UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ORLANDO CATARINO DA SILVA

Equisingularidade de Curvas Planas Irredutíveis sobre Corpos de Característica Arbitrária

Maringá

2009

ORLANDO CATARINO DA SILVA

Equisingularidade de Curvas Planas Irredutíveis sobre Corpos de Característica Arbitrária

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria Algébrica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes

Maringá

2009

A crença não é uma escolha e sim uma convicção.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, e toda minha familia, principalmente a minha irmã, que me ajudou de todas as formas, dando força e incentivo, que nunca permitiu que eu desistisse. Agradeço também a todos meus amigos e minha namorada, que estiveram comigo durante toda essa jornada, compartilhando momentos de alegria e frustração. A todos professores que contribuiram para minha formação principalmente os professores da minha graduação, que mostraram novos caminhos a seguir. Tenho um agradecimento especial ao meu orientador, professor Marcelo Escudeiro Hernandes, que com todo seu talento para motivar, consengue extrair o melhor de seus alunos. Finalmente agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Duas curvas algebróides irredutíveis planas, dizemos que elas são equisingulares se, e somente se, elas possuem o mesmo semigrupo de valores.

Neste trabalho estudamos a equisingularidade de curvas algebróides irredutíveis planas sobre corpos de característica arbitrária. Apresentamos métodos para obter o semigrupo associado a uma curva plana irredutível e mostramos que duas curvas planas irredutíveis são equisingulares se, e somente se, elas possuem a mesma sequência de multiplicidades em sua resolução canônica.

ABSTRACT

Two irreducible algebroid plane curves are equisingular if and only if they have the same semigroup values.

In this work we study equisingularity of irreducible algebroid plane curves on fields with arbitrary characteristic. We present methods to obtain the semigroup associated to a irreducible plane curves are equisingular if and only if they have the same multiplicity sequence in its canonical resolution.

Sumário

Introdução

Na teoria de Singularidades e em Geometria Algébrica a noção de equisingularidade de aplicações ou de variedades tem despertado muito interesse, seja para a obtenção de invariantes numéricos que possibilitem determinar quando os objetos envolvidos são equisingulares, quanto na relação entre estes invariantes.

Neste trabalho abordamos o problema de como decidir se duas curvas planas irredutíveis são ou não equisingulares.

Zariski foi um dos pioneiros no estudo de equisingularidade de curvas.

Quando o corpo base $\mathbb{K}$ é o corpo dos números complexos, Zariski, Brauner e Burau na década de 1920 apresentaram uma solução para o problema usando ferramentas algébricas e topológicas, usando o fato de que a equisingularidade coincide, neste caso, com a equivalência topológica.

No caso de curvas planas, quando estas possuem mais de uma componente irredutível (ramos), Zariski define que duas curvas são equisingulares se elas possuem o mesmo número de ramos e se existe uma correspondência entre os ramos tais que a multiplicidade de interseção dos ramos coincide com a multiplicidade de interseção dos ramos correspondentes e cada ramo é equisingular a seu correspondente. Assim, a equisingularidade de uma curva plana, se reduz basicamente a equisingularidade de curvas planas irredutíveis.

Para curvas irredutíveis, Zariski introduz várias noções de equisingularidades, entre elas:

a) Duas curvas irredutíveis são equisingulares se elas possuem o mesmo semigrupo de valores.

b) Duas curvas irredutíveis são equisingulares se elas possuem a mesma sequência de multiplicidades.

Tais noções são equivalentes para o caso plano, mas não no caso espacial (veja observação 5.4.4 pag 163 de [2]).

O objetivo deste trabalho é apresentar uma solução para o problema de equisingularidade de curvas planas irredutíveis quando o corpo base é um corpo algebricamente fechado qualquer.

Curvas planas podem ser dadas por séries de potências $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ ou por suas parametrizações. Dependendo da forma que a curva for dada, existem diferentes métodos para o estudo das mesmas. Nesta dissertação, apresentamos métodos que além de permitir obter parametrizações de uma curva dada, permitem proceder o estudo de equisingularidade independentemente do modo como a curva é apresentada.

Passamos agora a uma descrição sucinta de como o trabalho está organizado.

No primeiro capítulo, apresentamos resultados preliminares que possuem grande importância para o restante do trabalho. Como por exemplo, as propriedades do anel das séries de potências e o Teorema da Preparação de Weierstrass, este último, permitirá mostrar que toda curva é equivalente a um polinômio de Weierstrass.

No segundo capítulo, nos restrigiremos a um corpo $\mathbb{K}$ com característica zero e demonstraremos o famoso teorema de Newton-Puiseux, em seguida apresentaremos um algoritmo que permite encontrar uma parametrização para uma curva plana irredutível com coeficientes nesse corpo.

No terceiro capítulo, retomamos nossa atenção a um corpo $\mathbb{K}$ de característica qualquer. Apresentaremos na primeira seção uma técnica chamada resolução de singularidades, que permite encontrar uma parametrização para uma curva plana qualquer. A partir dessa parametrização, mostraremos como encontrar as Parametrizações de Hamburger-Noether, que possuem propriedades interessantes que permitem obter o semigrupo associado a curva.

No quarto capítulo, definimos o semigrupo associado a curva plana e relacionamos os diferentes resultados apresentados até então, para descrever o semigrupo de uma curva plana qualquer. Este último capítulo permite afirmar se duas curvas planas são ou não equisingulares.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Alguns serão demonstrados e outros apenas enunciados. Neste caso, indicaremos referências precisas de suas demonstrações.

1.1 Anel das Séries de Potências

Sejam X e Y indeterminadas sobre um corpo $\mathbb{K}$, denotamos $\mathbb{K}[[X,Y]]$ o conjunto de todas somas formais do tipo

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i,$$

onde cada P_i é um **polinômio homogêneo** de grau i nas indeterminadas X e Y com coeficientes em $\mathbb{K}$. Consideramos o polinômio nulo como sendo um polinômio homogêneo de qualquer grau.

Os elementos de $\mathbb{K}[[X,Y]]$ serão chamados **séries de potências formais** nas indeterminadas X e Y, com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Sejam $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ e $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$ elementos de $\mathbb{K}[[X,Y]]$. Por definição temos

$$f = g \iff P_i = Q_i, \ \forall \ i \in \mathbb{N}.$$

Em $\mathbb{K}[[X,Y]]$, definimos as seguintes operações:

1. $f + g = \sum_{i=0}^{\infty} P_i + \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{i=0}^{\infty}(P_i + Q_i)$;

2. $fg = \sum_{i=0}^{\infty} P_i . \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$, onde $C_k = \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}Q_j$.

É fácil verificar que, com estas operações, $\mathbb{K}[[X,Y]]$ é um anel comutativo com unidade chamado **o anel das séries de potências formais** em X e Y com coeficientes em $\mathbb{K}$.

O anel $\mathbb{K}[[X,Y]]$ tem como subanéis, o corpo $\mathbb{K}$ e o anel dos polinômios $\mathbb{K}[X,Y]$.

Os elementos de $\mathbb{K}[[X,Y]]$ podem ser representados explicitamente sob a forma

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} a_{i,j} X^i Y^j,$$

onde $a_{i,j} \in \mathbb{K}$.

O seguinte resultado descreve os elementos inversíveis de $\mathbb{K}[[X,Y]]$.

Proposição 1.1. *Um elemento* $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ *é inversível se, e somente se,* $P_0 \neq 0$.

Demonstração: Suponha que um elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ seja inversível, então existe $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ tal que

$$1 = fg = P_0Q_0 + (P_1Q_0 + P_0Q_1) + \ldots,$$

mas tal equação é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} P_0Q_0 = 1 \\ P_1Q_0 + P_0Q_1 = 0 \\ \vdots \\ P_nQ_0 + P_{n-1}Q_1 + \ldots + P_0Q_n = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema anterior, segue que $P_0Q_0 = 1$, consequentemente $P_0 \neq 0$.

Reciprocamente, suponha que $P_0 \neq 0$. Então o sistema anterior tem uma solução dada da seguinte forma:

$$Q_0 = P_0^{-1}, \;\; Q_1 = -P_0^{-1}(P_1Q_0), \ldots, Q_n = -P_0^{-1}(P_nQ_0 + \ldots + P_1Q_{n-1}).$$

Assim, tomando $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ temos que $fg = 1$ e, neste caso, $f^{-1} = g$. Portanto, f é inversível em $\mathbb{K}[[X,Y]]$.

$\square$

Dizemos que dois elementos f e g em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ são **associados**, se existe uma unidade u de $\mathbb{K}[[X,Y]]$ tal que $f = ug$.

Definição 1.2. *Seja $f = \sum_{i=n}^{\infty} P_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, onde cada P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O polinômio homogêneo P_n é chamado* **forma inicial de** *f, o inteiro n é chamado de* ***multiplicidade*** *de f e é denotado por $mult(f)$. Se $f = 0$, põe-se $mult(f) = \infty$.*

De acordo com a Proposição 1.1, temos que $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ é inversível, se e somente se, $mult(f) = 0$.

Com respeito à multiplicidade das séries de potências temos as seguintes propriedades:

Proposição 1.3. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[[X,Y]]$. Então,*

1. *$mult(f \cdot g) = mult(f) + mult(g)$;*
2. *$mult(f \pm g) \geq \min\{mult(f), mult(g)\}$, com igualdade válida sempre que $mult(f) \neq mult(g)$.*

O anel $\mathbb{K}[[X,Y]]$ é um domínio. Denotaremos por $\mathbb{M} = \langle X, Y \rangle$ o ideal de $\mathbb{K}[[X,Y]]$ gerado por X e Y, que é um ideal maximal.

1.2 Teorema da Preparação de Weierstrass

Nesta seção, temos como objetivo apresentar o Teorema da Preparação de Weierstrass que permitirá considerar as equações de curvas planas de modo mais cômodo. Apesar da maioria dos resultados serem válidos para várias varáveis, nos restringiremos ao caso que nos interessa, ou seja, duas variáveis.

Definição 1.4. *Um* ***pseudo-polinômio*** *(respectivamente um* ***polinômio de Weierstrass****) em Y é uma série de potências em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ da forma*

$$P(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \in \mathbb{K}[[X]][Y],$$

onde $n \geq 1$ e $mult(a_i(X)) \geq 1$, (respectivamente $mult(a_i(X)) \geq i$) para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definição 1.5. *Dizemos que $f \in \mathbb{K}[[X,Y]] \setminus \{0\}$ é* ***regular em*** *Y (respectivamente em X)* ***de ordem*** *n, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Y^n \mid f(0,Y)$, mas $Y^{n+1} \nmid f(0,Y)$ (respectivamente no caso da variável X). Se f é regular em Y (respectivamente em X) de ordem $n = mult(f)$, então diremos simplesmente que f é* ***regular em*** *Y (respectivamente em X).*

No que segue, vamos nos referir a um $\mathbb{K}$-automorfismo de $\mathbb{K}[[X,Y]]$ como sendo uma mudança de coordenadas. Vamos mostrar que, a menos de mudança de coordenadas e multiplicação por uma unidade, um elemento de $\mathbb{K}[[X,Y]]$, pode ser considerado como um polinômio de Weierstrass.

Lema 1.6. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X,Y]] \setminus \{0\}$, então existe uma mudança de coordenadas T tal que $T(f)$ é regular em Y.*

Demonstração: Considere $f(X,Y) = \sum_{i,j} c_{ij} X^i Y^j$.

Tome o termo $X^a Y^b$, tal que para qualquer outro termo $X^\alpha Y^\beta$ de f temos $a < \alpha$ ou, caso $a = \alpha$, temos $b < \beta$.

Escolha $u \in \mathbb{N}$ com $u > b$. Consideremos

$$f(Y^u, Y) = \sum_{i,j} c_{ij} Y^{iu+j}.$$

Se $i > a$, então $i - a \geq 1$, assim $(i-a)u \geq u > b$, ou seja, $(i-a)u - b > 0$, ou ainda, $(i-a)u + j - b > j \geq 0$, isto é, $iu + j > au + b$.

Se $i = a$ e $j > b$, então $(i-a)u + j - b > 0$, isto é, $iu + j > au + b$.

Assim, em $f(Y^u, Y)$ o termo de menor ordem é Y^{au+b}. Consideremos o $\mathbb{K}$-automorfismo

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{K}[[X,Y]] & \to & \mathbb{K}[[X,Y]] \\ & X & \mapsto & X + Y^u \\ & Y & \mapsto & Y. \end{array}$$

Escreva agora $f(X,Y) = \sum_{k=n}^{\infty} F_k(X,Y)$, onde F_k é um polinômio homogêneo de grau k. Escrevendo $F_k(X,Y) = \sum_{i+j=k} d_{ij} X^i Y^j$, temos

$$T(f) = T(\sum_{k=n}^{\infty} F_k(X,Y)) = \sum_{k=n}^{\infty} T(F_k(X,Y)).$$

Agora observe que

$$T(F_k(X,Y)) = \sum_{i+j=k} d_{ij}(X+Y^u)^i Y^j = \sum_{i+j=k} d_{ij} Y^{ui+j} + Xh_k(X,Y) = F_k(Y^u, Y) + Xh_k(X,Y).$$

Assim,

$$T(f) = \sum_{k=n}^{\infty} T(F_k(X,Y)) = \sum_{k=n}^{\infty} F_k(Y^u, Y) + Xh(X,Y) = f(Y^u, Y) + Xh(X,Y).$$

Como $f(Y^u, Y)$ tem ordem $au + b$, temos que $T(f)$ é regular em Y de ordem $au + b$. $\square$

O lema anterior permite após uma mudança de coordenadas, se necessário, considerarmos que uma série é regular em Y.

Agora estamos prontos para apresentar o resultado principal desta seção.

Teorema 1.7. *(Preparação de Weierstrass) Seja $F \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ regular em Y de ordem n, então existem únicos $G, H \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, tais que $F = GH$, onde G é uma unidade e*

$$H = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \in \mathbb{K}[[X]][Y].$$

Mais ainda, se $mult(F) = n$, então H é polinômio de Weiertrass.

Demonstração: Tome $F = F_0(Y) + F_1(Y)X + F_2(Y)X^2 + \ldots$. Queremos encontrar G e H da forma

$$G = G_0(Y) + G_1(Y)X + G_2(Y)X^2 + \ldots$$

$$H = H_0(Y) + H_1(Y)X + H_2(Y)X^2 + \ldots$$

tais que $F = GH$. Isto é equivalente ao sistema

$F_0 = G_0H_0$

$F_1 = G_0H_1 + G_1H_0$

$F_2 = G_0H_2 + G_1H_1 + G_2H_0$

ou seja, $F_m = \displaystyle\sum_{i+j=m} G_iH_j$.

Mostraremos como proceder por indução sobre m.

Se $m = 0$, como $F(0,Y) = \alpha Y^n + \ldots$ com $\alpha \neq 0$, então

$$F_0(Y) = F(0,Y) = G_0(Y)H_0(Y),$$

onde $H_0(Y) = Y^n$ e $G_0(Y) = \frac{F(0,Y)}{Y^n} = \alpha + \ldots$.

Para $m = 1$ tomemos H_1 como a soma dos termos de grau menor que n em Y que ocorrem em $\frac{F_1}{G_0} \in \mathbb{K}[[Y]]$ e

$$G_1 = \frac{F_1 - H_1 G_0}{H_0} \in \mathbb{K}[[Y]].$$

O elemento G_1 está bem definido já que eliminamos de $F_1(Y)$ todos os possíveis termos de grau em Y menores que n. Logo, $F_1 = G_0 H_1 + G_1 H_0$.

Agora vamos supor que possamos obter G_i e H_i para todo $i < m$ satisfazendo

$$F_i = G_0 H_i + G_1 H_{i-1} + \ldots + G_{i-1} H_1 + G_i H_0.$$

Provemos que o resultado vale para m. Tomemos H_m como a soma dos termos de grau menor que n que aparecem na expressão $\frac{F_m - (G_1 H_{m-1} + \ldots + G_{m-1} H_1}{G_0}$ e

$$G_m = \frac{Fm - (G_1 H_{m-1} + \ldots + G_{m-1} H_1) - G_0 H_m}{H_0} \in \mathbb{K}[[Y]].$$

Logo, $F_m = G_0 H_m + G_1 H_{m-1} + \ldots + G_{m-1} H_1 + G_m H_0$.

$\square$

Agora apresentaremos um exemplo de como preparar uma série à Weierstrass.

Exemplo 1.8. *Vamos aplicar o método descrito no teorema anterior para a seguinte série de potências:*

$$f(X,Y) = Y^5 + (1+X)Y^4 - 2X^3Y^3 + 4X^5Y^2 + (-X^7 - 4X^5 - 3X^6 - 2X^3 - 2X^4)Y + X^6 - X^8.$$

Em primeiro lugar, vamos escrever f, como um elemento de $\mathbb{K}[[Y]][X]$.

$$f(X,Y) = (Y^5+Y^4)+Y^4X+(-2Y^3-2Y)X^3-2YX^4+(4Y^2-4Y)X^5+(-3Y+1)X^6-YX^7-X^8.$$

logo, $f(X,Y) = F_0 + F_1X + F_2X^2 + F_3X^3 + F_4X^4 + F_5X^5 + F_6X^6 + F_7X^7 + F_8X^8.$

Queremos encontrar G e H da forma

$$G = G_0 + G_1X + G_2X^2 + \dots \quad e \quad H = H_0 + H_1X + H_2X^2 + \dots$$

tais que, $f = GH$.

0) $f(0, Y) = F_0 = (Y^5 + Y^4)$. Assim, $Y^5 + Y^4 = G_0H_0$ e podemos escolher $H_0 = Y^4$ e $G_0 = \frac{Y^5+Y^4}{Y^4} = Y + 1$.

1) $F_1 = (1 + Y)H_1 + G_1Y^4$. Como $F_1 = Y^4$, tomamos $H_1 = 0$ e $G_1 = 1$.

2) $0 = F_2 = (1 + Y)H_2 + G_2Y^4$. Basta tomar $H_2 = 0$ e $G_2 = 0$.

3) $-2Y - 2Y^3 = F_3 = (1 + Y)H_3 + G_3Y^4$. Assim, $\frac{-2Y-2Y^3}{1+Y} = H_3 + G_3\frac{Y^4}{1+Y}$. Como $\frac{-2Y-2Y^3}{1+Y} = -2Y + 2Y^2 - 4Y^3 + 4Y^4 - 4Y^5 + 4Y^6 - 4Y^7 + \dots$, tome $H_3 = -2Y + 2Y^2 - 4Y^3$, e temos $G_3 = 4$.

4) $-2Y = F_4 = (1 + Y)H_4 + (-2Y + 2Y^2 - 4Y^3) + G_4Y^4$. Como $\frac{-2Y^2+4Y^3}{1+Y} = -2Y^2 + 6Y^3 - 6Y^4 + 6Y^5 - 6Y^6 + \dots$, tome $H_4 = -2Y^2 + 6Y^3$, e temos $G_4 = -6$.

5) $F_5 = 4Y^2 - 4Y = (1 + Y)H_5 + (-2Y^2 + 6Y^3) + G_5Y^4$. Como $\frac{-4Y+6Y^2-6Y^3}{1+Y} = -4Y + 10Y^2 - 16Y^3 + 16Y^4 - 16Y^5 + \dots$, tome $H_5 = -4Y + 10Y^2 - 16Y^3$, e temos $G_5 = 16$.

Como se tratam de séries de potência, o processo pode continuar indefinidamente, optamos por parar neste passo. Neste exemplo, aproximações para G e H são:

$$G = 1 + Y + X + 4X^3 - 6X^4 + 16X^5 + \dots \quad e$$

$$H = Y^4 + (-2Y + 2Y^2 - 4Y^3)X^3 + (-2Y^2 + 6Y^3)X^4 + (-4Y + 10Y^2 - 10Y^3)X^5 + \dots \in \mathbb{K}[[X]][Y].$$

1.3 Lema de Hensel

Nesta seção estabeleceremos um importante critério de redutibilidade em $\mathbb{K}[[X]][Y]$. Denotaremos o grau de um polinômio $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ por $deg_X P(X)$, por conveniência definiremos o grau do polinômio nulo como ∞.

O resultado abaixo, indica que o caráter redutível ou irredutível de um elemento em

$\mathbb{K}[[X]][Y]$ se mantém em $\mathbb{K}[[X,Y]]$.

Lema 1.9. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um pseudo-polinômio. Então f é redutível em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ se, e somente se, f é redutível em $\mathbb{K}[[X]][Y]$.*

Demonstração: Suponha que f é redutível em $\mathbb{K}[[X,Y]]$, então, existem $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, não unidades, tais que $f = f_1 f_2$. Como f é pseudo-polinômio, segue que é regular em Y, bem como f_1 e f_2. Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass existem U_1 e U_2 unidades em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ tais que $H_1 = U_1 f_1$ e $H_2 = U_2 f_2$, onde H_1 e H_2 são polinômios de Weierstrass. Tomando $U = U_1 U_2$, temos que

$$Uf = (U_1 f_1)(U_2 f_2) = H_1 H_2 \in \mathbb{K}[[X]][Y].$$

Como, $f = 1f$ é um pseudo-polinômio, segue da unicidade do Teorema da Preparação de Weierstrass que $U = 1$. Logo, $f = H_1 H_2$ e portanto f é redutível em $\mathbb{K}[[X]][Y]$.

□

Lema 1.10. *Sejam p e q dois polinômios não constantes relativamente primos em $\mathbb{K}[Y]$ de graus m e n respectivamente. Dado um polinômio $F \in \mathbb{K}[Y]$ com $deg_Y(F) < m + n$ existem dois polinômios, unicamente determinados $g, h \in \mathbb{K}[Y]$ com $deg_Y(h) < m$ e $deg_Y(g) < n$, tais que*

$$F = gp + hq.$$

Demonstração: Como p e q são relativamente primos em $\mathbb{K}[Y]$ existem polinômios $\varphi, \psi \in \mathbb{K}[Y]$ tais que $1 = \varphi p + \psi q$. Logo, temos

$$F = F\varphi p + F\psi q. \tag{1.1}$$

Do algoritmo da divisão para polinômios, temos a existência de polinômios $r,h \in$

$\mathbb{K}[Y]$ com $deg_Y(h) < deg_Y(p) = m$, tais que

$$F\psi = pr + h. \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1) segue que

$$F = F\varphi p + (pr + h)q = F\varphi p + prq + hq = (F\varphi + rq)p + hq.$$

Pondo $g = F\varphi + rq$, temos $F = gp + hq$. Note que $deg_Y(h) < m$, logo resta mostar que $deg_Y(g) < n$.

Com efeito, como $deg_Y(F) < m+n$ segue que $deg_Y(F-hq) < m+n$, pois $deg_Y(F-hq) \leq \min\{deg_Y(F), deg_Y(hq)\}$. Assim, $gp = F - hq$ e

$$deg_Y(g) + deg_Y(p) = deg_Y(gp) = deg_Y(F - hq) < m + n.$$

Como $deg_Y(g) + m < m + n$, segue que $deg_Y(g) < n$.

Para finalizar a demonstração basta mostrar que g e h são únicos. De fato, suponha que $gp + hq = g'p + h'q$ com $deg_Y(h), deg_Y(h') < m$ e $deg_Y(g), deg_Y(g') < n$. Como p e q são relativamente primos e $(g - g')p = (h' - h)q$, segue que $p|(h' - h)$ o que implica $h' - h = 0$, pois caso contrário, existiria $t \in \mathbb{K}[Y] \setminus \{0\}$, tal que $h' - h = pt$. Assim, $(g - g')p = ptq$, ou seja, $g - g' = tq$. Uma vez que $deg_Y(g), deg_Y(g') < n$, temos que $deg_Y(g - g') < n$. Absurdo, pois $deg_Y(qt) \geq n$, já que $deg_Y(q) = n$. Logo $h' - h = 0$ implicando que $h' = h$ e $g = g'$. Portanto g e h são únicos. □

Usando o resultado anterior, podemos apresentar o teorema abaixo conhecido como Lema de Hensel.

Teorema 1.11. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ mônico, tal que $f(0, Y) = p(Y)q(Y)$ onde $p, q \in \mathbb{K}[Y]$*

são relativamente primos e não constantes de graus m e n respectivamente. Então existem dois polinômios, unicamente determinados, $g, h \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ de graus m e n respectivamente, tais que $f = gh$, com $g(0, Y) = p(Y)$ e $h(0, Y) = q(Y)$.

Demonstração: Se $d = deg_Y(f)$, então como f é mônico temos $d = deg_Y(f(0, Y)) = m+n$. Assim, podemos escrever

$$f = f_0(Y) + Xf_1(Y) + X^2 f_2(Y) + \ldots,$$

onde $f_0(Y) = f(0, Y)$ e $f_i(Y) = 0$ ou $deg_Y(f_i(Y)) < d$ para todo $i \geq 1$. Queremos determinar

$$g(X, Y) = p(Y) + Xg_1(Y) + X^2 g_2(Y) + \ldots$$

$$h(X, Y) = q(Y) + Xh_1(Y) + X^2 h_2(Y) + \ldots,$$

onde $g_i(Y), h_i(Y) \in \mathbb{K}[Y]$ são nulos ou tem grau menor que m ou n, respectivamente, tais que $f = gh$. Assim, segue para $i \geq 1$, que

$$f_i(Y) = p(Y)h_i(Y) + g_1(Y)h_{i-1}(Y) + \ldots + g_{i-1}(Y)h_1(Y) + g_i(Y)q(Y). \tag{1.3}$$

É possível resolver a equação (1.3) em $g_i(Y)$ e $h_i(Y)$ recursivamente, pois $p(Y)$ e $q(Y)$ são relativamente primos. De fato, suponha que temos determinados $g_j(Y)$ e $h_j(Y)$ de grau menor que m e n respectivamente para todo $j < i-1$, então de (1.3) temos a igualdade

$$p(Y)h_i(Y) + q(Y)g_i(Y) = f_i(Y) - g_1(Y)h_{i-1}(Y) - \ldots - g_{i-1}(Y)h_1(Y)$$

a qual, em virtude do Lema (1.10), pode ser resolvida de modo único em $g_i(Y)$ e $h_i(Y)$ de grau menor que m e n respectivamente, se não forem nulos.

□

1.4 Curvas Algebróides Planas

Nesta seção, introduziremos o objeto central deste trabalho, a saber, as curvas algebróides planas.

