UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

EDUARDO TRONCO

Equação KdV com condições de fronteiras gerais em um domínio não limitado.

Maringá - PR

2009

EDUARDO TRONCO

Equação KdV com condições de fronteiras gerais em um domínio não limitado.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Nickolai Andreevitch Larkine.

Maringá - PR

2009

Agradecimentos

A Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força para superar as dificuldades e me dar paz de espírito.

À minha família, pelo carinho, paciência e incentivo.

Ao meu orientador Professor Nickolai Andreevitch Larkine por acreditar em mim e a todos os professores do Departamento de Matemática da UEM, em especial ao professor Osvaldo Germano que me ajudou muito antes do meu ingresso no curso de Matemática.

A todos os colegas de Mestrado, em especial ao Márcio que me antecedeu e acompanhou o meu trabalho desde o começo.

Eduardo Tronco.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o problema misto geral para a equação de Korteweg – de Vries (KdV) em um domínio não limitado:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + D^3u(x,t) + u(x,t)Du(x,t) = 0 & , \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times (0,T); \\ D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^+; \end{cases}$$

onde as constantes α e β satisfazem certas condições. Como resultado principal, obtemos a existência e unicidade de solução regular do problema acima.

Palavras-chave: equação de KdV, Semi-discretização, existência, soluções regulares.

ABSTRACT

We study here the general mixed problem for the Korteweg – de Vries (KdV) equation in unbounded domain:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + D^3u(x,t) + u(x,t)Du(x,t) = 0 & , \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times (0,T); \\ D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^+; \end{cases}$$

where the constants α e β fulfil certain conditions. Existence and uniqueness of regular solutions of this problem are proved.

Key-words: KdV equation, Semi-discretization, existence, regular solutions.

Sumário

Introdução

Equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não-lineares, tem suas raízes na descoberta de uma Onda Solitária por John Scott Russel. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem mudar de forma. Russel realizou vários experimentos deste fenômeno que ele chamou de Ondas Solitárias.

Após isto, outros cientistas como George Airy e George Stokes se interessaram pelo assunto desenvolvendo e analisando principalmente os modelos matemáticos dos fenômenos observados anteriormente nos laboratórios. Apesar de certo avanço, várias questões ficaram sem respostas concretas, como por exemplo, por que se realiza uma propagação constante de uma onda de forma permanente sobre a superfície da água. O próximo grande avanço se encontra no trabalho de Joseph Boussinesq por volta de 1871. O modelo matemático dele inclui, implicitamente, várias situações, as quais originaram posteriormente as equações KdV, BBM e outras. Por uma ironia da História, as equações de Boussinesq não receberam a valorização adequada da época.

Somente em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que relata uma modelagem matemática essencial sobre as Ondas Solitárias observadas por Russel. A forma original da equação principal do artigo é

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx}\right)_x$$

onde η é a elevação da superfície de líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propulsão linear) do líquido, $g > 0$

é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade $\rho = const > 0$.

Podemos dizer que as equações de Boussinesq e KdV que descrevem os movimentos de ondas, são umas das mais familiares nas quais os efeitos dispersivos estão presentes. O efeito dispersivo ocorre devido à dependência de cada comprimento de onda do pulso, que se propaga pela fibra, com o índice de refração do meio. Dessa forma, cada componente espectral do pulso apresentará uma velocidade, gerando um alargamento do envelope do pulso. De um modo mais simples, podemos dizer que dispersão de uma onda é o fenômeno no qual a velocidade da onda depende da sua amplitude (ou da frequência no caso de um envelope de ondas), ver [24, 26] para mais detalhes.

O sistema de equações

$$(*) \begin{cases} u_t + [(1+\alpha u)w]_x - \frac{\beta}{6} w_{xxx} = 0, \\ u_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2} w_{xxt} = 0, \end{cases}$$

descreve a propagação unilateral das ondas dispersivas na superfície de um líquido e foi originado por Boussinesq. Sua dedução pode ser encontrada em [2] ou [3]. Fisicamente, as variáveis redimensionadas u e w estão relacionadas à amplitude e comprimento de onda, respectivamente. Afim de obter um modelo matemático mais relevante em termos de α e β e ao mesmo tempo mantendo a propagação em um único sentido, considerou-se a seguinte mudança de variáveis,

$$w = u + \alpha A + \beta B,$$

onde

$$A = A(u, u_x, u_t, ...) \text{ e } B = B(u, u_x, u_t, ...).$$

Substituindo essas novas variáveis em (*), obtém-se duas equações que modelam a propagação unidimensional de ondas longas com pequena amplitude, a saber:

$$\begin{cases} u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0 \ , & KdV \\ u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \frac{\beta}{6} u_{xxt} = 0 \ . & BBM \end{cases}$$

A primeira das equações é a famosa equação KdV, já mencionada acima, e a segunda é em homenagem aos matemáticos Benjamin, Bona e Mahony, ver [2, 3, 4, 5].

Para análise matemática, é conveniente modificar os termos com α e β relacionados a amplitude máxima e comprimento de onda, respectivamente. Para isto, podemos fazer $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\beta = 6$. Assim, podemos reescrever as equações KdV e BBM como

$$\begin{cases} u_t + (1+u)u_x + u_{xxx} = 0 \ , & KdV \\ u_t + (1+u)u_x - u_{xxt} = 0 \ . & BBM \end{cases}$$

Há muitos estudos sobre a equação KdV em várias formas. A ela foram dedicados vários trabalhos sobre problemas de valores iniciais e de fronteira, como os encontrados em [4, 5, 12, 15, 18, 24]. Em [14] foi resolvido o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira para uma equação generalizada KdV num domínio limitado:

$$(F)\begin{cases} u_t + u_{xxx} + g(u)u_x + g_1(t,x)u_x + g_2(t,x)u = f(t,x), & Q_T = (0,T)\times(0,1); \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ u|_{x=0} = u_1(t),\ u|_{x=1} = u_2(t),\ u_x|_{x=1} = u_3(t), & \end{cases}$$

onde a função g satisfaz a seguinte restrição de crescimento

$$|g'(u)| \leq c \ , \ \forall\ u \in \mathbb{R} \ , \ \text{para algum} \ \ c \geq 0.$$

Um problema misto, com condições mais gerais na fronteira para a equação KdV, em um domínio limitado foi considerado em [7]. Muitos estudos se concentraram na equação linearizada KdV, ou simplesmente, equação de Airy:

$$u_t + u_{xxx} = f(x,t),$$

que constitui para nós, a parte principal da equação KdV.

Em [8] e [13] foram apresentados estudos sobre problemas de valores iniciais e de fronteira para a equação de Airy no domínio $Q_T = (0,T)\times(0,1)$ com dados iniciais e de fronteira como em (F).

O problema de Cauchy para uma equação de tipo Airy:

$$\begin{cases} u_t = a(x,t)u_{xxx} \quad , \quad -\infty < x < \infty,\ 0 \leq t < \infty; \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

onde o coeficiente de dispersão pode variar com o espaço e o tempo, pode ser visto em [9]. Neste mesmo artigo, foi considerado o caso mais simples onde $a(x,t) \equiv a$ é constante.

O presente trabalho se dedica inicialmente ao estudo do problema linear de valores iniciais e de fronteira, no domínio não limitado $\mathbb{R}^+ \times (0,T)$, a saber:

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) + D^3u(x,t) = f(x,t), \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^+ \times (0,T);\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+;\\
&D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T);
\end{aligned}
$$

onde os coeficientes α e β são escalares tais que para qualquer número real $d > 0$

$$\Delta = \beta - \alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \neq 0,$$

$$\beta > 0 \quad \text{e} \quad |\, \alpha| < min\{2\beta, 1\},$$

onde $T > 0$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R};\; x > 0\}$, $f, f_t \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^+))$ e D^j significa derivada de ordem $j \in \mathbb{N}$ com respeito a variável espacial x. Note que o domínio $\mathbb{R}^+ \times (0,T)$ é não limitado. Como resultado, provamos a existência global e unicidade de solução regular deste problema.

Nosso objetivo principal é conseguir resolver a equação KdV não linear sob as mesmas condições na fronteira. Para isto, nossa abordagem levará em conta dois casos separados e usaremos o método de semi-discretização com respeito a t. Mais ainda, usaremos a função peso exponencial e^{kx} (onde $k > 0$ é a taxa de decaimento dos dados iniciais) para estimar a taxa de decaimento da solução quando $x \to \infty$. Obtemos a existência local e a unicidade de soluções regulares deste problema na classe de funções exponencialmente decrescentes quando $x \to \infty$.

Este trabalho está dividido em dois capítulos. No Capítulo 1, há duas seções. Na primeira delas apresentamos o resultado principal e na outra uma breve revisão de algumas definições e resultados que serão utilizados principalmente no Capítulo 2, onde demonstramos a existência e unicidade de solução regular generalizada para problemas mistos de valores iniciais e de fronteira associados à equação de KdV. Grande parte da teoria desenvolvida neste capítulo é originalmente deste trabalho e eventuais correções serão bem aceitas para melhoria desta dissertação. Por alguns momentos, seguimos uma linha de raciocínio análogo ao trabalho de G. Doronin e N. Larkin, ver [11], que estuda equação de Kawahara. Esta dissertação pode ser vista como uma continuação do trabalho de Márcio Antonio Jorge da Silva, que estudou a equação de Airy, ver [23].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. No entanto, por serem resultados familiares, omitiremos assim as suas demonstrações, as quais podem ser facilmente encontradas em nossas referências.

1.1 Problema e resultados principais

Para $T > 0$ fixo denote $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ e $\mathbb{Q}_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{R}^+,\ t \in (0,T)\}$. Em $\mathbb{Q}_T$, consideramos a equação KdV,

$$u_t + D^3u + uDu = 0 \tag{1.1}$$

sujeita às condições de fronteira e dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

$$D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{1.3}$$

onde os coeficientes α e β são escalares tais que para qualquer $d > 0$

$$\Delta = \beta - \alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \neq 0, \quad \beta > 0 \quad \text{e} \quad |\,\alpha| < min\{2\beta, 1\}. \tag{1.4}$$

Adotamos, por definição, a seguinte terminologia: dizemos que o problema (1.1)-(1.3) está bem-posto se as condições (1.4) forem satisfeitas. Caso contrário, o problema se diz mal-posto. A seguir, alguns exemplos de problemas bem-postos e mal-postos:

Exemplo 1:

$$
\begin{aligned}
&u_t + D^3u + uDu = 0,\\
&D^2u(0,t) + \frac{1}{2}Du(0,t) + u(0,t) = 0;
\end{aligned}
$$

é bem-posto, pois $\Delta \neq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^+$ e $|\frac{1}{2}| < \min\{2,1\}$.

Exemplo 2:

$$
\begin{aligned}
&u_t + D^3u + uDu = 0,\\
&D^2u(0,t) - \frac{1}{4}Du(0,t) + 2u(0,t) = 0;
\end{aligned}
$$

é bem-posto, pois $\Delta \neq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^+$ e $|-\frac{1}{4}| < \min\{4,1\}$.

Exemplo 3:

$$
\begin{aligned}
&u_t + D^3u + uDu = 0,\\
&D^2u(0,t) - Du(0,t) + 2u(0,t) = 0;
\end{aligned}
$$

é mal-posto, pois $\Delta \neq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^+$ mas $|\alpha| = 1 = \min\{2\beta, 1\}$.

