UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

TALITA DRUZIANI MARCHIORI

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E DE UM ATRATOR PARA EQUAÇÃO DA ONDA COM MEMÓRIA DEGENERADA

Maringá-PR
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E DE UM ATRATOR PARA EQUAÇÃO DA ONDA COM MEMÓRIA DEGENERADA

TALITA DRUZIANI MARCHIORI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Claudete Matilde Webler Martins.

Maringá-PR
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Marchiori, Talita Druziani
M317e Existência de solução e de um atrator para equação da onda com memória degenerada / Talita Druziani Marchiori. -- Maringá, 2017.
80 f. : il.

Orientadora: Profª. Drª. Claudete Matilde Webler Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2017.

1. Equação da onda. 2. Viscoelástica degenerada. 3. Atrator global. 4. Wave equation. 5. Degenerate viscoelastic. 6. Global attactor. I. Martins, Claudete Marilde Webler, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.39

TALITA DRUZIANI MARCHIORI

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E DE UM ATRATOR PARA A EQUAÇÃO DA ONDA COM MEMÓRIA DEGENERADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Claudete Webler
Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 22 de fevereiro de 2017.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir chegar até aqui.

Aos meus pais, que sempre estiveram comigo ao longo dessa caminhada e nunca mediram esforços para que esse sonho fosse alcançado. Aos meus irmãos, pelo carinho dedicado a mim, especialmente à minha irmã Jaqueline, que sempre esteve disposta a me ajudar.

Ao meu namorado Cristian que, com muito amor, paciência e companheirismo, esteve ao meu lado e nunca deixou de acreditar e confiar em mim, mesmo nos momentos de estresse.

Aos meus amigos, próximos e distantes, que me apoiaram e incentivaram. Obrigada por todos os encontros e companheirismo.

A todos os professores da minha vida acadêmica, em especial à minha orientadora Claudete Matilde Webler Martins, pela paciência, sabedoria, compreensão, confiança, incentivo e ajuda que foram essenciais para elaboração e conclusão deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que acreditaram em mim. Meu muito obrigada!

Talita Druziani Marchiori

"Tudo é possível ao que crê."

Marcos 9:23

Resumo

Neste trabalho consideramos a equação da onda viscoelástica degenerada com comportamento a longo tempo

$$u_{tt} - \triangle u + \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla(u)(t-s)]ds + b(x)u_t + f(u) = h(x). \tag{0.0-1}$$

Estudamos a existência e unicidade de solução para (0.0-1), definida em um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^3$, com condição de fronteira do tipo Dirichlet, onde $a \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo $med\{x \in \Gamma; a(x) > 0\} > 0$, $b \in L^\infty(\Omega)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$, $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ e $h \in L^2(\Omega)$. Além disso, estudamos a existência de um atrator global para o problema com dissipação viscoelástica e atrito combinados (caso $b \neq 0$) onde (0.0-1) é estudada em $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times \mathbb{R},$$

$$u(x,-t) = u^0(x,-t), \quad u_t(x,-t) = \tfrac{\partial}{\partial t} u^0(x,-t) \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

e $u^0(x,t), t \leq 0$, é estabelecido como passado histórico de u.

Palavras-chave: equação da onda, viscoelástica degenerada, atrator global.

Abstract

This work considers a degenerate viscoelastic wave equation with long-time behaviour

$$u_{tt} - \triangle u + \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla(u)(t-s)]ds + b(x)u_t + f(u) = h(x). \qquad \text{(0.0-2)}$$

We study the existence and uniqueness of solution for (0.0-2), defined in a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^3$, with Dirichlet boundary condition, where $a \in C^1(\overline{\Omega})$ such that $med\{x \in \Gamma; a(x) > 0\} > 0$, $b \in L^\infty(\Omega)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$, $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ and $h \in L^2(\Omega)$. In addition, we study the existence of a global attractor for the problem with combined viscoelastic and frictional dissipations (case $b \neq 0$) where (0.0-2) is defined in $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$u(x,t) = 0 \quad \text{in } \Gamma \times \mathbb{R},$$

$$u(x,-t) = u^0(x,-t), \quad u_t(x,-t) = \frac{\partial}{\partial t}u^0(x,-t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

and $u^0(x,t), t \leq 0$, is a prescribed past history of u.

Keywords: wave equation, degenerate viscoelastic, global attractor.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi baseado no artigo de Marcelo Moreira Cavalcanti, Luci Harue Fatori e Ma To Fu [6].

Consideramos a equação da onda viscoelástica semilinear com história

$$u_{tt} - \triangle u + \int_0^\infty g(s) div[a(x) \nabla u(t-s)] ds + f(u) = h(x), \tag{0.0-3}$$

definida em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, com fronteira regular Γ e condição de fronteira do tipo Dirichlet. Temos ainda que o problema é degenerado, considerando que a função $a(x) \geq 0$, no termo de memória, se anula em um subconjunto de medida positiva de $\overline{\Omega}$.

Inicialmente, foram provados resultados de existência e unicidade de solução do sistema

$$u_{tt} - div[(1 - a(x)k_0)\nabla u] - \int_0^\infty g(s) div[a(x) \nabla \eta^t(s)] ds + b(x) u_t = -f(u) + h \tag{0.0-4}$$

onde $h \in L^2(\Omega)$, $k_0 = \displaystyle\int_0^\infty g(s) ds$

$$\eta_t = -\eta_s + u_t, \tag{0.0-5}$$

com condição de fronteira

$$u(x,t) = 0, x \in \Gamma, t > 0 \; e \; \eta^t(x,s) = 0, x \in \Gamma, t, s > 0 \tag{0.0-6}$$

e condição inicial

$$u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x), \eta^t(x,0) = 0, \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), \tag{0.0-7}$$

onde

$$\begin{cases} u^0(x) = u^0(x,0), \quad x \in \Omega, \\ u^1(x) = \partial_t u^0(x,t)|_{t=0}, \quad x \in \Omega, \\ \eta_0(x,s) = u^0(x,0) - u^0(x,-s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{0.0-8}$$

Assumimos hipóteses apropriadas para as funções a, b, g e f, descritas em $(H1) - (H4)$, como em [6]. Para demonstração dos resultados de existência e unicidade de solução utilizamos resultados da teoria de semigrupos de classe C_0 e da teoria de problemas de Cauchy abstrato.

Posteriormente, estabelecemos a existência de um atrator global para o sistema (0.0-4)-(0.0-8). Para esta demonstração utilizamos resultados da teoria de sistemas dinâmicos. Usando propriedades de sistemas quase estáveis, mostramos que o atrator global possui dimensão fractal finita.

Estabelecemos a existência do atrator global adicionando uma dissipação de atrito definida localmente, o termo dissipação também é conhecido por "damping". O problema explora a dissipação combinada dada por dois tipos de dissipações parciais diferentes, elas são complementares. Além disso, a dissipação de atrito pode ser tomada arbitrariamente pequena (veja hipótese (H_2)).

O trabalho de CAVALCANTI, M. M.; FATORI, L. H.; FU, M. T; [6], o qual nos baseamos, foi um trabalho pioneiro abordando o comportamento a longo tempo de uma equação de onda viscoelástica degenerada.

A organização desta dissertação é a seguinte: no Capítulo 1 apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos, necessários ao longo de todo o trabalho; no Capitulo 2 provaremos a existência e unicidade de solução e estabeleceremos a existência de um atrator global utilizando as teorias de semigrupos, sistemas dinâmicos e problemas de Cauchy abstratos.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

O capítulo que se inicia tem por objetivo apresentar os principais conceitos e resultados que são necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Ao longo deste capítulo, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Cabe salientar que não provaremos os resultados expostos, mas citaremos a referência onde as provas estão feitas.

1.1 Alguns Conceitos de Análise Funcional

Definição 1.1. Seja X um espaço vetorial. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Denotaremos por $x(n) := x_n$ e $x(\mathbb{N}) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n). Uma subsequência de (x_n) é uma restrição $x_{|_{\mathbb{N}'}} : \mathbb{N}' \to X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Definição 1.2. Seja X um $\mathbb{K}-$espaço vetorial. Uma métrica em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que para quaisquer elementos $x, y, z \in X$ temos:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $d(x, y) = d(y, x);$

- $d(x,z) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

O par (X,d) é chamado espaço métrico.

Definição 1.3. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico X. Dizemos que (x_n) é:
- convergente em X quando existe $x \in X$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Denotamos a convergência de (x_n) para x por $x_n \to x$.
- de Cauchy em X se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, para quaisquer $m, n > n_0$.

Definição 1.4. O espaço métrico X é chamado de espaço métrico completo se toda sequência de Cauchy definida em X convergir em X, isto é, tem um limite $x \in X$.

Definição 1.5. Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:
- $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \, \|x\|_X$;
- $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.

O par $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado espaço normado. Quando não houver confusão, denotaremos por X um espaço normado e por $\|\cdot\|$ a norma em X.

Definição 1.6. Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma aplicação $n : X \to \mathbb{R}^+$ é uma seminorma se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:
- $n(\lambda x) = \mid \lambda \mid n(x)$;
- $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$.

Quando $n(x) \neq 0$ para $x \neq 0$ a seminorma é uma norma.

Definição 1.7. Seja X um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ duas normas em X. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ é equivalente a $\|\cdot\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 , \ \ \forall x \in X.$$

Observação 1.8. *Todo espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ pode ser considerado um espaço métrico (X,d), considerando, $d(x,y) = \|x-y\|$, $\forall x, y \in X$. Esta métrica é chamada de métrica induzida pela norma.*

Definição 1.9. Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X, com respeito à métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Definição 1.10. Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\langle x + y, z \rangle_X = \langle x, z \rangle_X + \langle y, z \rangle_X$;
- $\langle \alpha x, y \rangle_X = \alpha \langle x, y \rangle_X$;
- $\langle x, y \rangle_X = \overline{\langle y, x \rangle}_X$;
- $\langle x, x \rangle_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Neste caso, o par $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ é chamado espaço com produto interno. Quando não houver confusão, denotaremos por X um espaço com produto interno e por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em X.

Definição 1.11. Seja X um espaço com produto interno. Então a aplicação:

- $d(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$d(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

define uma métrica em X, que será denominada métrica induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- $\|\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em X, que será denominada norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.12. Um espaço com produto interno X é um espaço de Hilbert se ele for um espaço de Banach relativamente à norma induzida pelo produto interno.

Definição 1.13. Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços normados. Dizemos que um operador $T : D(T) \subset X \to Y$ é linear quando

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y),$$

para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

O conjunto $D(T)$ é o domínio de T. No caso particular $Y = \mathbb{K}$, dizemos que T é um funcional linear.

Definição 1.14. Um operador linear $T : D(T) \subset X \to Y$ definido entre dois espaços normados X e Y é chamado de:

• limitado em X quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$, para todo $x \in D(T)$;

• contínuo quando T é contínuo em todo $x \in D(T)$, ou seja, dado $a \in D(T)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D(T)$ com $\|x - a\|_X < \delta$, então $\|T(x) - T(a)\|_Y < \varepsilon$.

Teorema 1.15. *Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear definido entre dois espaços normados X e Y. Então T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Ver [13], página 97, Teorema 2.7-9. □

Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$, o conjunto dos operadores lineares limitados. Este conjunto munido com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{x \in X,\ \|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y\,,$$

é um espaço normado. No caso $Y = \mathbb{R}$, denotaremos $\mathcal{L}(X, Y) := X'$. O espaço X' é chamado de dual topológico do espaço X.

Teorema 1.16. *Sejam X e Y dois espaços normados. Se Y é um espaço de Banach, então $\left(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)$ é um espaço de Banach. Em particular, X' e $X'' := (X')'$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [13], página 118, Teorema 2.10-2. □

Definição 1.17. Um espaço normado X é chamado de reflexivo quando o operador

$$\begin{aligned} J :\ X &\to X'' \\ x &\mapsto J(x), \end{aligned}$$

definido por $J(x)(f) = f(x)$, é sobrejetor.

Teorema 1.18. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver, [13], página 242, Teorema 4.6-6. □

Definição 1.19. Seja H um espaço com produto interno. Diremos que uma forma bilinear

$$a\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R},$$

isto é, uma aplicação linear na primeira e na segunda variável, é

1. contínua se existir $c \geq 0$ tal que

$$|a\langle u,v\rangle| \leq c\,\|u\|\,\|v\|\,,\ \ \forall u,v \in H.$$

2. coerciva se existir $\alpha > 0$ tal que

$$a\langle v,v\rangle \geq \alpha\,\|v\|^2\,,\ \ \forall v \in H.$$

Teorema 1.20. *(Lax Milgran). Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $\phi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a\langle u,v\rangle = \phi(v),\ \ \forall v \in H.$$

Demonstração. Ver [5], página 181, Corolário 4.15. □

Definição 1.21. Uma sequência (x_n) em um $\mathbb{K}$-espaço normado X converge fracamente para $x \in X$ quando $f(x_n) \to f(x)$ em $\mathbb{K}$, para todo $f \in X'$. Denotaremos a convergência fraca de (x_n) para x por $x_n \rightharpoonup x$.

Definição 1.22. Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma seminorma n em X é dita compacta se, para qualquer sequência $(x_j) \subset X$ tal que $x_j \rightharpoonup 0$ fracamente em X implicar que $n(x_j) \rightharpoonup 0$.

Definição 1.23. Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $F : X \to Y$ é dito localmente Lipschitziano quando para toda constante $L > 0$, existe uma constante $M_L > 0$ tal que se $\|x\|_X \leq L$ e $\|y\|_X \leq L$, então

$$\|F(x) - F(y)\|_Y \leq M_L\,\|x-y\|_X\,.$$

Definição 1.24. Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $F : A \subset X \to Y$ é dito

Lipschitz se existe $C > 0$ tal que

$$\|F(x) - F(y)\|_Y \leq C \|x - y\|_A$$

para todo $x, y \in A$.

Definição 1.25. Sejam X e Y espaços com produto interno e $T : X \to Y$ um operador. Dizemos que o operador $T^* : Y \to X$ é o adjunto de T se

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle ,$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Definição 1.26. Seja X um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e $T : X \to X$ um operador linear. Dizemos que T é auto adjunto se $T = T^*$.

1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.27. Denotaremos por $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, o conjunto das (classes de) funções reais f definidas em Ω cuja p-ésima potência é integrável no sentido de Lebesgue e por $L^\infty(\Omega)$ denotaremos o conjunto das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω.

Definição 1.28. Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções reais definidas em Ω, cuja p-ésima potência é integrável à Lebesgue sobre qualquer subconjunto compacto $\mathbb{R}^n$ contido em Ω e por $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω.

Teorema 1.29. *O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad se \;\; 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess \, |f(x)|$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [1], página 26, Teorema 2.10. □

Corolário 1.30. *O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle_{L^p(\Omega)} = \langle f, g\rangle_p = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Teorema 1.31. *Se $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ e $|\Omega| < \infty$, então $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$, onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue.*

Demonstração. Ver [18], página 184, Teorema 8.2. □

Teorema 1.32. *$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ e qualquer domínio Ω.*

Demonstração. Ver [1], página 26, Corolário 2.9. □

Teorema 1.33. *(Desigualdade de Young). Sejam $1 < p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dados $a, b \geq 0$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [18], página 186, Teorema 8.5. □

Corolário 1.34. *(Desigualdade de Young com peso) Dados $a, b \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ vale*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Definição 1.35. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que um número real q é expoente conjugado de p quando $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se $p \in (1, \infty)$, $q = \infty$ se $p = 1$ e $q = 1$ se $p = \infty$.

