$, isto é verdadeiro, pois $V'_K = 1^T M^{K-1}v$ e as entradas das matrizes são todas positivas, logo o número real que o produto delas fornece não pode ser negativo, então $V'_K \geq 0$, $\forall K \in \mathbb{N}$.

Na terceira passagem usamos o fato de $V'_k \leq V'_{K+1}$, $\forall K \in \mathbb{N}$, o que é verdadeiro, pois

$$\begin{aligned} V'_{K+1} - V'_K &= 1^T M^K v - 1^T M^{K-1}v \\ &= 1^T M^{K-1}(M - id)v \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 1M^{K-1}\begin{bmatrix} 0 & \varphi^{-1} & 1 & \varphi^{-1} & 1 & \varphi^{-2} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & 0 & \varphi^{-1} & 1 & \varphi^{-3} \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & 1 & 0 & 1 & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-2} & \varphi & 1 & \varphi-1 & \varphi^{-3} \\ \varphi & \varphi & \varphi & \varphi & \varphi & \varphi-1 \end{bmatrix} v \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

já que as entradas das matrizes são todas não negativas.

Na quinta passagem usamos a hipótese de indução.

Agora estamos em condições de verificar que $V'_N \leq (4+2\varphi)1.618^{4N-4}$.

Se $N = 1$, já verificamos acima. Suponha o resultado válido para N, vamos provar que ele é verdadeiro para $N+1$, isto é, que

$$V'_{N+1} \leq (4+2\varphi)1.618^{4(N+1)-4}.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
V'_{N+1} &\leq 6.8V'_N \\
&\leq 6.8(4+2\varphi)1.618^{4N-4} \\
&< 1.618^4(4+2\varphi)1.618^{4N-4} \\
&= (4+2\varphi)1.618^{4(N+1)-4}.
\end{aligned}
$$

Então, $V'_{N+1} \leq (4+2\varphi)1.618^{4(N+1)-4}$.

Portanto, $V'_N \leq (4+2\varphi)1.618^{4N-4}$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Como $I(r) = 2$, então $|S(r+id)| = 4$, $\forall i \in \{0, \ldots, N(r)-1\}$, logo $|T(r)| = 4N(r)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
w(T(r)) &\leq 1^T M^{N(r)-1} v \\
&= V'_{N(r)} \\
&\leq (4+2\varphi)1.618^{4N(r)-4} \\
&= (4+2\varphi)1.618^{-4} \cdot 1.618^{|T(r)|}
\end{aligned}
$$

$$< \quad 1.0559 \cdot 1.618^{|T(r)|}.$$

Portanto, $w(T(r)) \leq 1.0559 \cdot 1.618^{|T(r)|}$. □

Finalmente estamos em condições de provar o Lema 3.7

Demonstração. Se $m + d \geq f - 1$, então $S = \emptyset$ e por definição $w(S) = 1$, logo a desigualdade é verdadeira. Vamos supor então que $m + d < f - 1$.

Seja l o resto da divisão de f por m, então

$$f \quad = \quad km + l, \qquad 0 \leq l \leq m - 1.$$

Por conveniência, definimos que $S(r) = \emptyset$ se r não é inteiro. Quando $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ $I(x) = I(0)$ e quando $l + 1 \leq x \leq \frac{m+l}{2}$ $I(x) = I(0) - 1$.

De fato, se $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$, devemos provar que $x < m$ e $x + I(0)m \leq f < x + (I(0)+1)m$.

- Como $x \leq \frac{l}{2} \Rightarrow x \leq l \Rightarrow x < m$.
- Temos que $f = km + l$ e $I(0) = |\{0 + m, 0 + 2m, \ldots, 0 + I(0)m\}|$, então $k = I(0)$. Assim,

$$x + I(0)m \leq \frac{l}{2} + I(0)m \leq l + I(0)m = f < (I(0) + 1)m \leq x + (I(0) + 1)m$$

$$\Rightarrow x + I(0)m \leq f < x + (I(0) + 1)m.$$

Agora, se $l + 1 \leq x \leq \frac{m+l}{2}$ devemos provar que $x < m$ e $x + (I(0) - 1)m \leq f < x + I(0)m$.

- $x \leq \frac{m+l}{2} < \frac{m+m}{2} = m$.
- $x + (I(0) - 1)m < m + (I(0) - 1)m = I(0)m \leq f = I(0)m + l < I(0)m + l + 1 \leq x + I(0)m$, então $x + (I(0) - 1)m \leq f < x + I(0)m$.