Exemplo 4:

$$
\begin{aligned}
&u_t + D^3u + uDu = 0,\\
&D^2u(0,t) - Du(0,t) = 0;
\end{aligned}
$$

também é mal-posto, pois $\Delta \neq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^+$ mas $\beta = 0$.

Se considerarmos uma condição na fronteira mais geral do tipo

$$\delta D^2u(0,t) - \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0;$$

então, se $\delta \neq 0$ a condição acima se transforma na condição (1.3). Por outro lado, se $\delta = 0$, uma análise simples mostra que um problema bem colocado exige também $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$; o que é um caso muito estudado, ver [3, 4, 14].

Aqui e em diante $u : \mathbb{R}^+ \times (0,T) \to \mathbb{R}$ é uma função desconhecida, u_t denota sua derivada parcial com respeito a $t > 0$, $D^j = \partial^j / \partial x^j$ são as derivadas com respeito a $x \in \mathbb{R}^+$ de ordem $j \in \mathbb{N}$ e $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R}^+)$.

Durante todo o trabalho adotamos as notações usuais $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$ para a norma e o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^+)$. Símbolos C, C_0 *e* C_i, $i \in \mathbb{N}$, significam constantes positivas aparecendo durante o texto.

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

Teorema 1.1. *Sejam $u_0 \in H^3(\mathbb{R}^+)$, α e β satisfazendo (1.4) e existe um real $k > 0$ tal que*

$$\left(e^{kx}, \left[\sum_{i=0}^{3} \left|D^i u_0\right|^2 + \left|u_0 D u_0\right|^2\right]\right) < \infty.$$

Então existe $T > 0$ tal que o problema (1.1)-(1.3) tem uma única solução regular:

$$u \in L^\infty(0,T; H^3(\mathbb{R}^+)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, vale a seguinte estimativa:

$$\sum_{i=0}^{3} \left(e^{kx}, |D^i u|^2\right)(t) + \left(e^{kx}, u_t^2\right)(t) + \int_0^t \left(e^{kx}, |Du_\tau|^2\right)(\tau) d\tau$$

$$\leq \left(e^{kx}, \left[\sum_{i=0}^{3} \left|D^i u_0\right|^2 + \left|u_0 D u_0\right|^2\right]\right) \textit{para q.t. } t \in (0,T).$$

1.2 Notações e resultados preliminares

Vejamos inicialmente, algumas definições e resultados auxiliares que aparecerão por todo o texto, principalmente no Cap. 2. Faremos o uso de tais resultados constantemente e suas demonstrações podem ser encontradas em [1, 6, 17, 19, 20] .

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Denotaremos por

$$C(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \varphi \text{ é contínua}\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \varphi \text{ é infinitamente diferenciável}\}.$$

Dada uma função $u \in C(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo

$$Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega\ ;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

$$C_0(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega);\ Supp(\varphi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega);\ Supp(\varphi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}.$$

Dizemos que uma sucessão de funções $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tais que

(i) $Supp(\varphi_\nu) \subset K$, $\forall \nu$ e $Supp(\varphi) \subset K$,

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$; uniformemente sobre K, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Com esta noção de convergência, denotaremos $C_0^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{D}(\Omega)$ e o chamaremos de espaço das funções testes.

Definição 1.2. *Um Espaço de Banach E é um Espaço Vetorial Normado Completo. Quando a norma de E provém de um Produto Interno (p.i.), então dizemos que E é um Espaço de Hilbert.*

Definição 1.3. *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável quando u é o limite quase sempre (q.s.) de uma sucessão de funções do tipo escada.*

Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Denotamos por

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

Em $L^p(\Omega)$ há uma identificação entre funções que diferem entre si, em pontos de um conjunto de medida nula. Podemos definir uma norma em $L^p(\Omega)$, associando a cada (classe de funções) função $u \in L^p(\Omega)$ o número real

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Com isto, $\big(L^p(\Omega); \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\big)$ é um espaço de Banach para todos $1 \leq p < \infty$.

No caso particular $p = 2$, os espaços $L^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert com $p.i.$ dado por $(u, v) = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx$ e norma $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)}$. Logo, toda teoria construida para os espaços de Hilbert pode ser aplicada a $L^2(\Omega)$.

Se $p = \infty$, denotamos por

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq \lambda \ q.s. \text{ em } \Omega\}.$$

Neste caso, como $|u(x)| \leq \lambda \ q.s.$ em Ω diz-se então que λ é majorante essencial de u. Seja $A = \{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ |u(x)| \leq \lambda \ q.s. \text{ em } \Omega\}$ e definimos $supess|u| = inf A$. Podemos assim, definir uma norma em $L^{\infty}(\Omega)$ associando cada $u \in L^{\infty}(\Omega)$ o número real

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = supess|u|,$$

e com isto o espaço $(L^{\infty}(\Omega); \|\cdot\|_{L^{\infty}(\Omega)})$ é um Espaço de Banach.

Suponhamos agora $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representaremos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \ D^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \ , \ \forall \ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde a derivada se dá no sentido das Distribuições. Nestes espaços podemos definir normas como segue

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p dx \quad , \quad se \ 1 \leq p < \infty; \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} supess|D^{\alpha}u(x)| \quad , \quad se \ p = \infty. \end{aligned}$$

Assim definido, $(W^{m,p}(\Omega); \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ é um espaço de Banach. No caso particular $p = 2$, representaremos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ que são espaços de Hilbert com o $p.i.$

$$((u, v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v) \ ; \ \forall \ u, v \in H^m(\Omega).$$

Podemos definir também uma semi-norma em $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, como a seguir: Para cada $0 \leq j \leq m$, consideremos os funcionais:

$$|u|_{j,p} = \left[\sum_{|\alpha| = j} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p dx \right]^{1/p} = \left[\sum_{|\alpha| = j} \|D^{\alpha}u\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p},$$

note que para $j = 0$ temos $|u|_{0,p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Para maiores detalhes ver [1].

Seja X um Espaço de Banach e $T > 0$ um número real. Representaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$ o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \longrightarrow X$ mensuráveis tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, munido da norma $\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right]^{1/p}$. Representaremos por $L^\infty(0,T;X)$ o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \longrightarrow X$ mensuráveis tais que $\|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$, munido da norma $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess_{t\in(0,T)}\|u(t)\|_X$.

Dado $(E; \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach, o dual topológico de E define-se por $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f$ é linear e contínua$\}$, munido da norma $\|f\|_{E'} = sup_{x\in E,\|x\|_E\leq 1}|\langle f,x\rangle|$ também é um espaço de Banach. Do mesmo modo, podemos definir o bi-dual de E denotado por E'' com a norma $\|\xi\|_{E''} = sup_{f\in E',\|f\|_{E'}\leq 1}|\langle \xi, f\rangle|$.
Como pode ser visto em [6], a aplicação

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J_x, \end{aligned}$$

onde $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $J_x(f) = \langle f, x\rangle$,$\forall\ f \in E'$, $\forall\ x \in E$; é um isomorfismo de E sobre $J(E) \subset E''$, o que nos permite fazer a identificação $E \cong J(E)$.

Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E''$ e que E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso em E.

Com relação aos espaços L^p acima mencionados temos que

$$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)\ ,\ 1 < p < \infty \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$
$$[L^1(\Omega)]' \cong L^\infty(\Omega)\ ,\ [L^\infty(\Omega)]' \supsetneq L^1(\Omega);$$
$$[L^p(0,T;X)]' \cong L^q(0,T;X')\ ,\ 1 \leq p < \infty \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sendo E espaço de Banach, para cada $f \in E'$ consideremos $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$; $\forall x \in E$. Quando f percorre E' obtemos uma família de aplicações $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$.

Definição 1.4. *A topologia fraca $\sigma(E,E')$ em E é a topologia mais grossa (menos fina) em E no qual todas funções φ_f, $f \in E'$ são contínuas.*

Definição 1.5. *A topologia fraca∗ $\sigma(E', E)$ em E' é a topologia mais grossa (menos fina) em E' no qual todas funções J_x, $x \in E$ são contínuas.*

Com estas definições podemos definir convergência forte e fraca de uma sucessão de funções e obter uma relação entre elas, como veremos mais adiante nos resultados. Antes, porém, relataremos alguns resultados mais conhecidos que serão muito úteis no Cap. 2.

Teorema 1.6. *$C(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são densos em $L^p(\Omega)$ para todos $1 \leq p < \infty$.*
Demonstração*:* Ver [1].

Teorema 1.7. *$L^p(\Omega)$ é reflexivo se, e somente se, $1 < p < \infty$.*
Demonstração*:* Ver [1].

- $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ não são reflexivos.

Teorema 1.8. *$L^p(\Omega)$ é separável desde que $1 \leq p < \infty$.*
Demonstração*:* Ver [1].

- $L^\infty(\Omega)$ não é Separável.

Teorema 1.9 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a e b números reais e $1 < p < \infty$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ temos que:*

$$|a||b| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|\varepsilon^{-1} b|^q}{q}, \ \text{onde} \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.5}$$

Demonstração*:* Ver [17].

Teorema 1.10 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e vale*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Demonstração*:* Ver [6] ou [20].

• Quando $p = 2$, a Desigualdade de Hölder é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwarz que representaremos como

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Teorema 1.11 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se* $u, v \in L^p(\Omega)$. *Então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \ ; \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.7}$$

Demonstração*:* Ver [20].

Teorema 1.12 (Ehrling)**.** *Suponhamos que* Ω *satisfaz a propriedade do cone uniforme, ver [1] e seja* $\varepsilon_0 > 0$ *qualquer. Então existe uma constante* $\delta = \delta(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ *tal que para quaisquer* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *inteiro* $0 \leq j \leq m - 1$ *e* $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *vale a seguinte estimativa*

$$|u|_{j,p} \leq \delta\varepsilon |u|_{m,p} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{m-j}} |u|_{0,p}. \tag{1.8}$$

Demonstração*:* Ver [1].

• Em termos de notações definidas anteriormente, podemos reescrever (1.8) como

$$\left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \leq \delta\varepsilon \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{m-j}} \|u\|_{L^p(\Omega)} \ ; \ \forall j = 1, \ldots, m-1. \tag{1.9}$$

Teorema 1.13 (Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja* H *um espaço de Hilbert. Para toda forma linear e contínua* $\varphi \in H'$, *existe uma única* $f \in H$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ ; \ \forall v \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H$.

Demonstração*:* Ver [6].

Seja E um espaço de Banach. Dada uma sequência $\{x_n\} \subset E$, uma sequência $\{f_n\} \subset E'$ e $x \in E$, $f \in E'$ denotaremos por:

- $x_n \longrightarrow x$, a convergência forte de x_n para x, isto é, $\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$.

- $x_n \longrightarrow x$-fraco, a convergência fraca de x_n para x em E na topologia $\sigma(E, E')$.

- $f_n \longrightarrow f$-fraco$*$, a convergência fraca$*$ de f_n para f em E' na topologia $\sigma(E', E)$.

- $f_n \longrightarrow f$, a convergência forte de f_n para f, isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$.