Teorema 1.36. *(Desigualdade de Hölder). Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Demonstração. Ver [18], página 186, Teorema 8.6. □

Teorema 1.37. *(Desigualdade de Minkowski). Se $1 \leq p \leq \infty$ então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Demonstração. Ver [18], página 188, Teorema 8.10. □

Teorema 1.38. *(Teorema de Representação de Riesz) Sejam $1 < p < \infty$ e $f \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \forall v \in L^p(\Omega).$$

Mas ainda,

$$\|u\|_q = \|f\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

E, se $p = 1$ e $f \in (L^1(\Omega))'$, existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_\infty = \|f\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração. Ver [2], página 97, Teorema 4.11. □

Proposição 1.39. *(Lema de Gronwall). Dado $T > 0$, sejam $f \in C([0,T]), g \in L^1(0,T)$ funções não negativas e C uma constante positiva. Se*

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(s)f(s)ds, \ \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq Ce^{\int_0^t g(s)ds}, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Ver [17], página 16, Corolário 1.5.1. □

1.3 Teoria das Distribuições

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Definição 1.40. Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função contínua. Definimos o suporte de ϕ, e denotaremos por $supp(\phi)$, como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que ϕ possui suporte compacto.

Definição 1.41. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto.

Teorema 1.42. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [1], página 31, Teorema 2.19. □

Definição 1.43. Uma sequência (ϕ_ν) em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

- $supp(\phi), supp(\phi_\nu) \subset K$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$;
- Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se $D^\alpha(\phi_\nu - \phi) \to 0$ uniformemente em K.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido dessa noção de convergência, é chamado de Espaço das Funções Teste sobre Ω e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.44. Uma distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, contínuo no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

- $T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi), \;\; \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- Se ϕ_ν converge para ϕ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\phi_\nu)$ converge para $T(\phi)$ em $\mathbb{R}$.

O espaço das distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, representamos o valor da distribuição T em ϕ por $\langle T, \phi \rangle$. Com isso, dizemos que

$$T_\nu \to T \;\; em\; \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando

$$\langle T_\nu, \phi \rangle \to \langle T, \phi \rangle \; em\; \mathbb{R}, \;\; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 1.45. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \;\; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω. Para a prova ver [3], página 22, Exemplo 1.11.

Exemplo 1.46. Seja $x_0 \in \Omega$. Então δ_{x_0} definido por

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω. Quando $x_0 = 0$, escrevemos δ_0.
A distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável. Para mais detalhes ver [3], página 23, Exemplo 1.12.

Observação 1.47. *Do Exemplo 1.45, segue que a função* $\mathcal{T} : L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$*, dada por* $\mathcal{T}(u) = T_u$*, sendo* $\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, está bem definida, é linear e injetiva. Por esta razão, identifica-se* u *com a distribuição* T_u *por ela definida e diz-se "a distribuição* u*"ao invés da distribuição* T_u*. Além disso,* $\mathcal{T}$ *é contínua. Então, podemos escrever que* $L^1_{loc}(\Omega)$ *está imerso continuamente em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Porém, pelo Exemplo 1.46 vemos que, não é toda distribuição que pode ser definida por uma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Ou seja, a função* $\mathcal{T}$ *não é sobrejetora.*

Definição 1.48. Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T é um funcional $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle .$$

Observação 1.49. • $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω*.*
• *Uma distribuição possui derivadas de todas as ordens.*
• *A função* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *dada por* $D^\alpha(T) = D^\alpha T$ *é linear e continua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*
Para mais detalhes, veja [3].

Exemplo 1.50. Seja u a função Heavisidade definida em $\mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \geq 0 \\ 0, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Ela é localmente integrável em $\mathbb{R}$ mas, sua derivada u' no sentido das distribuições não é localmente integrável. Veja [3], página 27, Exemplo 1.15.

1.4 Os Espaços de Sobolev

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Como visto nas Observações 1.47 e 1.49, no Teorema 1.32 e no Exemplo 1.50, se $u \in L^p(\Omega)$ a distribuição u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Isto é o que motivou a definição dos espaços de funções denominados Espaços de Sobolev.

Definição 1.51. Dado um número inteiro $m > 0$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, temos que a derivada de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$, pertence a $L^p(\Omega)$.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ quando } p = \infty.$$

Observação 1.52. *Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$.*

Teorema 1.53. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [3], página 80, Proposição 2.2. □

Corolário 1.54. *Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert com a estrutura de produto interno dada por*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 1$. Por isto defini-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observemos que quando Ω é "suficientemente suave"com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ limitada, então para $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Teorema 1.55. *(Desigualdade de Poincaré). Se $|\Omega| < \infty$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \, , \;\; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver [2], página 290, Corolário 9.19. □

Teorema 1.56. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e que a fronteira de Ω, $\partial\Omega \in C^m(\Omega)$. Se $mp < N$, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todos $q \in \left[1, \frac{pN}{N-mp}\right]$.

Demonstração. Ver [1], página 85, Proposição 4.12. □

Exemplo 1.57. Acima, definimos os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ era um aberto genérico. Em particular, quando $p = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$, temos:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); D^{\alpha}u \in L^2(\mathbb{R}^n); \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; | \; \alpha \; |\leq m\},$$

onde as derivadas são distribucionais, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^{\alpha}u, D^{\alpha}v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, . \tag{1.4-1}$$

Definição 1.58. Denotamos por S o espaço de Schwartz que é definido por

$$S = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n); \; \lim_{\|x\| \mapsto \infty} \|x\|^k \, D^{\alpha}\varphi(x) = 0, \; para \; quaisquer \; k \in \mathbb{N} \; e \; \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

Definição 1.59. Para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u é dada por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} u(y)dy$$

onde, $\langle x, y\rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Consideremos o seguinte espaço

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $\hat{u}$ designa a transformada de Fourier de u, munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)}dx = \left\langle (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{v} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.4\text{-}2)$$

Proposição 1.60. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos:*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, as normas $\|\cdot\|_m$ e $\|\cdot\|$ provenientes dos produtos internos dados em (1.4-1) e (1.4-2) são equivalentes.

Demonstração. Ver [3], página 209, Proposição 5.2. □

Motivados pela Proposição 1.60 temos a seguinte definição:

Definição 1.61. Definimos para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)}dx.$$

Teorema 1.62. *Para todo $s \geq 0$, o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver [3], página 211, Proposição 5.3. □

Observação 1.63. *Se $s \geq 0$, temos que*

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow (H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 1.64. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado bem regular (ou o $\mathbb{R}^n_+$) e $s \geq 0$, definimos

$$H^s(\Omega) = \{u_{|\Omega};\ u \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

cuja norma é dada por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)};\ v_{|\Omega} = u\}.$$

Observação 1.65. *Quando $s \geq 0$ é um inteiro as definições de $H^s(\Omega)$ dadas acima e na Observação 1.52 são equivalentes.*

Proposição 1.66. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado bem regular. Para todo $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver [3], página 229, Proposição 5.11. □

Agora, considerando Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular vamos introduzir os espaços $H^s(\Gamma)$. Esta teoria pode ser vista detalhadamente em [3] e em [14].

Seja $\{(U_1, \varphi_1), ..., (U_k, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ. A cobertura aberta $\Omega, U_1, ..., U_k$ de $\bar{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada à mesma. Mais precisamente, existem $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

(i) $supp(\theta_0) \subset \Omega;\ \ supp(\theta_i) \subset U_i$ para $i = 1, ...k;$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \theta_i(x) = 1;$ para todo $x \in \bar{\Omega}$;

(iii) $0 \leq \theta_i \leq 1$ para $i = 1, ..., k.$

Seja u uma função definida sobre Γ. Por (ii), temos que

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i u)(x), \quad quase\ sempre\ em\ \Gamma. \tag{1.4-3}$$

Para cada $i \in \{1, ..., k\}$, definimos

$$u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi_i^{-1}(y))$$

onde $y \in \sum = (0,1)^{n-1}$.

Observação 1.67. *Notemos que*

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Gamma;\ (u\theta_i)(x) \neq 0\}} \subset supp(\theta_i) \cup \Gamma \subset U_i \cup \Gamma.$$

Então,

$$S(u_i) = \overline{\{x \in (0,1)^{n-1};\ (u_i)(x) \neq 0\}}$$

é um compacto do $\mathbb{R}^{n-1}$ contido no aberto $\sum$. Além disso, como,

$$supp(u_i) \subset S(u_i) \subset \sum$$

podemos estender u_i a uma função $\tilde{u}_i$ definida por

$$\tilde{u}_i(y) = \begin{cases} (u\theta_i)(\varphi_i^{-1}(y)), & se\ y \in \sum \\ 0, & se\ y \in \mathbb{R}^{n-1} - \sum. \end{cases}$$

Se $\tilde{u}_i$ for para todo $i = 1, ..., k$, uma função integrável em $\mathbb{R}^{n-1}$ então em virtude de (1.4-3)

$$\int_\Gamma u(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_\Gamma (u\theta_i)(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y) \bar{J}(y) dy,$$

onde $\bar{J}(y)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\mathbb{R}^{n-1}$.

Denotando por $d\Gamma$ a medida superficial sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, designaremos por $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções L^p somáveis sobre Γ para a medida superficial $d\Gamma$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\ u(x)\ |^p\ d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4-4}$$

se $1 \leq p < \infty$ ou,

$$\|u\|_{L^\infty(\Gamma)} = \sup_{x \in \Gamma} ess\ |\ u(x)\ |,$$

se $p = \infty$.

Seja $m \in \mathbb{N}$. Representamos por $C^m(\Gamma)$ o espaço das funções $u : \Gamma \to \mathbb{K}$ de classe C^m e por $D(\Gamma)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre Γ. Usando a partição da unidade $\{\theta_i\}_{0 \leq i \leq k}$ introduzida anteriormente temos,

$$L^p(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{K};\ u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}),\ i = 1, ..., k\},$$

$$C^m(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{K};\ u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(R^{n-1}),\ i = 1, ..., k\}$$

e

$$D(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{K};\ u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(R^{n-1}),\ \forall m \in \mathbb{N}\ \ e\ i = 1, ..., k\}.$$

Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi_i :\ \ D(\Gamma) &\ \to D(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\ \mapsto \phi_i(u) = \tilde{u}_i = u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}}. \end{aligned} \quad (1.4\text{-}5)$$

Sendo $v \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ vem que

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(u), v \rangle_{D'(\mathbb{R}^{n-1}) \times D(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int_{R^{n-1}} \tilde{u}_i(y) v(y) dy \\ &= \int_{U_i \cup \Gamma} u(x)\theta_i(x) v(\varphi_i(x)) J_i(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.4\text{-}6)$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U_i \cup \Gamma$.

Definindo

$$\psi_i(v)(x) = \begin{cases} \theta_i(x) v(\varphi_i(x)) J_i(x), & se\ x \in U_i \cup \Gamma \\ 0, & se\ x \in \Gamma - (U_i \cup \Gamma) \end{cases}$$

então, de (1.4-6) podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{D'(\mathbb{R}^{n-1}) \times D(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\Gamma} u(x) \psi_i(v)(x) d\Gamma$$

ou ainda, do fato que $\psi_i(v) \in D(\Gamma)$, tem-se

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{D'(\mathbb{R}^{n-1}), D(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v) \rangle_{D'(\Gamma), D(\Gamma)} \,.$$

Da igualdade acima e do fato que $D(\Gamma)$ é denso em $D'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em $(1.4-5)$ se prolonga, por continuidade a uma aplicação que ainda denotaremos por ϕ_i de $D'(\Gamma)$ em $D'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Definição 1.68. Definimos para $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\Gamma) = \{u;\ \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ i = 1, 2, ..., k\}$$

dotado da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|\phi_i(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.69. • *Segue do fato de $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ ser um espaço de Hilbert que $H^s(\Gamma)$ também é um espaço de Hilbert.*

• *A definição dos espaços $H^s(\Gamma)$ independe da escolha do sistema de cartas locais $\{U_j, \varphi_j\}$ e da partição da unidade $\{\theta_j\}$ subordinada.*

• *Dados dois sistemas $\{U_i, \varphi_i, \theta_i\}$ e $\{U_i^*, \varphi_i^*, \theta_i^*\}$ para Ω, prova-se que $H^s(\Gamma)$ e $H^s(\Gamma)^*$ são "isomorfos"como espaços de Hilbert.*

1.5 Teoria do Traço

Nesta seção, consideremos Ω sendo um subconjunto um aberto limitado com fronteira Γ bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.70. Denotamos por $D(\Gamma)$ o espaço das funções reais definidas na fronteira de Ω, que possuem derivadas parciais de todas as ordens e por $D(\bar{\Omega})$ o conjunto de todas as funções $\rho : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ que são restrições de funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$D(\bar{\Omega}) = \{\phi_{|_{\bar{\Omega}}} = \rho,\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \gamma : D(\bar{\Omega}) &\to D(\Gamma) \\ u &\mapsto u_{|_\Gamma}. \end{aligned} \tag{1.5-7}$$

Induzindo em $D(\bar{\Omega})$ e em $D(\Gamma)$ as topologias de $H^1(\Omega)$ e $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, respectivamente, temos o resultado abaixo.

Teorema 1.71. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira Γ bem regular. Então, existe uma constante positiva C, tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

para todo $u \in D(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Ver [3], página 263, Proposição 6.8. $\square$

Como $D(\bar{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ e pelo Teorema anterior, podemos estender a aplicação γ dada em (1.5-7) a uma única aplicação linear e contínua

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : H^1(\Omega) & \to & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u & \mapsto & u_{|\Gamma}, \ \ \forall u \in D(\bar{\Omega}) \end{array}$$

a qual chamamos de aplicação traço de u sobre Γ.

Teorema 1.72. *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular. A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva e além disso*

$$ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega),$$

onde $ker(\gamma_0)$ representa o núcleo de γ_0.

Demonstração. Ver [3], página 275, Teorema 6.14. $\square$

De maneira mais geral, podemos definir o traço em espaços de Sobolev $W^{1,p}$, para $1 \leq p < \infty$:

Teorema 1.73. *Sejam Ω limitado e $\Gamma \in C^1$. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p} \to L^p(\Gamma)$$

tal que

(i) $Tu = u_{|\Gamma}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,
para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, onde a constante* C *depende somente de* p *e* Ω.

Demonstração. Ver [8], página 258, Teorema 1. □

Teorema 1.74. *Sejam* Ω *limitado e* $\Gamma \in C^1$*. Suponha que* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*. Então*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \; se, \; e \; somente \; se, \; Tu = 0 \; em \; \Gamma.$$

Demonstração. Ver [8], página 259, Teorema 2. □

1.6 Semigrupo de Operadores Lineares e Limitados e Sistemas Dinâmicos

Definição 1.75. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados definida sobre um espaço de Banach X é chamada de semigrupo de operadores lineares limitados (ou simplesmente semigrupo) quando
i) $S(0) = Id : X \to X$ (Operador Identidade em X).
ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para cada $t, s \geq 0$.
Ainda, dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 (ou simplesmente C_0-semigrupo) se além dos itens acima tivermos que
iii) $\lim\limits_{t\to 0} S(t)x = x$, para todo $x \in X$.

Definição 1.76. Um operador A é chamado gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ quando A é definido como

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \;\; existe \right\}$$

e para cada $x \in D(A)$ temos

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

No decorrer deste trabalho, representaremos $S(t) = e^{At}$.

Observação 1.77. *O domínio $D(A)$ do operador A pode ser reescrito como*

$$D(A) = \{x \in X \mid Ax \in X\}.$$

Definição 1.78. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado de uniformemente limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Quando $M = 1$, diremos também que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

Definição 1.79. Seja A um operador linear definido sobre um espaço de Hilbert H com domínio $D(A) \subseteq H$. Dizemos que A é um operador dissipativo quando

$$Re\,\langle Ax, x\rangle_H \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.80. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subseteq H \to H$ um operador dissipativo tal que o operador $Id - A$ é sobrejetor. Então, $\overline{D(A)} = H$.*

Demonstração. Ver [15], página 16, Teorema 4.6. □

Teorema 1.81. *(Lummer-Philips) Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subseteq H \to H$ um operador com $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Então, A é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações em H se, e somente se, A é dissipativo e o operador $\lambda Id - A$ é sobrejetor para algum $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [15], página 14, Teorema 4.3. □

Teorema 1.82. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $S(t)$ então $D(A)$, o domínio de A, é denso em H e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [15], página 5, Corolário 2.5. □

Definição 1.83. Um sistema dinâmico é um par de objetos $(X, S(t))$ onde X é um espaço métrico completo e a família de operadores limitados $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de X nele mesmo satisfaz:

$$S(0) = Id, \quad S(t+s) = S(t)S(s).$$

Assumiremos que $y(t) = S(t)y_0$ é contínua com respeito à t para qualquer $y_0 \in X$. Com isso, denominamos X de espaço fase e $S(t)$ por semigrupo de evolução.

