UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PRISCILA FRIEDEMANN CARDOSO

# Formas Normais de Sistemas Hamiltonianos Reversíveis Equivariantes

MARINGÁ
2017

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**PRISCILA FRIEDEMANN CARDOSO**
**ORIENTADORA: PROFª. DRª. PATRÍCIA HERNANDES BAPTISTELLI**

# Formas Normais de Sistemas Hamiltonianos Reversíveis Equivariantes

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática - PMA/UEM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**MARINGÁ**
**2017**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Cardoso, Priscila Friedemann
C268f Formas normais de sistemas hamiltonianos reversíveis equivariantes / Priscila Friedemann Cardoso. -- Maringá, 2017.
vi, 119 f. : il.

Orientador: Profª. Drª. Patrícia Hernandes Baptistelli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2017.
Inclui índice.

1. Formas normais 2. Campos Hamiltonianos. 3. Simetria. 4. Antissimetria. 5. Normal forms. 6. Hamiltonian fields. 7. Symmetry. 8. Reversing symmetry. I. Baptistelli, Patrícia Hermandes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

PRISCILA FRIEDEMANN CARDOSO

# FORMAS NORMAIS DE SISTEMAS HAMILTONIANOS REVERSÍVEIS EQUIVARIANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 13 de março de 2017.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Ao meu amado esposo*

*Jean Carlos Cardoso*

AGRADECIMENTOS

Inicio agradecendo àquele que escolhi para ser meu parceiro na vida Jean Carlos. Obrigada por sua paciência, carinho, encorajamento e incentivo, demonstrados não apenas em palavras mas também em atitudes.

Agradeço aos meus pais que, mesmo de longe, choraram, sorriram e sonharam junto comigo. Ao meu irmão e amigo incondicional Daniel.

Aos meus amigos Juliana e Anderson que se fizeram família durante este tempo em Maringá. Obrigada pelas conversas, jantas, pipocas e pelos momentos de estudo. Incluo neste parágrafo os queridos amigos Guilherme Desoler, Jéssica e Mônica que se fizeram especiais principalmente neste último ano de mestrado. Agradeço à família do meu esposo, que se tornou minha também, por todo o apoio nessa caminhada.

Apesar de todo incentivo e suporte que recebi de familiares e amigos, este trabalho jamais seria concluido sem a orientação da professora Patrícia. Obrigada por aceitar esse desafio, pela paciência e, principalmente, por sua compreensão. Sei que colocou o melhor de si neste ano de trabalho e lhe admiro por isso.

Agradeço também ao CNPq pelo apoio financeiro, fundamental para a conclusão desta dissertação.

Por fim, agradeço a Deus pelo que Ele é e pelo que me deu. Obrigada por me ensinar com amor que sem Ti eu nada sou. Que através da Matemática eu veja, cada vez mais, a Sua beleza refletida na beleza da Sua criação.

# RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é determinar formas normais formais de campos de vetores Hamiltonianos reversíveis equivariantes segundo a ação de um grupo de Lie compacto. Para isso, apresentamos um método algébrico derivado do método clássico dado por Belitskii [5, 6] e Elphick *et al.* [13] que reduz este problema ao cálculo dos geradores para o módulo das aplicações que são reversíveis equivariantes segundo a ação de um grupo de Lie. Neste processo, utilizamos ferramentas da teoria invariante de grupos e seguimos a abordagem dada em [3]. Finalizamos este trabalho com a aplicação do método em alguns exemplos específicos de campos Hamiltonianos $\mathbb{Z}_2$-reversíveis-equivariantes e $\mathbb{D}_4-$reversíveis-equivariantes com parte linear semissimples e campos Hamiltonianos $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$-reversíveis-equivariantes com parte linear não semissimples, onde $\phi$ e $\psi$ são involuções que agem como antissimetrias.

**Palavras-chave:** Formas normais, campos Hamiltonianos, simetrias, antissimetrias.

# ABSTRACT

The main objective of this work is to determine formal normal forms of reversible-equivariant Hamiltonian vector fields under the action of a compact Lie group. For this, we present an algebric method derived from the classic method given by Belitskii [5, 6] and Elphick *et al.* [13], which reduces this problem to computing the generators for the module of reversible equivariants by the action of a Lie group. In this process, we use tools from the invariant theory of groups and follow the approach given in [3]. We finish this work by applying the method in some specific examples of $\mathbb{Z}_2$-reversible-equivariant and $\mathbb{D}_4-$reversible-equivariant Hamiltonian vector fields with semisimple linearization and $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$-reversible-equivariant Hamiltonian vector fields with non-semisimple linearization, where $\phi$ e $\psi$ are involutions acting as reversing symmetries.

**Keywords:** Normal forms, Hamiltonian fields, symmetries, reversing symmetries.

# SUMÁRIO

*"A matemática não é uma caminhada cuidadosa através de uma estrada bem conhecida, é uma jornada por uma terra selvagem e estranha, onde os exploradores frequentemente se perdem. A exatidão deve ser um sinal aos historiadores de que os mapas já foram feitos e os exploradores se foram para outras terras."*

*(W. S. Anglin)*

# INTRODUÇÃO

A noção convencional de antissimetria (ou reversibilidade) está relacionada à observações de fenômenos físicos. Considere, por exemplo, o movimento de um pêndulo no estado ideal (sem atrito ou qualquer outro tipo de perda de energia). Se filmarmos este movimento e o assistirmos será impossível distinguir quando o vídeo está na posição convencional ou quando está invertido, sendo que a única diferença entre as imagens é a posição inicial e final do pêndulo. Esse exemplo foi dado por Lamb em [18] para ilustrar a dinâmica de um sistema reversível pelo tempo, ou seja, um sistema que pode voltar para uma condição idêntica à que possuía inicialmente. Sistemas reversíveis estão presentes, mesmo que idealmente, na mecânica clássica (como a situação proposta anteriormente), na termodinâmica e na mecânica quântica (veja [18]).

Quando um sistema possui mais de uma antissimetria ele é chamado de sistema reversível equivariante. Neste caso, a composição de um número ímpar de antissimetrias é uma antissimetria, enquanto que a composição de um número par é o que chamamos de simetria. A diferença entre simetrias e antissimetrias, do ponto de vista da dinâmica, é que simetrias mapeiam trajetórias sobre outras trajetórias preservando a direção com o passar do tempo, enquanto que antissimetrias revertem a direção das trajetórias com relação ao tempo. Além disso, o conjunto de todas as simetrias e antissimetrias de um sistema formam um grupo $\Gamma$ com a propriedade de que o conjunto de todas as simetrias é um subgrupo normal de índice 2 de $\Gamma$.

Historicamente, o interesse em sistemas reversíveis tem aparecido no contexto dos sistemas Hamiltonianos, primeiramente porque muitos sistemas reversíveis são Hamiltonianos e vice-versa. Em mecânica clássica, um sistema Hamiltoniano é um sistema físico no qual todas as forças são conservativas (não modificam a energia mecânica do sistema). Na matemática, um sistema Hamiltoniano é um sistema de equações diferenciais obtido através das equações de Hamilton. Sistemas Hamiltonianos e reversíveis possuem características dinâmicas importantes em comum, como por exemplo o Teorema do Centro de Lyapunov e o Teorema da Catástrofe mostrados por Devaney em 1976. Infelizmente, a relação entre reversibilidade e Hamiltoniedade é bastante obscura, no sentido de ainda não sabermos quais propriedades são exclusivamente de sistemas reversíveis e quais são de sistemas Hamiltonianos.

O foco deste trabalho está em sistemas Hamiltonianos reversíveis equivariantes, ou seja, em presença simultânea de simetrias e antissimetrias, e daremos um tratamento puramente matemático sem nos preocuparmos com as aplicações físicas do nosso estudo.

Na maioria das vezes, não é possível encontrar soluções exatas para os sistemas dinâmicos em geral. Por isso, a teoria de formas normais tem sido usada como uma ferramenta para o estudo qualitativo do comportamento local dos campos de vetores. O estudo tem sido desenvolvido há anos por diversos autores, sendo os principais desenvolvedores e precursores Poincaré [25], Birkhoff [7] e Belitskii [5, 6]. O método clássico consiste em realizar mudanças de coordenadas no sistema em torno de um ponto singular a fim de obter um campo de vetores formalmente conjugado ao original e que é mais conveniente aos propósitos da pesquisa. Uma das dificuldades no cálculo da forma normal é a resolução de uma equação diferencial parcial associada, o que faz com que a forma normal seja truncada em um baixo grau. Por isso, Elphick *et al.* [13] propuseram um método algébrico que dispensa esse cálculo, mas leva em consideração um conjunto $\mathbf{S}$ de simetrias do sistema.