Portanto, $I(x) = I(0)$ quando $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ e $I(x) = I(0) - 1$ quando $l + 1 \leq x \leq \frac{m+l}{2}$.

Ao invés de limitarmos $w(S)$ diretamente será mais conveniente limitarmos o peso de um conjunto similar. Defina

$$S' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} S(x)\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x)\right).$$

Algumas observações sobre S', $S(\frac{l}{2})$ e $S(\frac{m+l}{2})$.

(i) Se $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ou $l+1 \leq x \leq \frac{m+l}{2} - 1$, então

$$S(x) = \{x+m, x+2m, \ldots, x+I(x)m\} \dot\cup \{f-x, f-x-m, \ldots, f-x-(I(x)-1)m\}.$$

Se $x = \frac{l}{2}$ ou $x = \frac{m+l}{2}$, então

$$S(x) = \{x+m, x+2m, \ldots, x+I(x)m\}.$$

(ii) $S(x) \cap S(y) = \emptyset$ se $x, y \in \{0, \ldots, \frac{l}{2}, l+1, \ldots, \frac{m+l}{2}\}$, com $x \neq y$.

Defina $S'' = V_{m+d}(S')$. Temos que

$$\begin{aligned} S' \cup S\left(\frac{l}{2}\right) \cup S\left(\frac{m+l}{2}\right) &= \{m, m+1, \ldots, f\} \\ S'' \cup V_{m+d}\left(S\left(\frac{l}{2}\right)\right) \cup V_{m+d}\left(S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right) &= S \cup \{f\}. \end{aligned}$$

De fato, pela definição do conjunto $S(x)$, temos que

$$S' \cup S\left(\frac{l}{2}\right) \cup S\left(\frac{m+l}{2}\right) \subseteq \{m, m+1, \ldots, f\}.$$

Temos também que $|\{m, m+1, \ldots, f\}| = |\{m, m+1, \ldots, mI(0)+l\}| = m(I(0)-1)+l+1$, e

$$\begin{aligned} \left|S' \cup S\left(\frac{l}{2}\right) \cup S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right| &= |S'| + \left|S\left(\frac{l}{2}\right)\right| + \left|S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right| \\ &= \left|\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} S(x)\right| + \left|\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x)\right| + I(0) + I(0) - 1 \\ &= \frac{l}{2} \cdot 2I(0) + \left(\frac{m-l}{2} - 1\right)(2I(0)-2) + 2I(0) - 1 \\ &= m(I(0)-1) + l + 1. \end{aligned}$$

Portanto, $S' \cup S\left(\frac{l}{2}\right) \cup S\left(\frac{m+l}{2}\right) = \{m, m+1, \ldots, f\}$.

Ainda,

$$\begin{aligned}
S'' \cup V_{m+d}\left(S\left(\frac{l}{2}\right)\right) \cup V_{m+d}\left(S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right) &= V_{m+d}\left(S' \cup S\left(\frac{l}{2}\right) \cup S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right) \\
&= V_{m+d}\left(\{m, m+1, \ldots, f\}\right) \\
&= \{m+d+1, \ldots, f\} \\
&= S \cup \{f\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $S'' \cup V_{m+d}\left(S\left(\frac{l}{2}\right)\right) \cup V_{m+d}\left(S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right) = S \cup \{f\}$.

Afirmamos que $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$. Para mostrarmos isto, vamos considerar 4 casos de acordo com o valor de $I(0)$.

1º caso) I(0)>3: Temos que

$$\begin{aligned}
S'' &= V_{m+d}(S') \\
&= V_{m+d}\left[\left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} S(x)\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x)\right)\right] \\
&= \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right).
\end{aligned}$$

Note que sempre que x aparece na equação abaixo $I(x) \geq 3$, usando os Lemas 3.9, 3.10 e 3.13, temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &= w\left[\left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right)\right] \\
&\leq w\left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) w\left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(V_{m+d}(S(x))) \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} w(V_{m+d}(S(x))) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x)) \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} w(S(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} 1.618^{|S(x)|} \\
&= 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

2º caso) I(0)=3: Se $d \leq l$, escrevemos novamente

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right).$$

Vamos verificar que

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) = \bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} T(x).$$

Se $min\{\frac{m+l}{2} - 1, l + d\} = \frac{m+l}{2} - 1$, basta verificarmos que se $1 \leq r \leq \frac{m-l}{2} - 1$, então $N(l + r) = 1$, vamos então determinar $N(l + r)$.

