UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

DÉBORA APARECIDA FRANCISCO ALBANEZ

Existência de Atratores Globais para Problemas Parabólicos Envolvendo o Laplaciano e o p-Laplaciano

Maringá-PR
2010

DÉBORA APARECIDA FRANCISCO ALBANEZ

Existência de Atratores Globais para Problemas Parabólicos Envolvendo o Laplaciano e o p-Laplaciano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo

Maringá
2010

EXISTÊNCIA DE ATRATORES GLOBAIS PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS ENVOLVENDO O LAPLACIANO E O P-LAPLACIANO

Débora Aparecida Francisco Albanez

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo - UEM (Orientador) ....

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Cláudia Butarello Gentile - UFSCar ....

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM ....

Maringá

Fevereiro, 2010

Dedico este trabalho a Deus.

Á minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder muita saúde, força e paciência durante meus estudos.

Aos meus pais, que com muito sacrifício me propiciaram a chance de estudar.

À minha família, pelo apoio, afeto e carinho e preocupação que tiveram e têm por mim.

Ao meu orientador prof. Marcos Roberto Teixeira Primo, pela sua dedicação em me orientar, por sua paciência e por acreditar que seria possível a realização deste estudo, além de tornar esse trabalho uma agradável experiência sobre a matemática.

À todos os professores aos quais tive contato desde os tempos de graduação, sou muito grata pelos ensinamentos valiosos.

À todos os meus amigos, pessoas com as quais dividi as alegrias e as tristezas dessa caminhada.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência de atratores globais para problemas parabólicos unidimensionais envolvendo o operador Laplaciano e o operador p-Laplaciano, com $p > 2$.

Abstract

In this work we show the existence of global attractors for one-dimensional parabolic problems involving Laplacian operator and p-Laplacian operator, with $p > 2$.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem por objetivo principal estudar a existência de atratores globais para problemas parabólicos semilineares e não lineares. Inicialmente, estudaremos o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda f(u), x \in [0, \pi] \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{1}$$

que envolve o operador Laplaciano em dimensão 1 e foi tratado inicialmente por N. Chafee e E. F. Infante, [8], em 1974. Considerando hipóteses adequadas sobre a função f, mostraremos que o problema (1) possui solução global não trivial para cada dado inicial $\phi \in H_0^1[0,\pi]$, para isso usaremos a teoria geral de semigrupos contida em [12] e [17].

Usando a teoria básica de atratores globais para semigrupos de operadores, contidas em [11] e [13], garantiremos que o semigrupo definido pelas soluções globais de (1) é ponto dissipativo, é um sistema gradiente assegurando assim a existência de um atrator global para o problema (1).

Através da análise das soluções da equação diferencial ordinária $u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0$ e do problema (1), garantiremos o surgimento dos pontos de equilíbrio, e provaremos que, para valores fixos de $\lambda > 0$, esses pontos são finitos e bifurcam da solução nula aos pares, de maneira que se $\lambda \to \infty$, o número de pontos de equilíbrio tende ao infinito. Estudaremos também a estabilidade desses pontos de equilíbrio.

O segundo problema aqui estudado é uma generalização de (1) e foi tratado por Y. Yamada e S. Takeuchi, [18], em 1998 e pode ser escrito por

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), \ \ (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in (0,1) \end{cases} \tag{2}$$

onde $p > 2$, $q \geq 2$ e $\lambda, r > 0$, o qual envolve o operador p-Laplaciano em dimensão 1. Se tomarmos $p = q = 2$, a função $f(s) = s(1-|s|^r)$, para $r > 2$, satisfaz todas as hipóteses exigidas para a função f do problema (1).

Após mostramos algumas propriedades que garantem a existência de um semigrupo para esse problema generalizado, mostramos que ele é um sistema gradiente e, seu conjunto $w-$limite para cada dado inicial em $W_0^{1,p}(0,1)$, $p > 2$ está contido no conjunto dos pontos de equilíbrio para o problema (2).

A existência de atratores globais, em $L^2(0,1)$, para o problema (2) será feita apenas para o caso $q = 2$. Ficando esse problema escrito na forma

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + u(1-|u|^r), \ \ (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in (0,1), \end{cases} \tag{3}$$

o qual escreveremos, na forma abstrata, como

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + B(u(t)) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é um operador maximal monótono e B é uma função globalmente Lipschitziana. A existência de atratores globais para esse problema foi tratada por A. N. Carvalho, J. W. Cholewa e T. Dlotko, [6], em 1999.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo, são abordados alguns requisitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho tais como semigrupos de operadores lineares, operadores setoriais, atratores para semigrupos e espaços de Sobolev. No segundo capítulo, estudaremos o problema (1), garantindo existência e unicidade de soluções, existência de soluções globais e de atratores globais. Estudamos também o comportamento dos pontos de equilíbrio para (1), bem como o diagrama de bifurcação desses equilíbrios. No terceiro capítulo, apresentamos a idéia de operadores maximais monótonos e como exemplo desses operadores estudaremos com detalhes o operador p-Laplaciano. No quarto capítulo, através de hipóteses adicionais sobre o operador, mostraremos a existência de atratores globais para o problema (2), no caso $q = 2$. No quinto capítulo, trabalhamos com o problema (2), mostrando que o semigrupo associado a esse problema é um sistema gradiente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo será feito um breve estudo dos principais conceitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes tais como, existência e unicidade de soluções, existência global de soluções e existência de atratores globais. Mais especificamente, trataremos aqui de semigrupos de operadores lineares limitados, operadores setoriais, Teoremas de estabilidade e instalibilidade de soluções relacionados a operadores setoriais, atratores globais, sistemas gradientes e espaços de Sobolev.

1.1 Semigrupos de Operadores Lineares Limitados

Apresentaremos nessa seção o conceito de semigrupo de operadores e seu gerador infinitesimal. Exibiremos também algumas de suas principais propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em [12] e em [17]. Algumas delas serão omitidas para não deixar a dissertação muito extensa.

Seja X um espaço de Banach e considere $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares e limitados $T : X \longrightarrow X$. Em $\mathcal{L}(X)$ definamos a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.

Definição 1.1. *Uma aplicação $T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares de X se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$T(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

2. *$T(t + s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.*

Dizemos que o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é de classe C_0 se

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0,$$

para todo $x \in X$.

Ainda se $D(A) = \{x \in X; \lim_{h \to 0^+} \frac{(T(h)-I)}{h} x \;\; \text{existe} \;\; \}$, *então definimos, para todo* $x \in D(A)$, *o operador linear denominado gerador infinitesimal do semigrupo* $\{T(t); t \geq 0\}$ *por*

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{(T(h)-I)}{h} x.$$

Os próximos resultados são propriedades simples dos semigrupos de classe C_0 e suas demonstrações podem ser encontradas em [17].

Lema 1.1. *Todo semigrupo de classe* C_0 *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}^+$, *isto é, se* $t \in \mathbb{R}^+$, *então*

$$\lim_{s \to t} T(s)x = T(t)x,$$

para todo $x \in X$.

Proposição 1.1. *Seja* $\{T(t); t \geq 0\}$ *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *seu gerador infinitesimal.*

1. *Para* $x \in X$ *temos*
$$\lim_{h \to 0^+} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

2. *Se* $x \in D(A)$, *então* $T(t)x \in D(A)$ *para todo* $t \geq 0$ *e*
$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

3. *Se* $x \in D(A)$, *então*
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau.$$

4. *Se* $x \in X$, *então* $\int_s^t T(\tau)xd\tau \in D(A)$ *e*
$$T(t)x - x = A \int_0^t T(\tau)xd\tau.$$

Definição 1.2. *Seja* $\{T(t); t \geq 0\}$ *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *o seu gerador infinitesimal. Considerando* $A^0 = I, A^1 = A$, *e, supondo que* A^{n-1} *esteja definido, vamos definir* A^n, *para* $n \geq 1$, *por*

$$A^n x = A(A^{n-1}x),$$

para todo $x \in D(A^n)$, *onde*

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) \;\; e \;\; A^{n-1}x \in D(A)\}.$$

Teorema 1.1. *Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo de classe C_0, então existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}$$

para todo $t \geq 0$.

Observação 1.1. *Se no Teorema 1.1 tivermos $w = 0$, dizemos que o semigrupo é uniformemente limitado. Se além disso, $M = 1$, dizemos que o semigrupo é um semigrupo de contrações.*

Definição 1.3. *Uma família de operadores lineares contínuos definidos em um espaço de Banach X, $\{T(t);\ t \geq 0\}$, é um semigrupo analítico se*

(i) A aplicação $t \to T(t)x$ é analítica em $(0, +\infty)$, para todo $x \in X$;

(ii) $T(0) = I$ e $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$;

(iii) $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ para $t_1, t_2 \geq 0$.

Existem várias caraterizações de semigrupos analíticos que podem ser encontradas em [17], a principal delas está relacionada com seu gerador infinitesimal. Na próxima seção veremos essa caracterização. A partir de agora, quando $\{T(t);\ t \geq 0\}$ for um semigrupo analítico com gerador infinitesimal A, denotaremos $T(t) = e^{-At}$, para todo $t > 0$. O uso dessa notação é motivada pelo fato de a função exponencial $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ satisfazer as condições de (i) a (iii) acima.

1.2 Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos

Nesta seção, estudaremos os operadores setoriais, suas principais propriedades e sua relação com semigrupos analíticos.

Definição 1.4. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ em um espaço de Banach X é dito setorial se A é fechado, densamente definido e existem constantes $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $M \geq 1$ tais que*

$$S_{b,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |arg\ (\lambda - b)| \leq \pi,\ \ \lambda \neq b\} \subseteq \rho(A),$$

para algum $b \in \mathbb{R}$, onde $\rho(A)$ é o conjunto resolvente de A e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - b|},$$

para todo $\lambda \in S_{b,\phi}$. O operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é chamado operador resolvente de A.

Definição 1.5. *Seja A um operador setorial em X e $\sigma(A)$ o conjunto dos autovalores de A. Se $Re\ \sigma(A) > 0$, então para todo $\alpha > 0$, definimos*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt,$$

onde $\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Podemos verificar que se A é um operador setorial com Re $\sigma(A) > 0$, então para $\alpha, \beta > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear, limitado em X, que é injetor e satisfaz $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$. Definimos $A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}$ para $\alpha > 0$. Para $\alpha = 0$, definimos $A^0 = I$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que A^{α} é fechado e densamente definido e se $\alpha \geq \beta$, então $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$.

As demonstrações dos próximos dois Teoremas encontram-se em [12].

Teorema 1.2. *Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-At}; t \geq 0\}$, onde*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t}\ d\lambda,$$

para todo $t \geq 0$, onde Γ é um contorno em $\rho(-A)$ com arg $\lambda \to \pm\theta$ quando $|\lambda| \to \infty$ para algum $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Além disso, $\{e^{-At};\ t \geq 0\}$ pode ser estendido analiticamente a um setor $\{\theta \neq 0 :\ |arg\ \theta| < \varepsilon\}$ contendo o eixo real positivo e se $Re\ \sigma(A) > a$, então para $t > 0$ segue que

$$\|e^{-At}\| \leq Ce^{-at},\ \ \|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{-at},$$

para alguma constante positiva C.

Teorema 1.3. *Seja A um operador setorial e suponhamos que $Re\ \sigma(A) > \delta > 0$, então para todo $\alpha \geq 0$ existe uma constante positiva $C_{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|A^{\alpha} e^{-At}\| \leq C_{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t},\ \ t > 0, \tag{1.1}$$

onde a constante C_α é limitada quando $\alpha \to 0^+$. Além disso, se $\alpha \in (0,1)$ e $x \in D(A^\alpha)$, então

$$\|(e^{-At} - I)x\| \leq M_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|, \ \ t \geq 0.$$

Demonstração: Note que, pelo Teorema 1.2 temos $\|e^{-At}\| \leq ce^{-\delta t}$ e $\|Ae^{-At}\| \leq ct^{-1}e^{-\delta t}$ para $t > 0$. Portanto, para $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\|A^m e^{-At}\| = \|(Ae^{-\frac{At}{m}})^m\| \leq (c_m)^m t^{-m} e^{-\delta t}. \tag{1.2}$$

Se $\alpha \in (0,1)$ e $t > 0$

$$\begin{aligned}
||A^\alpha e^{-At}|| &= \|Ae^{-At}A^{-(1-\alpha)}\| = \left\| Ae^{-At} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-As} ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \|Ae^{-At} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-As} ds\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int_0^\infty s^{-\alpha} Ae^{-At} e^{-As} ds \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int_0^\infty s^{-\alpha} Ae^{-A(t+s)} ds \right\| \\
&\leq Ct^{-\alpha} e^{-\delta t} \Gamma(\alpha) \\
&= C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
||A^{\alpha+\beta} e^{-At}|| &= \|A^\alpha e^{-A\frac{t}{2}}\| \|A^\beta e^{-A\frac{t}{2}}\| \leq C_\alpha \left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} e^{-\delta\frac{t}{2}} C_\beta \left(\frac{t}{2}\right)^{-\beta} e^{-\delta\frac{t}{2}} \\
&= C_\alpha C_\beta \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha-\beta} t^{-\alpha-\beta} e^{-\delta t} = C_\alpha C_\beta 2^{\alpha+\beta} t^{-(\alpha+\beta)} e^{-\delta t}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Assim de (1.2),(1.3) e (1.4) obtemos (1.1). Além disso, se $\alpha \in (0,1)$ e $x \in D(A^\alpha)$ temos

$$\begin{aligned}
\|(e^{-At} - I)x\| &= \|e^{-At}x - x\| = \|e^{-At}x - e^{-A \cdot 0}x\| \\
&= \| \int_0^t A^\alpha e^{-As} x ds\| = \| \int_0^t A^{1-\alpha} e^{-As} A^\alpha x ds\| \\
&\leq \int_0^t \|A^{1-\alpha} e^{-As} A^\alpha x\| ds \leq \int_0^t C_{1-\alpha} s^{\alpha-1} e^{\delta s} \|A^\alpha x\| ds \\
&\leq C_{1-\alpha} \|A^\alpha x\| \int_0^t s^{\alpha-1} ds \\
&= M_\alpha \|A^\alpha x\| t^\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto $\|(e^{-At} - I)x\| \leq M_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|$, e a constante C_α é limitada quando $\alpha \to 0^+$, completando a prova do Teorema. ■

Corolário 1.1. *Seja A um operador setorial com Re $\sigma(A) > 0$. Se B é um operador linear tal que $BA^{-\alpha}$ é limitado sobre X para algum α, com $0 \leq \alpha < 1$, então $A + B$ é setorial.*

Note que se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $A_1 = A + aI$ é tal que Re $\sigma(A_1) > 0$. Se definirmos $X^\alpha = D(A_1^\alpha), \alpha \geq 0$ e a norma

$$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, \;\; x \in X^\alpha,$$

então o Teorema do Gráfico Fechado mostra que X^α é um espaço de Banach munido da norma $\| \cdot \|_\alpha$. Além disso, diferentes escolhas de a nos dão normas equivalentes em X^α e assim retiramos a dependência do a e a hipótese de que Re $\sigma(A) > 0$, pode ser suprimida se trabalharmos com a norma definida acima.

A demonstração dos Teoremas 1.4 e **??** encontram-se em [12].

Teorema 1.4. *Se A é setorial em um espaço de Banach X, então X^α é um espaço de Banach com norma $|| \cdot ||_\alpha$ para $\alpha \geq 0, X^0 = X$, e para $\alpha \leq \beta \leq 0, X^\alpha$ é um subespaço denso em X^β com inclusão contínua. Se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.*

Se A_1, A_2 são operadores setoriais em X com mesmo domínio e Re $\sigma(A_j) > 0$ para $j = 1, 2$ e se $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha}$ é um operador limitado para algum $\alpha < 1$, então com $X_j^\beta = D(A_j^\beta)$ para $j = 1, 2, X_1^\beta = X_2^\beta$ com normas equivalentes para $0 \leq \beta \leq 1$.

1.3 O Problema de Cauchy Envolvendo Operadores Setoriais

Nesta seção usaremos os resultados das seções anteriores para obter propriedades de existência e unicidade para um problema de Cauchy envolvendo operadores setoriais. Seja X um espaço de Banach e consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = f(u(t)), \;\; t > t_0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde A é um operador setorial em X e $f : U \subset X^\alpha \longrightarrow X$ definida em U um aberto de X^α tal que f é uma função contínua e localmente Lipschitziana, isto é, para todo limitado

$V \subset U \subset X^\alpha$, existe $K_V > 0$ tal que

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K_V \|u - v\|_\alpha \ \ \forall u, v \in V,$$

para algum $\alpha \in [0, 1)$.

Definição 1.6. *Para $\tau > t_0$, uma solução do problema de valor inicial (1.5) em (t_0, τ) é uma função contínua $u : [t_0, \tau) \longrightarrow X^\alpha$ tal que*

- $u(t_0) = u_0$;
- $u(t) \in U$ *e* $u(t) \in D(A)$, *para todo* $t \in (t_0, \tau)$;
- *para* $t \in (t_0, \tau)$ *existe* $\dfrac{du}{dt}(t)$;
- u *satisfaz (1.5) em* (t_0, τ).

Teorema 1.5. *Sejam A um operador setorial, $\alpha \in [0, 1)$ e $f : U \subset X^\alpha \to X$ uma função contínua e localmente lipschitziana. Então, para todo $u_0 \in U \subset X^\alpha$, existe uma única solução de* (1.5) em um intervalo (t_0, τ_{u_0}), com $\tau_{u_0} > t_0$.

Para essa demonstração, utilizaremos o seguinteLema, cuja prova pode ser encontrada em [12].

Lema 1.2. *Se u é uma solução de* (1.5) em (t_0, t_1), então

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s))ds \tag{1.6}$$

Reciprocamente, se $u : (t_0, t_1) \longrightarrow X^\alpha$ é uma função contínua e a equação acima vale para $t_0 < t < t_1$, então $u(\cdot)$ é a solução de (1.5) em (t_0, t_1).

Uma solução da equação integral (1.6) é chamada de solução fraca de (1.5).

Demonstração do Teorema 1.5: Para obtermos a existência e a unicidade é suficiente provar que existe $u : (t_0, t_1) \longrightarrow X^\alpha$ contínua e que u tem a forma (1.6), para algum $t_1 > t_0$. Dado $u_0 \in U \subset X^\alpha$, escolha $\delta > 0$, tal que

$$V = \{u \in X^\alpha; \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\} \subset X^\alpha \subset U.$$

e seja $L > 0$ tal que

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|_\alpha,$$

para todo $u_1, u_2 \in V$.

Considere $B = \|f(u_0)\|$ e escolha $T > 0$ tal que

$$\|(e^{-Ah} - I)u_0\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2}$$

para $0 \leq h \leq T$ e

$$M(B + L\delta)\int_0^T u^{-\alpha} e^{au} du \leq \frac{\delta}{2},$$

onde $\|A_1^\alpha e^{-At}\| \leq M t^{-\alpha} e^{at}$ para $t > 0$. Se S denota o conjunto das funções contínuas $y : [t_0, t_0 + T] \longrightarrow X^\alpha$ tais que

$$\|y(t) - u_0\|_\alpha \leq \delta \text{ em } t \in [t_0, t_0 + T],$$

munido da norma do supremo, $\|y\|^T = \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+T]} \|y(t)\|_\alpha$, então S é um espaço métrico completo.

Para $y \in S$, defina $G(y) : [t_0, t_0 + T] \longrightarrow X^\alpha$ por

$$G(y)(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(y(s))ds.$$

Mostraremos que $G(S) \subset S$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned}
\|G(y)t - u_0\|_\alpha &\leq \|(e^{-A(t-t_0)} - I)u_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\|(B + L\delta)ds \\
&\leq \frac{\delta}{2} + M(B + L\delta)\int_{t_0}^{t_0+T} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \leq \delta,
\end{aligned}$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Também $G(y) : [t_0, t_0 + T] \longrightarrow X^\alpha$ é contínua. Portanto, $G(S) \subset S$.

Agora, se $y, z \in S$, então para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ segue que

$$\begin{aligned}
\|G(y)(t) - G(z)(t)\|_\alpha &\leq \int_{t_0}^t \|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(y(s)) - f(z(s))\| ds \\
&\leq ML \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \|y - z\|^T,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|G(y) - G(z)\|^T \leq \frac{1}{2}\|y - z\|^T$$

para todo $y, z \in S$, o que mostra que G é uma contração.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach implica que G tem um único ponto fixo $u \in S$, o qual é uma solução contínua da equação integral (1.6) e tem $f(u(t))$ limitado quando $t \to t_0^+$. Assim, peloLema 1.2, essa é a única solução de (1.5) em $(t_0, t_0 + T)$, com valor inicial $u(t_0) = u_0$. ■

Teorema 1.6. *Sejam A e f como no Teorema anterior e suponha adicionalmente que para todo subconjunto fechado e limitado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ é limitada em X. Se $u_0 \in U$ e u é a única solução de (1.5) em um intervalo (t_0, τ_{u_0}) e $\tau_{u_0} > t_0$ é maximal, então ou $\tau_{u_0} = +\infty$ ou existe uma sequência $t_n \to \tau_{u_0}^-$ quando $n \to +\infty$ tal que $u(t_n) \to \partial U$ (se U é ilimitado, o ponto no infinito está contido na fronteira, ∂U, de U.)*

Na prática, usamos o Teorema 1.6 para obtermos que uma solução é definida para todo $t \geq t_0$ e para isso precisamos mostrar que a solução u encontrada no Teorema 1.5 é limitada na norma $\| \cdot \|_\alpha$.

Nosso próximo resultado garante, sob hipóteses adicionais no operador setorial, um resultado de compacidade sobre o semigrupo gerado pelas soluções do problema (1.5). Primeiro observemos que se assumirmos que todas as soluções de (1.5) são definidas para todo $t \geq 0$, podemos considerar, para $t > 0$,

$$\begin{array}{rcl} T(t) : X^\alpha & \longrightarrow & X^\alpha \\ u_0 & \longmapsto & T(t)u_0 = u(t; u_0) \end{array}$$

e definir $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados.

Nosso próximo resultado garante, sob algumas algumas condições, a compacidade de semigrupos analíticos gerados por operadores setoriais.

Lema 1.3. *Se A é um operador setorial com resolvente compacto em X, então e^{-At} é compacto em X^α, com $0 \leq \alpha < 1$, para $t > 0$.*

Demonstração: Suponha B um conjunto limitado em X^α, com $0 \leq \alpha < 1$. Para $x \in B$,

$$\begin{aligned} \|e^{-At}x\|_1 &= \|Ae^{-At}x\| = \|A^{1-\alpha}e^{-At}A^\alpha x\| \\ &\leq \|A^{1-\alpha}e^{-At}\|\|A^\alpha x\| \leq C_\alpha t^{-(1-\alpha)}e^{\delta t}\|A^\alpha x\| \\ &= \frac{k}{t^{1-\alpha}}\|A^\alpha x\| < +\infty \end{aligned}$$

Portanto $e^{-At}B$ é limitado em X^1. Como $\overline{X^1} = X^\alpha$ e $X^1 \subset X^\alpha$ é compacta (pois A tem resolvente compacto), então $e^{-At}B$ é pré-compacto em X^α, e portanto, e^{-At} é compacto em X^α.

■

Teorema 1.7. *Se A, f satisfazem as condições impostas acima, o resolvente de A é compacto e $T(t)$ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados para todo $t > 0$, então $T(t)$ é compacto em X^α para $t > 0$.*

Demonstração: Como $T(t)u_0 = u(t; u_0)$, então $T(t)$ satisfaz a fórmula da variação das constantes:

$$T(t)x = e^{-At}x + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(T(\tau)x)d\tau,$$

para $t \geq 0$ e $x \in X^\alpha$. Suponha $M \subset X^\alpha$. Seja

$$M_1 = \{\int_0^t e^{-A\tau} f(T(t-\tau)x)d\tau; \;\; x \in M\}.$$

Se $t > 0$ é fixado e $N = \{T(t-\tau)x; \;\; x \in M, \;\; 0 \leq \tau \leq t\}$ é limitado, escolha $0 < \varepsilon < t$ e note que

$$\int_0^t e^{-At} f(T(t-\tau)x)d\tau = \int_0^\varepsilon e^{-A\tau} f(T(t-\tau)x)d\tau + e^{-A\varepsilon}\int_\varepsilon^t e^{-A(\tau-\varepsilon)} f(T(t-\tau)x)d\tau$$

E assim

$$\begin{aligned} |\int_0^\varepsilon A^\alpha e^{-A\tau} f(T(t-\tau)x)d\tau| &\leq \int_0^\varepsilon \|A^\alpha e^{-A\tau} f(T(t-\tau)x)\|d\tau \\ &\leq \int_0^\varepsilon C_\alpha \tau^{-\alpha} e^{-\delta\tau}\|f(T(t-\tau)x)\|d\tau \\ &= C_\alpha \int_0^\varepsilon \frac{1}{\tau^\alpha} e^{-\delta\tau}\|f(T(t-\tau)x)\|d\tau \\ &= C_\alpha M_1 \int_0^\varepsilon \frac{1}{\tau^\alpha} d\tau = C\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned} |\int_\varepsilon^t A^\alpha e^{-A(\tau-\varepsilon)} f(T(t-\tau)x)d\tau| &\leq \int_\varepsilon^t \|A^\alpha e^{-A(\tau-\varepsilon)} f(T(t-\tau)x)\|d\tau \\ &\leq \int_\varepsilon^t C_\alpha (\tau-\varepsilon)^{-\alpha} e^{-\delta(\tau-\varepsilon)}\|f(T(t-\tau)x)\|d\tau \\ &= C_\alpha M_1 \int_\varepsilon^t (\tau-\varepsilon)^{-\alpha} d\tau \\ &\leq C\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Como $e^{-A\varepsilon}$ é compacto, então a $\alpha-$medida da não-compacidade de M_1, $\alpha(M_1)$ satisfaz

$$\alpha(M_1) \leq \frac{c}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}$$

E, sendo ε arbitrário, temos que $\alpha(M_1) = 0$ e M_1 é compacto. Isso prova o Teorema.