No contexto reversível equivariante, muitos autores tem usado a teoria de formas normais em situações distintas para estudar equilíbrio relativo, soluções periódicas relativas e famílias de órbitas periódicas (veja por exemplo [10, 11, 16, 17, 21, 24]). Em geral, a forma normal é calculada sem levar em consideração as condições de simetria e antissimetria, que são impostas à forma normal apenas no final do processo. Baseados no método de Elphick *et al*, Baptistelli *et al.* desenvolveram em [3] um método alternativo para a obtenção de formas normais reversíveis equivariantes que leva em consideração as propriedades simétricas do sistema desde o início do processo. É esta abordagem que nós seguimos neste trabalho.

O texto está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1 fazemos uma sucinta apresentação de sistemas dinâmicos Hamiltonianos. Para isso, também compilamos alguns conceitos de álgebra linear simplética. No Capítulo 2 apresentamos os principais tópicos das teorias invariante e equivariante de grupos de Lie. O Capítulo 3 é destinado à teoria de formas normais de sistemas reversíveis equivariantes. Nas seções 3.1 a 3.3 nos dedicamos à teoria reversível equivariante e alguns de seus resultados, com destaque ao Algoritmo 3.2.8, que apresenta uma forma de calcular geradores do módulo das aplicações polinomiais reversíveis equivariantes sobre o anel dos polinômios invariantes. Nas duas últimas seções deste capítulo apresentamos a teoria de formas normais e o principal resultado deste trabalho, o Teorema 3.5.8. Por fim, no Capítulo 4, nós aplicamos o Algoritmo 3.2.8 e o Teorema 3.5.8 para calcular formas normais de alguns sistemas Hamiltonianos reversíveis equivariantes pela ação de três grupos de Lie compactos distintos.

# CAPÍTULO 1

# SISTEMAS HAMILTONIANOS

Os sistemas Hamiltonianos formam uma subclasse dos sistemas dinâmicos conservativos e, apesar dessa restrição, a formulação hamiltoniana constitui uma base para diversos métodos matemáticos utilizados na matemática e na física. Tal formalismo encontra várias aplicações importantes, não somente na mecânica clássica, mas também em eletromagnetismo, e é o ponto de partida da mecânica quântica e da mecânica estatística.

A teoria de sistemas Hamiltonianos teve início após a formulação da mecânica clássica segundo Hamilton. Lagrange já havia libertado a mecânica clássica Newtoniana da exigência de um sistema de coordenadas inercial e Hamilton adaptou essa ideia passando a usar um espaço $2n-$dimensional. Iniciou-se então o desenvolvimento do formalismo matemático necessário para dar suporte à teoria física, fazendo nascer a geometria simplética, hoje trabalhada independente de motivações físicas.

Começaremos apresentando os conceitos básicos da álgebra linear simplética necessários para o formalismo de sistemas Hamiltonianos que será apresentado na Seção 1.2. Nossas principais referências neste capítulo são [19], [23] e [27].

## 1.1 Álgebra Linear Simplética

Nessa seção, vamos estudar espaços vetoriais que possuem uma estrutura especial dada por uma forma bilinear simplética, os chamados espaços vetoriais simpléticos. Tais espaços fazem parte de um contexto introdutório no estudo da geometria simplética como uma ferramenta de suporte na investigação de campos Hamiltonianos. Para o que segue, $V$ é um espaço vetorial $m-$dimensional sobre $\mathbb{R}$ e $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear sobre $V$. Lembremos que $\omega$ é antissimétrica se $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

O próximo teorema constrói uma base apropriada para o espaço vetorial $V$ quando dotado de uma forma antissimétrica $\omega$.

**Teorema 1.1.1.** *Seja $\omega$ uma forma bilinear antissimétrica sobre $V$. Então, existe uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_k, e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ de $V$ tal que*

1. *$\omega(u_i, v) = 0$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e para todo $v \in V$;*

2. *$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$;*

3. *$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.*

*Demonstração.* Considere o subespaço $U$ de $V$ dado por

$$U = \{u \in V;\ \omega(u, v) = 0,\ \forall v \in V\} \tag{1.1}$$

e escolha uma base $\{u_1, \cdots, u_k\}$ de $U$. Se $U = V$, então $\omega \equiv 0$, de onde segue que $n = 0$ e temos obviamente válido o primeiro item.

Suponha agora $U \neq V$. Então, existe[1] um subespaço vetorial $W \neq \{0\}$ de $V$ tal que $V = U \oplus W$. Tome $0 \neq e_1 \in W$ e, como $e_1 \in U^C$, existe também $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Defina $W_1 = \langle e_1, f_1 \rangle$ o subespaço vetorial de $V$ gerado por $e_1$ e $f_1$, e considere o conjunto

$$W_1^\omega = \{w \in W;\ \omega(w, v) = 0,\ \forall v \in W_1\}.$$

[1] Pode-se consultar [15] por exemplo.

Temos que $W = W_1 \oplus W_1^\omega$. De fato, seja $v \in W$. Se $\omega(v, e_1) = c$ e $\omega(v, f_1) = d$ então $v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$, com $(-cf_1 + de_1) \in W_1$ e $(v + cf_1 - de_1) \in W_1^\omega$, pois

$$\begin{aligned}\omega(v + cf_1 - de_1, pe_1 + qf_1) &= p\omega(v, e_1) + q\omega(v, f_1) + cp\omega(f_1, e_1) + \\ &\qquad + cq\omega(f_1, f_1) - dp\omega(e_1, e_1) - dq\omega(e_1, f_1) \\ &= pc + qd - cp - dq = 0,\end{aligned}$$

para todo $c, d, p, q \in \mathbb{R}$, uma vez que $\omega$ é antissimétrica e $\omega(e_1, f_1) = 1$. Então $W = W_1 + W_1^\omega$. Seja $v \in W_1 \cap W_1^\omega$. Como $v \in W_1$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $v = ae_1 + bf_1$. Além disso, como $v \in W_1^\omega$ então $\omega(v, e_1) = 0$ e $\omega(v, f_1) = 0$, o que implica em $a\omega(e_1, e_1) - b\omega(e_1, f_1) = 0 = a\omega(e_1, f_1) + b\omega(f_1, f_1)$. Como $\omega$ é antissimétrica, $\omega(e_1, e_1) = 0$ e da primeira igualdade temos $b = 0$. Consequentemente, $a = 0$ da segunda igualdade, mostrando que $v = 0$. Logo, a soma em questão é direta.

Seja agora $0 \neq e_2 \in W_1^\omega$. Novamente, existe $f_2 \in W_1^\omega$ tal que $\omega(e_2, f_2) \neq 0$ e assumimos, sem perda de generalidade, que $\omega(e_2, f_2) = 1$. Tomando $W_2 = \langle e_2, f_2 \rangle$ e

$$W_2^\omega = \{w \in W_1^\omega;\ \omega(w, v) = 0,\ \forall v \in W_2\},$$

é possível mostrar que $W_1^\omega = W_2 \oplus W_2^\omega$. Continuando o processo, podemos decompor $W_2^\omega = W_3 \oplus W_3^\omega$, $W_3^\omega = W_4 \oplus W_4^\omega$ e assim sucessivamente. Como a dimensão de $V$ é finita, tal processo é finito e obtemos

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n, \tag{1.2}$$

onde $W_i$ tem base $\{e_i, f_i\}$ e $\omega(e_i, f_i) = 1$ para todo $i = 1 \cdots, n$. Note que $e_i \in W_i$ e $e_j \in W_i^\omega$ para todo $j = i + 1, \cdots, n$. Logo, $\omega(e_i, e_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$. Da mesma forma, $\omega(f_i, f_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$. Por construção, já vimos que $\omega(e_i, f_i) = 1$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Agora, se $i \neq j$, digamos $i < j$, então $e_i \in W_i$ e $f_j \in W_i^\omega$ de onde segue que $\omega(e_i, f_j) = 0$. Se $i > j$, então $f_j \in W_j$ e $e_i \in W_j^\omega$ e novamente $\omega(e_i, f_j) = 0$. Assim $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.