Definição 1.12. *Uma **curva algebróide plana** (f) é a classe de equivalência de elementos não inversíveis f de $\mathbb{K}[[X,Y]]\backslash\{0\}$ módulo a relação de associados, isto é,*

$$(f) = \{uf; u \text{ é unidade em } \mathbb{K}[[X,Y]]\}.$$

Segue da definição anterior que $(f) = (g)$ se, e somente se, existe uma unidade $u \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, tal que $g = uf$.

Como a multiplicidade de uma série de potências é invariante quando multiplicamos por uma unidade, podemos definir a multiplicidade de uma curva algebróide plana (f) como sendo a multiplicidade de f.

Uma curva algebróide de multiplicidade 1 será chamada **suave**. Quando a multiplicidade é maior do que 1, diremos que a curva é **singular**.

Seja (f) uma curva algebróide plana. Diremos que a curva (f) é irredutível, se a série f é irredutível em $\mathbb{K}[[X,Y]]$. Note que esta noção independe do representante de (f).

Dada (f) uma curva algebróide plana, considere a decomposição de f em fatores irredutíveis em $\mathbb{K}[[X,Y]]$

$$f = f_1 f_2 \dots f_n.$$

As curvas algebróides planas (f_j) para $j = 1, \dots, n$, são chamadas **ramos** da curva (f). A curva (f) será chamada reduzida, se $(f_i) \neq (f_j)$ para todo $i \neq j$, isto é, quando f_i e f_j não são associadas. Várias propriedades de curvas algebróides planas são preservadas por mudança de coordenadas, ou seja, $\mathbb{K}$-automorfismos de $\mathbb{K}[[X,Y]]$. Isto motiva a próxima definição.

Definição 1.13. *Duas curvas algebróides planas (f) e (g) são ditas **equivalentes**, deno-*

tando neste caso $(f) \sim (g)$, *se existe um* $\mathbb{K}$*-automorfismo* φ *de* $\mathbb{K}[[X,Y]]$, *tal que* $(\varphi(f)) = (g)$. *Em outras palavras,* (f) *e* (g) *são equivalentes se existem um* $\mathbb{K}$*-automorfismo* φ *e uma unidade* $u \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, *tais que* $\varphi(f) = ug$.

No que segue estaremos interessados em explorar propriedades de curvas algebróides planas irredutíveis, que serão denominadas simplesmente de invariantes, módulo a relação de equivalência acima introduzida.

Observação 1.14. *Dada uma série* $f \in \mathbb{K}[[X,Y]] \setminus \{0\}$, *pelo Lema 1.6, existe uma mudança de coordenadas* φ *de modo que* $\varphi(f)$ *é regular em* Y *e deste modo, segundo o Teorema da Preparação de Weierstrass Teorema 1.7, existe uma unidade* $u \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ *tal que* $u\varphi(f)$ *é um polinômio de Weierstrass em* Y. *Desta forma, toda curva é equivalente a uma outra cuja série representante é um polinômio de Weierstrass em Y.*

É natural iniciar o estudo de curvas algebróides plana irredutível a partir do caso suave, nesta situação temos o seguinte resultado:

Proposição 1.15. *Se* (f) *é uma curva suave, então* $(f) \sim (Y)$.

Demonstração: Como (f) é uma curva suave, temos que $mult(f) = 1$, ou seja,

$$f = \alpha X + \beta Y + h(X,Y),$$

com $h(X,Y) \in \mathbb{M}^2$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Se $\beta \neq 0$, então f é regular em Y de ordem 1. Assim pela observação anterior, temos que

$$(f) \sim (Y + a(X))$$

com $mult(a(X)) \geq 1$. Considerando a mudança de coordenadas

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}[[X,Y]] & \to & \mathbb{K}[[X,Y]] \\ & X & \to & X \\ & Y & \to & Y - a(X) \end{array}$$

temos que $\varphi(Y + a(X)) = Y$. Deste modo, temos que $(f) \sim (Y + a(X)) \sim (Y)$. Se $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$, isto é, f é regular em X de ordem 1, então a mudança de coordenadas

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathbb{K}[[X,Y]] & \to & \mathbb{K}[[X,Y]] \\ & X & \to & Y \\ & Y & \to & X \end{array}$$

nos mostra que (f) é equivalente a uma curva suave cuja série representante é regular em Y de ordem 1 e como antes $(f) \sim (Y)$.

$\square$

Suponha que (f) é uma curva algebróide plana de multiplicidade n, então

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} f_i$$

onde cada f_i é um polinômio homogêneo em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ de grau i e $f_n \neq 0$. Chamamos a curva (f_n) de **cone tangente** da curva (f). Como qualquer polinômio homogêneo em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ se decompõe em produto de fatores lineares, podemos escrever

$$f_n = \prod_{i=1}^{s} c_i(a_i X + b_i Y)^{r_i},$$

onde $\sum_{i=1}^{s} r_i = n$, $c_i, a_i, b_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, s$ e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$. Deste modo, o cone tangente de (f) consiste das retas $(a_i X + b_i Y)$ com $i = 1, \ldots, s$ e multiplicidade r_i. As retas $(a_i X + b_i Y)$ são chamadas **retas tangentes** de (f).

Se a curva (f) tem multiplicidade 1, isto é, se (f) é suave, então o cone tangente (f) consiste de uma única reta tangente de multiplicidade 1.

Capítulo 2

Parametrizações de Newton-Puiseux

Neste capítulo nos concentramos no caso em que o corpo base é algebricamente fechado de característica zero. Neste caso, podemos obter uma parametrização de uma curva algebróide irredutível utilizando o método de Newton.

2.1 O Corpo de Laurent

Nesta seção, exploraremos o corpo de Laurent, objeto importante para o que seguirá. Seja $\mathbb{K}((X))$ o corpo de frações do anel das séries de potências formais em uma variável $\mathbb{K}[[X]]$. Dado $h = \frac{f}{g} \in \mathbb{K}((X))\backslash\{0\}$, podemos escrever $f = X^m u$ e $g = X^n v$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e u e v inversíveis em $\mathbb{K}[[X]]$.

Assim, temos que

$$h = X^{m-n} u v^{-1} = X^r w, \tag{2.1}$$

onde $r = m - n \in \mathbb{Z}$ e w é uma unidade em $K[[X]]$.

Exemplo 2.1. *Considere $f = 2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6$ e $g = X^5 + X^6 + X^7 + X^8$ em $\mathbb{C}[[X]]$.*

Então,

$$h = \frac{f}{g} = \frac{1(2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6)}{X^5(1 + X + X^2 + X^3)} = X^{-5} u v^{-1}$$

onde $u = 2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6$, $v = 1 + X + X^2 + X^3$ e $v^{-1} = 1 - X + X^4 - X^5 + X^8 + \ldots$, este último pode ser obtido como na demonstração da Proposição 1.1.

Logo,

$$h = X^{-5}(2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6)(1 - X + X^4 - X^5 - X^8 + \ldots)$$

$$h = X^{-5}(2 - 2X + 3X^2 - 3X^3 + 3X^4 - 3X^5 + 8X^6 - 8X^7 - X^8 + \ldots).$$

Portanto,

$$h = \frac{2}{X^5} - \frac{2}{X^4} + \frac{3}{X^3} - \frac{3}{X^2} + \frac{3}{X} - 3 + 8X - 8X^2 - X^3 + \ldots,$$

Da equação (2.1) e do exemplo acima, segue que qualquer elemento h de $\mathbb{K}((X))$ pode ser expresso da forma

$$h = a_{-m}X^{-m} + a_{-m+1}X^{-m+1} + \ldots + a_{-1}X^{-1} + a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \geq m$. Definimos a multiplicidade de h como $mult(h) = m$, pondo $mult(0) = \infty$. Os elementos de $\mathbb{K}((X))$ são chamados **séries de potências formais de Laurent**. Além disto, note que $\mathbb{K}((X))$ é um corpo, chamado de **Corpo de Laurent**.

Proposição 2.2. *Se T é um $\mathbb{K}$-automorfismo de $\mathbb{K}((X))$, então $T(X) = X.u(X)$, onde $u \in \mathbb{K}[[X]]$ com $u(0) \neq 0$.*

Demonstração: Seja $T(X) = X^r u(X)$, $r \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathbb{K}[[X]]$ unidade. Como T é um homomorfismo temos

$$T(X + X^2 + \ldots) = T(X) + T(X^2) + \ldots = X^r u(X) + X^{2r}u(X^2) + \ldots.$$

Se $r < 0$, temos que $T(X + X^2 + \ldots) \notin \mathbb{K}((X))$. Absurdo, pois T é um automorfismo. Logo, $r \geq 0$.

Como T é $\mathbb{K}$-automorfismo, existe T^{-1} definido por $T^{-1}(X) = X^s v(X)$, $s \geq 0$ e

$v(X)$ unidade em $\mathbb{K}[[X]]$, tal que

$$X = TT^{-1}(X) = T(X^s v(X)) = X^{rs} v(X)^r u(X^s v(X)) = X^{rs} w(X),$$

onde $w(X) \in \mathbb{K}[[X]]$ unidade. Assim, $rs = 1$ e $w(X) = 1$, segue que $r = s = 1$.

$\square$

2.2 Teorema de Newton-Puiseux

Uma vez que qualquer curva plana é equivalente a uma definida por um polinômio de Weierstrass em $\mathbb{K}[[X]][Y]$, é de grande utilidade determinar as raízes deste polinômio no fecho algébrico de $\mathbb{K}[[X]][Y]$. No restante deste capítulo, vamos considerar $char(\mathbb{K}) = 0$ e denotaremos por $\overline{\mathbb{K}((X))}$ o fecho algébrico de $\mathbb{K}((X))$. Claramente, $\overline{\mathbb{K}((X))}$ deve conter as raízes da equação $Y^n - X = 0$ para todo inteiro positivo n, consequentemente deve conter os elementos da forma $X^{1/n}$. Deste modo, obtemos extensões $\mathbb{K}((X^{1/n}))$ de $\mathbb{K}((X))$. Denotaremos por U_n, o grupo multiplicativo das n-ésimas raízes da unidade em $\mathbb{K}$. Este grupo é cíclico e tem ordem n.

Proposição 2.3. *Temos que* $\mathbb{K}((X^{1/n}))$ *é* $\mathbb{K}$*-isomorfo a* $\mathbb{K}((X))$.

Demonstração: Defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}((X^{1/n})) & \longrightarrow & \mathbb{K}((X)) \\ & \displaystyle\sum_{i \geq i_0} a_i X^{i/n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \geq i_0} a_i X^i \end{array}.$$

1) φ é um $\mathbb{K}$-homomorfismo. De fato, sejam $f = \displaystyle\sum_{i \geq -m} a_i X^{i/n}$ e $g = \displaystyle\sum_{j \geq -r} b_j X^{j/n}$ séries em

$\mathbb{K}((X^{1/n}))$, sem perda de generalidade suponha $r \leq m$, Assim,

$$\varphi\left(\sum_{i\geq -m} a_i X^{i/n} + \sum_{j\geq -r} b_j X^{i/n}\right) = \varphi\left(\sum_{i\geq -m} c_i X^{i/n}\right)$$

onde $c_i = a_i + b_i$ e $b_i = 0$ se $i < -r$, ou seja,

$$\varphi\left(\sum_{i\geq -m} c_i X^{i/n}\right) = \sum_{i\geq -m} c_i X^i = \sum_{i\geq -m} (a_i + b_i) X^i = \sum_{i\geq -m} a_i X^i + \sum_{j\geq -r} b_j X^j = \varphi(f) + \varphi(g).$$

Agora, sejam $f, g \in \mathbb{K}((X))$, observe que

$$\varphi(fg) = \varphi\left(\sum_{i\geq -m} a_i X^{i/n} \sum_{j\geq -r} b_j X^{j/n}\right) = \varphi\left(\sum_{k=-m-r} c_k X^{(i+j)/n}\right) = \sum_{k=-m-r} c_k X^{i+j},$$

onde $c_k = \displaystyle\sum_{t=0}^{k} a_k b_{k-t}$. Por outro lado,

$$\varphi(f)\varphi(g) = \sum_{i\geq -m} a_i X^i \sum_{j\geq -r} b_j X^j = \sum_{k=-m-r} c_k X^{i+j},$$

onde $c_k = \displaystyle\sum_{t=0}^{k} a_k b_{k-t}$. Portanto,

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g).$$

Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e observe que

$$\varphi(\alpha f) = \varphi\left(\alpha \sum_{i\geq -m} a_i X^{i/n}\right) = \varphi\left(\sum_{i\geq -m} \alpha a_i X^{i/n}\right) = \sum_{i\geq -m} \alpha a_i X^i = \alpha \sum_{i\geq -m} a_i X^i = \alpha\varphi(f).$$

Portanto, pelo que foi apresentado acima, φ é um $\mathbb{K}$-homomorfismo.

2) φ é injetora. De fato, se $\varphi(f) = \varphi(g)$, então

$$\sum_{i\geq -m} a_i X^i = \sum_{j\geq -r} b_j X^j.$$

Multiplicando ambos os lados por $X^{1/n}$, temos $\sum_{i\geq -m} a_i X^{i/n} = \sum_{j\geq -r} b_j X^{j/n}$, ou seja, $f = g$.

3) φ é sobrejetora. De fato, seja $h \in \mathbb{K}((X))$, então $h = \sum_{i\geq -m} d_i X^i$. Logo, basta tomar $f \in \mathbb{K}((X))$ tal que $f = \sum_{i\geq -m} d_i X^{i/n}$, e teremos $\varphi(f) = h$.

Portanto, pelos itens apresentados acima, concluímos que φ é um $\mathbb{K}$-isomorfismo.

$\square$

Segue da Proposição 2.2, que qualquer $\mathbb{K}$-automorfismo σ de $\mathbb{K}((X^{1/n}))$ é tal que $\sigma(X^{1/n}) = b_\sigma X^{1/n}$ para algum $b_\sigma \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$.

Lema 2.4. *A extensão de corpos* $\mathbb{K}((X^{1/n})) : \mathbb{K}((X))$ *é finita com grupo de Galois* G *isomorfo ao grupo* U_n.

Demonstração: Seja $\sigma \in \mathbb{K}((X^{1/n})) : \mathbb{K}((X))$ um $\mathbb{K}((X))$-automorfismo. Logo, $\sigma(X^{1/n}) = b_\sigma X^{1/n}$, para algum $b_\sigma \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Note ainda que, $b_\sigma^n X = (b_\sigma X^{1/n})^n = (\sigma(X^{1/n}))^n = \sigma((X^{1/n})^n) = \sigma(X) = X$, pois σ fixa os elementos de $\mathbb{K}((X))$. Logo, $b_\sigma^n = 1$. Portanto, $b_\sigma \in U_n$ e assim G é finito com n elementos.

Tome $h : G \to U_n$ uma aplicação definida por $h(\sigma) = b_\sigma$, onde $\sigma(X^{1/n}) = b_\sigma X^{1/n}$. Mostraremos que h definida dessa forma é um isomorfismo de grupos.

Sejam $\rho, \sigma \in G$, então

$$b_{\rho\circ\sigma} X^{1/n} = \rho\circ\sigma(X^{1/n}) = \rho(b_\sigma X^{1/n}) = b_\sigma \rho(X^{1/n}) = b_\sigma b_\rho X^{1/n} = b_\rho b_\sigma X^{1/n},$$

assim $b_{\rho\circ\sigma} = b_\rho b_\sigma$. Logo, $h(\rho\circ\sigma) = b_{\rho\circ\sigma} = b_\rho b_\sigma = h(\rho)h(\sigma)$. Portanto, h é homomorfismo de grupos.

Temos que h é injetora. De fato, dados $\rho, \sigma \in G$ suponha que $h(\rho) = h(\sigma)$, ou seja, $b_\rho = b_\sigma$. Vamos mostrar que $\rho = \sigma$.

Seja $\sum_i a_i X^{i/n} \in \mathbb{K}((X))$, com $a_i \in \mathbb{K}$ então,

$$\rho(\sum_i a_i X^{i/n}) = \sum_i a_i \rho(X^{i/n}) = \sum_i a_i b_\rho X^{i/n} = \sum_i a_i b_\sigma X^{i/n} = \sum_i a_i \sigma(X^{i/n}) = \sigma(\sum_i a_i X^{i/n}).$$

Logo, $\rho = \sigma$. Portanto h é injetora.

Resta mostrar que h é sobrejetora. Uma vez que $b_\sigma \in U_n$ depende de σ, ou seja, para todo $b_\sigma \in U_n$ existe $\sigma \in G$ tal que $h(\sigma) = b_\sigma$, temos o desejado e com isso segue que h é um isomorfismo de grupos.

Para concluirmos a prova, devemos mostrar que o único corpo fixado pelos elementos de G é $\mathbb{K}((X))$.

Suponha que $\sum_i a_i X^{i/n} \in \mathbb{K}((X^{1/n}))$ é invariante pela ação dos elementos de G, isto é, dado $\sigma \in G$ temos

$$\sum_i a_i X^{i/n} = \sigma(\sum_i a_i X^{i/n}) = \sum_i a_i \sigma(X^{i/n}) = \sum_i a_i \xi^i X^{i/n},$$

ou seja, $\sum_i a_i X^{i/n} = \sum_i a_i \xi^i X^{i/n}$, para todo $\xi \in U_n$. Logo, $a_i = a_i \xi^i$ para todo i. Assim, temos duas situações:

Se $a_i = 0$, então $\sum_i a_i X^{i/n} = 0 \in \mathbb{K}((X))$.

Se $\xi^i = 1$. Como $\xi^i \in U_n$ temos que $i = nt$, onde $t \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\sum_i a_i X^{i/n} = \sum_t a_{nt} X^{nt/n} = \sum_t a_{nt} X^t \in \mathbb{K}((X)).$$

Portanto, o corpo fixado por G é $\mathbb{K}((X))$, o que conclui a prova.

$\square$

O lema acima nos mostra que os corpos $\mathbb{K}((X^{1/n}))$ estão todos contidos em $\overline{\mathbb{K}((X))}$.

Assim, podemos definir

$$\mathbb{K}((X))^* = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{K}((X^{1/n})) \subset \overline{\mathbb{K}((X))}.$$

Os elementos de $\mathbb{K}((X))^*$ podem ser escritos da forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} b_i X^{\frac{p_i}{q_i}}$$

com $\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, $b_i \in \mathbb{K}$, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i > 0$, para todo i e o conjunto $\{p_i/q_i; i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ admite um denominador comum.

Se $b_1 \neq 0$, então o número racional $\frac{p_1}{q_1}$ é chamado de multiplicidade de α e é denotado por $mult(\alpha)$. Por comodidade definimos $mult(0) = \infty$.

Claramente, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}((X))^*$, temos $mult(\alpha.\beta) = mult(\alpha) + mult(\beta)$ e que $mult(\alpha \pm \beta) \geq min\{mult(\alpha), mult(\beta)\}$, com igualdade válida sempre que $mult(\alpha) \neq mult(\beta)$.

Lema 2.5. *Temos que* $\mathbb{K}((X))^*$ *é um subcorpo de* $\overline{\mathbb{K}((X))}$.

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathbb{K}((X))^*$, então existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $f \in \mathbb{K}((X^{1/r}))$ e $g \in \mathbb{K}((X^{1/s}))$, temos que $\mathbb{K}((X^{1/r})) \subset \mathbb{K}((X^{1/rs}))$, pois

$$f = \sum_i b_i X^{i/r} = \sum_i b_i (X^{i/rs})^s \in \mathbb{K}((X^{1/rs})).$$

Do mesmo modo, $g \in \mathbb{K}((X^{1/rs}))$.

Como $\mathbb{K}((X^{1/rs}))$ é corpo segue que $f + g, f.g, f/g \in \mathbb{K}((X^{1/rs})) \subset \mathbb{K}((X))^*$, este último quando $g \neq 0$.

$\square$

Antes de apresentarmos o principal resultado desta seção, introduzimos um lema que será utilizado na demonstração do mesmo.

Lema 2.6. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero e $n \geq 2$. Se*

$$P(Y) = Y^n + a_2Y^{n-2} + \ldots + a_n \in \mathbb{K}[Y],$$

é tal que $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, \ldots, n$, então $P(Y)$ admite duas raízes distintas em $\mathbb{K}$.

Demonstração: Como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado temos que $\mathbb{K}$ contém todas as raízes de $P(Y)$. Logo,

$$P(Y) = (Y - \alpha_1)(Y - \alpha_2) \ldots (Y - \alpha_n),$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ com $i = 1, \ldots, n$ são as raízes de $P(Y)$. Suponha por absurdo que $P(Y)$ não admita duas raízes distintas, ou seja, todas as raízes de $P(Y)$ sejam iguais, isto é, $\alpha_i = \alpha$ para $i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$P(Y) = (Y - \alpha_1)(Y - \alpha_2) \ldots (Y - \alpha_n) = (Y - \alpha)^n.$$

Assim,

$$Y^n + 0.Y^{n-1} + \ldots + a_n = P(Y) = (Y - \alpha)^n,$$

ou seja, $a_i = (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \alpha^i$ e $a_1 = \alpha n = 0$. Como $n \geq 2$ e $char(\mathbb{K}) = 0$, segue que $\alpha = 0$ e $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, um absurdo.

□

Teorema 2.7. *(Newton-Puiseux) Temos que*

$$\overline{\mathbb{K}((X))} = \mathbb{K}((X))^*.$$

Demonstração: No Lema 2.5 mostramos que $\mathbb{K}((X))^* \subset \overline{\mathbb{K}((X))}$. Basta mostrar a outra inclusão. Do Lema 2.4 temos que cada extensão $\mathbb{K}((X^{1/n})) : \mathbb{K}((X))$ é finita, portanto, algébrica. Logo, para todo $\alpha \in \mathbb{K}((X))^*$ existe $p(Y) \in \mathbb{K}((X))[Y]$, tal que $p(\alpha) = 0$.

Sendo assim, basta provar que $\mathbb{K}((X))^*$ é algebricamente fechado. Como em um corpo algebricamente fechado os únicos polinômios irredutíveis são os polinômios de grau 1. Mostraremos que todo polinômio em $\mathbb{K}((X))^*[Y]$ de grau maior ou igual a dois é redutível.

Seja $p(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \in \mathbb{K}((X))^*[Y]$ com $n \geq 2$ e $a_0(X) \neq 0$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $a_0(X) = 1$.

Usaremos uma mudança de variável para eliminar em $p(X,Y)$ o termo de grau $n-1$ em Y. Isto é feito considerando o $\mathbb{K}((X))^*$-isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{K}((X))^*[Y] & \longrightarrow & \mathbb{K}((X))^*[Z] \\ & Y & \longmapsto & Z - n^{-1}a_1(X). \end{array}$$

Denotemos, $q(X,Z) = \varphi(p(X,Y)) = p(X, Z - n^{-1}a_1(X)) =$

$$= (Z - n^{-1}a_1(X))^n + a_1(X)(Z - n^{-1}a_1(X))^{n-1} + \ldots + a_n(X).$$

Como $(Z - n^{-1}a_1(X))^n = Z^n - nZ^{n-1}n^{-1}a_1(X) + \cdots = Z^n - a_1(X)Z^{n-1} + \ldots$ e $a_1(X)(Z - n^{-1}a_1(X))^{n-1} = a_1(X)Z^{n-1} - (n-1)Z^{n-2}n^{-1}a_1(X)^2 + \ldots$ temos que

$$q(X,Z) = Z^n + b_2(X)Z^{n-2} + \ldots + b_n(X).$$

Se $b_i(X) = 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$, teremos que $q(X,Z) = Z^n$ que é redutível em $\mathbb{K}((X))^*[Z]$ e portanto $p(X,Y)$ é redutível em $\mathbb{K}((X))^*[Y]$.

Agora suponha que existe um índice i tal que $b_i(X) \neq 0$. O próximo passo será executar outra mudança de variável, transformando $q(X,Z)$ em um elemento de $\mathbb{K}[[W]]^*[Z]$, onde $\mathbb{K}[[W]]^* = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{K}[[W^{1/n}]]$. Antes disso, denotamos por u_i a multiplicidade de $b_i(X)$ e defina

$$u = min\left\{\frac{u_i}{i}; 2 \leq i \leq n\right\}.$$

Seja r com $2 \leq r \leq n$, um índice para o qual atingimos u, ou seja, $u = \frac{u_r}{r}$ e considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{K}((X))^*[Z] & \longrightarrow & \mathbb{K}((W))^*[Z] \\ & f(X,Z) & \longmapsto & f(W^r, ZW^{u_r}). \end{array}$$

Observe que ψ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras que preserva o grau do polinômio em Z.

Considere

$$\begin{array}{rcl} h(W,Z) & = & W^{-nu_r}\psi(q(X,Z)) \\ & = & W^{-nu_r}q(W^r, ZW^{u_r}) \\ & = & W^{-nu_r}((ZW^{u_r})^n + b_2(W^r)Z^{n-2}W^{nu_r-2u_r} + \ldots + b_n(W^r)) \\ & = & Z^n + b_2(W^r)Z^{n-2}W^{-2u_r} + \ldots + b_n(W^r)W^{-nu_r} \\ & = & Z^n + (b_2(W^r)W^{-2u_r})Z^{n-2} + \ldots + b_n(W^r)W^{-nu_r} \end{array}$$

Assim,

$$h(W,Z) = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(W)Z^{n-i},$$

com $c_i(W) = b_i(W^r)W^{-iu_r}$. Temos que

$$mult(c_i(W)) = mult(b_i(W^r)W^{-iu_r}) = mult(b_i(W^r)) - iu_r.$$

Como $u_i = mult(b_i(X))$, temos

$$mult(b_i(W^r)) = mult(b_i(W)^r) = r.mult(b_i(W)) = r.u_i.$$

Logo, $mult(c_i(W)) = ru_i - iu_r \geq 0$. De fato, suponha que exista $2 \leq i \leq n$ tal que $ru_i - iu_r < 0$, então $ru_i < iu_r$, ou seja, $\frac{u_i}{i} < \frac{u_r}{r} = u$. Um absurdo, pois $u = min\{\frac{u_i}{i}; 2 \leq i \leq n\}$.

Note que $c_r(0) \neq 0$, pois quando $i = r$ temos $mult(c_r(W)) = 0$. Observe também que $c_i(W) \in \mathbb{K}[[W]]^* = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{K}[[W^{1/n}]]$, para $2 \leq i \leq n$. Deste modo, existe um inteiro k tal que

$$h(W^k, Z) = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(W^k)Z^{n-i} \in \mathbb{K}[[W]][Z].$$

Uma vez que $c_i(W) \in \mathbb{K}[[W^{1/p_i}]]$, temos que $k = mmc(p_1, \dots, p_n)$.