■

1.4 Atratores para Semigrupos

Nesta seção vamos definir atratores globais e apresentar alguns resultados que garantem a existência desses atratores globais. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados com mais detalhes em [13] e em [11].

Definição 1.7. *Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ pertence a classe $\mathcal{K}$ se para todo $t > 0$, o operador $T(t)$ é compacto, isto é, para todo conjunto limitado $B \subset X$, sua imagem $T(t)B$ é pré-compacta.*

Definição 1.8. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo de Classe C_0. Dado $x \in X$, definimos a órbita positiva por x como sendo $\gamma^+(x) = \{T(t)x;\ \ t \geq 0\}$, e se $B \subset X$, $\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x)$.*

Dado $x \in X$, definimos o conjunto $w-$limite associado a x por

$$w(x) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)x}.$$

Analogamente, dado $B \subset X$, definimos o conjunto w-limite de B como

$$w(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}.$$

Observe que a definição acima é equivalente a:

$$y \in X; \exists \{t_k\} \rightarrow +\infty \text{ e } \{x_k\} \subset B \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(t_k)x_k.$$

De fato, se $y \in w(B)$, então $y \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$ para todo s$\geq$ 0. Assim, existe uma sequência $\{T(t_k)x_k\} \subset \bigcup_{t \geq s} T(t)B$ tal que $T(t_k)x_k \rightarrow y$ quando $k \rightarrow +\infty$, para todo $s \geq 0$, ou seja, para $k \geq 0$, existe $t_k > k$ e $x_k \in B$ tal que $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(t_k)x_k$. Por outro lado, se y é tal que existe $\{t_k\} \rightarrow +\infty$ e $\{x_k\} \subset B$ tal que $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(t_k)x_k$, então $y \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$ para todo $s \geq 0$, mostrando que $y \in \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$.

Definição 1.9. *Dado um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, $x \in X$ e $A \subset X$, então definimos:*

1. $\gamma^+_{[t_1,t_2]}(x) = \{T(t)x,\ \ t \in [t_1, t_2]\}$ *e* $\gamma^+_{[t_1,t_2]}(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma^+_{[t_1,t_2]}(x)$.
2. $\gamma^+_t(x) = \gamma^+_{[t,\infty)}(x) = \{T(\tau)x,\ \ \tau \in [t, \infty)\}$ *e* $\gamma^+_t(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma^+_t(x)$.

Definição 1.10. *Sejam $A, M \subset X$. Dizemos que A atrai M (ou M é atraído por A) pelo semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_1 \geq 0$ tal que $T(t)M \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq t_1$, onde $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ é uma ε-vizinhança de A, isto é, $\mathcal{O}_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$. Se A atrai cada ponto $x \in X$, A é dito um atrator para o semigrupo. E ainda, A é dito um B-atrator se A atrai cada conjunto limitado $B \subset X$.*

Definição 1.11. *Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, é dito ser assintóticamente suave se, para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio, limitado e fechado para o qual $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Lema 1.4. *Se um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é assintoticamente suave e B é um subconjunto não vazio de X tal que $\gamma^+(B)$ é limitado, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11] e uma demonstração semelhante será apresentada logo abaixo. ■

Definição 1.12. *Um conjunto $S \subset X$ é invariante se $T(t)S = S$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.13. *Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ em um espaço de Banach X é dito ser ponto dissipativo (respectivamente, B-dissipativo) se ele possui um atrator limitado em X (respectivamente, um B-atrator limitado). Diremos que $\mathcal{A}$ é um atrator global se $\mathcal{A}$ é o maior conjunto compacto e invariante que atrai subconjuntos limitados em X.*

O próximo resultado garante a existência de atratores globais para semigrupos de classe $\mathcal{K}$.

Teorema 1.8. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo de classe $\mathcal{K}$, $A \subset X$ e $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Suponha que $\gamma_\lambda^+(A) \in B$, onde B é um conjunto limitado. Então*

(i) $w(A)$ é não-vazio e compacto;

(ii) $w(A)$ atrai A;

(iii) $w(A)$ é invariante, isto é, $T(t)(w(A)) = w(A)$ para todo $t \geq 0$;

(iv) $w(A)$ é o conjunto minimal fechado o qual atrai A;

(v) Se A é conexo e o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é contínuo, então $w(A)$ é conexo.

Demonstração:

(i) Como $\{T(t); t > 0\}$ é de classe $\mathcal{K}$, o conjunto $T(t)\gamma_{\lambda}^{+}(A) = \gamma_{t+\lambda}^{+}(A),\ \ 0 < t < +\infty$ é pré-compacto e $\gamma_{t_2+\lambda}^{+}(A) \subset \gamma_{t_1+\lambda}^{+}(A)$ para todo $t_2 > t_1$. Segue que $w(A) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma_{t+\lambda}^{+}(A)}$ é a interseção de uma família ordenada de conjuntos compactos. Portanto $w(A)$ é compacto. E além disso, $w(A)$ é não-vazio, pois $\{T(t_k)x_k; x_k \in A\}$, onde $t_k > \lambda$ é uma sequência limitada, logo admite subsequência convergente para $y \in w(A)$.

(ii) Para mostrar que $w(A)$ atrai A, suponha que isso não aconteça. Então existe $\varepsilon > 0$, uma sequência de inteiros $t_k \to +\infty$, quando $k \to +\infty$ e uma sequência $x_k \in A$ tal que

$$||T(t_k)x_k - w(A)|| > \varepsilon, \ \text{ para } \ k = 1, 2...$$

Como $\{T(t_k)A,\ \ k \geq 1\}$ pertence a um compacto, existe subsequência convergente de $\{T(t_k)x_k\}$, o qual seu limite pertence a $w(A)$, o que é absurdo. Portanto $w(A)$ atrai A.

(iii) Inicialmente mostremos que $T(t)w(A) \subset w(A)$. Se $y \in w(A)$, então $y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k$ para algum $x_k \in A$ e $t_k \to +\infty$. Então, quando $k \to 0$

$$T(t)y = T(t)(\lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k) = \lim_{k\to\infty} T(t + t_k)x_k.$$

Assim, $T(t)y \in w(A)$, o que mostra a primeira inclusão.

Para mostrar que $w(A) \subset T(t)w(A)$, seja $x \in w(A)$. Então $x = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k$, para algum $x_k \in A$ e $t_k \to \infty$. Podemos assumir que $1 + \lambda + t \leq t_1 < t_2 < ...$ Os pontos $y_k = T(t_k - t)x_k$, quando $k \to \infty$ pertencem ao conjunto pré-compacto $\gamma_{\lambda+1}^{+}(A)$. Portanto existe uma subsequência convergente y_{k_j} com $\lim_{j\to\infty} y_{k_j} = y \in w(A)$. Consequentemente,

$$x = \lim_{j\to\infty} T(t_{k_j})x_{k_j} = \lim_{j\to\infty} T(t)y_{k_j} = T(t)y.$$

Assim, $x \in T(t)w(A)$ e, portanto, $w(A) \subset T(t)w(A)$.

(iv) Suponha por absurdo que exista um conjunto fechado $F \subsetneq w(A)$ o qual atrai A. Sendo $w(A)$ compacto, F é compacto. Seja $y \in w(A)\backslash F$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\varepsilon(y) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(F) = \emptyset$. Como F atrai A, existe $t_\varepsilon \geq 0$ tal que para todo $t \geq t_\varepsilon$ então $T(t)A \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F)$. Além disso, $y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k$, com $x_k \in A$ e $t_k \to \infty$, quando $k \to \infty$. Logo $T(t_k)A \cap \mathcal{O}_\varepsilon(y) \neq \emptyset$, para t_k suficientemente grande e, assim, $\mathcal{O}_\varepsilon(y) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(F) \neq \emptyset$, o que é absurdo.

(v) Seja A conexo e o semigrupo $\{T(t)\}$ contínuo. Suponha por absurdo que $w(A) = F_1 \cup F_2$, com F_1, F_2 não-vazios, fechados e disjuntos. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\varepsilon(F_1) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(F_2) = \emptyset$. E mais, $\mathcal{O}_\varepsilon(w(A)) = \mathcal{O}_\varepsilon(F_1) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(F_2)$. Como $w(A)$ atrai A, existe $t_1 = t_1(\varepsilon, A)$ tal que, para $t \geq t_1$ então $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(w(A))$.

Considere a aplicação $\varphi : [t, +\infty) \times A \longrightarrow X$ definida por $\varphi(\tau, x) = T(\tau)x$, a qual é contínua. Como $[t, +\infty) \times A$ é conexo, então $\varphi([t, +\infty) \times A) = \gamma_t^+(A)$ é conexo. Assim para todo $t \geq t_1$, temos que $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_1)$ ou $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_2)$, ou seja, $w(A) \subset F_1$ ou $w(A) \subset F_2$, o que implica $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$, absurdo. Portanto $w(A)$ é conexo.

Completamos assim a prova deste resultado. ∎

Temos também o

Teorema 1.9. *Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo assintoticamente suave em um espaço de Banach X, ponto dissipativo e órbitas de conjuntos limitados são limitadas, então existe um atrator global em X.*

Vejamos agora uma caracterização dos atratores globais. Considere $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo em um espaço de Banach X e seja E o conjunto dos pontos de equilíbrio de $T(t)$, ou seja, $E = \{x \in X; T(t)x = x \ \ \forall t \geq 0\}$.

Definição 1.14. *Um semigrupo contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$ é um Sistema Gradiente se*

(i) Toda órbita positiva limitada é pré-compacta;

(ii) Existe um funcional de Liapunov para $T(t)$, isto é, existe uma função contínua $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- *V é limitada inferiormente;*
- *$V(x) \to +\infty$ quando $\|x\| \to +\infty$;*
- *$V(T(t)x)$ é não crescente em t para cada $x \in X$;*
- *Se x é tal que $T(t)x$ está definida para todo $t \geq 0$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \geq 0$, então x é um ponto de equilíbrio.*

Lema 1.5. *Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um sistema gradiente, então o conjunto w-limite $w(x) \subset E$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Dado $x \in X$, temos que $V(T(t)x) \leq V(x)$ para todo $t \geq 0$ e assim o subconjunto $\{V(T(t)x); t \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ é limitado. Temos que $\gamma^+(x)$ é limitada, pois caso contrário, existiria uma sequência $\{T(t_k)x\}$ tal que $||T(t_k)x|| \to +\infty$, o que implicaria $V(T(t_k)x) \to +\infty$ quando $k \to \infty$, o que é uma contradição, já que $\{V(T(t)x)\}$ é limitada. Portanto $\gamma^+(x)$ é limitada para cada $x \in X$.

Por este fato e pelo item (i) do Teorema 1.8 obtemos que $\gamma^+(x)$ é pré-compacta para cada $x \in X$. Sendo assim, dada qualquer sequência $\{T(t_k)x\}$ com $t_k \to \infty$, existe uma subsequência $\{T(t_{k_r})x\} \subset \{T(t_k)x\}$ que é convergente. Pela continuidade de V, $\{V(T(t_{k_r})x)\}$ converge, e como $\{V(T(t_{k_r})x)\}$ é uma sequência não crescente e limitada inferiormente, ela converge para o seu ínfimo, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k_r \to \infty} V(T(t_{k_r})x) = c = \inf\{V(T(t_{k_r})x)\}.$$

Mostremos que c independe da sequência escolhida. De fato, sejam

$$c_1 = \inf\{V(T(t_{k_1})x)\}, t_{k_1} \to \infty$$

e

$$c_2 = \inf\{V(T(t_{k_2})x)\}, t_{k_2} \to \infty.$$

Se $c_1 \neq c_2$, sem perda de generalidade, podemos considerar $c_1 > c_2$. Pela definição de c_1, deve existir k_0 tal que $V(T(t_{k_{0_1}})x) < c_2$. Logo $V(T(t_{k_{0_1}})x) < V(T(t_{k_2})x)\ \ \forall t_{k_2}$, o que é uma contradição, pois $t_{k_2} \to \infty$ e assim existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k_{2_i}} > t_{k_{0_1}}\ \ \forall i > i_0$ e logo $V(T(t_{k_{2_i}})x) \leq V(T(t_{k_{0_1}})x)$. Portanto, $V(T(t)x) \to c$ quando $t \to \infty$.

Seja $y \in w(x)$. Então existe uma sequência $\{T(t_k)x\}, t_k \to \infty$ tal que $y = \lim\limits_{k \to \infty} T(t_k)x$. Pela continuidade de V, $V(T(t_k)x) \to V(y)$, e pela unicidade do limite, $V(y) = c$. Como $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto temos que $w(x)$ é invariante, logo $y \in w(x) \Rightarrow T(t)y \in w(x), \forall t \geq 0$. Pelo raciocíonio acima, $V(T(t)y) = c = V(y)$, para todo $t \geq 0$. Pela definição de funcional de Liapunov, temos que $y \in E$. Portanto $w(x) \subset E$ para cada $x \in X$. ■

A demonstração do próximo Teorema pode ser encontrada em [13].

Teorema 1.10. *Suponha que o semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ pertença a classe $\mathcal{K}$ e $\gamma^+(x)$ é limitada para todo $x \in X$. Se para esse semigrupo existe uma função de Liapunov, então* *seu atrator $\mathcal{A}$ é não-vazio e coincide com o conjunto E de todos os pontos estacionários. Se E é um conjunto limitado e $\{T(t), t \geq 0\}$ é limitado então o semigrupo tem um atrator global.*

Nessa mesma linha temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [11]

Teorema 1.11. *Se o semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ é um sistema gradiente, assintóticamente suave e o conjunto E dos pontos de equilíbrio é limitado, então existe um atrator global, $\mathcal{A}$, para $\{T(t), t \geq 0\}$ e*

$$\mathcal{A} = \{y \in X;\ T(-t)y \ \text{ está definido para } \ t \geq 0 \ \text{ e } \ T(-t)y \to E \ \text{ quando } \ t \to \infty\}.$$

1.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção definimos os espaços de Sobolev e enunciamos alguns Teoremas de imersões, como o de Rellich-Kondrachov, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3] e [1].

A partir de agora, considere $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, conexo com fronteira suave. Sejam $k \in \mathbb{Z}_+$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.15. *O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido por:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ mensurável tal que } \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \text{ para } \ |\alpha| \leq k\}$$

onde $D^\alpha u$ é considerado no sentido fraco, ou seja, para cada α o qual satisfaz $|\alpha| \leq k$, existe $v \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\phi(x) dx,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

No espaço $W^{k,p}(\Omega)$ definimos as normas:

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $1 \leq p < +\infty$ e

$$||u||_{W^{k,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \text{sup ess } |D^\alpha u(x)|.$$

se $p = \infty$. Para $p = 2$, usamos a notação $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$.

Proposição 1.2. *O Espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Se Ω é de dimensão 1, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ com imersão contínua. Em dimensão $n \geq 2$ esta inclusão vale somente para $p > n$.

Corolário 1.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$.*

(i) Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;

(ii) Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$;

(iii) Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

com imersões contínuas. Além disso, se $p < n$ temos para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\|x - y\|^\alpha,$$

para quase todo $x, y \in \Omega$, onde c depende somente de Ω, p, n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.12 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha Ω limitado de classe C^1. Temos*

(i) Se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p')$, onde $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;

(ii) Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$;

(iii) Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Além disso, as imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersões compactas para todo p.

1.6 O Espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$

Definição 1.16. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, ou seja,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\,W^{k,p}(\Omega)}.$$

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável; é reflexivo se $1 < p < \infty$. Podemos também caracterizar as funções de $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções em $W^{k,p}(\Omega)$ que possuem o traço nulo, isto é, que se "anulam sobre $\partial\Omega$".

Corolário 1.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que Ω é um aberto limitado. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo de Ω e p, tal que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Em particular a expressão $||\nabla u||_{L^p}$ é uma norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é equivalente à norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Denotamos por $W^{-k,q}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$ e q satisfazendo a relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se Ω é limitado temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-k,q}(\Omega)$$

se $\dfrac{2n}{n+2} \leq p < \infty$ com imersões contínuas e densas. Se Ω não é limitado temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega)$$

se $\dfrac{2n}{n+2} \leq p \leq 2$.

Observação 1.2. *Segue do Teorema de Rellich-Kondrachov que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$.*

1.7 Vizinhança de um Ponto de Equilíbrio

Consideremos A um operador setorial em um espaço de Banach X e seja $f : U \longrightarrow X$, onde U é uma vizinhança cilíndrica em $\mathbb{R} \times X^\alpha$ de $(\tau, \infty) \times \{x_0\}$. Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio para o problema a seguir se $x(t) = x_0$ é uma solução de

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t,x), \quad t > t_0$$

isto é, se $x_0 \in D(A)$ e $Ax_0 = f(t, x_0)$, para todo $t > t_0$.

Definição 1.17. *Uma solução $\overline{u}(t)$ sobre $[t_0, +\infty)$ é estável se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que qualquer solução u com $\|u(t_0) - \overline{u}(t_0)\|_\alpha < \delta$ está definida para $t \in [t_0, +\infty)$ e satisfaz*

$$\|u(t) - \overline{u}(t)\|_\alpha < \varepsilon \quad se \quad t > t_0.$$

Uma solução $\overline{u}$ *é uniformemente estável se* $x_1 \longmapsto u(t; t_1, x_1)$ *é contínua quando* $x_1 \to \overline{u}(t_1)$*, uniformemente em* $t \geq t_1 \geq t_0$.

Uma solução $\overline{u}$ *é uniformemente assintoticamente estável se ela é uniformemente estável e* $u(t; t_1, x_1) - \overline{u}(t) \to 0$ *quando* $t - t_1 \to +\infty$ *uniformemente em* $t_1 \geq t_0$ *e* $\|x_1 - \overline{u}(t_1)\|_\alpha < \delta$ *para alguma constante* $\delta > 0$.

Teorema 1.13 (Estabilidade)**.** *Considere* A *e* f *como definidos acima e seja* x_0 *um ponto de equilíbrio. Suponha que*

$$f(t, x_0 + z) = f(t, x_0) + Bz + g(t, z),$$

onde B *é um operador linear limitado de* X^α *em* X *e* $\|g(t, z)\| = o(\|z\|_\alpha)$ *quando* $\|z\|_\alpha \to 0$ *uniformemente em* $t > \tau$ *e* $f(t, x)$ *é localmente Hölder contínua em* t*, localmente Lipschitziana em* x *sobre* U*. Se o espectro de* $A - B$ *permanece em* $\{Re\ \alpha > \beta\}$ *para algum* $\beta > 0$*, então a equação original tem a solução* x_0 *uniformemente assintoticamente estável em* X^α*. Mais precisamente, existe* $\rho > 0, M \geq 1$ *tal que se* $t_0 > \tau$ *e* $\|x_1 - x_0\|_\alpha \leq \dfrac{\rho}{2M}$ *então existe uma única solução de*

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), \;\; t > t_0, \;\; x(t_0) = x_1$$

definida em $[t_0, +\infty)$ *e satisfazendo para* $t \geq t_0$

$$\|x(t; t_0, x_1) - x_0\|_\alpha \leq 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x_1 - x_0\|_\alpha.$$

Demonstração: Como A é setorial, temos $A^{-\alpha}$ é limitado e sendo B também limitado então $-BA^\alpha$ é limitado e assim, pelo Corolário 1.1 que $L = A - B$ é setorial. Consideremos $0 < \beta < \beta' < Re\ \sigma(L)$, temos pelo Lema 1.3 e Teorema 1.4 que existe $M \geq 1$ tal que para todo $t \geq 0$ e $z \in X^\alpha$

$$\|e^{-Lt}z\|_\alpha = \|A^\alpha e^{-Lt}z\| \leq C\|L^\alpha e^{-Lt}z\| \leq Mt^{-\alpha}e^{-\beta' t}\|z\|$$

$$\|e^{-Lt}z\|_\alpha = \|A^\alpha e^{-Lt}z\| = \|e^{-Lt}A^\alpha z\| \leq Me^{-\beta' t}\|z\|_\alpha$$

Escolha $\sigma > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$M\sigma \int_0^\infty s^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)s}ds < \frac{1}{2}$$

e como por hipótese $\|g(t, z)\| = o(\|z\|_\alpha)$ se $\|z\|_\alpha \to 0$ uniformemente em $t > \tau$, escolhemos $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que $\|g(t, z)\| \leq \sigma\|z\|_\alpha$ para $\|z\|_\alpha \leq \rho$ e $t > \tau$.

Seja $z(t) = x(t; t_0, x_1) - x_0$. Se $\|x_1 - x_0\|_\alpha \leq \dfrac{\rho}{2M}$, existirá a solução em algum intervalo de tempo e $\|z(t)\|_\alpha \leq \rho$. Se $\|z(s)\|_\alpha < \rho$ para $0 < s < t$, então $z(t)$ é a solução de

$$\frac{dz}{dt} + Lz = g(t, z).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_\alpha &= \|e^{-L(t-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)}g(s, z(s))ds\|_\alpha \\
&\leq Me^{-\beta(t-t_0)}\|z(t_0)\|_\alpha + \sigma M \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta'(t-s)}\|z(s)\|_\alpha ds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \rho\sigma M \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta'(t-s)}ds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.
\end{aligned}$$

Agora, se $\|z(t)\|_\alpha < \rho$ sobre $t \in [t_0, t_1]$ com t_1 maximal, então $t_1 = +\infty$ ou $\|z(t_1)\|_\alpha = \rho$, assim pelo cálculo feito acima segue que $t_1 = +\infty$.

Se $u(t) = \sup\limits_{s \in [t_0, t]} \|z(s)\|_\alpha e^{\beta(s-t_0)}$, então

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_\alpha e^{\beta(t-t_0)} &\leq M\|z(t_0)\|_\alpha + M\sigma \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)(t-s)}ds \cdot u(t) \\
&\leq M\|z(t_0)\|_\alpha + \frac{1}{2}u(t).
\end{aligned}$$

Tomando o supremo de ambos os lados da desigualdade acima obtemos que

$$u(t) \leq 2M\|z(t_0)\|_\alpha.$$

Daí,

$$\|x(t; t_0, x_1) - x_0\|_\alpha \leq 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x_1 - x_0\|_\alpha,$$

completando a demonstração. ■

Enunciaremos agora o Teorema da instalibilidade, cuja demonstração se encontra em [12].

Teorema 1.14 (Instalibidade)**.** *Consideremos A e f como exposto acima e seja x_0 um ponto de equilíbrio. suponha que*

$$f(t, x_0 + z) = f(t, x_0) + Bz + g(t, z)$$

onde B é um operador linear limitado de X^α em X e

$$\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|_\alpha$$

para $\|z_1\|_\alpha, \|z_2\|_\alpha \leq \rho$ *e* $k(\rho) \to 0$ *quando* $\rho \to 0^+$.

Se o espectro $L = A - B$ *é tal que* $\sigma(L) \cap \{Re\ \lambda < 0\}$ *é um conjunto espectral não-vazio, então o ponto de equilíbrio* x_0 *é instável. Mais precisamente, existe* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $\{x_n, n \geq 1\}$ *com* $\|x_n - x_0\|_\alpha \to 0$ *se* $n \to \infty$ *mas para todo* n

$$\sup \|x(t; t_0, x_n) - x_0\|_\alpha \geq \varepsilon_0 >, 0$$

sendo o supremo tomado no intervalo maximal de existência de $x(\cdot; t_0, x_n)$.

Capítulo 2

Existência de Atratores Globais para o Problema de Chafee e Infante

2.1 Introdução

Neste capítulo nosso objetivo principal é mostrar a existência de atratores globais para o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda f(u), x \in [0,\pi] \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

onde λ é um número real não-negativo, $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\phi \in H_0^1[0,\pi]$ e f satisfaz

(H1) $f(0) = 0$;

(H2) $f'(0) = \alpha > 0$;

(H3) $\limsup\limits_{\|u\| \to \infty} \dfrac{f(u)}{u} \leq 0$;

(H4) $\text{sgn} f''(u) = -\text{sgn}\, u$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Um função satisfazendo as condições acima é $f(u) = u - u^3$ para $u \in \mathbb{R}$ e é essa função que estamos utilizando neste capítulo para fazermos os gráficos das soluções bem como o retrato de fase para (2.1). Esse problema foi estudado por N. Chafee e E. F. Infante em [8], 1974. Neste capítulo mostraremos também o diagrama de bifurcação (em função de λ) dos pontos de equilíbrio e as propriedades de estabilidade de cada um deles.

2.2 Existência Global de Soluções e Existência de Atratores Globais

Vamos usar os resultados do Capítulo 1 para obter existência local, unicidade e existência global de soluções para o problema (2.1) e a existência de atratores globais. Seja $X = L^2(0,\pi)$ e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ operador linear definido por

$$A\phi(x) = -\phi_{xx},$$

onde $D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$. O operador A pode ser estendido a um operador positivo definido, auto-adjunto e densamente definido em X. Observamos que $D(A^{1/2}) = H_0^1(0,\pi) = X^{1/2}$ e como $\phi \in X^{1/2}$, então $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{1/2}$, pois se $x \in (0,\pi)$ temos

$$|\phi(x)|^2 = |\phi(x) - \phi(0)|^2 = |\int_0^x \phi'(s)ds|^2 \leq \int_0^x |\phi'(s)|^2 ds = \|\phi'\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq \|\phi\|^2_{1/2}.$$

Definindo a função:

$$\begin{array}{cccccc} f^e : & H_0^1(0,\pi) & \longrightarrow & L^2(0,\pi) & & \\ & \phi & \longmapsto & f^e(\phi) : [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & x & \longmapsto & f^e(\phi)(x) = f(\phi(x)), \end{array}$$

temos que o problema (2.1) pode ser escrito na forma abstrata

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = f^e(u), \quad t > 0 \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Como A é um operador setorial, vamos verificar agora que $f^e : X^{1/2} \longrightarrow X$ é localmente Lipschitziana, para assim aplicarmos o Teorema 1.5.