Definição 1.84. Sejam $A, B \subset X$, onde X é um espaço métrico. A semi distância de Hausdorff entre A e B é dada por

$$d^X(A, B) = \sup_{x \in A} d_X(x, B)$$

onde, $d_X(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$.

Definição 1.85. Um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é dito assintoticamente suave se para qualquer conjunto limitado B tal que $S(t)B \subset B$, para $t > 0$, existe um conjunto compacto $K \subset \bar{B}$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} d^X(S(t)B, K) = 0.$$

Definição 1.86. Um conjunto $D \subset X$ é dito atrator uniforme se para todo conjunto limitado $B \subset X$

$$\lim_{t \to \infty} d^X(S(t)B, D) = 0.$$

Definição 1.87. Um conjunto $D \subset X$ é dito invariante se

$$S(t)D = D, \ \ \forall t \geq 0.$$

Definição 1.88. Um atrator global de um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é um conjunto compacto $A \subset X$ tal que:

(i) A é invariante;

(ii) A é atrator uniforme.

Definição 1.89. A dimensão fractal de um conjunto compacto $A \subset X$ é definida por

$$dim_F A = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N_\epsilon(A)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$$

onde $N_\epsilon(A)$ é o número mínimo de bolas fechadas de raio 2ϵ necessárias para cobrir A.

Definição 1.90. Uma curva contínua $\gamma \equiv \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$ em X é dita uma trajetória completa se

$$S(t)u(\tau) = u(t + \tau),$$

para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

Definição 1.91. O conjunto dos pontos estacionários de um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é dado por

$$\mathcal{N} = \{v \in X : S(t)v = v, \ \ \forall t \geq 0\}.$$

Definimos a variedade $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$ como o conjunto dos elementos $y \in X$ tal que existe uma trajetória completa $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$ que satisfaz a seguinte propriedade:

$$u(0) = y \ \ e \ \ \lim_{t \to -\infty} d_X(u(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Definição 1.92. Seja $Y \subseteq X$ um conjunto invariante de um sistema dinâmico $(X, S(t))$.

- A função contínua $\Phi(y)$ definida em Y é dita função de Lyapunov para o sistema dinâmico $(X, S(t))$ em Y se a função $t \to \Phi(S(t)y)$ é uma função não crescente para qualquer $y \in Y$.
- A função de Lyapunov $\Phi(y)$ é dita estrita em Y se a equação $\Phi(S(t)y) = \Phi(y)$ para todo $t > 0$ e, para algum $y \in Y$, implicar que $S(t)y = y$ para todo $t > 0$, ou seja, y é um ponto estacionário de $(X, S(t))$.
- O sistema dinâmico $(X, S(t))$ é dito gradiente se existe uma função de Lyapunov estrita para $(X, S(t))$ no espaço fase X.

Teorema 1.93. *Suponha que o sistema dinâmico $(X, S(t))$ é um sistema dinâmico gradiente, assintoticamente suave e com função de Lyapunov Φ. Suponha também que,*

$$\Phi(S(t)z) \to \infty \ se, \ e \ somente \ se, \|z\|_X \to \infty, \tag{1.6-8}$$

e o conjunto $\mathcal{N}$ de pontos estacionários de $(X, S(t))$ é limitado. Então o sistema dinâmico $(X, S(t))$ possui um atrator global dado por $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}$ são os pontos fixos de $S(t)$.

Demonstração. Ver [7], página 360, Corolário 7.5.7. □

Sejam X, Y, Z espaços de Banach reflexivos com X compactamente imerso em Y e defina

$$H = X \times Y \times Z.$$

Suponha que o sistema dinâmico é dado pelo semigrupo de evolução

$$S(t)z = (u(t), u_t(t), \xi(t)), \quad z = (u_0, u_1, \xi_0) \in H, \tag{1.6-9}$$

onde as funções u e ξ são regulares

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y), \;\; \xi \in C(\mathbb{R}^+; Z). \tag{1.6-10}$$

Definição 1.94. Um sistema $(H, S(t))$ é chamado de quase estável em um conjunto $B \subset H$ se existe uma seminorma compacta n_X, funções escalares não negativas $a(t)$ e $c(t)$, localmente limitadas em $[0, \infty)$ e $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ com $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$, tais que,

$$\left\|S(t)z^1 - S(t)z^2\right\|_H^2 \leq a(t) \left\|z^1 - z^2\right\|_H^2,$$

e

$$\left\|S(t)z^1 - S(t)z^2\right\|_H \leq b(t) \left\|z^1 - z^2\right\|_H^2 + c(t) sup[n_X(u^1(s) - u^2(s))],$$

para quaisquer $z^1, z^2 \in B$ onde, .

Teorema 1.95. *(Chueshov-Lasiecka). Seja $(H, S(t))$ um sistema dado por ($1.6-9$), satisfazendo ($1.6-10$) e quase estável em todo subconjunto limitado $B \subset X$ tal que $S(t)B \subset B$, para $t > 0$. Então $(H, S(t))$ é assintoticamente suave e qualquer atrator global deste sistema possui dimensão fractal finita.*

Demonstração. Ver [7], páginas 383 e 384, Proposição 7.9.4 e Teorema 7.9.6. □

1.7 O Problema de Cauchy Abstrato

Consideremos o seguinte Problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_t(t) + A(U(t)) = F(t, U(t)), \;\; t > t_0, \\ U(t_0) = U_0, \end{cases} \tag{1.7-11}$$

onde $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $S(t), t \geq 0$, em um espaço de Banach X e $F : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz em

U. Consideremos a seguinte equação:

$$U(t) = S(t-t_0)U_0 + \int_{t_0}^{t} S(t-s)F(s,U(s))ds. \tag{1.7-12}$$

Definição 1.96. Dizemos que uma função $U : [t_0, T] \to X$, contínua em $[t_0, T]$ é uma solução generalizada para o Problema de Cauchy $(1.7-11)$ se U é uma solução para a equação $(1.7-12)$.

A solução generalizada também é chamada de "mild"solução.

Definição 1.97. Dizemos que uma função $U : [t_0, T) \to X$ contínua em $[t_0, T)$ e $U \in C^1(]t_0, T[)$ é uma solução regular do Problema de Cauchy $(1.7-11)$ se $U(t) \in D(A)$ para $t_0 < t < T$ e $(1.7-11)$ é satisfeito em $[t_0, T[$.

Teorema 1.98. *Seja $F : [0,\infty] \times X \to X$ uma função contínua em t, para $t \geq 0$, e localmente Lipschtziana em U. Se $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ em X então para todo $U_0 \in X$ existe um $t_{max} \leq \infty$ tal que o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} U_t(t) + A(U(t)) = F(t, U(t)), \quad t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.7-13}$$

possui uma única solução generalizada U em $[0, t_{max}[$. Além disso, se $t_{max} < \infty$ então

$$\lim_{t \to t_{max}} \|U(t)\| = \infty.$$

Demonstração. Ver [15], página 185, Teorema 1.4. □

Teorema 1.99. *Seja $-A$ um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ em X. Se $F : [t_0, T] \times X \to X \in C^1([t_0, T], X)$ então a solução generalizada do Problema de Cauchy (1.7-11) com $U_0 \in D(A)$ é uma solução regular para o Problema de Cauchy (1.7-11).*

Demonstração. Ver [15], página 187, Teorema 1.5. □

Observação 1.100. *Seja $-A$ um gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $S(t)$ em H. Consideremos o domínio de A, $D(A)$, com a norma*

$$\mid x \mid_A = \|x\| + \|A(x)\|,$$

para cada $x \in D(A)$. *Munido desta norma,* $D(A)$ *é um espaço de Banach.*

Agora, supondo que a função $F : [t_0, T] \times D(A) \to D(A)$ *é localmente Lipschitziana, contínua em* $D(A)$ *e uniformemente contínua em* $[t_0, T]$*, pela Teorema 1.98, obtemos que para todo* $U_0 \in D(A)$ *o problema de valor inicial 1.7-11 possui uma solução regular em um intervalo máximo* $[t_0, t_{max}[$ *e se* $t_{max} < T$

$$\lim_{t \to t_{max}} (\|U(t)\| + \|A(U(t))\|) = \infty.$$

(Ver [15], página 190.)

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DA ONDA COM MEMÓRIA DEGENERADA

Vamos considerar o problema com dissipações viscoelástica e friccional combinadas

$$u_{tt} - \triangle u + \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla(u)(t-s)]ds + b(x)u_t + f(u) = h(x) \;\; em \, \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.0-1}$$

$$u(x,t) = 0 \;\; em \, \Gamma \times \mathbb{R}, \tag{2.0-2}$$

$$u(x,-t) = u^0(x,-t) \;\; e \;\; u_t(x,-t) = \frac{\partial}{\partial t} u^0(x,-t) \;\; em \, \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.0-3}$$

sendo Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira regular Γ, $b(x)u_t$ um termo de amortecimento de atrito, denominado dissipação friccional e $u^0(x,t), t \leq 0$, estabelecido como passado histórico de u.

Na seção 2.1, assim como em [6], assumiremos algumas hipóteses adequadas, $(H_1)-(H_4)$, sobre as funções a, g, f, b e h e definiremos alguns espaços de funções com os quais trabalharemos no restante do trabalho.

Na seção 2.2, estudaremos a existência e unicidade de solução do problema (2.0-1)-(2.0-3) e seu comportamento a longo tempo.

Na seção 2.3, investigaremos a existência de um atrator global.

2.1 Hipóteses

2.1.1 Hipótese 1 (H_1)

Seja $a \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$med\{x \in \Gamma; a(x) > 0\} > 0 \tag{2.1-4}$$

e

$$V_a = \left\{ u \in L^2(\Omega); \int_\Omega a(x) \left|\nabla u\right|^2 dx < \infty, u_{|\Gamma} = 0 \right\}.$$

sendo $u_{|\Gamma} = 0$ no sentido do traço, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{V_a} = \int_\Omega a(x) \nabla u \nabla v dx$$

e norma

$$\|u\|_{V_a}^2 = \int_\Omega a(x) \left|\nabla u\right|^2 dx,$$

assumiremos que V_a é um espaço de Hilbert.
Além disso, assumiremos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V_a \hookrightarrow L^2(\Omega) \tag{2.1-5}$$

e que $Au = div(a(x)\nabla u)$ é um operador auto adjunto não positivo.

Estas premissas apresentadas acima são necessárias, quando trabalhamos com problemas viscoelásticos com memória (conforme [9]-[12]). Como consequência, definimos o espaço $\mathcal{M}$ frequentemente usado nestes estudos

$$\mathcal{M} = L_g^2(\mathbb{R}^+; V_a) = \left\{ \eta; \int_0^\infty g(s) \left\|\eta(s)\right\|_{V_a}^2 ds < \infty \right\}, \tag{2.1-6}$$

munido do produto interno

$$\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty g(s) \left(\int_\Omega a(x) \nabla \eta(x,s) \nabla \xi(x,s)\, dx \right) ds$$

e norma

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^\infty g(s)\, \|\eta(s)\|_{V_a}^2\, ds$$

$\mathcal{M}$ é um espaço de Hilbert.

2.1.2 Hipótese 2 (H_2)

Para o termo de amortecimento de atrito adicional, $b(x)u_t$, supomos que $b \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa satisfazendo

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0, \ \ \forall x \in \Omega, \tag{2.1-7}$$

para algum $\delta > 0$.

Notemos que $b(x)$ é necessário ($b(x) > 0$) apenas em uma vizinhança pequena de ω_0, onde ω_0 é o conjunto de pontos em que $a(x) = 0$. Por exemplo, se $\Omega = (0,1)$ e $a(x)$ se anula somente em $x = 0$, então podemos ter $b(x) = c$ em $(0, \epsilon)$ onde c e ϵ são constantes positivas, que existem, mesmo pequenas. Entretanto, podemos ver $b(x)u_t$ como uma dissipação complementar pequena e arbitrária.

2.1.3 Hipótese 3 (H_3)

Em relação a memória, assumiremos que $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ satisfaz

$$g(s) > 0 \ \ e\ g'(s) \leq -\epsilon g(s), \ \ \forall s \geq 0, \tag{2.1-8}$$

para algum $\epsilon > 0$. Além disso, assumiremos

$$k_0 = \int_0^\infty g(s) ds < \|a\|_\infty^{-1}. \tag{2.1-9}$$

Observação 2.1.

(i) A condição $(2.1-8)$ *é usual e implica que* g *decresce exponencialmente para zero. De fato, como*

$$g(s) \geq 0 \text{ e } g'(s) + \epsilon g(s) \leq 0, \;\; \forall s \geq 0,$$

multiplicando a desigualdade por $e^{\epsilon s}$*, temos*

$$e^{\epsilon s} g'(s) + \epsilon g(s) e^{\epsilon s} \leq 0, \;\; \forall s \geq 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{ds}(e^{\epsilon s} g(s)) \leq 0, \;\; \forall s \geq 0.$$

Isto nos dá

$$e^{\epsilon s} g(s) - g(0) \leq 0, \;\; \forall s \geq 0.$$

Consequentemente,

$$0 \leq g(s) \leq g(0) e^{-\epsilon s}, \;\; \forall s \geq 0.$$

Portanto, $g(s) \to 0$ *quando* $s \to \infty$*.*

(ii) Tomando

$$l_0 = 1 - k_0 \left\| a \right\|_\infty , \tag{2.1-10}$$

obtemos da condição $(2.1-9)$ *que*

$$1 - a(x)k_0 \geq 1 - \left\| a \right\|_\infty k_0 > 1 - \left\| a \right\|_\infty \left\| a \right\|_\infty^{-1} \geq 0$$

e assim

$$1 - a(x)k_0 \geq l_0 > 0$$

para todo $x \in \Omega$*.*

2.1.4 Hipótese 4 (H_4)

Para o termo não linear $f(s)$ assumiremos que $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, onde $supp f = P$, $f(0) =$

$f'(0) = 0$ e que existe $C_f > 0$ tal que

$$|f''(s)| \leq C_f(1 + |s|), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.2. *Esta hipótese implica que existe $C > 0$ tal que*

$$|f(s) - f(r)| \leq C(1 + |s|^2 + |r|^2)\,|s - r|\,, \quad \forall s, r \in \mathbb{R}. \tag{2.1-11}$$

De fato, pelo Teorema do Valor Médio, existe θ entre r e s, tal que

$$\mid f(r) - f(s) \mid = \mid f'(\theta) \mid\mid r - s \mid .$$

Novamente pelo Teorema do Valor Médio, como $\mid k \mid \leq \mid r \mid + \mid s \mid$ para qualquer k entre r e s

$$\mid f'(\theta) \mid \leq C_f(1 + \mid r \mid + \mid s \mid)^2 \leq C(1 + \mid r \mid^2 + \mid s \mid^2)$$

Então,

$$|f(s) - f(r)| \leq C(1 + |s|^2 + |r|^2)\,|s - r|\,, \quad \forall s, r \in \mathbb{R}.$$

Além disso, assumimos que para algum $\beta \in (0, \lambda_1)$, onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\triangle$ com condição de fronteira do tipo Dirichlet, existe $\rho_f > 0$ tal que

$$f(s)s \geq -l_0\beta s^2 - \rho_f \;\; e \;\; \hat{f}(s) \geq \frac{-l_0\beta}{2} s^2 - \rho_f, \; \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.1-12}$$

onde $\hat{f}(s) = \displaystyle\int_0^s f(y)dy$. Tal suposição é padrão e pode ser obtida através de

$$\lim_{|s| \to \infty} inf f'(s) > -l_0\lambda_1,$$

veja [16].