Como $c_r(0) \neq 0$ e a característica de $\mathbb{K}$ é zero, temos pelo Lema 2.6 que o polinômio

$$h(0, Z) = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(0)Z^{n-i} \in \mathbb{K}[Z]$$

tem pelo menos duas raízes distintas em $\mathbb{K}$. Logo, $h(0, Z) = p(Z)q(Z)$ e, pelo Lema de Hensel Teorema 1.11, existem $h_1(W, Z), h_2(W, Z) \in \mathbb{K}[[W]][Z]$ de grau maior ou igual a um em Z, onde $h_1(0, Z) = p(Z)$ e $h_2(0, Z) = q(Z)$, tais que

$$h(W^k, Z) = h_1(W, Z)h_2(W, Z).$$

Disto, segue que

$$\psi(q(X, Z)) = W^{nu_r}h(W, Z) = W^{nu_r}h((W^k)^{1/k}, Z) = W^{nu_r}h_1(W^{1/k}, Z)h_2(W^{1/k}, Z).$$

Como ψ é isomorfismo, temos que:

$$q(X, Z) = \psi^{-1}(W^{nu_r})\psi^{-1}(h_1(W^{1/k}, Z))\psi^{-1}(h_2(W_{1/k}, Z))$$

e $\psi^{-1}(h_1(W^{1/k}, Z)) = q_1(X, Z)$ e $\psi^{-1}(h_2(W^{1/k}, Z)) = q_2(X, Z)$ são polinômios em Z de grau maior ou igual a um, consequentemente $q(X, Z)$ é redutível em $\mathbb{K}((X))^*[Z]$.

Agora, denotando $q_0(X, Z) = \psi^{-1}(W^{nu_r})$ e aplicando o $\mathbb{K}((X))^*$-isomorfismo φ^{-1} temos:

$$p(X, Y) = \varphi^{-1}(q(X, Z)) = \varphi^{-1}(q_0(X, Z))\varphi^{-1}(q_1(X, Z))\varphi^{-1}(q_2(X, Z)),$$

ou seja, $p(X, Y)$ é redutível em $\mathbb{K}((X))^*[Y]$. Portanto, $\mathbb{K}((X))^*$ é algebricamente fechado e como $\mathbb{K}((X))^* \subset \overline{\mathbb{K}((X))}$ o resultado segue.

$\square$

Vamos explorar algumas consequências do teorema acima.

Como o grupo de Galois da extensão $\mathbb{K}((X^{1/n})) : \mathbb{K}((X))$ é isomorfo a U_n , (Lema 2.4), temos que um elemento ρ de U_n age sobre um elemento $\alpha = \sum_i b_i X^{i/n}$ de $\mathbb{K}((X^{1/n}))$ do seguinte modo:

$$\rho * \alpha = \sum_i b_i(\rho X^{1/n})^i = \sum_i b_i \rho^i X^{i/n}.$$

Lema 2.8. *Sejam $\alpha \in \mathbb{K}((X))^* \setminus \mathbb{K}((X))$ e $n = min\{q; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\}$. Considerando α como um elemento de $\mathbb{K}((X^{1/n}))$, temos que $\xi * \alpha \neq \rho * \alpha$ para todo $\xi, \rho \in U_n$ com $\xi \neq \rho$.*

Demonstração: Como $\alpha \notin \mathbb{K}((X))$, temos que $n \geq 2$. Considere $\alpha \in \mathbb{K}((X^{1/n}))$ dado por $\alpha = \varphi(X^{1/n}) = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{i/n}$. Note que,

$$\rho * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i(\rho X^{1/n})^i = \sum_{i \geq i_0} b_i \rho^i X^{i/n} = \varphi(\rho X^{1/n})$$

e

$$\xi * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i(\xi X^{1/n})^i = \sum_{i \geq i_0} b_i \xi^i X^{i/n} = \varphi(\xi X^{1/n}).$$

Suponha, por absurdo, que $\varphi(\rho X^{1/n}) = \varphi(\xi X^{1/n})$. Neste caso, $\rho^i b_i = \xi^i b_i$ para todo i e consequentemente $\rho^i = \xi^i$ para todo i, desde que $b_i \neq 0$. Seja $d = mdc(n, i_0, i_1 \ldots)$ para os índices i_j tais que $b_i \neq 0$.

Temos que, $d = 1$. De fato, suponha que $d \neq 1$, como $d = mdc(n, i_0, i_1 \ldots)$, teríamos que $n = d.n'$ e $i_s = dr_s$ para todo $s \geq 0$. Logo, $\alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{i/n} = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{dr_i/dn'} = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{r_i/n'} \in \mathbb{K}((X^{1/n'}))$. Mas $n' = n/d < n$, o que é um absurdo, pois $n = min\{q; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\}$. Sendo assim, segue que existem $b_{i_1} \neq 0, \ldots, b_{i_k} \neq 0$ e $v, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}$, tais que

$vn + v_1i_1 + \ldots + v_ki_k = 1$. Como $\xi, \rho \in U_n$e $\xi^i = \rho^i$ para todo i, segue que

$$\xi^1 = \xi^{vn+v_1i_1+\ldots+v_ki_k} = (\xi^n)^v \ldots (\xi^{i_k})^{v_k} = (\rho^n)^v \ldots (\rho^{i_k})^{v_k} = \rho^{vn+v_1i_1+\ldots+v_ki_k} = \rho^1,$$

ou seja, $\xi = \rho$. Absurdo, pois por hipótese $\xi \neq \rho$. Portanto, $\xi * \alpha \neq \rho * \alpha$.

$\square$

O próximo resultado descreve a extensão algébrica principal de $\mathbb{K}((X))$ determinada por α, isto é, o corpo $\mathbb{K}((X))(\alpha)$, obtido pela adjunção do elemento algébrico α ao corpo $\mathbb{K}((X))$. Nessa situação, sabemos que

$$\mathbb{K}((X))(\alpha) = \mathbb{K}((X))[\alpha] = \{p(\alpha); p \in \mathbb{K}((X))[Y]\}.$$

Teorema 2.9. *Seja* $\alpha \in \mathbb{K}((X))^* \setminus \mathbb{K}((X))$ *e escreva* $\alpha = \varphi(X^{1/n}) = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{i/n}$, *onde* $n = min\{q; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\}$. *Então,*

i) $\mathbb{K}((X))[\alpha] = \mathbb{K}((X^{1/n}))$;

ii) O polinômio minimal de α *sobre* $\mathbb{K}((X))$ *é dado por* $g(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i)$, *onde* $\alpha_i = \varphi(\xi^i X^{1/n})$ *para algum gerador fixo* ξ *do grupo* U_n;

iii) Temos que $g(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \in \mathbb{K}((X))[Y]$, *onde* $mult(a_i(X)) \geq i.mult(\alpha) = i.mult(\frac{a_n(X)}{n})$, *em particular, se* $mult(\alpha) \geq 1$ *(respectivamente* $mult(\alpha) > 0$*), então* $g(X,Y) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ *será um polinômio de Weierstrass (respectivamente um pseudo-polinômio).*

Demonstração: Para mostrar (i), observe que $\mathbb{K}((X))[\alpha] \subset \mathbb{K}((X^{1/n}))$, pois dado $\beta \in \mathbb{K}((X))[\alpha]$, temos que

$$\beta = a_0(X) + a_1(X)\alpha + a_2(X)\alpha^2 + \ldots + a_r(X)\alpha^r,$$

onde $a_i(X) \in \mathbb{K}((X)) \subset \mathbb{K}((X^{1/n}))$ e $\alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{i/n} \in \mathbb{K}((X^{1/n}))$. Como $\mathbb{K}((X^{1/n}))$ é corpo, segue que $\beta \in \mathbb{K}((X^{1/n}))$.

Observe agora as seguintes extensões de corpos e seus respectivos grupos de Galois.

$$G\left[\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}\mathbb{K}((X^{1/n})) \\ \bigcup \\ \mathbb{K}((X))[\alpha]\end{array}\right] \; G' \\ \bigcup \\ \mathbb{K}((X)) \end{array}\right.$$

Tome $\varphi \in G'$, como $\alpha \in \mathbb{K}((X))[\alpha]$, segue que $\varphi * \alpha = \alpha = Id * \alpha$, pelo Lema 2.8, segue que $\varphi = Id$ para todo $\varphi \in G'$, logo $G' = \{Id\}$ e assim, $|G'| = 1$. Dessa forma, $[\mathbb{K}((X^{1/n})) : \mathbb{K}((X))[\alpha]] = |G'| = 1$, ou seja, $\mathbb{K}((X^{1/n})) = \mathbb{K}((X))[\alpha]$ como queríamos.

Para demonstrar (ii) observe que $g(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i)$ é mônico e que $\alpha_i = \varphi(\xi^i X^{1/n}) = \xi^i * \alpha$, onde $U_n = \{\xi^j; j = 1, \ldots, n\}$, ou seja, cada α_i é obtido de α pela ação de um elemento de U_n. Assim,

$$g(X,\alpha) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha - \alpha_i) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)\ldots(\alpha - \alpha_n).$$

Mas, $\alpha_n = \xi^n * \alpha = 1 * \alpha = \alpha;$. Logo, $g(X,\alpha) = 0$.

Resta mostrar que $g(X,Y)$ é irredutível.

Pelo Lema 2.4 temos que G é isomorfo a U_n, segue assim que $n = |G| = deg_Y(g(X,Y))$, pois $g(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i)$. Por outro lado, como a extensão é finita e $char(\mathbb{K}((X))) = 0$, segue do teorema fundamental da teoria de Galois, que $|G| = [\mathbb{K}((X))[\alpha] : \mathbb{K}((X))] = deg(m_\alpha)$, onde m_α é o polinômio minimal de α. Assim, $deg(m_\alpha) = n = deg_Y(g(X,Y))$, seguindo que $g(X,Y)$ é irredutível e $g(X,Y) = m_\alpha$.

Resta mostrar (iii). Denotemos por $S_i(Z_1, \ldots, Z_n)$, para $i = 1, \ldots, n$, o polinômio simétrico elementar de grau i nas variáveis $Z_1, \ldots, Z_n$, ou seja,

$$S_i(Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ \sharp J = i}} \prod_{j \in J} Z_j.$$

Temos que os coeficientes de $g(X,Y)$ são dados por $a_i(X) = (-1)^i S_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}((X))$. Deste modo,

$$mult(a_i(X)) = mult((-1)^i S_i) = mult\left((-1)^i \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ \sharp J = i}} \prod_{j \in J} \alpha_j \right) \geq min_J\{mult(\prod_{j \in J} \alpha_j)\}.$$

Em particular, $mult(a_n(X)) = mult(S_n) = mult\left(\prod_{j \in \{1,\ldots,n\}} \alpha_j \right) = n.mult(\alpha)$. Mas, do item (ii) temos que

$$mult(\alpha_j) = mult(\varphi(\xi^j X^{1/n})) = mult(\xi^j \varphi(X^{1/n})) = mult(\varphi(X^{1/n})) = mult(\alpha),$$

para todo $j = 1, \ldots, n$ e $\xi^i \in U_n$. Assim,

$$mult\left(\prod_{\substack{J \in \{1, \ldots, n\} \\ \sharp J = i}} \alpha_j \right) = mult(\alpha_1) + \ldots + mult(\alpha_i) = i.mult(\alpha).$$

Logo,

$$mult(a_i(X)) \geq min_J\{mult(\prod_{j \in J} \alpha_j)\} = i.mult(\alpha) = i.mult\left(\frac{a_n(X)}{n}\right).$$

Se $mult(\alpha) \geq 1$, então $mult(a_i(X)) \geq i.mult(\alpha) \geq i$, ou seja, $g(X,Y)$ é um polinômio de Weierstrass. Por outro lado, se $mult(\alpha) > 0$, temos que $mult(a_i(X)) \geq i.mult(\alpha) > 0$

para todo i e $g(X,Y)$ é um pseudo-polinômio.

□

Como consequência do teorema anterior, temos a descrição das raízes de um polinômio de Weierstrass.

Corolário 2.10. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio mônico irredutível de grau $n \geq 1$ e seja $\alpha \in \mathbb{K}((X))^*$ uma raiz qualquer de f. Então,*

i) $min\{q; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\} = n$.

ii) Sendo os $\alpha_i^{'}s$ do Teorema 2.9, temos que $f(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i)$.

iii) Se $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ é um polinômio de Weierstrass (respectivamente um pseudo-polinômio), então $mult(\alpha) \geq 1$ (respectivamente $mult(\alpha) > 0$). Em particular, $\alpha \in \mathbb{K}[[X^{1/n}]]$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.9, se $\alpha = \varphi(X^{1/p}) \in \mathbb{K}((X))^*$ com $p = min\{q; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\}$, então temos que o polinômio minimal de α tem grau p, mas como f se anula em α é mônico e irredutível, segue que f é o polinômio minimal de α, assim $p = n = deg_Y(f)$.

Os itens (ii) e (iii) seguem diretamente do item anterior e do Teorema 2.9.

□

Corolário 2.11. *(Teorema da função implícita de Newton) Seja $f(X,Y) \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n e suponha que $\frac{\partial^n f}{\partial Y^n}(0,0) \neq 0$, então existe $\varphi(X^{1/n}) \in \mathbb{K}[[X^{1/n}]]$ tal que $f(X, \varphi(X^{1/n})) = 0$. Além disso, qualquer $\alpha \in \mathbb{K}[[X^{1/n}]]$ satisfazendo $f(X,\alpha) = 0$ é da forma $\alpha = \varphi(\xi X^{1/n})$ para algum $\xi \in U_n$.*

Demonstração: Como $\frac{\partial^n f}{\partial Y^n} \neq 0$ e $f(X,Y)$ tem multiplicidade n, temos que $f(X,Y)$ é regular de ordem n com respeito a Y. Segue do Teorema da Preparação de Weierstrass que existem $U \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ inversível e $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[[X]]$ unicamente determinados tais que

$$f.U = Y^n + A_1(X)Y^{n-1} + \ldots + A_n(X) \in \mathbb{K}[[X]][Y],$$

com $mult(A_i(X)) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Como f é irredutível em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ segue que fU também é irredutível em $\mathbb{K}[[X,Y]]$ e pelo Lema 1.9, segue que $f.U$ é irredutível em $\mathbb{K}[[X]][Y]$. Tome $\alpha \in \mathbb{K}((X))^*$ uma raiz qualquer de $f.U$. Como $f.U$ é mônico, segue do Corolário 2.10, que $\alpha \in \mathbb{K}[[X^{1/n}]]$. Como U é inversível e $f(X,\alpha).U(X,\alpha) = 0$, segue que $f(X,\alpha) = 0$.

Sabemos que o grupo de Galois G da extensão $\mathbb{K}((X^{1/n})) : \mathbb{K}((X)))$ é isomorfo a U_n, pelo item (ii) do Corolário 2.10, temos que $f(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i)$, onde $\alpha_i = \xi^i * \alpha = \varphi(\xi^i X^{1/n})$ com $\xi^i \in U_n$.

□

Observação 2.12. *Como o anel $\mathbb{K}[[X]]$ é um domínio de fatoração única com corpo de frações $\mathbb{K}((X))$, segue do Lema de Gauss, que todo polinômio irredutível em $\mathbb{K}[[X]][Y]$ é irredutível em $\mathbb{K}((X))[Y]$.*

2.3 Parametrização de Newton-Puiseux

Os resultados da seção anterior permitem introduzir a noção de parametrização de ramos planos.

Seja $f = \sum_{i=n}^{\infty} F_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ irredutível com $F_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ homogêneo de grau i e $F_n \neq 0$.

Se f é regular em Y, então podemos escrever

$$f = a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_n + Y^{n+1}.h(X,Y), \tag{2.2}$$

com $a_i \in \mathbb{K}[[X]]$, $mult(a_i) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(X,Y) \in \mathbb{K}[[X,Y]]$.

Proposição 2.13. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n e regular em Y. Escrevendo f como em (2.2), temos que as seguintes condições são* *equivalentes:*

i) O cone tangente de (f) *é* (Y^n)*;*

ii) Para todo $i \geq 1$*, temos* $mult(a_i(X)) > i$*;*

Demonstração: i)$\Rightarrow$ ii) Suponha que (Y^n) é o cone tangente de (f), então f é regular em Y. Assim, f pode ser escrito na forma

$$f = a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_n + Y^{n+1}.h(X,Y),$$

com $a_i \in \mathbb{K}[[X]]$, a_0 unidade, $h(X,Y) \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ e $mult(a_i) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Devemos ter $mult(a_i) > i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, pois caso contrário, o cone tangente de f não seria (Y^n).

ii)$\Rightarrow$ i) Imediato.

$\square$

Note que a proposição anterior não depende da característica do corpo $\mathbb{K}$.

Sejam $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n e regular em Y como em (2.2), $p(X,Y) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass de grau n associado a f e $\alpha = \varphi(X^{1/n}) \in \mathbb{K}[[X^{1/n}]]$, onde $n = min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\}$ tal que, $p(X,\alpha) = p(X, \varphi(X^{1/n})) = 0$.

Se denotarmos $T = X^{1/n}$, então temos $\varphi(T) \in \mathbb{K}[[T]]$ e

$$f(T^n, \varphi(T)) = 0 = p(T^n, \varphi(T)).$$

Neste caso, dizemos que

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i, \end{cases} \tag{2.3}$$

com $b_m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, é uma **parametrização de Newton-Puiseux** para o ramo (f). Note que qualquer outra raiz de $p(X,Y)$ fornece outra parametrização $(T^n, \psi(T))$ para (f) onde $\psi(T) = \varphi(\xi T)$, com ξ uma raiz n-ésima da unidade. Além disto, como vimos, estas são as únicas parametrizações de (f) da forma $(T^n, \varphi(T))$.

Observe que a condição $n = min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{K}((X^{1/q}))\}$ e $f(X,\alpha) = 0$ indica que em uma Parametrização de Newton-Puiseux como em (2.3), n e os índices $i's$ para os quais $b_i \neq 0$, são relativamente primos (ver demonstração do Lema 2.8).

Note também que pelo Corolário 2.10 temos que

$$mult_T(\varphi(T)) = mult_X(\varphi(X^{1/n})^n) = n.mult_X(\alpha) \geq n.$$

Em particular, se o cone de (f) é (Y^n), então pela Proposição 2.13 e Teorema 2.9 item 3 temos

$$mult_T(\varphi(T)) = mult_X(a_n(X)) > n.$$

Como $\alpha = \varphi(X^{1/n}) = \sum_{i \geq m} b_i X^{i/n}$ com $b_m \neq 0$, segue que $mult_X(\alpha) = \frac{m}{n}$. Assim, $mult_T(\varphi(T)) = n.mult_X(\alpha) = m$.

Se f é regular em X, então temos os mesmos resultados apresentados, apenas trocando o papel de X por Y.

Uma questão natural que surge é: como obter uma parametrização de Newton-Puiseux para uma série $f(X,Y) \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ irredutível dada? Nosso próximo passo é apresentar um algoritmo introduzido por Newton que permite responder tal questão. Antes porém, vamos apresentar um conceito que nos auxiliará na conquista de nosso objetivo.

Definição 2.14. *Seja* $f(X,Y) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{K}[[X,Y]]$. *Chamamos de* ***Polígono de Newton*** *de* f *a poligonal convexa determinada pelos lados* $L_1, L_2, \ldots, L_r \subset \mathbb{R}^2_+$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

1) Para todo L_i, *existe* (α_i, β_i) *com* $c_{\alpha_i\beta_i} \neq 0$ *que pertence a* L_i *ou se localiza acima* *de* L_i.

2) Existe ao menos um par (α_i, β_i) *e* (α_j, β_j) *que pertencem a cada* L_k, *com* $c_{\alpha_i\beta_i}.c_{\alpha_j\beta_j} \neq 0$.

3) Nenhum par (α, β) *com* $c_{\alpha\beta} \neq 0$ *se localiza abaixo de algum* L_i.

Podemos também definir o Polígono de Newton de f como sendo a poligonal convexa que delimita o fecho convexo em $\mathbb{R}^2_+$ do conjunto $S = \{(\alpha, \beta); c_{\alpha\beta} \neq 0\}$.

Exemplo 2.15. *Seja* $f(X, Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 + 4X^4Y - X^5 + X^6$. *O polígono de Newton de* f *é*

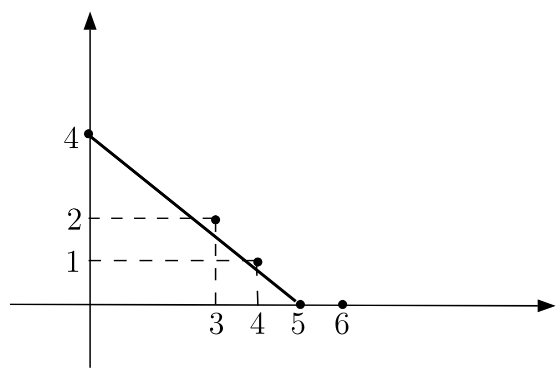

Figura 2.1

No que segue, vamos apresentar um algoritmo para obter uma parametrização de Newton-Puiseux de uma curva algebróide plana irredutível (f) utilizando seu Polígono de Newton.

Teorema 2.16. *(Método de Newton) Existe um algoritmo que permite obter uma parametrização de Newton-Puiseux de uma curva* (f) *até a ordem desejada.*

Demonstração: A demonstração consiste em exibir etapas que permitem obter uma parametrização de Newton-Puiseux para uma curva (f) a partir de um representante, que em virtude da Observação 1.15, pode ser considerado como um polinômio de Weierstrass não nulo

$$f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X).$$

Lembremos que uma parametrização de Newton-Puiseux é obtida de uma raiz $y \in \mathbb{K}((X))^*$ de $f(X,Y)$.

Escrevamos

$$y = c_1X^{\gamma_1} + c_2X^{\gamma_1+\gamma_2} + c_3X^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} + \dots,$$

com $c_i \neq 0$, e $\gamma_i \in \mathbb{Q}_+$. Se escrevermos $y = X^{\gamma_1}(c_1 + y_1)$ com $y_1 = c_2X^{\gamma_2} + c_3X^{\gamma_2+\gamma_3} + \dots$, então temos

$$0 = f(X,y) = f(X, X^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) = (X^{\gamma_1}(c_1 + y_1))^n + a_1(X)(X^{\gamma_1}(c_1 + y_1))^{n-1} + \dots + a_n(X).$$

Como

$$(c_1 + y_1)^l = \sum_{i=0}^{l} \left(\begin{array}{c} l \\ i \end{array} \right) y_1^i c_1^{l-i} = c_1^l + h(y_1)$$

com $h(0) = 0$, então $0 = f(X,Y)$ se expressa como

$$0 = X^{n\gamma_1}c_1^n + a_1(X)X^{(n-1)\gamma_1}c_1^{n-1} + a_2(X)X^{(n-2)\gamma_1}c_1^{n-2} + \dots + a_n(X) + g_1(X,y_1),$$

onde cada termo de $g_1(X,y_1)$ tem ordem maior que a ordem de um termo da forma $a_i(X)X^{i\gamma_1}c_1^i$, para $i = 1,\dots,n$. De fato, denotando

$$h_1(X) = X^{n\gamma_1}c_1^n + a_1(X)X^{(n-1)\gamma_1}c_1^{n-1} + a_2(X)X^{(n-2)\gamma_1}c_1^{n-2} + \dots + a_n(X),$$

temos

$$a_i(X)(X^{\gamma_1}(c_1 + y_1))^i = a_i(X)X^{i\gamma_1}(c_1^i + h(y_1)) = a_i(X)X^{i\gamma_1}c_1^i + a_i(X)X^{i\gamma_1}h(y_1).$$

Assim, um termo qualquer de $g_1(X,y)$ é um termo em $a_i(X)X^{i\gamma_1}h(y_1)$ e

$$mult_X(a_i(X)X^{i\gamma_1}h(y_1)) = \alpha_i + i\gamma_1 + mult_X(h(y_1)) > \alpha_i + i\gamma_1 = mult_X(a_i(X)X^{i\gamma_1}c_1^i),$$

onde $\alpha_i = mult_X(a_i(X))$ e $c_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Para que y seja raiz de $f(X,Y)$ devem haver ao menos dois termos da seguinte forma $a_i(X)X^{i\gamma_1}c_1^i$ que se cancelam. Em particular, os que atingem a menor ordem em $h_1(X)$, ou seja, existem j e k tais que

$$\alpha_j + j\gamma_1 = \alpha_k + k\gamma_1 \leq \alpha_i + i\gamma_1$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Além disso, se $a_i(X) = b_i X^{\alpha_i} + \ldots$ com $b_i \neq 0$, então a soma dos coeficientes de todos os termos da forma $a_i(X)X^{i\gamma_1}c_1^i$ que atingem a menor ordem deve ser zero. Logo,

$$p(c_1) = \sum_{\alpha_i + i\gamma_1 = \alpha_j + j\gamma_1} b_i c_1^i = 0. \tag{2.4}$$

Note que os monômios que formam $p(c_1)$ são na verdade os coeficientes dos termos que compõe o cone tangente de $h_1(X)$.

Para determinar γ_1 usaremos o polígono de Newton de $\overline{h_1}(X)$, onde

$$\overline{h_1}(X) = c_1^n + a_1(X)c_1^{n-1} + a_2(X)c_1^{n-2} + \ldots + a_n(X).$$

Note que cada lado do polígono de Newton considerado, contém ao menos dois pontos (α_j, j) e (α_k, k). Além disso, o coeficiente angular da reta suporte deste segmento é $m = \frac{k-j}{\alpha_k - \alpha_j}$. Assim,

$$\alpha_k - \frac{1}{m}k = \alpha_j - \frac{1}{m}j.$$

Isto sugere um modo de obter os possíveis valores para γ_1, a saber, estarão entre os valores $\frac{-1}{m}$, onde m é um coeficiente angular da reta suporte de um segmento que compõe o polígono de Newton de $\overline{h_1}(X)$. Como queremos obter γ_1 e este é tal que

$$\alpha_j + j\gamma_1 \leq \alpha_i + i\gamma_1$$

para todo $i = 0, \ldots, n$, temos que

$$\gamma_1 \leq \frac{\alpha_i - \alpha_j}{j - i} \Leftrightarrow \frac{j-i}{\alpha_i - \alpha_j} \leq \frac{1}{\gamma_1} \Leftrightarrow \frac{-1}{\gamma_1} \leq \frac{j-i}{\alpha_j - \alpha_i} = m \Rightarrow \gamma_1 \leq \frac{-1}{m}.$$

Deste modo escolhemos $\gamma_1 = \frac{-1}{m}$, onde m é o menor coeficiente angular dos segmentos que compõem o polígono de Newton de $\overline{h_1}(X)$, considerado nas variáveis c_1 e X, que coincide com o polígono de Newton de $f(X, Y)$. Deste modo, obtemos γ_1 e consequentemente podemos obter o polinômio $p(c_1)$ exibido em (2.4).