Considere $\phi, \psi \in X^{1/2}$ com $\|\phi\|_{1/2}, \|\psi\|_{1/2} \leq r$. Então como mostrado acima

$$|\phi(x)|, |\psi(x)| \leq r.$$

Sendo f' uma função de classe C^1, é limitada em um compacto, ou seja, $|f'(s)| \leq c$ para todo $s \in [0,\pi]$. Assim

$$\begin{aligned} \|f^e(\phi) - f^e(\psi)\|^2_{L^2} &= \int_0^\pi [f(\phi(x)) - f(\psi(x))]^2 dx = \int_0^\pi (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f'(s)ds)^2 dx \\ &\leq c^2 \int_0^\pi |\phi(x) - \psi(x)|^2 dx \leq \pi c^2 \|\phi - \psi\|^2_{1/2}, \end{aligned}$$

ou seja, f^e é localmente Lipschitziana. Sendo $f \in C^2$, segue que f^e é uma função de classe C^1. Aplicando o Teorema 1.5, temos que existe uma solução local em $H_0^1(0,\pi)$ para o problema (2.2).

E assim (2.2) define um semigrupo local C^1 em $X^{1/2} = H_0^1(0,\pi)$. Denote por $u(t,x;\phi)$ a solução de (2.1). O objetivo agora é mostrar que as soluções dessa equação estão globalmente definidas. Para isso, seja o funcional dado por

$$V(\phi) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\phi_x^2(x) - \lambda F(\phi(x))\right] dx, \tag{2.3}$$

onde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$.

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(u(t,\cdot,\phi)) &= \frac{d}{dt}\langle \frac{1}{2}u_x^2(x) - \lambda F(u(x)), 1\rangle_{L^2} \\
&= \frac{d}{dt}\langle -\frac{1}{2}u_{xx}, u\rangle_{L^2} - \lambda \frac{d}{dt}\langle F(u), 1\rangle_{L^2} \\
&= \langle Au, u_t\rangle_{L^2} - \langle f(u(t,\cdot,\phi)), u_t\rangle_{L^2} \qquad (2.4) \\
&= \langle Au - f(u(t,\cdot,\phi)), u_t\rangle_{L^2} - \langle -u_t, u_t\rangle_{L^2} \\
&= -\int_0^1 u_t^2 dt \leq 0.
\end{aligned}$$

A condição (H3) do problema (2.1) implica que, para todo ε,

$$F(s) - \varepsilon s^2 = \int_0^s f(\tau)d\tau - \varepsilon s^2 = \int_0^s \left[\frac{f(\tau)}{\tau} - 2\varepsilon\right]\tau d\tau \leq C_\varepsilon$$

para $s > 0$. Se $s < 0$, obtém-se uma estimativa similar. Usando esse fato e também que $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{H_0^1}$ tem-se

$$\begin{aligned}
V(\phi) &\geq \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1}^2 - \lambda\int_0^\pi \varepsilon\phi^2(x) + C_\varepsilon dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1}^2 - \varepsilon\lambda\pi\|\phi\|_{H_0^1}^2 - \lambda C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{4\lambda\pi}$ segue que

$$\|\phi\|_{H_0^1}^2 \leq 4V(\phi) + 4\lambda C_{\frac{1}{4\lambda\pi}}. \tag{2.5}$$

Sendo $V(u(t,\phi))$ não crescente em t, por (2.4), tem-se que $V(u(t,\phi)) \leq V(\phi)$. Logo (2.5) implica que

$$\|u(t,\phi)\|_{H_0^1}^2 \leq 4V(u(t,\phi)) + 4\lambda C_{\frac{1}{4\lambda\pi}} \leq 4V(\phi) + 4\lambda C_{\frac{1}{4\lambda\pi}}. \tag{2.6}$$

Assim, pelo Teorema 1.6 as soluções estão globalmente definidas.

Teorema 2.1. *Para cada $\lambda \geq 0$, o problema (2.1) define um C_0-semigrupo sobre $H_0^1(0,\pi)$ por*

$$\begin{array}{rccl} T(t): & H_0^1(0,\pi) & \longrightarrow & H_0^1(0,\pi) \\ & \phi & \longmapsto & T(t)\phi = u(t,\cdot,\phi) \end{array}$$

Demonstração: Como $u(t,\cdot,\phi)$ está globalmente definida, então $T(t)$ está definido para todo $t \geq 0$. Desde que são válidas a unicidade da solução e a continuidade em relação aos dados iniciais, então as propriedades de semigrupo são satisfeitas. ∎

Teorema 2.2. *O semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é um sistema gradiente.*

Demonstração: Inicialmente, a órbita positiva limitada é pré-compacta. De fato, para qualquer $r > 0$, por definição de f^e e por $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{H_0^1(0,\pi)}$, existe K_r tal que

$$\|f^e(\phi)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi |f(\phi(x))|^2 dx \leq \int_0^\pi C(\phi(x))^2 dx \leq C\pi\|\phi\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq \pi C r^2 = K_r$$

sempre que $\|\phi\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq r$. Também existirá uma outra constante C_r tal que

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\phi_x^2(x) - \lambda F(\phi(x))\right] dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi |\phi_x|^2 dx + \lambda \int_0^\pi \int_0^{\phi(x)} |f(s)| ds \;\, dx \\ &\leq \frac{1}{2} r^2 + C\pi r = C(r) \end{aligned}$$

sempre que $\|\phi\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq r$. A desigualdade (2.6) implica que

$$\|u(t,\cdot,\phi)\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq 4V(\phi) + 4\lambda C_{\frac{1}{4\lambda\pi}} \leq 4C(r) + 4\lambda C_{\frac{1}{4\lambda\pi}}. \tag{2.7}$$

Assim, obtemos que as órbitas de conjuntos limitados são limitadas sob $T(t)$. Pelo Teorema 1.8, $w(\phi)$ é não-vazio e compacto. Como $\overline{\gamma^+(\phi)} \subset w(\phi)$, segue que a órbita positiva é pré-compacta. A função definida em (2.3) é um funcional de Liapunov para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ pois

(i) Por (2.5), V é limitada inferiormente e $V(\phi) \to +\infty$ quando $\|\phi\|_{H_0^1(0,\pi)} \to +\infty$;

(ii) $V(u(t,\phi))$ é não-crescente em t;

(iii) Se $V(T(t)\phi) = V(\phi)$ por (2.4) temos $\phi \in E$.

Assim, pelo Lema 1.5 segue que o conjunto $w(\phi)$ está contido no conjunto E dos pontos de equilíbrio de $\{T(t); t \geq 0\}$, para cada $\phi \in H_0^1(0,\pi)$. E assim o Teorema segue.

■

Teorema 2.3. *O semigrupo definido no Teorema* 2.1 *é ponto dissipativo.*

Demonstração: Como $w(\phi) \subset E$, basta mostrar que E é limitado. De fato, considere $\phi \in E \subset X^{\frac{1}{2}}$. Então ϕ é um valor extremo do funcional $V(\phi)$, ou seja, $\dfrac{dV}{dt}(\phi(x)) = 0$, o que implica $u_t = 0$ e assim

$$\psi\phi_{xx} + \lambda\psi f(\phi(x)) = 0,$$

para toda $\psi \in H_0^1(0,\pi)$.

Integrando obtém-se

$$\int_0^\pi \phi_x\psi_x - \lambda f(\phi(x))\psi(x)dx = 0,$$

para toda $\psi \in H_0^1(0,\pi)$.

Por (H3) segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $\dfrac{f(u)}{u} \leq \varepsilon$ para $\|u\| \geq M$. Tomando $\psi = \phi$ tem-se:

$$\int_0^\pi \phi_x^2(x)dx = \lambda\int_0^\pi f(\phi(x))\phi(x)dx = \lambda\int_{I_1} f(\phi(x))\phi(x)dx + \lambda\int_{I_2} f(\phi(x))\phi(x)dx,$$

onde $I_1 = \{x \in [0,\pi], |\phi(x)| \geq M\}$ e $I_2 = [0,\pi]\backslash I_1$. Assim existe uma constante $K = K_\varepsilon$ tal que

$$\int_0^\pi \phi_x^2(x)dx \leq \lambda\varepsilon\|\phi\|^2_{L^2(0,\pi)} + K \leq \lambda\varepsilon\|\phi\|^2_{H_0^1(0,\pi)} + K.$$

Logo $\|\phi\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq \varepsilon\|\phi\|_{H_0^1(0,\pi)} + K$, ou seja, o conjunto dos pontos de equilíbrio é limitado por $K(1-\lambda\varepsilon)^{-1}$. ■

Os resultados acima e os resultados contidos na Seção 1.4 mostram o próximo Teorema.

Teorema 2.4. *O problema (2.1) possui um atrator global em* $H_0^1(0,\pi)$.

2.3 As Soluções de Equilíbrio do Problema Semilinear

Para analisar os pontos de equilíbrio do problema (2.1), é necessário analisar as soluções não-triviais da equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0 \\ u(x) = 0 \ \text{ para } \ x = 0 \ \ e \ \ x = \pi. \end{cases} \tag{2.8}$$

Para isso, definimos a função:

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & F(u) = \displaystyle\int_0^u f(\xi)d\xi. \end{array}$$

Sejam

$$a_- = \inf\{u < 0;\ \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x;\ \forall x; u < x < 0\} \tag{2.9}$$

$$a_+ = \sup\{u > 0;\ \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x;\ \forall x; 0 < x < u\} \tag{2.10}$$

Note que $-\infty \leq a_- < 0 < a_+ \leq +\infty$ e também sgn $f(u) =$ sgn u se $u \in (a_-, a_+)$.

Pela condição (H3) e pelas definições de a_- e a_+ obtém-se que $a_+ = +\infty$ ou $f(a_+) = 0$ e também a situação ou $a_- = -\infty$ ou $f(a_-) = 0$, ou seja, há quatro situações. Pela definição da F e levando em conta essas afirmações, segue que F é estritamente crescente em $[0, a_+)$ e estritamente decrescente em $(a_-, 0]$, com $F(0) = 0$.

Defina agora E_+ e E_-, com $0 < E_+, E_- \leq +\infty$ sendo

$$E_+ = \lim_{u \to a_+} F(u) \ \text{ e } \ E_- = \lim_{u \to a_-} F(u)$$

Como F é estritamente crescente em $[0, a_+)$, e estritamente descrescente em $(a_-, 0]$, tem-se que F possui as inversas:

$$U_+ : [0, E_+) \longrightarrow [0, a_+)$$

$$U_- : [0, E_-) \longrightarrow (a_-, 0]$$

Assim desde que sejam considerados os domínios apropriados, tem-se que $F(U_\pm(E)) = E$ e $U_\pm(F(u)) = u$.

Se pensarmos na função $f(u) = u - u^3$, temos $a_- = -1, a_+ = 1, E_- = E_+ = \dfrac{1}{4}$.

Defina agora as funções "time mapping":

$$\tau_\pm : (0, E_\pm) \longrightarrow [0, +\infty)$$

por

$$\tau_+(E) = \int_0^{U_+(E)} (E - F(u))^{-\frac{1}{2}} du$$

$$\tau_-(E) = \int_{U_-(E)}^0 (E - F(u))^{-\frac{1}{2}} du.$$

Seja $\lambda > 0$ fixado e tome $v_0 \in \mathbb{R}$ e u solução de

$$u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0 \tag{2.11}$$

para $x \in [0, \pi]$ tal que $u(0) = 0$ e $u'(0) = v_0$. Multiplicando (2.11) por $u'(x)$ e integrando, conclui-se que u satisfaz:

$$\frac{u'(x)^2}{2} + \lambda F(u(x)) = \lambda E \tag{2.12}$$

onde $E = \dfrac{1}{2}\lambda^{-1}v_0^2 \in \mathbb{R}$. Sendo a solução única, se $u \neq 0$, então $v_0 \neq 0$. E também $(-2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}$, pois se $v_0 \geq (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}$, então $u(x) > 0$ para todo $x \in [0, \pi]$, ou seja, não existe solução. Se $v_0 \leq -(2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}}$ então $u(x) < 0$ para todo $x \in [0, \pi]$, ou seja, também não existe solução. Portanto $E < \max\{E_-, E_+\}$.

As funções τ_+ e τ_- calculadas em $E = \dfrac{1}{2}\lambda^{-1}v_0^2$ fornecem o valor $\sqrt{2\lambda}$ vezes o x-tempo necessário para percorrermos a solução $u(x)$ do ponto inicial $u(0) = 0$, com velocidade v_0 (para τ_+) ou $-v_0$ (para τ_-) até o ponto em que $u'(T_+(E)) = 0$, pois se $u(x)$ satisfaz (2.12) e para $u'(T_+(E)) = 0, u = U_+(E)$ tem-se que:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{2\lambda(E - F(u))} \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{1}{\sqrt{E - F(u)}}$$

Disto segue que

$$\sqrt{2\lambda}\int_0^{T_+(E)} dx = \int_0^{U_+(E)} \frac{1}{\sqrt{E - F(u)}} du = \tau_+(E)$$

Pela simetria do plano de fase em relação ao eixo u, o x-tempo necessário para percorrer $u(x)$ do ponto $(U^+(E), 0)$ ao ponto $(0, -v_0)$ é igual a $T_+(E)$; logo se $u(x)$ é solução então $2T_+(E) = \pi$, ou seja, $\tau^+(E) = (\frac{\lambda}{2})^{1/2}\pi$. Para $\tau_-(E)$ o raciocínio é análogo, pois também por simetria o tempo gasto para percorrer $u(x)$ do ponto $(U^-(E), 0)$ ao ponto $(0, v_0)$ é o mesmo tempo para percorrer $(0, -v_0)$ até $(U_-(E), 0)$, daí vem o nome de "time mapping"das aplicações $\tau_\pm$.

Como $\tau_\pm(E)$ calcula o $\sqrt{2\lambda}x$- tempo necessário para a solução u atingir a velocidade nula, então se somarmos os tempos de "subidas" e "descidas" da solução para atingir essa velocidade nula e multiplicarmos por $\sqrt{2\lambda}$, teremos o valor $\dfrac{\pi}{2}$. Os tempos gastos para a solução "voltar" até os pontos onde ela se anula são iguais e, portanto, temos que o tempo total gasto é π.

Assim, u satisfaz as condições de fronteira $u(0) = u(\pi) = 0$ se, e somente se, E satisfaz exatamente uma das condições, para algum $1 \leq k \in \mathbb{Z}$:

$$k\tau_+(E) + (k-1)\tau_-(E) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

$$k\tau_-(E) + (k-1)\tau_+(E) = \pi \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.14}$$

$$k\tau_+(E) + k\tau_-(E) = \pi \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Note que se E satisfaz (2.13) e (2.14) então u possui $2k$ zeros, enquanto que se E satisfaz (2.15) então u possui $2k+1$ zeros.

Para cada valor de E está associada uma solução para o problema (2.8), assim é necessário resolver as equações (2.13), (2.14) e (2.15) em função do parâmetro λ.

O primeiro passo é fazer uma mudança de variáveis e, assim, obter uma nova expressão para $\tau_\pm$. Dado E com $0 < E < E_-, E_+$, considere a seguinte mudança:

$$Ey^2 = F(u); \;\; y \in [0,1], \;\; u \in [0, U_+(E)],$$

disto segue que $du = \dfrac{2yE}{f(u)}dy$ e também $E - F(u) = E(1-y^2)$ Dessa maneira obtém-se as relações:

$$\begin{aligned} \tau_+(E) &= 2\sqrt{E}\int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{f(u)}\right)dy \;\; (0 < E < E_+) \\ &\qquad\qquad u = U_+(Ey^2), \;\; y \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \tau_-(E) &= 2\sqrt{E}\int_{-1}^0 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{f(u)}\right)dy \;\; (0 < E < E_+) \\ &\qquad\qquad u = U_-(Ey^2), \;\; y \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.17}$$

Teorema 2.5. *As funções $\tau_\pm(E)$ são contínuas em seus domínios e*

$$\lim_{E\to 0^+} \tau_\pm(E) = \frac{\pi}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.18}$$

onde $\alpha = f'(0) > 0$.

Demonstração: A prova será feita para τ_- e analogamente temos o resultado para τ_+. Sendo $\alpha > 0$, então dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\alpha(1-\varepsilon)u \le f(u) \le \alpha(1+\varepsilon)u \quad u \in [0,\delta] \tag{2.19}$$

Como $U_+(E)$ é contínua em 0, dado este δ, existe $\eta > 0$ tal que para $E \in [0,\eta]$ então $U_+(E) \le \delta$. Integrando (2.19) de 0 a u tem-se que

$$\frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon)u^2 \le F(u) \le \frac{\alpha}{2}(1+\varepsilon)u^2.$$

Usando a mudança de variáveis proposta, $y = \sqrt{\frac{F(u)}{E}}$, segue que

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2E}(1-\varepsilon)}u \leq y \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2E}(1+\varepsilon)}u,$$

o que implica

$$\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2\alpha E(1+\varepsilon)^2}} \leq \frac{y}{f(u)} \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2\alpha E(1-\varepsilon)^2}}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $2\sqrt{E}(1-y^2)^{-1/2}$ e integrando de -1 a 0, resulta que

$$\pi\left(\frac{1-\varepsilon}{2\alpha(1+\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_-(E) \leq \pi\left(\frac{1+\varepsilon}{2\alpha(1-\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad E \in [0,\eta].$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\lim_{E\to 0^+} \tau_-(E) = \frac{\pi}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

■

Teorema 2.6. *As funções $\tau_\pm$ são diferenciáveis em seus domínios $(0, E_\pm)$ e*

$$\frac{d\tau_\pm}{dE}(E) > 0, \quad E \in (0, E_\pm),$$

ou seja, $\tau_\pm$ são estritamente crescentes em $(0, E_\pm)$.

Demonstração: A diferenciabilidade em $(0, E_\pm)$ é dada pelas expressões (2.16) e (2.17) e além disso, para τ_+ tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_\pm}{dE}(E) &= \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{f(u)}\right)dy + 2\sqrt{E}\int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-f'(u)y^2}{f^3(u)}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{f(u)}\right)\left(1-\frac{2Ef'(u)y^2}{f^2(u)}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{f(u)}\right)\left(1-\frac{2f'(u)F(u)}{f^2(u)}\right)dy
\end{aligned}$$

Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida por $g(u) = f^2(u) - 2f'(u)F(u)$, então $g'(u) = -2f''(u)F(u)$ e, como para todo $u \in \mathbb{R}$ tem-se $\operatorname{sgn} f''(u) = \operatorname{sgn} u$, então $g'(u) > 0$ para todo $u \in (0, a_+)$ e, como $g(0) = 0$ então $g(u) > 0$, ou seja,

$$\frac{2f'(u)F(u)}{f^2(u)} < 1.$$

Assim $\frac{d\tau_+}{dE} > 0$. ■

Teorema 2.7.

$$\lim_{E \to E_\pm} \tau_\pm(E) = +\infty \tag{2.20}$$

Portanto a imagem de $\tau_\pm$ *é* $(\frac{\pi}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}}, +\infty)$*, onde* $\alpha = f'(0) > 0$.

Demonstração: Será feita apenas para τ_+. Suponha que $a_+ < \infty$. Então $f(a_+) = 0$ e $\overline{u}(x) = a_+$ é uma solução constante para o problema

$$u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0$$

Seja $E_+ = F(a_+)$ e $E \in (0, E_+)$ e considere u a solução de (2.8), satisfazendo $u'(0) = v_0$. Pela continuidade de u com respeito as condições iniciais tem-se que para todo $T > 0$, exsite $\delta > 0$ tal que se $E_+ - \delta < E < E_+$ então $\tau_+(E) > T$. Logo o resultado é válido para o caso $a_+ < \infty$. Para o caso $a_+ = \infty$, pela definição de a_+ tem-se que $f(u) > 0, u \in (0, \infty)$. Por isso e por (H3) $f(u)u^{-1} \to 0$ quando $u \to \infty$. Logo

$$\lim_{u \to \infty} \frac{F(u)}{u^2} = 0.$$

Considere $p = \sup\limits_{u \in (0,\infty)} \frac{f(u)}{u}$ e note que $p > 0$. Assim dado qualquer $0 < \varepsilon < f'(0) < p$, temos que existe $u_0 \in (0, +\infty)$ tal que $f(u_0) = \varepsilon u_0$. Levando em conta (H4), $f'(u)$ é decrescente e existe $\tilde{u} > 0$ tal que $f'(\tilde{u}) = \varepsilon$ e para $u \in (0, \tilde{u}]$ tem-se $f(u) \geq \varepsilon u$. Agora, se $u \in [\tilde{u}, u_0]$ temos

$$0 \leq \int_{u_0}^{u} (f'(s) - \varepsilon) ds = f(u) - \varepsilon u.$$

Disto vem que para todo $u \in [0, u_0]$ então $f(u) > \varepsilon u$. Integrando essa desigualdade de 0 a u chega-se a $F(u) \geq \frac{\varepsilon}{2} u^2, u \in [0, u_0]$. Por (2.20), existe $\overline{u} \in [u_0, +\infty)$ tal que $F(u) \geq \frac{\varepsilon}{2} u^2$ para $u \in [0, \overline{u}]$ e $F(\overline{u}) = \frac{\varepsilon}{2} \overline{u}^2$. Calculando τ_+ em $\overline{E} = F(\overline{u})$ obtém-se

$$\tau_+(\overline{E}) = \int_0^{\overline{u}} (E - F(u))^{-\frac{1}{2}} du \geq \int_0^{\overline{u}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \overline{u}^2 - \frac{\varepsilon}{2} u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} du = \pi (2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pela arbitrariedade de ε, segue o resultado.

■

Teorema 2.8. *Seja*

$$\lambda_n = \frac{n^2}{f'(0)} \quad n = 1, 2, ... \tag{2.21}$$

Para cada $n \geq 1$*, existem duas funções* $E_n^\pm : [\lambda_n, +\infty) \to [0, E_\pm)$ *contínuas com as seguintes propriedades:*

(i) Para cada inteiro $k \geq 1$ e para todo $\lambda \in [\lambda_{2k-1}, +\infty)$, o valor $E^{\pm}_{2k-1}(\lambda)$ é a única solução das equações (2.13) e (2.14) respectivamente;

(ii) Para cada inteiro $k \geq 1$ e todo $\lambda \in [\lambda_{2k}, +\infty)$ tem-se $E^{-}_{2k}(\lambda) = E^{+}_{2k}(\lambda)$ e $E^{+}_{2k}(\lambda)$ é a única solução da equação (2.15);

(iii) Para todo inteiro $n \geq 1$, tem-se $E^{\pm}_{n}(\lambda_n) = 0$ e $\dfrac{dE^{\pm}_n}{d\lambda}(\lambda) > 0$ para $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$; e também $E^{+}_{n+1}(\lambda) < E^{\pm}_{n}(\lambda);E^{-}_{n+1}(\lambda) < E^{\pm}_{n}(\lambda)$ para $\lambda \in (\lambda_{n+1}, +\infty)$.

Demonstração: Seja $n \geq 1$. Se n for ímpar, então n é da forma $2k-1$, para $k \geq 1$. Defina $E^{\pm}_n$ como $E^{\pm}_n(\lambda) = E$, onde E satisfaz (2.13) e (2.14), respectivamente. Essa função está bem definida, pois $h_{\pm}(E) = k\tau_{\pm}(E) + (k-1)\tau_{\mp}(E)$, com $E \in (0, E_{\pm})$ é uma função crescente de E com imagem $(\pi(\frac{\lambda_n}{2})^{1/2}, +\infty)$. E também

$$E = h^{-1}_{\pm}\left(\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

é uma função estritamente crescente de λ e $E \in (0, E_{\pm})$ e por continuidade $E^{\pm}_n(\lambda_n) = 0$. Se n é par, então n é da forma $2k$, para $k \geq 1$. Defina as funções $E^{+}_n = E^{-}_n$ como $E^{+}_n(\lambda) = E$, onde E satisfaz (2.15). Isso é possível, pois $k\tau_{\pm}(E) + k\tau_{\mp}(E) \in (\pi\frac{\lambda_n}{2}^{\frac{1}{2}}, +\infty)$ para $E \in (0, E_{\pm})$ e por continuidade $E^{\pm}_n(\lambda_n) = 0$. A prova que $E^{+}_{n+1}(\lambda) < E^{+}_n(\lambda)$ será feita para n ímpar, $n = 2k-1$. Suponha por absurdo, que $E^{+}_{n+1}(\lambda) \geq E^{+}_n(\lambda)$. Como τ_+ e τ_- são crescentes, então

$$\begin{aligned} k\tau_+(E^+_n(\lambda)) + (k-1)\tau_-(E^+_n(\lambda)) &\leq k\tau_+(E^+_{n+1}(\lambda)) + (k-1)\tau_-(E^+_{n+1}(\lambda)) \\ &< k\tau_+(E^+_{n+1}(\lambda)) + k\tau_-(E^+_{n+1}(\lambda)) \end{aligned}$$

o que implica $\pi(\frac{\lambda}{2})^{\frac{1}{2}} < \pi(\frac{\lambda}{2})^{\frac{1}{2}}$,absurdo. De maneira análoga concluem-se os outros casos.

■

Teorema 2.9. *Seja $\lambda_n = \dfrac{n^2}{f'(0)}$ e e $r_0 = \max\{a_+, a_-\}$, assim $0 < r_0 \leq +\infty$. Então para todo $n \geq 1$ e $\lambda \in [\lambda_n, +\infty)$, as equações (2.1) tem dois pontos de equilíbrio $u^{\pm}_n(\lambda) \in B(0, r_0)$ com as seguintes propriedades:*

(i) $u^{\pm}_n(\lambda_n) = 0$

(ii) Para todo $\lambda \in (\lambda_n, +\infty), u^{\pm}_n(\lambda)$ tem exatamente $n+1$ raízes em $[0, \pi]$. Denotando essas raízes por $x^{\pm}_q(\lambda)$ onde $q = 0, 1, ..., n$ com

$$0 = x^{\pm}_0(\lambda) < x^{\pm}_1(\lambda) < ... < x^{\pm}_n(\lambda) = \pi$$

temos

$$\begin{cases} (-1)^q u_n^+(x;\lambda) > 0 \ \ para \ \ x_q^+(\lambda) < x < x_{q+1}^+(\lambda), \ \ q = 0,1,...,n-1 \\ (-1)^q u_n^-(x;\lambda) < 0 \ \ para \ \ x_q^-(\lambda) < x < x_{q+1}^-(\lambda), \ \ q = 0,1,...,n-1 \end{cases} \tag{2.22}$$

(iii) Para cada $n \geq 1, u_n^{\pm}$ varia continuamente com $\lambda \in [\lambda_n, +\infty)$ relativamente a norma $\|\cdot\|_1$, onde $\|\phi\|_1 = \sup_{x\in[0,\pi]} |\phi'(x)|$. Em particular

$$\|u_n^{\pm}(\lambda)\|_1 \to 0, \quad \lambda \to \lambda_n$$

$$\|u_n^{\pm}(\lambda)\|_1 \to +\infty, \quad \lambda \to \infty$$

Além disso, para todo $\lambda \in [0,+\infty)$, a equação (2.1) não tem nenhum ponto de equilíbrio em X exceto a origem $u_0 = 0$ e os $u_n^{\pm}(\lambda); n \geq 1$, para os quais $\lambda_n \leq \lambda$.