2.2 Existência e Unicidade de Solução

Definiremos como espaço fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{M},$$

com norma

$$\|(u,v,\eta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2, \quad (u,v,\eta) \in \mathcal{H},$$

equivalentemente,

$$\|(u,v,\eta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_\Omega (1 - a(x)k_0) |\nabla u|^2 \, dx + \|v\|_2^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2$$

e produto interno

$$\begin{aligned} \langle (u_1,v_1,\eta_1),(u_2,v_2,\eta_2)\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega (1 - a(x)k_0)\nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx \\ &+ \int_0^\infty g(s) \left(\int_\Omega a(x) \nabla \eta_1 \nabla \eta_2 dx \right) ds, \end{aligned} \tag{2.2-13}$$

para $(u_i, v_i, \eta_i) \in \mathcal{H},\ i = 1,2.$

A classe memória degenerada que consideraremos é dada pelo operador definido na hipótese $(H1)$ dado por

$$Au = div(a(x)\nabla u),$$

onde $a \in C^1(\bar{\Omega})$ pode ser zero em um subconjunto ω_0 de $\bar{\Omega}$.

Introduziremos uma nova variável η^t, que corresponde à história de deslocamento relativo, definida por

$$\eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,\ t \geq 0, \tag{2.2-14}$$

donde

$$\eta_t^t(x,s) = u_t(x,t) - \eta_s^t(x,s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,\ t \geq 0,$$

que sugere a condição inicial $(t = 0)$

$$\begin{aligned}\eta^0(x,s) &= u(x,0) - u(x,0-s)\\ &= u(x,0) - u(x,-s)\\ &= u^0(x,0) - u^0(x,-s),\end{aligned}$$

$(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$.

Como mostrado por Grasselli e Pata [9], vamos considerar $\eta_t^t = v + T\eta^t$, onde

$$v = u_t \ \ e \ \ T\eta = -\eta_s, \quad \eta \in D(T),$$

é o gerador do semigrupo de translação com domínio

$$D(T) = \{\eta \in \mathcal{M} \mid \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0\}.$$

Para simplificar um pouco a representação de fórmulas, frequentemente escreveremos u ou $u(t)$ ao invés de $u(x,t)$ e η ou $\eta(s)$ ao invés de $\eta^t(x,s)$.

A relação $(2.2-14)$ implica que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla u(t-s)]ds &= \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla(u(x,t) - \eta^t(x,s))]ds\\ &= -\int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta^t(s)]ds + k_0 div[a(x)\nabla u(t)],\end{aligned}$$

onde k_0 é como na hipótese $(H3)$. Portanto o problema $(2.0-1)-(2.0-3)$ pode ser escrito por

$$\begin{aligned}u_{tt} - div[(1 - a(x)k_0)\nabla u] - \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta^t(s)]ds &+ b(x)u_t \\ &= -f(u) + h(x)\end{aligned} \tag{2.2-15}$$

em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, onde $h \in L^2(\Omega)$,

$$\eta_t = -\eta_s + u_t \ \ em\ \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{2.2-16}$$

com condição de fronteira

$$u(x,t) = 0, x \in \Gamma, t > 0 \ e\ \eta^t(x,s) = 0, x \in \Gamma, t, s > 0, \tag{2.2-17}$$

e condição inicial

$$u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x), \eta^t(x,0) = 0, \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), \tag{2.2-18}$$

onde

$$\begin{cases} u^0(x) = u^0(x,0), \quad x \in \Omega, \\ u^1(x) = \partial_t u^0(x,t)|_{t=0}, \quad x \in \Omega, \\ \eta_0(x,s) = u^0(x,0) - u^0(x,-s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Nosso estudo do problema viscoelástico degenerado será feito pelo sistema $(2.2-15)-(2.2-18)$.

Considerando $U = (u,v,\eta) \in \mathcal{H}$, reescrevemos o sistema $(2.2-15)-(2.2-18)$ como um problema de Cauchy equivalente,

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{L}U + \mathcal{F}U \;\; t > 0, \; U(0) = U_0, \tag{2.2-19}$$

sobre o espaço de fase $\mathcal{H}$, onde $U_0 = (u^0, u^1, \eta^0)$,

$$\mathcal{L}U = \begin{pmatrix} v \\ div[(1-a(x)k_0)\nabla u] + \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds - b(x)v \\ v - \eta_s \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{F}(U) = (0, -f(u) + h, 0)^T. \tag{2.2-20}$$

Uma vez que o domínio de $\mathcal{L}$ é definido por

$$D(\mathcal{L}) = \{z \in \mathcal{H} \mid \mathcal{L}z \in \mathcal{H}\},$$

temos que

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ (u,v,\eta) \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in H_0^1(\Omega), \quad \eta \in D(T), \\ div[(1-a(x)k_0)\nabla u] + \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds \in L^2(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Lema 2.3. *O operador $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um C^0 - semigrupo de contrações $e^{\mathcal{L}t}$ em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Pelos Teoremas 1.80 e 1.81 precisamos provar que o operador $\mathcal{L}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$ e que o operador $Id - \mathcal{L}$ é sobrejetor.
Conforme definido em (2.2-13), para todo $U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{L})$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega (1 - ak_0)\nabla v \nabla u dx + \int_\Omega v div[(1 - ak_0)\nabla u] dx \\ &+ \int_\Omega v\left(\int_0^\infty g(s) div[a\nabla\eta] ds\right) dx - \int_\Omega b(x)|v|^2 dx \\ &+ \int_0^\infty g(s)\left(\int_\Omega a\nabla v\nabla\eta dx\right) ds - \int_0^\infty g(s)\left(\int_\Omega a\nabla\eta_s\nabla\eta dx\right) ds.\end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\langle \mathcal{L}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = - \int_\Omega b(x)|v|^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta(s)\|^2_{V_a} ds.$$

Por hipótese, $b(x) \geq 0$ e $g'(s) \leqslant 0$, então para todo $U = (u, v, \eta)$ em $D(\mathcal{L})$ temos

$$\langle \mathcal{L}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leqslant 0,$$

mostrando que $\mathcal{L}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$.

Agora, mostraremos que o operador $Id - \mathcal{L}$ é sobrejetor, ou seja, para cada $F \in \mathcal{H}$, existe $U \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$(Id - \mathcal{L})U = F.$$

De forma equivalente, mostraremos que, para cada $F = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{H}$ onde $f_1 \in H_0^1(\Omega)$, $f_2 \in L^2(\Omega)$ e $f_3 \in \mathcal{M}$, existe $U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$u - v = f_1, \tag{2.2-21}$$

$$v + b(x)v - div[(1 - ak_0)\nabla u] - \int_0^\infty g(s) div[a\nabla\eta(s)]\, ds = f_2, \tag{2.2-22}$$

$$\eta - v + \eta_s = f_3. \tag{2.2-23}$$

Multiplicando (2.2-23) por e^s e integrando sobre $(0, s)$ obtemos

$$\int_0^s \eta(x,\tau)e^\tau d\tau - \int_0^s v(x)e^\tau d\tau + \int_0^s \eta_\tau(x,\tau)e^\tau d\tau = \int_0^s f_3(x,\tau)e^\tau d\tau. \tag{2.2-24}$$

Após integrarmos por partes e impormos a condição $\eta(0) = 0$, a equação (2.2-24) resulta em

$$\eta(x, s) = \int_0^s f_3(x, \tau)e^{\tau - s} d\tau + v(x)(1 - e^{-s}). \tag{2.2-25}$$

Substituindo (2.2-21) e (2.2-25) em (2.2-22) temos

$$\begin{aligned} & (1 + b)v - div[(1 - ak_0)\nabla v] - k_1 div[a\nabla v] \\ = \; & f_2 + div[(1 - ak_0)\nabla f_1] + \int_0^\infty \int_0^s g(s)e^{\tau - s} div[a\nabla f_3(\tau)]\, d\tau ds, \end{aligned} \tag{2.2-26}$$

onde $k_1 = \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds$. Note que $\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds < \infty$ pois $\int_0^\infty g(s)ds < \infty$, pela hipótese (H_3).

A fim de resolver a equação (2.2-26), definimos a forma bilinear

$$\mathcal{B} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\mathcal{B}(w, z) = \int_\Omega (1 - ak_0)\nabla w \nabla z \, dx + k_1 \int_\Omega a\nabla w \nabla z \, dx + \int_\Omega (1 + b(x))wz \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(w, z)| & \leq \left| \int_\Omega (1 - ak_0)\nabla w \nabla z \, dx \right| + \left| k_1 \int_\Omega a\nabla w \nabla z \, dx \right| \\ & \quad + \left| \int_\Omega (1 + b(x))wz \, dx \right| \\ & \leq c_1 \left| \int_\Omega \nabla w \nabla z \, dx \right| + c_2 \left| \int_\Omega \nabla w \nabla z \, dx \right| + c_3 \left| \int_\Omega wz \, dx \right| \\ & \leq C_1 \|w\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

e pelo item (ii) da Observação 2.1

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w, w) & = \int_\Omega (1 - ak_0) \mid \nabla w \mid^2 \; dx + k_1 \int_\Omega a \mid \nabla w \mid^2 \; dx \\ & \quad + \int_\Omega (1 + b(x)) \mid w \mid^2 \; dx \\ & \geq l_0 \int_\Omega \mid \nabla w \mid^2 \; dx + d_2 \int_\Omega \mid \nabla w \mid^2 \; dx + d_3 \int_\Omega \mid w \mid^2 \; dx \\ & \geq C_2 \|w\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

com $C_1, C_2 > 0$, isto é, $\mathcal{B}$ é contínua e coerciva em $H_0^1(\Omega)$ para todo $w, z \in H_0^1(\Omega)$. Observemos que, $f_2 + div[(1-ak_0)\nabla f_1] \in H^{-1}(\Omega)$ pois $f_1 \in H_0^1(\Omega)$, $f_2 \in L^2(\Omega)$ e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V_a \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V_a' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Denotando

$$f^* = \int_0^\infty \int_0^s g(s) e^{\tau - s} div[a\nabla f_3(\tau)]\, d\tau ds$$

usaremos a integração por partes e a desigualdade de Hölder, para $w \in H_0^1(\Omega)$ com $\|\nabla w\|_2 \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\left|(f^*, w)_{H^{-1}, H_0^1}\right| &= \left| \int_0^\infty \int_0^s g(s) e^{\tau-s} \left(\int_\Omega div[a\nabla f_3(\tau)] w dx \right) d\tau ds \right| \\
&= \left| \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau-s} \left(\int_\Omega a\nabla f_3(\tau) \nabla w dx \right) d\tau ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau-s} \left(\int_\Omega a^2 \mid \nabla f_3(\tau) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \mid \nabla w \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau ds \right| \\
&\leqslant \|a\|_\infty^{\frac{1}{2}} \left| \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau-s} \left(\|f_3(\tau)\|_{V_a} \|\nabla w\|_2 \right) d\tau ds \right| \\
&\leqslant \|a\|_\infty^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \int_\tau^\infty g(s) e^{\tau-s} \|f_3(\tau)\|_{V_a}\, ds d\tau
\end{aligned}$$

Mas,

$$\int_\tau^\infty g(s) e^{\tau-s} ds = g(\tau) + \int_\tau^\infty g'(s) e^{\tau-s} ds \leq g(\tau),$$

pois $g'(s)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|(f^*, w)_{H^{-1}, H_0^1}\right| &\leqslant \|a\|_\infty^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty g(\tau) \|f_3(\tau)\|_{V_a} d\tau \\
&\leqslant \|a\|_\infty^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(\tau) \|f_3(\tau)\|_{V_a}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|a\|_\infty^{\frac{1}{2}} k_0^{\frac{1}{2}} \|f_3\|_{\mathcal{M}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $f^* \in H^{-1}(\Omega)$. Consequentemente,

$$f_2 + div[(1-ak_0)\nabla f_1] + f^* \in H^{-1}(\Omega).$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.20), a equação (2.2-26) possui uma solução fraca

$$\hat{v} \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2-27}$$

Desta forma, pelas equações (2.2-21) e (2.2-25), vamos definir

$$\hat{u} = \hat{v} + f_1$$

e

$$\hat{\eta}(s) = \hat{v}(1 - e^{-s}) + \int_0^s f_3(\tau)e^{\tau - s}d\tau. \tag{2.2-28}$$

Como $\hat{v}, f_1 \in H_0^1(\Omega)$, temos que $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\|\hat{\eta}\|_{V_a}^2 &\leqslant \|\hat{v}(1 - e^{-s})\|_{V_a}^2 + \left\| \int_0^s f_3(\tau)e^{\tau - s}d\tau \right\|_{V_a}^2 \\
&\leqslant \|\hat{v}\|_{V_a}^2 + \int_0^s e^{\tau - s}\|f_3(\tau)\|_{V_a}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\int_0^\infty g(s)\|\hat{\eta}\|_{V_a}^2 ds \leqslant \int_0^\infty g(s)\|\hat{v}\|_{V_a}^2 ds + \int_0^\infty \int_0^s g(s)e^{\tau - s}\|f_3(\tau)\|_{V_a}^2 d\tau ds.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\|\hat{\eta}\|_{V_a}^2 ds &\leqslant \int_0^\infty g(s)\|\hat{v}\|_{V_a}^2 ds + \int_0^\infty \int_0^s g(s)e^{\tau - s}\|f_3(\tau)\|_{V_a}^2 d\tau ds \\
&\leqslant k_0\|\hat{v}\|_{V_a}^2 + \int_0^\infty g(\tau)\|f_3(\tau)\|_{V_a}^2 ds \\
&= k_0\|\hat{v}\|_{V_a}^2 + \|f_3\|_{\mathcal{M}}^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

concluímos, pela definição do conjunto $\mathcal{M}$, que $\hat{\eta} \in \mathcal{M}$. Portanto

$$U = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) \in \mathcal{H}$$

é uma solução fraca de (2.2-21) - (2.2-23).

Resta provarmos que $U = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) \in D(\mathcal{L})$. Temos:

(i) $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ por (2.2-27);

(ii) $\hat{\eta} \in D(T)$. De fato, acabamos de mostrar que $\hat{\eta} \in \mathcal{M}$. Além disso, de (2.2-28) temos que $\hat{\eta}(0) = 0$ e

$$\hat{\eta}_s = f_3 + \hat{v} - \hat{\eta} \in \mathcal{M},$$

pois $f_3 \in \mathcal{M}, \hat{\eta} \in \mathcal{M}$ e $\hat{v} \in \mathcal{M}$ ($\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ implica que $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\|\hat{v}\|_{V_a}^2 ds < \infty$);

(iii) Como

$$-div[(1 - ak_0)\nabla \hat{u}] - \int_0^\infty g(s) div[a \nabla \hat{\eta}(s)] ds = f_2 - (1 + b(x))\hat{v}$$

e

$$f_2 - (1 + b(x))\hat{v} \in L^2(\Omega)$$

temos que

$$-div[(1 - ak_0)\nabla \hat{u}] - \int_0^\infty g(s) div[a \nabla \hat{\eta}(s)] ds \in L^2(\Omega).$$

Portanto, de $(i), (ii)$ e (iii)

$$U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{L}),$$

completando a prova.