Teorema 1.14. *Seja $\{x_n\} \subset E$. Então valem as seguintes sentenças:*

(i) $x_n \longrightarrow x$*-fraco* $\Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle;\ \forall\ f \in E'$.

(ii) $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \longrightarrow x$*-fraco.*

(iii) $x_n \longrightarrow x$*-fraco* $\Longrightarrow \|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq lim_n inf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \longrightarrow x$*-fraco e* $f_n \longrightarrow f$ *forte em* E'*, então* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração*:* Ver [6]. ■

Teorema 1.15. *Seja $\{f_n\} \subset E'$. Então valem as seguintes sentenças:*

(i) $f_n \longrightarrow f$*-fraco$*$* $\Longleftrightarrow \langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle;\ \forall\ x \in E$.

(ii) $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow f_n \longrightarrow f$*-fraco$*$.*

(iii) $f_n \longrightarrow f$*-fraco$*$* $\Longrightarrow \|f_n\|_{E'}$ *é limitada e* $\|f\|_{E'} \leq lim_n inf \|f_n\|_{E'}$.

(iv) Se $f_n \longrightarrow f$*-fraco$*$ e* $x_n \longrightarrow x$ *forte em* E*, então* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração*:* Ver [6].

Teorema 1.16. *Sejam E um espaço de Banach separável e $\{f_n\}$ uma sucessão limitada de E'. Então existe uma subsucessão $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge na topologia fraca$*$*

$\sigma(E', E)$.

Demonstração: Ver [6].

Teorema 1.17. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}$ uma sequência limitada de E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ que converge na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Demonstração: Ver [6].

Como consequência, temos que o Teorema 1.17 vale nos espaços L^p com $1 < p < \infty$. Mais ainda, todo espaço de Hilbert H é reflexivo, ver [6], e portanto vale o Teorema 1.17 em H.

Observação 1.18. *Graças ao Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, podemos identificar os espaços de Hilbert H com seus duais topológicos H', mais detalhes ver [6]. Além disso, dizemos que uma sequência*

$$x_n \longrightarrow x_0 \text{ fraco em } H \iff (x_n, y) \longrightarrow (x_0, y)\ ,\ \forall\, y \in H;$$

onde $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ representa o produto interno em H.

Lema 1.19. (Desigualdade Discreta de Gronwall) *Seja k_n uma sequência de números reais não-negativos. Consideremos uma sequência $\phi_n \geq 0$ tal que*

$$\phi_0 \leq g_0,$$
$$\phi_n \leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s \phi_s, \quad n \geq 1$$

onde $g_0 \geq 0$ e $p_s \geq 0$. Então para todo $n \geq 1$

$$\phi_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s \right) \exp \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} k_s \right\}.$$

Demonstração: Ver [22].

Lema 1.20. (Desigualdade Diferencial de Gronwall) *Seja $u(t)$ uma função não-negativa e diferenciável em [0,T], que satisfaz:*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t)$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções integráveis em $[0,T]$. Então

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau} ds \right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ forem não-negativas, então a expressão torna-se

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) ds \right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [22].

Capítulo 2

Existência e unicidade de solução para equação KdV com condições de fronteira gerais

2.1 Problema estacionário

Nesta seção, nosso objetivo é resolver o seguinte problema de fronteira:

$$D^3u(x) + du(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

$$D^2u(0) + \alpha Du(0) + \beta u(0) = 0, \tag{2.2}$$

onde $d > 0$ é qualquer, f é tal que

$$f \in L^2(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+) \quad \text{t.q.} \quad |f(x)| \leq Me^{-\frac{kx}{2}}; \quad k > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

onde M é uma constante positiva qualquer e α e β satisfazem (1.4). Aqui $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função limitada desconhecida e D^m denota a m-ésima derivada com respeito a x.

Sendo (2.1) linear, temos pela teoria de equações diferenciais ordinárias, ver [10] ou [16], que uma solução geral para a equação (2.1) vem dada por

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x), \tag{2.4}$$

onde $u_p(x)$ é uma solução particular para a equação (2.1) e $u_c(x)$ é uma solução geral da equação homogênea associada

$$D^3u(x) + du(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.5}$$

A equação característica para (2.5) é $\lambda^3 + d = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = -d^{1/3}, \quad \lambda_2 = \frac{d}{2}^{1/3}(1 + i\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{d}{2}^{1/3}(1 - i\sqrt{3}).$$

Logo as soluções de (2.5) são

$$u_1 = e^{-d^{1/3}x}, \quad \overline{u_2} = e^{\frac{d}{2}^{1/3}(1+i\sqrt{3})x} \quad \text{e} \quad \overline{u_3} = e^{\frac{d}{2}^{1/3}(1-i\sqrt{3})x}.$$

Usando as soluções complexas $\overline{u_2}$ e $\overline{u_3}$, obtemos as seguintes soluções reais,

$$u_2 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) \quad \text{e} \quad u_3 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Note que o Wronskiano $W(x) \equiv W = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}d \neq 0$, assim as soluções u_1, u_2 e u_3 são L.I e uma solução geral da equação (2.5) é:

$$u_c(x) = C_1 e^{-d^{1/3}x} + C_2 e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3 e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x). \tag{2.6}$$

Usando o Método da Variação dos Parâmetros, uma solução particular u_p para a equação (2.1) é dada por

$$u_p(x) = \sum_{j=1}^{3} u_j(x)\int_0^x \frac{W_j(s)}{W} f(s)ds,$$

onde W_j , $j = 1, 2, 3$; é obtido de W substituindo a j-ésima coluna por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Efetuando os cálculos, obtemos que

$$W_1 = d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{d^{1/3}x},$$

$$W_2 = -d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right),$$

$$W_3 = d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) - \sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right).$$

Assim a solução particular de (2.1) é,

$$\begin{aligned}
u_p \;=\;& e^{-d^{1/3}x}\int_0^x \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{d^{1/3}s} f(s)ds \\
&- e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\int_0^x \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)+\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds \\
&+ e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\int_0^x \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)-\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Das igualdades (2.6) e (2.7), a solução procurada é dada por,

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-d^{1/3}x}\left(C_1+\int_0^x \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{d^{1/3}s} f(s)ds\right) \\
&+ e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\left(C_2-\int_0^x \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)+\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds\right) \\
&+ e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\left(C_3+\int_0^x \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)-\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds\right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Queremos que as duas segundas parcelas do lado direito de (2.8) sejam finitas quando $x \to \infty$ e para que isto ocorra, vamos impor que:

$$C_2 = \int_0^\infty \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)+\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds,$$

$$C_3 = -\int_0^\infty \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)-\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds.$$

Agora, determinaremos a constante C_1 usando a condição (2.2). Como

$$\begin{aligned}
u(0) &= C_1 + C_2, \\
Du(0) &= -d^{\frac{1}{3}}C_1 + \frac{d}{2}^{\frac{1}{3}}C_2 + \frac{d}{2}^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}C_3, \\
D^2u(0) &= d^{\frac{2}{3}}C_1 - \frac{d}{2}^{\frac{2}{3}}C_2 + \frac{d}{2}^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}C_3,
\end{aligned}$$

temos de (2.2) que:

$$(d^{\frac{2}{3}}C_1 - \frac{d}{2}^{\frac{2}{3}}C_2 + \frac{d}{2}^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}C_3) + \alpha(-d^{\frac{1}{3}}C_1 + \frac{d}{2}^{\frac{1}{3}}C_2 + \frac{d}{2}^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}C_3) + \beta(C_1 + C_2) = 0.$$

Donde,

$$(\beta - \alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}})C_1 = -(\beta + \alpha\frac{d^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{d^{\frac{2}{3}}}{2})C_2 - (\alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}})\frac{\sqrt{3}}{2}C_3 = 0.$$

Logo,

$$C_1 = \frac{d^{-2/3}}{3\Delta}\int_0^\infty e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\Delta^{'}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) - \sqrt{3}\Delta^{''}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds. \tag{2.9}$$

onde $\Delta^{'} = -\beta + \alpha d^{\frac{1}{3}} + 2d^{\frac{2}{3}}$ e $\Delta^{''} = \beta + \alpha d^{\frac{1}{3}}$. Substituindo as constantes C_2 e C_3 em (2.8) e reorganizando os termos segue que

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-d^{1/3}x}\left[C_1 + \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}}\int_0^x e^{d^{1/3}s}f(s)ds\right] \\ &+ \frac{d}{3}^{-\frac{2}{3}}\int_x^\infty e^{-\frac{d}{2}^{1/3}(s-x)}\left(\cos d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(s-x) + \sqrt{3}\sin d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(s-x)\right)f(s)ds, \end{aligned} \tag{2.10}$$

é uma solução para o problema (2.1)-(2.2), onde C_1 é dada por (2.9). Da expressão (2.10) e como f satisfaz (2.3) vê-se facilmente que

$$|u(x)| \to 0 \quad quando \quad x \to \infty.$$

Mais ainda, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Então o problema (2.1)-(2.3) admite uma única solução $u \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que*

$$\|u\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Demonstração: Ver [23].

2.2 Problema de evolução linear

Consideremos o seguinte problema linear de valores iniciais e de fronteira:

$$u_t + D^3u = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{Q}_T; \tag{2.11}$$

$$D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{2.12}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.13}$$

onde

$$u_0 \in H^3(\mathbb{R}^+), \quad f, f_t \in C(0,T;L^2(\mathbb{R}^+)); \tag{2.14}$$

e

$$\left(e^{kx}, \sum_{i=0}^{3} |D^i u_0|^2\right) + \int_0^T \left[(e^{kx}, f^2)(t) + (e^{kx}, f_t^2)(t)\right] dt < \infty; \tag{2.15}$$

onde α e β satisfazem (1.4).