Demonstração: Para cada $n \geq 1$ e $\lambda \to \lambda_n$ tem-se pelo Teorema 2.21 os valores $E_n^{\pm}(\lambda) = E$ e assim temos uma solução do problema (2.8), que será denotada por $u_n^{\pm}(\lambda)$. Como $E_n^{\pm}(\lambda_n) = 0$ temos que $v_0 = 0$ e assim $u_n^{\pm}(\lambda_n) = 0$. Também segue das observações após as equações (2.13)-(2.15) que $u_n^{\pm}(\lambda)$ tem exatamente $n+1$ raízes.

■

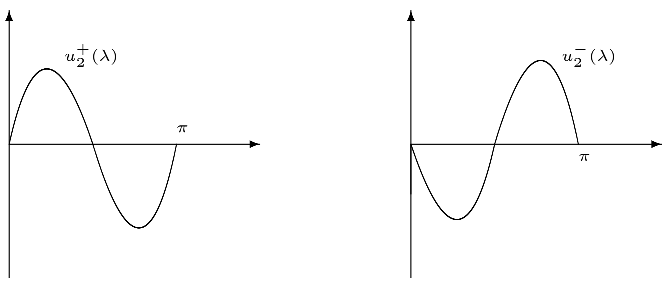

Figura 2.1: Pontos de equilíbrio com 3 zeros.

Algumas observações são:

Se $\|u_n^{\pm}(\lambda)\|_{H_0^1(0,\pi)} \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_n$ com $\lambda > \lambda_n$, diz-se que as soluções $u_n^{\pm}(\lambda)$ bifurcam da origem para λ partindo de λ_n.

Se f é ímpar então $a_- = a_+$ e $-U^-(E) = U^+(E)$ e também $\tau_+(E) = \tau_-(E)$ e portanto $u_n^+(x) = -u_n^-(x)$.

Graficamente, levando em conta o retrato de fase, note que os pontos de equilíbrio u_n^+ e u_n^-, juntamente com as suas respectivas derivadas, descrevem as curvas desse plano,

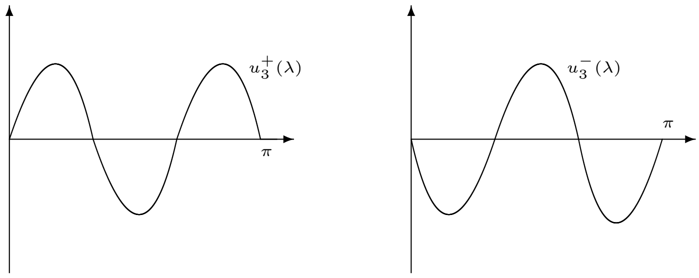

Figura 2.2: Pontos de equilíbrio com 4 zeros.

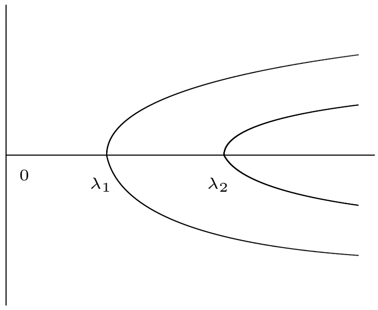

Figura 2.3: Diagrama de bifurcação.

curvas essas que se iniciam no ponto $(0, v_0)$ para u_n^+, que possui velocidade inicial positiva, e $(0, -v_0)$ para u_n^-, que possui velocidade inicial negativa, e cujo "número de voltas"que $u_n^\pm$ percorre sobre essas curvas no intervalo $[0, \pi]$ é $n/2$.

Teorema 2.10. *Suponha que $\lambda \in [0, \lambda_1]$. Então para todo $\phi \in X$, a solução correspondente $u(\phi, \lambda)$ do problema (2.1) tem a propriedade $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ se $t \to +\infty$. Se $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, considere $N \geq 1$ tal que $\lambda \in [\lambda_N, \lambda_{N+1}]$; então para todo $\phi \in X$, temos $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ se $t \to +\infty$ ou para algum $n \in [1, N]$ tem-se que $u(\phi, \lambda)(t) \to u_n^\pm(\lambda)$ se $t \to +\infty$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.9, para cada $\lambda \in [0, +\infty)$, a equação tem somente um número finito de pontos de equilíbrio, $u_n^\pm$, onde N é o menor inteiro tal que $\lambda \in [0, \lambda_N]$ e n é tal que $n \in (1, N)$. Como o conjunto $w-$limite de ϕ deve ser algum ponto de equilíbrio, segue que se $\lambda \in [0, \lambda_1]$, o único ponto de equilíbrio é a origem, assim $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ se $t \to +\infty$ e, se $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, então os pontos de equilíbrio são: a origem e as funções $u_n^\pm(\lambda)$ onde N é o menor inteiro tal que $\lambda \in [0, \lambda_N]$ e n é tal que $n \in (1, N)$. Assim, quando $t \to \infty$ ou $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ ou para algum $n \in [1, N]$ tem-se que $u(\phi, \lambda)(t) \to u_n^\pm(\lambda)$.

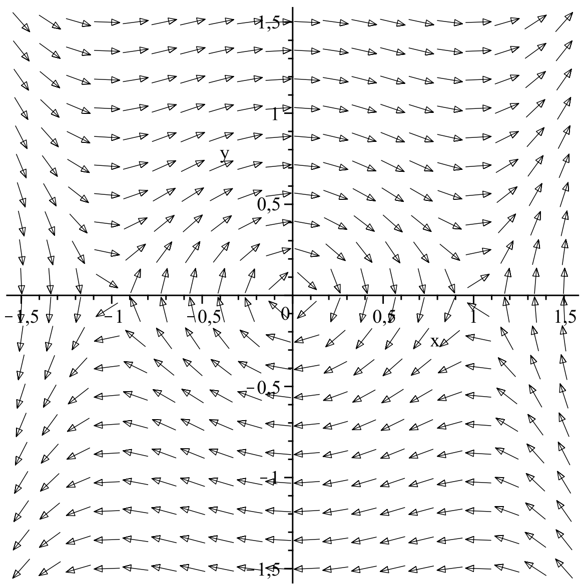

Figura 2.4: Plano de Fase

■

2.4 A Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Para o estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio, é conveniente o estudo da linearização da equação no ponto de equilíbrio desejado, sendo este a origem ou as funções $u_n^{\pm}(\lambda)$. Analisemos inicialmente a estabilidade na origem.

Teorema 2.11. *O ponto de equilíbrio $u_0 = 0$ do problema (2.1) é assintoticamente estável para $\lambda \leq \lambda_1$ e instável para $\lambda > \lambda_1$.*

Demonstração: O fato de a origem ser assintoticamente estável para $\lambda \leq \lambda_1$ segue do Teorema 2.10, pois as soluções $u(\phi, \lambda)$ do problema (2.1) tendem a solução nula se $t \to \infty$ e $\lambda \in [0, \lambda_1]$.

Para $\lambda > \lambda_1$, linearizando a equação $u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0$ na origem, através da fórmula de Taylor aplicada à f, obtemos

$$u''(x) + \lambda\alpha u(x) = 0$$

onde $\alpha = f'(0)$. Tomando os operadores $A = 0$ e $B = \lambda\alpha$, segue que o espectro de $A - B$ é $\sigma(A - B) = -\lambda\alpha < 0$ e o Teorema 1.14 nos assegura a instalibidade da origem para $\lambda > \lambda_1$.

■

Observação 2.1. *Com o método utilizado por N. Chafee e E.F. Infante em* [8], *obtemos uma solução de classe C^2 para o problema* (2.1).

Vamos agora analisar a estabilidade de $u_n^{\pm}(\lambda)$ para $n \geq 1$. Antes são necessários o seguintes Teoremas:

Teorema 2.12 (da Comparação)**.** *Sejam ϕ e ψ funções de classe C^2 satisfazendo $\phi(0) = \psi(0) = 0$ e $\phi'(0) = \psi'(0) = 1$. Então ambas são positivas em um intervalo $(0, x_1)$. Além disso, se ϕ e ψ são tais que: ou*

$$\phi''(x) + a(x)\phi(x) > \psi''(x) + a(x)\psi(x) = 0 \ \ \text{para} \ \ x \in (0, x_1) \tag{2.23}$$

ou

$$0 = \phi''(x) + a(x)\phi(x) > \psi''(x) + a(x)\psi(x) \ \ \text{para} \ \ x \in (0, x_1) \tag{2.24}$$

então $\phi(x) > \psi(x)$ para $x \in (0, x_1]$.

Demonstração: Analisemos o comportamento de $\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$. Note que

$$\frac{d}{dx}(\phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x)) = \phi''(x)\psi(x) - \psi''(x)\phi(x).$$

Supondo que aconteça (2.23), temos que ocorrem as desigualdades:

$$\phi(x)\phi''(x) + a(x)\phi^2(x) > \phi(x)\psi''(x) + a(x)\phi(x)\psi(x)$$

e

$$\psi(x)\phi''(x) + a(x)\psi(x)\phi(x) > \psi(x)\psi''(x) + a(x)\psi^2(x).$$

Somando as desigualdades acima e utilizando (2.23) temos:

$$\begin{aligned} \psi(x)\phi''(x) - \phi(x)\psi''(x) &> \psi(x)\psi''(x) + a(x)\psi^2(x) - \phi(x)\phi''(x) - a(x)\phi^2(x) \\ &> (\psi(x) - \phi(x))(\phi''(x) + a(x)\phi(x)) = 0. \end{aligned}$$

Logo $\dfrac{d}{dx}(\phi'\psi - \psi'\phi) > 0$. Supondo agora que aconteça (2.24), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\phi'(x)\psi(x) + \psi'(x)\phi(x)) &= \psi(x)\phi''(x) - \phi(x)\psi''(x) \\ &> (\psi(x) - \phi(x))(\phi''(x) + a(x)\phi(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\phi'(0)\psi(0) - \psi'(0)\phi(0) = 0$ e $\dfrac{d}{dx}(\phi'(x)\psi(x) + \psi'(x)\phi(x)) > 0$, temos que $\phi'(x)\psi(x) + \psi'(x)\phi(x) > 0$ para todo $x \in (0, x_1)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{\phi'(x)\psi(x) + \psi'(x)\phi(x)}{\psi^2(x)} > 0,$$

para todo $x \in (0, x_1)$, o que mostra que a função é crescente nesse intervalo. Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\phi(x)}{\psi(x)} = 1$ temos que $\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)} > 1$ para $x \in (0, x_1]$.

■

Considere $x \in (0, \pi), \phi \neq 0$ um ponto de equilíbrio e ψ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\psi''(x) + \lambda f'(\phi(x))\psi(x) = 0, \\ &\psi(0) = 0 \ \text{ e } \ \psi'(0) = 1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Teorema 2.13. *Seja ϕ um ponto de equilíbrio do problema (2.1) e considere o seguinte problema de autovalores:*

$$\begin{aligned} &\theta'' + (\lambda f'(\phi) + \mu)\theta = 0, \\ &\theta(0) = \theta(\pi) = 0, \ \ \theta'(0) = 1. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Seja μ_1 o menor autovalor de (2.26) e θ_1 a autofunção associada. Então $\theta_1(x) > 0$ em $(0, \pi)$. Se a solução ψ de (2.25) não possui nenhum zero em $(0, \pi]$ então $\mu_1 > 0$. Se ψ tem um zero em $(0, \pi)$ então $\mu_1 < 0$. Dito de outro modo, se $\psi > 0$ em $(0, \pi]$ então ϕ é assintoticamente estável e se ψ tem um zero em $(0, \pi)$ então ϕ é instável.

Demonstração: Suponha que $\psi > 0$ em $(0, \pi]$. Se $\mu_1 = 0$, então temos o seguinte problema, oriundo de (2.26):

$$\begin{aligned} &\theta_1'' + \lambda f'(\phi)\theta_1 = 0 \\ &\theta_1(0) = \theta_1(\pi) = 0, \ \theta_1'(0) = 1 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de solução para a equação diferencial ordinária acima, devemos ter $\theta_1 = \psi$ em $[0, \pi]$ e assim $0 = \theta_1(\pi) = \psi(\pi) > 0$, absurdo. Mas, se $\mu_1 < 0$, então $\mu_1\theta_1(x) < 0 \ \forall x \in (0, \pi)$ e, pela expressão de (2.26), segue que

$$\theta_1'' + \lambda f'(\phi)\theta_1 > 0 = \psi'' + \lambda f'(\phi)\psi$$

em $(0, \pi)$. Pelo Teorema da Comparação, $\theta_1(x) > \psi(x) > 0$ em $(0, \pi]$. Tomando $x = \pi$ temos $0 = \theta_1(\pi) > \psi(\pi) > 0$, absurdo. Portanto, $\mu_1 > 0$.

Suponha agora que $\psi(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in (0, \pi)$. Se $\mu_1 = 0$, repetindo a argumentação usada acima temos que $\psi = \theta_1$ em $[0, \pi]$ e assim $0 = \psi(x_1) = \theta_1(x_1) > 0$, absurdo. Se $\mu_1 > 0$ então $\mu_1\theta_1(x) > 0$ e disto

$$\theta_1'' + \lambda f'(\phi)\theta_1 < 0 = \psi'' + \lambda f'(\phi)\psi$$

e pelo Teorema da Comparação $\psi(x) > \theta_1(x)$ em $(0,\pi)$, ou seja, $0 = \psi(x_1) > \theta_1(x_1)$, absurdo. Logo $\mu_1 < 0$ e concluímos que ϕ é instável.

■

Teorema 2.14. *Para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_N]$, onde N é o menor inteiro maior que 1 tal que $\lambda \leq \lambda_N$ temos que $u_1^{\pm}(\lambda)$ são estáveis e $u_n^{\pm}(\lambda), n \in (1,N)$ são pontos de equilíbrio instáveis.*

Demonstração: Analisemos inicialmente o ponto de equilíbrio $\phi(x) = u_1^+(\lambda)$ quando $\lambda > \lambda_1$. Sabendo que $\phi'(0) > 0, \phi(x) > 0$ e $f(\phi(x)) > 0$, defina a seguinte função:

$$\chi(x) = -(\lambda\phi'(0)f'(0))^{-1}\phi''(x) = (\phi'(0)f'(0))^{-1}f(\phi(x)),$$

a qual satisfaz $\chi(0) = \chi(\pi) = 0$, $\chi(x) > 0$ para todo $x \in (0,\pi)$ e $\chi'(0) = 1$. Calculando $\chi''(x)$ segue que

$$\chi''(x) + \lambda f'(\phi(x))\chi(x) = \frac{f''(\phi(x))(\phi'(x))^2}{\phi''(0)f'(0)} < 0$$

Logo

$$\chi''(x) + \lambda f'(\phi(x))\chi(x) < 0 = \psi''(x) + \lambda f'(\phi(x))\psi(x)$$

Pelo Teorema da Comparação obtemos que $\psi(x) > \chi(x) > 0$ para $x \in (0,\pi]$ e assim pelo Teorema 2.13 temos que $u_1^+(\lambda)$ é ponto de equilíbrio estável e, procedendo da mesma maneira, $u_1^-(\lambda)$ é ponto de equilíbrio estável.

Analisemos agora $u_n^{\pm}(\lambda)$, ou seja, os pontos de equilíbrio não-triviais ϕ tais que $\phi'(0) > 0$ e $\phi(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (0,\pi)$. Como $\phi(\pi) = 0$, então ϕ tem um mínimo negativo em um ponto $x_1 \in (0,\pi)$, ou seja, $\phi(x_1) < 0$ e $\phi'(x_1) = 0$. Note que ψ e ϕ' satisfazem a equação

$$\psi''(x) + \lambda f'(\phi(x))\psi = 0$$

E também o Wronskiano $W[\psi,\phi']$ satisfaz $W' = 0$, ou seja,

$$W = \psi(x)\phi''(x) - \psi'(x)\phi''(x) = C$$

onde C é uma constante. Calculando para $x = 0$ e $x = x_1$ concluímos que

$$\psi(x_1) = -\frac{1}{\phi''(x_1)}\phi'(0) < 0$$

e assim pelo Teorema 2.13 o ponto de equilíbrio é instável.

■

Capítulo 3

Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Neste capítulo abordaremos os operadores monótonos e maximais monótonos, algumas de suas caracterizações e o exemplo de operador maximal monótono que nos interessa: o operador p-Laplaciano. Esses assuntos são tratados em [4].

3.1 Noção de Operadores Monótonos

Nesta seção apresentaremos o conceito de operadores monótonos e operadores maximais monótonos. Algumas demonstrações não serão feitas e podem ser encontradas em [4] e [14].

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um operador multívoco é uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$. O domínio de A é o conjunto

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$$

e a imagem de A é o conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in H} Ax.$$

Identificamos A com o seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y) \in D(A) \times H;\ y \in Ax\}$. O operador A^{-1} é o operador cujo gráfico é dado por $A^{-1} = \{(y, x) \in H \times H;\ x \in A^{-1}y\}$, onde $x \in A^{-1}y$ se, e somente se, $y \in Ax$.

Definição 3.1. *Dizemos que um operador A em um espaço de Hilbert H é monótono se para todo $x_1, x_2 \in D(A)$,*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

ou seja, se para todo $y_1 \in Ax_1$ *e* $y_2 \in Ax_2$ *tivermos*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Daremos agora um exemplo de extrema importância na teoria dos operadores monótonos.

Definição 3.2. *Seja* $\varphi : H \longrightarrow (-\infty, +\infty)$ *uma função convexa e própria, ou seja,* $\varphi \not\equiv +\infty$ *e*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in H$ *e* $t \in [0, 1]$. *Definimos a subdiferencial,* $\partial\varphi$, *de* φ *por*

$$y \in \partial\varphi(x) \iff \varphi(\xi) \geq \varphi(x) + \langle y, \xi - x \rangle, \text{ para todo } \xi \in H.$$

Se $\partial\varphi$ é a subdiferencial de uma função convexa φ, $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ e $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$, então

$$\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle$$

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

Somando estas duas desigualdades, obtemos que

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Portanto $\partial\varphi$ é um operador monótono. Passemos agora a definição de Operador Maximal Monótono.

Definição 3.3. *Um operador monótono* $A : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ *é dito ser maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de* H.

Daremos a seguir uma caracterização para operadores maximais monótonos.

Teorema 3.1. A *é um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert* H *se, e somente se,* A *é monótono e, se* $(x, y) \in H \times H$ *for tal que*

$$\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0, \quad \forall (\xi, \eta) \in A,$$

então $y \in Ax$.

Demonstração: $(\Longleftarrow)$ Suponha, por absurdo, que o operador monótono A não seja maximal, ou seja, existe $B : H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ monótono tal que $A \subsetneq B$, ou seja,

$$Ax \subsetneq Bx, \tag{3.1}$$

para algum $x \in D(A)$. Fixe $x_0 \in D(A)$ tal que $Ax_0 \subsetneq Bx_0$. Seja $y_0 \in Bx_0$ tal que $y_0 \notin Ax_0$. Como B é monótono, então

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \qquad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B.$$

Como $y_0 \in Bx_0$, então

$$\langle y_0 - \eta, x_0 - \xi \rangle \geq 0, \qquad \forall (\xi, \eta) \in B$$

Em particular, por (3.1)

$$\langle y_0 - \eta, x_0 - \xi \rangle \geq 0 \qquad \forall (\xi, \eta) \in A.$$

Assim, por hipótese, $y_0 \in Ax_0$, o que é um absurdo. Logo A é maximal.

($\Longrightarrow$) Suponha, por absurdo, que A é monótono e, que existe $(x, y) \in H \times H$ tal que $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$ para todo $(\xi, \eta) \in A$ e $y \notin Ax$. Tome o operador $B = A \cup \{(y, x)\}$. Então por hipótese B é monótono e $A \subsetneq B$, o que contradiz o fato de A ser maximal.

$\blacksquare$

OLema enunciado a seguir será útil na demonstração da próxima proposição, e sua demostração se encontra no Teorema 2.1 em [4].

Lema 3.1. *Sejam $C \neq \emptyset$ um subconjunto convexo fechado de H e A um operador monótono de H tal que $D(A) \subset C$. Então para todo $y \in H$, existe $x \in C$ tal que*

$$\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$.

Proposição 3.1. *Seja A um operador em um espaço de Hilbert H. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é maximal monótono;

(ii) A é monótono e $\mathcal{R}(I + A) = H$;

(iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo H.

Demonstração:

$(ii) \Rightarrow (i)$ Assuma $\mathcal{R}(I+A) = H$ e A monótono. Suponha que $B = A \cup \{(u,v)\}$ é uma extensão monótona de A, com $(u,v) \in H \times H$. Observamos que $D(B) = D(A) \cup \{u\}$. Então

$$\langle v-y, u-x\rangle \geq 0, \qquad \forall (x,y) \in A.$$

Se mostrarmos que $(u,v) \in A$, então concluiremos que A é maximal monótono. Note que, para todo $(x,y) \in A$, temos

$$\begin{aligned} \|u-x+v-y\|^2 &= \langle u-x+v-y, u-x+v-y\rangle \\ &= \|u-x\|^2 + 2\langle v-y, u-x\rangle + \|v-y\|^2 \\ &\geq \|u-x\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u-x\| \leq \|u-x+v-y\|, \qquad \forall (x,y) \in A.$$

Como $\mathcal{R}(I+A) = H$, existe $(\xi,\eta) \in A$ tal que $u+v = \xi+\eta$. Então

$$\|u+v-x-y\| = \|\xi+\eta-x-y\|, \qquad \forall (x,y) \in A.$$

Em particular, para $(x,y) = (\xi,\eta)$ temos

$$0 \leq \|u-\xi\| \leq \|u-\xi+v-\eta\| = \|\xi+\eta-\xi-\eta\| = 0.$$

Logo, $u = \xi$. Mas $u+v = \xi+\eta$; então $v = \eta$. Portanto $(u,v) \in A$ e, assim, A é maximal monótono.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Seja $C = H$ convexo e fechado e tome $y \in H$. Então existe $x \in H$ tal que

$$\langle \eta + x, \xi - x\rangle \geq \langle y, \xi - x\rangle, \qquad \forall (\xi,\eta) \in A,$$

ou seja, $\langle \eta - (y-x), \xi - x\rangle \geq 0$ para todo $(\xi,\eta) \in A$. Sendo A maximal monótono, segue que $y - x \in Ax$, ou seja, $y \in (I+A)x$, o que implica que $y \in \mathcal{R}(I+A)$ e, assim, $H \subset \mathcal{R}(I+A)$, isto é, concluímos que $\mathcal{R}(I+A) = H$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Sejam $x_1, x_2 \in D(A)$, $\lambda > 0$, $w_1 \in Ax_1$ e $w_2 \in Ax_2$. Consideremos

$$y_1 = x_1 + \lambda w_1 \in (I+\lambda A)x_1$$

e

$$y_2 = x_2 + \lambda w_2 \in (I+\lambda A)x_2.$$

Então $x_1 = (I+\lambda A)^{-1}y_1$ e $x_2 = (I+\lambda A)^{-1}y_2$. Assim,

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|(I+\lambda A)^{-1}y_1 - (I+\lambda A)^{-1}y_2\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| = \|x_1 + \lambda w_1 - x_2 - \lambda w_2\| \\ &= \|(x_1 - x_2) + \lambda(w_1 - w_2)\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|x_1 - x_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2\|w_1 - w_2\|^2 + 2\lambda\langle w_1 - w_2, x_1 - x_2\rangle,$$

para todo $x_1, x_2 \in D(A)$, para todo $w_1 \in Ax_1, w_2 \in Ax_2$ e todo $\lambda > 0$. Portanto, $\langle w_1 - w_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$ e, assim, segue que A é monótono. E também, como $(I+\lambda A)^{-1}$ está definido em todo H e para todo $\lambda > 0$, em particular para $\lambda = 1$ temos $\mathcal{R}(I+A) = H$.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Se A é maximal monótono, então para todo $\lambda > 0$, λA é também maximal monótono e portanto $\mathcal{R}(I+\lambda A) = H$. Além disso, para todo $\lambda > 0$ e para todo $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(I+\lambda A)$ temos que existem $x_1, x_2 \in D(A)$ e $w_1 \in Ax_1, w_2 \in Ax_2$ tais que $y_1 = x_1 + \lambda w_1$ e $y_2 = x_2 + \lambda w_2$. Assim,

$$\|(I+\lambda A)^{-1}y_1 - (I+\lambda A)^{-1}y_2\| = \|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(w_1 - w_2)\| = \|y_1 - y_2\|,$$

para todo $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(I+\lambda A) = H$. Portanto $(I+\lambda A)^{-1}$ é uma contração definida em todo H. Em particular $(I+\lambda A)^{-1}$ é um operador unívoco.

■

Lema 3.2. *Seja ϕ uma função convexa própria sobre H e $\alpha \geq 0$. A função convexa*

$$x \longmapsto \phi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$$

atinge seu mínimo em x_0 se, e somente se, $\alpha(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$.

Demonstração: Inicialmente, devemos mostrar que a função é convexa e $\alpha(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$. Para mostrar a convexidade da função $x \longmapsto \phi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$ basta notar que as funções $x \mapsto \|x\|^2$ e ϕ são convexas.