Como o polinômio $p(c_1)$ contém ao menos dois termos (os associados aos extremos do segmento de menor inclinação no polígono de Newton) e $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, o polinômio $p(c_1)$ possui ao menos uma raiz não nula, que tomamos como valor de c_1.

Tendo obtido c_1 e γ_1, podemos obter c_i e γ_i do mesmo modo, observando que devemos ter $\gamma_i > 0$. De fato, para determinar c_2 e γ_2, lembremos que

$$y = c_1 X^{\gamma_1} + c_2 X^{\gamma_1 + \gamma_2} + \ldots = X^{\gamma_1}(c_1 + y_1),$$

onde $y_1 = c_2 X^{\gamma_2} + c_3 X^{\gamma_2 + \gamma_3} + \ldots$. Assim,

$$0 = f(X, y) = f(X, X^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) = h_1(X) + g_1(X, y_1),$$

onde $h_1(X)$ é formado por termos em X e c_1. Como observamos anteriormente temos que em $g_1(X, y_1)$ todos os termos tem ordem em X maior do que um termo de $h_1(X)$.

Considere $\mu_1 = min\{\alpha_i + i\gamma_1\}$. Assim, podemos escrever $0 = f(X, y) = X^{\mu_1} f_1(X, y_1)$. Assim, basta repetir o argumento para $f_1(X, y_1)$ tomando $y_1 = X^{\gamma_2}(c_2 + y_2)$, onde $y_2 = c_3 X^{\gamma_3} + c_4 X^{\gamma_3 + \gamma_4} + \ldots$.

Agora devemos garantir que as condições mencionadas sobre y se concretizam. Inicialmente vamos mostrar que o menor coeficiente angular do polígono de Newton de $f_1(X, y)$

é negativo, ou seja, γ_2 será positivo. Além disso, devemos garantir que $y \in \mathbb{K}((X^{1/n}))$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja, deve haver γ_i tal que para todo γ_j com $j > i$ os denominadores de γ_i e γ_j sejam iguais.

Considere o polígono de Newton de $f(X,Y)$, mais especificamente o lado com o menor coeficiente angular e sejam (α_i, i) e (α_k, k) os pontos extremos deste lado, tal que $i > k$. Assim, $\mu_1 = \alpha_i + i\gamma_1 = \alpha_k + k\gamma_1$. O polígono de Newton terá um lado (segmento) da forma

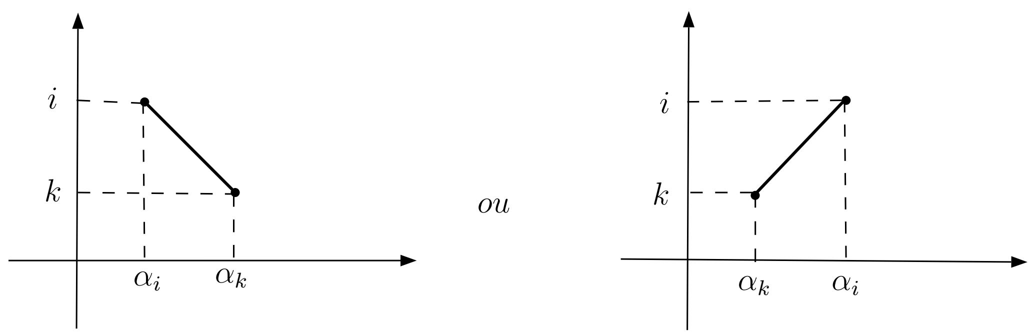

Figura 2.2

Temos $\gamma_1 = \frac{\alpha_k - \alpha_i}{i-k} = \frac{p}{q}$, com $mdc(p,q) = 1$.

Sem perda de generalidade podemos considerar $q > 0$. Note que se (α_l, l) pertence ao lado de extremos (α_i, i) e (α_k, k), então

$$\frac{\alpha_k - \alpha_l}{l - k} = \gamma_1 = \frac{p}{q}.$$

Como $q \nmid p$, temos que $q|(l-k)$. Logo, $l = k + qr_l$ e como $l \geq k$ e $q > 0$, temos que $r_l \geq 0$.

Desta forma, podemos escrever $p(c_1)$ como

$$p(c_1) = \sum_{\alpha_j + j\gamma_1 = \mu_1} b_j c_1^j,$$

onde $j = k + qr_j$. Assim,

$$p(c_1) = \sum_j b_j c_1^{k+qr_j} = c_1^k \sum_j b_j (c_1^q)^{r_j} = c_1^k \phi(c_1^q). \tag{2.5}$$

Observe que o grau de $p(c_1)$ em c_1 é i, pois $i \geq j \geq k$ para todo índice j tal que $\mu_1 = \alpha_i + i\gamma_1 = \alpha_j + j\gamma_1$. Como i é o extremo do lado de menor coeficiente angular do polígono de Newton, podemos escrevê-lo como $i = k + qr_i$. Deste modo, $\phi(c_1^q)$ tem grau em c_1^q igual a r_i. Como $i > k, q > 0$ e $r_i = \frac{i-k}{q}$, temos que o grau de $\phi(c_1^q)$ em c_1^q é positivo e $\phi(0) \neq 0$, pois $k = k + qr_k$ o que implica que $r_k = 0$.

Agora, se c_1 é uma raiz de multiplicidade $e \geq 1$ de $\phi(z^q)$, então podemos escrever

$$\phi(z^q) = (z - c_1)^e \psi(z) \tag{2.6}$$

com $\psi(c_1) \neq 0$.

Além disto, note que

$$f_1(X, y_1) = X^{-\mu_1} f(X, X^{\gamma_1}(c_1+y_1)) = X^{-\mu_1}(a_n(X)+a_{n-1}(X)X^{\gamma_1}(c_1+y_1)+\ldots+X^{n\gamma_1}(c_1+y_1)^n)$$

$$= \underbrace{X^{-\mu_1} \sum_{\alpha_j+j\gamma_1=\mu_1} a_j(X) X^{j\gamma_1}(c_1+y_1)^j}_{\bigstar} + X^{-\mu_1} \sum_{\alpha_j+j\gamma_1>\mu_1} a_j(X) X^{j\gamma_1}(c_1+y_1)^j.$$

Iremos agora analisar a parte selecionada, que denotamos por $\bigstar$, lembrando que $a_j(X) = b_j X^{\alpha_j} + b_{j+1} X^{\alpha_j+1} + \ldots$. Assim,

$$\bigstar = \underbrace{X^{-\mu_1} \sum_{\alpha_j+j\gamma_1=\mu_1} b_j X^{\alpha_j+j\gamma_1}(c_1+y_1)^j} + X^{-\mu_1} \sum_{\alpha_j+j\gamma_1=\mu_1} (a_j(X) - b_j X^{\alpha_j}) X^{j\gamma_1}(c_1+y_1)^j.$$

Veja que a nova parte selecionada, usando (2.5) e (2.6) se resume a

$$X^{-\mu_1}\sum_{\alpha_j+j\gamma_1=\mu_1} b_jX^{\mu_1}(c_1+y_1)^j = \sum_{\alpha_j+j\gamma_1=\mu_1} b_j(c_1+y_1)^j = p(c_1+y_1) =$$

$$(c_1+y_1)^k\phi((c_1+y_1)^q) = (c_1+y_1)^k(c_1+y_1-c_1)^e\psi(c_1+y_1) =$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s} c_1^{k-s}y_1^s y_1^e\psi(c_1+y_1)\right) = (c_1^k y_1^e + kc_1^{k-1}y_1^{e+1}+\ldots+y_1^{k+e})\psi(c_1+y_1).$$

Observe que

$$\psi(c_1+y_1) = \sum_{z=0}^{w}\beta_z(c_1+y_1)^z = \sum_{z=0}^{w}\beta_z(c_1^z+y_1\theta(c_1+y_1))$$

$$= \sum_{z=0}^{w}\beta_z c_1^z + y_1\sum_{z=0}^{w}\beta_z\theta(c_1+y_1) = \psi(c_1)+y_1\varphi(c_1+y_1),$$

onde $\beta_z \in \mathbb{K}, \theta(c_1+y_1), \varphi(c_1+y_1) \in \mathbb{K}[c_1,y_1]$. Assim, recuperando a expressão de $f_1(X,y_1)$ temos

$$f_1(X,y_1) = (c_1^k y_1^e + kc_1^{k-1}y_1^{e+1}+\ldots+y_1^{k+e})(\psi(c_1)+y_1\varphi(c_1+y_1)) + g(X,y_1)$$

$$= d_e y_1^e + d_{e+1}y_1^{e+1}+\ldots+d_n y_1^n + g(X,y_1),$$

onde $d_e = c_1^k\psi(c_1) \neq 0$. Como f tem grau n em y e $f(X,y) = X^{\mu_1}.f_1(X,y_1)$, segue que f_1 tem grau n em y_1 e assim

$$f_1(X,y_1) = d_0(X)+d_1(X)y_1+d_2(X)y_1^2+\ldots+d_e(X)y_1^e+d_{e+1}(X)y_1^{e+1}+\ldots+d_n(X)y_1^n.$$

Se $d_0 = 0$, então $y_1 = 0$ é raiz de f_1 e $y = x_1^{\gamma_1}c_1$ é raiz de f. Caso contrário, isto é, se $d_0(X) = b_0X^{a_0}+\ldots$ com $b_0 \neq 0$, então

$$\begin{cases} ord_X d_e(X) = 0 \\ ord_X d_i(X) \geq 0; i = 0,\ldots,n \\ ord_X d_i(X) > 0; i = 0,\ldots,e-1. \end{cases}$$

Agora analisemos o polígono de Newton de $f_1(X, y_1)$.

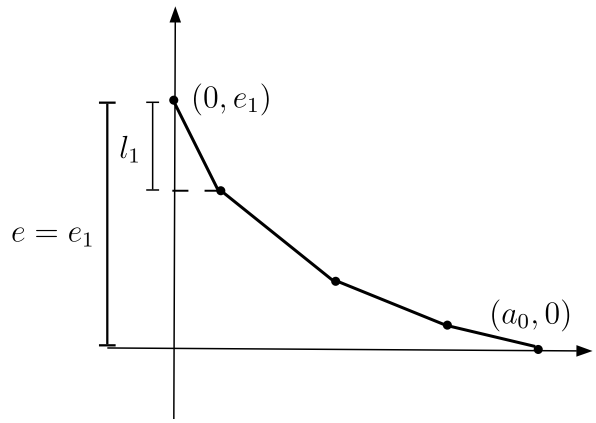

Figura 2.3

Se o polígono de Newton de $f_1(X, y_1)$ tiver mais de um lado, que ocorre se $d_0 \neq 0$, então $e = e_1 \geq l_1$, onde l_1 é a projeção vertical do lado de menor inclinação do polígono de Newton. Neste caso existe um lado do polígono de Newton de $f_1(X, y_1)$ com inclinação m negativa. Assim, teremos $\gamma_2 > 0$, pois $\gamma_2 = \frac{-1}{m}$. O mesmo argumento garante que $\gamma_i > 0$ para todo $i > 1$.

Para completarmos a demonstração, devemos mostrar que o resultado desse procedimento realmente fornece um elemento $y \in \mathbb{K}((X))^*$, isto é, um elemento de $\mathbb{K}((X^{1/s}))$ para algum $s \geq 1$. Para tanto recordemos que $p(c_1) = c_1^k \phi(c_1^q)$, onde $\gamma_1 = \frac{p}{q}$ com $q > 0$. Além disso, ϕ tem grau $\frac{i-k}{q} > 0$ em c_1^q e $\phi(0) = 0$, então $deg(\phi) \leq i - k$ em c_1.

Sendo c_1 uma raiz de $\phi(z^q)$ de multiplicidade $e_1 \geq 1$ e $l_0 = i - k$ é a projeção vertical do lado de menor inclinação do polígono de Newton de f, temos $l_0 \geq e_1$.

Para os argumentos finais, em cada passo denote:

- e_i o extremo do lado de menor inclinação no polígono de Newton de f_i.

- l_i o comprimento da projeção do lado de menor inclinação no polígono de Newton de f_i. Assim, $l_0 \geq e_1 \geq l_1 \geq e_2 \geq l_2 \geq e_3 \geq l_3 \geq \ldots$.

No entanto, não podemos ter uma infinidade de desigualdades estritas pois $e_i > 0$ para todo i. Assim, existe um índice i, onde $e_j = l_j$ para todo $j \geq i$. Logo, o polígono de Newton de $f_j(X, Y_j)$ terá apenas um lado.

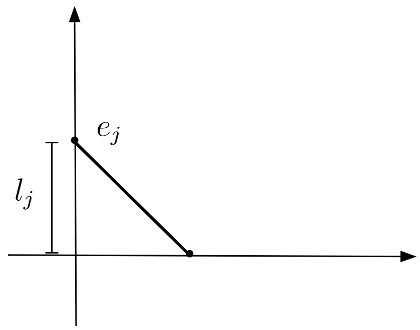

Figura 2.4

Desta forma para todo $j \geq i$, temos

$$\phi(z^{q_j}) = (z - c_j)^{e_j}\psi_j(z) = d\sum_{s=0}^{e_j}\begin{pmatrix} e_j \\ s \end{pmatrix} z^s(-c_j)^{e_j - s} = dc_j^{e_j}(-1)^{e_j} + \ldots.$$

Como $char(\mathbb{K}) = 0$, $d \neq 0$, pois $\psi_j(c_j) \neq 0$ e $c_j^{e_j} \neq 0$, temos que $d_{e_j}(X) = dc_j^{e_j}(-1)^{e_j} \neq 0$.

Temos que o grau de $\phi(z^{q_j})$ em z é $\frac{i-k}{q_j}$ e $e_j \leq i - k$. Como $i - k = l_j$, temos

$$e_j \leq \frac{i-k}{q_j} = \frac{l_j}{q_j} \Rightarrow e_j \leq e_j q_j \leq l_j.$$

Mas $e_j = l_j$, assim $q_j = 1$ para todo $j \geq i$.

Lembrando que

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{q_1}, \gamma_2 = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \gamma_i = \frac{p_i}{q_i}, \gamma_{i+1} = \frac{p_{i+1}}{1}, \ldots$$

temos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_j, \gamma_{j+1}$ admitem denominador comum, a saber

$$s = mdc(q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}).$$

Portanto $y \in \mathbb{K}((X^{\frac{1}{s}})) \subseteq \mathbb{K}((X))^*$.

$\square$

Exemplo 2.17. *Vamos obter uma parametrização de Newton-Puiseux para a série*

$$f(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7.$$

Seja $y = c_1X^{\gamma_1} + c_2X^{\gamma_1+\gamma_2} + \ldots = X^{\gamma_1}(c_1 + y_1)$ *uma raiz para* $f(X,Y)$, *onde*

$$y_1 = c_2X^{\gamma_2} + c_3X^{\gamma_2+\gamma_3} + \ldots,$$

então

$$0 = f(X,y) = f(X, X^{\gamma_1}(c_1+y_1)) = \underbrace{(X^{4\gamma_1}c_1^4 - 2X^3X^{2\gamma_1}c_1^2 - 4X^5X^{\gamma_1}c_1 + X^6 - X^7)}_{h_1(X)} +$$

$$4X^{4\gamma_1}c_1^3y_1 + 6X^{4\gamma_1}c_1^2y_1^2 + 4X^{4\gamma_1}c_1y_1^3 + X^{4\gamma_1}y_1^4 - 4X^3X^{2\gamma_1}c_1y_1 - 2X^3X^{2\gamma_1}y_1^2 - 4X^5X^{\gamma_1}y_1.$$

O polígono de Newton para $h_1(X)$ *é:*

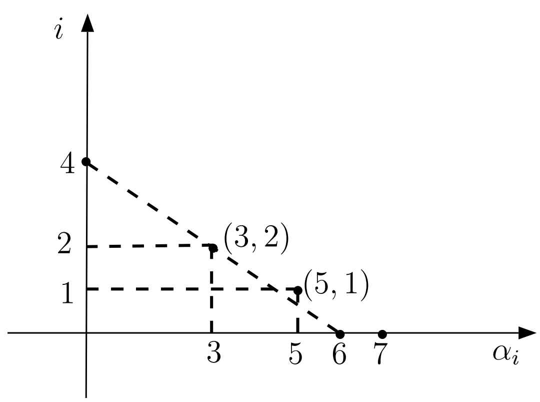

Figura 2.5

Vemos que os pontos $\{(0,4),(3,2),(6,0)\}$ *pertencem ao lado do polígono de Newton, e o coeficiente angular desse lado é* $m_1 = \frac{-2}{3}$. *Como* $\gamma_1 = \frac{-1}{m_1}$, *temos que* $\gamma_1 = \frac{3}{2}$.

Para encontrar c_1, basta calcular as raízes de

$$p(c_1) = \sum_{\alpha_j + j\gamma_1 = \mu_1} b_1 c_1^j,$$

onde os $b_i c_1^i$ são os coeficientes dos termos que correspondem aos pontos pertencentes ao lado do polígono de Newton de menor coeficiente angular. Assim,

$$p(c_1) = c_1^4 - 2c_1^2 + 1 = 0$$

e obtemos $c_1 = \pm 1$.

Sendo assim, temos $\gamma_1 = \frac{3}{2}$ e adotaremos $c_1 = -1$. Substituindo esses valores em $f(X, y)$ obtemos

$$f(X, X^{\frac{3}{2}}(-1 + y_1)) = X^6(\underbrace{(-1 + y_1)^4 - 2(-1 + y_1)^2 42X^{\frac{1}{2}}(-1 + y_1) + 1 - X)}_{f_1(X, y_1)}$$

$$= y_1^4 - 4y_1^3 + 4y_1^2 - 4X^{\frac{1}{2}} y_1 + 4X^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, tome $y_1 = X^{\gamma_2}(c_2 + y_2)$, onde $y_2 = c_3 X^{\gamma_3} + c_4 X^{\gamma_3 + \gamma_4} + \ldots$, e repita o processo, mas agora para $f_1(X, y_1)$.

$$f_1(X, X^{\gamma_2}(c_2 + y_2)) = X^{4\gamma_2}(c_2 + y_2)^4 - 4X^{3\gamma_2}(c_2 + y_2)^3 + 4X^{2\gamma_2}(c_2 + y_2)^2 - 4X^{\frac{1}{2}} X^{\gamma_2}(c_2 + y_2) +$$

$$+4X^{\frac{1}{2}} = X^{4\gamma_2} c_2^4 + 4X^{4\gamma_2} c_2^3 y_2 + 6X^{4\gamma_2} c_2^2 y_2^2 + 4X^{4\gamma_2} c_2 y_2 + X^{4\gamma_2} y_2^4 - 4X^{3\gamma_2} c_2^3 - 12X^{3\gamma_2} c_2^2 y_2 +$$

$$-12X^{3\gamma_2} c_2 y_2^2 - 4X^{3\gamma_2} y_2^3 + 4X^{2\gamma_2} c_2^2 + 8X^{2\gamma_2} c_2 y_2 + 4X^{2\gamma_2} y_2^2 - 4X^{\frac{1}{2}} X^{\gamma_2} c_2 - 4X^{\frac{1}{2}} X^{\gamma_2} y_2 + 4X^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, obtemos

$$h_2(X) = X^{4\gamma_2} c_2^4 - 4X^{3\gamma_2} c_2^3 + 4X^{2\gamma_2} c_2^2 - 4X^{\frac{1}{2}} X^{\gamma_2} c_2 + 4X^{\frac{1}{2}}.$$

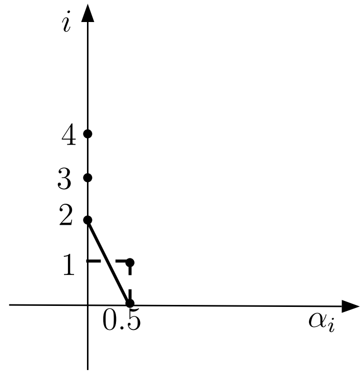

Figura 2.6

Através do polígono de Newton de $h_2(X)$*, obtemos* $m_2 = -4$ *e consequentemente,* $\gamma_2 = \frac{1}{4}$*. Calculando as raízes do polinômio* $p(c_2) = 4c_2^2 - 4$*, obtemos* $c_2 = \pm 1$ *e podemos escolher* $c_2 = 1$*. Para encontrar os demais termos, procedemos de forma análoga.*

Como $y = c_1X^{\gamma_1} + c_2X^{\gamma_1+\gamma_2} + \ldots$*, substituindo os valores encontrados obtemos*

$$Y = -X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}} + \ldots.$$

Tomando $X^{\frac{1}{4}} = t$*, obtemos uma parametrização de Newton-Puiseux da forma*

$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = -t^6 + t^7 + \ldots. \end{cases}$$

Capítulo 3

Parametrizações de Hamburger-Noether

No capítulo 2 vimos como obter uma parametrização de Newton-Puiseux para uma curva algebróide plana irredutível (f) a partir de um representante $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ dado por um polinômio de Weierstrass quando a característica de $\mathbb{K}$ é zero. Neste capítulo, consideramos corpos de característica arbitrária. Apresentaremos as chamadas **parametrizações de Hamburger-Noether**, que como veremos, no último capítulo, corresponde a uma forma adequada de proceder o estudo de curvas planas, no que diz respeito a equisingularidade quando o corpo considerado tem característica arbitrária.

3.1 Resolução de Singularidades de Curvas Planas

Iniciemos esta seção com um conceito fundamental para o seguimento do trabalho.

Definição 3.1. *Uma **transformação quadrática** do anel $\mathbb{K}[[X,Y]]$ em $\mathbb{K}[[X_1,Y_1]]$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras definido por*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{K}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[X_1,Y_1]] \\ & X & \mapsto & X_1 \\ & Y & \mapsto & X_1Y_1 \end{array}$$

ou por

$$\begin{array}{rccc} \tau: & \mathbb{K}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[X_1,Y_1]] \\ & X & \mapsto & X_1Y_1 \\ & Y & \mapsto & Y_1. \end{array}$$

Essas transformações não são inversíveis, mas definem um isomorfismo entre $\mathbb{K}((X,Y))$ e $\mathbb{K}((X_1,Y_1))$, respectivamente o corpo de frações de $\mathbb{K}[[X,Y]]$ e $\mathbb{K}[[X_1,Y_1]]$.

A transformação por σ de

$$f(X,Y)=\sum_{i=n}^{\infty}F_i(X,Y)\in\mathbb{K}[[X,Y]],$$

onde $F_i\in\mathbb{K}[[X,Y]]$ é um polinômio homogêneo de grau i, é o elemento de $\mathbb{K}[[X_1,Y_1]]$ definido por

$$\sigma(f)=f(X_1,X_1Y_1)=\sum_{i=n}^{\infty}F_i(X_1,X_1Y_1)=X_1^n\sum_{i=n}^{\infty}X_1^{i-n}F_i(1,Y_1).$$

A série $\sigma^*(f)=\frac{1}{X_1^n}\sigma(f)=\frac{1}{X_1^n}f(X_1,X_1Y_1)$, onde $n=mult(f)$, é chamada de **transformada estrita** de f por σ e será denotada por $f^{(1)}$. O próximo teorema apresenta propriedades relacionadas a transformação estrita de uma série de potências em $\mathbb{K}[[X,Y]]$.

Teorema 3.2. *Sejam f e g elementos de $\mathbb{K}[[X,Y]]$.*

i) $\sigma^*(f)$ é inversível em $\mathbb{K}[[X_1,Y_1]]$ se, e somente se, (f) é regular em X, isto é, a forma inicial de f é da forma $F_n=cX^n+\ldots$, onde $c\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$.

ii) $\sigma^*(fg)=\sigma^*(f)\sigma^*(g)$;

iii) $mult(\sigma^*(f))\leq mult(f)$;

iv) Se f é um polinômio de Weierstrass em $\mathbb{K}[[X]][Y]$ de grau n com cone tangente (Y^n), então $\sigma^*(f)$ é um pseudo-polinômio de grau n em Y;

v) Se $f\in\mathbb{K}[[X]][Y]$ é um polinômio irredutível de Weierstrass de grau n, então $\sigma^*(f)$ é irredutível ou uma unidade.

Demonstração: i) Se escrevermos $f(X,Y)=\sum_{i=n}^{\infty}F_i(X,Y)$, então temos que

$$\sigma^*(f)=\frac{1}{X_1^n}\sigma(f)=\frac{1}{X_1^n}f(X_1,X_1Y_1)=\sum_{i=n}^{\infty}X_1^{i-n}F_i(1,Y_1).$$

Se $\sigma^*(f)$ é inversível em $\mathbb{K}[[X_1,Y_1]]$, então $mult(\sigma^*(f))=0$ e $F_n(1,0)\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Como

$$\sigma(F_n(X,Y))=F_n(X_1,X_1Y_1)=X_1^nF_n(1,Y_1),$$

então

$$\sigma(F_n(X,0))=X_1^nF_n(1,0)=cX_1^n+\ldots,$$

onde $c\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Então $F_n(X,0)=cX^n+\ldots$, ou seja, f é regular em X.