Para abordar (2.11)-(2.13) usaremos o Método de Semi-Discretização. Para maiores detalhes, ver [11] ou [17]. Considere

$$h = \frac{T}{N} > 0, \quad N \in \mathbb{N}$$

e para cada $n = 0, 1, \ldots, N$ pondo $t = nh$ definimos

$$\begin{aligned}
&u^n(x) = u(x, nh), \quad n = 1, \ldots, N;\\
&u^0(x) = u(x,0) = u_0(x);\\
&u_h^n(x) = \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{h}, \quad n = 1, \ldots, N;\\
&u_h^0 \equiv u_t(x,0) = f(x,0) - D^3u(x,0);\\
&f^{n-1}(x) = f(x, [n-1]h).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Podemos aproximar (2.11)-(2.13) pelo seguinte problema

$$Lu^n \equiv \frac{u^n}{h} + D^3u^n = \frac{u^{n-1}}{h} + f^{n-1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.17}$$

$$D^2u^n(0) + \alpha Du^n(0) + \beta u^n(0) = 0 \quad , \quad n = 1, \ldots, N; \tag{2.18}$$

$$u^0(x) = u_0(x) \in H^3(\mathbb{R}^+) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.19}$$

Devido aos resultados da Seção 2.1, dados $f^{n-1} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e $u^{n-1} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo

$$|f^{n-1}(x)| + |u^{n-1}(x)| \leq Ce^{-\delta x}, \quad \delta > 0,$$

existe uma única solução $u^n(x) \in H^3(\mathbb{R}^+)$ de (2.17)-(2.19) tal que

$$|u^n(x)| \leq Ce^{-\delta x}. \tag{2.20}$$

Isto implica em

Proposição 2.2. *Seja* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ *e* $f(x,t) \in C(0,T; L^2(\mathbb{R}^+))$ *tal que para todo* $t \in (0,T)$ *temos*

$$|u_0(x)| + |f(x,t)| \leq Ce^{-\delta x}, \quad \delta > 0.$$

Então o problema (2.17)-(2.19) admite uma única solução

$$u^n \in H^3(\mathbb{R}^+),$$

para todos $n = 1, \ldots, N$ *tal que*

$$|u^n(x)| \leq Ce^{-\delta x}.$$

Demonstração: Para $n = 1$ temos $f^0(x) = f(x,0)$, $u^0(x) = u_0(x)$ e (2.17)-(2.19) torna-se

$$\begin{cases} \dfrac{u^1(x)}{h} + D^3u^1(x) = f(x,0) + \dfrac{u^0(x)}{h} \equiv F^1(x), \\ D^2u^1(0) + \alpha Du^1(0) + \beta u^1(0) = 0. \end{cases}$$

Devido a (2.14)-(2.15),

$$F^1 \in L^2(\mathbb{R}^+) \quad e \quad |F^1(x)| \leq Ce^{-\delta x}.$$

Como $\dfrac{1}{h} > 0$, pelo Teorema 2.1, existe uma única solução $u^1 \in H^3(\mathbb{R}^+)$ do problema acima satisfazendo $|u^1(x)| \leq Ce^{-\delta x}$. Agora para $n = 2$, (2.17)-(2.19) torna-se

$$\begin{cases} \dfrac{u^2(x)}{h} + D^3u^2(x) = f(x,h) + \dfrac{u^1(x)}{h} \equiv F^2(x), \\ D^2u^2(0) + \alpha Du^2(0) + \beta u^2(0) = 0. \end{cases}$$

onde $F^2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ *e* $|F^2(x)| \leq Ce^{-\delta x}$. De novo, pelo Teorema (2.1), existe uma única solução $u^2 \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que $|u^2(x)| \leq Ce^{-\delta x}$. Repetindo este procedimento, o resultado segue. Para provar a solubilidade de (2.11)-(2.13) é suficiente passar o limite em (2.17)-(2.19) quando $h \to 0$. Isto pode ser feito por:

Lema 2.3. *Suponha que a condição (2.15) seja válida. Então para todo* $h > 0$ *suficien-*

temente pequeno e para todo $l = 1, \dots, N$ as soluções $u^n(x)$ de (2.17)-(2.19) satisfazem

$$\begin{aligned}
&\sup_{1\le l\le N} \left\{ (e^{kx}, |u^l|^2) + (e^{kx}, |u_h^l|^2) \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{l} \left\{ (e^{kx}, |Du^n|^2)h + (e^{kx}, |Du_h^n|^2)h \right\} \\
&\le C \left\{ \sum_{i=0}^{3} (e^{kx}, |D^i u_0|^2) + \int_0^T (e^{kx}, f^2 + f_t^2)(t)dt \right\} \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $h > 0$.

Demonstração: Para provar (2.21) vamos calcular algumas estimativas independentes de $h > 0$ para u^n e u_h^n e considerar $\delta = k$.

ESTIMATIVA I. Multiplicando (2.17) por $e^{kx}u^n$ e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ obtemos

$$\underbrace{\frac{1}{h}(u^n - u^{n-1}, e^{kx}u^n)}_{I_1} + \underbrace{(D^3u^n, e^{kx}u^n)}_{I_2} = \underbrace{(f^{n-1}, e^{kx}u^n)}_{I_3} \qquad (2.22)$$

Depois de integrar por partes e usar a desigualdade de Young em algumas etapas obtemos

$$I_1 \ge \frac{(e^{kx}, |u^n|^2)}{2h} - \frac{(e^{kx}, |u^{n-1}|^2)}{2h}; \qquad (2.23)$$

$$I_2 \ge K_1|u^n(0)|^2 + K_2|Du^n(0)|^2 + \frac{3k}{2}(e^{kx}, |Du^n|^2) - \frac{k^3}{2}(e^{kx}, |u^n|^2), \qquad (2.24)$$

onde

$$K_1 = \beta - \frac{k^2}{2} - \frac{|\alpha + k|}{2} \quad e \quad K_2 = \frac{1}{2}(1 - |\alpha + k|);$$

$$I_3 \le \frac{1}{2}(e^{kx}, |u^n|^2) + \frac{1}{2}(e^{kx}, |f^{n-1}|^2). \qquad (2.25)$$

Logo, por (2.22) temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{3k}{2}(e^{kx}, |Du^n|^2) + \frac{(e^{kx}, |u^n|^2)}{2h} - \frac{(e^{kx}, |u^{n-1}|^2)}{2h} \\
&\le C_1(k) \left(|u^n(0)|^2 + |Du^n(0)|^2 \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{k^3}{2} \right) (e^{kx}, |u^n|^2) \\
&+ \frac{(e^{kx}, |f^{n-1}|^2)}{2},
\end{aligned}$$

onde $C_1(k) = \max\{|K_1|, |K_2|\}$.

Somando de $n = 1$ até $n = l \leq N$ e multiplicando por $2h$ obtemos

$$\begin{aligned}
&3k \sum_{n=1}^{l} (e^{kx}, |Du^n|^2)h + (e^{kx}, |u^l|^2) - (e^{kx}, u_0^2) \\
&\leq C_2(k) \left[\sum_{n=1}^{l} \left(|Du^n(0)|^2 + |u^n(0)|^2 \right) h \right] + (k^3 + 1) \sum_{n=1}^{l} (e^{kx}, |u^n|^2)h \\
&+ \sum_{n=1}^{l} (e^{kx}, |f^{n-1}|^2)h, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

onde $C_2(k) = 2C_1(k)$.

Fazendo $k = 0$ em (2.22) e usando (2.23), (2.24) e (2.25) chegamos a desigualdade

$$C_3|Du^n(0)|^2 + C_4|u^n(0)|^2 + \frac{1}{2h}\|u^n\|^2 - \frac{1}{2h}\|u^{n-1}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u^n\|^2 + \frac{1}{2}\|f^{n-1}\|^2,$$

onde

$$C_3 = \frac{1 - |\alpha|}{2} > 0 \quad e \quad C_4 = \beta - \frac{|\alpha|}{2} > 0.$$

Somando de $n = 1$ até $n = l \leq N$ e multiplicando por $2h$ obtemos

$$2hC_5 \sum_{n=1}^{l} \left(|Du^n(0)|^2 + |u^n(0)|^2 \right) + \|u^l\|^2 - \|u_0\|^2 \leq h \sum_{n=1}^{l} \|u^n\|^2 + h \sum_{n=0}^{l-1} \|f^n\|^2, \qquad (2.27)$$

onde

$$C_5 = \min\{C_3, C_4\}.$$

Considerando $0 < h < \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{1}{2}\|u^l\|^2 \leq \|u_0\|^2 + h \sum_{n=0}^{l-1} \|u^n\|^2 + h \sum_{n=0}^{l-1} \|f^n\|^2.$$

Daí

$$\|u^l\|^2 \leq 2\|u_0\|^2 + 2h \sum_{n=0}^{l-1} \|u^n\|^2 + 2h \sum_{n=0}^{l-1} \|f^n\|^2.$$

Aplicando o Lema Discreto de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^l\|^2 &\leq \left(2\|u_0\|^2 + 2h \sum_{n=0}^{l-1} \|f^n\|^2 \right) exp(2hl) \\
&\leq \left(2\|u_0\|^2 + 2h \sum_{n=0}^{l-1} \|f^n\|^2 \right) exp(2T). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Note que

$$h\sum_{n=0}^{N}\|f^n\|^2=\sum_{n=0}^{N}h\int_0^\infty|f^n(x)|^2dx\leq M\int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt,$$

onde $M>0$. Logo, de (2.28) temos

$$\|u^l\|^2\leq M_1\left(\|u_0\|^2+\int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt\right),\tag{2.29}$$

onde $M_1=\max\{2e^{2T},2Me^{2T}\}$.

Novamente, considerando $0<h<\frac{1}{2}$, de (2.27) obtemos

$$2hC_5\sum_{n=1}^{l}\left(|Du^n(0)|^2+|u^n(0)|^2\right)\leq\|u_0\|^2+h\sum_{n=0}^{l-1}\|u^n\|^2+h\sum_{n=0}^{l-1}\|f^n\|^2.\tag{2.30}$$

Como $\|u^n\|^2\leq\sup\limits_{0\leq n\leq N}\|u^n\|^2$, o que implica por (2.29) que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l-1}\|u^n\|^2h &\leq \sum_{n=0}^{l-1}\sup_{0\leq n\leq N}\|u^n\|^2h\\ &\leq \sum_{n=0}^{N}M_1h\left[\|u_0\|^2+\int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt\right]\\ &= M_1T\left[\|u_0\|^2+\int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt\right].\end{aligned}$$

Logo, de (2.30)

$$\sum_{n=1}^{l}\left(|Du^n(0)|^2+|u^n(0)|^2\right)h\leq M_2\left[\|u_0\|^2+\int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt\right],\tag{2.31}$$

onde $M_2=\frac{1+M_1T+M}{2C_5}$. Então usando (2.31), temos de (2.26) que

$$\begin{aligned}&3k\sum_{n=1}^{l}(e^{kx},|Du^n|^2)h+(e^{kx},|u^l|^2)\leq(e^{kx},u_0^2)\\ &+C_3(k)\left[\|u_0\|^2+\int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt\right]+(k^3+1)\sum_{n=1}^{l}(e^{kx},|u^n|^2)h\\ &+\sum_{n=1}^{l}(e^{kx},|f^{n-1}|^2)h,\end{aligned}$$

onde $C_3(k)=M_2C_2(k)$.