Seja $\eta \in H$ e defina $\xi_t = (1-t)x_0 + t\eta$, para $t \in (0,1)$. Como a função atinge seu mínimo em x_0, temos:

$$\begin{aligned}\phi(\xi_t) - \phi(x_0) &\geq \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2 - \frac{\alpha}{2}\|\xi_t - y\|^2 \\ &= \frac{\alpha}{2}[\langle x_0 - y, x_0 - y\rangle - \langle x_0 - y, \xi_t - y\rangle] \\ &+ \langle x_0 - y, \xi_t - y\rangle - \langle \xi_t - y, \xi_t - y\rangle] \\ &= \frac{\alpha}{2}\langle x_0 + \xi_t - 2y, x_0 - \xi_t\rangle.\end{aligned}$$

A convexidade de ϕ implica que

$$\phi(\xi_t) \leq (1-t)\phi(x_0) + t\phi(\eta) = \phi(x_0) - t\phi(x_0) + t\phi(\eta).$$

Logo,

$$\begin{aligned} t[\phi(\eta) - \phi(x_0)] &\geq \phi(\xi_t) - \phi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}\langle x_0 + \xi_t - 2y, x_0 - \xi_t\rangle \\ &= \frac{\alpha}{2}\langle 2x_0 - tx_0 + t\eta - 2y, tx_0 - t\eta\rangle. \end{aligned}$$

Dividindo por t e fazendo $t \to 0$ temos

$$\phi(\eta) - \phi(x_0) \geq \alpha\langle y - x_0, \eta - x_0\rangle,$$

para todo $\eta \in H$. Portanto $\alpha(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$.

Reciprocamente, se $\alpha(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$, então para todo $\xi \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(\xi) - \phi(x_0) &\geq \langle \alpha(y - x_0), \xi - x_0\rangle \\ &= \alpha\langle y - x_0, y - y + \xi - x_0\rangle \\ &= \alpha\|x_0 - y\|^2 + \alpha\langle y - x_0, \xi - y\rangle \\ &\geq \alpha\|x_0 - y\|^2 + \alpha\left(-\frac{1}{2}\|y - x_0\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}[\|x_0 - y\|^2 - \|\xi - y\|^2]. \end{aligned}$$

Assim, para todo $\xi \in H$

$$\phi(\xi) - \phi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2 - \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2,$$

ou seja,

$$\phi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2 \geq \phi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2.$$

Portanto, a função

$$x \longmapsto \phi(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$$

atinge seu mínimo em x_0.

■

O próximo resultado será utilizado para garantir a existência de uma solução forte para o problema não-estacionário que será enunciado no último capítulo.

Proposição 3.2. *Seja ϕ uma função convexa, própria sobre H. Se ϕ é uma função semicontínua inferiormente, então $\partial\phi$ é maximal monótono.*

Demonstração: Sabemos que $\partial\phi$ é monótona. Logo é suficiente mostrar que $H = \mathcal{R}(I + \partial\phi)$. Com efeito, seja $y \in H$. Sabemos que a função

$$f(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

é convexa. Além disso, como a aplicação $x \mapsto \frac{1}{2}\|x - y\|^2$ é contínua e, portanto, semicontínua inferiormente, temos que f é semicontínua inferiormente e ainda, quando $\|x\| \to \infty$ temos que $f(x) \to \infty$. Logo f atinge seu mínimo em algum $x_0 \in H$ e, portanto, $y - x_0 \in \partial\phi(x_0)$, ou seja, $y \in (I + \partial\phi)x_0$ e disso segue que $y \in \mathcal{R}(I + \partial\phi)$, ou seja, $H = \mathcal{R}(I + \partial\phi)$. Logo, o operador subdiferencial $\partial\phi$ é maximal monótono. ∎

Proposição 3.3. *Seja A uma aplicação monótona, unívoca de $D(A) = H$ em H. Suponha A hemicontínua, ou seja, para todo $x, \xi \in H$,*

$$A(x + t\xi) \longrightarrow Ax,$$

quando $t \to 0$. Então A é maximal monótono.

Demonstração: Seja $(x, y) \in H \times H$ tal que $\langle A\xi - y, \xi - x\rangle \geq 0$, para todo $\xi \in D(A) = H$. Devemos mostrar que $y = Ax$. Defina $x_t = x + t(y - Ax)$ para $t \in (0, 1)$. Então

$$\langle Ax_t - y, x_t - x\rangle \geq 0.$$

Substituindo x_t e dividindo ambos os lados por t, obtemos que

$$\langle A(x + t(y - Ax)) - y, y - Ax\rangle \geq 0.$$

Sendo A hemicontínua então $Ax_t \to Ax$, quando $t \to 0$. Assim,

$$\langle Ax - y, y - Ax\rangle \geq 0 \Rightarrow \|Ax - y\|^2 \leq 0,$$

ou seja, $y = Ax$ e o resultado segue. ∎

3.2 Propriedades Elementares dos Operadores Maximais Monótonos

Seja A um operador maximal monótono. Denotamos por $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ o operador resolvente de A que, para todo $\lambda > 0$, é uma contração de H em H. Segue da definição de resolvente e do fato que $\mathcal{R}(I+\lambda A)=H$ que, para todo $x\in H$, $J_\lambda x\in D(A)$. Além disso, $\dfrac{x-J_\lambda x}{\lambda}\in AJ_\lambda x$, para todo $x\in H$.

A partir de agora, A denotará sempre um operador maximal monótono.

Proposição 3.4. *Sejam $(x_n,y_n)\in A$ tal que $x_n\rightharpoonup x, y_n\rightharpoonup y$ e $\limsup\langle y_n,x_n\rangle\le\langle y,x\rangle$. Então $(x,y)\in A$ e $\langle y_n,x_n\rangle\longrightarrow\langle y,x\rangle$.*

Demonstração: Como A é monótono e $(x_n,y_n)\in A$, então

$$\langle \eta-y_n,\xi-x_n\rangle\ge 0,\qquad \forall(\xi,\eta)\in A.$$

Sejam $\tau_n=\langle y_n,x_n\rangle\in\mathbb{R}$ e $\tau=\limsup\tau_n\le\langle y,x\rangle$. Como $\limsup\tau_n$ é um ponto de aderência, então existe uma subsequência $\{\tau_{n_k}\}\subset\{\tau_n\}$ tal que $\tau_{n_k}=\langle y_{n_k},x_{n_k}\rangle\to\tau$. Além disso, como $\{\tau_{n_k}\}\subset\{\tau_n\}$ segue que $(x_{n_k},y_{n_k})\in A$. Logo

$$\langle \eta-y_{n_k},\xi-x_{n_k}\rangle\ge 0, \tag{3.2}$$

para todo $(\xi,\eta)\in A$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\langle \eta-y_{n_k},\xi-x_{n_k}\rangle &= \lim_{k\to\infty}\langle\eta,\xi\rangle-\lim_{k\to\infty}\langle y_{n_k},\xi\rangle-\lim_{k\to\infty}\langle\eta,x_{n_k}\rangle\\ &+ \lim_{k\to\infty}\langle y_{n_k},x_{n_k}\rangle\\ &= \langle\eta,\xi\rangle-\langle y,\xi\rangle-\langle\eta,x\rangle+\langle y,x\rangle\\ &= \langle\eta-y,\xi-x\rangle.\end{aligned}$$

Segue de (3.2) que $\langle\eta-y,\xi-x\rangle\ge 0$ para todo $(\xi,\eta)\in A$ e, sendo A maximal, então $(x,y)\in A$.

Vamos agora mostrar que $\langle y_n,x_n\rangle\to\langle y,x\rangle$. De fato, como $(x,y)\in A$, então

$$\langle y-y_n,x-x_n\rangle\ge 0.$$

Logo,

$$\langle y_n,x_n\rangle\ge-\langle y,x\rangle+\langle y,x_n\rangle+\langle y_n,x\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\liminf\langle y_n,x_n\rangle &\ge \liminf(-\langle y,x\rangle+\langle y,x_n\rangle+\langle y_n,x\rangle)\\ &\ge -\langle y,x\rangle+\liminf\langle y,x_n\rangle+\liminf\langle y_n,x\rangle\\ &= \langle y,x\rangle.\end{aligned}$$

Desta maneira, usando a hipótese, temos

$$\langle y, x\rangle \leq \liminf \langle y_n, x_n\rangle \leq \limsup \langle y_n, x_n\rangle \leq \langle y, x\rangle$$

mostrando que $\langle y_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle y, x\rangle$.

■

Teorema 3.2. *$\overline{D(A)}$ é convexo e para todo $x \in H$ temos*

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = Proj_{\overline{D(A)}} x$$

Demonstração: Considere M a interseção de todos os conjuntos convexos que contém $D(A)$ e seja $C = \overline{M}$. Sejam $x \in H$ e $x_\lambda = J_\lambda x$, então $\left(x_\lambda, \dfrac{x - x_\lambda}{\lambda}\right) \in A$. Como A é monótono e $\lambda > 0$, para todo $(\xi, \eta) \in A$ temos

$$\left\langle \frac{x - x_\lambda}{\lambda} - \eta, x_\lambda - \xi \right\rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\langle x - x_\lambda - \lambda\eta, x_\lambda - \xi\rangle \geq 0, \qquad \forall(\xi, \eta) \in D(A).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|x_\lambda\|^2 &\leq \langle x - \lambda\eta, x_\lambda - \xi\rangle + \langle x_\lambda, \xi\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - \lambda\eta\|^2 + \frac{1}{2}\|x_\lambda - \xi\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\|x_\lambda\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|^2 - \frac{1}{2}\|x_\lambda - \xi\|^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}\|x_\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x - \lambda\eta\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|^2.$$

Fazendo $\lambda \to 0$, temos

$$\|x_\lambda\|^2 \leq \|x\|^2 + \|\xi\|^2.$$

Portanto, x_λ é limitado quando $\lambda \to 0$. Sendo $\{x_\lambda\}$ uma sequência limitada em H, existe $\{x_{\lambda_n}\}$ uma subsequência que converge fracamente em C. Assim quando $\lambda_n \to 0$, $x_{\lambda_n} \rightharpoonup x_0$, com $x_0 \in C$, e por esse motivo,

$$\|x_0\| \leq \liminf \|x_{\lambda_n}\|. \tag{3.4}$$

Logo, segue de (3.3), com $\lambda = 0$, que para todo $\xi \in D(A)$,

$$\|x_0\|^2 \leq \liminf_{\lambda_n\to 0} \|x_{\lambda_n}\|^2 \leq \langle x, x_0 - \xi\rangle + \langle x_0, \xi\rangle,$$

ou seja,

$$\langle x - x_0, \xi - x_0 \rangle \leq 0, \qquad \forall \xi \in D(A). \tag{3.5}$$

Como $C = \overline{M}$, a desigualdade (3.5) ocorre para todo $\xi \in C$ e, portanto, $x_0 = Proj_C x$. Mas a projeção em um convexo fechado de um espaço de Hilbert é unicamente determinada, logo o limite independe da subsequência $\{x_{\lambda_n}\}$ tomada. Portanto $x_\lambda \rightharpoonup Proj_C x$, quando $\lambda \to 0$. Assim, para todo $\xi \in C$,

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \to 0} \|x_\lambda\|^2 &\leq \limsup_{\lambda \to 0} (\langle x, x_\lambda - \xi \rangle + \langle x_\lambda, \xi \rangle + (-\lambda \langle \eta, x_\lambda - \xi \rangle)) \\ &= \langle x, x_0 - \xi \rangle + \langle x_0, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Em particular, tomando $\xi = x_0$ temos

$$\limsup_{\lambda \to 0} \|x_\lambda\|^2 \leq \|x_0\|^2.$$

Este fato e (3.4) nos leva a concluir que $\lim\limits_{\lambda \to 0} \|x_\lambda\| = \|x_0\|$. Como $x_\lambda \rightharpoonup x_0$, a proposição 3.4 implica que $x_\lambda \to x_0$, ou seja, $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda x = Proj_C x$. Mas $J_\lambda x = x_\lambda \in D(A)$ para todo $x \in H$, e como $Proj_C z = z$ para todo $z \in C$, segue que $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda z = z$, logo temos que $z \in \overline{D(A)}$ e portanto $C = \overline{D(A)}$. Logo concluímos que $\overline{D(A)}$ é convexo e

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = Proj_{\overline{D(A)}} x$$

para todo $x \in H$.

■

Denotaremos $A^0 x = Proj_{Ax} 0$. A aplicação $x \mapsto A^0 x$ é um operador unívoco chamado seção minimal de A. Por outro lado, denotamos por

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$$

a aproximação de Yosida de A. É importante observar que se A é maximal monótono e $\lambda > 0$ temos a seguinte inclusão $A_\lambda x \in A J_\lambda x$ para todo $x \in H$, pois

$$A_\lambda x = \left(\frac{I - J_\lambda}{\lambda} \right) x = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \in A J_\lambda x.$$

Proposição 3.5. *Seja A maximal monótono e $\lambda > 0$. Então*

(i) A_λ é maximal monótono e Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $\dfrac{1}{\lambda}$;

(ii) $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda + \mu}$, $\forall \lambda, \mu > 0$;

(iii) *Para todo* $x \in D(A)$, *temos* $\|A_\lambda x\| \nearrow \|A^0 x\|$ *e* $A_\lambda x \to A^0 x$ *quando* $\lambda \searrow 0$, *com* $\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$;

(iv) *Para* $x \notin D(A)$, $\|A_\lambda x\| \nearrow +\infty$, *quando* $\lambda \searrow 0$.

Demonstração:

(i) Note que por hipótese temos $D(J_\lambda) = \mathcal{R}(I + \lambda A) = H$. Assim, como $A_\lambda = \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$, então A_λ está definido em todo H e A_λ é unívoco. Para mostrarmos que A_λ é monótono, sejam $x_1, x_2 \in H$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle &= \frac{1}{\lambda}\langle x_1 - J_\lambda x_1 - x_2 + J_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - x_2\|^2 - \frac{1}{\lambda}|\langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle| \geq 0,
\end{aligned}$$

pois J_λ é contração. Ainda,

$$\begin{aligned}
\lambda \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 &= \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - J_\lambda x_1 - x_2 + J_\lambda x_2 \rangle \\
&\leq \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&\leq \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

mostrando que A_λ é Lipschitziana com constante $\dfrac{1}{\lambda}$, isto é,

$$\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - x_2\|.$$

Para mostrar a maximalidade de A_λ, basta observar que A_λ sendo Lipschitziana, é hemicontínua. Também, A_λ é monótono, unívoco com $D(A_\lambda) = H$. Segue então pela proposição 3.3 que A_λ é maximal monótono.

(ii) Note que $(x, y) \in A_{\lambda+\mu}$ se, e somente se, $(x - \lambda y - \mu y, y) \in A$. De fato,

$$\begin{aligned}
y = A_{\lambda+\mu} x &\Leftrightarrow (\lambda + \mu) y = x - J_{\lambda+\mu} x \\
&\Leftrightarrow x - (\lambda + \mu) y = J_{\lambda+\mu} x \in D(A) \\
&\Leftrightarrow (I + (\lambda + \mu) A)(x - (\lambda + \mu) y) = x \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu) y = (\lambda + \mu) A(x - (\lambda + \mu) y) \\
&\Leftrightarrow (x - \lambda y - \mu y, y) \in A.
\end{aligned}$$

E também $(x - \lambda y - \mu y, y) \in A$ se, e somente se $(x - \mu y, y) \in A_\lambda$ e, por último, $(x - \mu y, y) \in A_\lambda$ se, e somente se, $(x, y) \in (A_\lambda)_\mu$. Dessas três afirmações segue o item (ii).

(iii) Sabemos que $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ para todo $x \in H$ e $(x, A^0 x) \in A$ para todo $x \in D(A)$. Como A é monótono, temos que

$$\langle A_\lambda x - A^0 x, J_\lambda x - x\rangle \geq 0,$$

para todo $x \in D(A)$, isto é,

$$\langle A_\lambda x - A^0 x, \lambda A_\lambda x\rangle \leq 0.$$

Como $\lambda > 0$,

$$\langle A_\lambda x, A_\lambda x\rangle - \langle A^0 x, A_\lambda x\rangle \leq 0.$$

Logo,

$$\|A_\lambda x\|^2 \leq |\langle A^0 x, A_\lambda x\rangle| \leq \|A^0 x\|\|A_\lambda x\|,$$

ou seja $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$, para todo $x \in D(A)$. Agora, substituindo A por A_μ, usando que $A_\mu = A^0_\mu$, pois A_μ é unívoco e usando o item (ii) temos, para todo $x \in H$, que

$$\|(A_\mu)_\lambda x\|^2 \leq \langle A_\mu x, A_\mu x\rangle \leq \langle A_\mu x, (A_\mu)_\lambda x\rangle \leq \|A_\mu x\|\|(A_\mu)_\lambda x\|.$$

Assim $\|A_{\mu+\lambda} x\| \leq \|A_\mu x\|$ e $\|A_\lambda x\|$ é não crescente em λ, para todo $x \in X$. Como $\|A_\lambda x\|^2 \leq \langle A^0 x, A_\lambda x\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 &= \|A_\lambda x\|^2 - 2\langle A^0 x, A_\lambda x\rangle + \|A^0 x\|^2 \\
&\leq \|A_\lambda x\|^2 - 2\|A_\lambda x\|^2 + \|A^0 x\|^2 \\
&= \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2,
\end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Por outro lado, considerando que $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ para todo $x \in D(A)$ e $\|A_\lambda x\|$ é não crescente em λ, segue que $\|A_\lambda x\|$ é convergente quando $\lambda \searrow 0$. Seja $R = \lim\limits_{\lambda \to 0} \|A_\lambda x\|$, com $x \in D(A)$. Como $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ para todo $\lambda > 0$, obtemos que $R \leq \|A^0 x\|$, para todo $x \in D(A)$.

Sendo $\{A_\lambda x\}$ uma sequência limitada em H, existe uma subsequência $\{A_{\lambda_n} x\}$ que converge fracamente, ou seja, existe $y \in H$ tal que $A_{\lambda_n} x \rightharpoonup y$, quando $\lambda_n \to 0$. Então,

$$\|y\| \leq \liminf \|A_{\lambda_n} x\| = R. \tag{3.6}$$

Mas se $x \in D(A)$ temos

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = \lim_{\lambda \to 0} (I + \lambda A)^{-1} x = I^{-1} x = x.$$

Assim, a proposição (3.4) implica que

$$\langle \eta - A_{\lambda_n}x, \xi - J_{\lambda_n}x\rangle \longrightarrow \langle \eta - y, \xi - x\rangle,$$

quando $\lambda_n \to 0$ e para todo $(\eta, \xi) \in A$. Uma vez que $(J_{\lambda_n}x, A_{\lambda_n}x) \in A$, segue da monotonicidade de A que

$$\langle \eta - y, \xi - x\rangle \geq 0,$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$. Mas A é maximal monótono, logo $(x, y) \in A$. Isso significa que A_{λ_n} converge para y, com $y \in Ax$. A definição de A^0x implica que

$$\|y\| \geq \|A^0x\| \geq R. \tag{3.7}$$

Concluímos de (3.6) e (3.7) que $\|y\| = R = \|A^0x\|$. Portanto $\|A_\lambda x\| \nearrow \|A^0x\|$, $\lambda \searrow 0$, para todo $x \in D(A)$. E, por outro lado, como

$$0 \leq \|A_\lambda x - A^0x\|^2 \leq \|A^0x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$$

para todo $x \in D(A)$, segue que se $\lambda \searrow 0$, então $A_\lambda x \longrightarrow A^0x$, para todo $x \in D(A)$.

(iv) Seja $x \notin D(A)$. Suponha, por absurdo, que $\|A_\lambda x\| \not\longrightarrow +\infty$, quando $\lambda \searrow 0$. Logo existe $M > 0$ tal que para todo $\lambda_0 > 0$, existe $0 < \lambda < \lambda_0$, com $\|A_\lambda x\| \leq M$. Fixemos $\lambda_0 > 0$. Seja $\lambda_0^1 = \lambda_0$. Então existe $\lambda_1 < \lambda_0^1$ tal que $\|A_{\lambda_1}x\| \leq M$. Defina $\lambda_0^2 = \lambda_1$. Da mesma maneira, existe $\lambda_2 < \lambda_0^2 = \lambda_1$ tal que $\|A_{\lambda_2}x\| \leq M$. Seguindo este processo, obtemos uma sequência $\{\lambda_j\}$ tal que $0 < ... < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$ e $\|A_{\lambda_j}x\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $x \in H$, temos

$$\|J_{\lambda_j}x - x\| = \lambda_j\|A_{\lambda_j}x\| \leq \lambda_j M \longrightarrow 0$$

quando $\lambda_j \to 0$. Logo $\lim\limits_{\lambda_j \to 0} J_{\lambda_j}x = x$. Além disso, $\{A_{\lambda_j}x\}$ é limitada, logo existe uma subsequência $\{A_{\lambda_{jn}}x\}$ e um elemento $y \in H$ tal que $A_{\lambda_{jn}} \rightharpoonup y$, quando $\lambda_{jn} \to 0$. Mas $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$, para todo $\lambda > 0$. Em particular, $(J_{\lambda_{jn}}x, A_{\lambda_{jn}}x) \in A$ para todo λ_{jn}. Logo,

$$\langle A_{\lambda_{jn}}x - \eta, J_{\lambda_{jn}}x - \xi\rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$. E como $J_{\lambda_{jn}}x \to x$ e $A_{\lambda_{jn}} \rightharpoonup y$, segue que

$$\langle A_{\lambda_{jn}}x - \eta, J_{\lambda_{jn}}x - \xi\rangle \longrightarrow \langle y - \eta, x - \xi\rangle.$$

Daí,

$$\langle y - \eta, x - \xi\rangle \geq 0,$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$, e como A é maximal monótono, então $y \in Ax$, o que contradiz a hipótese. Portanto, se $x \notin A$, então $\|A_\lambda x\| \nearrow +\infty$ quando $\lambda \searrow 0$.

■

Exibiremos agora um resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [5] e [15] e é utilizado para mostramos quando um operador monótono satisfazendo algumas propriedades é maximal.

Proposição 3.6. *Seja V um espaço de Banach reflexivo, V' o seu dual e H um espaço de Hilbert com $V \subset H \subset V'$, com imersões contínuas e densas e $A : V \longrightarrow V'$ é um operador monótono, unívoco, definido em todo V, hemicontínuo e coercivo. Então o operador restrição A_H definido por*

$$A_H(u) = A(u)$$

para todo $u \in D(A_H)$, onde $D(A_H) = \{u \in V; Au \in H\}$, é maximal monótono em H.

3.3 O Problema de Cauchy Envolvendo Operadores Monótonos

Nesta seção vamos apresentar um resultado sobre existência, unicidade e regularidade de um problema de Cauchy envolvendo operadores maximais monótonos. Mais especificamente, se $A : H \longrightarrow H$ é um operador maximal monótono e B uma aplicação globalmente Lipschitziana, em um espaço de Hilbert H, vamos obter a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + B(u(t)) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases} \tag{3.8}$$

Inicialmente vamos definir o conceito de solução fraca e solução forte de (3.8).

Definição 3.4. *Uma função $u \in C([0,T]; H)$ é uma solução forte de* (3.8) se u é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de $(0,T)$, $u(t) \in D(A_H)$ para quase todo $t \in (0,T)$ e

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + B(u(t)) = 0,$$

para quase todo $t \in (0,T)$. Uma função $u \in C([0,T]; H)$ é dita uma solução fraca de (3.8) se existe uma sequência $\{u_n\}$ de soluções fortes convergente para u em $C([0,T]; H)$.

A demonstração do próximo Teorema pode ser encontrada em [4].

Teorema 3.3. *Seja A um operador maximal monótono, $w > 0$, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}^H$. Então existe uma única solução fraca da equação*

$$\frac{du}{dt} + Au - wu = f$$

com $u(0) = u_0$. Se f é uma função de variação limitada de $[0,T]$ em H, então u é Lipschitziana se, e somente se, $u_0 \in D(A)$. Neste caso,

$$\|\frac{du}{dt}\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq e^{wt}[\|(f(0) + wu_0 - Au_0)^0\| + V(f;[0,T])].$$

3.4 O Operador p-Laplaciano

Nesta seção, apresentaremos um operador bastante importante no estudo das equações de evolução, o operador p-Laplaciano Δ_p, e estudaremos algumas propriedades do operador $-\Delta_p$, tais como a monotonicidade, coercividade, hemicontinuidade e também mostraremos que ele é um operador do tipo subdiferencial.

Nosso objetivo é usar a proposição 3.6 para garantirmos que o operador $-\Delta_p$ é maximal monótono em $L^2(0,1)$, para $p > 2$.

A partir de agora, considere $V = W_0^{1,p}(0,1)$ com $p > 2$ e $H = L^2(0,1)$. Então V é um espaço de Banach reflexivo, $V' = W^{-1,q}(0,1)$, onde p e q são expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos as imersões

$$W_0^{1,p}(0,1) \subset L^2(0,1) \subset W^{-1,q}(0,1),$$

que são contínuas e densas.

Uma desigualdade bastante útil nesse capítulo é a seguinte:

Lema 3.3 (Desigualdade de Tartar)**.** *Seja $p \geq 2$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$ e $m \in \mathbb{N}$ vale*

$$\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b\rangle \geq \gamma_0\|a - b\|^p$$

onde γ_0 é positivo e depende apenas de p e m.