Por outro lado, se f é regular em X, então $F_n(X,Y)=cX^n+\ldots$ com $c\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Logo,

$$F_n(1,Y_1)=\sigma^*(F_n(X,Y))=\frac{1}{X_1^n}\sigma(F_n(X,Y))=\frac{1}{X_1^n}(cX_1^n+\ldots)=c+\ldots.$$

Assim, $mult(\sigma^*(f))=0$, ou seja, $\sigma^*(f)$ é inversível.

ii) Observe que $\sigma^*(h)=\frac{1}{X_1^{m_h}}h(X_1,X_1Y_1)$, onde $m_h=mult(h)$, assim

$$\sigma^*(fg)=\frac{1}{X_1^{m_f+m_g}}fg(X_1,X_1Y_1)=\frac{1}{X_1^{m_f}}\frac{1}{X_1^{m_g}}f(X_1,X_1Y_1)g(X_1,X_1Y_1)=\sigma^*(f)\sigma^*(g).$$

iii) Temos que $\sigma^*(f)=\sum_{i=n}^{\infty}X_1^{i-n}F_i(1,Y_1)$ e em $F_n(1,Y_1)$ existem monômios de grau menor ou igual a $n=mult(f)=deg(F_n(X,Y))$. Como $mult(\sigma^*(f))=deg(F_n(1,Y_1))$ e os monômios de $F_n(1,Y_1)$ não podem ser cancelados com outros monômios de $\sigma^*(f)$ porque os demais monômios são múltiplos de X_1, segue que $mult(\sigma^*(f))\leq mult(f)$.

iv) Seja $f=Y^n+a_1(X)Y^{n-1}+\ldots+a_n(X)\in\mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass com cone tangente (Y^n), isto é, $mult(a_i(X)) > i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$\sigma^*(f) = \frac{1}{X_1^n}\sigma(f) = \frac{1}{X_1^n}f(X_1, X_1Y_1) = \frac{1}{X_1^n}(X_1^nY_1^n + a_1(X_1)(X_1Y_1)^{n-1} + \ldots + a_n(X_1))$$

$$= Y_1^n + \frac{a_1(X_1)Y_1^{n-1}}{X_1} + \frac{a_2(X_1)Y_1^{n-2}}{X_1^2} + \ldots + \frac{a_n(X_1)}{X_1^n}.$$

Note que $mult(\frac{a_i(X_1)}{X_1^i}) > 0$. Portanto $\sigma^*(f)$ é um pseudo-polinômio de grau n em Y_1.

v) Temos que

$$f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$$

com $mult(a_i(X)) \geq i$ e

$$\sigma^*(f) = Y_1^n + \frac{a_1(X_1)}{X_1}Y_1^{n-1} + \ldots + \frac{a_n(X_1)}{X_1^n} \in \mathbb{K}[[X_1]][Y_1]$$

com $mult\left(\frac{a_i(X_1)}{X_1^i}\right) \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Assim, $\sigma^*(f)$ é regular em Y_1 de ordem $m \leq n$, onde

$$m = min\left\{k; mult\left(\frac{a_{n-k}(X_1)}{X_1^k}\right) = 0\right\}.$$

Se $m < n$, então podemos escrever $\sigma^*(f) = ug$ com $u = \frac{a_{n-m}(X_1)}{X_1^m} = \alpha + \ldots \in \mathbb{K}[[X_1]]$ unidade e $g \in \mathbb{K}[[X_1]][Y_1]$ regular em Y_1 de ordem m.

Como $\sigma^*(f) = \frac{f(X_1, X_1Y_1)}{X_1^n}$, isto é, $f(X_1, X_1Y_1) = X_1^n\sigma^*(f) = X_1^nu(X_1, Y_1)g(X_1, Y_1)$, escrevendo $X_1^n = X_1^{n-m}X_1^m$ e usando que $X = X_1$ e $Y = X_1Y_1$ temos

$$f(X, Y) = X^{n-m}u\left(X, \frac{Y}{X}\right)X^mg\left(X, \frac{Y}{X}\right).$$

Uma vez que $X^{n-m}u\left(X, \frac{Y}{X}\right) = \alpha X^{n-m} + \ldots$ e $X^mg\left(X, \frac{Y}{X}\right) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ é regular em Y de ordem m e f é irredutível, a única possibilidade é que $m = 0$, isto é, $\sigma^*(f)$ é unidade.

Se $m = n$, suponha que $\sigma^*(f) = gh$ com $g, h \in \mathbb{K}[[X_1]][Y_1]$ regulares em Y_1 de ordem $m_1 > 0$ e $m_2 > 0$ respectivamente. Note que $\sigma^*(f)$ é regular em Y_1 de ordem $n = m_1 + m_2$.

Como no caso anterior, podemos afirmar que $f(X,Y) = X^{m_1} g\left(X, \frac{Y}{X}\right) X^{m_2} h\left(X, \frac{Y}{X}\right)$ com $X^{m_1} g\left(X, \frac{Y}{X}\right), X^{m_2} h\left(X, \frac{Y}{X}\right) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ são regulares em Y de ordem m_1 e m_2 respectivamente. Mas neste caso, f seria redutível, uma contradição.

$\square$

Corolário 3.3. *(Lema da Unitangente) Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass de grau n, então o cone tangente de f é da forma $(aY + bX)^n$.*

Demonstração: Escreva $f(X,Y) = f_n(X,Y) + f_{n+1}(X,Y) + \ldots$ com $f_k(X,Y) \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ homogêneo de grau k. Temos que

$$\sigma^*(f) = \frac{f_n(X_1, X_1Y_1)}{X_1^n} + \frac{f_{n+1}(X_1, X_1Y_1)}{X_1^n} + \ldots.$$

Note que se $f_k(X,Y) = \sum_{i+j=k} a_{ij} X^i Y^j$, então $\frac{f_k(X_1, X_1Y_1)}{X_1^n} = \sum_{i+j=k} a_{ij} X_1^{k-n} Y^j$.

Deste modo,

$$f_n(1, Y_1) = \sum_{i+j=n} a_{ij} Y_1^j = \sigma^*(f)(0, Y_1) \in \mathbb{K}[Y_1] \setminus \mathbb{K}.$$

Pelo item (v) do teorema anterior $\sigma^*(f)$ é irredutível, assim, pelo Lema de Hensel, temos que $\sigma^*(f) = (aY_1 + b)^n$ e assim $f_n(X,Y) = (aY + bX)^n$.

$\square$

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado arbitrário e seja f um elemento do ideal maximal $\mathbb{M} = \langle X, Y \rangle$ de $\mathbb{K}[[X,Y]]$. Definimos o **anel local** da curva (f) como sendo o quociente

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f \rangle}.$$

Se $h \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, denotaremos por $\overline{h}$ a classe residual de h em $\mathcal{O}_f$.

Proposição 3.4. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um pseudo-polinômio em Y de grau n. Então $\mathcal{O}_f$ é um $\mathbb{K}[[X]]$-módulo livre de posto n gerado pela classe residual y^i de Y^i com $i = 0, \ldots, n-1$ em $\mathcal{O}_f$. Em outras palavras,*

$$\mathcal{O}_f = \mathbb{K}[[X]] \oplus \mathbb{K}[[X]]y \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[[X]]y^{n-1}.$$

Demonstração: Sejam $g, f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ tais que $f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X)$. Note que, se dividirmos g por f obtemos $g = qf + r$ com $r \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ de grau menor que n em Y, ou nulo, ou seja,

$$g = qf + c_n(X) + c_{n-1}(X)Y + \ldots + c_1(X)Y^{n-1}.$$

Assim,

$$\overline{g} = \overline{qf} + \overline{r} = 0 + c_n(X) + c_{n-1}(X)y + \ldots + c_1(X)y^{n-1}.$$

Então $B = \{1, y, \ldots, y^{n-1}\}$ gera $\mathcal{O}_f$ como $\mathbb{K}[[X]]$-módulo. Agora se

$$b_n(X) + b_{n-1}(X)y + \ldots + b_1(X)y^{n-1} = 0,$$

em $\mathcal{O}_f$, então,

$$b_n(X) + b_{n-1}(X)Y + \ldots + b_1(X)Y^{n-1} = hf$$

$$hf - (b_n(X) + b_{n-1}(X)Y + \ldots + b_1(X)Y^{n-1}) = 0.$$

Como $0.f + 0 = 0$ temos pela unicidade do resto no algoritmo da divisão que $b_n(X) + b_{n-1}(X)Y + \ldots + b_1(X)Y^{n-1} = 0$. Portanto, $\{1, y, \ldots, y^{n-1}\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}[[X]]$ e portanto é base de $\mathcal{O}_f$.

$\square$

Proposição 3.5. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível de grau $n = mult(f)$ e $f^{(1)} = \sigma^*(f)$ a transformada estrita de f, então*

$$\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_{f^{(1)}}$$

com igualdade se, e somente se, $n = 1$.

Demonstração: Como $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ é um polinômio de Weierstrass de grau n, temos pelo Teorema 3.2 que $f^{(1)} \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ é um pseudo-polinômio de grau n irredutível. Assim temos, $\mathcal{O}_f = \mathbb{K}[[X]] + \mathbb{K}[[X]]y + \ldots + \mathbb{K}[[X]]y^{n-1}$ e $\mathcal{O}_{f^{(1)}} = \mathbb{K}[[X_1]] + \mathbb{K}[[X_1]]y_1 + \ldots + \mathbb{K}[[X_1]]y_1^{n-1}$.

Como $X = X_1$ e $Y = X_1Y_1$, temos que

$$\mathcal{O}_f = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{K}[[X_1]]X_1^i y_1^i \subset \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{K}[[X_1]]y_1^i = \mathcal{O}_{f^{(1)}}$$

com igualdade se, e somente se, $n = mult(f) = 1$.

$\square$

Os resultados anteriores permanecem válidos se trocarmos a transformação quadrática σ por τ dada na Definição 3.1.

Dado $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível regular em Y, então temos $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_{f^{(1)}}$. Pelo Teorema 3.2 temos que $f^{(1)}$ é um pseudo-polinômio de grau n irredutível, fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos considerar que $f^{(1)}$ é regular em Y_1 e após o Teorema da Preparação de Weierstrass, considerar $f^{(1)}$ um polinômio de Weierstrass irredutível regular em Y. Assim, pela proposição anterior temos que $\mathcal{O}_{f^{(1)}} \subset \mathcal{O}_{f^{(2)}}$.

Deste modo, temos uma sequência ascendente de $\mathbb{K}[[X]]$-módulos

$$\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_{f^{(1)}} \subset \mathcal{O}_{f^{(2)}} \subset \dots .$$

Como cada $\mathcal{O}_{f^{(i)}}$ é Noetheriano, temos que existe um índice N tal que $\mathcal{O}_{f^{(N)}} = \mathcal{O}_{f^{(N+1)}}$ e assim $mult(f^{(N)}) = 1$, ou seja, aplicando o processo anteriormente descrito, obteremos após um número finito de etapas, uma curva suave.

Como as multiplicidades das curvas na sequência anterior decrescem em uma certa etapa, temos que em algum estágio do processo obtemos uma curva suave $(f^{(N)})$. A sequência $f, f^{(1)}, \dots, f^{(N)}$ é chamada **resolução canônica** de (f) e

$$(mult(f), mult(f^{(1)}), \dots, mult(f^{(N)}) = 1),$$

é chamada de **sequência de multiplicidade de** f.

A resolução canônica de uma singularidade é um processo que permite obter uma parametrização $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ para uma curva plana. De fato, no estágio final da resolução canônica encontramos uma curva suave em uma indeterminada que pode, a menos de mudança de coordenadas, ser assumida como Y. Como vimos, também por mudança de coordenadas, podemos assumir que a expressão da curva suave seja regular em Y e pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, podemos considerar que após o processo de resolução canônica, a expressão obtida seja da forma $Y + g(X)$ que admite como parametrização $(t, -g(t))$.

Se procedermos as operações inversas realizadas no processo da resolução canônica, então obteremos uma parametrização para a expressão inicial de f da forma $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

Para ilustrar o que foi exposto acima apresentamos um exemplo.

Exemplo 3.6. *Vamos obter uma parametrização através do processo de resolução canônica* *para a curva plana*

$$f(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7.$$

Note que f está preparada a Weierstrass. Assim, f é regular em Y de ordem 4 e nesse caso devemos usar σ para realizar a primeira transformada estrita. Assim,

$$f^{(1)} = \frac{f(X_1, X_1Y_1)}{X_1^4} = X_1^2 - X_1^3 - 2X_1Y_1^2 - 4X_1^2Y_1 + Y_1^4.$$

Como $f^{(1)}$ é regular em X_1 de ordem 2, nesse caso devemos usar τ, o que nos dá

$$f^{(2)} = \frac{f(X_2Y_2, Y_2)}{Y_2^2} = (Y_2 - X_2)^2 - 4X_2^2Y_2 - X_2^3Y_2.$$

Uma vez que $f^{(2)}$ não é regular em nenhuma variável, devemos torná-la regular em uma variável para continuar o processo. Para tanto, considere o automorfismo

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}[[X_2, Y_2]] & \to & \mathbb{K}[[X_2, Y_2]] \\ & X_2 & \mapsto & X_2 \\ & Y_2 & \mapsto & Y_2 + X_2. \end{array}$$

Assim,

$$\overline{f^{(2)}} = \phi(f^{(2)}) = Y_2^2 - 4X_2^2Y_2 - 4X_2^3 - X_2^3Y_2 - X_2^4.$$

Agora podemos continuar o processo com $\overline{f^{(2)}}$, no lugar de $f^{(2)}$ e temos

$$f^{(3)} = \frac{\overline{f^{(2)}}(X_3, X_3Y_3)}{X_3^2} = -4X_3 + Y_3^2 - X_3^2 - 4X_3Y_3 - X_3^2Y_3.$$

Observe que $f^{(3)}$ é regular e o processo finaliza. Agora devemos encontrar uma parametrização para $f^{(3)}$. Neste caso, vamos calcular uma parametrização mais diretamente.

Fazendo $f^{(3)} = 0$, temos

$$-4X_3 + Y_3^2 - X_3^2 - 4X_3Y_3 - X_3^2Y_3 = 0.$$

Assim,

$$X_3^2 + 4X_3 - \frac{Y_3^2}{1+Y_3} = 0,$$

ou seja,

$$X_3 = -2 \pm (Y_3 + 2)\sqrt{\frac{1}{1+Y_3}}.$$

Como

$$\sqrt{\frac{1}{1+Y_3}} = 1 - \frac{Y_3}{2} + \frac{3Y_3^2}{8} - \frac{5Y_3^3}{16}\ldots,$$

temos que

$$X_3 = -2 \pm (2 + \frac{Y_3^2}{4} - \frac{Y_3^3}{4} + \ldots).$$

Como $f^{(3)}(0,0) = 0$ *devemos considerar* $X_3 = \frac{Y_3^2}{4} - \frac{Y_3^3}{4} + \ldots$. *Assim, uma parametrização para* $f^{(3)}$ *é*

$$\begin{cases} X_3 = \frac{1}{4}(t^2 - t^3 + \ldots) \\ Y_3 = t. \end{cases}$$

Para obter a parametrização da série $f^{(2)}$ *utilizamos o homomorfismo* σ, *ou seja,* $\sigma(X_2) = X_3$ *e* $\sigma(Y_2) = X_3Y_3$. *Assim, uma parametrização para* $\overline{f^{(2)}}$ *é*

$$\begin{cases} X_2 = \frac{1}{4}(t^2 - t^3 + \ldots) \\ Y_2 = \frac{1}{4}(t^3 - t^4 + \ldots). \end{cases}$$

Agora devemos aplicar o automorfismo inverso de ϕ, *para encontrarmos uma parametrização para* $f^{(2)}$, *isto é,*

$$\begin{array}{rccc} \phi^{-1}: & \mathbb{K}[[X_2,Y_2]] & \rightarrow & \mathbb{K}[[X_2,Y_2]] \\ & X_2 & \mapsto & X_2 \\ & Y_2 & \mapsto & Y_2 - X_2. \end{array}$$

Logo, uma parametrização para $f^{(2)} = \phi^{-1}(\overline{f^{(2)}})$ *é*

$$\begin{cases} X_2 = \frac{1}{4}(t^2 - t^3 + \ldots) \\ Y_2 = \frac{1}{4}(-t^2 + 2t^3 + \ldots). \end{cases}$$

Agora podemos encontrar uma parametrização para $f^{(1)}$, *lembrando que neste caso,*

$\tau(X_1) = X_2Y_2$ e $\tau(Y_1) = Y_2$. Assim, para $f^{(1)}$ temos

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{16}(-t^4 + 3t^5 + \ldots) \\ Y_1 = \frac{1}{4}(-t^2 + 2t^3 + \ldots). \end{cases}$$

Finalmente podemos apresentar uma parametrização para f, lembrando que $\sigma(X) = X_1$ e $\sigma(Y) = X_1Y_1$, temos que

$$\begin{cases} X = \frac{1}{16}(-t^4 + 3t^5 + \ldots) \\ Y = \frac{1}{64}(t^6 - 5t^7 + \ldots). \end{cases}$$

é uma parametrização para f.

Observe que $4, 2, 2, 1$ é a sequência de multiplicidades que ocorreram na resolução canônica de f.

3.2 Parametrização em Característica Positiva

Nesta seção introduzimos uma forma especial de expressar uma parametrização de uma curva plana, quando a característica do corpo base é qualquer, tal parametrização será chamada de Parametrização de Hamburger-Noether. Para tanto considere uma parametrização $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$ e suponha $n = ord_t(x) \leq ord_t(y)$. Construiremos a parametrização de Hamburger-Noether a partir de $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$ por meio de um algoritmo constituído por meio de divisões sucessivas em $\mathbb{K}[[t]]$ como descrito a seguir.

Divida y por x e desconsidere do quociente o termo independente, obtendo uma série y_1 de ordem positiva. Repita o processo com y_1 em vez de y e x como divisor, desde que y_1 seja uma série de ordem maior ou igual a ordem de x. Pare caso contrário.

Note que apenas uma das seguintes afirmações abaixo podem ocorrer:

A) Existem $h > 0$ e $a_{0i} \in \mathbb{K}$ com $1 \leq i \leq h$ tais que

$$y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots + a_{0h}x^h + x^h z_1$$

com $1 \leq ord_t(z_1) < ord_t(x)$.

B) Existem $a_{0i} \in \mathbb{K}$ com $1 \leq i$, tais que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i}x^i.$$

No caso (A), repetimos o processo com (z_1, x) e novamente (A) ou (B) é obtido. O processo continua sempre que a condição (A) ocorre.

Note que quando $n = 1$, obtemos a condição (B). Assim, após um número finito de passos a condição (B) sempre ocorre, uma vez que as ordens das séries z_i são decrescentes.

Deste modo, obtemos uma expressão da forma:

$$\begin{cases} y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots + a_{0h}x^h + x^h z_1 \\ x = a_{12}z_1^2 + a_{13}z_1^3 + \ldots + a_{1h_1}z_1^{h_1} + z_1^{h_1}z_2 \\ \vdots \\ z_{r-1} = \displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} a_{ri}z_r^i, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{K}, z_i \in \mathbb{K}[[t]]$, com $1 \leq ord_t(z_r) < \ldots < ord_t(z_1) < ord_t(x) \leq ord_t(y)$.

Definição 3.7. *Uma parametrização de* ***Hamburger-Noether*** *de* $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$ *é um conjunto de expressões do tipo (3.1).*

Observação 3.8. *Note que dado uma parametrização de Hamburger-Noether sempre podemos recuperar uma representação paramétrica da curva, com parâmetro* z_r*, da forma*

$$\begin{cases} x = \varphi_1(z_r) \\ y = \varphi_2(z_r). \end{cases}$$

Algumas vezes, denotaremos uma parametrização de Hamburger-Noether pela expressão

$$z_{i-1} = \sum_i a_{ij} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1} \tag{3.2}$$

juntamente com as restrições necessárias para os índices i e para os coeficientes a_{ij}. Note que $z_{-1} = y$ e $z_0 = x$.

Proposição 3.9. *A parametrização de Hamburger-Noether de* $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$*, com* $ord_t(x) \leq ord_t(y)$ *é unicamente determinada pelas condições:*

i) $a_{ij} \in \mathbb{K}$*;*

ii) $z_i \in \mathbb{K}[[t]]$*;*

iii) $1 \leq ord_t(z_r) < \ldots < ord_t(z_1) < ord_t(x)$*. Em particular a parametrização de Hamburger-Noether não depende do parâmetro* t*.*

Demonstração: Para cada parametrização H do tipo (3.1), seja $L(H) = h + h_1 + \ldots + h_{r-1}$. Para toda curva plana (f) definimos $L(f) = min\{L(H)$, onde H é uma parametrização de Hamburger-Noether da curva $(f)\}$.

A prova será feita usando indução sobre $L(f)$. Se $L(f) = 0$, então existe uma parametrização de Hamburger-Noether H para (f) tal que $L(H) = h + h_1 + \ldots + h_{r-1} = 0$. Segue que $h = h_1 = \ldots = h_{r-1} = 0$. Logo, para essa parametrização, o caso (A) não ocorre, pois não existe $h > 0$. Assim, o caso (B) deve ocorrer, isto é, existem $a_{0i} \in \mathbb{K}$, com $1 \leq i \leq \infty$ tais que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} x^i.$$

Para outra parametrização de Hamburger-Noether H', a condição (A) ou (B) deve ocorrer.

Se a condição (A) ocorrer, temos

$$y = a'_{01}x + a'_{02}x^2 + \ldots + a'_{0h}x^h + x^h z_1.$$

Como H e H' são parametrizações de Hamburger-Noether da mesma curva, devemos ter

$$\sum_{i=1}^{h} a_{0i}x^i + \sum_{i>h}^{\infty} a_{0i}x^i = \sum_{i=1}^{h} a'_{0i}x^i + x^h z_1,$$

ou seja,

$$\sum_{i>h}^{\infty} a_{0i}x^i - x^h z_1 = \sum_{i=1}^{h}(a'_{0i} - a_{0i})x^i.$$

Observe que o lado direito da igualdade tem ordem, se for não nulo, menor ou igual a $h.ord_t(x)$. Por outro lado, o lado esquerdo tem ordem estritamente maior que $h.ord_t(x)$, o que é um absurdo.

Se a condição (B) ocorrer, suponha que $H \neq H'$ e denote por q o primeiro inteiro para o qual $a_{0q} \neq a'_{0q}$. Então para a parametrização H' temos que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a'_{0i}x^i.$$

Como antes, devemos ter

$$\sum_{i=1}^{q-1} a_{0i}x^i + \sum_{i\geq q}^{\infty} a_{0i}x^i = \sum_{i=1}^{q-1} a'_{0i}x^i + \sum_{i\geq q}^{\infty} a'_{0i}x^i$$

$$\sum_{i=1}^{q-1}(a_{0i} - a'_{0i})x^i = \sum_{i\geq q}^{\infty}(a_{0i} - a'_{0i})x^i$$

$$\sum_{i\geq q}^{\infty}(a_{0i} - a'_{0i})x^i = 0.$$

O que é um absurdo, pois $a_{0q} \neq a'_{0q}$. Assim, $H = H'$.

Agora, seja (f) uma curva tal que $L(f) = N > 0$ e suponha que o resultado é verdadeiro para toda curva (g) tal que $L(g) < N$.

Consideremos H uma parametrização de Hamburger-Noether para (f) que satisfaz $L(H) = N$ e seja H' uma outra parametrização de Hamburger-Noether para (f). Então $a_{01} = a'_{01}$, uma vez que eles são os termos independentes da série $\frac{y}{x}$.

Pelo modo que as parametrizações de Hamburger-Noether foram construídas temos que

$y = x(a_{01} + y_1)$, isto é, $y = xa_{01} + xy_1$, ou seja, $y_1 = \frac{y - xa_{01}}{x}$ e

$y = x(a'_{01} + y'_1)$, isto é, $y = xa'_{01} + xy'_1$, ou seja, $y'_1 = \frac{y - xa'_{01}}{x}$, então $y_1 = y'_1$.

Considere agora a curva que admite a parametrização (x, y_1) e sejam H_1 e H'_1 duas parametrizações de Hamburger-Noether para esta curva. Note que tais parametrizações foram obtidas de H e H' respectivamente, apenas removendo os termos iniciais. Assim, $L(H_1) = L(H) - 1 = N - 1 < N$ e por hipótese de indução temos que $H_1 = H'_1$. Como $a_{01} = a'_{01}$, temos $H = H'$. □

O exemplo abaixo ilustra como obter uma parametrização de Hamburger-Noether a partir de uma parametrização dada.

Exemplo 3.10. *Considere*

$$x(t) = 4t^4 + 4t^5 + t^6 + 32t^7 + 48t^8 + 24t^9 + 4t^{10} \quad e$$

$$y(t) = 4t^4 + 4t^5 + t^6 + 32t^7 + 48t^8 + 24t^9 + 68t^{10} + 160t^{11} + 160t^{12} + 1104t^{13} + 3092t^{14} + 3842t^{15}$$
$$+6656t^{16} + 15296t^{17} + 21696t^{18} + 17936t^{19} + 8960t^{20} + 2688t^{21} + 448t^{22} + 32t^{23}.$$

Inicialmente note que

$y = x(1 + y_1)$ *onde* $y_1 = 16t^6 + 24t^7 + 12t^8 + 130t^9 + 256t^{10} + 192t^{11} + 64t^{12} + 8t^{13}$.

Dividindo y_1 *por* x *obtemos* $y_1 = xy_2$, *onde* $y_2 = 4t^2 + 2t^3$.

Observe que $ord_t(y_2) < ord_t(x)$, *então denotamos* $z_1 = y_2$. *Agora repetimos o processo para* (z_1, x) *e obtemos* $x = z_1 w_1$, *onde* $w_1 = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 8t^5 + 8t^6 + 2t^7$. *Agora,* $w_1 = z_1(\frac{1}{4} + w_2)$, *onde* $w_2 = 2t^3 + t^4$. *Além disto,* $w_2 = z_1 w_3$ *com* $w_3 = \frac{1}{2}t$.

Observe que $ord_t(w_3) < ord_t(z_1)$, *então denotamos* $w_3 = z_2$.

No próximo passo repetimos o processo para (z_2, z_1), *obtendo* $z_1 = z_2 v_1$, *onde* $v_1 = 8t + 4t^2$. *Temos* $v_1 = z_2(16 + v_2)$, *com* $v_2 = 8t$. *Além disto,* $v_2 = 16z_2$.

Deste modo finalizamos o processo e obtemos a parametrização de Hamburger-Noether como segue.

Lembremos que $y = x(1 + y_1) = x(1 + xy_2) = x + x^2 y_2$. *Como* $y_2 = z_1$, *temos* $y = x + x^2 z_1$. *Além disto,* $x = z_1 w_1 = z_1 z_1(\frac{1}{4} + w_2) = \frac{1}{4}z_1^2 + z_1^3 w_3$, *pois* $w_2 = z_1 w_3$. *Como* $w_3 = z_2$, *temos que* $x = \frac{1}{4}z_1^2 + z_1^3 z_2$.

Finalmente, temos $z_1 = z_2 v_1 = z_2 z_2(v_2 + 16) = z_2^2(16z_2 + 16) = 16z_2^2 + 16z_2^3$. *Portanto, uma parametrização de Hamburger-Noether obtida a partir de* $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$ *é*

$$\begin{cases} y = x + x^2 z_1 \\ x = \frac{1}{4}z_1^2 + z_1^3 z_2 \\ z_1 = 16z_2^2 + 16z_2^3. \end{cases}$$

O próximo resultado possibilita obtermos uma parametrização de Hamburger-Noether da transformada estrita de uma curva, a partir de uma parametrização da curva original.