$N(l + r)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $(l + r) + nd \geq l' - nd$, onde $l' \in [0, m-1]$ e $l' \equiv f-(l+r) \mod m$. Temos que, $l' = f-l-r-qm = 3m+l-l-r-qm = (3 - q)m - r$, como $l' \in [0, m - 1]$ devemos ter $q = 2$, logo $l' = m - r$. Assim, $N(l + r)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $l + nd \geq \frac{m+l}{2} - r$, como $l + d \geq \frac{m+l}{2} - 1$ e $\frac{m+l}{2} - 1 \geq \frac{m+l}{2} - r \Rightarrow l + d \geq \frac{m+l}{2} - r$, logo $N(l + r) \leq 1$, observe que não podemos ter $N(l + r) = 0$, pois neste caso deveríamos ter $l \geq \frac{m+l}{2} - r \Leftrightarrow 0 \geq \frac{m-l}{2} - r$, o que não acontece já que $\frac{m-l}{2} - r \geq \frac{m-l}{2} - \left(\frac{m-l}{2} - 1\right) = 1$. Então, $N(l + r) = 1$, e portanto

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) = \bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} T(x).$$

Se $min\{\frac{m+l}{2} - 1, l + d\} = l + d$, vamos mostrar inicialmente que

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{l+d} T(x),$$

para isso basta mostrar que $T(l + r + q'd) \subseteq T(l + r)$, $1 \leq r \leq d$ e $l + r + q'd \leq \frac{m+l}{2} - 1$, mas isto só acontece se $(q' + N(l + r + q'd))d \leq N(l + r)d$, de forma análoga ao que fizemos acima $N(l + r)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $nd \geq \frac{m-l}{2} - r$. Vamos determinar $N(l + r + q'd)$.

$N(l + r + q'd)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $(l + r + q'd) + nd \geq l'' - nd$, onde $l'' \in [0, m-1]$ e $l'' \equiv f-(l+r+q'd) \mod m$. Temos que $l'' = f-l-r-q'd-q''m =$

$3m + l - l - r - q'd - q''m = (3 - q'')m - r - q'd.$

Vamos determinar o valor de q''. Temos que $(3 - q'')m - r - q'd \geq 0 \Rightarrow (3 - q'')m \geq r + q'd > 0 \Rightarrow (3 - q'')m > 0 \Rightarrow (3 - q'') > 0 \Rightarrow 3 > q'' \Rightarrow 2 \geq q''$. Ainda $m - 1 \geq (3 - q'')m - r - q'd \Rightarrow m - 1 \geq 3m - q''m - r - q'd \Rightarrow -2m - 1 \geq -q''m - r - q'd \Rightarrow (q'' - 2)m + r + q'd - 1 \geq 0 \Rightarrow (q'' - 2)m + r + q'd > 0 \Rightarrow (q'' - 2)m + m > 0 \Rightarrow (q'' - 1)m > 0 \Rightarrow q'' - 1 > 0 \Rightarrow q'' > 1 \Rightarrow q'' \geq 2$. Portanto $q'' = 2$.

Assim, $l'' = m - r - q'd$, logo $N(l + r + q'd)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $2nd \geq m - l - 2r - 2q'd \Rightarrow nd \geq \frac{m-l}{2} - r - q'd.$

Então, $N(l + r)d \geq (q' + N(l + r + q'd)d)$, pois

$$\frac{m-l}{2} - r \quad \geq \quad \left(\frac{m-l}{2} - r - q'd\right) + q'd.$$

Portanto,

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{l+d} T(x).$$

Vamos provar a outra inclusão, para isto precisamos verificar que se $1 \leq r \leq d \Rightarrow T(l+r) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x)$, o que acontece se $(l+r+(N(l+r)-1)d) \leq \frac{m+l}{2}-1$, como $N(l+r)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $l+nd \geq \frac{m+l}{2} - r \Rightarrow l+(N(l+r)-1)d < \frac{m+l}{2} - r \Rightarrow l + r + (N(l + r) - 1)d \leq \frac{m+l}{2} - 1$, como queríamos, então

$$\bigcup_{x=l+1}^{l+d} T(x) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x).$$

Portanto,

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) = \bigcup_{x=l+1}^{l+d} T(x).$$