Demonstração: Note que

$$
\begin{aligned}
\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a-b\rangle &= \left\langle \int_0^1 \frac{d}{ds}\|sa+(1-s)b\|^{p-2}(sa+(1-s)b)ds, a-b \right\rangle \\
&= \int_0^1 (p-2)\|sa+(1-s)b\|^{p-4}|\langle sa+(1-s)b, a-b\rangle|^2 ds \\
&+ \int_0^1 \|sa+(1-s)b\|^{p-2}\|a-b\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Se $p \geq 2$, então

$$
\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a-b\rangle \geq \int_0^1 \|sa+(1-s)b\|^{p-2}\|a-b\|^2 ds.
$$

Suponha $\|a\| \geq \|b-a\|$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|sa+(1-s)b\| &= \|a-(1-s)(a-b)\| \\
&\geq \|a\| - (1-s)\|a-b\| \geq s\|a-b\|.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a-b\rangle &\geq \|a-b\|^2 \int_0^1 \|sa+(1-s)b\|^{p-2} ds \\
&\geq \|a-b\|^2 \int_0^1 s^{p-2}\|a-b\|^{p-2} ds \\
&= \|a-b\|^p \int_0^1 s^{p-2} ds = \frac{1}{p-1}\|a-b\|^p,
\end{aligned}
$$

e, portanto, basta tomar $\alpha = \dfrac{1}{p-1}$, o qual é positivo pois estamos assumindo $p > 2$. Se $\|a\| < \|b-a\|$ temos

$$
\begin{aligned}
\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a-b\rangle &\geq \|a-b\|^2 \int_0^1 \|sa+(1-s)b\|^{p-2} ds \\
&= \|a-b\|^2 \int_0^1 \frac{(\|sa+(1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|sa+(1-s)b\|^2} ds
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\|sa+(1-s)b\| &= \|(1-s)(b-a)+a\| \\
&\leq (1-s)\|b-a\| + \|a\| \\
&< (2-s)\|b-a\|.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\|a-b\|^2 \int_0^1 \frac{(\|sa+(1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|sa+(1-s)b\|^2} ds &> \|a-b\|^2 \int_0^1 \frac{(\|sa+(1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}}}{(2-s)^2\|b-a\|^2} ds \\
&\geq \frac{1}{4}\int_0^1 (\|sa+(1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}} ds.
\end{aligned}
$$

Tomando $q' = \dfrac{p}{2} \geq 1$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, segue pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|sa + (1-s)b\|^2 ds &\leq \left[\int_0^1 1^q ds\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 (\|sa + (1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}} ds\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\int_0^1 (\|sa + (1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}} ds\right]^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|a-b\|^2 \int_0^1 \frac{(\|sa + (1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|sa + (1-s)b\|^2} ds &\geq \frac{1}{4} \int_0^1 (\|sa + (1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}} ds \\
&\geq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \|sa + (1-s)b\|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\|sa + (1-s)b\|^2 = s^2\|a\|^2 + 2s\langle a, b\rangle - 2s^2\langle a, b\rangle + \|b\|^2 - 2s\|b\|^2 + s^2\|b\|^2,$$

e, portanto,

$$\int_0^1 \|sa + (1-s)b\|^2 = \frac{1}{3}\|a\|^2 + \frac{1}{3}\langle a, b\rangle + \frac{1}{3}\|b\|^2.$$

Então temos

$$\begin{aligned}
\|a-b\|^2 \int_0^1 \frac{(\|sa + (1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|sa + (1-s)b\|^2} ds &\geq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \|sa + (1-s)b\|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}(\|a\|^2 + \langle a, b\rangle + \|b\|^2)\right]^{\frac{p}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{3^{p/2}}(\|a\|^2 + \langle a, b\rangle + \|b\|^2)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Como

$$-\langle a, b\rangle \leq |\langle a, b\rangle| \leq \|a\|\|b\| \leq \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}\|b\|^2,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a, b\rangle &= \frac{1}{4}[\|a\|^2 + \|b\|^2] + \frac{1}{4}[\|a\|^2 + \|b\|^2] \\
&+ \frac{1}{2}[\|a\|^2 + \|b\|^2] + \langle a, b\rangle \\
&\geq \frac{1}{4}[\|a\|^2 + \|b\|^2] - \frac{1}{2}\langle a, b\rangle \\
&= \frac{1}{4}\|a-b\|^2.
\end{aligned}$$

Com isso temos

$$
\begin{aligned}
\|a-b\|\int_0^1 \frac{(\|sa+(1-s)b\|^2)^{\frac{p}{2}}}{\|sa+(1-s)b\|^2}ds &\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^p 2(\|a\|^2+\|b\|^2+\langle a,b\rangle)^{\frac{p}{2}}\\
&\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{4}\|a-b\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p+2}{p}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\|a-b\|^p.
\end{aligned}
$$

Tomando $\gamma''=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p+2}{p}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\geq 0$ temos

$$\langle \|a\|^{p-2}a-\|b\|^{p-2}b, a-b\rangle \geq \gamma''\|a-b\|^p,$$

Escolha agora $\gamma_0=\min\{\gamma',\gamma''\}$. Note que $\gamma_0>0$ e então

$$\langle \|a\|^{p-2}a-\|b\|^{p-2}b, a-b\rangle \geq \gamma_0\|a-b\|^p,$$

para todo $a,b\in\mathbb{R}^m$.

■

Definição 3.5. *O operador $\Delta_p: V\longrightarrow V'$ definido para todo $u\in V$ por*

$$\Delta_p u = div(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$$

é denominado operador $p-$Laplaciano.

Para cada $u\in W_0^{1,p}(0,1)$, definimos:

$$
\begin{aligned}
-\Delta_p u:\ \ W_0^{1,p}(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}\\
v &\longmapsto -\Delta_p u(v)=\int -\Delta_p u(x)v(x)dx.
\end{aligned}
$$

Provaremos que $-\Delta_p u$ está bem-definida. Para cada $v\in W_0^{1,p}(0,1)$ temos, pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
-\Delta_p u(v) &= \int -\Delta_p u \cdot v dx = \int -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) \cdot v dx \\
&= \int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) \cdot \nabla v dx \\
&\leq \left|\int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) \cdot \nabla v dx\right| \\
&\leq \int \|\nabla u\|^{p-2}\|\nabla u\|\|\nabla v\| dx \\
&= \int \|\nabla u\|^{p-1}\|\nabla v\| dx \\
&\leq \left(\int (\|\nabla u\|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int \|\nabla v\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int \|\nabla u\|^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int \|\nabla v\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pois $\nabla u, \nabla v \in L^p(0,1)$. Portanto, $-\Delta_p u$ está bem definido.

Mostraremos agora, que se $u \in W_0^{1,p}(0,1)$, então $-\Delta_p u \in W^{-1,q}(0,1)$. De fato, como $-\Delta_p u$ está bem definido para cada u, então resta mostrar que $-\Delta_p u$ é linear e limitado.

A linearidade segue da definição de $-\Delta_p u$ e das propriedades de integral. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\|-\Delta_p u\|_{W^{-1,q}(0,1)} &= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}(0,1)\\ \|v\|\leq 1}} |\langle -\Delta_p u, v\rangle| \\
&= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}(0,1)\\ \|v\|\leq 1}} |-\Delta_p u(v)| \\
&\leq \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}(0,1)\\ \|v\|\leq 1}} \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p} \\
&= \|u\|_{W_0^{1,p}(0,1)}^{p-1} \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}(0,1)\\ \|v\|\leq 1}} \|v\|_{W_0^{1,p}(0,1)} \\
&\leq \|u\|_{W_0^{1,p}(0,1)}^{p-1}.
\end{aligned}$$

Logo, $-\Delta_p u$ é limitado. Mostraremos que $-\Delta_p$ é monótono. Para todo $u, v \in W_0^{1,p}(0,1)$, pela desigualdade de Tartar temos

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u + \Delta_p v, u-v\rangle &= \langle -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) + \mathrm{div}(\|\nabla v\|^{p-2}\nabla v), u-v\rangle\\ &= \langle -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u - \|\nabla v\|^{p-2}\nabla v), u-v\rangle\\ &= \int -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u - \|\nabla v\|^{p-2}\nabla v)(u-v)dx\\ &= \int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u - \|\nabla v\|^{p-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v)dx\\ &= \langle \|\nabla u\|^{p-2}\nabla u - \|\nabla v\|^{p-2}\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle\\ &\geq \gamma_0 \int \|\nabla u - \nabla v\|^p dx = \gamma_0 \|\nabla u - \nabla v\|^p_{L^p} \geq 0.\end{aligned}$$

Logo, o operador $-\Delta_p$ é monótono. O próximo passo é mostrar a coercividade desse operador. Com efeito, se $u \in W_0^{1,p}(0,1)$, pela desigualdade de Poincaré, encontrada em [3], temos

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u, u\rangle &= \int -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)\cdot u dx\\ &= \int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)\nabla u dx\\ &= \int \|\nabla u\|^{p-2}\|\nabla u\|^2 dx\\ &= \int \|\nabla u\|^p dx = \|\nabla u\|^p_{L^p} \geq C\|u\|^p_{W_0^{1,p}(0,1)}.\end{aligned}$$

onde C depende do intervalo $(0,1)$. Assim,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle -\Delta_p u, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}}} \geq \lim_{\|u\|\to\infty} C^p \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}}}{\|u\|_{W_0^{1,p}}} = \lim_{\|u\|\to\infty} C^p \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}} = +\infty.$$

Logo, o operador $-\Delta_p$ é coercivo. Agora, observe que o operador $-\Delta_p$ pode ser representado por

$$-\Delta_p u = -\sum_{i=1}^n \partial_i a_i(\nabla u),$$

onde $a_i(\xi) = \|\xi\|^{p-2}\xi_i$ para $\xi \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, ..., n$, pois

$$-\Delta_p u = -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) = -\sum_{i=1}^n \partial_i(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u_i) = -\sum_{i=1}^n \partial_i a_i(\nabla u),$$

pois para todo $x \in (0,1), \nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$.

Vamos agora mostrar que $-\Delta_p$ é hemicontínuo, isto é, para todo $u, v \in W_0^{1,p}(0,1)$ temos $-\Delta_p((1-t)u + tv) \longrightarrow -\Delta_p u$ quando $t \to 0$. De fato, sabemos que

$$\nabla((1-t)u + tv) = (1-t)\nabla u + t\nabla v \longrightarrow \nabla u,$$

quando $t \to 0$. Se $\xi_t = (1-t)u + tv$, basta observar que, quando $t \to 0$,

$$-\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\xi_t) \longrightarrow -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\xi),$$

que é válido, pois $\partial_i a_i(\xi)$ é contínua. Logo, quando $t \to 0$, obtemos que

$$-\Delta_p((1-t)u + tv) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\nabla((1-t)u + tv)) \longrightarrow -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\nabla u) = -\Delta_p v.$$

Logo o operador $-\Delta_p$ é monótono, unívoco, hemicontínuo e coercivo. A proposição 3.6 implica então que o operador é maximal monótono em $L^2(0,1)$.

Vamos agora mostrar que o operador $-\Delta_p$ é do tipo subdiferencial. Considere $\phi : L^2(0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por

$$\phi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\int \|\nabla u\|^p dx, & \text{se } u \in W_0^{1,p}(0,1) \\ +\infty, & \text{se } u \in L^2(0,1) \setminus W_0^{1,p}(0,1). \end{cases}$$

Provaremos agora que $\partial\phi$ é maximal monótona em $L^2(0,1)$, mostrando que ϕ é convexa, própria, semicontínua inferiormente e usando a Proposição 3.2.

Primeiramente, note que se $u, v \in W_0^{1,p}(0,1)$, então

$$\begin{aligned} \|\nabla(tu + (1-t)v)\|^p &= \|t\nabla u + (1-t)\nabla v\|^p \\ &\leq (t\|\nabla u\| + (1-t)\|\nabla v\|)^p \\ &\leq t\|\nabla u\|^p + (1-t)\|\nabla v\|^p, \end{aligned}$$

pois a aplicação $\lambda \mapsto \lambda^p$ é convexa. Assim,

$$\begin{aligned} \phi(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{p} \int \|\nabla(tu + (1-t)v)\|^p dx \\ &\leq \frac{1}{p} \left[t \int \|\nabla u\|^p dx + (1-t) \int \|\nabla v\|^p dx \right] \\ &= t\phi(u) + (1-t)\phi(v). \end{aligned}$$

Se u ou v ou u e v não estão em $W_0^{1,p}(0,1)$, então o resultado segue pois $\phi((1-t)u + tv) \leq +\infty$. Portanto, concluímos que ϕ é convexa. Tomando qualquer $u \in W_0^{1,p}(0,1)$ temos que $\nabla u \in L^p(0,1)$ e $\|\nabla u\|_{L^p}^p < +\infty$, o que nos garante que ϕ é própria.

Por último, para mostrarmos que ϕ é semicontínua inferiormente, devemos mostrar que $\phi(u) \leq \liminf \phi(u_n)$ sempre que $u_n \to u$ em $L^2(0,1)$. Seja então uma sequência $u_n \to u$

em $L^2(0,1)$. Se $\liminf \phi(u_n) = +\infty$ o resultado segue. Se $\liminf \phi(u_n) = a < +\infty$, então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ satisfazendo $\lim\limits_{j\to\infty} \phi(u_{n_j}) = a$, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{p} \|u_{n_j}\|^p_{W_0^{1,p}(0,1)} = a.$$

Logo, $\{u_{n_j}\}$ é uma sequência limitada e, assim, existe uma subsequência $\{u_{n_{j_k}}\}$ com $u_{n_{j_k}} \rightharpoonup v$, onde $v \in W_0^{1,p}(0,1)$. Como $p > 2$, então $v = u$ pois $W_0^{1,p}(0,1) \subset L^2(0,1)$ continuamente. Portanto,

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(0,1)} \leq \liminf \|u_n\|_{W_0^{1,p}(0,1)}.$$

Logo $\phi(u) \leq \liminf \phi(u_n)$. Usando a Proposição 3.2 concluímos que $\partial\phi$ é maximal monótono em $L^2(0,1)$.

Como o objetivo era mostrar que $-\Delta_p = \partial\phi$, e, sendo ambos os operadores monótonos maximais, é suficiente mostrar apenas uma das inclusões. Vamos provar que $-\Delta_p u \subset \partial\phi u$ para todo $u \in W_0^{1,p}(0,1)$.

Seja $u \in D((-\Delta_p)_H)$ e $v = -\Delta_p u$. Então

$$\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle &= \langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle \\
&= \int -\mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)(\xi - u)dx \\
&= \int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)(\nabla\xi - \nabla u)dx \\
&= \int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)\nabla\xi dx - \int \|\nabla u\|^p dx.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle + \int \|\nabla u\|^p dx = \int (\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)\nabla\xi dx \leq \frac{1}{q}\int \|\nabla u\|^p dx + \frac{1}{p}\int \|\nabla\xi\|^p dx.$$

Logo,

$$\langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle + \frac{1}{p}\int \|\nabla u\|^p dx \leq \frac{1}{p}\int \|\nabla\xi\|^p dx,$$

ou seja,

$$\langle v, \xi - u\rangle + \phi(u) \leq \phi(\xi),$$

para todo $\xi \in W_0^{1,p}(0,1)$. Note que se $\xi \in L^2(0,1) \setminus W_0^{1,p}(0,1)$ então $\phi(\xi) = +\infty$ e a desigualdade acima continua válida. Logo para todo $\xi \in L^2(0,1)$,

$$\langle v, \xi - u\rangle + \phi(u) \leq \phi(\xi),$$

ou seja,

$$\phi(\xi) \geq \phi(u) + \langle v, \xi - u \rangle.$$

mostrando que $v \in \partial\phi(u)$ e, portanto, que $-\Delta_p = \partial\phi$.

Capítulo 4

Atratores Globais para Problemas Envolvendo Operadores Monótonos

Seja $A : H \longrightarrow H$ um operador maximal monótono e B uma aplicação globalmente Lipschitziana, em um espaço de Hilbert H. O primeiro objetivo deste capítulo é estudar a existência de atratores globais para problemas abstratos da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) + B(u(t)) = 0, \;\; t > 0 \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases} \tag{4.1}$$

Posteriormente vamos usar esses resultados abstratos para mostrar que o problema

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + u(1 - |u|^r), \;\; (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{4.2}$$

com a condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$, onde $p > 2$, $r > 0$ e $x \in (0,1)$, possui um atrator global.

Os resultado deste capítulo foram obtidos por A. N. Carvalho, J. Cholewa e T. Dlotko em [6].

4.1 Existência de Atratores Globais - Resultados Abstratos

Para mostrarmos a existência de atratores globais, vamos garantir inicialmente existência, unicidade e regularidade do problema (4.1). Para isso vamos impor algumas condições adicionais sobre o operador monótono A.

(H1) (i) Seja V um espaço de Banach reflexivo tal que

$$V \subset H \subset V'$$

com inclusões contínuas. Suponha também que V é denso em H.

(ii) Seja $A : V \longrightarrow V'$ não-linear, monótono, coercivo e hemicontínuo.

(iii) Seja $B : H \longrightarrow H$ uma aplicação globalmente Lipschitziana e considere o operador restrição $A_H : D(A_H) \subset H \longrightarrow H$.

Proposição 4.1. *Se* $(H1)$ *é valida, então a equação* (4.1) define um semigrupo de operadores não-lineares por

$$\begin{array}{rcl} T(t) : \overline{D(A_H)}^H & \longrightarrow & \overline{D(A_H)}^H \\ u_0 & \longmapsto & T(t)u_0 = u(t; u_0), \end{array}$$

para $t \geq 0$, onde $T(t)u_0$ é a solução global fraca de (4.1) começando em u_0. Esse semigrupo é tal que

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)}^H & \longrightarrow & \overline{D(A_H)}^H \\ (t, u_0) & \longmapsto & T(t, u_0) = T(t)u_0 \end{array}$$

é uma aplicação contínua. Adicionalmente, se $u_0 \in D(A_H)$ então $u(\cdot) = T(\cdot)u_0$ é uma solução forte e Lipschitziana de (4.1).

Demonstração: Pelas hipóteses $(i), (ii)$ de $(H1)$ e pela proposição 3.6 temos que A_H é maximal monótono em H. A existência e regularidade de soluções do (4.1) segue do Teorema 3.3 com $A_1 = A + B + wI$ sendo o operador maximal monótono, onde $w > 0$ é a constante de Lipschitz do operador B. Ainda mais, se $u(t; u_0) = u(t)$ e $u(t; v_0) = v(t)$ então, usando a monotonicidade do operador A, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle u(t) - v(t), u_t(t) - v_t(t)\rangle \\ &= \langle u(t) - v(t), -A(u(t)) - B(u(t)) + A(v(t)) + B(v(t))\rangle \\ &= -\langle A(v(t)) - A(u(t)), v(t) - u(t)\rangle + \langle B(v(t)) - B(u(t)), u(t) - v(t)\rangle \\ &\leq \|B(v(t)) - B(u(t))\|\|u(t) - v(t)\| \\ &\leq L\|u(t) - v(t)\|^2, \end{aligned}$$

onde L é a constante de Lipschitz de B. Integrando de 0 a t temos que

$$\|u(t) - v(t)\|^2 - \|u_0 - v_0\|^2 \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|^2 ds.$$

Logo,

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|^2 ds + \|u_0 - v_0\|^2.$$

Pela forma integral da desigualdade de Gronwall temos que

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq (1+Lte^{Lt})\|u_0-v_0\|^2 \leq (1+LTe^{LT})\|u_0-v_0\|^2,$$

ou seja, $\|T(t)u_0 - T(t)v_0\| = \|u(t;u_0)-u(t;v_0)\| \leq \sqrt{1+LTe^{LT}}\|u_0-v_0\|$. Tomando o supremo temos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|T(t)u_0 - T(t)v_0\| \leq C(T)\|u_0-v_0\|$$

Assim, a solução $u(\cdot) = T(\cdot)u_0$ é uma solução forte e Lipschitziana de (3.8). ■

Para obtermos a existência de atratores globais, precisamos impor mais algumas condições sobre o operador monótono A.

(H2) Existem constantes $w_1, w_2 > 0, C_1 \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$ tal que para todo $v \in V$ temos

$$\langle Av, v\rangle_{V',V} \geq w_1\|v\|_V^p + C_1 \tag{4.3}$$

e

$$\|Av\|_{V'} \leq w_2(1+\|v\|_V^{p-1}). \tag{4.4}$$

Lema 4.1. *Se são válidas as hipóteses* $(H1)$ *(ítens (i) e (ii)) e* $(H2)$*, então o domínio* $D(A_H)$ *é denso em* H*.*

Demonstração: Vamos mostrar que para $u \in H$, existe uma sequência em $D(A_H)$ convergente para u. Seja $\varepsilon \in (0,1)$ e $u_\varepsilon = (I+\varepsilon A_H)^{-1}(u)$, que existe porque o operador A_H é maximal monótono. Então, $(I+\varepsilon A_H)u_\varepsilon = u$, ou seja,

$$u_\varepsilon + \varepsilon A_H u_\varepsilon = u. \tag{4.5}$$

Logo,

$$\langle u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle + \varepsilon\langle A_H u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle = \langle u, u_\varepsilon\rangle,$$

ou seja,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\langle A_H u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle = \langle u, u_\varepsilon\rangle.$$

Usando (4.3) obtemos que

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon(w_1\|u_\varepsilon\|_V^p + C_1) \leq \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\langle A_H u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle = \langle u, u_\varepsilon\rangle \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H.$$

Assim,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon w_1\|u_\varepsilon\|_V^p \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H - \varepsilon C_1. \tag{4.6}$$

Portanto, a norma $\|u_\varepsilon\|_H$ é limitada e

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|_V^p \leq K, \tag{4.7}$$

onde $K > 0$ é independente de $\varepsilon \in (0,1)$. Daí,

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq \sqrt[p]{\frac{K}{\varepsilon}} \Rightarrow \|u_\varepsilon\|_V^{p-1} \leq \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Assim de (4.4),(4.5) e (4.7) temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{V'} &= \varepsilon\|A_H(u_\varepsilon)\|_{V'} \leq w_2\varepsilon\left(1 + \|u_\varepsilon\|_V^{p-1}\right) \leq w_2\varepsilon\left(1 + \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right) \\
&= w_2\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{(p-1)/p}}K^{\frac{p-1}{p}}\right) = w_2\left(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{p}}K^{\frac{p-1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ segue que $u_\varepsilon \to u$ em V'. Como H é um espaço de Hilbert e, portanto, reflexivo e a sequência $\{u_\varepsilon\}$ é limitada, então qualquer sequência $\{u_{\varepsilon_n}\}$ tem uma subsequência que converge fracamente em H. Usando (4.6) vemos que

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 \leq \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon w_1\|u_\varepsilon\|_V^p \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H - \varepsilon C_1,$$

ou seja,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 - \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H + \varepsilon C_1 \leq 0.$$

Assim $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_H \leq \|u\|_H$ e portanto $u_\varepsilon \to u$ em H. Logo $u \in \overline{D(A_H)}^H$.

■

Apresentamos agora uma caracterização dos operadores compactos definidos em um espaço métrico X.

Lema 4.2. *Seja J uma aplicação contínua em um espaço métrico (X,ρ) e W um subconjunto denso em X. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) J é uma aplicação compacta.

(ii) Para toda bola aberta $B_X(r)$, a imagem $J(B_X(r) \cap W)$ é pré-compacta em X.

Demonstração: A prova de $(i) \Rightarrow (ii)$ é imediata. Para provar que $(ii) \Rightarrow (i)$, seja $\mathcal{B}$ um subconjunto limitado de X, denote por $d(\mathcal{B})$ o diâmetro de $\mathcal{B}$ e tome $v_0 \in \mathcal{B}$. Temos

$$\mathcal{B} \subset \{v \in X;\ \rho(v_0,v) < d(\mathcal{B}) + 1\} = \widetilde{\mathcal{B}}.$$

Também, como $\mathcal{B} \subset \overline{\widetilde{\mathcal{B}}}$ e $\mathcal{B} \subset X = \overline{W}$, então $\mathcal{B} \subset \overline{\widetilde{\mathcal{B}} \cap W}$. Sendo J uma aplicação contínua, então

$$J(\mathcal{B}) \subset J(\overline{\widetilde{\mathcal{B}} \cap W}) \subset \overline{J(\widetilde{\mathcal{B}} \cap W)}.$$

Por hipótese o conjunto $\overline{J(\widetilde{\mathcal{B}} \cap W)}$ é compacto em X e, portanto, $\overline{J(\mathcal{B})}$ é compacto.

■

Lema 4.3. *Seja $p > 2, (H1)$ e $(H2)$ válidas. Para todo $u_0 \in D(A_H)$ e $T > 0$ temos que:*

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^p ds \leq K_1(\|u_0\|_H, T) \tag{4.8}$$

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{V'}^\theta ds \leq K_2(\|u_0\|_H, T), \tag{4.9}$$

onde K_1, K_2 são funções localmente limitadas e $\theta = \dfrac{p}{p-1}$.