Claramente, $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_k, e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ gera $V$. Para concluirmos que $\mathcal{B}$ é uma base de $V$ resta mostrarmos que tal conjunto é linearmente independente. Suponha que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n + \gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_n f_n = 0$$

com $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{R}$. Se $\alpha_i \neq 0$ para algum $1 \leq i \leq k$, então

$$u_i = -\frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j f_j\right).$$

Como a soma em (1.2) é direta e $u_i \in U$, temos $\beta_j = \gamma_j = 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Mas então

$$u_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_{i+1}u_{i+1} + \cdots + \alpha_k u_k)$$

o que é um absurdo, pois o conjunto $\{u_1, \cdots, u_k\}$ é linearmente independente (é uma base para $U$). De modo análogo, se $\beta_j \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n$ então

$$e_j = -\frac{1}{\beta_j}(\gamma_j f_j)$$

pois a soma em (1.2) é direta e $e_j \in W_j = \langle e_j, f_j \rangle$. Mas isso novamente é um absurdo pois teríamos $\omega(e_j, f_j) = 0$. Se supormos $\gamma_j = 0$ para algum $1 \leq j \leq n$ chegaremos a uma conclusão análoga. Portanto, $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e $\beta_j = \gamma_j = 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$, de onde segue que $\mathcal{B}$ é uma base de $V$. $\square$

A base $\mathcal{B}$ do teorema anterior não é necessariamente única, porém é tradicionalmente chamada de "base canônica". Como $\omega$ é uma forma bilinear, sua notação matricial com respeito a $\mathcal{B}$ é dada por $\omega(u, v) = [u]^t \Omega [v]$, onde $[u], [v]$ são as coordenadas de $u, v \in V$ na base $\mathcal{B}$, respectivamente, $t$ denota a transposta e

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times n} & 0_{k\times n} \\ 0_{n\times k} & 0_n & I_n \\ 0_{n\times k} & -I_n & 0_n \end{pmatrix}_{(k+2n)\times(k+2n)} \tag{1.3}$$

com $I_n$ a matriz identidade de ordem $n$ e $0_n$ a matriz nula de ordem $n$. Note que $\Omega$ é uma matriz antissimétrica. Mais do que isso, $\omega$ é uma forma bilinear antissimétrica se, e somente se, a matriz de $\omega$ com respeito a qualquer base de $V$ é antissimétrica.

**Definição 1.1.2.** *Dizemos que uma forma bilinear antissimétrica $\omega$ é simplética, ou não degenerada, se a aplicação $\tilde{\omega} : V \to V^*$ definida por $\tilde{\omega}(u)(v) = \omega(u, v)$ é bijetora, onde $V^*$ é o dual de $V$.*

Equivalentemente, $\omega$ é não degenerada se vale a equivalência

$$\omega(u,v) = 0, \ \forall\ v \in V \Leftrightarrow u = 0. \tag{1.4}$$

De fato, se $\tilde{\omega}$ é bijetora, então $\ker\tilde{\omega} = \{0\}$. Suponha que $\omega(u,v) = 0$ para todo $v \in V$. Então $\tilde{\omega}(u) \equiv 0$ e $u \in \ker\tilde{\omega} = \{0\}$, ou seja, $u = 0$. Agora, se $u = 0$ é claro que $\omega(u,v) = 0$ para todo $v \in V$. Por outro lado, suponha que vale (1.4) e tome $u \in \ker\tilde{\omega}$. Então $\tilde{\omega}(u) \equiv 0$, ou seja, $\omega(u,v) = \tilde{\omega}(u)(v) = 0$ para todo $v \in V$. Logo $u = 0$ por hipótese, de onde segue que $\tilde{\omega}$ é injetora. Como $\dim V = \dim V^* < \infty$ segue que $\tilde{\omega}$ é bijetora.

Nessas condições, a aplicação $\omega$ é então chamada uma *estrutura linear simplética* em $V$ e $(V,\omega)$ é chamado *espaço vetorial simplético.*

Note que o núcleo da aplicação $\tilde{\omega}$ é o subespaço $U$ definido em (1.1). Assim, se $\omega$ é não degenerada, temos que $U = \ker\tilde{\omega} = \{0\}$. Neste caso, $\dim U = 0$ e do Teorema 1.1.1 segue que $\dim V = 2n$. Portanto, um espaço vetorial simplético $(V,\omega)$ tem dimensão par e admite uma base

$$\{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$$

satisfazendo $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ e $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$, que é chamada *base simplética* de $(V,\omega)$. Neste caso, a matriz em (1.3) fica na forma

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}_{(2n)\times(2n)}. \tag{1.5}$$

**Exemplo 1.1.3.** O exemplo canônico de espaço vetorial simplético é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma bilinear $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega_0(u,v) = \sum_{j=1}^{n} (u_j v_{n+j} - u_{n+j} v_j) \tag{1.6}$$

onde $u = (u_1, \cdots, u_{2n})$ e $v = (v_1, \cdots, v_{2n})$. É fácil ver que $\omega_0(u,v) = [u]^t\Omega[v]$, onde $\Omega$ é dada por (1.5). Logo, $\omega_0$ é antissimétrica e não degenerada.

É possível mostrar que uma forma bilinear antissimétrica $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é não degenerada se, e somente se, sua matriz é inversível. A ideia aqui é observar que a matriz de $\tilde{\omega}$ é a transposta da matriz de $\omega$ com relação às respectivas bases de $V$ e $V^*$. O resultado agora segue pois $\omega$ é não degenerada se, e somente se, $\tilde{\omega}$ é bijetora, o que ocorre se, e somente se, sua matriz é inversível.

**Definição 1.1.4.** *Um simplectomorfismo $\varphi$ entre os espaços vetoriais simpléticos $(V,\omega)$ e $(V',\omega')$ é um isomorfismo linear $\varphi : V \to V'$ tal que $\omega(u,v) = \omega'(\varphi(u),\varphi(v))$, para todo $u, v \in V$. Se existe tal isomorfismo linear, então os espaços $(V,\omega)$ e $(V',\omega')$ são ditos simplectomorfos.*

Todo espaço vetorial simplético $2n-$dimensional $(V,\omega)$ é simplectomorfo ao espaço $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, onde $\omega_0$ é definido em (1.6). De fato, sejam

$$\{e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_n\} \quad \text{e} \quad \{e'_1,\cdots,e'_n,f'_1,\cdots,f'_n\}$$

as bases simpléticas de $\mathbb{R}^{2n}$ e $V$, respectivamente, e defina $\varphi : V \to \mathbb{R}^{2n}$ por $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i + \sum_{i=1}^{n} d_i f_i$ se $v = \sum_{i=1}^{n} c_i e'_i + \sum_{i=1}^{n} d_i f'_i$. É fácil verificar que $\varphi$ é um isomorfismo linear. Vamos mostrar que $\omega(u,v) = \omega_0(\varphi(u),\varphi(v))$. Sejam $u = \sum_{i=1}^{n} a_i e'_i + \sum_{i=1}^{n} b_i f'_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} c_i e'_i + \sum_{i=1}^{n} d_i f'_i \in V$. Então $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$, $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i + \sum_{i=1}^{n} d_i f_i$ e, pela bilinearidade de $\omega_0$, temos

$$\begin{aligned}
\omega_0(\varphi(u),\varphi(v)) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i c_j \omega_0(e_i,e_j) + \sum_{i,j=1}^{n} a_i d_j \omega_0(e_i,f_j) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i c_j \omega_0(f_i,e_j) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} b_i d_j \omega_0(f_i,f_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_i c_j \omega(e'_i,e'_j) + \sum_{i,j=1}^{n} a_i d_j \omega(e'_i,f'_j) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i c_j \omega(f'_i,e'_j) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} b_i d_j \omega(f'_i,f'_j) \\
&= \omega(u,v),
\end{aligned}$$

a segunda igualdade seguindo pois $\omega$ e $\omega_0$ satisfazem as condições do Teorema 1.1.1.

Assim, quando consideramos um sistema simplético de coordenadas (dado pela base simplética), podemos olhar $(V,\omega)$ localmente como $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

## 1.2 Sistemas Dinâmicos e Campos Hamiltonianos

Um sistema Hamiltoniano é um sistema de equações diferenciais que pode ser escrito na forma das equações de Hamilton. Nesta seção introduzimos o conceito de sistema dinâmico e como o trataremos no presente trabalho. Também apresentamos a função Hamiltoniana, que induz um campo vetorial especial chamado de campo vetorial Hamiltoniano. Este campo, por sua vez, induz os chamados sistemas Hamiltonianos.

**Definição 1.2.1.** *Sejam $M$ um conjunto e $G$ um grupo. Um fluxo é um conjunto de aplicações $\phi_t : M \to M$, com $t \in G$, satisfazendo $\phi_0 = Id_M$ e $\phi_{r+s} = \phi_r \phi_s$. Tal fluxo induz uma aplicação $\phi : G \times M \to M$ definida por $\phi(t,x) = \phi_t(x)$ e o trio $(M, G, \phi)$ é dito um sistema dinâmico.*

Na definição acima, quando $G \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, o trio $(M, G, \phi)$ é um sistema dinâmico discreto e quando $G = \mathbb{R}$, o sistema dinâmico é contínuo.