Portanto,

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) = \bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} T(x).$$

Assim,

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} V_{m+d}(T(x)) \right).$$

Utilizando os Lemas 3.9, 3.10, 3.13 e 3.19, temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &= w\left[\left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} V_{m+d}(T(x)) \right) \right] \\
&\leq w\left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right) w\left(\bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} V_{m+d}(T(x)) \right) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(V_{m+d}(S(x))) \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} V_{m+d}(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x)) \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} w(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 0.8755 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} 1.0559 \cdot 1.618^{|T(x)|} \\
&\leq 0.8755^{\frac{l}{2}} 1.618^{|S(0)|+\ldots+|S(\frac{l}{2}-1)|} \cdot 1.0559^{d} \cdot 1.618^{|T(l+1)|+\ldots+|T(l+d)|} \\
&\leq 0.8755^{\frac{l}{2}} \cdot 1.0559^{d} \cdot 1.618^{|S'|} \\
&\leq 0.8755^{\frac{l}{2}} \cdot 1.0559^{l} \cdot 1.618^{|S'|} \\
&\leq 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Se $l < d \leq \frac{m+l}{2}$, então usamos a decomposição,

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{d} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right).$$

De forma análoga ao que fizemos no caso em que $d \leq l$, é possível verificar que

$$\bigcup_{x=d+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) = \bigcup_{x=d+1}^{\min\{\frac{m+l}{2}-1, 2d\}} T(x).$$

Assim,

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{d} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,2d\}} V_{m+d}(T(x))\right).$$

Vamos verificar agora que

$$\bigcup_{x=l+1}^{d} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{d} S(x) \setminus \{m+x\}.$$

Se $l+1 \leq x \leq d \Rightarrow S(x) = \{x+m, x+2m\} \cup \{f-x, f-x-m\}$, como $x+m \leq m+d$, segue a inclusão. Utilizando um raciocínio análogo ao do Lema 3.9, é possível mostrar que se $l+1 \leq x \leq d$ então $w(V_{m+d}(S(x))) \leq w(S(x) \setminus \{x+m\})$.

Fazendo uso dos Lemas 3.9, 3.10, 3.13 e a parte (b.ii) do Lema 3.12, temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &= w\left[\left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{d} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,2d\}} V_{m+d}(T(x))\right)\right] \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(V_{m+d}(S(x))) \prod_{x=l+1}^{d} w(V_{m+d}(S(x))) \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,2d\}} w(V_{m+d}(T(x))) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x)) \prod_{x=l+1}^{d} w(S(x) \setminus \{m+x\}) \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,2d\}} w(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 0.8755 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l+1}^{d} 0.8198 \cdot 1.618^{|S(x)|} \\
&\quad \cdot \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,2d\}} 1.0559 \cdot 1.618^{|T(x)|} \\
&\leq 0.8755^{\frac{l}{2}} \cdot 0.8198^{d-l} \cdot 1.0559^{d} \cdot 1.618^{|S'|} \\
&\leq 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Finalmente, se $\frac{m+l}{2} < d$, então usamos a decomposição,

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right).$$

De forma análoga ao que já fizemos é possível mostrar que $\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) \setminus \{x+m\}$, assim usando os Lemas 3.9, 3.10 e a parte (b.ii) do Lema 3.12, temos que

$$\begin{aligned} w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x)) \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} w(S(x) \setminus \{m+x\}) \\ &\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 0.8755 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} 0.8198 \cdot 1.618^{|S(x)|} \\ &\leq 0.8755^{\frac{l}{2}} \cdot 0.8198^{\frac{m-l}{2}-1} \cdot 1.618^{|S'|} \\ &\leq 1.618^{|S'|}. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

3º caso) $I(0) = 2$: Se $d \leq \frac{l}{2}$, usamos a decomposição

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{d} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right).$$

Usando que

$$\bigcup_{x=d+1}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) = \bigcup_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1, 2d\}} V_{m+d}(T(x))$$

e

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) = \bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} V_{m+d}(T(x))$$

temos que

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{d} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1, 2d\}} V_{m+d}(T(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} V_{m+d}(T(x)) \right).$$