Considerando h suficientemente pequeno tal que $0 < (1 + k^3)h < \frac{1}{2}$ obtemos

$$3k\sum_{n=1}^{l}(e^{kx}, |Du^n|^2)h + \frac{1}{2}(e^{kx}, |u^l|^2) \leq (e^{kx}, u_0^2)$$
$$+ C_3(k)\left[\|u_0\|^2 + \int_0^T\int_0^\infty f^2(x,t)dxdt\right] + (k^3+1)\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx}, |u^n|^2)h$$
$$+\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx}, |f^n|^2)h. \tag{2.32}$$

Note que $kx > 0$ (pois $k > 0$ e $x > 0$). Logo $e^{kx} > 1$. Então $\|u_0\|^2 \leq (e^{kx}, u_0^2)$. Também temos

$$\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx}, |f^n|^2)h \leq \sum_{n=0}^{N}(e^{kx}, |f^n|^2)h = \sum_{n=0}^{N} h\int_0^\infty e^{kx}|f^n(x)|^2 dx$$
$$\leq M_3\int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt,$$

onde $M_3 > 0$. Fazendo $C_4(k) = 1 + M_3 + C_3(k)$, (2.32) torna-se

$$3k\sum_{n=1}^{l}(e^{kx}, |Du^n|^2)h + \frac{1}{2}(e^{kx}, |u^l|^2) \leq C_4(k)\left[(e^{kx}, u_0^2) + \int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]$$
$$+(k^3+1)\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx}, |u^n|^2)h.$$

Daí

$$(e^{kx}, |u^l|^2) \leq 2C_4(k)\left[(e^{kx}, u_0^2) + \int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]$$
$$+2(k^3+1)\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx}, |u^n|^2)h \quad \forall l \leq N.$$

Aplicando o Lema Discreto de Gronwall obtemos

$$(e^{kx}, |u^l|^2) \leq 2C_4(k)\left[(e^{kx}, u_0^2) + \int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]\exp[2lh(k^3+1)]$$
$$\leq 2C_4(k)\left[(e^{kx}, u_0^2) + \int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]\exp[2T(k^3+1)]. \tag{2.33}$$

Note que

$$\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx}, |u^n|^2)h \leq \sum_{n=0}^{l-1}\sup_{0\leq n\leq N}(e^{kx}, |u^n|^2)h.$$

Daí, de (2.33) obtemos

$$
\begin{aligned}
&(k^3+1)\sum_{n=0}^{l-1}(e^{kx},|u^n|^2)h \\
&\le (k^3+1)\sum_{n=0}^{l-1} h\left[2C_4(k)\left[(e^{kx},u_0^2)+\int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]\exp[2T(k^3+1)]\right] \\
&\le (k^3+1)2TC_4(k)\left[(e^{kx},u_0^2)+\int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]\exp[2T(k^3+1)].
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\sum_{n=1}^{l}(e^{kx},|Du^n|^2)h \le C_5(T,k)\left[(e^{kx},u_0^2)+\int_0^T\int_0^\infty e^{kx}f^2(x,t)dxdt\right]. \tag{2.34}
$$

ESTIMATIVA II. Escrevendo (2.17) como $(Lu^n - Lu^{n-1})/h$ temos

$$
\begin{aligned}
&L_h u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{h} + D^3u_h^n = f_h^{n-1}, \quad x\in\mathbb{R}^+; \qquad (2.35)\\
&D^2u_h^n(0)+\alpha Du_h^n(0)+\beta u_h^n(0)=0, \quad n=1,\dots,N;\\
&u_h^0 \equiv u_t(x,0) = f(x,0) - D^3u_0(x);\\
&f_h^0(x)\equiv f_t(x,0).
\end{aligned}
$$

Multiplicando (2.35) por $e^{kx}u_h^n$, integrando sobre $\mathbb{R}^+$ e repetindo os cálculos usados na estimativa I obtemos

$$
\begin{aligned}
&(e^{kx},|u_h^l|^2)+\sum_{n=1}^{l}(e^{kx},|Du_h^n|^2)h \le C_6(T,k)\left[(e^{kx},u_t^2(x,0))+\int_0^T(e^{kx},f_t^2)(t)dt\right]\\
&\le C_7(T,k)\left[\sum_{i=0}^{3}(e^{kx},|D^iu_0|^2)+\int_0^T(e^{kx},f_t^2+f^2)(t)dt\right]. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

O resultado segue de (2.33), (2.34) e (2.36).

Teorema 2.4. *Seja $u_0(x)$ e $f(x,t)$ satisfazendo (2.14) e (2.15). Então (2.11)-(2.13) admite uma única solução*

$$
\begin{aligned}
&u\in L^\infty(0,T;H^3(\mathbb{R}^+)),\\
&u_t\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^+))\cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^+)),
\end{aligned}
$$

tal que

$$\sup_{t\in(0,T)} \left\{(e^{kx}, u^2)(t) + (e^{kx}, u_t^2)(t)\right\} + \int_0^T (e^{kx}, |Du|^2)(t)dt + \int_0^T (e^{kx}, |Du_t|^2)(t)dt < \infty.$$

Demonstração: Reescrevendo (2.17)-(2.19) como

$$\begin{aligned}
&D^3u^n(x) + u^n(x) = u^n(x) - u_h^n(x) + f^{n-1}(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^+;\\
&D^2u^n(0) + \alpha Du^n(0) + \beta u^n(0) = 0, \quad n = 1, ..., N;\\
&u^0(x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+;
\end{aligned}$$

e levando em conta o Teorema (2.1), encontramos uma solução $u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|F(x)\|.$$

Note que $u^n, u_h^n \in L^2(\mathbb{R}^+)$ (basta fazer $k = 0$ no Lema (2.3) e usar a hipótese (2.14)-(2.15)), por isso aplicamos o Teorema (2.1).

Daí

$$\begin{aligned}
&\|u^n\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|F(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = C\| - u_h^n + u^n + f^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}\\
&\leq C_1\|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + C_1\|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + C_1\|f^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C_1(e^{kx}, |u_h^n|^2) + C_1(e^{kx}, |u^n|^2)\\
&+ C_1\|f(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C_2\left\{\sum_{i=0}^{3}(e^{kx}, |D^iu_0|^2) + \|f(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \int_0^T (e^{kx}, f^2 + f_t^2)(t)dt\right\},
\end{aligned}$$

onde a constante C_2 para $h > 0$ suficientemente pequeno não depende de h. Como as estimativas (2.33), (2.34), (2.36) e a desigualdade acima são uniformes em $h > 0$, os argumentos padrão (ver [17]) implicam que existe uma função $u(x,t)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\overline{u^n} \to u \ fraco* \text{ em } L^\infty(0,T; H^3(\mathbb{R}^+))\\
&\overline{u_h^n} \to u_t \ fraco* \text{ em } L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^+))
\end{aligned}$$

onde $\overline{u^n}$ e $\overline{u_h^n}$ são interpolações de u^n e u_h^n respectivamente e $u(x,t)$ é a solução de (2.11)-(2.13). Para maiores detalhes, ver [17] ou [23].

2.3 Problema não-linear. Soluções locais

Nesta seção provaremos a existência de soluções regulares locais para o seguinte problema não-linear:

$$u_t + D^3u = -uDu, \quad (x,t) \in \mathbb{Q}_T; \tag{2.37}$$

$$D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{2.38}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.39}$$

onde α e β satisfazem (1.4). O resultado principal aqui é

Teorema 2.5. *Sejam α e β satisfazendo (1.4), $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R}^+)$ e para algum $k > 0$ tem-se*

$$\sum_{i=0}^{3}(e^{kx}, |D^iu_0|^2) + (e^{kx}, |u_0Du_0|^2) < \infty.$$

Então existe um real $T > 0$ tal que (2.37)-(2.39) possui uma única solução regular em $\mathbb{Q}_T$ e

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})} \left\{(e^{kx}, u^2)(t) + (e^{kx}, u_t^2)(t)\right\} \\
&+\int_0^T \left[(e^{kx}, |Du|^2)(t)dt + (e^{kx}, |Du_t|^2)(t)dt\right] dt \\
&\leq C(T,k)\left[\sum_{i=0}^{3}(e^{kx}, |D^iu_0|^2) + (e^{kx}, |u_0Du_0|^2)\right].
\end{aligned}$$

Demonstração: Provaremos este teorema usando o Teorema do ponto fixo de Banach (ou o Princípio da Contração). Considere $X = L^\infty(0,T; H^3(\mathbb{R}^+))$, $Y = L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^+))$. Seja V o espaço

$$\begin{aligned}
V = \ &\{v : \mathbb{R}^+ \times [0,T] \to \mathbb{R} : v \in X, v_t \in Y, \\
&D^2v(0,t) + \alpha Dv(0,t) + \beta v(0,t) = 0, \\
&v(x,0) = u_0(x)\}
\end{aligned}$$

com a norma

$$\begin{aligned}
\|v\|_V^2 \ &= \sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})} \left\{(e^{kx}, v^2)(t) + (e^{kx}, v_t^2)(t)\right\} \\
&+ \int_0^T \left[(e^{kx}, |Dv|^2)(t)dt + (e^{kx}, |Dv_t|^2)(t)dt\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Prova-se que $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Defina primeiro

$$C^* = \max\left\{1 + \frac{2C_1(k)}{C_5}, 1 + \frac{2\delta C_1(k)}{C_5}, 4 + \frac{12C_1(k)}{C_5}, 2 + \frac{6\delta C_1(k)}{C_5}\right\},$$

onde $\delta = \dfrac{1}{\min\{1,k\}}$. Lembre-se que $C_1(k) = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, onde $K_1 = \beta - \dfrac{k^2}{2} - \dfrac{|\alpha + k|}{2}$ e $K_2 = \dfrac{1}{2}(1 - |\alpha + k|)$.

Agora defina

$$B_R = \{v \in V : \|v\|_V \leq R\sqrt{8C^*}\}$$

e $R > 1$ tal que

$$\sum_{i=0}^{3}(e^{kx}, |D^i u_0|^2 + |u_0 D u_0|^2) \leq R^2. \tag{2.41}$$

Para qualquer $v(x,t) \in B_R$ consideremos o problema linear

$$u_t + D^3 u = -vDv, \quad (x,t) \in Q_T; \tag{2.42}$$

$$D^2 u(0,t) + \alpha D u(0,t) + \beta u(0,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{2.43}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.44}$$

onde α e β satisfazem (1.4).

Vamos mostrar que $f(x,t) = -vDv$ satisfaz as condições (2.14) e (2.15). Note que

$$|v^2(x,t)| = |\overbrace{\lim_{x\to\infty} v^2(x,t)}^{=0} - v^2(x,t)| = \left|\int_x^\infty D\left(v^2(x,t)\right)dx\right| = \left|\int_x^\infty 2v(x,t)Dv(x,t)dx\right|$$
$$\leq \int_x^\infty |2v(x,t)Dv(x,t)|dx \leq 2\int_{\mathbb{R}^+} |v(x,t)Dv(x,t)|dx \leq 2\|v\|(t)\|Dv\|(t) < \infty.$$

Logo, existe $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |v(x,t)|$.

Daí, por (2.40), temos que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|vDv|^2 dxdt \leq \sup_{t\in(0,T)}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|v(x,t)|^2\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv|^2 dxdt < \infty.$$

Também

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|(vDv)_t|^2 dxdt \leq 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}\left(|v_t Dv|^2 + |vDv_t|^2\right)dxdt$$
$$= 2\left[\underbrace{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|v_t Dv|^2 dxdt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|vDv_t|^2 dxdt}_{I_2}\right]. \tag{2.45}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv(x,t)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv(x,0)|^2dx$$
$$+\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}(e^{kx},|Dv(x,\tau)|^2)d\tau = (e^{kx},|Du_0|^2) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^+} 2e^{kx}Dv(x,\tau)Dv_\tau(x,\tau)dxd\tau$$
$$\leq (e^{kx},|Du_0|^2) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}(|Dv|^2+|Dv_\tau|^2)dxd\tau.$$

Daí

$$\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv|^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Du_0|^2dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}\left[|Dv|^2+|Dv_t|^2\right]dxdt. \qquad (2.46)$$

Logo

$$I_1 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|v_tDv|^2dxdt \leq \int_0^T\left(\sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+}|v_t|^2\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv|^2dx\right)dt$$
$$\leq 2\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\|v_t\|\int_0^T\left(\|Dv_t\|\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv|^2dx\right)dt$$
$$\leq 2\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\|v_t\|\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv|^2dx\int_0^T\|Dv_t\|dt$$
$$\leq 2\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\|v_t\|\sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv|^2dx\left[\frac{1}{2}\int_0^T(1+\|Dv_t\|^2)dt\right] < \infty, \qquad (2.47)$$

e

$$I_2 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|vDv_t|^2dxdt \leq \sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T})}\left(\sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+}|v^2(x,t)|\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv_t|^2dxdt < \infty. \qquad (2.48)$$

Logo $f(x,t) = -vDv$ satisfaz as condições (2.14) e (2.15). Então existe uma única função $u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^3(\mathbb{R}^+))$ que resolve (2.42)-(2.44). Logo pode-se considerar um operador P relacionado a (2.42)-(2.44) definido sobre v e tal que $u = Pv$.