Quando $M \subseteq \mathbb{R}^n$, um campo de vetores[2] em $M$ é uma aplicação $X : M \to \mathbb{R}^n$ que associa a cada ponto $x \in M$ o vetor $X(x) \in \mathbb{R}^n$. Para nossos propósitos, vamos sempre assumir que $M = \mathbb{R}^n$ e que o campo é de classe $C^\infty$. Dado um campo de vetores $X$ em $\mathbb{R}^n$, podemos considerar a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = X(x).$$

Através da solução desse sistema, é possível induzir um fluxo e, por isso, um campo de vetores induz um sistema dinâmico. Reciprocamente, um fluxo induz um campo de vetores e este, por sua vez, induz uma equação diferencial. Desta forma, tornamos quase que indistintos os conceitos de equações diferenciais ordinárias (autônomas), sistemas dinâmicos e campos de vetores[3]. Distinções entre os três conceitos, além de definições mais precisas, podem ser encontradas em [2].

**Definição 1.2.2.** *Sejam $X$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x_0$ é uma singularidade (ou um ponto crítico, ou um ponto de equilíbrio) de $X$ se $X(x_0) = 0$. Caso contrário, $x_0$ é dito um ponto regular.*

[2]Mais geralmente, se $M$ é uma variedade diferenciável, um campo de vetores em $M$ é uma aplicação $X : M \to TM$, onde $TM$ é o fibrado tangente de $M$.

[3]A prova deste fato pode ser encontrada em [23].

Note que, como $x \mapsto x_0 - x$ é um difeomorfismo isométrico de classe $C^\infty$, podemos sempre supor que ao menos uma das singularidades, se houver, está na origem.

Usualmente, define-se um campo Hamiltoniano como segue:

**Definição 1.2.3.** *Sejam $H : V \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ e $\nabla H$ o gradiente de $H$, onde $(V, \omega)$ é um espaço vetorial simplético. Um campo de vetores Hamiltoniano é um campo da forma*

$$X_H(x) = J \nabla H(x), \tag{1.7}$$

*onde $x \in V$ e $J$ é a matriz da forma simplética $\omega$ numa dada base de $V$. Neste caso, $H$ denomina-se Hamiltoniano ou função Hamiltoniana do campo (1.7).*

Considerando o espaço vetorial simplético $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, onde $\omega_0$ é a forma simplética canônica dada por (1.6), um campo Hamiltoniano é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases} \tag{1.8}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é de classe $C^2$. Neste caso, $J = \Omega$ como definida em (1.5). Como todo espaço vetorial simplético é simplectomorfo à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, a menos de uma mudança de coordenadas (simplética), todo campo Hamiltoniano é da forma (1.8).

Sistemas de equações com essa mesma estrutura já haviam sido obtidos por Lagrange e Poisson, mas eles não perceberam que se tratavam de um conjunto básico de equações de movimento. As equações (1.8) ganharam o nome de equações de Hamilton em homenagem a Willian Rowan Hamilton[4].

Quando não for especificada a forma simplética, deve ser entendido que o campo é Hamiltoniano em relação à forma simplética usual $\omega_0$ dada em (1.6).

**Exemplo 1.2.4.** Vamos considerar neste exemplo a equação do pêndulo simples sob a ação da força da gravidade $g$. Considere o pêndulo como na figura abaixo, de haste rígida de comprimento $l$ e massa desprezível, com um extremo fixo e um objeto de massa $m$ no outro extremo.

[4]Dentre as contribuições de Hamilton, destacam-se o desenvolvimento de uma abordagem unificada para problemas de óptica geométrica e dinâmica, usando cálculo variacional, e trabalhos sobre a álgebra de números complexos.

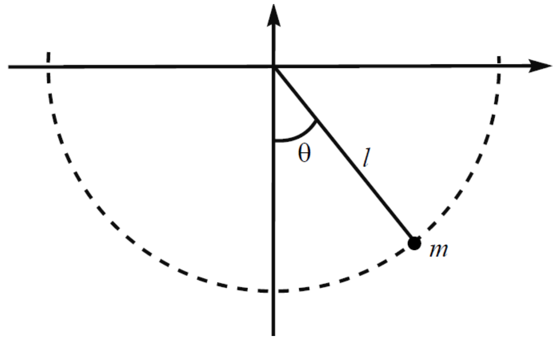


Figura 1.1: O pêndulo.

Considerando o atrito desprezível, a equação de movimento do pêndulo é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

que dá origem ao sistema de EDO's de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta, \end{cases}$$

onde $\theta$ é uma variável angular e $p$ é o momento. Esse sistema é Hamiltoniano da forma (1.8) com função Hamiltoniana

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos\theta).$$

**Exemplo 1.2.5.** O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} & = x \\ \dot{y} & = \sin x - y \end{cases}$$

é um sistema Hamiltoniano da forma (1.8). De fato, se

$$x = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \quad \text{e} \quad \sin x - y = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y),$$

então, integrando com relação à $y$ e a $x$, respectivamente, obtemos $H(x, y) = xy + f_1(x)$ e $H(x, y) = \cos x + yx + f_2(y)$, para algumas funções $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Igualando as duas funções, temos que $f_1(x) = \cos x + b$ e $f_2(y) = b$ para alguma constante $b \in \mathbb{R}$. Logo uma função Hamiltoniana deste sistema é $H(x, y) = \cos x + xy + b$.

Mostrar que um sistema é Hamiltoniano nem sempre é fácil. Repare que, para isso, precisamos encontrar uma função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ tal que $X_H(x) = J\nabla H$ para alguma matriz $J$ da forma simplética $\omega$. Como um exemplo, considere o campo de vetores $X(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\alpha x_2, -\alpha x_1, \beta y_2, -\beta y_1)$ e considere a matriz

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Como $J_1$ é antissimétrica, $J_1$ induz uma forma bilinear antissimétrica $\omega_1$ sobre $\mathbb{R}^4$. Além disso, uma vez que $\det J_1 = 1 \neq 0$, $\omega_1$ é não degenerada. Portanto, considerando o espaço simplético $(\mathbb{R}^4, \omega_1)$, o campo de vetores em questão é Hamiltoniano da forma $X(x_1, x_2, y_1, y_2) = J_1 \nabla H(x_1, x_2, y_1, y_2)$ com função Hamiltoniana

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

# CAPÍTULO 2

# TEORIA INVARIANTE DE GRUPOS DE LIE

Como mencionamos na Introdução, o objetivo desse trabalho é calcular formas normais de sistemas Hamiltonianos sob a ação de simetrias e antissimetrias. Nossa abordagem para o estudo sistemático neste contexto segue principalmente as referências [9] e [14] e se dá através da teoria de representação de grupos em um espaço vetorial $V$ de dimensão finita. As aplicações que regem sistemas dinâmicos $\Gamma-$reversíveis-equivariantes tem uma forma geral bem determinada uma vez conhecida a teoria invariante para a ação de $\Gamma$ em $V$.

Neste capítulo introduzimos as ferramentas necessárias para o estudo de tais sistemas começando pela teoria de representação de grupos de Lie e em seguida desenvolvendo as teorias invariante e equivariante. Todos os exemplos feitos neste capítulo serão utilizados no Capítulo 4 e, uma vez resolvidos aqui, facilitam os arduosos cálculos que virão.

## 2.1 Representação de Grupos

Um determinado grupo pode agir em um espaço vetorial de várias formas. Por isso, a teoria de representação de grupos é fundamental, em particular quando trabalhamos com grupos de Lie compactos, pois estes possuem propriedades algébricas e topológicas importantes. Um exemplo disso é a existência de uma integral de Haar invariante pela ação do grupo, o que nos permite admitir que um grupo de Lie compacto age ortogonalmente em um espaço vetorial. Daqui em diante, assumimos que o leitor esteja familiarizado com conceitos de teoria de grupos como subgrupos, subgrupos normais, homomorfismos e grupos quocientes, bem como com conceitos topológicos de $\mathbb{R}^n$ como abertos, fechados e compactos.

### 2.1.1 Grupos de Lie

Apesar do conceito de grupo de Lie ser bem mais abrangente, para nossos objetivos estamos interessados em uma definição um pouco mais restrita, a de grupo de Lie linear. Em todo texto, $M_n(\mathbb{R})$ denota o grupo das matrizes quadradas de ordem $n$, $GL(n)$ o subgrupo de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes inversíveis, $A^t$ denota a transposta de uma matriz $A$ e $I_n$ denota a matriz identidade de ordem $n$.