□

Lema 2.4. *O operador $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por $\mathcal{F}\ (u, v, \eta) = (0, -f(u) + h, 0)$ é localmente Lipschitziano.*

Demonstração. Sejam B um conjunto limitado em $\mathcal{H}$ e $U, V \in B$. Denotemos $U = (u^1, v^1, \eta^1)$, $V = (u^2, v^2, \eta^2)$. Da hipótese (H_4), (ver (2.1-11)) existe $C > 0$ tal que

$$|f(u) - f(v)| \leqslant C(1 + |u|^2 + |v|^2)|u - v|,$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \| - f(u^1) + h - (-f(u^2) + h)\|_2^2 \\
&= \| - f(u^1) + f(u^2)\|_2^2 \\
&\leqslant \int_\Omega [C(1 + |u^1|^2 + |u^2|^2)]^2 |u^1 - u^2|^2 dx.
\end{aligned}$$

Aplicando, na desigualdade acima, a desigualdade de Hölder com $p = \frac{3}{2}$ e $q = 3$ obtemos

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_1(1 + \|u^1\|_6^4 + \|u^2\|_6^4)\|u^1 - u^2\|_6^2,$$

onde $C_1 > 0$.
Porém como $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ (Teorema 1.56) e por $U, V \in B$ podemos concluir que

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_2\|U - V\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para algum $C_2 > 0$ dependendo de B, o que finaliza a prova. □

No próximo lema provaremos algumas propriedades sobre a energia do sistema (2.2-15)-(2.2-18), a qual é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (1 - a(x)k_0)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \int_\Omega (\hat{f}(u) - hu)\, dx. \quad (2.2\text{-}29)$$

Lema 2.5. *A energia $E(t)$ é não crescente ao longo de qualquer solução $(u(t), u_t(t), \eta^t)$ de (2.2-15)-(2.2-18). Além disso, existem $\delta_0, C_{fh} > 0$, que não dependem do fluxo, tais que*

$$E(t) \geq \delta_0\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_{fh}, \quad (2.2\text{-}30)$$

para todo $t \geqslant 0$.

Demonstração. Multiplicando a equação $(2.2-15)$ por u_t e integrando sobre Ω temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_t(x)u_{tt}(x)\, dx - \int_\Omega u_t(x) div[(1 - a(x)k_0)\nabla u(x)]\, dx + \int_\Omega b(x)u_t^2(x)\, dx \\ - &\int_\Omega u_t(x)\int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta^t(x)]\, dsdx = \int_\Omega (h(x) - f(u))u_t(x)\, dx. \end{aligned}$$

Por definição, $\hat{f}(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\, ds$ e h não dependem de t explicitamente. Então, integrando por partes a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|_2^2 + \int_\Omega (1 - a(x)k_0)|\nabla u|^2 dx + 2\int_\Omega (\hat{f}(u) - hu)\, dx\right\} \\ = &-\int_\Omega b|u_t|^2 dx - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t(s)\nabla u_t(t)\, dxds. \end{aligned} \quad (2.2\text{-}31)$$

Vamos analisar separadamente a segunda parcela do lado direito da igualdade acima. De $u_t(t) = \eta_t(s) + \eta_s(s)$, temos

$$\begin{aligned}
& -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t(s)\nabla u_t(t)\;dxds \\
= & -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t(s)\nabla[\eta_t^t(s)+\eta_s^t(s)]\;dxds \\
= & -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t(s)\nabla\eta_t^t(s)\;dxds - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t(s)\nabla\eta_s^t(s)\;dxds \\
= & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds \\
= & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds.
\end{aligned}$$

Substituindo esta última igualdade em (2.2-31) e mantendo em mente (2.2-29), vem que

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|_2^2 + \int_\Omega (1-a(x)k_0)|\nabla u|^2 dx + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + 2\int_\Omega (\hat{f}(u) - hu)(x)\;dx\right\} \\
&= -\int_\Omega b(x)|u_t(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds. \qquad (2.2\text{-}32)
\end{aligned}$$

Conforme mostramos na prova do Lema 2.3, temos

$$-\int_\Omega b|u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds \le 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Logo concluímos que E é não crescente ao longo de qualquer solução $(u(t), u_t(t), \eta^t)$.

Por outro lado, da Hipótese (H_4) (ver (2.1 -12)) também temos

$$\hat{f}(u) \ge -\frac{l_0\beta}{2}u^2 - \rho_f, \;\; \forall u \in \mathbb{R}.$$

Assim, da desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\hat{f}(u) - hu)\;dx &\ge \int_\Omega \left(-\frac{l_0\beta}{2}u^2 - \rho_f - hu\right) dx \\
&\ge -\frac{l_0\beta}{2\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2 - \rho_f|\Omega| - \int_\Omega hu\;dx.
\end{aligned}$$

Definindo $\delta_0 = \dfrac{l_0}{4}\left(1 - \dfrac{\beta}{\lambda_1}\right)$, existe $C_h > 0$ tal que

$$\int_\Omega hu\;dx \le C_h\|h\|_2^2 + \delta_0\|\nabla u\|_2^2$$

pelas Desigualdades de Young e Poincaré.

Portanto, da Observação 2.1 - (ii), segue que

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|(u,u_t,\eta_t^t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega (\hat{f}(u) - h(u))dx \\ &\geq \delta_0\|(u,u_t,\eta_t^t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \rho_f|\Omega| - C_h\|h\|_2^2, \end{aligned}$$

uma vez que

$$l_0 < 1 \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1}\right) < 1$$

implicam em

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{l_0}{2} + \delta_0\right) > \delta_0 \quad \text{e} \quad \delta_0 < \tfrac{1}{2}.$$

Disso, obtemos (2.2-30), com $C_{fh} = \rho_f|\Omega| + C_h\|h\|_2^2$. □

Teorema 2.6. *Assuma que as hipóteses $(H1) - (H4)$ são satisfeitas, $h \in L^2(\Omega)$ e que os dados iniciais $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$. Então o problema (2.2-15)-(2.2-18) possui uma única solução generalizada*

$$u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)), u_t \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \;\; e \;\; \eta^t \in C([0,\infty), \mathcal{M}). \tag{2.2-33}$$

Se os dados iniciais $(u_0, u_1, \eta_0) \in D(\mathcal{L})$ então a solução é regular. Além disso, se $z^i(t) = (u^i(t), u_t^i(t), \eta^{i,t}), i = 1,2$ são duas soluções generalizadas de (2.2-15)-(2.2-18), então para qualquer $T > 0$,

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq e^{C_0 T}\|z^1(0) - z^2(0)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.2-34}$$

onde $C_0 > 0$ é uma constante que depende dos dados iniciais.

Demonstração. Temos que $\mathcal{F}$ definida em (2.2-20), é contínua e localmente Lipschitziana pelo Lema 2.4 e $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contrações $e^{\mathcal{L}t}$ pelo Lema 2.3. Pelo Teorema 1.98, o problema de Cauchy (2.2-19) possui uma única solução generalizada

$$U(t) = e^{\mathcal{L}t}U_0 + \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)}\mathcal{F}(U(s))ds, \tag{2.2-35}$$

definida em $[0, t_{max})$. Mostraremos que $t_{max} = \infty$. De fato, no Lema 2.5 vimos que $(u(t), u_t(t), \eta^t)$ satisfaz

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (E(0) + C_{fh})\delta -_0^{-1}, \;\; \forall t \in [0, t_{max}),$$

com $E(t)$ decrescente. Assim, segue do Teorema 1.98 que $t_{max} = \infty$, provando (2.2-33). Agora, pelo Teorema 1.99 e pela Observação 1.100, se os dados iniciais $(u_0, u_1, \eta_0) \in D(\mathcal{L})$ então a solução é regular.

Sejam $z^1(t) = (u^1(t), u_t^1(t), \eta^{1,t})$ e $z^2(t) = (u^2(t), u_t^2(t), \eta^{2,t})$ duas soluções generalizadas de (2.2-15)-(2.2-18). Para todo $T > 0$ com $0 \leq t \leq T$ temos que

$$\begin{aligned} z^1(t) - z^2(t) &= e^{\mathcal{L}t} z_0^1 + \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} \mathcal{F}(z^1(s))ds - e^{\mathcal{L}t} z_0^2 - \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} \mathcal{F}(z^2(s))ds \\ &= e^{\mathcal{L}t}(z_0^1 - z_0^2) + \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)}(\mathcal{F}(z^1(s)) - \mathcal{F}(z^2(s)))ds. \end{aligned}$$

Disso, como $e^{\mathcal{L}t}$ é C_0- semigrpo de contrações pelo Lema 2.3, como $\mathcal{F}$ é localmente Lipschtziana pelo Lema 2.4 obtemos que

$$\begin{aligned} \|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} &= \left\| e^{\mathcal{L}t}(z_0^1 - z_0^2) + \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)}(\mathcal{F}(z^1(s)) - \mathcal{F}(z^2(s)))ds \right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \left\| e^{\mathcal{L}t}(z_0^1 - z_0^2) \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)}(\mathcal{F}(z^1(s)) - \mathcal{F}(z^2(s)))ds \right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \left\| e^{\mathcal{L}t} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| z_0^1 - z_0^2 \right\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \left\| e^{\mathcal{L}(t-s)} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \mathcal{F}(z^1(s)) - \mathcal{F}(z^2(s)) \right\|_{\mathcal{H}} ds \\ &\leq \left\| z_0^1 - z_0^2 \right\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \left\| z^1(s) - z^2(s) \right\|_{\mathcal{H}} ds \end{aligned}$$

E pelo Lema de Gronwall (Proposição 1.39)

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq e^{C_0 T} \left\| z^1(0) - z^2(0) \right\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para algum $C_0 T > 0$, finalizando a demonstração deste Teorema. □

Vamos provar a existência de solução fraca para o problema (2.2-15)-(2.2-18) por argumentos de densidade, utilizando o Teorema 2.6. Para isto, definiremos o que é uma solução fraca para este problema.

Definição 2.7. Com dados iniciais $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $h \in L^2(\Omega)$, uma função $z =$

$(u, u_t, \eta^t) \in C([t_0, T], \mathcal{H})$ é uma solução fraca de (2.2-15)-(2.2-18) se satisfaz a condição inicial $z_0 = (u_0, u_1, \eta_0)$ e

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\langle u_t, w\right\rangle_2 + \left\langle (1 - ak_0)\nabla u, \nabla w\right\rangle_2 + \left\langle bu_t, w\right\rangle_2 \\ + & \int_0^\infty g(s)\left\langle a\nabla\eta^t, \nabla w\right\rangle_2 ds + \left\langle f(u) - h, w\right\rangle_2 \\ = & \ 0, \end{aligned} \tag{2.2-36}$$

$$\left\langle \eta_t^t + \eta_s^t, \xi\right\rangle_{\mathcal{M}} = \left\langle u_t, \xi\right\rangle_{\mathcal{M}}, \tag{2.2-37}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$, $\xi \in \mathcal{M}$ e $t \in [0, T]$ quase sempre.

A partir de agora, consideraremos que f é Lipschitz.

Teorema 2.8. *O problema (2.2-15)-(2.2-18) possui uma solução fraca.*

Demonstração. Suponhamos que $z_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $h \in L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 1.82, $D(\mathcal{L})$, o domínio do operador $\mathcal{L}$, é denso em $\mathcal{H}$. Logo existe uma sequência $z_0^n = (u_0^n, u_1^n, \eta_0^n) \subset D(\mathcal{L})$ tal que

$$z_0^n \to z_0,$$

em $\mathcal{H}$.

Pelo Teorema 2.6, para cada n, temos uma solução regular $U^n = (u^n, u_t^n, \eta^n)$ do sistema (2.2-15)-(2.2-18). Disto segue que

$$u^n \in C^0([0,\infty); H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^n \in C^0([0,\infty); L^2(\Omega)),$$

$$\eta^n \in C^0([0,\infty); \mathcal{M}),$$

e as equações (2.2-19) e (2.2-20) são satisfeitas para quase todo $x \in \Omega$.

Vamos mostrar que a sequência (U^n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$.
Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, temos de $(2.2-19)$ que

$$\begin{aligned} \left\langle U_t^n - U_t^m, U^n - U^m\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \mathcal{L}(U^n) - \mathcal{L}(U^m), U^n - U^m\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \left\langle \mathcal{F}(U^n) - \mathcal{F}(U^m), U^n - U^m\right\rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U^m - U^n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle \mathcal{L}(U^n) - \mathcal{L}(U^m), U^n - U^m\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \langle \mathcal{F}(U^n) - \mathcal{F}(U^m), U^n - U^m\rangle_{\mathcal{H}}. \qquad (2.2\text{-}38)\end{aligned}$$

Mas, como $\mathcal{L}$ é linear, com um raciocino análogo ao usado no Lema 2.3 obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}(U^n) - \mathcal{L}(U^m), U^n - U^m\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \mathcal{L}(U^n - U^m), U^n - U^m\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Assim em (2.2-38) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U^m - U^n\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \langle \mathcal{F}(U^n) - \mathcal{F}(U^m), U^n - U^m\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|\mathcal{F}(U^n) - \mathcal{F}(U^m)\|_{\mathcal{H}} \|U^n - U^m\|_{\mathcal{H}}. \qquad (2.2\text{-}39)\end{aligned}$$

Mas,

$$\mathcal{F}(U^n) - \mathcal{F}(U^m) = (0, f(U^m) - f(U^n), 0)$$

então, por f ser Lipschitz

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(U^n) - \mathcal{F}(U^m)\|_{\mathcal{H}} &= \|f(U^m) - f(U^n)\|_2 \\ &\leq C' \|U^m - U^n\|_2 \\ &\leq C_1 \|U^m - U^n\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Substituindo em (2.2-39), vem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U^m - U^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|U^m - U^n\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Integrando obtemos

$$\|U^m(t) - U^n(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U_0^n - U_0^m\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\int_0^t C_1 \|U^n - U^m\|_{\mathcal{H}}^2\, ds.$$

Pela Desigualdade de Gronwall (Proposição 1.39),

$$\|U^m(t) - U^n(t)\|_{\mathcal{H}} \le \|U_0^n - U_0^m\|_{\mathcal{H}}\, e^{C_2}.$$

Portanto, (U^m) é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];\mathcal{H})$. Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, existe $z = (u, v, \eta)$ tal que

$$U^n \to z$$

em $\mathcal{H}$, ou seja, para todo $T > 0$,

$$u^n \to u \;\; em \;\; C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)), \tag{2.2-40}$$

$$u_t^n \to v \;\; em \;\; C^0([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{2.2-41}$$

$$\eta^n \to \eta \;\; em \;\; C^0([0,T]; \mathcal{M}). \tag{2.2-42}$$

Para $Q = [0,T] \times \Omega$, como o operador derivada é contínuo em $D'(Q)$, segue por (2.2-40) que

$$u_t^n \to u_t. \tag{2.2-43}$$

Mas, de (2.2-41) e pela unicidade do limite (no sentido fraco),

$$v = u_t. \tag{2.2-44}$$

Logo temos $z = (u, u_t, \eta)$. De (2.2-19) e (2.2-20), temos para cada n, que vale, para quase todo $x \in \Omega, t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} u_{tt}^n - div[(1 - a(x)k_0)\nabla u^n] \;&-\; \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla \eta^n(s)]ds + b(x)u_t^n \\ &=\; -f(u^n) + h(x), \end{aligned} \tag{2.2-45}$$

$$\eta_t^n = -\eta_s^n + u_t^n. \tag{2.2-46}$$

De (2.2-45), para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u_t^n, \phi\rangle_2 & + \langle (1-a(x)k_0)\nabla u^n, \nabla\phi\rangle_2 + \langle bu_t^n, \phi\rangle_2 \\ & + \int_0^\infty g(s)\,\langle a\nabla\eta^n, \nabla\phi\rangle_2\, ds + \langle f(u^n) - h, \phi\rangle_2 \\ = & \ 0.\end{aligned}$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e das convergências (2.2-40), (2.2-41) e (2.2-42), temos que vale (2.2-36).

Ainda, de (2.2-46), para cada $\xi \in \mathcal{M}$

$$\langle \eta_t^n + \eta_s^n, \xi\rangle_{\mathcal{M}} = \langle u_t^n, \xi\rangle_{\mathcal{M}}.$$

Novamente pela continuidade do operador derivada, obtemos de (2.2-42) que

$$\eta_t^n + \eta_s^n \to \eta_t + \eta_s,$$

donde

$$\langle \eta_t^n + \eta_s^n, \xi\rangle_{\mathcal{M}} \to \langle \eta_t + \eta_s, \xi\rangle_{\mathcal{M}}.$$

Por (2.2-43) e (2.2-44)

$$\langle u_t^n, \xi\rangle_{\mathcal{M}} \to \langle u_t, \xi\rangle_{\mathcal{M}}.$$

Portanto, pela unicidade do limite, concluímos

$$\langle \eta_t + \eta_s, \xi\rangle_{\mathcal{M}} = \langle u_t, \xi\rangle_{\mathcal{M}},$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

2.3 Existência de Atrator Global

A solução do problema (2.2-15)-(2.2-18) com dados iniciais em $\mathcal{H}$ gera um sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$. De fato, para cada $t \geq 0$, definamos

$$\begin{aligned} S(t) : \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ (u_0, u_1, \eta_0) &\mapsto S(t)(u_0, u_1, \eta_0) = (u(t), u_t(t), \eta^t), \end{aligned} \tag{2.3-47}$$

onde $z(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t) \in \mathcal{H}$ é a única solução de (2.2-15)-(2.2-18) com dados $z(0) = (u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$. Pela existência, unicidade, continuidade de solução e dependência contínua asseguradas pelo Teorema 2.6, temos que o par $(\mathcal{H}, S(t))$ é um sistema dinâmico.