Usando os Lemas 3.9, 3.10, 3.18, 3.19, a parte (b.ii) do Lema 3.12 e que

$$\bigcup_{x=0}^{d} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=0}^{d} S(x) \setminus \{x+m\},$$

temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{d} w(S(x)\setminus\{m+x\}) \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1,2d\}} w(T(x)) \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,l+d\}} w(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{d} 0.8198 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1,2d\}} 1.0559 \cdot 1.618^{|T(x)|} \\
&\quad \cdot \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,l+d\}} 1.1460 \cdot 1.618^{|T(x)|} \\
&\leq 0.8198^{d+1} \cdot 1.0559^{d} \cdot 1.1460^{d} \cdot 1.618^{|S'|} \\
&\leq 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Se $\frac{l}{2} < d \leq l$, temos que

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{l-d-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l-d}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1,l+d\}} V_{m+d}(T(x))\right).$$

Temos que

$$\bigcup_{x=0}^{l-d-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=0}^{l-d-1} S(x)\setminus\{m+x\}$$

e

$$\bigcup_{x=l-d}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=l-d}^{\frac{l}{2}-1} S(x)\setminus\{m+x, m+l-x\}.$$

Usando os Lemas 3.9, 3.10, 3.19 e as partes (b.ii) e (b.iii) do Lema 3.12, temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{l-d-1} w(S(x)\setminus\{m+x\}) \prod_{x=l-d}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x)\setminus\{m+x, m+l-x\}) \\
&\quad \cdot \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} w(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{l-d-1} 0.8198 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l-d}^{\frac{l}{2}-1} 0.5837 \cdot 1.618^{|S(x)|} \\
&\quad \cdot \prod_{x=l+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, l+d\}} 1.1460 \cdot 1.618^{|T(x)|} \\
&\leq 0.8198^{l-d} \cdot 0.5837^{d-\frac{l}{2}} \cdot 1.1460^{d} \cdot 1.618^{|S'|} \\
&\leq 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Se $l < d \leq \frac{m+l}{2}$, então

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{d} V_{m+d}(S(x))\right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, 2d\}} V_{m+d}(T(x))\right).$$

Usando os Lemas 3.9, 3.10, as partes (a.ii) e (b.iii) do Lema 3.12, o Lema 3.18, e as duas inclusões

$$\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} S(x)\setminus\{m+x, m+l-x\}$$

$$\bigcup_{x=l+1}^{d} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{d} S(x)\setminus\{m+x\},$$

temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x)\setminus\{m+x, m+l-x\}) \prod_{x=l+1}^{d} w(S(x)\setminus\{m+x\}) \\
&\quad \cdot \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, 2d\}} w(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 0.5837 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l+1}^{d} 0.7640 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{m+l}{2}-1, 2d\}} 1.1460 \cdot 1.618^{|T(x)|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 0.5837^{\frac{l}{2}} \cdot 0.7640^{d-l} \cdot 1.1460^{d} \cdot 1.618^{|S'|} \\ &\leq 1.618^{|S'|}. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Finalmente, se $\frac{m+l}{2} < d$, então

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \right).$$

Usando os Lemas 3.9, 3.10, as partes (a.ii) e (b.iii) do Lema 3.12, e as duas inclusões

$$\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} S(x) \setminus \{m+x, m+l-x\}$$

$$\bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} S(x) \setminus \{m+x\},$$

temos que

$$\begin{aligned} w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x) \setminus \{m+x, m+l-x\}) \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} w(S(x) \setminus \{m+x\}) \\ &\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 0.5837 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=l+1}^{\frac{m+l}{2}-1} 0.7640 \cdot 1.618^{|S(x)|} \\ &\leq 0.5837^{\frac{l}{2}} \cdot 0.7640^{\frac{m-l}{2}-1} \cdot 1.618^{|S'|} \\ &\leq 1.618^{|S'|}. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

4º caso) $I(0) = 1$: Observemos que se $I(0) = 1$ então $f = m + l$, assim se $l \leq d$ então $S'' = \emptyset$ e neste caso $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$ e a desigualdade é verdadeira. Se $d \leq \frac{l}{2}$, então

$$S'' = \left(\bigcup_{x=0}^{d} V_{m+d}(S(x)) \right) \cup \left(\bigcup_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1, 2d\}} V_{m+d}(T(x)) \right).$$