**Definição 2.1.1.** *Um grupo de Lie linear é um subgrupo fechado* $\Gamma$ *de* $GL(n)$.

Note que precisamos considerar uma topologia em $GL(n)$. Para isso, considere em $M_n(\mathbb{R})$ a topologia induzida pelo isomorfismo $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ dado por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{nn}),$$

ou seja, um conjunto $U$ de matrizes é um aberto em $M_n(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\phi(U)$ é um aberto em $\mathbb{R}^{n^2}$. Assim, a topologia adotada em $GL(n)$ é a topologia do subespaço induzida por $M_n(\mathbb{R})$. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.1.2.** O grupo ortogonal $O(n)$, que consiste de todas as matrizes quadradas

$A$ de ordem $n$ satisfazendo $AA^t = I_n$ [1], é um grupo de Lie linear. De fato, considere

$$\begin{array}{rccc} f: & M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & AA^t. \end{array}$$

O grupo ortogonal $O(n)$ é a imagem inversa de $I_n$ por $f$, ou seja $O(n) = f^{-1}(\{I_n\})$. Como $\{I_n\}$ é unitário, também é fechado[2] em $M_n(\mathbb{R})$ e, como $f$ é contínua, temos que $O(n)$ é fechado em $M_n(\mathbb{R})$. Agora, observe que $O(n) \subseteq GL(n)$, pois se $A \in O(n)$, então $\det A = \pm 1 \neq 0$. Assim, $O(n) = GL(n) \cap O(n)$ e, por isso, $O(n)$ é fechado em $GL(n)$. Resta mostrar que $O(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$. Claramente, $I_n \in O(n)$. Sejam $A, B \in O(n)$. Então, $B^t = B^{-1}$ e segue que

$$AB^{-1}(AB^{-1})^t = AB^t(B^{-1})^t A^t = AB^t B A^t = AI_n A^t = AA^t = I_n,$$

como desejado.

**Exemplo 2.1.3.** Seja $SO(n) = \{A \in O(n);\ \det A = 1\}$. Esse grupo é chamado grupo ortogonal especial, ou grupo de rotação $n$-dimensional, e é um grupo de Lie linear. De fato, note que $I_n \in SO(n)$ e se $A, B \in SO(n)$, então $B^t = B^{-1}$ e temos

$$\det AB^{-1} = \det A \det B^{-1} = \det A \det B^t = \det A \det B = 1.$$

Portanto, $AB^{-1} \in SO(n)$ e, assim, $SO(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$. Para mostrar que $SO(n)$ é fechado em $GL(n)$, escreva $SO(n) = O(n) \cap H$, onde $H = \{B \in GL(n);\ \det B = 1\}$, e considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & GL(n) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \det A. \end{array}$$

Temos que $f$ é contínua (pois é contínua como função de $M_n(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$ e restrição de contínua é contínua) e $H = f^{-1}(\{1\})$ onde $\{1\}$ é fechado em $\mathbb{R}$. Logo, $H$ é fechado em $GL(n)$. Como $O(n)$ também é fechado em $GL(n)$ segue o que queríamos.

[1] Observe que se $A \in O(n)$, então $A$ também satisfaz $A^t A = I_n$, uma vez que a matriz inversa à direita de $A$ é igual à sua inversa à esquerda.

[2] Essa afirmação é válida pois $M_n(\mathbb{R})$ é homeomorfo à $\mathbb{R}^{n^2}$, que é Hausdorff.

**Exemplo 2.1.4.** No caso particular de $n = 2$, temos que $SO(2)$ é gerado pelas matrizes de rotação dadas por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$. De fato, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$, então $\det A = 1$, e, além disso, $A^{-1} = A^t$. Calculando a inversa de $A$ e igualando a sua transposta, temos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Como $a^2 + b^2 = 1$ (pois $AA^t = I_2$), existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$. Assim, $A = R_\theta$, provando a afirmação. Em nosso trabalho, vamos identificar $SO(2)$ com o grupo do círculo unitário $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, pela correspondência $R_\theta \longmapsto \theta$, uma vez que cada $z \in S^1$ pode ser escrito de forma única como $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi)$.

**Exemplo 2.1.5.** Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie linear. Para ver isto, considere $G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um grupo finito e defina

$$\begin{array}{rcccl} f \ : \ G & \to & S \subset S_G & & \\ a_i & \longmapsto & \sigma_i \ : & G & \to \quad G \\ & & & a_j & \mapsto \quad a_i a_j, \end{array}$$

onde $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$ e $S_G$ é o conjunto de todas as permutações de elementos de $G$.[3]. Iniciaremos mostrando que $S$ é um subgrupo de $S_G$ (e, portanto, um grupo). Supondo que $a_1$ é o elemento neutro de $G$, concluímos que $\sigma_1$ é neutro em $S$, pois para todo $i = 1, \cdots, n$ tem-se $\sigma_1(a_i) = a_1 a_i = a_i$. Se $\sigma_i(a_k) = a_i a_k$ então $\sigma_i^{-1}(a_k) = a_i^{-1} a_k$, pois $\sigma_i(a_i^{-1} a_k) = a_i(a_i^{-1} a_k) = (a_i a_i^{-1}) a_k = a_k = \sigma_1(a_k)$ para todo $k = 1, \cdots, n$. Assim, se $\sigma_i, \sigma_j \in S$, então

$$\sigma_i(\sigma_j^{-1}(a_k)) = \sigma_i(a_j^{-1} a_k) = (a_i a_j^{-1}) a_k = a_l a_k = \sigma_l(a_k)$$

[3]Note que se $n \neq 2$, então $S$ é diferente de $S_G$, pois o número de elementos de $S$ é $n$ enquanto que o número de elementos de $S_G$ é $n!$.

para algum $l = 1, \cdots, n$ e para todo $k = 1, \cdots, n$, implicando em $\sigma_i \sigma_j^{-1} \in S$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$. Mostremos agora que $f$ é um homomorfismo de grupos. De fato, se $a_l, a_m \in G$ então $a_l a_m = a_k$ para algum $a_k \in G$. Logo, $\sigma_k(a_j) = a_k a_j = a_l a_m a_j = \sigma_l \circ \sigma_m(a_j)$ para todo $a_j \in G$, ou seja, $f(a_l a_m) = f(a_k) = \sigma_k = \sigma_l \circ \sigma_m = f(a_l) \circ f(a_m)$, como desejado. Note também que se $\sigma_i = \sigma_j$ para $i, j = 1, \cdots, n$, então $a_i = a_j$, uma vez que $G$ é um grupo. Consequentemente, $f$ é um isomorfismo de grupos.

Agora, podemos identificar cada permutação de $S$ com uma matriz de ordem $n$ dada pela permutação das colunas (ou linhas) da matriz identidade. Assim, $S$ é identificado com um subgrupo de $GL(n)$ que é fechado, pois é finito e $GL(n)$ é Hausdorff. Portanto, associamos a $G$ um grupo de Lie linear, como desejado.

**Exemplo 2.1.6.** O toro $n-$dimensional $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ($n$ vezes) é um grupo de Lie linear. Se $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T^n$ podemos identificá-lo com a matriz

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{\theta_n} \end{pmatrix} \in GL(2n),$$

onde $R_\theta$ é como em (2.1).

**Definição 2.1.7.** *Um grupo de Lie linear é compacto se o for pela topologia induzida como um subconjunto de* $\mathbb{R}^{n^2}$.

Até aqui, todos os grupos de Lie que apresentamos são compactos[4]. Porém existem grupos de Lie que não são compactos, como é o caso de $\mathbb{R}^n$. Temos que $\mathbb{R}^n$ é isomorfo ao grupo de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1),$$

[4]Nós omitiremos a demonstração desta afirmação.

onde $a_j \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Tal grupo não é limitado pois qualquer matriz deste tipo possui entradas que não são limitadas e, portanto, $\mathbb{R}^n$ não é compacto.

Em nosso trabalho, consideramos especificamente grupos de Lie compactos e, embora a definição de grupo de Lie seja mais geral do que a de grupo de Lie linear, é fato que todo grupo de Lie compacto é topologicamente isomorfo à um grupo de Lie linear (veja [8]). Por isso, no caso da Definição 2.1.1, $\Gamma$ é chamado somente de grupo de Lie.

### 2.1.2 Ações e Representações

Estamos interessados agora em determinar como um grupo de Lie transforma o espaço $\mathbb{R}^n$, ou seja, em como seus elementos agem em um determinado sistema. Formalizamos essa ideia com o conceito de ação e representação de grupos.