Portanto, vamos estudar o comportamento da solução de (2.2-15)-(2.2-18) por meio da existência de um atrator global para o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$. Para provar a existência de um atrator global usaremos propriedades de sistemas dinâmicos e de sistemas quase estáveis conforme exposto na seção 1.6 do Capítulo 1.

O próximo resultado mostra que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ definido em (2.3-47) é gradiente.

Lema 2.9. *A energia E é uma função de Lyapunov estrita para o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ definido em (2.3-47). Além disso, $E(t) \to \infty$ se, e somente se, $\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}} \to \infty$, (quando $t \to \infty$).*

Demonstração. Seja $Y \subset \mathcal{H}$ um conjunto invariante do sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$. Consideremos $E(t) = \Phi(S(t)z)$ a energia ao longo da solução $S(t)z = (u(t), u_t(t), \eta^t)$.
Pelo Lema 2.5, $\Phi(S(t)z)$ é não crescente ao longo de cada solução $S(t)z$, ou equivalentemente, a aplicação $t \mapsto \Phi(S(t)z)$ é não crescente para qualquer $z \in Y$. Então, pela Definição 1.92, a energia $\Phi(z)$ é uma função de Lyapunov para o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ em Y.
Resta provarmos que Φ é uma função de Lyapunov estrita em Y, ou seja, mostrar que se para algum $z_0 \in Y$ tem-se:

$$\Phi(S(t)z_0) = \Phi(z_0), \ \ \forall t > 0 \Rightarrow S(t)z_0 = z_0, \ \ \forall t > 0.$$

Suponha que para algum dado inicial $z_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ temos

$$\Phi(S(t)z_0) = \Phi(z_0), \ \ \forall t > 0.$$

Então a energia ao longo do fluxo é constante, donde, $E'(t) = 0$.
Já vimos que

$$E'(t) = -\int_\Omega b|u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds, \quad \forall t \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega b|u_t|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $\displaystyle\int_\Omega b|u_t|^2 dx$ e $-\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds$ possuem o mesmo sinal, resulta que

$$\int_\Omega b|u_t|^2 dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, de $g'(s) \leq -\epsilon g(s), \ \ \forall s \geq 0$ (hipótese (H_3)), obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty g'(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds &\geq \int_0^\infty \epsilon g(s)\|\eta^t(s)\|_{V_a}^2 ds \\ &= \epsilon\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Portanto $\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = 0$ pois $\epsilon > 0$, o que implica, $\eta^t(x,s) = 0$, quase sempre em Ω para todo $t, s \geq 0$. Como $u_t = \eta_t + \eta_s$ segue que $u_t(x,t) = 0$ quase sempre em $\Omega, t \geq 0$.
Então,

$$S(t)z_0 = S(t)(u_0, u_1, \eta_0) = (u_0, 0, 0)$$

é um ponto fixo de $S(t)$. Provando que a energia E é uma função de Lyapunov estrita para o sistema dinâmico gerado por (2.2-15)-(2.2-18), isto é, definido por (2.3-47).

Provemos agora a segunda afirmação do lema.
Novamente pelo Lema 2.5,

$$\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}} \leq (E(t) + C_{fh})\delta_0^{-1}.$$

Consequentemente, $\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}} \to \infty$ implica $E(t) \to \infty$.

Por outro lado, denotemos

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (1 - a(x)k_0)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \int_\Omega (\hat{f}(u) - hu)dx \\ &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \end{aligned}$$

Como é válido

$$\frac{M^2}{2} \le M^2 \le 1 + \left(M^2\right)^2, \tag{2.3-48}$$

para todo $M \ge 0$, obtemos que

$$E_1 = \frac{\|u_t\|_2^2}{2} \le \left[1 + \left(\|u_t\|_2^2\right)^2\right]$$

e

$$E_3 = \frac{\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2}{2} \le \left[1 + \left(\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2\right)^2\right].$$

Por outro lado, de $a(x)k_0 \le \|a\|_\infty k_0 < \|a\|_\infty \|a\|_\infty^{-1} = 1$,

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2}\int_\Omega (1 - a(x)k_0)|\nabla u|^2 dx \\ &< \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx \\ &= \|\nabla u\|_2^2 \\ &\le \left[1 + \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Da desidualdade de Hölder e (2.3-48)

$$-\int_\Omega hu\, dx \le \left|\int_\Omega hu\, dx\right| \le C_1 \|h\|_2 \|\nabla u\|_2 \le C_2 \left[1 + \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right]$$

e, como f possui suporte compacto P,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \hat{f}(u)\, dx &= \int_\Omega \left[\int_0^u f(s)\, ds\right] dx \\ &\le \int_\Omega \left[\int_P f(s)\, ds\right] dx \\ &\le C_4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E_4 &= \int_\Omega (\hat{f}(u) - hu)dx \\ &\leq C_5 \left[1 + \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} E(t) &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \\ &\leq \left[1 + \left(\|u_t\|_2^2\right)^2\right] + \left[1 + \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right] + \left[1 + \left(\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2\right)^2\right] + C_5 \left[1 + \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right] \\ &\leq C \left[1 + \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2\right)^2\right] \\ &= C \left(1 + \left\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\right\|_{\mathcal{H}}^4\right), \end{aligned} \tag{2.3-49}$$

para todo $t \geq 0$ e algum $C > 0$. Concluindo que $E(t) \to \infty$ implica em $\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}} \to \infty$. □

Lema 2.10. *O conjunto das soluções estacionárias do problema (2.2-15)-(2.2-18) é limitado em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.9 (demonstração), sabemos que as soluções estacionárias de (2.2-15)-(2.2-18) são da forma

$$-div[(1 - a(x)k_0)\nabla u] + f(u) = h(x), \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Donde,

$$-\int_\Omega div[(1 - a(x)k_0)\nabla u]udx + \int_\Omega f(u)udx = \int_\Omega hudx, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3-50}$$

Da desigualdade de Hölder, desigualdade de Poincaré, $l_0 = 1 - k_0 \|a\|_\infty$ e de $f(u)u \geq -l_0\beta u^2 - \rho_f$ obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (1 - a(x)k_0) |\nabla u|^2 dx &\geq \int_\Omega l_0 |\nabla u|^2 dx \\ &= l_0 \|\nabla u\|_2^2, \end{aligned}$$

$$\int_\Omega hudx \leq \|h\|_2 \|u\|_2 \tag{2.3-51}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(u)u dx &\geq \int_\Omega \left(-l_0\beta u^2 - \rho_f\right) dx \\ &= -l_0\beta \int_\Omega u^2 dx - \rho_f |\Omega| \\ &\geq -\frac{l_0\beta}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2 - \rho_f |\Omega| . \end{aligned} \tag{2.3-52}$$

Como

$$-\int_\Omega div[(1-a(x)k_0)\nabla u]u dx = \int_\Omega (1-a(x)k_0) \mid \nabla u \mid^2 dx,$$

temos de (2.3-50), (2.3-51) e (2.3-52) que

$$l_0 \|\nabla u\|_2^2 - \frac{l_0\beta}{\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2 - \rho_f|\Omega| \leq \|h\|_2 \|u\|_2$$

ou seja,

$$l_0\left(1-\frac{\beta}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_2^2 \leq \rho_f|\Omega| + \|h\|_2\|u\|_2 . \tag{2.3-53}$$

Por outro lado, existe $k > 0$ tal que

$$\|h\|_2\|u\|_2 \leq k\|h\|_2\|\nabla u\|_2.$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{\lambda_1}{2l_0\lambda - 4\beta l_0}$ temos que $\epsilon > 0$ pois

$$\frac{1}{4\epsilon} = \frac{l_0}{2}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_1}\right)$$

e

$$\frac{l_0}{2}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_1}\right) > 0$$

uma vez que

$$\frac{\beta}{\lambda_1} < 1 \quad \text{e} \quad l_0 > 0.$$

Desta forma, pela desigualdade de Young com peso, Corolário 1.34

$$k\|h\|_2\|\nabla u\|_2 \leq \epsilon(k\|h\|_2)^2 + \frac{\|\nabla u\|_2^2}{4\epsilon}. \tag{2.3-54}$$

Portanto, de (2.3-53) e (2.3-54), temos

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq D,$$

onde $D = \dfrac{\rho_f |\Omega| + \epsilon(k \|h\|_2)^2}{\frac{l_0}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1}\right)}$, concluindo que toda solução estacionária é uniformemente limitada em $\mathcal{H}$. $\square$

Para a prova dos próximos lemas, suponhamos que $S(t)z^1 = (u(t), u_t(t), \eta^t)$ e $S(t)z^2 = (v(t), v_t(t), \xi^t)$ sejam duas soluções fracas do problema (2.2-15)-(2.2-18), com respectivos dados iniciais $z^1, z^2 \in B$, onde $B \subset \mathcal{H}$ é um conjunto limitado.
Nestas condições, consideraremos

$$w = u - v \; e \; \zeta = \eta - \xi.$$

Então (w, w_t, ζ) é uma solução fraca de

$$w_{tt} - div[(1 - ak_0)\nabla w] - \int_0^\infty g(s) div[a\nabla\zeta(s)]ds + bw_t = -f(u) + f(v), \quad (2.3\text{-}55)$$

$$\zeta_t = -\zeta_s + w_t, \quad (2.3\text{-}56)$$

onde as condições iniciais são

$$w(0) = u(0) - v(0), \;\; w_t(0) = u_t(0) - v_t(0), \;\; \zeta^0 = \eta^0 - \xi^0,$$

com condição de fronteira do tipo Dirichlet.

O funcional de energia é dado por

$$G(t) = \frac{1}{2}\|w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (1 - a(x)k_0)|\nabla w(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\left\|\zeta^t\right\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Como $0 < l_0 < 1$ e $\frac{1}{2}\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_{\mathcal{H}}^2 = G(t)$, obtemos

$$l_0 \left\|S(t)z^1 - S(t)z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2G(t) = \left\|S(t)z^1 - S(t)z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.3\text{-}57)$$

Além disso, multiplicando a equação (2.3-55) por w_t e integrando-a sobre Ω, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega w_t w_{tt} dx - \int_\Omega w_t div[(1-ak_0)\nabla w] dx \; &- \int_\Omega w_t \int_0^\infty g(s) div[a\nabla\zeta(s)] ds dx \\ &+ \int_\Omega b \mid w_t \mid^2 dx = \int_\Omega (-f(u)+f(v)) w_t dx.\end{aligned}$$

Com argumentos análogos aos usados na prova do Lema 2.9, usando a equação (2.3-56), temos que

$$G'(t) = -\int_\Omega b\,|w_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds + \int_\Omega (f(v)-f(u)) w_t dx. \quad (2.3\text{-}58)$$

A seguir, usaremos métodos de multiplicadores para obter propriedades de decaimento para $G(t)$. Por existir $\delta > 0$ tal que $a(x) + b(x) \geq \delta > 0, \ \forall x \in \Omega$ (veja hipótese (H_2)), podemos definir uma função por partes $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq \frac{\delta}{2}, & \text{se} \quad x \in a^{-1}([\frac{\delta}{2}, \infty]) \\ 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\delta}{2}, & \text{se} \quad x \in a^{-1}([\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{2}]) \\ \varphi(x) = 0, & \text{se} \quad x \in a^{-1}([0, \frac{\delta}{4}]) \end{cases} .$$

Desta definição, temos que $supp(\varphi) \subset supp(a)$. Como provado em [4] temos que

$$\varphi(x) + b(x) \geq \frac{\delta}{2}, \ \ \forall x \in \bar{\Omega}, \quad (2.3\text{-}59)$$

$$\int_\Omega (|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2) w^2 dx \leq \int_\Omega a(x)\,|\nabla w|^2\,dx, \quad (2.3\text{-}60)$$

$$\int_\Omega (|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)\,|\nabla w|^2\,dx \leq \int_\Omega a(x)\,|\nabla w|^2\,dx. \quad (2.3\text{-}61)$$

Definiremos os seguintes funcionais:

$$\phi(t) = \int_\Omega w(t) w_t(t)\, dx,$$

$$\psi(t) = -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) w_t(t) \zeta^t(s)\, dx ds$$

e

$$\tilde{G}(t) = MG(t) + \mu\phi(t) + \psi(t),$$

onde $\mu, M > 0$ são constantes a serem fixadas.

Lema 2.11. *Para M suficientemente grande, existem $\beta_1, \beta_2 > 0$ tais que*

$$\beta_1 G(t) \leq \tilde{G}(t) \leq \beta_2 G(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.3-62}$$

Demonstração. Pelas desigualdades de Young e Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}
\mu\phi(t) &= \mu\left(\int_\Omega w(t)w_t(t)\,dx\right) \\
&\leq \frac{\mu}{2}\left(\int_\Omega w(t)^2dx + \int_\Omega w_t(t)^2dx\right) \\
&= \frac{\mu}{2}\left(\|w\|_2^2 + \|w_t\|_2^2\right) \\
&\leq k\left(\|\nabla w\|_2^2 + \|w_t\|_2^2\right) \\
&\leq k_1\left(\int_\Omega (1 - a(x)k_0)\,|\nabla w(t)|^2\,dx + \|w_t\|_2^2\right).
\end{aligned} \tag{2.3-63}$$

Das desigualdades de Hölder e (2.3-60), temos

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \varphi(x)w_t(t)\zeta^t(s)\,dxds \\
&\leq \int_0^\infty g(s)\left(\int_\Omega |\ \varphi(x)\zeta^t(s)\ |^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\|w_t\|_2\,ds \\
&\leq k_2\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\left|\nabla\zeta^t(s)\right|^2 dxds \\
&= k_2\int_0^\infty g(s)\left\|\zeta^t\right\|_{V_a}^2 ds \\
&= k_2\left\|\zeta^t\right\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned} \tag{2.3-64}$$

Segue de (2.3-63) e (2.3-64), que existe $\beta_0 > 0$ tal que

$$|\mu\phi(t) + \psi(t)| \leq \beta_0 G(t).$$

Então, basta tomarmos M tal que $\beta_1 = M - \beta_0 > 0$ e $\beta_2 = M + \beta_0 > 0$ para concluirmos que

$$\beta_1 G(t) \leq \tilde{G}(t) \leq \beta_2 G(t), \quad \forall t \geq 0.$$

□

Lema 2.12. *Existe uma constante $C_1 > 0$, independente de t e B e $C_0 > 0$ dependente de B,* *tal que*

$$\begin{aligned} \phi'(t) \leq & - G(t) - \frac{l_0}{4}\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2 + \frac{3}{2}\left\|w_t(t)\right\|_2^2 + C_1\int_\Omega b(x)\left|w_t(t)\right|^2 dx \\ & - C_1\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta(s)\right\|_{V_a}^2 ds + C_0\left\|w(t)\right\|_4^2, \end{aligned} \tag{2.3-65}$$

onde $l_0 = 1 - k_0\|a\|_\infty > 0$*, como definido em (2.1-10).*

Demonstração. Segue da definição de ϕ que

$$\phi'(t) = \|w_t\|_2^2 + \int_\Omega w w_{tt}\, dx.$$

De (2.3-55),

$$\begin{aligned} \int_\Omega w w_{tt}\, dx &= -\int_\Omega (1 - a(x)k_0)\nabla w^2 dx - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a\nabla\zeta\nabla w\, dxds \\ &- \int_\Omega b(x) w_t w\, dx - \int_\Omega (f(u) - f(v)) w\, dx. \end{aligned}$$

Então, pela definição de $G(t)$,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -G(t) + \frac{3}{2}\|w_t\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (1 - a(x)k_0)\left|\nabla w\right|^2 dx - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\zeta\nabla w\, dxds \\ &- \int_\Omega b(x) w w_t\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds - \int_\Omega \left(f(u) - f(v)\right) w\, dx. \end{aligned} \tag{2.3-66}$$

Mas, da desigualdade de Young, temos que

$$-\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\zeta\nabla w\, dxds \leq \frac{l_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 + C_{l_0}\int_0^\infty g(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds \tag{2.3-67}$$

e

$$-\int_\Omega b(x) w w_t\, dx \leq \frac{l_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 + C_{l_0}\|b\|_\infty\int_\Omega b(x)\left|w_t\right|^2 dx, \tag{2.3-68}$$

para algum $C_{l_0} > 0$.