Lema 2.6. *Existe um real $T = T(R) > 0$ tal que o operador $P : u = Pv$ leva B_R nele mesmo.*

Demonstração: Para provar este lema faz-se necessário algumas estimativas:

ESTIMATIVA I. Multiplicando (2.42) por u e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ temos

$$\underbrace{(u_t,u)}_{I_1} + \underbrace{(D^3u,u)}_{I_2} = \underbrace{(-vDv,u)}_{I_3}.$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (u, u_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},\\
I_2 &= (D^3u, u) \geq C_5\left(|u(0,t)|^2 + |Du(0,t)|^2\right),\\
I_3 &= (-vDv, u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|vDv\|^2.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) + C_5\left(|u(0,t)|^2 + |Du(0,t)|^2\right) \leq \|u\|^2(t) + \|vDv\|^2(t). \tag{2.49}
$$

Mas

$$
\|vDv\|^2(t) = \int_{\mathbb{R}^+} |v(x,t)Dv(x,t)|^2 dx \leq \sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+} v^2(x,t)\int_{\mathbb{R}^+} |Dv(x,t)|^2 dx.
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+} v^2(x,t) \leq 2\|v\|(t)\|Dv\|(t) &\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}v^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}|Dv(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2.3R\sqrt{C^*}(R^2 + 8R^2C^*)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\|vDv\|^2(t) \leq 6R\sqrt{C^*}(R^2 + 8R^2C^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 + 8R^2C^*).
$$

Logo por (2.49) e pela desigualdade acima,

$$
\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) \leq \|u\|^2(t) + C_1(R),
$$

onde $C_1(R) = 6R\sqrt{C^*}(R^2 + 8R^2C^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 + 8R^2C^*)$.

Pelo Lema de Gronwall,

$$
\|u\|^2(t) \leq e^T\left(\|u_0\|^2 + C_1(R)T\right).
$$

Considerando $T > 0$ tal que $e^T \leq 2$ e $C_1(R)T \leq R^2$ obtemos

$$
\|u\|^2(t) \leq 4R^2.
$$

Então (2.49) torna-se

$$
\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) + C_5\left(|Du(0,t)|^2 + |u(0,t)|^2\right) \leq C_2(R),
$$

onde $C_2(R) = 4R^2 + C_1(R)$.

Integrando a desigualdade sobre $(0, t)$

$$\|u\|^2(t) + C_5 \int_0^t \left[|u(0,\tau)|^2 + |Du(0,\tau)|^2\right] d\tau \leq C_2(R) + \|u_0\|^2,$$

o que implica

$$\int_0^t \left[|u(0,\tau)|^2 + |Du(0,\tau)|^2\right] d\tau \leq \frac{1}{C_5}\left[C_2(R)T + \|u_0\|^2\right]. \tag{2.50}$$

Multiplicando (2.42) por $e^{kx}u$ e integrando sobre $\mathbb{R}^+$

$$(u_t, e^{kx}u) + (D^3u, e^{kx}u) = (-vDv, e^{kx}u).$$

Repetindo os cálculos do Lema 2.3 obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(e^{kx}, u^2)(t) + 3k(e^{kx}, |Du|^2)(t) \leq 2C_1(k)\left(|u(0,t)|^2 + |Du(0,t)|^2\right)\\ &+ C_3(k)(e^{kx}, u^2)(t) + (e^{kx}, |vDv|^2)(t),\end{aligned} \tag{2.51}$$

onde $C_3(k) = 1 + k^3$.

Mas

$$\begin{aligned}&I = (e^{kx}, |vDv|^2)(t) \leq \sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+} v^2(x,t)(e^{kx}, |Dv|^2)(t)\\ &\leq \sup_{\mathrm{t}\in(0,\mathrm{t})} \|v\|(t)\|Dv\|(t)(e^{kx}, |Dv|^2)(t) \leq 2.R\sqrt{8}\sqrt{C^*}(R^2 + 8R^2C^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 + 8R^2C^*).\end{aligned} \tag{2.52}$$

Então por (2.52) temos que (2.51) torna-se

$$\frac{d}{dt}(e^{kx}, u^2)(t) \leq 2C_1(k)\left[|u(0,t)|^2 + |Du(0,t)|^2\right] + \ C_3(k)(e^{kx}, u^2)(t) + C_3(R),$$

onde $C_3(R) = 2.R\sqrt{8}\sqrt{C^*}(R^2 + 8R^2C^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 + 8R^2C^*)$.

Pelo Lema de Gronwall

$$(e^{kx}, u^2)(t) \leq e^{C_3(k)T}(e^{kx}, u_0^2) + 2C_1(k)e^{C_3(k)T}\int_0^t \left[|u(0,\tau)|^2 + |Du(0,\tau)|^2\right] d\tau + e^{C_3(k)T}C_3(R)T.$$

Substituindo (2.50) na desigualdade acima chegamos à expressão

$$\begin{aligned}(e^{kx}, u^2)(t) &\leq e^{C_3(k)T}(e^{kx}, u_0^2) + 2\frac{C_1(k)}{C_5}e^{C_3(k)T}\left[(e^{kx}, u_0^2) + C_2(R)T\right] + e^{C_3(k)}C_3(R)T\\ &\leq e^{C_3(k)T}(e^{kx}, u_0^2)\left(1 + 2\frac{C_1(k)}{C_5}\right) + e^{C_3(k)T}\left[2\frac{C_1(k)}{C_5} + C_3(R)\right]T.\end{aligned}$$

Considerando $T > 0$ tal que $e^{C_3(k)T} \leq 2$ e $\left[2\frac{C_1(k)}{C_5}C_2(R) + C_3(R)\right] T \leq 2R^2C^*$ vemos que

$$(e^{kx}, u^2)(t) \leq 4R^2C^*; \quad t \in (0, T). \tag{2.53}$$

Voltando à (2.51) e usando (2.52) obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{kx}, u^2)(t) + 3k(e^{kx}, |Du|^2)(t) \leq 2C_1(k)\left[|u(0,t)|^2 + |Du(0,t)|^2\right] + C_3(k)(e^{kx}, u^2)(t) + C_3(R).$$

Integrando a desigualdade acima sobre $(0, t)$

$$\begin{aligned}
&(e^{kx}, u^2)(t) + \int_0^t (e^{kx}, |Du|^2)(\tau)d\tau \leq (e^{kx}, u_0^2) \\
&+\delta\left[2C_1(k)\int_0^t \left(|u(0,\tau)|^2 + |Du(0,\tau)|^2\right)d\tau + C_3(k)\int_0^t (e^{kx}, u^2)(\tau)d\tau + C_3(R)T\right].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Usando (2.50) e (2.53), (2.54) torna-se

$$\begin{aligned}
&(e^{kx}, u^2)(t) + \int_0^t (e^{kx}, |Du|^2)(\tau)d\tau \leq (e^{kx}, u_0^2) \\
&+ \delta\frac{2C_1(k)}{C_5}\left[C_2(R)T + (e^{kx}, u_0^2)\right] + \delta T\left[C_3(k)4R^2C^* + C_3(R)\right] \\
&= (e^{kx}, u_0^2)\left[1 + \frac{2\delta C_1(k)}{C_5}\right] + \delta T\left[\frac{2C_1(k)}{C_5}C_2(R) + C_8(k)4R^2C^* + C_3(R)\right].
\end{aligned}$$

Considerando $T > 0$ tal que $\delta T\left[\frac{2C_1(k)}{C_5}C_2(R) + C_3(k)4R^2C^* + C_3(R)\right] \leq 3R^2C^*$ obtemos

$$(e^{kx}, u^2)(t) + \int_0^t (e^{kx}, |Du|^2)(\tau)d\tau \leq 4R^2C^*; \quad t \in (0, T). \tag{2.55}$$

ESTIMATIVA II. Agora diferenciando (2.42) com respeito a t, multiplicando por u_t e usando alguns cálculos já feitos temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + C_5\left(|u_t(0,t)|^2 + |Du_t(0,t)|^2\right) \leq \left((-vDv)_t, u_t\right)(t). \tag{2.56}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) \leq \underbrace{2\|vDv_t\|(t)\|u_t\|(t)}_{I_1} + \underbrace{2\|v_tDv\|(t)\|u_t\|(t)}_{I_2}. \tag{2.57}$$

Mas

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\|vDv_t\|(t)\|u_t\|(t) \leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|v(x,t)|\|Dv_t\|(t)\|u_t\|(t) \\
&\leq 2\sqrt{2}\|v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv_t\|(t)\|u_t\|(t) \\
&\leq C_4(R)\|Dv_t\|(t)\|u_t\|(t),
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\|v_t Dv\|(t)\|u_t\|(t) \leq 2 \sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+} |v_t(x,t)|\|Dv\|(t)\|u_t\|(t) \\
&\leq 2\sqrt{2}\|v_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv\|(t)\|u_t\|(t) \\
&\leq C_5(R)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_t\|(t).
\end{aligned}
$$

Por (2.57)

$$
\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) \leq C_4(R)\|Dv_t\|(t)\|u_t\|(t) + C_5(R)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_t\|(t). \tag{2.58}
$$

Como

$$
\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) = 2\|u_t\|(t)\frac{d}{dt}\|u_t\|(t),
$$

(2.58) torna-se

$$
\frac{d}{dt}\|u_t\|(t) \leq C_4(R)\|Dv_t\|(t) + C_5(R)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t). \tag{2.59}
$$

Integrando sobre $(0,t)$

$$
\|u_t\|(t) \leq \|u_t\|(0) + C_4(R)\underbrace{\int_0^t \|Dv_\tau\|(\tau)d\tau}_{I_3} + C_5 \underbrace{\int_0^t \|Dv_\tau\|^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau}_{I_4}. \tag{2.60}
$$

De (2.42)

$$
|u_t(x,0)| \leq |v(x,0)Dv(x,0)| + |D^3u(x,0)|.
$$

Logo

$$
|u_t(x,0)|^2 \leq 2(|u_0Du_0|^2 + |D^3u_0|^2),
$$

e

$$
\|u_t\|(0) \leq \sqrt{2}\left(e^{kx}, |u_0Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3} |D^iu_0|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
I_3 = \int_0^t \|Dv_\tau\|(\tau)d\tau &\leq \left(\int_0^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \|Dv_\tau\|^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^{\frac{1}{2}}\sqrt{8}R\sqrt{C^*} \quad \text{e} \\
I_4 = \int_0^t \|Dv_\tau\|^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau &\leq \left(\int_0^t d\tau\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^t \|Dv_\tau\|^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq T^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{8}\sqrt{R}\sqrt[4]{C^*}.
\end{aligned}
$$

Logo (2.60) torna-se

$$\|u_t\|(t) \leq \sqrt{2}\left(e^{kx}, |u_0 Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3} |D^i u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} + C_6(R)T^{\frac{1}{2}} + C_7(R)T^{\frac{3}{4}},$$

onde $C_6(R) = C_4(R)\sqrt{8}R\sqrt{C^*}$ $\quad e \quad$ $C_7(R) = C_5(R)\sqrt[4]{8}\sqrt{R}\sqrt[4]{C^*}$.