**Definição 2.1.8.** *Sejam $\Gamma$ um grupo de Lie e $V$ um espaço vetorial real de dimensão finita. Dizemos que $\Gamma$ age linearmente em $V$ se existe uma aplicação contínua, chamada ação,*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \Gamma \times V & \to & V \\ & (\gamma, v) & \longmapsto & \gamma \cdot v \end{array}$$

*tal que para cada $\gamma \in \Gamma$ a aplicação $\rho_\gamma : V \to V$ definida por $\rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v$ é linear e $\rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2} = \rho_{\gamma_1 \gamma_2}$ para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.*

*A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \Gamma & \to & GL(V) \\ & \gamma & \longmapsto & \rho_\gamma \end{array}$$

*é chamada de representação de $\Gamma$ em $V$, onde $GL(V)$ é o grupo das transformações lineares inversíveis de $V$ em $V$.*

Primeiramente notemos que $\rho_\gamma$ é de fato inversível para todo $\gamma \in \Gamma$. Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $\rho_\gamma(v_1) = \rho_\gamma(v_2)$, ou seja, $\gamma \cdot v_1 = \gamma \cdot v_2$. Aplicando a ação de $\gamma^{-1}$ (que existe pois $\Gamma$ é um grupo) em ambos os lados dessa igualdade, temos pela definição de ação que $(\gamma\gamma^{-1}) \cdot v_1 = (\gamma\gamma^{-1}) \cdot v_2$ o que implica em $v_1 = v_2$. Portanto, $\rho_\gamma$ é injetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem segue o alegado. Agora note que $\rho$ define um homomorfismo de $\Gamma$ em $GL(V)$. De fato,

$$\rho(\gamma_1\gamma_2)(v) = \rho_{\gamma_1\gamma_2}(v) = \rho_{\gamma_1}(\rho_{\gamma_2}(v)) = \rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2)(v),$$

para todo $v \in V$.

Desta maneira, a toda ação está associada uma representação que nos diz como $\Gamma$ transforma o espaço todo $V$. Como $V$ é um espaço vetorial real de dimensão finita $n > 0$, podemos assumir $V \cong \mathbb{R}^n$, como nos seguintes exemplos.

**Exemplo 2.1.9.** Como todo grupo de Lie linear $\Gamma$ é um grupo de matrizes em $GL(n)$, para algum $n$, existe uma ação natural de $\Gamma$ em $\mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matriz por vetor. De fato, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (M, v) & \longmapsto & Mv \end{array},$$

onde $Mv$ representa a multiplicação da matriz $M \in \Gamma$ pelas coordenadas de $v \in \mathbb{R}^n$ (em uma dada base de $\mathbb{R}^n$), é contínua. Ainda se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\rho_M(u + \alpha v) = M(u + \alpha v) = Mu + \alpha Mv = \rho_M(u) + \alpha\rho_M(v),$$

de onde segue que $\rho_M$ é linear para todo $M \in \Gamma$. Por fim, se $M, N \in \Gamma$, então $\rho_M \circ \rho_N(v) = M(Nv) = (MN)v = \rho_{MN}(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

**Exemplo 2.1.10.** Todo grupo $\Gamma$ age trivialmente em $\mathbb{R}^n$ como $\gamma \cdot v = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e todo $\gamma \in \Gamma$. Note que esta ação, dada por $\psi(\gamma, v) = v$, é uma projeção e, portanto, é contínua. Além disso, se $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ então

$$\rho_\gamma(u + \alpha v) = u + \alpha v = \rho_\gamma(u) + \alpha\rho_\gamma(v) \quad \text{e}$$

$$\rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2}(v) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot v) = \gamma_1 \cdot v = v = (\gamma_1\gamma_2) \cdot v = \rho_{\gamma_1\gamma_2}(v).$$

**Exemplo 2.1.11.** A aplicação

$$\begin{array}{cccc} \psi : & S^1 \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & (\theta, z) & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{array}$$

é uma ação de $S^1$ em $\mathbb{C}$. De fato, $\psi$ é claramente contínua e

$$\rho_\theta(u+\alpha v) = e^{i\theta}(u+\alpha v) = e^{i\theta}u + \alpha e^{i\theta}v = \rho_\theta(u) + \alpha\rho_\theta(v),$$

para todo $u, v \in \mathbb{C}$ e $\theta \in S^1$. Além disso,

$$\theta \cdot (\varphi \cdot z) = \theta \cdot (e^{i\varphi}z) = e^{i\theta}(e^{i\varphi}z) = e^{i\theta}e^{i\varphi}z = e^{i(\theta+\varphi)}z = (\theta+\varphi)\cdot z,$$

onde $+$ é a operação do grupo $S^1$.

**Exemplo 2.1.12.** Para qualquer inteiro $k$, a aplicação que leva $S^1 \times \mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ definida por

$$\theta \cdot z = e^{ik\theta}z$$

também é uma ação de $S^1$ em $\mathbb{C}$. A justificativa desse fato é análoga à feita no exemplo anterior. Note que se $k = 0$ a ação é a trivial e se $k = 1$ a ação é a dada no Exemplo 2.1.11.

### 2.1.3 Integral de Haar

A integral de Haar é uma das principais ferramentas utilizadas no Capítulo 3. Nesta subseção mostraremos que todo grupo de Lie linear compacto é um subgrupo fechado de $O(n)$, usando algumas propriedades desta integral. Daqui em diante, $\Gamma$ é um grupo de Lie.

**Definição 2.1.13.** *Seja $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a operação $\displaystyle\int_\Gamma f d\gamma \in \mathbb{R}$, também denotada por $\displaystyle\int_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$, é uma integral em $\Gamma$ se satisfaz as seguintes condições:*

*(i) Linearidade, ou seja $\displaystyle\int_\Gamma (\lambda f + \mu g) d\gamma = \lambda \int_\Gamma f d\gamma + \mu \int_\Gamma g d\gamma$, onde $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ são contínuas e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

*(ii) Positividade, que significa que se $f(\gamma) \geq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\displaystyle\int_\Gamma f d\gamma \geq 0$.*

*Esta operação é uma Integral de Haar se, além dos itens (i) e (ii), satisfaz*

*(iii) Invariância por translação, isto é, $\displaystyle\int_{\gamma\in\Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$, para todo $\delta \in \Gamma$ fixado.*

Quando $\Gamma$ é um grupo de Lie compacto, a integral de Haar é finita e dizemos que ela é uma integral de Haar normalizada se $\int_\Gamma 1 d\gamma = 1$. A prova da existência e unicidade da integral de Haar normalizada está feita em [9, I, Theorem 5.13], bem como a demonstração de que para grupos compactos, a integral de Haar também é invariante por translações à direita, ou seja,

$$\int_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma), \quad \forall\delta \in \Gamma \text{ fixado.}$$

**Observação 2.1.14.** Aplicações da forma $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ também podem ser integráveis por Haar, fazendo a integração separadamente em cada componente.

**Observação 2.1.15.** Seja $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$. A integral de Haar pode ser definida para aplicações $f : \Gamma \to C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ como $\int_\Gamma f d\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\left(\int_\Gamma f d\gamma\right)(x) = \int_\Gamma f(\gamma)(x) d\gamma$. Juntamente com a observação anterior, vemos é possível integrar aplicações da forma $f : \Gamma \to C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Faremos uso dessa observação na Definição 3.5.3.

Exibimos abaixo um exemplo para o caso em que $\Gamma$ é finito.

**Exemplo 2.1.16.** Seja $\Gamma$ um grupo de Lie finito de ordem $|\Gamma|$. Então, para qualquer $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ contínua temos

$$\int_\Gamma f d\gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma). \tag{2.2}$$

De fato, se $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (\lambda f + \mu g) d\gamma &= \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} (\lambda f + \mu g)(\gamma) \\
&= \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} (\lambda f(\gamma) + \mu g(\gamma)) \\
&= \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda f(\gamma) + \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \mu g(\gamma) \\
&= \lambda \int_\Gamma f d\gamma + \mu \int_\Gamma g d\gamma
\end{aligned}$$

e, se $f(\gamma) \geq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então claramente, a operação definida em (2.2) é positiva. Para mostrar que esta integral é invariante, fixe $\delta \in \Gamma$. Então,

$$\int_{\gamma\in\Gamma} f(\delta\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\delta\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\alpha\in\Gamma} f(\alpha) = \int_{\gamma\in\Gamma} f d\gamma,$$

onde a segunda igualdade segue do fato de que a aplicação $\gamma \longmapsto \delta\gamma$ é bijetora e a terceira segue de (2.2). Além disso, ela é normalizada pois $\displaystyle\int_\Gamma 1 d\gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} 1 = \frac{1}{|\Gamma|}|\Gamma| = 1$. Pela unicidade, temos que a operação definida em (2.2) é a integral de Haar de $f$ em $\Gamma$.

O teorema a seguir é um caso particular do Teorema de Fubini para a integral de Haar enunciado e demonstrado em [9, I, Proposition 5.16].