Proposição 3.11. *Seja* $z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}$ *uma parametrização de Hamburger-Noether com* $0 \leq j \leq r$ *como em (3.2), obtida de uma parametrização* $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$ *de uma curva* (f). *Uma parametrização de Hamburger-Noether da transformada estrita* $f^{(1)}$ *é obtida como segue.*

i) Se $h > 1$, então

$$y_1 = a_{02}x + \ldots + a_{0h}x^{h-1} + x^{h-1}z_1$$
$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji}z_j^i + z_j^{h_j}z_{j+1},$$

com $1 \leq j \leq r$.

ii) Se $h = 1$, então

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji}z_j^i + z_j^{h_j}z_{j+1},$$

com $1 \leq j \leq r$.

Demonstração: Seja $(x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t))$ uma parametrização da curva (f). Sabemos que

$$f^{(1)}\left(x, \frac{y}{x}\right) = \frac{f(x,y)}{x^n} = 0,$$

onde $n = ord_t(x) = mult(f(X,Y))$, ou seja, $(x, \frac{y}{x})$ é uma parametrização para $(f^{(1)})$.

Pelo algoritmo apresentado no início desta seção, devemos retirar o termo independente na divisão $\frac{y}{x}$. Assim, se $y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots + a_{0h}x^h + x^h z_1$, então

$$y_1 = \frac{y}{x} - a_{01} = a_{02}x + \ldots + a_{0h}x^{h-1} + x^{h-1}z_1.$$

Continuando com o algoritmo, quando $h > 1$, obtemos uma parametrização de Hamburger-Noether de $f^{(1)}$ da seguinte forma:

$$y_1 = a_{02}x + \ldots + a_{0h}x^{h-1} + x^{h-1}z_1$$
$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji}z_j^i + z_j^{h_j}z_{j+1},$$

com $1 \leq j \leq r$.

Agora quando $h = 1$, temos $y = a_{01}x + xz_1$ e $y_1 = \frac{y - a_{01}x}{x} = z_1$, ou seja, $y_1 = z_1$. Logo, obtemos uma pametrização de Hamburger-Noether de $f^{(1)}$ a partir da parametrização

$(x = z_0, y_1 = z_1)$. Aplicando o algoritmo obtemos:

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1},$$

com $i \leq j \leq r$.

□

A próxima proposição indica que a parametrização de Hamburger-Noether permite obter facilmente as multiplicidades que ocorrem no processo da resolução canônica de uma curva algebróide plana irredutível (f), ou seja, a sequência de multiplicidades de (f).

Proposição 3.12. *Seja*

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}$$

com $0 \leq j \leq r$, *uma parametrização de Hamburger-Noether de uma curva* (f) *e* $n_j = ord_t(z_j)$ *para* $0 \leq j \leq r$, *então:*

i) as diferentes multiplicidades que ocorrem na resolução canônica de (f) *são exatamente os inteiros* n_j *com* $0 \leq j \leq r$;

ii) cada n_j *ocorre exatamente* h_j *vezes na resolução canônica com* $0 \leq j \leq r, h_0 = h$ *e* $h_r = \infty$;

Demonstração: Vamos provar (i) e (ii) simultaneamente por indução sobre o número mínimo $M(f)$ de transformações quadráticas que são necessárias para tornar f suave. Como vimos, podemos supor $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ um polinômio de Weierstrass irredutível regular em Y de ordem $n = mult(f)$.

Se $M(f) = 0$, então f é suave e

$$mult(f^{(0)}) = 1 = n_0 = ord_t(z_0) = ord_t(x),$$

pois $ord_t(x) = n = 1$.

Se $M(f) = 1$, então $f^{(1)}$ é suave. Denotando $(x_1, y_1 = \frac{y}{x})$ uma parametrização para $f^{(1)}$, temos que $ord_t(x_1) = ord_t(x) < ord_t(y)$, ou seja, a multiplicidade de $f^{(1)}$ deve ocorrer em y_1. Logo $ord_t(x_1) > ord_t(y_1) = 1$, deste modo, é necessário que os termos em y_1 que contém x_1 não existam, isso só ocorre se $h = 1$, assim $y_1 = z_1$. Logo,

$$mult(f) = ord_t(x) = ord_t(z_0) = n_0 \quad e$$

$$mult(f^{(1)}) = ord_t(y_1) = ord_t(z_1) = n_1.$$

Note que n_0 ocorre $1 = h_0 = h$ vez e que $n_1 = ord_t(z_1)$ ocorre infinitas vezes, pois $mult(f^{(i)}) = 1$ para todo $i \geq 1$.

Seja agora (f) uma curva tal que $M(f) > 1$ e assuma que o resultado é válido para todas as curvas tais que o número mínimo de transformações quadráticas necessárias para torná-las suave é $M < M(f)$. Se (f) admite uma parametrização de Hamburger-Noether da forma f

$$\begin{cases} y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots + a_{0h}x^h + x^h z_1 \\ z_{j-1} = \sum\limits_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}, \end{cases}$$

com $1 \leq j \leq r$, então pela proposição anterior, obtemos uma parametrização de Hamburger-Noether para $f^{(1)}$ da forma

$$\begin{cases} y_1 = a_{02}x + \ldots + a_{0h}x^{h-1} + x^{h-1} z_1 \\ z_{j-1} = \sum\limits_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}, \end{cases}$$

com $1 \leq j \leq r$.

Como $M(f^{(1)}) = M - 1$, então por hipótese de indução temos que as diferentes multiplicidades são exatamente

$$\begin{array}{llll} n_0 = ord_t(z_0) & \text{ocorrendo} & h-1 & \text{vezes} \\ n_1 = ord_t(z_1) & \text{ocorrendo} & h_1 & \text{vezes} \\ & \vdots & & \\ n_r = ord_t(z_r) & \text{ocorrendo} & \infty & \text{vezes.} \end{array}$$

Como $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(M)}$ corresponde à resolução canônica de f, que está preparada a Weierstrass, temos que

$$mult(f) = ord_t(x) = ord_t(z_0) = n_0,$$

ou seja, $n_0 = ord_t(z_0)$ ocorre h vezes. O que prova o resultado.

$\square$

Exemplo 3.13. *Seja a curva (f) apresentada no Exemplo 3.10 cuja parametrização de Hamburger-Noether é dada por*

$$\begin{cases} y = x + x^2 z_1 \\ x = \frac{1}{4} z_1^2 + z_1^3 z_2 \\ z_1 = 16 z_2^2 + 16 z_2^3, \end{cases}$$

onde $z_1 = 4t^2 + 2t^3$ e $z_2 = \frac{1}{2}t$. Note que $h_0 = h = 2$ e $h_1 = 3$.

Vamos calcular as parametrizações de Hamburger-Noether das transformações estritas de (f) e sua sequência de multiplicidades.

Como vimos, para $f^{(1)}$ temos a parametrização de Hamburger-Noether

$$\begin{cases} y_1 = x z_1 \\ x = \frac{1}{4} z_1^2 + z_1^3 z_2 \\ z_1 = 16 z_2^2 + 16 z_2^3 \end{cases}$$

e neste caso temos $mult(f^{(1)}) = min\{mult_t(y_1), mult_t(x)\} = mult_t(x) = 4$.

Para $f^{(2)}$ temos a parametrização de Hamburger-Noether

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}z_1^2 + z_1^3 z_2 \\ z_1 = 16z_2^2 + 16z_2^3 \end{cases}$$

e neste caso temos $mult(f^{(2)}) = min\{mult_t(x), mult_t(z_1)\} = mult_t(z_1) = 2$.

Agora para $f^{(3)}$ temos a parametrização de Hamburger-Noether

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{4}z_1 + z_1^2 z_2 \\ z_1 = 16z_2^2 + 16z_2^3 \end{cases}$$

e temos $mult(f^{(3)}) = min\{mult_t(x_2), mult_t(z_1)\} = 2$.

Para $f^{(4)}$ temos a parametrização de Hamburger-Noether

$$\begin{cases} x_3 = z_1 z_2 \\ z_1 = 16z_2^2 + 16z_2^3 \end{cases}$$

e $mult(f^{(4)}) = min\{mult_t(x_3), mult_t(z_1)\} = mult_t(z_1) = 2$.

Agora para $f^{(5)}$ temos a parametrização de Hamburger-Noether

$$z_1 = 16z_2^2 + 16z_2^3$$

e $mult(f^{(5)}) = mult_t(z_2) = 1$.

O processo está finalizado, uma vez que $(f^{(5)})$ é suave. Assim,

$$mult(f^{(0)}) = mult(f^{(1)}) = 4, mult(f^{(2)}) = mult(f^{(3)}) = mult(f^{(4)}) = 2 \quad e \quad mult(f^{(5)}) = 1$$

O que ilustra a Proposição 3.12.

Temos assim, o seguinte corolário.

Corolário 3.14. *Sejam (f) e $(\overline{f})$ curvas com parametrizações de Hamburger-Noether dadas,* *respectivamente, por*

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}, \quad com \quad 0 \le j \le r \quad e$$

$$\overline{z_{j-1}} = \sum_i \overline{a_{ji}}.\overline{z_j}^i + \overline{z_j}^{\overline{h_j}} \overline{z_{j+1}}, \quad com \quad 0 \le j \le \overline{r}.$$

Então, (f) *e* $(\overline{f})$*, possuem a mesma sequência de multiplicidades se, e somente se,* $r = \overline{r}, h_j = \overline{h_j}$ *e* $n_j = \overline{n_j}$ *com* $0 \le j \le r$.

Capítulo 4

Equisingularidade

Neste último capítulo vamos utilizar os conceitos anteriormente apresentados para estudar uma importante relação de equivalência entre curvas planas, chamada **equisingularidade**. Tal noção foi introduzida por Zariski na década 1930 e revela importantes informações sobre as curvas planas. Em particular, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a noção de equisingularidade coincide com a equivalência topológica das curvas, para mais detalhes recomendamos [6].

Para explorar a noção de equinsigularidade de curvas planas, necessitamos do conceito de **semigrupo de valores**, o qual abordamos na segunda seção deste capítulo. Antes porém vejamos o conceito de índice de interseção entre duas curvas.

4.1 Índice de Interseção

Definição 4.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{M}$. O **índice de interseção** de f e g é o inteiro (incluindo ∞)*

$$I(f, g) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}.$$

Note que a definição anterior é equivalente a $I(f, g) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle}$ onde g' é o representante de $g \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ em $\mathcal{O}_f$.

O índice de interseção satisfaz determinadas propriedades que reunimos no próximo resultado.

Teorema 4.2. *Sejam $f, g, h \in \mathbb{M}$, ϕ um automorfismo de $\mathbb{K}[[X, Y]]$, u e v unidades em $\mathbb{K}[[X, Y]]$. O índice de interseção satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $I(f, g) = I(g, f)$;

ii) $I(\phi(f), \phi(g)) = I(uf, vg) = I(f, g)$;

iii) $I(f, g) < \infty$ *se, e somente se,* f *e* g *são relativamente primos em* $\mathbb{K}[[X, Y]]$;

iv) $I(f, gh) = I(f, g) + I(f, h)$;

v) $I(f, g) = 1$ *se, e somente se,* (f) *e* (g) *são suaves e seus cones tangentes são distintos;*

vi) $I(f, g + hf) = I(f, g)$.

Demonstração:

i) Este item é imediato, uma vez que

$$I(f, g) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle g, f \rangle} = I(g, f).$$

ii) Dado ϕ um automorfismo de $\mathbb{K}[[X, Y]]$ temos, pelo teorema da correspondência de ideais, que

$$\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} \approx \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle \phi(f), \phi(g) \rangle} .$$

Assim,

$$I(f, g) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle \phi(f), \phi(g) \rangle} = I(\phi(f), \phi(g)).$$

Além disso, note que $\langle uf, vg \rangle = \langle f, g \rangle$ onde u e v são unidades de $\mathbb{K}[[X, Y]]$ e portanto,

$$I(f, g) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle uf, vg \rangle} = I(uf, vg).$$

iii) Se f e g possuem um fator não inversível h comum, ou seja, $f = ph$ e $g = qh$

com $h, p, q \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, então $\langle f, g\rangle \subset \langle h\rangle$ e $\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle h\rangle} \subset \frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle}$. Assim,

$$I(f,g) = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle} \geq dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle h\rangle} = \infty.$$

Reciprocamente, pelo item ii), podemos assumir, sem perda de generalidade que $f, g \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ são polinômios de Weierstrass. Como f e g são primos entre si em $\mathbb{K}[[X]][Y]$, pelo Lema de Gauss, o mesmo ocorre em $\mathbb{K}((X))[Y]$ que é um domínio de ideais principais. Assim, existem $r, s \in \mathbb{K}((X))[Y]$ tais que $rf + sg = 1$.

Eliminando os denominadores, segue que existem $p, q \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ e $a \in \mathbb{K}[[X]]$ tais que $pf + qg = a$, ou seja, $\langle f, g\rangle = \langle f, g, a\rangle$.

Se $n = min\{deg_Y(f), deg_Y(g)\}$, então

$$dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle} = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f,g,a\rangle} \leq dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X]]y^{n-1} + \mathbb{K}[[X]]y^{n-2} + \ldots + \mathbb{K}[[X]]}{\langle a\rangle} \leq nm < \infty,$$

onde $m = mult(a(x))$.

iv) Se f e g não são relativamente primos, então pelo item (i) temos que $I(f,g) = \infty$ e $I(f, gh) = \infty$. Assim, $I(f, gh) = I(f,g) + I(f,h) = \infty$.

Suponha agora que f e g são relativamente primos, isto é,

$$I(f,g) = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle} = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} < \infty.$$

É suficiente mostrar que a sequência de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais

$$0 \to \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h'\rangle} \xrightarrow{\psi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h'\rangle} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} \to 0.$$

é exata, onde a aplicação φ é induzida pela projeção canônica $\tilde{\varphi}$.

$$\tilde{\varphi}: \quad \mathcal{O}_f \quad \to \quad \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} \quad .$$

Considere

$$\mathcal{O}_f \xrightarrow{\overline{\varphi}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h' \rangle} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle}.$$

Denotando $\phi = \varphi \circ \overline{\varphi}$ temos, $\frac{Ker(\phi)}{Ker(\overline{\varphi})} \approx Ker(\varphi)$, ou seja, $Ker(\varphi) \approx \frac{\langle g' \rangle}{\langle g'h' \rangle}$.

A aplicação ψ é definida por $\psi(z'') = \psi(z' + \langle h' \rangle) = z'g' + \langle g'h' \rangle$ onde $z', g', h' \in \mathcal{O}_f$ e $z'' \in \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h' \rangle}$, é claramente um homomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Vamos mostrar que ψ é injetora. Suponha que $\psi(z'') = 0$, então

$$0 = \psi(z'') = g'z' + \langle g'h' \rangle,$$

ou seja, $g'z' \in \langle g'h' \rangle$. Deste modo, existe $\alpha \in \mathcal{O}_f$ tal que $g'z' = \alpha(g'h')$, ou seja, $g'(z' - \alpha h') = 0$.

Como $z', h', g' \in \mathcal{O}_f$, temos que $z' = z + \langle f \rangle, h' = h + \langle f \rangle$ e $g' = g + \langle f \rangle$. Então,

$$(g + \langle f \rangle)\left((z + \langle f \rangle) - (\alpha h + \langle f \rangle)\right) \in \langle f \rangle,$$

isto é, $g(z - \alpha h) \in \langle f \rangle$. Assim, existe $\beta \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ tal que $g(z - \alpha h) = \beta f$.

Como supomos que f e g são relativamente primos temos que f divide $(z - \alpha h)$, ou seja, $z - \alpha h \in \langle f \rangle$. Então, $z' - \alpha' h' = 0$, isto é, $z' = \alpha' h' \in \langle h' \rangle$ e deste modo, $z'' = z' + \langle h' \rangle = 0 + \langle h' \rangle$. Portanto ψ é injetora.

Para concluir a prova, observe que $Im(\psi) = \frac{\langle g' \rangle}{\langle g'h' \rangle} = Ker(\varphi)$. O que mostra que a sequência é exata. Logo,

$$\frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h'\rangle} \approx \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} \times \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h'\rangle} \approx \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} \oplus \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h'\rangle}$$

e

$$dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h'\rangle} = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} + dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathcal{O}_f}{\langle h'\rangle}.$$

Assim, $I(f, gh) = I(f, g) + I(f, h)$, como queríamos.

v) Suponha que f e g são suaves e seus cones tangentes são distintos. Então, após uma mudança de coordenadas que em virtude do item ii) não altera o índice de interseção, podemos assumir que $f = X + f_1$ e $g = Y + g_1$, onde $f_1, g_1 \in \mathbb{M}^2$. Podemos então escrever $f = Xu + Yf_2$ e $g = Yv + Xg_2$, onde u, v são unidades e $f_2, g_2 \in \mathbb{M}$.

Observe que

$$Y(v - u^{-1}g_2f_2) = Yv - Yu^{-1}g_2f_2 = Yv - u^{-1}g_2(f - Xu)$$

$$= Yv + Xg_2 - u^{-1}g_2f = g - u^{-1}g_2f \in \langle f, g\rangle.$$

Como $(v-u^{-1}g_2f_2)(0,0) = v(0,0) \neq 0$, segue que $v-u^{-1}g_2f_2$ é unidade e portanto $Y \in \langle f, g\rangle$. De forma similar mostra-se que $X \in \langle f, g\rangle$.

Então segue que $\langle f, g\rangle = \langle X, Y\rangle$, e portanto

$$I(f, g) = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g\rangle} = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle X, Y\rangle} = 1.$$

Por outro lado, suponha que $mult(f) \geq 2$ ou $mult(g) \geq 2$, ou ainda, que (f) e (g) sejam suaves com reta tangente em comum. Após uma mudança de coordenadas, podemos supor que $f = Yf_1 + f_2$ e $g = Yg_1 + g_2$ com $f_2, g_2 \in \mathbb{M}^2$ e $f_1, g_1 \in \mathbb{K}[[X, Y]]$. Logo

$\langle f, g\rangle \subset \langle Y\rangle + \mathbb{M}^2$ e portanto,

$$dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle} \geq dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle Y\rangle + \mathbb{M}^2} = dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[[X]]}{\langle X^2\rangle} = 2.$$

Assim, $I(f, g) \geq 2$.

vi) A prova segue direto da definição de índice de interseção, uma vez que $\langle f, g\rangle = \langle f, g + hf\rangle$.

□

Proposição 4.3. *Sejam $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível com $deg_Y(f) = n$ e $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, uma parametrização da curva (f). A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} H_\varphi: & \mathbb{K}[[X,Y]] & \rightarrow & \mathbb{K}[[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]] \\ & g & \mapsto & g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{K}$-álgebras com $ker(H_\varphi) = \langle f\rangle$.

Demonstração: H_φ é claramente um homomorfismo sobrejetor e $\langle f\rangle \subset Ker(H_\varphi)$.

Por outro lado, seja $g \in Ker(H_\varphi)$. Se dividirmos g por f, podemos escrever $g = qf + r$, onde $q \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ e $r \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ com $deg_Y(r) < n$. Como $g, f \in Ker(H_\varphi)$ temos que $r \in Ker(H_\varphi)$.

Se $r = 0$, então $g = qf \in \langle f\rangle$ e o resultado está provado. Se $r \neq 0$, então seja $s = mdc(f, r) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ com $deg_Y(s) \leq deg_Y(r) < n$. Deste modo, existem $a, b \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ tais que $s = af + br \in Ker(H_\varphi)$, ou seja, $s(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$, isto é, s não é unidade. Como $s \mid f$, temos $f = ps$ com $p \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ e $n = deg_Y(f) = deg_Y(p) + deg_Y(s) < deg_Y(p) + n$, ou seja, $deg_Y(p) > 0$, isto é, p não é unidade. Mas deste modo f seria redutível, uma contradição.

□

Definição 4.4. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ irredutível. Definimos a* ***valoração associada*** *a f de* *um elemento* $g \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ *como sendo*

$$v_f(g) = ord_t g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = ord_t(H_\varphi(g)),$$

onde $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ *é uma parametrização de* f*. Note que* $v_f(g) = \infty$ *sempre que* $g \in \langle f \rangle$*.*

Para o próximo teorema, usaremos um resultado de Álgebra Linear que omitiremos a demonstração por fugir dos objetivos deste trabalho.

Teorema 4.5. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*,* $L : V \to V$ *uma transformação linear injetiva e* W *um subespaço vetorial de* V*, tal que* $L(V) \subset W$*. Temos que*

i) $\frac{V}{W} \approx \frac{L(V)}{L(W)}$*;*

ii) Se $\frac{V}{W}$ *e* $\frac{V}{L(V)}$ *possuem dimensão finita, então*

$$dim_{\mathbb{K}} \frac{W}{L(W)} = dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{L(V)}.$$

Demonstração: Ver [1], Teorema 4.3. □

O conceito de valoração permite computar o índice de interseção de outro modo, como mostra o próximo resultado.

Teorema 4.6. *Sejam* f *e* g *pseudo-polinômios em* $\mathbb{K}[[X]][Y]$*, onde* $f = f_1 \ldots f_r$ *é uma decomposição de* f *em fatores irredutíveis, com* $f_i \neq f_j$ *para* $i \neq j$*. Então*

$$I(f,g) = \sum_{i=1}^{r} v_{f_i}(g).$$

Observe que se f *for irredutível, então* $I(f,g) = v_f(g)$*.*

Demonstração: Se f e g possuem componentes comuns, nada temos a provar pois os dois termos da igualdade acima são infinitos.

Suponha agora que f e g não possuem fatores comuns. Dos itens (ii) e (iv) do

Teorema 4.2, temos que

$$I(f,g) = I(f_1 \ldots f_r, g) = I(f_1,g) + I(f_2,g) + \ldots + I(f_r,g) = \sum_{i=1}^{r} I(f_i,g).$$

É suficiente mostrar que se f é irredutível, então $I(f,g) = v_f(g)$, onde $v_f(g) = ord_t g(\varphi(t),\psi(t))$ é a valoração de g com respeito a f e $(\varphi(t),\psi(t))$ é uma parametrização de f.

Considere a $\mathbb{K}$-aplicação linear,

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{K}[[t]] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ & h(t) & \mapsto & h(t).g(\varphi(t),\psi(t)). \end{array}$$

Como f não é uma componente de g, segue da Proposição 4.3 que $g(\varphi(t),\psi(t)) \neq 0$, pois $g \notin \langle f \rangle$. Logo, se $h(t).g(\varphi(t),\psi(t)) = 0$, temos que $h(t) = 0$ e portanto L é injetora.

Seja $W = A_\phi = \mathbb{K}[[\varphi(t),\psi(t)]]$ um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $V = \mathbb{K}[[t]]$. Note que $\mathcal{O}_f \approx A_\phi = \mathbb{K}[[\varphi(t),\psi(t)]]$ e que $dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{W} < \infty$.

Considere

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{K}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[\varphi(t),\psi(t)]] \\ & g(X,Y) & \mapsto & g(\varphi(t),\psi(t)). \end{array}$$

Claramente Ψ é uma transformação linear sobrejetora com $Ker(\Psi) = \langle f \rangle$. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo temos

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f \rangle} \approx \mathbb{K}[[\varphi(t),\psi(t)]] = A_\phi.$$

Observe que

$$\frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} \approx \frac{A_\phi}{A_\phi g(\varphi(t),\psi(t))} = \frac{W}{L(W)}$$

pois $\Psi(\langle g' \rangle) = \psi(\langle g + \langle f \rangle \rangle) = A_\varphi g(\varphi(t),\psi(t))$.

Por outro lado, temos

$$\frac{V}{L(V)} = \frac{\mathbb{K}[[t]]}{\langle g(\varphi(t), \psi(t))\rangle}.$$

Temos que

$$dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{L(V)} = mult_t(g(\varphi(t), \psi(t))) < \infty.$$

Assim, pelo teorema anterior, temos

$$I(f,g) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} = dim_{\mathbb{K}} \frac{W}{L(W)} = dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{L(V)} = mult_t(g(\varphi(t), \psi(t))) = v_f(g)$$

como queríamos.

□

O próximo lema indica que, a menos de mudança de coordenadas, podemos considerar que uma curva plana irredutível admite uma parametrização um pouco mais específica.

Lema 4.7. *Seja (f) uma curva plana irredutível de multiplicidade n, então (f) é equivalente a uma curva que admite uma parametrização da forma*

$$(at^n + \ldots, bt^m + \ldots)$$

com $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $n < m$ e $n \nmid m$.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que (f) seja dada por um polinômio de Weierstrass da forma

$$Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \in \mathbb{K}[[X]][Y]$$

e que $(\varphi_1(t) = \alpha t^n + \ldots, \varphi_2(t) = \beta t^i + \ldots)$, com $n \leq i$ e $\alpha, \beta \neq 0$.

Se $ord_t(\varphi_2(t)) = kn$, então consideramos o automorfismo

$$\begin{array}{rlcl} \Psi: & \mathbb{K}[[X,Y]] & \to & \mathbb{K}[[X,Y]] \\ & X & \mapsto & X \\ & Y & \mapsto & Y - \frac{\beta}{\alpha^n}X^k. \end{array}$$

Repetindo o argumento, se necessário temos que (f) é equivalente a uma curva que admite uma parametrização da forma $(at^n + \ldots, bt^m + \ldots)$ com $n < m$ e $n \nmid m$.

$\square$

O teorema abaixo nos dá uma estimativa para o índice de interseção entre duas curvas, em termos de suas multiplicidades.

Teorema 4.8. *Sejam $f, g \in \mathbb{M}$, temos que $I(f,g) \geq mult(f)mult(g)$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, (f) e (g) não possuem tangentes em comum.*

Demonstração: Sejam $f = f_1 \ldots f_r$ e $g = g_1 \ldots g_s$ as respectivas decomposições de f e g em fatores irredutíveis.

Pelo Teorema 4.2, ítens (ii) e (iv), temos que

$$I(f,g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j).$$

Por outro lado, temos que

$$mult(f)mult(g) = \sum_{i=1}^{r} mult(f_i) \sum_{j=1}^{s} mult(g_j) = \sum_{i,j} mult(f_i)mult(g_j),$$

ou seja, devemos mostrar que

$$\sum_{i,j} I(f_i, g_j) \geq \sum_{i,j} mult(f_i)mult(g_j).$$

Note que é suficiente mostrar o resultado para f e g irredutíveis.