Demonstração: De acordo com a Proposição 4.1 temos uma solução fraca $u(t)$ do problema (4.1). Seja $u_0 \in D(A_H)$. Pelo Teorema 3.3, a solução fraca u correspondente ao dado inicial u_0 é tal que $u \in C([0,T]; H)$ para todo $T > 0$. Portanto para qualquer aplicação $B : H \longrightarrow H$ Lipschitziana segue que $f(t) = B(u(t)) \in C([0,T]; H) \subset L^\theta(0,T; V')$. Segue do Teorema 2.6 de [2] que

$$u \in C([0,T]; H) \cap L^p(0,T; V) \ \text{ e } \ \frac{du}{dt} \in L^\theta(0,T; V')$$

Da equação (4.1) segue que

$$\langle \frac{d}{dt} u(t), u(t) \rangle + \langle A(u(t)), u(t) \rangle_{V',V} + \langle B(u(t)), u(t) \rangle_H = 0.$$

Usando também a desigualdade (4.3) e o fato de B ser Lipschitziana temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &= -\langle A(u), u \rangle_{V',V} - \langle B(u), u \rangle_H \leq -w_1 \|u\|_V^p - C_1 + \|B(u)\| \|u\|_H \\
&\leq -w_1 \|u\|_V^p - C_1 + L\|u\|_H^2 + C_2 \|u\|_H \leq -\frac{1}{2} w_1 \|u\|_V^p - C_1 + LK + C_2 K \\
&= -\frac{1}{2} w_1 \|u\|_V^p + \overline{C},
\end{aligned}$$

onde $p > 2, C_2 = \|B(0)\|, L$ é a constante de Lipschitz e K existe pelo fato de que $u \in C([0,T], H)$. Integrando de 0 a T, segue que

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(s)\|_H^2 ds \leq \int_0^T -\frac{w_1}{2}\|u(s)\|_V^p + \overline{C} ds,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2) \leq -\frac{1}{2}w_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p ds + \overline{C}T.$$

Logo,

$$\|u(T)\|_H^2 + w_1 \int_0^T \|u(s)\|_V^p ds \leq \|u(0)\|_H^2 + 2\overline{C}T,$$

e, portanto,

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^p ds \leq (\|u(0)\|_H^2 + 2\overline{C}T)w_1^{-1}.$$

Assim,

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^p ds \leq K_1(\|u_0\|_H, T),$$

o que mostra a primeira desigualdade. Agora, como $u \in C([0,T];H)$,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} = \sup_{t\in[0,T]} \text{ess}\|u(t)\|_H \leq \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H < \infty. \tag{4.10}$$

Segue da equação (4.1) e da desigualdade (4.4) que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'}^\theta &\leq (\|Au\|_{V'} + \|Bu\|_{V'})^\theta \leq 2^{\theta-1}(\|Au\|_{V'}^\theta + \|Bu\|_{V'}^\theta) \\
&\leq 2^{\theta-1}[w_2^\theta 2^{\theta-1}(1 + \|u\|_V^p) + 2^{\theta-1}(L^\theta\|u\|_H^\theta + C_2^\theta)] \\
&= 2^{2\theta-2}w_2^\theta\|u\|_V^p + 2^{2\theta-2}L^\theta\|u\|_H^\theta + 2^{2\theta-2}C_2^\theta + 2^{2\theta-2}w_2^\theta \\
&= \widetilde{C}(\|u\|_V^p + \|u\|_H^\theta + 1),
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{C} = \max\{2^{2\theta-2}w_2^\theta, 2^{2\theta-2}L^\theta, 2^{2\theta-2}C_2^\theta + 2^{2\theta-2}w_2^\theta\}$. Integrando a expressão acima de 0 a T e levando em conta (4.3) e (4.10), temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\|\frac{d}{dt}u(s)\right\|^\theta ds &\leq \widetilde{C}\int_0^T (1 + \|u(s)\|_V^p + \|u(s)\|_H^\theta) ds \\
&= \widetilde{C}T + \widetilde{C}\int_0^T \|u(s)\|_V^p ds + \int_0^T \|u(s)\|_H^\theta ds \\
&\leq \widetilde{C}T + K_1(\|u_0\|_H, T) + T\max_{s\in[0,T]} \|u(s)\|_H^\theta \\
&\leq K_2(\|u_0\|_H, T),
\end{aligned}$$

e oLema segue. ■

Vamos agora mostrar que o semigrupo associado as soluções do problema (4.1) é um semigrupo compacto.

Lema 4.4. *Seja $\{T(t); t > 0\}$ o semigrupo associado com (4.1), definido em $\overline{D(A_H)}^H$. Suponha que são válidos $(H1)(i)$,(4.8) e (4.9) para algum $T > 0, p > 1, \theta > 1$ e assuma que a imersão $V \subset H$ é compacta. Então*

$$T(t) : \overline{D(A_H)}^H \longrightarrow \overline{D(A_H)}^H$$

é uma aplicação compacta para cada $t > 0$.

Demonstração: De acordo com o Lema 4.2, para mostrar que $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, é suficiente considerar bolas abertas $B_H(0, r)$ e analisar a imagem de $B_H(0, r) \cap X$, onde X é um conjunto denso em H.

Vamos então considerar $\mathcal{B} = B_H(0, r) \cap D(A_H)$. Fixe $T > 0$ e defina o subconjunto $\widetilde{\mathcal{B}} \subset C([0, T]; H)$ dado por

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{T(\cdot)u_0;\ \ u_0 \in \mathcal{B}\} = \{T(\cdot)u_0;\ \ u_0 \in B_H(0, r) \cap D(A_H)\}$$

onde $u(\cdot) = T(\cdot)u_0 \in C([0, +\infty); H)$ denota a solução fraca resultante da proposição 4.1.

Considere o seguinte espaço de Banach

$$W = \{v \in L^p(0, T; V);\ \ \frac{dv}{dt} \in L^\theta(0, T; V')\},$$

onde $p \geq 2$, munido com a norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;V)} + \left\|\frac{dv}{dt}\right\|_{L^\theta(0,T;V')}$$

O Lema 4.3 nos fornece que as normas $\|v\|_{L^p(0,T;V)}$ e $\left\|\frac{dv}{dt}\right\|_{L^\theta(0,T;V')}$ são limitadas, e deste fato segue que o conjunto $\widetilde{\mathcal{B}}$ é limitado na norma de W, e portanto pelo Teorema 5.1, capítulo 1 de [14], temos que $\widetilde{\mathcal{B}}$ é pré-compacto em $L^p(0, T; H)$.

Tome então uma sequência qualquer $\{u_n\} \subset \mathcal{B}$ e considere a sequência $\{T(\cdot)u_n\} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$. Existe uma subsequência $\{T(\cdot)u_{n_k}\}$ de $\{T(\cdot)u_n\}$ e $v_0 \in L^p(0, T; H)$ tal que

$$\|T(\cdot)u_{n_k} - v_0\|_{L^p(0,T;H)} \longrightarrow 0 \ \text{ se } \ k \to \infty,$$

ou seja,

$$\left(\int_0^T \|T(s)u_{n_k} - v_0(s)\|_H^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \ \text{ se } \ k \to \infty. \tag{4.11}$$

Portanto, a sequência $\{\|T(\cdot)u_{n_k} - v_0(\cdot)\|_H\}$ de funções reais

$$\begin{array}{rccc} \|T(\cdot)u_{n_k} - v_0(\cdot)\|_H : & (0, T) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \|T(t)u_{n_k} - v_0(t)\|_H \end{array}$$

converge para 0 em $L^p(0, T; \mathbb{R})$ e, portanto, existe uma subsequência $\{\|T(\cdot)u_{n_{k_l}} - v_0(\cdot)\|\}$ tal que, quando $l \to \infty$,

$$\|T(\cdot)u_{n_{k_l}} - v_0(\cdot)\| \longrightarrow 0$$

quase sempre em $(0,T)$ e, por essa razão, existe $\tau \in (0,T)$ tal que

$$T(\tau)u_{n_{k_l}} \longrightarrow v_0(\tau), \text{ quando } l \to \infty$$

em H. Portanto, para todo $t>0$

$$T(t)u_{n_{k_l}} = T(t-\tau+\tau)u_{n_{k_l}} = T(t-\tau)T(\tau)u_{n_{l_k}} \longrightarrow T(t-\tau)v_0(\tau)$$

em H, o que prova que a sequência $\{T(t)u_n\}$ tem uma subsequência convergente em H e assim, usando oLema 4.2 temos que $T(t)$ é um operador compacto.

■

Lema 4.5. *Suponha que* $(H1)$ *e (4.3) são válidos. Se* $p>2$*, então o semigrupo associado com o problema (4.1) é* $B-$*dissipativo limitado.*

Demonstração: Devemos mostrar que o semigrupo $\{T(t); t\geq 0\}$ possui um $B-$atrator limitado. Com efeito, considere um dado inicial qualquer $u_0 \in D(A_H)$. Da hipótese (4.3) e do fato de B ser Lipschitziana segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &= -\langle A(u),u\rangle_{V',V} - \langle B(u),u\rangle_H \leq -w_1\|u\|_V^p - C_1 + K(\|u\|_H^2+1)\\ &\leq -\frac{w_1}{2}\|u\|_V^p + K' \leq -\frac{w_1}{2}e^{-p}\|u\|_H^p + K',\end{aligned}$$

onde e é a constante de imersão de V em H. Denotando $y(t)=\|u(t)\|_H^2$, então y satisfaz a desigualdade diferencial

$$\frac{1}{2}y'(t) \leq -\frac{w_1}{2}e^{-p}y^{\frac{p}{2}}(t) + K',$$

ou seja,

$$y'(t) \leq -w_1e^{-p}y^{\frac{p}{2}}(t) + 2K'.$$

E assim, por [19]-Lema 5.1, temos

$$y(t) = \|u(t)\|_H^2 \leq \left(\frac{2K'}{w_1e^{-p}}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(w_1\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

A desigualdade acima nos permite afirmar que o conjunto

$$F = \{u_0 \in \overline{D(A_H)}^H;\ \|u_0\|_H \leq r\}$$

atrai subconjuntos limitados de $\overline{D(A_H)}^H$ na norma de H para todo $r \geq \left(\frac{2K'}{w_1e^{-p}}\right)^{\frac{2}{p}}$. De fato, seja M um subconjunto limitado em $\overline{D(A_H)}^H$ e $u_0 \in M$. Dado $\varepsilon>0$, tome $t_1 \geq 0$

de modo que $t_1 \geq \dfrac{2}{p-2} w_1^{-1} \left[(r+\varepsilon)^2 - r\right]^{-\frac{p-2}{2}}$. Se $t \geq t_1$, então

$$\begin{aligned}
\|T(t)u_0\|_H = \|u(t;u_0)\|_H &\leq \sqrt{\left(\frac{2K'}{w_1 e^{-p}}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(w_1\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-\frac{2}{p-2}}} \\
&\leq \sqrt{r + \left(w_1\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-\frac{2}{p-2}}} \\
&\leq \sqrt{r + (r+\varepsilon)^2 - r} \\
&= r + \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, $T(t)u_0 = u(t;u_0) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F)$ e, portanto, o conjunto F é um $B-$ atrator limitado.

■

O Teorema 1.9 mostra o

Teorema 4.1. *Suponha que* $(H1)$, (4.3) *e* (4.9) *sejam válidos,* $p > 2$ *e* V *compactamente imerso em* H. *Então o semigrupo* $\{T(t); t \geq 0\}$ *associado com o problema (4.1) possui um atrator global em* $\overline{D(A_H)}^H$.

4.2 Existência de Atrator Global para o Problema de Takeuchi e Yamada (caso q=2)

Nesta seção vamos mostrar a existência de um atrator global para o problema

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{4.12}$$

onde $u(x,0) = u_0(x)$, $p > 2$ e $r > 0$. Para usarmos os resultados da seção anterior, escreveremos o problema na forma abstrata.

Considere a partir de agora $H = L^2(0,1)$. Sejam A_1 e A_2 operadores não-lineares definidos por

$$D(A_1) = \{u \in W_0^{1,p}(0,1);\ \ \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x \in L^2(0,1)\}$$

$$A_1(u) = -\lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x,$$

e

$$D(A_2) = \{u \in L^{r+2};\ \ |u|^r u \in L^2(0,1)\}$$

$$A_2(u) = |u|^r u.$$

Defina o operador A em $D(A_1) \cap D(A_2)$ como sendo

$$A(u) = A_1(u) + A_2(u).$$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s$, que é uma função globalmente Lipschitziana e B o operador de Nemitskii definido por $-f$ em $L^2(0,1)$ e $V = W_0^{1,p}(0,1) \cap L^{r+2}(0,1)$. Não faremos a prova do próximoLema, a qual pode ser encontrada em [9].

Lema 4.6. *O espaço de Banach V munido da norma*

$$\| \cdot \|_V = \| \cdot \|_{W_0^{1,p}(0,1)} + \| \cdot \|_{L^{r+2}(0,1)}$$

é um espaço reflexivo.

■

Teorema 4.2. *O problema* (4.2) *possui um atrator global em* $L^2(0,1)$.

Demonstração: Para utilizar o Teorema 4.1, vamos inicialmente verificar a condição $(H1)$. Pelo Lema 4.6 segue que V é reflexivo. Além disso, como $r > 0$, então

$$L^{r+2}(0,1) \subset L^2(0,1).$$

Logo,

$$V \subset L^{r+2}(0,1) \subset L^2(0,1) = H.$$

Disto também segue que $H' \subset V'$, e sendo $(L^2(0,1))' = L^2(0,1)$, então $H \subset V'$ e, portanto, temos $V \subset H \subset V'$. Também, é fácil ver que $\overline{W_0^{1,p}(0,1) \cap L^{r+2}(0,1)} = L^2(0,1)$ e assim, a hipótese $(H1)(i)$ está satisfeita.

Para cada $u \in V$ defina:

$$\begin{aligned} Au : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto Au(v) = \int Au \cdot v \; dx \end{aligned}$$

ou seja, o operador $A : V \longrightarrow V'$ será dado por:

$$\langle A(u), v \rangle_{V',V} = \lambda \int |u_x|^{p-2} u_x v_x \; dx + \int |u|^r uv \; dx, \quad \forall v \in V$$

Vamos agora mostrar que o operador A é coercivo, hemicontínuo e monótono definido em V com $D(A_H)$ denso em H, onde

$$D(A_H) = \{v \in V; \; -\lambda(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^r v \in H\}.$$

Começaremos mostrando a coercividade do operador A. Note que

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle &= \lambda \int |u_x|^{p-2} u_x u_x dx + \int |u|^r u^2 dx \\
&= \lambda \int |u_x|^p dx + \int |u|^r u^2 dx \\
&\geq \lambda \int |u_x|^p dx = \lambda \|u_x\|_{L^p}^p \\
&= \lambda \|u\|_{w_0^{1,p}}^p.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}}} \geq \lim_{\|u\|\to\infty} \lambda \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} = +\infty.$$

A demonstração de que o operador A é hemicontínuo foi feita na seção 3.4. O próximo passo será mostrar que A é monótono. De fato, usando a desigualdade de Tartar temos, para todo $u, v \in V$, que

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \langle -\lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^r u + \lambda(|v_x|^{p-2}v_x)_x - |v|^r v, u - v\rangle \\
&= \lambda \int (|u_x|^{p-2}u_x - |v_x|^{p-2}v_x)(u_x - v_x) dx + \langle |u|^r u - |v|^r v, u - v\rangle \\
&= \lambda \int \langle |u_x|^{p-2}u_x - |v_x|^{p-2}v_x, u_x - v_x\rangle dx + \langle |u|^r u - |v|^r v, u - v\rangle \\
&\geq \lambda \int \gamma_0 |u_x - v_x|^p dx + \gamma_1 \|u - v\|^{r+2} \\
&= \lambda\gamma_0 \|u_x - v_x\|_{L^p}^p + \gamma_1 \|u - v\|^{r+2}
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$. Vamos agora verificar (4.3). Afirmamos que para todo $u \in V$ vale

$$\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} \geq w_1 \|u\|_V^\eta + C_1,$$

onde $\eta = \min\{p, r+2\}$. Com efeito, note inicialmente que demonstrar a desigualdade acima é equivalente a mostrar que

$$\|u\|_V^\eta \leq w_1(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}) + C.$$

Temos dois casos a considerar: $\eta = p$ e $\eta = r+2$. Suponha inicialmente $\eta = p$. Então, pela desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}
(\|u_x\|_{L^p} + \|u\|_{L^{r+2}})^p &\leq 2^{p-1}(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^p) \\
&\leq 2^{p-1}\left(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + \frac{r+2-p}{r+2}\right) \\
&= w_1(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}) + C,
\end{aligned}$$

onde $w_1 = 2^{p-1} > 0$ e $C = 2^{p-1}\dfrac{r+2-p}{r+2}$. Suponha agora $\eta = r+2$. Temos então

$$\begin{aligned}
(\|u_x\|_{L^p} + \|u\|_{L^{r+2}})^{r+2} &\leq 2^{r+1}(\|u_x\|_{L^p}^{r+2} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}) \\
&\leq 2^{r+1}\left(\|u_x\|_{L^p}^p + \frac{p-r-2}{p} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}\right) \\
&= w_1(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}) + C,
\end{aligned}$$

onde $w_1 = 2^{r+1} > 0$ e $C = 2^{r+1}\dfrac{p-r-2}{p}$. Desta maneira chegamos a (4.3).

Resta agora verificar a desigualdade (4.9). Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &= \langle \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x - |u|^r u + u, u\rangle \\
&= \langle \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x, u\rangle - \langle |u|^r u, u\rangle + \langle u, u\rangle \\
&= -\lambda\int |u_x|^{p-2}u_x u_x dx - \int |u|^r u u dx + \langle u, u\rangle \\
&\leq -\lambda\int |u_x|^p dx - \int |u|^{r+2} dx + \|u\|_{L^2}^2 \\
&\leq -\lambda\|u_x\|_{L^p}^p - \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + \|u\|_{L^2}^2 \\
&\leq -\lambda\|u_x\|_{L^p}^p - \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + C'\|u\|_V^2 \\
&= -\lambda\|u_x\|_{L^p}^p - \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + C'(\|u_x\|_{L^p} + \|u\|_{L^{r+2}})^2 \\
&\leq -\lambda\|u_x\|_{L^p}^p - \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + 2C'\|u_x\|_{L^p}^2 + 2C'\|u\|_{L^{r+2}}^2 \\
&\leq -\lambda\|u_x\|_{L^p}^p - \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + 2C'\left(\|u_x\|_{L^p}^p + \frac{p-2}{p}\right) + 2C'\left(\|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + \frac{r}{r+2}\right) \\
&= (2C' - \lambda)\|u_x\|_{L^p}^p + (2C' - 1)\|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + 2C'\left(\frac{p-2}{p}\right) + 2C'\left(\frac{r}{r+2}\right) \\
&\leq \alpha(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}) + 2C'\left(\frac{p-2}{p} + \frac{r}{r+2}\right) \\
&= -w(\|u_x\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2}) + K,
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \max\{2C' - \lambda, 2C' - 1\}$, $w = -\alpha$ e $K = 2C'\left(\dfrac{p-2}{p} + \dfrac{r}{r+2}\right)$. Integrando a desigualdade acima de 0 a T temos que

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 \leq -w\int_0^T \|u_x(s)\|_{L^p}^p + \|u(s)\|_{L^{r+2}}^{r+2} ds + KT.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + w\int_0^T \|u_x(s)\|_{L^p}^p + \|u(s)\|_{L^{r+2}}^{r+2} ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + KT = C_1(\|u_0\|_H, T). \quad (4.13)$$

Também,

$$
\begin{aligned}
\|A_1(u)\|_{W^{-1,q}(0,1)} &= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} |\langle A_1u, v\rangle| = \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} |A_1u(v)| \\
&= \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} \left|\int A_1u\cdot vdx\right| = \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} \left|\int -\lambda(\|u_x\|^{p-2}u_x)_x vdx\right| \\
&= \lambda \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} \left|\int (\|u_x\|^{p-2}u_x)v_x dx\right| \le \lambda \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} \int \|u_x\|^{p-2}\|u_x\|\|v_x\|dx \\
&\le \lambda \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} \left(\int (\|u_x\|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int \|v_x\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lambda \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}\\ \|v\|\le 1}} \|u_x\|_{L^p}^{p-1}\|v\|_{W_0^{1,p}} \le \lambda\|u_x\|_{L^p}^{p-1} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|A_2(u)\|_{L^{\frac{r+2}{r+1}}(0,1)} &= \left(\int |A_2u|^{\frac{r+2}{r+1}}du\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&= \left(\int ||u|^r u|^{\frac{r+2}{r+1}}\, du\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\le \left(\int (|u|^{r+1})^{\frac{r+2}{r+1}}du\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&= \|u\|_{L^{r+2}}^{r+1}.
\end{aligned}
$$

Levando em conta as estimativas (4.14) e (4.15) e usando estimativa contida em [9], capítulo 1, seção 5, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'} &= \|A_1u + A_2u + Bu\|_{V'} \le \|A_1u + A_2u\|_{V'} + \|Bu\|_{V'} \\
&\le \|A_1u\|_{W^{-1,q}} + \|A_2u\|_{L^{(r+2)/(r+1)}} + L\|u\|_H + \widetilde{C} \\
&\le \lambda\|u_x\|_{L^p}^{p-1} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+1} + L\|u\|_H + \widetilde{C} \\
&\le \lambda\|u_x\|_{L^p}^{p-1} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+1} + LK'\|u_x\|_{L^p} + LK'\|u\|_{L^{r+2}} + \widetilde{C} \\
&\le \lambda\|u_x\|_{L^p}^{p-1} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+1} + LK'\left(\|u_x\|_{L^p}^{p-1} + \frac{p-1}{p-2}\right) + LK'\left(\|u\|_{L^{r+2}}^{r+1} + \frac{r}{r+1}\right) + \widetilde{C} \\
&= (\lambda + LK')\|u_x\|_{L^p}^{p-1} + (1 + LK')\|u\|_{L^{r+2}}^{r+1} + \beta \\
&\le \alpha(\|u_x\|_{L^p}^{p-1} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+1} + 1),
\end{aligned}
$$

onde $\beta = LK'\left(\dfrac{p-1}{p-2} + \dfrac{r}{r+1}\right) + \widetilde{C}$ e $\alpha = \max\{\lambda + LK', 1 + LK', \beta\}$.

Afirmamos que, para $\theta = \min\{p/(p-1), (r+2)/(r+1)\}$ é válida a desigualdade

$$
\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'}^{\theta} dt \le \gamma' \int_0^T (\|u\|_{W_0^{1,p}}^{(p-1)\theta} + \|u\|_{L^{r+2}}^{(r+1)\theta} + 1)dt \le C_2(\|u_0\|_H, T).
$$

De fato, se $\theta = \dfrac{p}{p-1}$ então $0 < \theta < \dfrac{r+2}{r+1}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V'}^{\theta} dt &\le \alpha' \int_0^T (\|u\|_{W_0^{1,p}}^{(p-1)\theta} + \|u\|_{L^{r+2}}^{(r+1)\theta} + 1)dt \\
&\le \alpha' \int_0^T (\|u\|_{W_0^{1,p}}^{p} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2} + 1)dt \\
&= \int_0^T (\|u\|_{W_0^{1,p}}^{p} + \|u\|_{L^{r+2}}^{r+2})dt + T \\
&\le C_1(\|u_0\|_H, T).
\end{aligned}$$

Se $\theta = \dfrac{r+2}{r+1}$, então $0 < \theta < \dfrac{p}{p-1}$ e, de maneira análoga a argumentação feita acima, temos a mesma desigualdade. Assim as hipóteses do Teorema 4.1 estão satisfeitas e o semigrupo associado a (4.12) possui um atrator global em $\overline{D(A_H)}^H = L^2(0,1)$.

$\blacksquare$

Capítulo 5

Um Problema do Tipo Reação-Difusão Envolvendo o p-Laplaciano Degenerado

Neste capítulo vamos estudar rapidamente um generalização do problema 4.12. Demonstraremos algumas propriedades que são necessárias para utilizar um resultado de existência local e unicidade de soluções para problemas envolvendo diferença de operadores subdiferenciais contidos em [16]. Estudaremos também algumas propriedades assintóticas do problema 4.12 que foram mostradas por S. Takeuchi e Y. Yamada em [18].

5.1 Introdução

Consideremos a partir de agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $p > 2, q \geq 2, r > 0$ e $\lambda > 0$. O termo de reação de (5.1) consiste de um termo fonte $|u|^{q-2}u$, e um termo de absorção $|u|^{q+r-2}u$, o qual domina o termo fonte. Este problema foi estudado em [18] e generaliza de alguma forma os resultados obtidos em [8] e que foram estudados no Capítulo 2 desta dissertação.

Substituindo o p-Laplaciano por um termo de difusão linear e fazendo $q = 2$, o problema torna-se:

$$\begin{cases} u_t = \lambda u_{xx} + u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty) \end{cases} \tag{5.2}$$

o qual é um caso particular de (5.1) com $p = Q = 2$ e que foi estudado no Capítulo 2. Nosso objetivo aqui é estudar a existência global de soluções para (5.1) e mostrar que o semigrupo gerado por (5.1) é um sistema gradiente.

Neste capítulo, $\|\cdot\|_p$ denotará a norma em $L^p(0,1)$. Para o caso particular $p = 2$ denotaremos simplesmente $\|\cdot\|$. Muniremos o espaço $W_0^{1,p}(0,1)$ da norma $\|u_x\|_p$.

5.2 Existência e Unicidade

Nesta seção demonstraremos algumas propriedades que garantem a existência global de soluções de (5.1). A noção de solução forte para esse problema é dada abaixo.

Definição 5.1. *Para $u_0 \in L^2$, uma função $u : [0,T] \longrightarrow L^2$ que possui as propriedades*

(i) $u \in C([0,T]; L^2) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p})$;

(ii) $u_t \in L^2(\delta, T; L^2)$ *e* $(|u_x|^{p-2}u_x)_x \in L^2(\delta, T; L^2)$ *para todo* $0 < \delta < T$;

(iii) u satisfaz

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T); \end{cases} \tag{5.3}$$

(iv) $u(0) = u_0$;

é chamada de solução forte de (5.1) em $[0,T]$.

A existência local de uma solução forte para o problema (5.1) será garantida pelo próximo Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [16].