Usando os Lemas 3.9, 3.10, 3.18, a parte (a.ii) do Lema 3.12 e a inclusão

$$\bigcup_{x=0}^{d} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=0}^{d} S(x) \setminus \{m+x\},$$

temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{d} w(S(x) \setminus \{m+x\}) \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1,2d\}} w(T(x)) \\
&\leq \prod_{x=0}^{d} 0.7640 \cdot 1.618^{|S(x)|} \prod_{x=d+1}^{min\{\frac{l}{2}-1,2d\}} 1.1460 \cdot 1.618^{|T(x)|} \\
&\leq 0.7640^{d} \cdot 1.1460^{d} \cdot 1.618^{|S'|} \\
&\leq 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Se $\frac{l}{2} < d \leq l$, então

$$S'' = \bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)).$$

Usando os Lemas 3.9, 3.10, a parte (a.ii) do Lema 3.12 e a inclusão

$$\bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} V_{m+d}(S(x)) \subseteq \bigcup_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} S(x) \setminus \{m+x\},$$

temos que

$$\begin{aligned}
w(S'') &\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} w(S(x) \setminus \{m+x\}) \\
&\leq \prod_{x=0}^{\frac{l}{2}-1} 0.7640 \cdot 1.618^{|S(x)|} \\
&= 0.7640^{\frac{l}{2}} 1.618^{|S'|} \\
&\leq 1.618^{|S'|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$.

Estes casos cobrem todas as possibilidades de valores para $I(0)$, portanto $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$. Agora podemos limitar o peso de S em termos do peso de S''. Primeiramente observe que se U é um subconjunto admissível de S, então $U \cup \{f\}$ é um subconjunto admissível de $S \cup \{f\}$, e ainda que $E(U \cup \{f\}, S \cup \{f\}) \subseteq E(U, S)$ e $E'(U, S) \subseteq E'(U \cup \{f\}, S \cup \{f\})$, disto temos que

$$\begin{aligned} s(U,S) &= |E(U,S)| - |E'(U,S)| \\ &\geq |E(U \cup \{f\}, S \cup \{f\})| - |E'(U \cup \{f\}, S \cup \{f\})| \\ &= s(U \cup \{f\}, S \cup \{f\}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} w(S) &= \sum_{U \in \mathcal{A}(S)} \varphi^{-s(U,S)} \\ &\leq \sum_{U \in \mathcal{A}(S)} \varphi^{-s(U \cup \{f\}, S \cup \{f\})} \\ &\leq \sum_{U \in \mathcal{A}(S \cup \{f\})} \varphi^{-s(U, S \cup \{f\})} \\ &= w(S \cup \{f\}). \end{aligned}$$

Usando que $w(S'') \leq 1.618^{|S'|}$, os Lema 3.10 e 3.15 e a decomposição $S \cup \{f\} = S'' \cup S(\frac{l}{2}) \cup S(\frac{m+l}{2})$, temos que

$$\begin{aligned} w(S) &\leq w(S \cup \{f\}) \\ &\leq w(S'') w\left(S\left(\frac{l}{2}\right)\right) w\left(S\left(\frac{m+l}{2}\right)\right) \\ &\leq 1.618^{|S'|} \cdot 1.618^{|S(\frac{l}{2})|} \cdot 1.618^{|S(\frac{m+l}{2})|} \\ &= 1.618^{|S'| + |S(\frac{l}{2})| + |S(\frac{m+l}{2})|} \\ &= 1.618^{f-m+1} \\ &= 1.618^{|S|+d+2}. \end{aligned}$$

Portanto, $w(S) \leq 1.618^{|S|+d+2}$, como queríamos. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BRAS-AMORÓS, M. Bounds on the number of numerical semigroups of a given genus. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 213, p. 997-1001, 2009.

[2] BRAS-AMORÓS, M. Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, v. 76, p. 379-384, 2008.

[3] CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. *Introduction to Algorithms*. 2ed. Cambridge: McGraw-Hill, 2003. 1180 p.

[4] RAMÍREZ-ALFONSIN, J. L. *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford: Oxford University Press, 2005.

[5] ROSALES, J. C.; BRANCO, M. B. The Frobenius problem for numerical semigroups. *Journal of Number Theory*, v. 131, p. 2310-2319, 2011.

[6] ROSALES, J. C.; BRANCO, M. B. The Frobenius problem for numerical semigroups with multiplicity four. *Semigroup Forum*, v. 83, p. 468-478, 2011.

[7] ROSALES, J. C.; GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A. *Numerical Semigroups*. New York: Springer, 2009. 181 p.

[8] ZARISKI, O. *Le Problème des Modules pour les Branches Planes*. Paris: Hermann, 1986.

[9] ZHAI, A. Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, v. 86, p. 634-662, 2013.