Considerando $T > 0$ tal que $C_6(R)T^{\frac{1}{2}},\ C_7(R)T^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2}R$ obtemos

$$\|u_t\|(t) \leq 2R. \tag{2.61}$$

Por (2.56)

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + C_5\left(|u_t(0,t)|^2 + |Du_t(0,t)|^2\right) \leq 2\left((-vDv)_t, u_t\right)(t)$$
$$\leq 2\|vDv_t\|(t)\|u_t\|(t) + 2\|v_t Dv\|(t)\|u_t\|(t) \leq C_4(R)\|Dv_t\|(t)\|u_t\|(t) + C_5(R)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_t\|(t).$$

Substituindo (2.61) na desigualdade acima

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + C_5\left(|u_t(0,t)|^2 + |Du_t(0,t)|^2\right) \leq 2RC_4(R)\|Dv_t\|(t) + 2RC_5(R)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t).$$

Integrando sobre $(0, t)$

$$\|u_t\|^2(t) + C_5(R)\int_0^t \left(|u_\tau(0,\tau)|^2 + |Du_\tau(0,\tau)|^2\right) d\tau \leq \|u_t\|^2(0)$$
$$+ 2RC_4(R)\int_0^t \|Dv_\tau\|(\tau)d\tau + 2RC_5(R)\int_0^t \|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau \leq \|u_t\|^2(0)$$
$$+ 2RC_6(R)T^{\frac{1}{2}} + 2RC_7(R)T^{\frac{3}{4}} \leq 2\left(e^{kx}, |u_0 Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3} |D^i u_0|^2\right)$$
$$+ 2RC_6(R)T^{\frac{1}{2}} + 2RC_7(R)T^{\frac{3}{4}}.$$

Considerando $T > 0$ tal que $2RC_6(R)T^{\frac{1}{2}} + 2RC_7(R)T^{\frac{3}{4}} \leq \left(e^{kx}, |u_0 Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3} |D^i u_0|^2\right)$,
chegamos à desigualdade

$$\|u_t\|^2(t) + C_5(R)\int_0^t \left(|u_\tau(0,\tau)|^2 + |Du_\tau(0,\tau)|^2\right) d\tau \leq 3\left(e^{kx}, |u_0 Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3} |D^i u_0|^2\right). \tag{2.62}$$

Agora diferenciando (2.42) com respeito a t , multiplicando por $e^{kx}u_t$, integrando sobre $\mathbb{R}^+$ e usando os mesmos cálculos do Lema 2.3 obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{kx}, u_t^2)(t) + 3k(e^{kx}, |Du_t|^2)(t) \leq 2C_1(k)\left(|u_t(0,t)|^2 + |Du_t(0,t)|^2\right)$$
$$+ k^3(e^{kx}, u_t^2) + 2(e^{kx}, (vDv)_t u_t). \tag{2.63}$$

Mas

$$
\begin{aligned}
&(e^{kx},(vDv)_t u_t)(t) = (e^{kx},(vv_t)_x u_t)(t) = vv_t e^{kx} u_t\big|_0^\infty - (vv_t,(e^{kx}u_t)_x)(t)\\
&= -vv_t u_t(0) - (vv_t, e^{kx}[Du_t + ku_t])(t) = -vv_t u_t(0) - k(e^{kx}, vv_t u_t)(t) - (e^{kx}, vv_t Du_t)(t)\\
&\leq -vv_t u_t(0) + \frac{k}{2}(e^{kx},|vv_t|^2 + |u_t|^2)(t) + k(e^{kx},|Du_t|^2)(t) + \frac{1}{2k}(e^{kx},|vv_t|^2)(t).
\end{aligned} \tag{2.64}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
&|v(0)v_t(0)u_t(0)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|v(x,t)| \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|v_t(x,t)| \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|u_t(x,t)|\\
&\leq \sqrt{2}\|v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv\|^{\frac{1}{2}}(t)\sqrt{2}\|v_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\sqrt{2}\|u_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Du_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\\
&\leq C_8(R)\|Dv_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Du_t\|^{\frac{1}{2}}(t).
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Young para $p = \frac{4}{3}$ chegamos à desigualdade

$$
|v(0)v_t(0)u_t(0)| \leq C_8(R)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{3\epsilon}{4}\|Dv_t\|^{\frac{2}{3}}(t)\right] + \frac{1}{4\epsilon}\|Du_t\|^2(t), \tag{2.65}
$$

onde $\epsilon > 0$ é tal que $\dfrac{1}{4\epsilon} = k$. Com ajuda de (2.64) e (2.65), (2.63) torna-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e^{kx},u_t^2)(t) + k(e^{kx},|Du_t|^2)(t) \leq 2C_1(k)\left[|u_t(0,t)|^2 + |Du_t(0,t)|^2\right]\\
&+ C_2(k)(e^{kx},u_t^2)(t) + C_4(k)(e^{kx},|vv_t|^2)(t) + C_{10}(R,k)\|Dv_t\|^{\frac{2}{3}}(t).
\end{aligned} \tag{2.66}
$$

Aplicando o Lema de Gronwall

$$
\begin{aligned}
&(e^{kx},u_t^2)(t) \leq e^{C_2(k)T}(e^{kx},u_t^2)(0) + e^{C_2(k)T}2C_1(k)\int_0^t \left(|u_\tau(0,\tau)|^2 + |Du_\tau(0,\tau)|^2\right)d\tau\\
&+e^{C_2(k)T}C_4(k)\int_0^t (e^{kx},|vv_\tau|^2)(\tau)d\tau + e^{C_2(k)T}C_{10}(k,R)\int_0^t \|Dv_\tau\|^{\frac{2}{3}}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Considerando $T > 0$ tal que $e^{C_2(k)T} \leq 2$ e usando (2.62) obtemos

$$
\begin{aligned}
&(e^{kx},u_t^2)(t) \leq 4\left(e^{kx},|u_0Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3}|D^iu_0|^2\right)\\
&+\frac{12C_1(k)}{C_5}\left(e^{kx},|u_0Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3}|D^iu_0|^2\right) + C_9(k,R)T + C_{10}(k,R)T^{\frac{2}{3}}\\
&+\left(4 + \frac{12C_1(k)}{C_5}\right)\left(e^{kx},|u_0Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3}|D^iu_0|^2\right) + C_9(k,R)T + C_{10}(k,R)T^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
$$

Considerando $T > 0$ tal que $C_9(k,R)T + C_{10}(k,R)T^{\frac{2}{3}} \leq 3R^2C^*$ temos

$$(e^{kx}, u_t^2)(t) \leq 4R^2C^*.$$

Integrando (2.66) sobre $(0,t)$ temos

$$(e^{kx}, u_t^2)(t) + \int_0^t (e^{kx}, |Du_\tau|^2)(\tau)d\tau \leq 2\left(e^{kx}, |u_0Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3}|D^iu_0|^2\right)$$
$$+\frac{6C_1(k)\delta}{C_5}\left(e^{kx}, |u_0Du_0|^2 + \sum_{i=0}^{3}|D^iu_0|^2\right) + C_2(k)4R^2\delta T + C_9(R,k)\delta T + C_{11}(R,\epsilon)\delta T^{\frac{2}{3}}.$$

Considerando $T > 0$ tal que $C_2(k)4R^2\delta T + C_9(R,k)\delta T + C_{11}(R,\epsilon)\delta T^{\frac{2}{3}} \leq 3R^2C^*$ obtemos

$$(e^{kx}, u_t^2)(t) + \int_0^t (e^{kx}, |Du_\tau|^2)(\tau)d\tau \leq 4R^2C^*,$$

o que prova o Lema 2.6.

Lema 2.7. *Para $T > 0$ suficientemente pequeno o operador P é uma contração.*

Demonstração: Para $v_1, v_2 \in B_R$ denotemos

$$u_i = Pv_i, i = 1,2, \; s = v_1 - v_2 \text{ e } z = u_1 - u_2.$$

Então $z(x,t)$ satisfaz o seguinte problema de fronteira e valor inicial:

$$z_t(x,t) + D^3z(x,t) = -\frac{1}{2}D(v_1^2 - v_2^2), \; (x,t) \in Q_T; \tag{2.67}$$

$$D^2z(0,t) + \alpha Dz(0,t) + \beta z(0,t) = 0, \; t \in (0,T); \tag{2.68}$$

$$z(x,0) = 0, \; x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.69}$$

Defina

$$\rho^2(v_1,v_2) = \rho^2(s) = \sup_{t>0}(e^{kx}, s^2)(t) + \int_0^T (e^{kx}, |Ds|^2)(t)dt. \tag{2.70}$$

ESTIMATIVA I. Multiplicando (2.67) por z e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ nós obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2(t) + C_5(|z(0,t)|^2 + |Dz(0,t)|^2) \leq \frac{1}{2}\|z\|(t)\|D(v_1^2 - v_2^2)\|(t). \tag{2.71}$$

Daí

$$\frac{d}{dt}\|z\|(t) \leq \frac{1}{2}\|(v_1+v_2)Ds\|(t) + \frac{1}{2}\|D(v_1+v_2)s\|(t). \tag{2.72}$$

Mas

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\|(v_1+v_2)Ds\|(t) \le \sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+}|v_1+v_2|(t)\|Ds\|(t)\\
&\le \sqrt{2}\|(v_1+v_2)\|^{\frac{1}{2}}(t)\|D(v_1+v_2)\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Ds\|(t)\\
&\le \sqrt{2}\big[(e^{kx},|v_1+v_2|^2)(t)\big]^{\frac{1}{4}}\big[(e^{kx},|D(v_1+v_2)|^2)(t)\big]^{\frac{1}{4}}\|Ds\|(t)\\
&\le \sup_{\mathrm{t}>0}\big[(e^{kx},|v_1+v_2|^2)(t)\big]^{\frac{1}{4}}\left[4(e^{kx},|Du_0|^2)+2\int_0^T(e^{kx},|D(v_1+v_2)|^2+|D(v_{1\tau}+v_{2\tau})|^2)(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{4}}\\
&\le C_{12}(R)\|Ds\|(t),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\|D(v_1+v_2)s\|(t) \le \sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+}|s(t)|\|D(v_1+v_2)\|(t)\\
&\le \frac{\sqrt{2}}{2}\|s\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Ds\|^{\frac{1}{2}}(t)\left[4(e^{kx},|Du_0|^2)+2\int_0^T(e^{kx},\sum_{i=1}^{2}|D(v_i)|^2+\sum_{i=1}^{2}|D(v_{i\tau})|^2)(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_{13}(R)\|s\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Ds\|^{\frac{1}{2}}(t).
\end{aligned}
$$