Teorema 5.1. *Considere o seguinte problema de Cauchy abstrato:*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\phi^1(u(t)) - \partial\phi^2(u(t)) = f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

onde $\partial\phi^i$ são operadores subdiferenciais de funções convexas e semicontínuas inferiormente $\phi^i : H \longrightarrow (-\infty, \infty]$ tais que $\phi^i \neq +\infty$. Se são válidas as seguintes condições

(i) Para todo $L \in (0, +\infty)$, o conjunto $\{u \in H; \phi^1(u) \leq L\}$ é compacto;

(ii) $D(\partial\phi^1) \subset D(\partial\phi^2)$;

(iii) Existe uma constante $k_1 \in [0,1)$ *tal que para todo* $u \in D(\partial\phi^1)$

$$\|\partial\tilde{\phi}^2(u)\|_H \leq k_1\|\partial\tilde{\phi}^1(u)\|_H + M(\phi^1(u)),$$

onde $\partial\tilde{\phi}^i$ *denota a seção minimal de* $\partial\phi^i$ *e* $M(\cdot)$ *uma função monótona crescente localmente limitada;*

(iv) Existe uma constante $k_2 \in [0,1)$ *tal que* $\phi^2(u) \leq k_2\phi^1(u) + C$ *para todo* $u \in D(\phi^1)$*.*

Então, para todo $u_0 \in D(\phi^1)$ *e* $f(t) \in L^2(0,T;H)$*, existe uma solução forte* $u(t)$ *de* (5.4)*.*

Observação 5.1. *Note que* (5.1) *é um caso particular do problema abstrato de Cauchy acima, pois tomando* $\phi^1 : L^2(0,1) \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ *como*

$$\phi^1(u) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{p}\displaystyle\int_0^1 |u_x(x)|^p dx + \int_0^1\int_0^u |v|^{q-2+r} v dv dx, & se \ u \in W_0^{1,p}(0,1) \\ +\infty, \ \ se \ u \in L^2(0,1) \setminus W_0^{1,p}(0,1), \end{cases}$$

e $\phi^2 : L^2(0,1) \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ *como*

$$\phi^2(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1\int_0^u |v|^{q-2} v dv dx, & se \ u \in W_0^{1,p}(0,1) \\ +\infty, \ \ se \ u \in L^2(0,1) \setminus W_0^{1,p}(0,1). \end{cases}$$

Então $\partial\phi^1 u = -\lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q+r-2}u$ *e* $\partial\phi^2 u = |u|^{q-2}u$*.*

Observação 5.2. *É possível mostrar que toda solução de* (5.1) *é limitada em* $W_0^{1,p}$*, uniformemente em* $[0,T]$*, para dados iniciais em limitados de* $W_0^{1,p}$*. De fato, existem constantes* $c_0 \in (0,1)$ *e* $c > 0$ *tais que*

$$\phi^2(u) \leq c_0\phi^1(u) + c, \tag{5.5}$$

qualquer que seja $u \in W_0^{1,p}$*. Desta desigualdade e da equação* (5.1) *segue que*

$$\int_0^t \|u_\tau(\tau)\|^2 d\tau + (1-c_0)\frac{\lambda}{p}\int_0^1 |u_x(x)|^p dx \leq \phi^1(u_0) + c.$$

Como $\dfrac{\lambda}{p}\displaystyle\int_0^1 |u_x(x)|^p dx$ *é equivalente a norma de* u *em* $W_0^{1,p}$*, então dados* $B \subset W_0^{1,p}$ *limitado e* $T > 0$, $\displaystyle\sup_{t\in[0,T],u_0\in B} \|u_x(t)\|_p < \infty$*. Assim, uma vez que* $W_0^{1,p}(0,1)$ *está continuamente imerso em* $C([0,1],\mathbb{R})$*, temos que existe uma constante* $K > 0$*, tal que* $\displaystyle\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |u(t)(x)| < K$ *para dados iniciais em* B*.*

Lema 5.1. *(i) Seja $T > 0$, $u_0, v_0 \in B \subset W_0^{1,p}$ limitado, u e v soluções fortes de* (5.1) em $[0,T]$ com $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$. Então é válida a seguinte desigualdade

$$\|u(t) - v(t)\|^2 + 2\lambda C_0 \int_0^t \|u_x(s) - v_x(s)\|_p^p ds \leq e^{2C_1 t}\|u_0 - v_0\|^2, \tag{5.6}$$

para todo $t \in [0,T]$.

(ii) Toda solução forte u de (5.1) em $[0,T]$ com $u(0) = u_0$ satisfaz

$$\lambda t \|u_x(t)\|_p^p + p\int_0^t s\|u_t(s)\|^2 ds \leq C(t + \|u_0\|^2), \tag{5.7}$$

para todo $t \in [0,T]$. Em particular, se $u_0 \in W_0^{1,p}$, então

$$\lambda\|u_x(t)\|_p^p + p\int_0^1 \|u_t(s)\|^2 ds \leq \lambda\|(u_0)_x\|_p^p + C_2\|u_0\|_{q+r}^{q+r} + C_3, \tag{5.8}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde $C_1, C_2, C_3 > 0$ dependem apenas de p, q e r.

Demonstração: Sejam u e v soluções fortes de (5.1) com $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$ e considere $f(u) = |u|^{q-2}u(1 - |u|^r)$. Então, para $t \in [0,T]$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2\right) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle u(t) - v(t), u(t) - v(t)\rangle \\
&= \langle u_t(t) - v_t(t), u(t) - v(t)\rangle \\
&= \langle \lambda(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t))_x + f(u(t)) - \lambda(|v_x(t)|^{p-2}v_x(t))_x \\
&\quad - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \\
&= \lambda\langle(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t))_x - (|v_x(t)|^{p-2}v_x(t))_x, u(t) - v(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(u(t)) - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Também, para $t \in [0,T]$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u(t) - v(t)||^2) &= -\lambda\langle|u_x(t)|^{p-2}u_x(t) - |v_x(t)|^{p-2}v_x(t), u_x(t) - v_x(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(u(t)) - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Tartar segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u(t) - v(t)||^2) &= -\lambda\langle|u_x(t)|^{p-2}u_x(t) - |v_x(t)|^{p-2}v_x(t), u_x(t) - v_x(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(u(t)) - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \\
&\leq -\lambda\langle|u_x(t)|^{p-2}u_x(t) - |v_x(t)|^{p-2}v_x(t), u_x(t) - v_x(t)\rangle \\
&\quad + ||f(u(t)) - f(v(t))\|\|u(t) - v(t)\| \\
&\leq -\lambda C_0||u_x(t) - v_x(t)||_p^p + \|f(u(t)) - f(v(t))\|\|u(t) - v(t)\| \\
&\leq -\lambda C_0||u_x(t) - v_x(t)||_p^p + C_1||u(t) - v(t)||^2,
\end{aligned}$$

para $t \in [0,T]$, onde $C_1 = \sup\limits_{u\in(-K,+K)} |f'(u)| < \infty$, com K sendo a constante cuja existência foi enunciada na observação (5.2). Integrando essa expressão de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_0-v_0\|^2 &\leq \int_0^t -\lambda C_0\|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p ds\\ &+\int_0^t C_1\|u(s)-v(s)\|^2 ds,\end{aligned}$$

para $t \in [0,T]$. Dessa maneira, obtemos que

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|^2 &\leq -2C_0\lambda\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p ds + \|u_0-v_0\|^2\\ &+2\int_0^t C_1\|u(s)-v(s)\|^2 ds.\end{aligned}$$

OLema de Gronwall-Bellman implica que

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq \left(-2\lambda C_0\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p ds + \|u_0-v_0\|^2\right) e^{2\int_0^t C_1 ds},$$

para todo $t \in [0,T]$. Daí,

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq -2\lambda C_0 e^{2C_1 t}\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p ds + e^{2C_1 t}\|u_0-v_0\|^2,$$

para $t \in [0,T]$ e, portanto,

$$\|u(t)-v(t)\|^2 + 2\lambda C_0 e^{2C_1 t}\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p ds \leq e^{2C_1 t}\|u_0-v_0\|^2.$$

Como $C_1 > 0$ e $[0,T]$ temos que $e^{2C_1 t} \geq 1$ e concluímos que

$$\|u(t)-v(t)\|^2 + 2\lambda C_0\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p ds \leq e^{2C_1 t}\|u_0-v_0\|^2, \quad t \in [0,T]$$

o que demonstra (5.6). Para mostrar (5.8), tomando $v(t) \equiv 0$, que é uma solução de (5.1), em (5.9) temos, para $t \in [0,T]$, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2\right) &= -\lambda\langle |u_x(t)|^{p-2}u_x(t), u_x(t)\rangle + \langle f(u(t)), u(t)\rangle\\ &= -\lambda\|u_x(t)\|_p^p + \langle f(u(t)), u(t)\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &= -2\lambda\|u_x(t)\|_p^p + 2\int_0^1 f(u(t))u(t) + |u(t)|^{q+r} - |u(t)|^{q+r} dx\\ &\leq -2\lambda\|u_x(t)\|_p^p + \overline{C} - \|u(t)\|_{q+r}^{q+r}\end{aligned}$$

onde $\overline{C} = \sup\limits_{u\in(-K,+K)} \{2f(u)u + \|u\|_{q+r}^{q+r}\} < +\infty$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\lambda\|u_x(t)\|_p^p \leq \overline{C} - \|u(t)\|_{q+r}^{q+r}, \quad t \in [0,T].$$

Integrando de 0 a t, obtemos que

$$\|u(t)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u_x(s)\|_p^p ds \leq \int_0^t \overline{C} - \|u(s)\|_{q+r}^{q+r} ds + \|u(0)\|^2, \quad t \in [0,T],$$

ou ainda,

$$\|u(t)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u_x(s)\|_p^p ds + \int_0^t \|u(s)\|_{q+r}^{q+r} ds \leq \overline{C}t + \|u_0\|^2, \quad t \in [0,T].$$

Seja $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(v)dv = \frac{|u|^q}{q} - \frac{|u|}{q+r}^{q+r}$. Então,

$$\begin{aligned}
\|u_t\|^2 = \langle u_t, u_t \rangle &= \langle \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + f(u), u_t \rangle \\
&= \lambda \langle (|u_x|^{p-2}u_x)_x, u_t \rangle + \langle f(u), u_t \rangle \\
&= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda}{p} \int_0^1 |u_x|^p dx + \int_0^1 F(u)dx \right),
\end{aligned}$$

onde $t \in [0,T]$. Portanto,

$$\|u_t(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda}{p} \|u_x(t)\|_p^p + \int_0^1 F(u(x,t))dx \right). \tag{5.10}$$

Como $u_0 \in W_0^{1,p}$, então integrando em t a expressão acima obtemos

$$\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds = -\frac{\lambda}{p}\|u_x(t)\|_p^p + \int_0^1 F(u(x,t))dx + \frac{\lambda}{p}\|u_x(0)\|_p^p - \int_0^1 F(u(x,0))dx,$$

para $t \in [0,T]$. Assim,

$$p\int_0^t \|u_t\|^2 ds + \lambda \|u_x(t)\|_p^p = \lambda \|(u_0)_x\|_p^p + p\int_0^1 F(u(x,t))dx - p\int_0^1 F(u(0))dx,$$

para $t \in [0,T]$. Além disso,

$$\begin{aligned}
-p\int_0^1 F(u(x,0))dx &= -p\int_0^1 \int_0^u f(v(x,0))dvdx \\
&= -p\int_0^1 \int_0^u |v(x,0)|^{q-2}v(x,0)(1 - |v(x,0)|^r)dvdx \\
&= -p\int_0^1 \int_0^u |v(x,0)|^{q-2}v(x,0) - |v(x,0)|^{q+r-2}v(x,0)dvdx \\
&= -p\int_0^1 \frac{|u(x,0)|^q}{q} - \frac{|u(x,0)|^{q+r}}{q+r}dx \\
&= -\frac{p}{q}\int_0^1 |u(x,0)|^q dx + \frac{p}{q+r}\int_0^1 |u(x,0)|^{q+r}dx \\
&= -\frac{p}{q}\|u(0)\|_q^q + \frac{p}{q+r}\|u(0)\|_{q+r}^{q+r} \\
&\leq \frac{p}{q+r}\|u(0)\|_{q+r}^{q+r}.
\end{aligned}$$

Assim, sendo $C_2 = \dfrac{p}{q+r}$ e $C_3 = \sup\{pF(u); u \in (-K, +K)\} < +\infty$, segue que

$$p\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \lambda\|u_x(t)\|_p^p \leq \lambda\|u_x(0)\|_p^p + C_2\|u(0)\|_{q+r}^{q+r} + C_3$$

e assim u satisfaz (5.8).

■

O próximo Teorema nos garante um resultado sobre a existência global de soluções para (5.1).

Teorema 5.2. *Para todo* $u_0 \in W_0^{1,p}(0,1)$*, existe uma única solução forte* $u(\cdot)$ *de* (5.1) em $[0, +\infty)$ com $u(0) = u_0$ satisfazendo

$$u \in C((0, +\infty); W_0^{1,p}) \tag{5.11}$$

e

$$t^{1/2}u_t(t) \in L^2(0, T; L^2) \text{ para todo } T > 0. \tag{5.12}$$

Demonstração: A unicidade é consequência direta doLema 5.1(i), pois se u e v são soluções de (5.1) com $u(0) = v(0) = u_0$ então $\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0$, o que nos fornece $u = v$.

Está garantida pelo Teorema 5.1 e pelas observações 5.1 e 5.2 a existência local do problema (5.1), o qual assegura que (5.1) tem uma solução local forte para toda função $u_0 \in W_0^{1,p}$. A existência global dessa solução é mostrada com o uso da equação (5.8), e concluímos que $\|u\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(0,1))}$ é limitada para todo $T > 0$.

Faremos agora apenas um esboço da demonstração de (5.11) e (5.12). Seja agora $\{u_0^n\} \subset W_0^{1,p}$ uma sequência tal que $u_0^n \to u_0$ em L^2 se $n \to \infty$. Seja u^n uma solução forte de (5.1) em $[0, \infty)$ com $u^n(0) = u_0^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos mostrar que existe uma função u tal que, se $n \to \infty$,

$$u^n \longrightarrow u \text{ em } C([0, T]; L^2) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}).$$

Com efeito, como u^n é solução forte de (5.1) com $u^n(0) = u_0^n$, então por (5.6),

$$\|u^n(t) - u^m(t)\|^2 \leq e^{2C_0 t}\|u_0^n - u_0^m\|^2, \tag{5.13}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, T]$. Sendo u_0^n convergente em L^2, então é uma sequência de Cauchy em L^2, ou seja, $\|u_0^n - u_0^m\|^2 \to 0$, quando $m, n \to \infty$. Assim, pela expressão acima temos que

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u^n(t) - u^m(t)\| = 0$$

para todo $t \in [0,T]$, ou seja, $\{u^n(t)\}$ é uma sequência de Cauchy em L^2, que é um espaço de Hilbert. Logo existe $u(t)$ em L^2 tal que

$$u^n(t) \to u(t) \text{ em } L^2,$$

para todo $t \in [0,T]$. Portanto (5.13) implica $u^n \longrightarrow u$ em $C([0,T];L^2)$. Também por (5.6) vemos que $\{u^n\}$ é limitada em $L^p(0,T;W_0^{1,p})$, o qual é um espaço reflexivo. Portanto,

$$u^n \longrightarrow u \text{ em } C([0,T];L^2) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}).$$

Segue da equação (5.7) que $\{t^{1/2}u_t^n(t)\}$ e $\{t^{1/p}u^n(t)\}$ são sequências limitadas em $L^2(0,T;L^2)$ e $L^\infty(0,T;W_0^{1,p})$, respectivamente. Então podemos escolher uma subsequência de $\{u^n\}$, a qual denotaremos pelo mesmo nome, tal que

$$u_t^n \rightharpoonup u_t \text{ em } L^2(\delta,T;L^2) \text{ e } u^n \to u \text{ em } L^\infty(\delta,T;L^{q^*})$$

para todo $\delta > 0$ e $q^* \geq 2$. Portanto, o fato do operador subdiferencial

$$u \longmapsto -\lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x$$

ser fechado segue usando [16] que u é uma solução forte de (5.1), com $u(0) = u_0$ e satisfazendo (5.12).

Resta provar a equação (5.11). Usando que $u \in C([0,\infty);L^2)$ e a limitação da norma $\|u_x(\cdot)\|_p$ em $[\delta,+\infty)$ para qualquer $\delta > 0$, podemos mostrar que

$$u : (0,+\infty) \longrightarrow W_0^{1,p} \tag{5.14}$$

é fracamente contínua. Além disso, por [4],Lema 3.3, vemos que $\|u_x(\cdot)\|_p^p$ é absolutamente contínua. Como $W_0^{1,p}$ é um espaço de Banach uniformemente convexo, segue das observações acima que $u : (0,+\infty) \longrightarrow W_0^{1,p}$ é fortemente contínua. ■

Observemos que o Teorema acima garante também a existência, uncidade e existência global de soluções do problema estudado no capítulo 4.

5.3 Algumas Propriedades Assintóticas

Nesta seção, garantiremos a existência de um semigrupo para o problema (5.1), mostraremos que esse semigrupo é um sistema gradiente e, para um dado inicial u_0, o conjunto $w-$limite de u_0 pertence aos pontos de equilíbrio de (5.1). Essas propriedades são necessárias na demonstração de existência de um atrator global para o problema (5.1).

Levando em conta então o Teorema 5.2, definimos uma família de aplicações $T(t) : W_0^{1,p} \longrightarrow W_0^{1,p},\ \ t \geq 0$ tal que

$$\begin{array}{rccl} T(t): & W_0^{1,p} & \longrightarrow & W_0^{1,p} \\ & u_0 & \longmapsto & T(t)u_0 = u(t;u_0) \end{array}$$

onde $u(\cdot;u_0)$ denota a solução forte de (5.1), com $u(0) = u_0$, em $[0, +\infty)$.

Vamos mostrar agora $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo em $W_0^{1,p}$, conforme [13].

Lema 5.2. *A família* $\{T(t) : W_0^{1,p} \longrightarrow W_0^{1,p};\ \ t \geq 0\}$ *tem as seguintes propriedades:*

(i) $T(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade em* $W_0^{1,p}$*;*

(ii) $T(t)(T(s)u_0) = T(t+s)u_0$ *para todo* $u_0 \in W_0^{1,p}$ *e* $t, s \geq 0$.

Demonstração:

(i) Seja $u_0 \in W_0^{1,p}$. Então $T(0)u_0 = u(0;u_0) = u_0$. Assim $T(0) = I$.

(ii) Sejam $u_0 \in W_0^{1,p}$ e $t, s \geq 0$. Então,

$$T(t)(T(s)u_0) = T(t)(u(s;u_0)) = u(t;u(s;u_0)).$$

E, por outro lado,

$$T(t+s)u_0 = u(t+s;u_0), \ \text{ para } \ t, s \geq 0.$$

Defina $q = u(s;u_0)$ e assim $u(t;q) = u(t;u(s;u_0))$. Observamos que, se $u(t)$ é solução de (5.1) no intervalo (a,b), então para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $u(t-s)$ é solução de (5.1) em $(a+s, b+s)$, pois se $y(t) = u(t-s)$, para $t \in (a+s, b+s)$, temos

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(t-s) \\ &= \lambda(|u_x(t-s)|^{p-2}u_x(t-s))_x + f(u(t-s)) \\ &= \lambda(|y_x(t)|^{p-2}y_x(t))_x + f(y(t)), \end{aligned}$$

ou seja, $y(t) = u(t-s)$ é solução de (5.1) em $(a+s, b+s)$. Consideremos agora

$$u_1(t) = u(t;q) = u(t;u(s;u_0))$$

e

$$u_2(t) = u(t+s;u_0),$$

para $t, s \geq 0$. Temos que u_1 é solução de (5.1) e u_2 é também solução de (5.1), pela observação logo acima feita. Além disso, $u_1(0) = u(0; q) = q$ e $u_2(0) = u(s; u_0) = q$. Logo, u_1 e u_2 são soluções do mesmo PVI e este fato nos leva a concluir, através da unicidade da solução, que $u_1 = u_2$, ou seja,

$$T(t)(T(s)u_0) = u(t; q) = u_1(t) = u_2(t) = u(t+s; u_0) = T(t+s)u_0,$$

e logo $T(t)T(s) = T(t+s)$. ■

A partir disso, segue o seguinte resultado

Lema 5.3. *A família $\{T(t) : W_0^{1,p} \longrightarrow W_0^{1,p};\ \ t \geq 0\}$ tem as seguintes propriedades:*

(i) Para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é contínua de $W_0^{1,p}$ em $W_0^{1,p}$;

(ii) Para cada $u_0 \in W_0^{1,p}$, $T(\cdot)u_0$ é contínua de $[0, +\infty)$ em $W_0^{1,p}$;

(iii) $T(0) = I$;

(iv) $T(t)(T(s)u_0) = T(t+s)u_0$ para todo $u_0 \in W_0^{1,p}$ e para todo $t, s \geq 0$.

Através do Lema 5.3, é possível definir o conjunto $w-$ limite, $w(u_0)$, associado com $\{T(t)u_0;\ \ t \geq 0\}$ da seguinte maneira

$$w(u_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \{T(s)u_0\}}^{W_0^{1,p}}$$

para $u_0 \in W_0^{1,p}$. Sabe-se que se $v \in w(u_0)$ então existe uma sequência $t_n \to +\infty$ tal que $T(t_n)u_0 = u(t_n; u_0) \to v$ em $W_0^{1,p}$. Pelo Teorema 1.12, segue que a órbita $\{T(t)u_0; t \geq 0\}$ é um conjunto pré-compacto em L^2 e portanto $w(u_0)$ é um conjunto não-vazio.

Lema 5.4. *Para cada $T > 0$ e $B \subset W_0^{1,p}$ limitado, a aplicação $(u_0, t) \mapsto T(t)u_0$ é contínua em $B \times [0, T]$ e, além disso, existe $T_0 > 0$ tal que para cada $t \in (T_0, T]$, se $\{u_n(t)\} \subset \{u_n(t, B)\}$ então $\{u_n(t)\}$ tem uma subsequência convergente.*

Demonstração: A prova desse resultado pode ser encontrada em [7]. ■

Teorema 5.3. *Para cada $u_0 \in W_0^{1,p}$, $w(u_0)$ é não-vazio, compacto, invariante, conexo em $W_0^{1,p}$ e*

$$d(u(t; u_0), w(u_0)) = \inf_{v \in w(u_0)} \|u_x(t; u_0) - v_x\|_p \to 0,\ \ t \to +\infty.$$

Além disso,

$$w(u_0) \subset E_\lambda = \{\phi \in W_0^{1,p}; \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r) = 0 \ \ em \ \ (0,1)\}.$$

Demonstração PeloLema 5.4 temos que $\overline{\gamma^+(u_0)} = \overline{\{T(t)u_0; \ t \geq 0\}}$ é compacto, pois $\gamma^+(u_0)$ é um conjunto pré-compacto e pelo Teorema 1.8 segue que $w(u_0)$ é não-vazio, compacto, invariante, atrai u_0 e é conexo. Resta mostrar que $w(u_0) \subset E_\lambda$. Considere

$$\begin{array}{rcl} V: \ W_0^{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u(\cdot,t) & \longmapsto & V(u(\cdot,t)) = \displaystyle\int_0^1 \left[\lambda \frac{|u_x(x,t)|^p}{p} - \int_0^{u(x,t)} f(\xi) \ d\xi\right] \ dx, \end{array}$$

com $f(u) = |u|^{q-2}u(1-|u|^r)$. Note que

- V é contínua;
- $V(u) \to +\infty$ se $\|u\|_{W_0^{1,p}} \to +\infty$;
- V é limitado inferiormente;
- V é não-crescente em t para cada $u_0 \in W_0^{1,p}$, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u(\cdot,t)) &= \frac{d}{dt}\int_0^1 \lambda\frac{|u_x(x,t)|^p}{p}dx - \frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^{u(x,t)} f(\xi) \ d\xi \ dx \\ &= -\int_0^1 \lambda(|u_x(x,t)|^{p-2}u_x(x,t))_x u_t(x,t) + f(u(x,t))u_t(x,t) \ dx \\ &= -\int_0^1 u_t(x,t)u_t(x,t) \ dx = -\int_0^1 u_t(x,t)^2 \ dx \leq 0. \end{aligned}$$

Ainda, se $V(T(t)u) = V(u)$, para todo $t \geq 0$, então $\dfrac{d}{dt}V(T(t)u) = 0$ para todo $t \geq 0$, o que implica

$$\int_0^1 u_t^2(x,t) \ dx = 0$$

para todo $t \geq 0$, ou seja, $u_t(x,t) = 0$ em quase todo ponto $x \in [0,1]$ e para todo $t \geq 0$. Logo u é ponto de equilíbrio de (5.1). Assim temos que $T(t)$ é um sistema gradiente e pelo lema 1.5 que $w(u_0) \subset E_\lambda$. ∎

Não estudaremos a existência de atratores globais para o problema (5.1). Isto pode ser feito com o auxílio de algumas estimativas sobre as soluções desse problema de modo a garantir dissipatividade e compacidade assintótica. Uma maneira de obter estas estimativas pode ser encontrada em [10].

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.: **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, (1975).

[2] BARBU, V.: **Nonlinear Semigroups and differential Equations in Banach Spaces**. Noordhoff International Publishing, Leyden, (1976).

[3] BRÉZIS, H.: **Análisis Funcional Teoría y aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, (1984).

[4] BRÉZIS, H.: **Operateurs Maximaux Monotones Et Semi-groupes De Contractions Dans Les Espaces De Hilbert**. North-Holland Mathematics Studies, 5, Amsterdam, (1973).

[5] BROWDER, F.: **Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems**. Bull. AMS, (1963).

[6] CARVALHO, A.N.; CHOLEWA, J.W. & DLOTKO, T.: **Global Attractors for Problems with Monotone Operators**. Bollettino U.M.I., (8), 2-B, (1999), 693-706.

[7] CARVALHO, A.N. & GENTILE, C.B.: **Asymptotic behaviour of nonlinearparabolic equations with monotone principal part**. J. Math. Anal. Appl., 4, (1974), 17-37.

[8] CHAFEE, N. & INFANTE, E.F.: **A Bifurcation Problem for a Nonlinear Partial Differential Equation of Parabolic Type**. Aplicable Analysis, vol. 4, (1974), 17-37.

[9] GAJEWSKI, H.; GRÖGER, K. & ZACHARIAS, K.: **Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen**. Akademie-Verlag, Berlin, (1974).

[10] GENTILE, C. B.; BRUSCHI, S. M. & PRIMO, M. R. T.: **Continuity properties on p for p-Laplacian parabolic problems**. Nonlinear Analysis, vol. 72, (2010), 1580-1588.

[11] HALE, J.K.: **Asymptotic Behavior of Dissipative Systems**. Mathematical Surveys and Monographs, number 25, AMS, Rhode Island, (1988).

[12] HENRY, D.: **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. Springer-Verlag Berlin Heildelberg, Berlin, (1981).

[13] LADYZHENSKAYA, O.: **Attractors for Semigroups and Evolution Equations**. Cambrigde University Press, Cambrigde, (1991).

[14] LIONS, J.L. & MAGENES, E.: **Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites noon Linéaires**. Dunod, Paris, (1969).

[15] MINTY, G.: **On a Monotonicity Method for the Solution of Nonlinear Equations in Banach Spaces**. USA: Proc. Nat. Acad. Sci., (1963).

[16] ÔTANI, M.: **Existence and asymptotic stability of strong solutions for** $(du/dt)(t) + \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$. J. Fac. Sci. Univ. Tokio Sec., 24, (1977), 575-605.

[17] PAZY, A.: **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, (1983).

[18] TAKEUCHI, S. & YAMADA, Y.: **Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian**. Nonlinear Analysis, 42, (2000),41-61.

[19] TEMAM, R.: **Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics**. Springer-Verlag, New York, (1988).