Por outro lado, segue da desigualdade de Hölder, da hipótese (H_4), do Lema 2.5 e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f(u) - f(v))\, w \, dx &\leq \int_\Omega C\left(1 + |u|^2 + |v|^2\right) |u - v|\, |w|\, dx \\
&= \int_\Omega C\left(1 + |u|^2 + |v|^2\right) |w|^2\, dx \\
&\leq C(1 + \|u\|_4^2 + \|v\|_4^2)\, \|w\|_4^2 \\
&\leq C_0\, \|w\|_4^2, \qquad (2.3\text{-}69)
\end{aligned}$$

para algum $C_0 > 0$ dependendo de B.
E, como $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (1 - a(x)k_0) \mid \nabla w \mid^2 \, dx \leq -\dfrac{l_0}{2}\, \|\nabla w\|_2^2$, concluímos pelas desigualdades (2.3-66)-(2.3-69) que

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &\leq -G(t) - \frac{l_0}{4}\, \|\nabla w\|_2^2 + \frac{3}{2}\, \|w_t\|_2^2 + C_0\, \|w\|_4^2 + C_{l_0}\, \|b\|_\infty \int_\Omega b(x)\, |w_t|^2\, dx \\
&- \frac{C_{l_0}}{\epsilon} \int_0^\infty g'(s) \left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds - \frac{1}{2\epsilon}\int_0^\infty g'(s)\, \|\zeta(s)\|_{V_a}^2\, ds,
\end{aligned}$$

uma vez que $g'(s) \leq -\epsilon g(s)$ com $\epsilon > 0$. Portanto, segue o desejado em (2.3-64). □

Lema 2.13. *Dado $r > 0$ existe $C_{0,r} > 0$ dependendo de r e de B, tal que*

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq -k_0 \int_\Omega \varphi(x)\, |w_t(t)|^2\, dx + r\, \|\nabla w(t)\|_2^2 + \frac{k_0\delta}{4}\, \|w_t(t)\|_2^2 \\
&+ \int_\Omega b(x)\, |w_t(x)|^2\, dx - C_{0,r} \int_0^\infty g'(s) \left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds, \qquad (2.3\text{-}70)
\end{aligned}$$

onde $\delta > 0$ é definido em (2.1-7).

Demonstração. Pela definição de ψ, temos que

$$\psi'(t) = -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) w_t \zeta_t^t \, dxds - \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) w_{tt} \zeta^t \, dxds. \qquad (2.3\text{-}71)$$

Denotemos

$$I_1 = -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) w_t \zeta_t^t \, dxds$$

e

$$I_2 = -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) w_{tt} \zeta^t \, dxds.$$

Da equação (2.3-56), $\zeta_t^t = -\zeta_s^t + w_t$. Logo,

$$I_1 = \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) w_t \zeta_s^t \, dxds - \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) |w_t|^2 \, dxds.$$

Integrando a igualdade acima por partes e aplicando as desigualdades de Hölder, Young e (2.3-60) desigualdade, obtemos que:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_\Omega \varphi(x) w_t \int_0^\infty g'(s) \zeta^t \, dsdx - \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) |w_t|^2 \, dxds \\ &\leq -\int_0^\infty g'(s) \|w_t(t)\|_2 \left\|\varphi \zeta^t(s)\right\|_2 ds - k_0 \int_\Omega \varphi(x) |w_t|^2 \, dx \\ &\leq \frac{k_0 \delta}{4} \|w_t\|_2^2 - D_0 \int_0^\infty g'(s) \left\|\zeta^t\right\|_{V_a}^2 ds - k_0 \int_\Omega \varphi |w_t|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{2.3-72}$$

Por outro lado, (2.3-55), I_2 pode ser escrita como

$$I_2 = I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3} + I_{2,4} \tag{2.3-73}$$

onde,

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi \zeta^t [f(u) - f(v)] \, dxds, \\ I_{2,2} &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi \zeta^t b w_t \, dxds, \\ I_{2,3} &= -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) \zeta^t div[(1 - a(x)k_0)\nabla w] \, dxds \end{aligned}$$

e

$$I_{2,4} = -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi(x) \zeta^t \int_0^\infty g(\tau) div[a \nabla \zeta^t(\tau)] d\tau \, dxds.$$

Assumimos na hipótese (H_1) que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V_a(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Na Observação 2.2 da hipótese (H_4) vimos que

$$|f(u) - f(v)| \leq C(1 + |u|^2 + |v|^2) |u - v|$$

Disso, do fato de $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, pelas desigualdades Young com $r_1 > 0$ e (2.3-60) e de

$g'(s) \leq -\epsilon g(s)$

$$\begin{aligned}
I_{2,1} &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi\zeta^t [f(u) - f(v)]\, dxds, \\
&\leq \infty \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi\zeta^t [C(1+ \mid u \mid^2 + \mid v \mid^2)] w\, dxds \\
&\leq k \int_0^\infty g(s) ds \left\| \varphi\zeta^t \right\|_2 \|w\|_6 \left(C(1 + \|u\|_6^2 + \|v\|_6^2 \right) ds \\
&\leq k \|\nabla w\|_2 [C(1 + \|u\|_6^2 + \|v\|_6^2)] \int_0^\infty g(s) \left\| \zeta^t \right\|_{V_a}^2 ds \\
&\leq \frac{r_1}{2} \|\nabla w\|_2^2 - C(r_1) \int_0^\infty g'(s) \left\| \zeta^t \right\|_{V_a}^2 ds. \qquad (2.3\text{-}74)
\end{aligned}$$

De $g'(s) \leq -\epsilon g(s)$, aplicando as desigualdades de Hölder, Young e (2.3-60), obtemos que

$$\begin{aligned}
I_{2,2} &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi\zeta^t b w_t\, dxds, \\
&\leq \int_0^\infty g(s) \left(\int_\Omega (\varphi\zeta^t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (b w_t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_0^\infty g(s) \left\| \varphi\zeta^t \right\|_2 \left\| b^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty \left\| b^{\frac{1}{2}} w_t \right\|_2 ds \\
&\leq \int_\Omega b\, |w_t|^2\, dx - C_2 \int_0^\infty g'(s) \left\| \zeta^t \right\|_{V_a}^2 ds. \qquad (2.3\text{-}75)
\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades (2.3-60) e (2.3-61) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\varphi\zeta^t) \mid^2 dx &\leq 2 \int_\Omega (\mid \varphi \mid^2 + \mid \nabla\varphi \mid^2)(\mid \zeta^t \mid^2 + \mid \nabla\zeta^t \mid^2) dx \\
&= 2 \int_\Omega (\mid \varphi \mid^2 + \mid \nabla\varphi \mid^2) \mid \zeta^t \mid^2 dx + 2 \int_\Omega (\mid \varphi \mid^2 + \mid \nabla\varphi \mid^2) \mid \nabla\zeta^t \mid^2) dx \\
&\leq 2 \int_\Omega a(x) \mid \nabla\zeta^t(s) \mid^2 dx + 2 \int_\Omega a(x) \mid \nabla\zeta^t(s) \mid^2 dx \\
&= 4 \left\| \zeta^t \right\|_{V_a}^2. \qquad (2.3\text{-}76)
\end{aligned}$$

Integrando por partes $I_{2,3}$, aplicando a desigualdade de Young com $r_3 > 0$ e (2.3-76), concluímos que

$$\begin{aligned} I_{2,3} &= -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \varphi(x)\zeta^t div[(1-a(x)k_0)\nabla w]\,dxds \\ &\le \int_0^\infty g(s)\int_\Omega \nabla(\varphi\zeta^t)\nabla w\,dxds \\ &\le \frac{r_3}{2}\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \mid \nabla w\mid^2 dxds + \frac{C_{r_3}}{2}\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \mid \nabla(\varphi\zeta^t)\mid^2\, dxds \\ &\le \frac{r_3}{2}\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \mid \nabla w\mid^2\, dxds + \frac{C_{r_3}}{2}\int_0^\infty g(s)\left(4\int_\Omega a(x)\mid \nabla\zeta^t(s)\mid^2 dx\right)ds \\ &\le \frac{r_3}{2}\|\nabla w\|_2^2 - C(r_3)\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t\right\|_{V_a}^2 ds, \end{aligned} \tag{2.3-77}$$

uma vez que, $g'(s)\le -\epsilon g(s)$.

Por último, usando a integração por partes a desigualdade de Young e (2.3-76)

$$\begin{aligned} I_{2,4} &= -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \varphi\zeta^t\int_0^\infty g(\tau)div[a\nabla\zeta^t]\,d\tau\,dx\,ds \\ &= \int_0^\infty g(s)\int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla\varphi\zeta^t a(x)\nabla\zeta^t\,dx\,d\tau\,ds \\ &\le \int_0^\infty g(s)\int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\zeta^t(s)\right|^2+\frac{1}{2}a^2(x)\left|\nabla\zeta^t(\tau)\right|^2\right]dx\,d\tau\,ds \\ &\le \frac{5k_0}{2}\int_0^\infty g(s)\int_\Omega\left(a(x)\left|\nabla\zeta^t\right|^2\right)dxds. \end{aligned}$$

Pelo que acabamos de ver, juntamente com $g'(s)\le -\epsilon g(s)$, segue que

$$I_{2,4}\le -C_4\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds. \tag{2.3-78}$$

Portanto, substituindo (2.3-72), (2.3-74), (2.3-75), (2.3-77) e (2.3-78) em (2.3-71) e escolhendo r_1, r_3 tal que $\dfrac{r_1}{2}+\dfrac{r_3}{2}<r$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) \;\le\; & -k_0\int_\Omega \varphi(x)\left|w_t(t)\right|^2 dx + r\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2 + \frac{k_o\delta}{4}\left\|w_t(t)\right\|_2^2 \\ + & \int_\Omega b(x)\left|w_t(x)\right|^2 dx - C_{0,r}\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds, \end{aligned}$$

com $C_{0,r}=D_0+C_{(r_1)}+C_2+C_{r_3}+C_4>0$, o que conclui a prova de (2.3-70).

□

Lema 2.14. *Existe uma contante $C_0 > 0$ dependendo de B, tal que*

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega (f(u) \quad &- \quad f(v))w_t dxds \leq C_0 e^{\gamma t}\sup_{0<s<t}\|w(s)\|_4^2 \\ &+ \quad C_0\int_0^t (\|u_t(s)\|_2 + \|v_t(s)\|_2)e^{\gamma s}G(s)ds, \end{aligned} \tag{2.3-79}$$

onde γ é uma constante positiva.

Demonstração. Primeiramente, observamos que

$$\begin{aligned} &\int_0^t \quad e^{\gamma s}\int_\Omega (f(u) - f(v))w_t\, dxds \\ = \quad &\frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega \frac{d}{ds}|w(s)|^2\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\, dxds \\ = \quad &\frac{e^{\gamma s}}{2}\int_\Omega\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\,|w(s)|^2\,dx\Big|_0^t \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{d}{ds}\left(e^{\gamma s}\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\right)|w(s)|^2\,dxds \\ = \quad & I_3 + I_4 \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \quad \int_\Omega\int_0^t \frac{d}{ds}\left[\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s)))d\lambda \mid w(s)\mid^2\right]dsdx \\ = \quad &\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{d}{ds}\left(e^{\gamma s}\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\right)|w(s)|^2\,dxds \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega \frac{d}{ds}|w(s)|^2\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\, dxds. \end{aligned}$$

De $|f(u)-f(v)| \leq C(1+|u|^2+|v|^2)\,|u-v|$ (Observação 2.2) aplicando a desigualdade de Hölder e do fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$

$$\begin{aligned} I_3 \quad &= \quad \frac{e^{\gamma s}}{2}\int_\Omega\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\,|w(s)|^2\,dx\Big|_0^t \\ &\leq \quad \frac{1}{2}\sup_{0<s<t} e^{\gamma s}\int_\Omega |(f(u)-f(v))| \mid w(s)\mid dx \\ &\leq \quad \frac{1}{2}\sup_{0<s<t} e^{\gamma s}\int_\Omega C(1+|u|^2+|v|^2)\,|w(s)|^2\,dx \\ &\leq \quad e^{\gamma t}C_{0,1}\sup_{0<s<t}\|w\|_4^2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_{0,1} > 0$ dependendo de B.

Agora, note que

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \frac{d}{ds}\left(e^{\gamma s}\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s))d\lambda\right)|w(s)|^2\,dxds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \gamma e^{\gamma s}\int_\Omega\int_0^1 f'(v(s)+\lambda(u(s)-v(s)))d\lambda|w(s)|^2dxds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega\int_0^1 f''(v(s)+\lambda(u(s)-v(s)))(v_t+\lambda(u_t-v_t))d\lambda\,|w(s)|^2\,dxds \\
&= I_{4,1}+I_{4,2}.
\end{aligned}$$

Com mesmo raciocínio usado em I_3 existe $C_{0,2}$ dependente de B tal que

$$I_{4,1} \leq C_{0,2}e^{\gamma t}\sup_{0<s<t}\|w\|_4^2\,.$$

Com auxilio da desigualdade de Hölder e da hipótese (H_4), obtemos

$$\begin{aligned}
I_{4,2} &= -\frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega\int_0^1 f"(v(s)+\lambda(u(s)-v(s)))(v_t+\lambda(u_t-v_t))d\lambda\,|w(s)|^2\,dxds \\
&\leq \left|-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega\int_0^1 f"(v(s)+\lambda(u(s)-v(s)))(v_t+\lambda(u_t-v_t))d\lambda\,|w(s)|^2\,dxds\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega\int_0^1 C_f(1+|v+\lambda(u-v)|)(v_t+\lambda(u_t-v_t))d\lambda\,|w|^2\,dxds \\
&\leq d\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega (1+\mid u\mid+\mid v\mid)(\mid u_t\mid+\mid v_t\mid)\mid w\mid^2\,dxds \\
&\leq d_1\int_0^t e^{\gamma s}(1+\|u\|_6+\|v\|_6)(\|u_t\|_2+\|v_t\|_2)\,\|w\|_6^2\,ds \\
&\leq d_2\int_0^t e^{\gamma s}(\|u_t(s)\|_2+\|v_t(s)\|_2)\,\|\nabla w\|_2^2\,ds \\
&\leq C_{0,3}\int_0^t e^{\gamma s}(\|u_t(s)\|_2+\|v_t(s)\|_2)G(s)ds,
\end{aligned}$$

para alguma $C_{0,3} > 0$ dependendo de B.

Portanto, considerando $\dfrac{C_0}{2} \geq max\{C_{0,1}, C_{0,2}, C_{0,3}\}$, temos o desejado em (2.3-79).

□

Lema 2.15. *Considere B um conjunto limitado que seja positivamente invariante sobre $\mathcal{H}$ com respeito ao sistema dinâmico definido em (2.3-47). Então, dado $q < \frac{k_0\delta}{2}$ existe uma constante $K_{0,q}$ tal que*

$$\int_0^t \|u_t(s)\|_2 \, ds \leq qt + K_{0,q}, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.3-80}$$

para qualquer solução $(u(t), u_t(t), \eta^t) = S(t)z$ do problema (2.2-15)-(2.2-18), com dado inicial $z \in B$.