Pelo item (ii) do Teorema 4.2 podemos supor que f é um polinômio de Weierstrass

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X).$$

Seja $(\varphi_1(t) = \alpha t^n + \ldots, \varphi_2(t) = \beta t^m + \ldots)$ uma parametrização para (f). Pelo Lema 4.7, podemos considerar $m > n$. Como g é irredutível, pelo Lema da Unitangente 3.3 podemos escrever

$$g(X,Y) = (aX + bY)^k + g_{k+1}(X,Y) + \ldots,$$

onde $g_{m+1} \in \mathbb{M}^{m+1}$. Assim, pelo Teorema 4.8

$$I(f,g) = mult_t((a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t))^k + g_{k+1}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \ldots).$$

Basta analisar a multiplicidade de $(a\varphi_1(t)+b\varphi_2(t))^k$ pois, a multiplicidade das demais parcelas supera a multiplicidade da parcela inicial.

Como

$$(a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t))^k = (a(\alpha t^n + \ldots) + b(\beta t^m + \ldots))^k = (a\alpha t^n + b\beta t^m)^k + \ldots,$$

a menor ordem ocorre em $(a\alpha t^n + b\beta t^m)^k$, mas

$$(a\alpha t^n + b\beta t^m)^k = \sum_{s=0}^{k} (a\alpha)^{k-s}(b\beta)^s t^{n(k-s)+ms} + \ldots,$$

como $m > n$, temos que a menor ordem ocorre quando $s = 0$, isto é,

$$(a\alpha t^n + b\beta t^m)^k = (a\alpha)^k t^{nk} + \ldots$$

o que mostra que $I(f,g) \geq nk = mult(f)mult(g)$ com igualdade se, e somente se, $a \neq 0$, isto é, o cone tangente de (g) não é (Y), o que equivale a dizer que (f) e (g) possuem cones tangentes distintos. $\square$

Vamos apresentar uma fórmula obtida por Max Noether, que relaciona o índice de interseção de duas curvas com sua multiplicidade e a de suas transformadas estritas.

Seja $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n e regular em Y. Sabemos que f possui uma parametrização da forma $(\varphi(t),\psi(t))$ com $m = mult_t(\psi(t)) > n = mult_t(\varphi(t))$.

Pelo Lema 4.7, podemos, após uma mudança de coordenadas, assumir que $n \nmid m$. Considere $f^{(1)}(X_1,Y_1) = \sigma^*(f) = X_1^{-n} f(X_1, X_1Y_1)$. Pelo Teorema 3.2, item (iv), $f^{(1)}(X_1,Y_1)$ é regular em Y_1 de ordem n e

$$f^{(1)}\left(\varphi(t), \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right) = \frac{f(\varphi(t),\psi(t))}{(\varphi(t))^n} = 0,$$

segue que

$$\left(\varphi(t), \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)$$

é uma parametrização de $f^{(1)}$. Logo, para $g \in \mathbb{K}[[X,Y]]$, temos

$$I(\sigma^*(f), g) = mult_t\left(g\left(\varphi(t), \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)\right).$$

Proposição 4.9. *Sejam (f) e (g) duas curvas algebróides planas com f irredutível, então*

$$I(f,g) = mult(f)mult(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)}).$$

Demonstração: Denote por n e n' as multiplicidades de f e g, respectivamente. Após uma mudança de coordenadas, que não altera a multiplicidade de interseção, podemos assumir que f é regular em Y. Seja $(\varphi(t),\psi(t))$ uma parametrização para (f), então $\left(\varphi(t), \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)$ é uma parametrização para $f^{(1)}$, assim temos

$$I(f^{(1)}, g^{(1)}) = mult_t\left(g^{(1)}\left(\varphi(t), \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)\right) = mult_t\left(\frac{g\left(\varphi(t), \varphi(t)\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)}{(\varphi(t))^{n'}}\right) =$$

$= -n.n' + mult_t(g(\varphi(t), \psi(t))) = -n.n' + I(f, g)$, ou seja,

$$I(f, g) = n.n' + I(f^{(1)}, g^{(1)}) = mult(f)mult(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)}).$$

$\square$

Sejam (f) e (g) duas curvas algebróides planas irredutíveis com f e g relativamente primos. Existe uma sequência finita de N transformações do tipo τ ou σ que são necessárias para que $f^{(N)}$ e $g^{(N)}$ possuam tangentes distintas, pois caso contrário $I(f, g) = \infty$, ou seja, f e g não seriam relativamente primos. Esta observação, junto com a proposição anterior nos dá a clássica fórmula obtida por Max Noether.

Teorema 4.10. *Sejam (f) e (g) duas curvas algebróides planas irredutíveis. Com as notações anteriores, temos que*

$$I(f, g) = \sum_{i=0}^{N} mult(f^{(i)})mult(g^{(i)}),$$

onde $f^{(0)} = f$ e $g^{(0)} = g$.

Sejam (f) e (g) duas curvas planas irredutíveis com parametrizações de Hamburger-Noether dadas, respectivamente, por

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji}z_j^i + z_j^{h_j}z_{j+1}, \quad \text{com} \quad 0 \leq j \leq r \quad e$$

$$z'_{j-1} = \sum_i a'_{ji}(z'_j)^i + (z'_j)^{h'_j}z'_{j+1}, \quad \text{com} \quad 0 \leq j \leq r'. \; .$$

Considere s o maior inteiro para o qual $h_0 = h'_0, h_1 = h'_1, \ldots, h_{s-1} = h'_{s-1}$ e $a_{jk} = a'_{jk}$ para $j < s$ e $k \leq h_j$. Seja i o menor índice tal que $a_{si} \neq a'_{si}$. Note que $i \leq h_s + 1$ e $i \leq h'_s + 1$.

Note que o inteiro $N = h + h_1 + \ldots + h_{s-1} + i - 1$ indica o número de transformações quadráticas que mantém as curvas com tangentes comuns.

Proposição 4.11. *Mantendo as notações anteriores, defina* $S = \sum_{j=0}^{s-1} h_j n_j n_j^{'}$, *onde* $n_j = ord_t(z_j)$ *e* $n_j^{'} = ord_t(z_j^{'})$.

i) Se $i \leq h_s$ *e* $i \leq h_s^{'}$, *então* $I(f,g) = S + i n_s n_s^{'}$.

ii) Se $i = h_s^{'} + 1$, *então* $I(f,g) = S + h_s n_s n_s^{'} + n_{s+1}^{'} n_s$.

iii) Se $i = h_s + 1$, *então* $I(f,g) = S + h_s^{'} n_s^{'} n_s + n_{s+1} n_s^{'}$.

Demonstração: Lembremos que pela fórmula de Max Noether temos que

$$I(f,g) = \sum_{i=0}^{N+1} mult(f^{(i)}) mult(g^{(i)}),$$

onde $N = h + h_1 + \ldots + h_{s-1} + i - 1$.

Temos que as diferentes multiplicidades que ocorrem nas transformações quadráticas de (f) e (g) de modo a manter as curvas com mesmas tangentes são $n_0, n_1, \ldots, n_s$ e $n_0^{'}, n_1^{'}, ..., n_s^{'}$ com os n_j repetido h_j vezes e os $n_j^{'}$ repetido $h_j^{'}$ vezes. Por hipótese temos que $h_j = h_j^{'}$ e $a_{jk} = a_{jk}^{'}$ quando $j < s$ e $k \leq h_j$.

Assim as multiplicidades n_j e $n_j^{'}$ ocorrem $h_j = h_j^{'}$ vezes. Logo,

$$I(f,g) = h_0 n_0 n_0^{'} + \ldots + h_{s-1} n_{s-1} n_{s-1}^{'} + \sum_{l=1}^{i} mult(f^{(H+l)}) mult(g^{(H+l)})$$

$$= S + \sum_{l=1}^{i} mult(f^{(H+l)}) mult(g^{(H+l)}),$$

onde $H = h + h_1 + \ldots + h_{s-1}$.

i) Sabemos que as multiplicidades n_s e $n_s^{'}$, devem ocorrer respectivamente h_s e $h_s^{'}$ vezes. Se $i \leq h_s$ e $i \leq h_s^{'}$, então como $N = h + h_1 + \ldots + h_{s-1} + i - 1$ é a quantidade de transformações quadráticas sob (f) e (g) para manter as curvas com mesma tangente, então

$N+1$ é a quantidade de explosões necessárias para obtermos curvas com tangentes distintas. Assim as multiplicidades n_s e $n_s^{'}$ devem ocorrer i vezes. Portanto,

$$I(f,g) = S + in_s n_s^{'}.$$

ii) Como observamos, temos

$$I(f,g) = S + \sum_{l=1}^{i} mult(f^{(H+l)}) mult(g^{(H+l)}).$$

Note que a multiplicidade $n_s^{'}$ ocorre $h_s^{'}$ vezes na resolução canônica de (g) e são necessárias $N+1$ explosões para obtermos curvas com tangentes distintas, ou seja, a multiplicidade n_s deve ocorrer $h_s^{'}+1$ vezes. Assim,

$$I(f,g) = S + \sum_{l=1}^{i} mult(f^{(H+l)}) mult(g^{(H+l)}) = S + h_s^{'} n_s n_s^{'} + n_s n_{s+1}^{'}.$$

iii) Análogo ao caso (ii), basta observar que nesse caso a multiplicidade $n_s^{'}$ deve ocorrer h_s+1 vezes e assim obtemos

$$I(f,g) = S + h_s n_s n_s^{'} + n_{s+1} n_s^{'}.$$

□

4.2 Semigrupo de Valores

Iniciamos esta seção com a definição de semigrupo numérico.

Definição 4.12. *Um subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{N}$ é chamado de* ***semigrupo*** *ou* ***monóide*** *numérico se possui as seguintes propriedades:*

i) $0 \in \Gamma$;

ii) $\alpha + \beta \in \Gamma$ *para todo* $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Exemplo 4.13. *Dados inteiros* $0 < v_0 < \ldots < v_r$, *o conjunto* $\Gamma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_r \rangle = \{a_0 v_0 + \ldots + a_r v_r; a_i \in \mathbb{N}\}$ *é um semigrupo, que chamamos semigrupo gerado por* $v_0, v_1, \ldots, v_r$.

A próxima proposição mostra que todo semigrupo de $\mathbb{N}$ admite um conjunto finito de geradores.

Proposição 4.14. *Seja* $\Gamma \subset \mathbb{N}$ *um semigrupo, existe um subconjunto* $\{v_0, v_1, \ldots, v_g\} \subset \Gamma$ *com* $0 < v_0 < v_1 < \ldots < v_g$ *e* $g < v_0$ *tal que* $\Gamma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_g \rangle$.

Demonstração: Considere a sequência

$$\begin{array}{lll} v_0 = min & \Gamma \setminus \{0\} \\ v_1 = min & \Gamma \setminus \langle v_0 \rangle \\ v_2 = min & \Gamma \setminus \langle v_0, v_1 \rangle \\ \vdots \ = & \vdots \\ v_i = min & \Gamma \setminus \langle v_0, v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle \\ \vdots \ = & \vdots \end{array}$$

Dados v_k e v_j como acima com $k > j$, temos que $v_k \not\equiv v_j \mod v_0$.

De fato, se $v_k \equiv v_j \mod v_0$, então $v_k - v_j = \alpha v_0$ com $\alpha \in \mathbb{N}$. Assim $v_k = v_j + \alpha v_0$ e $v_k \in \langle v_0, v_j \rangle \subset \langle v_0, v_1, \ldots, v_j \rangle$. Absurdo, pois $v_k = min \ \ \Gamma \setminus \langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle$.

Segue assim que a sequência acima estaciona para algum g, isto é, $\Gamma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_g \rangle$. Como vimos, dois geradores nunca são côngruos entre si modulo v_0. Assim, $g < v_0$. □

Observação 4.15. *i) O natural* v_0 *definido na proposição anterior é chamado de* ***multiplicidade do semigrupo*** Γ*;*

ii) O conjunto de geradores $\{v_0, v_1, \ldots, v_g\}$ *dado no resultado anterior é chamado de* ***sistema mínimo de geradores*** *de* Γ.

Considere uma curva (f) dada parametricamente por

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

com $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{K}[[t]]$.

Podemos associar à curva acima um semigrupo Γ_φ (ou $S(t)$), chamado **semigrupo de valores** definido por:

$$\Gamma_\varphi = \{mult_t g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)); g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \neq 0; g \in \mathbb{K}[[X, Y]]\}.$$

Observação 4.16. *Γ_φ é de fato um semigrupo, pois temos que $0 = mult_t(1) \in \Gamma_\varphi$ e dados $\alpha, \beta \in \Gamma_\varphi$, então existem $g, h \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ tais que $mult_t(g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))) = \alpha$ e $mult_t(h(\varphi_1(t), \varphi_2(t))) = \beta$. Agora tome $gh \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ e observe que*

$$mult_t(gh(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = mult_t(g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).h(\varphi_1(t), \varphi_2(t))) = \alpha + \beta \in \Gamma_\varphi.$$

Agora introduzimos uma importante relação de equivalência entre curvas planas.

Definição 4.17. *Dizemos que duas curvas planas são **equisingulares** se elas possuem os mesmos semigrupos de valores.*

Como comentamos anteriormente, na introdução do capítulo, a equisingularidade é uma importante relação de equivalência entre curvas. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e consideramos as curvas planas como conjunto de zeros de $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ em $\mathbb{C}^2$, pode-se mostrar que a equisingularidade coincide com a equivalência topológica. O problema de classificação topológica de curvas planas foi resolvido por Brauner, Burau e Zariski na década de 1920. Um resultado que utilizaremos, no que segue, é que o corpo de frações de $\mathcal{O}_\varphi$ é $\mathbb{K}((t))$. A demonstração deste fato utiliza vários resultados de Álgebra Comutativa os quais fogem do nosso objetivo principal, para o leitor interessado recomendamos [4].

Mostramos anteriormente que $H_\varphi : \mathbb{K}[[X,Y]] \to A_\varphi = \mathbb{K}[[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]]$ é um homomorfismo sobrejetor, com $Ker(H_\varphi) = \langle f \rangle$, portanto

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle f \rangle} \approx A_\varphi.$$

Note que podemos escrever $\Gamma_\varphi = \{mult_t(g); g \in A_\varphi \setminus \{0\}\}$.

Como existem $g, h \in A_\varphi$, tais que $t = \frac{g}{h} \in \mathbb{K}((t))$, temos que $g = th$ e deste modo, $mult_t(h) = \alpha \in \Gamma$ e $mult_t(g) = mult_t(th) = mult_t(t) + mult_t(h) = 1 + \alpha \in \Gamma$. Assim, sempre existem dois elementos consecutivos no semigrupo associado a uma curva. Tal fato permite provar que o semigrupo Γ de curvas planas admite condutor c, isto é, existe um elemento $c \in \Gamma$, tal que $c - 1 \notin \Gamma$ e $c + \gamma \in \Gamma$ para todo $\gamma \in \mathbb{N}$. De fato, dado um semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_g \rangle$ que possui dois elementos consecutivos $\alpha, \alpha + 1 \in \Gamma$, temos que

$$0, \alpha + 1, 2(\alpha + 1), 3(\alpha + 1), \ldots, (\alpha - 1)(\alpha + 1) \in \Gamma.$$

Como $mdc(\alpha, \alpha + 1) = 1$, então os elementos acima formam um sistema completo de restos módulo α. Tome $\gamma \in \mathbb{N}$ com $\gamma \geq (\alpha-1)(\alpha+1)$, então $\gamma \equiv i(\alpha+1) \bmod \alpha$, com $0 \leq i \leq \alpha - 1$.

Logo, $\gamma - i(\alpha + 1) = k\alpha$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\gamma = k\alpha + i(\alpha + 1) \in \Gamma$.

Outro conceito importante que utilizaremos é o que apresentamos a seguir.

Definição 4.18. *Seja Γ um semigrupo com condutor c e $p \in \Gamma \setminus \{0\}$. A **sequência de Apéry** de Γ com respeito à p é definida por:*

i) $a_0 = 0$;

ii) $a_i = min\{\Gamma \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} (a_j + p\mathbb{N})\}$, *com* $1 \leq i \leq p - 1$.

A sequência de Apéry possui relevantes propriedades como mostra o resultado abaixo.

Proposição 4.19. *Seja Γ um semigrupo com condutor c e $a_0 < a_1 < \ldots < a_{p-1}$ a sequência de Apéry de Γ com respeito à $p \in \Gamma \setminus \{0\}$. Temos:*

i) $a_i \not\equiv a_j$ *mod* p*;*

ii) $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p-1}(a_i + p\mathbb{N})$*;*

iii) $\{p, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$ *é um conjunto de geradores de* Γ*;*

iv) $c = a_{p-1} - p + 1$*.*

Demonstração:

i) Suponha que $a_i \equiv a_j$ mod p e $a_i > a_j$. Assim, $a_i - a_j = kp$ onde $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_i = a_j + kp$. Absurdo, pois contradiz a condição ii) da definição de sequência de Apéry.

ii) Segue da definição da sequência de Apéry.

iii) Tome $\gamma \in \Gamma$, então existe um elemento $a_l < \gamma$ da sequência de Apéry tal que $\gamma \equiv a_l$ mod p. Deste modo $\gamma - a_l = kp$, ou seja, $\gamma = a_l + kp \in \langle a_l, p\rangle \subset \langle p, a_1, \ldots, a_{p-1}\rangle$. Como $\Gamma \supset \langle p, a_1, \ldots, a_{p-1}\rangle$, segue que $\{p, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$ gera Γ.

iv) Vamos mostrar que $c - 1 = a_{p-1} - p$. Observe que dado $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma \geq a_{p-1}$, temos que $\gamma = a_i + kp$ para algum a_i da sequência de Apéry de Γ com respeito à p. Como $\gamma \geq a_{p-1} \geq a_i$ devemos ter $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\gamma \in \Gamma$. Agora note que, $a_{p-1} - p \notin \Gamma$. De fato, se $a_{p-1} - p \in \Gamma$, então, $a_{p-1} - p \equiv a_{p-1}$ mod p e assim a_{p-1} não seria o elemento mínimo em sua classe residual módulo p.

Tome agora $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que, $a_{p-1} - p < \alpha < a_{p-1}$. Temos $\alpha \equiv a_i$ mod p, para $i < p-1$. Assim, $a_{p-1} - p < \alpha = a_i + \beta p$ com $\beta \in \mathbb{Z}$. Logo, $a_{p-1} < a_i + (\beta + 1)p$, ou seja, $\beta + 1 > 0$. Assim, $\beta \geq 0$ e $\alpha = a_i + \beta p \in \Gamma$. Mostrando que $a_{p-1} - p = c - 1$ e consequentemente $c = a_{p-1} - p + 1$.

$\square$

Quando p é a multiplicidade do semigrupo Γ, chamaremos a sequência de Apéry de Γ com respeito à p, simplesmente de sequência de Apéry de Γ.

Exemplo 4.20. *Considere o seguinte semigrupo de valores*

$$\Gamma = \langle 4, 6, 13 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, \ldots\},$$

a sequência de Apéry com respeito à $p = 6$ é:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= min\Gamma \setminus 6\mathbb{N} = 4 \\
a_2 &= min\Gamma \setminus (6\mathbb{N} \bigcup (4 + 6\mathbb{N})) = 8 \\
a_3 &= min\Gamma \setminus (6\mathbb{N} \bigcup (4 + 6\mathbb{N}) \bigcup (8 + 6\mathbb{N})) = 13 \\
a_4 &= min\Gamma \setminus (6\mathbb{N} \bigcup (4 + 6\mathbb{N}) \bigcup (8 + 6\mathbb{N}) \bigcup (13 + 6\mathbb{N})) = 17 \\
a_5 &= min\Gamma \setminus (6\mathbb{N} \bigcup (4 + 6\mathbb{N}) \bigcup (8 + 6\mathbb{N}) \bigcup (13 + 6\mathbb{N}) \bigcup (17 + 6\mathbb{N})) = 21.
\end{aligned}$$

Logo, $0 < 4 < 8 < 13 < 17 < 21$ é a sequência de Apéry com respeito à $p = 6$.

Se considerarmos $p = 4$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= min\Gamma \setminus 4\mathbb{N} = 6 \\
a_2 &= min\Gamma \setminus (4\mathbb{N} \bigcup (6 + 4\mathbb{N})) = 13 \\
a_3 &= min\Gamma \setminus (4\mathbb{N} \bigcup (6 + 4\mathbb{N}) \bigcup (13 + 4\mathbb{N})) = 19.
\end{aligned}$$

Logo, $0 < 6 < 13 < 19$ é a sequência de Apéry de Γ.

Pelo item iv) da proposição anterior temos que $c = a_{p-1} - p + 1 = 19 - 4 + 1 = 16$ é o condutor deste semigrupo.

Como os elementos da sequência de Apéry são da forma $a_i = mult_t(g_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t)))$ com $g_i \in \mathcal{O}_f$ é natural nos perguntar como obter um elemento $g_i \in \mathcal{O}_f$ que satisfaça a condição anterior. O próximo resultado nos auxilia nesta direção. Para tanto considere o $\mathbb{K}[[X]]$-módulo $M_k = \mathbb{K}[[X]] \oplus \mathbb{K}[[X]]y \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[[X]]y^k$.

Proposição 4.21. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível de grau n. Assuma $M_{-1} = \{0\}$ e $z_0 = 1$. Então para todo $k = 0, \ldots, n-1$ existe um elemento*

$z_k \in y^k + M_{k-1} \subset \mathcal{O}_f$ *tal que* $v_f(z_k) \notin v(M_{k-1})$.

Demonstração: A prova é construtiva. Seja $(\psi(T), \phi(T))$ uma parametrização de (f). Observe que $z_0 = 1 \in y^0 + M_{-1}$ e $v_f(z_0) = v_f(1) = 0 \notin v(M_{-1}) = \{\infty\}$.

Como f é um polinômio de Weierstrass de grau n, temos que $v_f(X) = n$. Agora tome, $z_1 = y - g(X)$, onde $g(X) \in \mathbb{K}[[X]] = M_0$ tem a propriedade $v_f(z_1) = v_f(y - g(X)) = mult_t(\phi(T) - g(\psi(T))) \neq \beta n = v_f(\mathbb{K}[[X]]) = v_f(M_0)$ com $\beta \in \mathbb{N}$, ou seja, $v_f(z_1) \notin v_f(M_0)$.

Note que $M_1 = \mathbb{K}[[X]] \mp \mathbb{K}[[X]]y$. Tome agora $g_1(X) = \phi_0(X) + \phi_1(X)y \in M_1$, tal que $z_2 = y^2 - \phi_0(X) - \phi_1(X)y \in y^2 + M_1$ e quando visto como uma série em t, não possui nenhum termo em t de ordem múltiplo de n ou de ordem $v(z_1)$ mais um múltiplo de n. Logo, $v_f(z_2) = mult_t(z_2(\psi(T), \phi(T))) \notin \{\beta n, \gamma n + v_f(z_1)\} = v_f(M_1)$. Assim, $v_f(z_2) \notin v_f(M_1)$.

Procedendo dessa forma obtemos $z_k \in y^k + M_k$ para $k = 0, \ldots, n-1$, tais que $v_f(z_k) \notin v_f(M_{k-1})$.

□

Exemplo 4.22. *Seja* (f) *a curva com parametrização*

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + t^7. \end{cases}$$

Temos que $n = 4$ *e* $z_0 = 1$. *Tome* $z_1 = y$, *pois* $v_f(z_1) = v_f(y) = v_f(t^6 + t^7) = 6 \notin v_f(M_0) = v_f(\mathbb{K}[[X]]) = 4\mathbb{N}$. *Tome agora* $z_2 = y^2 - x^3 \in y^2 + M_1$. *Temos que* $v_f(z_2) = v_f(y^2 - x^3) = v_f(2t^{13} + t^{14}) = 13 \notin v_f(M_1) = 4\mathbb{N} \bigcup (6 + 4\mathbb{N})$.

Considerando $z_3 = y^3 - x^3 y \in y^3 + M_2$, *temos* $v_f(z_3) = v_f(2t^{19} + 3t^{20} + t^{21}) = 19 \notin v_f(M_2) = 4\mathbb{N} \bigcup (6 + 4\mathbb{N}) \bigcup (13 + 4\mathbb{N})$.

Logo, obtemos $v_f(z_0) = 0, v_f(z_1) = 6, v_f(z_2) = 13$ *e* $v_f(z_3) = 19$.

Observação 4.23. *Segue da proposição anterior que* $M_k = \mathbb{K}[[X]] \oplus \mathbb{K}[[X]]z_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[[X]]z_k$.

Em particular,

$$\mathcal{O}_f = \mathbb{K}[[X]] \oplus \mathbb{K}[[X]]z_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[[X]]z_{n-1},$$

ou seja, temos que os elementos z_k com $k = 0, \ldots, n-1$ também geram $\mathcal{O}_f$ como $\mathbb{K}[[X]]$-módulo.

Lema 4.24. *(Azevedo) Suponha que para $k = 0, \ldots, n-1$ temos elementos $z_k = y^k + M_{k-1}$ com $v_f(z_k) \notin v_f(M_{k-1})$, onde $z_0 = 1$ e $M_{-1} = \{0\}$. Então para todo i e j com $0 \leq i, j, i+j \leq n-1$, temos que*

$$v_f(z_i) + v_f(z_j) \leq v_f(z_{i+j}).$$

Demonstração: Escreva $z_i = y^i + a_i$ e $z_j = y^j + a_j$ com $a_i \in M_{i-1}$ e $a_j \in M_{j-1}$. Temos $z_i z_j = y^{i+j} + a_j y^i + a_i y^j + a_i a_j$.

Como $z_{i+j} = y^{i+j} + a_{i+j}$ com $a_{i+j} \in M_{i+j-1}$, temos $z_i z_j = z_{i+j} - a_{i+j} + a_j y^i + a_i y^j + a_i a_j$. Agora note que $b = -a_{i+j} + a_j y^i + a_i y^j + a_i a_j \in M_{i+j-1}$.

Suponha que $v_f(z_{i+j}) < v_f(z_i z_j)$. Como $b = z_i z_j - z_{i+j}$ temos $v_f(b) = v_f(z_i z_j - z_{i+j}) = min\{v_f(z_i z_j), v_f(z_{i+j})\} = v_f(z_{i+j})$. Então, $v_f(z_{i+j}) \in v_f(M_{i+j-1})$. Absurdo! Portanto, $v_f(z_{i+j}) \geq v_f(z_i) + v(z_j)$.