**Teorema 2.1.17.** *Sejam $\Gamma$ um grupo de Lie compacto e $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo fechado de índice 2 de $\Gamma$. Para qualquer função contínua $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ temos*

$$\int_\Gamma f(\gamma)d\gamma = \frac{1}{2}\left(\int_\Sigma f(\gamma)d\gamma + \int_\Sigma f(\delta\gamma)d\gamma\right),$$

*para $\delta \in \Gamma\backslash\Sigma$ fixado.*

Da proposição que encerra esta subseção implica que podemos identificar grupos de Lie compactos em $GL(n)$ com subgrupos fechados de $O(n)$.

**Proposição 2.1.18.** *Seja $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial de dimensão finita $V$ e seja $[\rho_\gamma]$ a matriz associada à transformação linear $\rho_\gamma$ dada pela representação de $\Gamma$ em $V$. Então, existe um produto interno em $V$ tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$, $[\rho_\gamma]$ é ortogonal.*

*Demonstração.* Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em $V$. Para $v, w \in V$, considere a função contínua[5]

$$\begin{array}{rccc} f_{v,w} : & \Gamma & \to & \mathbb{R} \\ & \gamma & \longmapsto & \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w)\rangle . \end{array}$$

Assim, fica bem definido outro produto interno em $V$ dado por

$$\langle v, w\rangle_\Gamma = \int_{\gamma\in\Gamma} f_{v,w}(\gamma) = \int_{\gamma\in\Gamma} \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w)\rangle .$$

[5]Veja que $f_{v,w}(\gamma) = \langle g_v, g_w\rangle(\gamma) = \langle g_v(\gamma), g_w(\gamma)\rangle$, onde $g_v(\gamma) = \gamma \cdot v$ pode ser definida para todo $v \in V$. Agora, se $\varphi$ é a ação de $\Gamma$ em V, então $\varphi$ é contínua, bem como sua restrição $\varphi_v$ ao conjunto $\Gamma \times \{v\}$. Além disso, $\mu_v : \Gamma \to \Gamma \times v$ definida por $\gamma \mapsto (\gamma, v)$ é contínua (a primeira coordenada é a identidade e a segunda é uma função constante). Logo, $g_v(\gamma) = \varphi_v \circ \mu_v(\gamma)$ é contínua para todo $v \in V$. Como o produto interno de funções contínuas é uma função contínua (veja [20, Capítulo 1, Seção 7, Teorema 16]), segue que $f_{v,w}$ é contínua.

De fato, a bilinearidade de $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ segue da linearidade de $\rho_\gamma$ e da integral de Haar, e da bilinearidade de $\langle\ ,\ \rangle$. A comutatividade de $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ segue da comutatividade de $\langle\ ,\ \rangle$. Por fim, a não negatividade de $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ segue uma vez que $\langle\ ,\ \rangle$ é não negativo e a integral de Haar satisfaz *(ii)* da Definição 2.1.13.

Agora, da propriedade de invariância por translação, segue que, para todo $\delta \in \Gamma$ fixado,

$$
\begin{aligned}
\langle v, w\rangle_\Gamma &= \int_{\gamma\in\Gamma} f_{v,w}(\gamma) = \int_{\gamma\in\Gamma} f_{v,w}(\gamma\delta) \\
&= \int_{\gamma\in\Gamma} \langle \rho_{\gamma\delta}(v), \rho_{\gamma\delta}(w)\rangle = \int_{\gamma\in\Gamma} \langle \rho_\gamma(\rho_\delta(v)), \rho_\gamma(\rho_\delta(w))\rangle \\
&= \langle \rho_\delta(v), \rho_\delta(w)\rangle_\Gamma .
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\delta \in \Gamma$ é arbitrário, $\langle v, w\rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w)\rangle_\Gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Assim,

$$
\langle v, w\rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w)\rangle_\Gamma = \left\langle v, \rho_\gamma^* \rho_\gamma w\right\rangle_\Gamma ,
$$

para todo $v, w \in V$, onde $\rho_\gamma^*$ é o operador adjunto de $\rho_\gamma$. Logo, $\rho_\gamma^*\rho_\gamma$ é o operador identidade, de onde $[\rho_\gamma^*][\rho_\gamma] = I_n$, com $[\rho_\gamma]$ denotando a matriz do operador com relação a uma base ortonormal de $V$. Como $V$ é um espaço vetorial real de dimensão finita, então $[\rho_\gamma^*] = [\rho_\gamma]^t$, onde $t$ representa a transposta. Logo, $[\rho_\gamma]^t[\rho_\gamma] = I_n$, ou seja, $[\rho_\gamma] \in O(n)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. □

## 2.2 Funções Invariantes

As funções invariantes formam uma base para toda teoria reversível equivariante que vamos apresentar no próximo capítulo. Veremos que o conjunto dessas funções forma um anel e as demais estruturas envolvidas formam módulos sobre este anel. Além disso, garantir a existência e encontrar um conjunto de geradores para o anel dos invariantes é fundamental para calcularmos as formas normais do Capítulo 3.

Daqui em diante, vamos nos referir à ação $\rho_\gamma(x) = \gamma \cdot x$ simplesmente por $\gamma x$. Além disso, $V$ se refere sempre a um espaço vetorial real de dimensão finita.

**Definição 2.2.1.** *Seja $(\rho, V)$ o espaço vetorial $V$ sob a representação $\rho$ de um grupo de Lie $\Gamma$. Uma função a valores reais $f : (\rho, V) \to \mathbb{R}$ é invariante sobre $\Gamma$, ou $\Gamma-$invariante,* *se*

$$f(\gamma x) = f(x), \tag{2.3}$$

*para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Um polinômio invariante é definido da mesma forma tomando $f$ um polinômio.*

**Observação 2.2.2.** Se $\Gamma$ é finitamente gerado, pela linearidade da ação, para verificar que uma função é $\Gamma-$invariante é suficiente mostrar que a condição (2.3) é satisfeita para um conjunto de geradores de $\Gamma$.

Nos exemplos a seguir nos restringiremos ao caso polinomial.

**Exemplo 2.2.3.** Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agindo não trivialmente em $\mathbb{R}$, ou seja, $1 \cdot x = x$ e $-1 \cdot x = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $f(x) = \sum a_i x^i$ com $a_i \in \mathbb{R}$. Então, se $f$ é $\mathbb{Z}_2-$invariante temos $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de onde $\sum a_i x^i = \sum a_i (-1)^i x^i$. Assim $\sum((-1)^i - 1)a_i x^i = 0$, o que implica em $(-1)^i - 1 = 0$ ou $a_i = 0$. Portanto, $i$ é par ou $a_i = 0$, ou seja, $f(x) = \sum b_j x^{2j}$, com $b_j = a_{2j} \in \mathbb{R}$. Logo, $f$ é uma função par da forma $f(x) = h(x^2)$, onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial dada por $h(x) = \sum b_j x^j$.

**Exemplo 2.2.4.** Seja $S^1$ agindo em $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ da forma $\theta \cdot z = e^{i\theta} z$ para todo $\theta \in S^1$. Então $f$ é $S^1-$invariante se $f(e^{i\theta} z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo $\theta \in S^1$. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial, escrevemos[6] $f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta$ com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Porém, definimos invariância para polinômios cuja imagem é real. Logo, $\overline{f(z)} = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e os coeficientes $a_{\alpha\beta}$ satisfazem

$$\overline{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{2.4}$$

Se queremos $f(e^{i\theta} z) = f(z)$, então

$$\begin{aligned} \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta &= \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta} z)^\alpha (\overline{e^{i\theta} z})^\beta \\ &= \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \overline{z}^\beta \end{aligned}$$

[6]Escrevemos o polinômio nas coordenadas $z$ e $\overline{z}$, pois elas transformam $\mathbb{C}$ em um espaço vetorial real. Entretanto, para $z = x + iy$, temos $x = (z + \overline{z})/2$ e $y = (z - \overline{z})/2i$, assim os coeficientes do polinômio podem ser complexos.

para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}e^{i\theta(\alpha-\beta)}$ para todo $\theta \in S^1$. Agora, isso acontece se $a_{\alpha\beta} = 0$ ou se $\alpha = \beta$. Assim, a $S^1-$invariância implica em

$$f(z) = \sum a_{\alpha\alpha} z^\alpha \overline{z}^\alpha,$$

onde $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$ uma vez que $a_{\alpha\alpha} = \overline{a}_{\alpha\alpha}$ por (2.4). Assim, definindo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$ teremos que $f(z) = h(z\overline{z})$.