Voltando para (2.72),

$$
\frac{d}{dt}\|z\|(t) \le C_{14}(R)\left\{\|Ds\|(t)+\|s\|(t)\right\}.
$$

Integrando a desigualdade acima,

$$
\begin{aligned}
\|z\|(t) &\le C_{14}(R)\int_0^t(\|s\|(\tau)+\|Ds\|(\tau))\,d\tau\\
&\le C_{15}(R)t^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t\left(\|s\|^2(\tau)+\|Ds\|^2(\tau)\right)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_{15}(R)t^{\frac{1}{2}}\left[t\sup_{\mathrm{t}>0}\|s\|^2(t)+\int_0^t\|Ds\|^2(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_{15}(R)t^{\frac{1}{2}}\left[t\sup_{\mathrm{t}>0}(e^{kx},s^2)(t)+\int_0^t\|Ds\|^2(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_{15}(R)T^{\frac{1}{2}}\rho(s).
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Voltando para (2.71) e integrando, calculamos

$$
\begin{aligned}
&\|z\|^2(t)+C_5\int_0^t(|z(0,\tau)|^2+|Dz(0,\tau)|^2)(\tau)d\tau\\
&\le \int_0^t\|(v_1+v_2)Ds+D(v_1+v_2)s\|(\tau)\|z\|(\tau)d\tau\\
&\le \sup_{\mathrm{t}>0}\|z\|(t)\int_0^t C_{16}(R)(\|s\|(\tau)+\|Ds\|(\tau))d\tau.
\end{aligned}
$$

Aproveitando (2.73), temos

$$\|z\|^2(t)+C_5\int_0^t(|z(0,\tau)|^2+|Dz(0,\tau)|^2)(\tau)d\tau\le C_{17}(R)T^{\frac{1}{2}}\rho^2(s). \tag{2.74}$$

Logo

$$\int_0^t(|z(0,\tau)|^2+|Dz(0,\tau)|^2)(\tau)d\tau\le \frac{C_{17}(R)}{C_5}T^{\frac{1}{2}}\rho^2(s). \tag{2.75}$$

Multiplicando (2.67) por $e^{kx}z$ e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{kx},z^2)(t)+\frac{3k}{2}(e^{kx},|Dz|^2)(t)\le C_1(k)\left(|z(0,t)|^2+|Dz(0,t)|^2\right)\\&+\frac{k^3}{2}(e^{kx},z^2)(t)-\frac{1}{2}(e^{kx}z,D(v_1^2-v_2^2))(t).\end{aligned} \tag{2.76}$$

Estimamos

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{2}(e^{kx}z,D(v_1^2-v_2^2))(t)=\frac{1}{2}z(0,t)(v_1^2(0,t)-v_2^2(0,t))\\&\quad+\frac{1}{2}(e^{kx}[kz+Dz],(v_1^2-v_2^2))(t)\equiv I_1+I_2.\end{aligned}$$

Mas

$$|I_1|=\frac{1}{2}|z(0,t)s(0,t)(v_1+v_2)(0,t)|\le\frac{1}{2}|z(0,t)||s(0,t)|\left(|(v_1(0,t)|+|v_2(0,t)|\right).$$

Usando (2.74), obtemos

$$\begin{aligned}|I_1| &\le C_{18}(R)T^{\frac{1}{4}}\rho(s)\sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^+}\left(|v_1(x,t)|+|v_2(x,t)|\right)\\&\le C_{19}(R)T^{\frac{1}{2}}\rho(s)\sqrt{2}\|s\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Ds\|^{\frac{1}{2}}(t)\sum_{i=1}^{2}\|v_i\|^{\frac{1}{2}}(t)\|Dv_i\|^{\frac{1}{2}}(t)\\&\le C_{20}(R)T^{\frac{1}{2}}\rho(s)\left(\|s\|(t)+\|Ds\|(t)\right)\\&\le C_{20}(R)T^{\frac{1}{2}}\left(\rho^2(s)+\rho(s)\|Ds\|(t)\right),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|I_2| &= \frac{1}{2}\left|(e^{kx}[kz+Dz],s(v_1+v_2))(t)\right|\\&\le \frac{k}{2}\left|(e^{kx}z,s(v_1+v_2))(t)\right|+\frac{1}{2}\left|(e^{kx}Dz,s(v_1+v_2))(t)\right|\equiv I_{21}+I_{22}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \frac{k}{2}\left|(e^{kx}z, s(v_1+v_2))(t)\right| \leq \frac{k\epsilon}{4}(e^{kx}, z^2)(t) + \frac{k}{4\epsilon}C_{21}(R)(e^{kx}, s^2)(t) \\
&\leq C_{22}(R,k)\left[(e^{kx}, z^2)(t) + (e^{kx}, s^2)(t)\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{1}{2}\left|(e^{kx}Dz, s(v_1+v_2))(t)\right| \leq \frac{\epsilon}{4}(e^{kx}, |Dz|^2)(t) \\
&+ \frac{1}{4\epsilon}(e^{kx}, s^2(v_1+v_2)^2)(t) \leq \frac{\epsilon}{4}(e^{kx}, |Dz|^2)(t) + \frac{1}{4\epsilon}C_{21}(R)(e^{kx}, s^2)(t).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon \leq 4k$ obtemos de (2.76)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e^{kx}, z^2)(t) + k(e^{kx}, |Dz|^2)(t) \\
&\leq C_{23}(R,k)(e^{kx}, z^2)(t) + C_{24}(R,k)(e^{kx}, s^2)(t) + C_2(k)\left(|z(0,t)|^2 + |Dz(0,t)|^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned}
&(e^{kx}, z^2)(t) + k\int_0^t (e^{kx}, |Dz|^2)(\tau)d\tau \leq C_2(k)\int_0^t \left(|z(0,\tau)|^2 + |Dz(0,\tau)|^2\right)d\tau \\
&+ C_{24}(k,R)\int_0^t (e^{kx}, s^2)(\tau)d\tau + C_{23}(k,R)\int_0^t (e^{kx}, z^2)(\tau)d\tau. \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

Ignorando o segundo termo na parte esquerda da desigualdade acima e aplicando o Lema de Gronwall, encontramos

$$(e^{kx}, z^2)(t) \leq C_{25}(k,R)e^{C_{23}(k,R)T}\int_0^t \left\{|z(0,\tau)|^2 + |Dz(0,\tau)|^2 + (e^{kx}, s^2)(\tau)\right\}d\tau.$$

Usando (2.75) e considerando $T > 0$ tal que $e^{C_{23}(k,R)T} < 2$ obtemos

$$(e^{kx}, z^2)(t) \leq C_{26}(k,R)T^{\frac{1}{2}}\rho^2(s) + C_{27}(k,R)T\rho^2(s) = C_{28}(k,R)T^{\frac{1}{2}}\rho^2(s).$$

Voltando para (2.76), encontramos

$$(e^{kx}, z^2)(t) + k\int_0^t (e^{kx}, |Dz|^2)(\tau)d\tau \leq C_{28}(k,R)T^{\frac{1}{2}}\rho^2(s),$$

ou

$$(e^{kx}, z^2)(t) + \int_0^t (e^{kx}, |Dz|^2)(\tau)d\tau \leq C_{29}(k,R)T^{\frac{1}{2}}\rho^2(s).$$

Considerando $T > 0$ tal que $T^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2C_{29}(k,R)}$, obtemos

$$\rho^2(z) \leq \gamma\rho^2(s), \quad 0 < \gamma < 1,$$

com $\rho = \rho(t) \geq 0$ definida em (2.70). Logo P é uma contração, o que prova o Lema 2.7. Juntos, os Lemas 2.6 e 2.7 provam, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, a existência da solução regular única do problema (2.42)-(2.44), o que conclui a demonstração do Teorema 1.1.

Bibliografia

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Departament of Mathematics, Academic Press, United States of America, 1970.

[2] T.B. Benjamin, Lectures on Nonlinear Wave Motion, Lecture Notes in Applied Mathematics 15 (1974), 3-47.

[3] J.L. Bona, Nonlinear Wave Phenomena, 51° Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 2000.

[4] J.L. Bona, V.A. Dougalis, An Initial and Boundary-Value Problem for a Model Equation for Propagation of Long Waves, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 503-502.

[5] J.L. Bona, S.M. Sun, B.Y. Zhang, A Non-Homogeneous Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation in a Quarter Plane, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 2, 427-490 (electronic).

[6] H. Brézis, Analyse Fontionelle, Théorie et Applications, Paris, Masson, 1973.

[7] B.A. Bubnov, General Boundary-Value Problems for the Korteweg-de Vries Equation in a Bounded Domain, Differentsial'nye Uravneniya 15(1) (1979), 26-31. Translation in: Differ. Equ. 15 (1979), 17-21.

[8] L. Cattabriga, Un Problema al Contorno per una Equazione Parabolica di Ordine Dispari, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,13,3(1959),163-203.

[9] W. Craig, J. Goodman, Linear Dispersive Equations of Airy Type, Department of Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island and Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, July, 1989.

[10] R.C. Diprima, W.E. Boyce, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 7° Edição, Trad. Valéria de Magalhães Iorio, Ed. LTC, Teresópolis, 2001.

[11] G.G. Doronin, N.A. Larkin, Quarter-Plane Problem for the Kawahara Equation, Pacific Journal of Applied Mathematics, v1(2008) 151-176.

[12] G.G. Doronin, N.A. Larkin, KdV Equation in Domains with Moving Boundaries, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 503-515.

[13] T.D. Dzhuraev, Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite types, "Fan", Tashkent, Russian, 1979.

[14] A.V. Faminskii, On an Initial Boundary Value Problem in a Bounded Domain for the Generalized Korteweg-De Vries Equation, Functional Differential Equations, v8(2001), 183-194.

[15] V.V. Khablov, Some Well-Posed Boundary Value Problems for the Korteweg-De Vries Equation, Preprint, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Acad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1979.

[16] D.L. Kreider, R.G. Kuller, D.R. Ostberg, Equações Diferenciais, Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

[17] O.A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Applied mathematical sciences, New York, 1985.

[18] N.A. Larkin, Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky Equations in Bounded Domains, J. Math. Anal. Appl. 297(1) (2004), 169-185.

[19] L.A. Lusternik, V.I. Sobolev, Elements of Functional Analysis, Hindustan Publishing Corporation, New York, Delhi, Índia, 1974.

[20] E.A. de Mello, L.A. Medeiros, A Integral de Lebesgue, 4° edição, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[21] A.N. Michel, R. K. Miller, Ordinary Differential Equations, Iowa State University, ACADEMIC PRESS, INC. New York, 1982.

[22] E. Emmrich, Discrete versions of Gronwall's lemma and their applications to the numerical analysis of parabolic problems, Prepint No 637, July 1999, Prepint Reihe Mathematik Techniche Universitat Berlin, Fachbereich Mathematik.

[23] M.A.J. da Silva, Equação de Airy com Condiçõe de Fronteira Gerais em um Domínio não Limitado(Tese de Dissertação), Departamento de Matemática-UEM, 2008

[24] F. Linares, G. Ponce, Introduction to nonlinear Dispersive Equations, Editora IMPA, 2006.

[25] J. Límaco, H.R. Clark, L.A. Medeiros, On equations of Benjamin-Bona-Mahony type, Nonlinear Analysis 59 (2004), 1243-1265.

[26] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1997.