$\square$

Observação 4.25. *Temos que $v_f(z_i) < v_f(z_j)$ quando $0 \leq i < j \leq n-1$. De fato, como $j > i$, podemos escrever $j = i + (j-i)$, então pelo lema anterior temos $v_f(z_i) < v_f(z_i) + v_f(z_{j-i}) \leq v_f(z_{i+(j-i)}) = v_f(z_j)$.*

Proposição 4.26. *Sejam $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível de grau n, $z_0 = 1$ e $z_1, \ldots, z_{n-1}$ elementos de $\mathcal{O}_f$, tais que, $z_k \in y^k + M_{k-1}$ com $v_f(z_k) \notin v_f(M_{k-1})$. Denote por $[r]$ a classe residual do inteiro r módulo n, então para todo $k = 0, \ldots, n-1$, temos que*

i) $v_f(M_k) = \bigcup_{i=0}^{k} \{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N};$

ii) $v_f(z_i) \not\equiv v_f(z_j)$ *mod* n, *para todo* $i, j = 0, \ldots, n-1$ *com* $i \neq j$.

iii) $v_f(z_k) = min\{[v_f(z_k)] \bigcap S(f)\}$, *para todo* $k = 0, \ldots, n-1$.

Demonstração:

i) Podemos assumir que $n > 1$, pois se $n = 1$, então $k = 0$ e $v_f(M_0) = v_f(\mathbb{K}[[X]]) = \mathbb{N}$.

Procedemos por indução sobre k. Suponha que para todo k, tal que $1 \leq k \leq n-1$ temos

$$v_f(M_{k-1}) = \{v_f(z_i) + \lambda n; 0 \leq i \leq k-1; \lambda \in \mathbb{N}\}.$$

Pela Observação 4.23 $M_k = M_{k-1} + \mathbb{K}[[X]]z_k$. Assim, podemos escrever qualquer elemento $\beta \in M_k$ na forma $\beta = \alpha + a(X)z_k$, com $\alpha \in M_{k-1}$ e $a(X) \in \mathbb{K}[[X]]$.

Temos que $v_f(\alpha) \neq v_f(a(X)z_k)$. De fato, se o contrário fosse verdade, usando a hipótese de indução, teríamos para algum $i \leq k-1$, uma relação do tipo $v_f(z_i) + \lambda n = \mu n + v_f(z_k)$, ou seja, $v_f(z_k) - v_f(z_i) = \lambda n - \mu n = (\lambda - \mu)n$.

Como $i \leq k-1 < k$, pela Observação 4.25, temos $v_f(z_k) - v_f(z_i) > 0$, ou seja, $\lambda - \mu > 0$. Assim, $v_f(z_k) = v_f(z_i) + (\lambda - \mu)n \in v_f(M_{k-1})$. O que é um absurdo, pois $v_f(z_k) \notin v_f(M_{k-1})$. Portanto, $v_f(\alpha) \neq v_f(a(X)z_k)$.

Sendo assim, segue que $v_f(\beta) = v_f(\alpha)$ ou $v_f(\beta) = v_f(a(X)z_k)$.

1) Se $v_f(\beta) = v_f(\alpha)$, então $v_f(\beta) \in v_f(M_{k-1}) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1}\{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N} \subset \bigcup_{i=0}^{k}\{v(z_i)\} + n\mathbb{N}$.

2) Se $v_f(\beta) = v_f(a(X)z_k)$, então $v_f(\beta) \in v_f(z_k) + \lambda\mathbb{N} \subset \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k}\{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N}$.

Portanto, $v_f(M_k) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k}\{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N}$.

ii) Suponha por absurdo que $v_f(z_i) \equiv v_f(z_j) \mod n$ para algum par de inteiros i e j) com $i \neq j$. Sem perda de generalidade suponha que $i > j$, então $v_f(z_i) = v_f(z_j) + \lambda n$. Segue da Observação 4.25 que $\lambda > 0$. Logo, por (i), temos que $v_f(z_i) \in v_f(M_j)$. Mas $j < i$, ou seja, $v_f(z_i) \in v_f(M_j) \subset v_f(M_i)$ um absurdo. Portanto $v_f(z_i) \not\equiv v_f(z_j) \mod n$.

iii) Tome $\gamma \in S(f) = v_f(\mathcal{O}_f \setminus \{0\})$, então existe $h \in \mathcal{O}_f$ tal que $v_f(h) = \gamma$. Além disso, se $v_f(h) = \gamma \in [v_f(z_k)]$, então $\gamma \notin v_f(M_{k-1})$ e assim, $h \in M_k \setminus M_{k-1}$.

Pelo item (i), temos $\gamma = v_f(z_k) + n\lambda$, com $\lambda \geq 0$, Portanto, $min\{[v(z_k)] \bigcap S(f)\} = v(z_k)$. □

As condições (ii) e (iii), da proposição acima, indicam que $a_i = v_f(z_i)$ para $i = 0, \ldots, n-1$, formam a sequência Apéry de $S(f)$.

Corolário 4.27. *Sejam i e j dois inteiros distintos, tais que $0 \leq i, j \leq n-1$ e $\alpha_i(X), \alpha_j(X) \in \mathbb{K}[[X]] \setminus \{0\}$, então $v_f(\alpha_i(X)z_i) \not\equiv v_f(\alpha_j(X)z_j)$ mod n.*

Demonstração: Suponha que $v_f(\alpha_i(X)z_i) \equiv v_f(\alpha_j(X)z_j)$ mod n. Sem perda de generalidade podemos supor que $v_f(\alpha_i(X)z_i) > v_f(\alpha_j(X)z_j)$, então $v_f(\alpha_i(X)) + v_f(z_i) - v_f(\alpha_j(X)) - v_f(z_j) = \lambda n$, com $\lambda \in \mathbb{N}$. Como $v_f(\alpha_i(X)) = \lambda_i n$ e $v_f(\alpha_j(X)) = \lambda_j n$, temos que

$$v(z_i) - v(z_j) = \lambda n - \lambda_i n + \lambda_j n = (\lambda - \lambda_i + \lambda_j)n.$$

Se $v_f(z_i) > v_f(z_j)$, então $\lambda - \lambda_i + \lambda_j > 0$, então $v_f(z_i) = v_f(z_j) + (\lambda - \lambda_i + \lambda_j)n \in v_f(M_j)$, um absurdo.

Se $v_f(z_j) > v_f(z_i)$, então $v_f(z_j) - v_f(z_i) = -(\lambda - \lambda_i + \lambda_j)n = (-\lambda + \lambda_i - \lambda_j)n$, ou seja, $(-\lambda + \lambda_i - \lambda_j) > 0$ e $v_f(z_j) = v_f(z_i) + (-\lambda + \lambda_i - \lambda_j)n \in v_f(M_i)$, também um absurdo.

Portanto $v_f(\alpha_i(X)z_i) \not\equiv v_f(\alpha_j(X)z_j)$ mod n.

□

Corolário 4.28. *Seja $1 = w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathcal{O}_f$, tais que*

i) $w_k \in y^k + M_{k-1}$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$.

ii) $v_f(w_0), v_f(w_1), \ldots, v_f(w_{n-1})$ são dois a dois não congruentes módulo n.

Então, $v_f(w_k) = v_f(z_k)$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$.

Demonstração: Em primeiro lugar devemos mostrar que $v_f(w_k)$ não pertence a $v_f(M_{k-1})$. Temos pelo item (i) da proposição anterior que $v_f(M_{k-1}) = \bigcup_{i=0}^{k-1}\{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N}$. Se $v_f(w_k) \in v_f(M_{k-1})$, então $v_f(w_k) \equiv v_f(z_r) \bmod n$ para algum $r < k$.

Mas observe que

$$\begin{array}{l} w_0 \in M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{k-1} \\ w_1 \in M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{k-1} \\ \vdots \\ w_{k-1} \in M_{k-1}. \end{array}$$

Pela Proposição 4.26, item (ii), temos que $v_f(z_i) \not\equiv v_f(z_j) \bmod n$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$, com $i \neq j$. Assim, temos que

$$v_f(M_{k-1}) = \{v_f(z_0)\} + n\mathbb{N} \bigcup \ldots \bigcup \{v_f(z_{k-1})\} + n\mathbb{N},$$

é uma união disjunta, pois nenhum elemento $v_f(z_i)$ pertence a classe residual de outro elemento $v_f(z_j)$.

Por hipótese temos que nenhum $v_f(w_i)$ deixa resto igual a outro $v_f(w_j)$ na divisão por n e como $v_f(w_i) \in v_f(M_{k-1})$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$. Então devemos ter que cada $v_f(w_i)$ pertence a uma única classe residual $\{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N}$, ou seja, $v_f(w_j) \equiv v_f(z_r) \bmod n$ para algum $r = 0, \ldots, n-1$. Mas $v_f(w_k) \equiv v_f(z_r) \bmod n$, então $v_f(w_k) \equiv v_f(w_j) \bmod n$, absurdo, pois por hipótese $v_j(w_i) \not\equiv v_j(w_j) \bmod n$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$. Portanto, $v_f(w_k)$ não pertence a $v_f(M_{k-1})$.

Para concluir a prova, observe que $w_k \in y^k + M_{k-1} \subset M_k$ e $v_f(w_k)$ não pertence a $v_f(M_{k-1})$, ou seja, estamos nas hipóteses da Proposição 4.26, e assim podemos aplicar os resultado para w_k. Mas antes observe que

$$v_f(w_k) \in \bigcup_{i=0}^{k}\{v_f(z_i)\} + n\mathbb{N},$$

e $v_f(w_k) \notin v_f(M_{k-1})$, então $v_f(w_k) \in \{v_f(z_k)\} + n\mathbb{N}$ e assim, $v_f(w_k) = v_f(z_k) + \lambda n$ com

$\lambda \in \mathbb{N}$, ou seja, $[v_f(w_k)] = [v_f(z_k)]$.

Pelo item (iii) da Proposição 4.26, temos que

$$v_f(w_k) = min\{[v_f(w_k)] \cap S(f)\} = min\{[v_f(z_k)] \cap S(f)\} = v_f(z_k).$$

Portanto, $v_f(w_k) = v_f(z_k)$, para todo $k = 0, \ldots, n-1$.

□

4.3 Semigrupos e Resolução de Singularidades

Nesta seção relacionaremos o semigrupo de uma curva plana singular com a sequência de multiplicidades obtida pelo processo de resolução de singularidades.

Observação 4.29. *Seja $f(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) + Y^{n+1}h(X,Y)$ com $a_0(0) \neq 0$ e $mult(a_i(X)) > i$, então se $f^{(1)} = \sigma^*(f)$ é a transformada estrita de f por σ temos que $I(f^{(1)}, Y_1) = mult(a_n(X)) - n$ e $I(f^{(1)}, X_1) = n$.*

De fato, como $f^{(1)} = b_0(X_1)Y_1^n + b_1(X)Y_1^{n-1} + \ldots + X_1Y_1^{n+1}h(X_1, X_1Y_1)$ com $b_i(X_1) = \frac{a_i(X_1)}{X_1^i}$ temos que $mult(b_i(X_1)) > 0$ para todo $i > 0$ e assim $I(f^{(1)}, X_1) = I(b_0(X_1)Y_1^n, X_1) = I(Y_1^n, X_1) = n$ e

$$I(f^{(1)}, Y_1) = I(b_n(X_1), Y_1) = I(\frac{a_n(X_1)}{X_1^n}, Y_1) = I(a_n(X_1), Y_1) - n = mult(a_n(X_1)) - n,$$

sendo que a última igualdade segue do fato de que podemos escrever $a_n(X_1) = uX_1^{mult(a_n(X_1))}$ com $u \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ unidade.

O próximo lema indica que há uma relação de inclusão entre os semigrupos da curva e o de sua transformada estrita.

Proposição 4.30. *Sejam $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n, regular em Y e $f^{(1)} = \sigma^*(f)$ a transformada estrita de f. Então $S(f) \subset S(f^{(1)})$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.5 temos que $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_{f^{(1)}}$.

Agora tome $\gamma \in S(f)$, ou seja, $\gamma = I(f,h) = v_f(h) = ord_t h(\phi(T), \psi(T))$, onde $h \in \mathcal{O}_f$ e $(\phi(T), \psi(T))$ é uma parametrização de f.

Como $f(X_1, X_1Y_1) = X_1^n f^{(1)}(X_1, Y_1)$ temos que $\gamma = I(f,h) = I(X_1^n f^{(1)}, h) = nI(X_1, h) + I(f^{(1)}, h)$.

Note que se $h(X,Y) = X_1\alpha(X_1, Y_1) + l(Y_1)$, então $I(X_1, h) = I(X_1, X_1\alpha(X_1, Y_1) + l(Y_1)) = I(X_1, Y_1^d u) = dI(X_1, Y_1) = d$, com $l(Y_1) = Y_1^d u$ onde u é uma unidade em $\mathbb{K}[[X,Y]]$.

Pela observação anterior $n \in S(f^{(1)})$. Logo, $\gamma = nd + I(f^{(1)}(X_1, Y_1), h) \in S(f^{(1)})$. Portanto, $S(f) \subset S(f^{(1)})$. $\square$

O próximo resultado relaciona as sequências de Apéry do semigrupo $S(f)$ e $S(f^{(1)})$.

Proposição 4.31. *Sejam $f \in \mathbb{K}[[X,Y]]$ uma série de potências irredutível regular em Y com cone tangente (Y^n), $f^{(1)} = \sigma^*(f)$, $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ e $a_0' < a_1' < \ldots < a_{n-1}'$ respectivamente as sequências Apéry de $S(f)$ e $S(f^{(1)})$, com respeito à n. Então,*

$$a_j = a_j' + jn,$$

para todo $j = 0, \ldots, n-1$.

Demonstração: Da Observação 4.29, temos que $I(f^{(1)}, X_1) = n \in S(f^{(1)})$. Dessa forma, faz sentido calcular a sequência de Apéry de $S(f^{(1)})$ com respeito à n.

Como $\{a_0', a_1', \ldots, a_{n-1}'\}$ forma um sistema residual completo módulo n, o conjunto $\{a_0', a_1' + n, ..., a_{n-1}' + (n-1)n\}$ também é um sistema residual completo módulo n. Pelo Corolário 4.28 é suficiente mostrar que para todo $k = 0, \ldots, n-1$ existe $z_k \in y^k + M_{k-1}$, tal que $v_f(z_k) = a_k' + kn$.

Para todo $k = 0, \ldots, n-1$ defina M_{k-1}' de forma análoga à de M_k relativo à $f^{(1)}$ ao invés de f. Seja $z_k' = \left(\frac{y_1}{X_1}\right)^k + m_{k-1}' \in \left(\frac{y_1}{X_1}\right)^k + M_{k-1}' \subset \mathcal{O}_{f^{(1)}}$ tal que $v(z_k') = a_k'$, cuja existência é assegurada pelas Proposições 4.21 e 4.26.

Multiplicando $z_k^{'}$ por X_1^k para $k = 0, \ldots, n-1$, obtemos

$$X_1^k z_k^{'} = X_1^k \left(\frac{y^k}{X_1^k} + m_{k-1}^{'} \right) = y^k + X_1^k m_{k-1}^{'} \in y^k + M_{k-1}.$$

Além disso, denotando $z_k = X^k z_k^{'}$ temos

$$v_{f^{(1)}}(z_k) = v_{f^{(1)}}(X^k z_k^{'}) = v_{f^{(1)}}(X^k) + v_{f^{(1)}}(z_k^{'}) = kn + a_k^{'},$$

para todo $k = 0, \ldots, n-1$. Logo,

$$v_{f^{(1)}}(z_0) = a_0^{'} + 0n, v_{f^{(1)}}(z_1) = a_1^{'} + 1n, \ldots, v_{f^{(1)}}(z_{n-1}) = a_{n-1} + (n-1)n.$$

Note que $v_{f^{(1)}}(z_0), v_{f^{(1)}}(z_1), \ldots, v_{f^{(1)}}(z_{n-1})$ são dois a dois não congruentes módulo n. Portanto, pelo Corolário 4.28, $v(z_k) = v(w_k) = a_k^{'} + kn$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$. $\square$

O resultado anterior, permite obter conclusões importantes e interessantes.

Corolário 4.32. *Sejam c e $c^{(1)}$, respectivamente, os condutores de $S(f)$ e $S(f^{(1)})$. Então $c = c^{(1)} + n(n-1)$ onde n é a multiplicidade de f.*

Demonstração: Sabemos da Proposição 4.19 que $c = a_{n-1} - (n-1)$ e $c^{(1)} = a_{n-1}^{'} - (n-1)$.

Da proposição anterior temos que $a_{n-1} = a_{n-1}^{'} + (n-1)n$. Logo,

$$c = a_{n-1}^{'} + (n-1)n - (n-1) = c^{(1)} + n(n-1).$$

$\square$

Vimos no Lema 4.30 que $S(f) \subset S(f^{(1)})$, o próximo resultado estreita ainda mais esta relação.

Corolário 4.33. *$S(f^{(1)})$ e $mult(f)$ determinam $S(f)$ e a recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Dados $S(f^{(1)})$ e $n = mult(f)$ podemos calcular a sequência Apéry $0 = a_0^{'} < a_1^{'} < \ldots < a_{n-1}^{'}$ de $S(f^{(1)})$ com respeito à $n \in S(f) \subset S(f^{(1)})$. Pela Proposição 4.31, podemos obter a sequência de Apéry de $S(f)$ com respeito à n, ou seja, $a_0 = a_0^{'} + 0n < a_1 = a_1^{'} + 1n < \ldots < a_{n-1} = a_{n-1}^{'} + (n-1)n$.

Como, pela Proposição 4.19, $\{n, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores de $S(f)$, obtemos $S(f)$.

Por outro lado, dado $S(f)$ podemos calcular a sequência de Apéry $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ de $S(f)$ com respeito á $n = mult(f) \in S(f) \subset S(f^{(1)})$. Novamente pela Proposição 4.31, temos que $a_j^{'} = a_j - jn$ para $j = 0, \ldots, n-1$ formam a sequência de Apéry para $S(f^{(1)})$ com respeito à n. Assim, $\{n, a_1^{'}, \ldots, a_{n-1}^{'}\}$ é um conjunto de geradores de $S(f^{(1)})$ e dessa forma obtemos $S(f^{(1)})$.

□

O resultado anterior permite reformular a noção de equisingularidade em termos da sequência de multiplicidades que ocorre na resolução canônica de uma curva.

Corolário 4.34. *Duas curvas planas são equinsigulares se, e somente se, elas possuem a mesma sequência de multiplicidades nas suas resoluções canônicas.*

Demonstração: Considere a sequência de multiplicidade na resolução canônica de uma curva (f): $mult(f), mult(f^{(1)}), mult(f^{(2)}), \ldots, mult(f^{(N)}) = 1$.

Como $f^{(N)}$ é suave, o semigrupo associado a ela é $S(f^{(N)}) = \mathbb{N}$. Além disso, a sequência de Apéry de $\mathbb{N}$ é dada por $a_i^N = i$. Como conhecemos $mult(f^{(N-1)})$, pela proposição anterior podemos determinar $S(f^{(N-1)})$.

Usando uma argumentação indutiva vemos que a sequência de multiplicidade de f determina e é determinada pelo semigrupo $S(f)$. □

Observação 4.35. *Usando o Corolário 4.32 repetidas vezes obtemos que o condutor do semigrupo de uma curva (f) é* $c = \sum_{i=0}^{N} n^{(i)}(n^{(i)} - 1)$ *onde* $n^{(0)} = mult(f)$, $n^{(i)} = mult(f^{(i)})$ *e* N *é o número de transformações quadráticas necessárias para tornar a curva suave.*

Vamos finalizar o trabalho, verificando se três curvas são equisingulares.

Exemplo 4.36. *Considere as seguintes curvas planas:*

1) (f) *dada por* $f(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7$.

2) (g) *dada pela parametrização*

$$\begin{cases} x(t) = t^4 + t^5 \\ y(t) = t^6 + t^7. \end{cases}$$

3) (h) *dada pela parametrização*

$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^6 + t^7. \end{cases}$$

Vamos verificar se tais curvas são equisingulares.

Mostramos no Exemplo 3.6 que $\{4, 2, 2, 1\}$ *é a sequência de multiplicidades que ocorrem na resolução canônica de* (f). *A partir desses dados encontramos o semigrupo associado a curva* (f). *Como* $f^{(3)}$ *é suave, temos que* $S(f^{(3)}) = \mathbb{N}$.

Sabemos que $a_0^{(3)} = 0 < a_1^{(3)} = 1$ *é a Sequência de Apéry desse semigrupo com respeito à* $mult(f^{(2)}) = 2$. *Pela Proposição 4.31, temos que* $a_0^{(2)} = 0 < a_1^{(2)} = 3$ *é a sequência de Apéry de* $S(f^{(2)})$ *com respeito à* 2 *e pela Proposição 4.19 item (iii) temos que* $S(f^{(2)}) = \langle 2, 3\rangle$. *Como* $mult(f^{(2)}) = mult(f^{(1)}) = 2$, *obtemos a mesma sequência de Apéry de* $S(f^{(2)})$ *com respeito à* 2 *e novamente pelas Proposições 4.31 e 4.19 item (iii), temos que* $a_0^{(1)} = 0 < a_1^{(1)} = 5$ *é a sequência de Apéry de* $S(f^{(1)})$ *com respeito à* 2 *e* $S(f^{(1)}) = \langle 2, 5\rangle$. *Agora, calculamos a sequência de Apéry de* $S(f^{(1)})$ *com respeito à* $mult(f) = 4$ *e dessa forma obtemos* $a_0^{(1)} = 0 < a_1^{(1)} = 2 < a_2^{(1)} = 5 < a_3^{(1)} = 7$. *Sendo assim, segue que* $a_0 = 0 < a_1 = 6 < a_2 = 13 < a_3 = 19$ *é a sequência de Apéry com respeito à* 4 *do semigrupo* $S(f)$ *e portanto* $S(f) = \langle 4, 6, 13\rangle$.

Agora iremos calcular o semigrupo associado a curva (g). *Para tanto encontremos uma parametrização de Hamburger-Noether para essa curva. Como* $ord_t(x(t)) < ord_t(y(t))$, *devemos dividir* y *por* x, *assim* $y = xy_1$, *onde* $y_1 = t^2$.

Como $ord_t(y_1) < ord_t(x)$, *tome* $y_1 = z_1$. *Repetimos o processo para* $\{z_1, x\}$, *ou seja, dividimos* x *por* z_1. *Assim,* $x = z_1 w_1$, *onde* $w_1 = t^2 + t^3$. *Como* $ord_t(w_1) = ord_t(z_1)$, *dividimos* w_1 *por* z_1 *e assim* $w_1 = z_1(1 + w_2)$, *onde* $w_2 = t$. *Como* $ord_t(w_2) < ord_t(z_1)$, *tome* $w_2 = z_2$. *Repetimos o processo para* $\{z_2, z_1\}$, *isto é, dividimos* z_1 *por* z_2. *Assim,* $z_1 = z_2 v_1$, *onde* $v_1 = t$. *Como* $v_1 = z_2$ *temos o fim do processo.*

Agora analisando cada parte do procedimento acima, obtemos a seguinte parametrização de Hamburger-Noether:

$$\begin{cases} y = xz_1 \\ x = z_1^2 + z_1^2 z_2 \\ z_1 = z_2^2. \end{cases}$$

Sabemos da Proposição 3.12 que as diferentes multiplicidades que ocorrem na sequência de transformações quadráticas que torna (g) *suave são exatamente os inteiros* $n_j = v_g(z_j)$ *com* $0 \leq j \leq r$ *e cada* n_j *é repetido* h_j *vezes, lembrando que a parametrizção de Hamburger-Noether está escrita na forma*

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1},$$

com $0 \leq j \leq r$.

Assim, $n_0 = v_g(z_0) = v_g(x) = mult_t(x) = 4$. *Observe que, se* $j = 0$ *então,* $z_{-1} = y = xz_1$. *Logo,* $h_0 = 1$, *ou seja, a multiplicidade* 4 *ocorre uma vez. Do mesmo modo obtemos:*

$n_1 = v_g(z_1) = 2$, *com* $h_1 = 2$;

$n_2 = v_g(z_2) = 1$, *com* $h_2 = \infty$.

Dessa forma, obtemos que $\{4, 2, 2, 1\}$ *é a sequência de multiplicidades para a curva* (g) *que é a mesma sequência de multiplicidades da curva* (f). *Logo,* $S(g) = \langle 4, 6, 13 \rangle$.

Observe que a curva (h) *está na forma de uma parametrização de Newton-Puiseux.*

No Exemplo 4.22, calculamos os elementos $z_k = y^k + M_{k-1} \in \mathcal{O}_h$*, definidos na Proposição 4.21 e obtemos* $v_h(z_0) = 0, v_h(z_1) = 6, v_h(z_2) = 13$ *e* $v_h(z_3) = 19$*. Pela Proposição 4.26, temos que* $a_i = v_h(z_i)$ *para* $i = 0, \ldots, n-1$*, é a sequência Apéry de* $S(h)$*, ou seja,* $a_0 = 0 < a_1 = 6 < a_2 = 13 < a_3 = 19$ *é a sequência de Apéry de* $S(h)$*. Sendo assim, pela Proposição 4.19 item (iii), temos que* $S(h) = \langle 4, 6, 13 \rangle$*.*

Desta forma, temos que as curvas apresentadas acima possuem o mesmo semigrupo de valores. Portanto, essas curvas são equisingulares.

Índice Remissivo

Bibliografia

[1] Hefez, A., *Irreducible Plane Curve Singularities*. Real and Complex Singularities. New York. Marcel Decker, pag 1-120, (2003)

[2] Campillo, A., *Lecture Notes in Mathematics*, Edited by A. Dold and B. Eckmann, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1980).

[3] J.W.P. Hirschfeld; G. Kochmaros; F.Torres. *Algebraic Curves over a Finite Field*. 1^a Ed. Princeton University Press, (2008).

[4] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G.; *Introduction to Commutative Algebra*. Addison Wesley Publishing Company, (1969).

[5] Walker, R.J.; *Algebraic Curves*. Springer, (1991).

[6] Brieskorn, E., Knorrer, H.; *Plane Algebraic Curves*. Birkhauser Verlog (1986).