Demonstração. Definamos o funcional

$$J(t) = NE(t) + \mathcal{X}(t),$$

onde:

- $E(t)$ foi definida em (2.2-29);
- $\mathcal{X}(t) = -\displaystyle\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi u_t(t)\eta^t(s)dxds;$
- N é uma constante a ser escolhida.

Já sabemos por (2.3-49), que

$$E(t) \leq C\left(1 + \|(u, u_t, \eta^t)\|_{\mathcal{H}}^4\right), \quad \forall t \geq 0.$$

E, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(t) &= -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi u_t(t)\eta^t(s)dxds \\
&\leq \int_0^\infty g(s) \|u_t(t)\|_2 \left\|\varphi\eta^t(s)\right\|_2 ds \\
&\leq \|u_t(t)\|_2 \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \left|\nabla\eta^t\right|^2 dx \, ds \\
&\leq \left\|u(s), u_t(s), \eta^t(s)\right\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

Logo, como $\|u(s), u_t(s), \eta^t(s)\|_{\mathcal{H}}$ é limitado em B, vem que

$$| \ J(t) \ | \leq C_{0,N}, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.3-81}$$

para alguma constante $C_{0,N} > 0$.

Dado $q > 0$ existe uma constante $C_{0,q} > 0$ tal que

$$\mathcal{X}'(t) \leq -k_0 \int_\Omega \varphi \left| u_t \right|^2 dx + \int_\Omega b \left| u_t \right|^2 dx + q^3 - C_{0,q} \int_0^\infty g'(s) \left\| \eta^t(s) \right\|_{V_a}^2 ds. \quad (2.3\text{-}82)$$

De fato, pela definição de $\mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}'(t) &= -\int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi u_t \eta_t^t \, dxds - \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi u_{tt} \eta^t \, dxds \\ &= I_1' + I_2'. \end{aligned}$$

De (2.2-15) e (2.2-16), temos

$$\begin{aligned} \eta_t^t &= \eta_s^t + u_t, \\ u_{tt} &= div[(1 - a(x)k_0)\nabla u] + \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla \eta^t(s)] \, ds - b(x)u_t - f(u) + h. \end{aligned}$$

Análogo à (2.3-73), consideremos $I_2' = I_{2,1}' + I_{2,2}' + I_{2,3}' + I_{2,4}'$. Com o mesmo raciocínio utilizado no Lema 2.13, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} I_1' &\leq \frac{q_1}{3} - C_{0,q_1} \int_0^\infty g'(s) \left\| \eta^t(s) \right\|_{V_a}^2 ds - k_0 \int_\Omega \varphi \mid u_t \mid^2 dx; \\ I_{2,2}' &\leq \int_\Omega b \mid u_t \mid^2 dx - C_2 \int_0^\infty g'(s) \left\| \eta^t(s) \right\|_{V_a}^2 ds; \\ I_{2,3}' &\leq \frac{q_3}{3} - C_{0,q_3} \int_0^\infty g'(s) \left\| \eta^t(s) \right\|_{V_a}^2 ds; \\ &e \\ I_{2,4}' &\leq -C_4 \int_0^\infty g'(s) \left\| \eta^t(s) \right\|_{V_a}^2 ds. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar $I_{2,1}'$. Aplicando a desigualdade de Hölder e do fato de φ ser contínua com domínio compacto, obtemos

$$\begin{aligned} I_{2,1}' &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \varphi \eta^t [-f(u) + h] dxds \\ &\leq \int_0^\infty g(s) \left\| \varphi \eta^t \right\|_2 \left(\int_\Omega (f(u) - h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Minkowski

$$\left(\int_\Omega (f(u) - h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega f(u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \|h\|_2$$

e

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega f(u)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega |f(u)-f(0)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_\Omega (C[1+|u|^2]|u|)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq k\,\|u\|_6^3.\end{aligned}$$

Como $\|\varphi\|_\infty (1+\|u\|)_6^3$ é uniformemente limitado com respeito a t, pois B é invariante, concluímos que

$$I'_{2,4} \leq \frac{q_4^3}{3} - C_{0,q_4}\int_0^\infty g'(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds.$$

Consideremos $N = max\{k_0+1,\ 2C_{0,q}\}$. De (2.3-82), (2.3-59) e (2.2-32) temos

$$\begin{aligned}J'(t) &= NE'(t)+\mathcal{X}'(t)\\ &\leq -k_0\int_\Omega (b(x)+\varphi)\,|u_t(t)|^2\,dx + q^3\\ &\leq -q\,\|u_t\|_2^2 + q^3\end{aligned}$$

onde $q < \dfrac{k_0\delta}{2}$. Mas, segue da desigualdade de Young que

$$\|u_t\|_2 \leq \frac{q}{2} + \frac{1}{2q}\|u_t\|_2^2.$$

Com isso,

$$J'(t) \leq -2q^2\,\|u_t\|_2 + 2q^3.$$

Portanto, integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre $(0,t)$ e usando (2.3-81), obtemos

$$J(t)-J(0) \leq -2q^2\int_0^t \|u_t(s)\|_2\,ds + 2q^3t, \tag{2.3-83}$$

ou seja,

$$\int_0^t \|u_t(s)\|_2\,ds \leq qt + K_{0,q}\ \ \forall t\geq 0,$$

onde $K_{0,q} = \dfrac{C_{0,N}}{q^2}$.

$\square$

Lema 2.16. *Dado um conjunto limitado $B \subset \mathcal{H}$, suponha que as hipóteses $(H_1) - (H_4)$ são satisfeitas e que $h \in L^2(\Omega)$. Sejam $S(t)z^1 = (u(t), u_t(t), \eta^t)$ e $S(t)z^2 = (v(t), v_t(t), \xi^t)$ duas soluções fracas do problema (2.2-15)-(2.2-18) com dados iniciais $z^1, z^2 \in B$, respectivamente. Então existem constantes positivas θ, b_0, C_B, dependentes de B porém, não de t, tais que*

$$\begin{aligned} \left\|S(t)z^1 - S(t)z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq b_0 e^{-\theta t}\left\|z^1 - z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ C_B e^{\theta t} \sup_{0<s<t} \|u(s) - v(s)\|_4^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3-84}$$

Demonstração. Fixemos $\mu \in (0,1)$ e $\nu > 0$ tais que

$$\mu \leq \frac{k_0 \delta}{6} \ \text{ e } \ \nu < \frac{\mu l_0}{4}.$$

Pelos Lemas 2.12 e 2.13 com $r < \frac{\nu l_0}{4}$, temos:

$$\begin{aligned} \mu\phi'(t) + \psi'(t) &= -\mu G(t) - \mu\frac{l_0}{4}\|\nabla w(t)\|_2^2 + \mu\frac{3}{2}\|w_t(t)\|_2^2 \\ &+\mu C_1 \int_\Omega b(x)\,|w_t(t)|^2\,dx - \mu C_1 \int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds + \mu C_0 \|w(t)\|_4^2 \\ &-k_0 \int_\Omega \varphi(x)\,|w_t(t)|^2\,dx + r\|\nabla w(t)\|_2^2 + \frac{k_0\delta}{4}\|w_t(t)\|_2^2 \\ &+\int_\Omega b(x)\,|w_t(x)|^2\,dx - C_{0,r}\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds \\ &\leq -\mu G(t) + \frac{k_0\delta}{2}\|w_t\|_2^2 - k_0\int_\Omega \varphi(x)|w_t|^2 dx \\ &+(C_1+1)\int_\Omega b(x)|w_t|^2 dx - (C_1 + C_\nu)\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds \\ &+C_0\|w\|_4^2. \end{aligned} \tag{2.3-85}$$

Em $\tilde{G}(t) = MG(t) + \mu\phi(t) + \psi(t)$, escolhemos $M > 0$ tal que

$$M \geq max\{\beta_0, C_1 + 1 + k_0, 2(C_1 + C_\nu)\}.$$

Além disso, de (2.3-58) temos

$$G'(t) = -\int_\Omega b(x)|w_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds + \int_\Omega (f(v) - f(u))w_t\,dx.$$

Disso e de (2.3-85) obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{G}'(t) &= MG'(t) + \mu\phi'(t) + \psi'(t) \\
&\leq M\left(-\int_\Omega b(x)|w_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds + \int_\Omega (f(v) - f(u))w_t\, dx\right) \\
&\quad -\mu G(t) + \frac{k_0\delta}{2}\left\|w_t\right\|_2^2 - k_0\int_\Omega \varphi(x)|w_t|^2 dx + (C_1+1)\int_\Omega b(x)|w_t|^2 dx \\
&\quad -(C_1 + C_\nu)\int_0^\infty g'(s)\left\|\zeta^t(s)\right\|_{V_a}^2 ds + C_0\left\|w\right\|_4^2 \\
&\leq -\mu G(t) - k_0\int_\Omega (\varphi(x) + b(x))\left|w_t\right|^2 dx + \frac{k_0\delta}{2}\left\|w_t\right\|_2^2 \\
&\quad +C_0\left\|w(t)\right\|_4^2 + M\int_\Omega (f(v) - f(u))w_t\, dx.
\end{aligned}$$

E, por $\varphi(x) + b(x) \geq \dfrac{\delta}{2} > 0, \ \forall x \in \bar{\Omega}$,

$$\tilde{G}'(t) \leq -\mu G(t) + Z(t), \ \ \forall t \geq 0,$$

onde, para algum $C_0 > 0$,

$$Z(t) = C_0\left\|w(t)\right\|_4^2 + M\int_\Omega (f(v) - f(u))w_t\, dx. \tag{2.3-86}$$

Combinando isto com o Lema 2.11, obtemos

$$\tilde{G}'(t) \ \ \leq \ \ -\frac{\mu}{\beta_2}\tilde{G}(t) + Z(t), \ \ \forall t \geq 0.$$

Consideremos $\gamma = \dfrac{\mu}{\beta_2}$. Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\gamma t}$ e integrando, obtemos

$$\tilde{G}(t) \leq \tilde{G}(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}Z(s)ds, \ \ \forall t \geq 0. \tag{2.3-87}$$

Novamente pelo Lema 2.11, juntamente com (2.3-86)

$$\beta_1 G(t) \leq \beta_2 G(0)e^{-\gamma t} + C_0\sup_{0<s<t}\left\|w(s)\right\|_4^2 + Me^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s}\int_\Omega (f(v) - f(u))w_t\, dxds.$$

Agora do Lema 2.14, para algum $C_0' > 0$

$$e^{\gamma t}G(t) \leq C_0'G(0) + C_0'e^{\gamma t}\sup_{0<s<t}\left\|w(s)\right\|_4^2 + C_0'\int_0^t e^{\gamma s}G(s)(\left\|u_t(s)\right\|_2 + \left\|v_t(s)\right\|_2)ds,$$

e aplicando a Proposição 1.39 para $e^{\gamma t}G(t)$

$$e^{\gamma t}G(t) \leq C_0'\left(G(0)+e^{\gamma t}\sup_{0<s<t}\|w(s)\|_4^2\right)exp\left(C_0'\int_0^t(\|u_t(s)\|_2+\|v_t(s)\|_2)ds\right).$$

Por outro lado, podemos escolher μ pequeno no Lema 2.15, tal que

$$C_0'\int_0^t(\|u_t(s)\|_2+\|v_t(s)\|_2)ds \leq \frac{\gamma t}{2}+C_k,$$

donde, finalmente obtemos:

$$G(t) \leq (C_0'e^{C_k})e^{-\frac{\gamma}{2}t}G(0)+(C_0'e^{C_k})e^{\frac{\gamma}{2}t}\sup_{0<s<t}\|w(s)\|_4^2.$$

Portanto, como $l_0\left\|S(t)z^1-S(t)z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2G(t) \leq \left\|S(t)z^1-S(t)z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2$, concluímos

$$\begin{aligned}\left\|S(t)z^1-S(t)z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{2G(t)}{l_0}\\ &\leq b_0e^{-\theta t}\left\|z^1-z^2\right\|_{\mathcal{H}}^2+C_Be^{\theta t}\sup_{0<s<t}\|u(s)-v(s)\|_4^2,\end{aligned}$$

onde $\theta=\dfrac{\gamma}{2}$, $b_0=\dfrac{C_0'e^k}{l_0}$ e $C_B=\dfrac{2C_0'e^k}{l_0}$, provando o desejado □

Teorema 2.17. *Suponha que as hipóteses* $(H_1)-(H_4)$ *são satisfeitas e que* $h\in L^2(\Omega)$. *Então, o sistema dinâmico* $(\mathcal{H},S(t))$ *gerado pelo problema (2.2-15)-(2.2-18) é gradiente e possui um atrator global* A*, com dimensão fractal finita, o qual é dado pela variedade instável* $\mathbb{M}^u(\mathcal{N})$ *do conjunto das soluções estacionárias* $\mathcal{N}$ *de (2.2-15)-(2.2-18).*

Demonstração. O Lema 2.16 juntamente com a desigualdade (2.2-34), já provada no Teorema 2.6, mostram que o sistema dinâmico $(\mathcal{H},S(t))$ gerado pela sistema (2.2-15)-(2.2-18) é quase estável onde $X=H_0^1(\Omega)$, $Y=L^2(\Omega)$, $Z=\mathcal{M}$ e com $n_X=\|.\|_4$ como seminorma compacta em X, pois a imersão $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ é compacta para $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Pelo Teorema 1.95, temos que $(\mathcal{H},S(t))$ é assintoticamente suave. Agora, como provado nos Lemas 2.9 e 2.10 o sistema dinâmico $(\mathcal{H},S(t))$ é gradiente e o conjunto $\mathcal{N}$ de pontos estacionários de $(\mathcal{H},S(t))$ é limitado então, segue do Teorema 1.93 que este sistema possui um atrator global A caracterizado por $\mathbb{M}^u(\mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}$ é o conjunto de pontos fixos de $S(t)$. Novamente pelo Teorema 1.95, a dimensão fractal de $A=\mathbb{M}^u(\mathcal{N})$ é finita, finalizando a prova deste resultado. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Pure and Applied Mathematics. , Academic Press, INC., 1975.

[2] BREZIS, H.,**Functional Analysis, Sobolrv Spaces and Partial Differential eqations**. Springer, New York, 2011.

[3] CAVALCANTI, M. M., AND CAVALCANTI, V. N. D.**Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.** Eduem, Maringá, PR, 2009.

[4] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., LASIECKA, I. AND NASCIMENTO, F. A. F. **Intrinsic decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipative effects.** Discrete Contin. Dyns. Syst. Ser. B 19, 2014 (1987-2011).

[5] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., AND KOMORNIK, V. **Introdução a Análise Funcional.** Eduem, Maringá, PR, 2011.

[6] CAVALCANTI, M. M., FATORI, L. H. AND MA, T. F. **Attractors for wave equations with degenerate memory.** J. Differential Equations, 2016, 56-83.

[7] CHEUESHOV, I. AND LASIECKA, I. **Von Karman Evolution Equations.** Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2010.

[8] EVANS, L. **Partial Differential Equations.** Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[9] GRASSELLI, M. PATA, V. **Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory.** Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50 (2002) 155-178.

[10] GIORGI, C. MUÑOZ, J.E. AND PATA V. **Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity.** J. Math. Anal. Appl. 260 (2001) 83–99.

[11] GIORGI, C., NASO, M.G. AND PATA V. **Exponential stability in linear heat conduction with memory: a semigroup approach.** Commun. Appl. Anal. 5 (2001) 121–133.

[12] GIORGI, C. PATA, V. AND MARZOCCHI, A. **Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory.** NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 5 (1998) 333–354.

[13] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley Classics Library. Wiley, 1989.

[14] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos).** IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[15] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1992.

[16] PLINIO, F. DI. PATA, V. AND ZELIK, S. **On the strongly damped wave equation with memory.** Indiana Univ. Math. J. 57 (2008) 757–780.

[17] RIVERA, J. **Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.** UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

[18] WHEEDEN, R. L., AND ZYGMUND, A. **Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis**. Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC; 2 edition, 2015.