Queremos observar aqui que se considerarmos a ação de $S^1$ em $\mathbb{R}^2$, basta trocarmos $z = x + iy$ por $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e teremos $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$.

**Exemplo 2.2.5.** Seja $S^1$ agindo em $\mathbb{C}^2$ como $\theta(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$. Se $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial $S^1-$invariante, então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(z_1, z_2) = h(|z_1|^2, |z_2|^2, Re(z_1\overline{z_2}), Im(z_1\overline{z_2})).$$

De fato, escreva $f$ como

$$f(z_1, z_2) = \sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} z_1^\alpha \overline{z_1}^\beta z_2^\gamma \overline{z_2}^\delta, \tag{2.5}$$

onde $a_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbb{C}$ e $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Como $f$ toma valores reais, ou seja, $f = \overline{f}$, segue que $\overline{a_{\alpha\beta\gamma\delta}} = a_{\beta\alpha\delta\gamma}$. Além disso, como $f(\theta(z_1, z_2)) = f(z_1, z_2)$ então

$$\sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} z_1^\alpha \overline{z_1}^\beta z_2^\gamma \overline{z_2}^\delta = \sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{i\theta(\alpha-\beta+\gamma-\delta)} z_1^\alpha \overline{z_1}^\beta z_2^\gamma \overline{z_2}^\delta,$$

para todo $\theta \in S^1$ e $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, e isso ocorre se $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ou se $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$. Portanto, $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ou $\alpha - \beta = \delta - \gamma$. Logo, se $a_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ então observe que

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta \;\Rightarrow\; \delta - \gamma \geq 0 \;\Rightarrow\; \delta \geq \gamma \\ \alpha < \beta \;\Rightarrow\; \delta - \gamma < 0 \;\Rightarrow\; \delta < \gamma. \end{cases}$$

Assim, fatorando as potências de $z_1\overline{z_1}$ e $z_2\overline{z_2}$, obtemos

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sum_{\alpha<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z_1})^\alpha \overline{z_1}^{\beta-\alpha} (z_2\overline{z_2})^\delta z_2^{\gamma-\delta} + \\ &\quad + \sum_{\alpha\geq\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z_1})^\beta z_1^{\alpha-\beta} (z_2\overline{z_2})^\gamma \overline{z_2}^{\delta-\gamma} \\ &= \sum_{\alpha<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta \overline{z_1}^{\beta-\alpha} z_2^{\gamma-\delta} \\ &\quad + \sum_{\alpha\leq\beta} a_{\beta\alpha\delta\gamma} (z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta z_1^{\beta-\alpha} \overline{z_2}^{\gamma-\delta}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde a segunda igualdade segue renomeando as potências da segunda parcela da soma. Escrevendo $\beta - \alpha = \gamma - \delta = n$, $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = x_{\alpha\beta\gamma\delta} + iy_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e lembrando que $\overline{a_{\alpha\beta\gamma\delta}} = a_{\beta\alpha\delta\gamma}$, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sum_{\alpha<\beta} (x_{\alpha\beta\gamma\delta} + iy_{\alpha\beta\gamma\delta})(z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta (\overline{z_1}z_2)^n \\ &\quad + \sum_{\alpha\leq\beta} (x_{\alpha\beta\gamma\delta} - iy_{\alpha\beta\gamma\delta})(z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta (z_1\overline{z_2})^n \\ &= \sum_{\alpha<\beta} x_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta ((\overline{z_1}z_2)^n + (z_1\overline{z_2})^n) \\ &\quad + \sum_{\alpha<\beta} iy_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta ((\overline{z_1}z_2)^n - (z_1\overline{z_2})^n) \\ &\quad + x_{\alpha\alpha\delta\delta}(z_1\overline{z_1})^\alpha (z_2\overline{z_2})^\delta, \end{aligned}$$

onde $x_{\alpha\beta\gamma\delta}, y_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbb{R}$. Notamos que a parcela referente a $\alpha = \beta$ segue pois $n = \beta - \alpha = 0$ e como $\overline{a_{\alpha\alpha\delta\delta}} = a_{\alpha\alpha\delta\delta}$ temos que $y_{\alpha\alpha\delta\delta} = 0$. Se $z$ é um número complexo qualquer, então

$$\begin{aligned} z^n + \overline{z}^n &= (z + \overline{z})(z^{n-1} + \overline{z}^{n-1}) - (z\overline{z})(z^{n-2} + \overline{z}^{n-2}) \\ i(z^n - \overline{z}^n) &= i(z - \overline{z})(z^{n-1} + \overline{z}^{n-1}) + i(z\overline{z})(z^{n-2} - \overline{z}^{n-2}). \end{aligned}$$

Por essas identidades, vemos que os termos $z^n + \overline{z}^n$ e $i(z^n - \overline{z}^n)$ são redutíveis para $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Logo, se $z = \overline{z_1}z_2$, $f$ tem a forma

$$f(z_1, z_2) = \sum A_{jklm}(z_1\overline{z_1})^j (z_2\overline{z_2})^k (\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2})^l (i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}))^m,$$

onde $A_{jklm} \in \mathbb{R}$. Com respeito ao termo $(i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}))^m$ temos que se $m$ é par, $i^m = \pm 1$ e daí $(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2})^m$ pode ser escrito através dos outros termos. Caso contrário, como $i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = 2Im(z_1\overline{z_2})$ e $(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}) = 2Re(z_1\overline{z_2})$, temos, finalmente,

$$f(z_1, z_2) = \sum B_{jklm}(z_1\overline{z_1})^j (z_2\overline{z_2})^k (Re(z_1\overline{z_2}))^l (Im(z_1\overline{z_2}))^m,$$

com $B_{jklm} \in \mathbb{R}$, $j, k, l, m \in \mathbb{N}$, como desejado.

Denotaremos o conjunto das funções polinomiais $\Gamma-$invariantes $f : V \to \mathbb{R}$ por $P_V(\Gamma)$. Observe que $P_V(\Gamma)$ tem estrutura de anel, uma vez que somas e produtos de polinômios $\Gamma-$invariantes são ainda $\Gamma-$invariantes.

Nos exemplos anteriores, encontramos um subconjunto finito de polinômios invariantes $\{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$ tal que cada polinômio invariante pode ser escrito como uma função polinomial de $u_1, \cdots, u_s$. Dizemos que tal conjunto forma uma base de Hilbert para os invariantes. A existência desse conjunto finito é garantida pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.2.6.** *(Teorema de Hilbert-Weyl) Seja $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo em $V$. Então, existe uma base de Hilbert finita para o anel $P_V(\Gamma)$.*

A demonstração desse teorema é bastante interessante mas necessita de resultados preliminares e ferramentas de álgebra comutativa. Por isso não nos cabe fazê-la aqui, mas, aos curiosos, sua demonstração pode ser encontrada em [14, XII, § 6].

Para finalizar, um exemplo relevante ao nosso trabalho que foi deixado como exercício em [14] e será utilizado nas aplicações do Capítulo 4.

**Exemplo 2.2.7.** Seja $S^1$ agindo em $\mathbb{C}^2$ por $\theta(z_1, z_2) = (e^{ki\theta}z_1, e^{li\theta}z_2)$, onde $k, l$ são coprimos. Então, uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ é $\{|z_1|^2, |z_2|^2, Re(z_1^l \overline{z}_2^k), Im(z_1^l \overline{z}_2^k)\}$.

Para mostrar nossa afirmação, vamos seguir os passos do Exemplo 2.2.5. Seja $f$ uma função polinomial nas variáveis $z_1, z_2$ escrito como (2.5). Novamente, como $f = \overline{f}$, temos $\overline{a_{\alpha\beta\gamma\delta}} = a_{\beta\alpha\delta\gamma}$. Se $f$ é invariante pela ação acima, então $f(\theta(z_1, z_2)) = f(z_1, z_2)$, ou seja,

$$\sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} z_1^\alpha \overline{z_1}^\beta z_2^\gamma \overline{z_2}^\delta = \sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{i\theta(\alpha k - \beta k + \gamma l - \delta l)} z_1^\alpha \overline{z_1}^\beta z_2^\gamma \overline{z_2}^\delta.$$

Isso ocorre se $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ou se $k(\alpha - \beta) + l(\gamma - \delta) = 0$.

Note que $k(\alpha - \beta) + l(\gamma - \delta) = 0$ implica em $k(\beta - \alpha) = l(\gamma - \delta)$. Como $k$ e $l$ são coprimos e $\beta - \alpha$ é inteiro, necessariamente $k$ divide $\gamma - \delta$. Com o mesmo argumento, $l$ divide $\beta - \alpha$, ou seja, $\beta - \alpha = lm$ e $\gamma - \delta = kn$ para alguns $m, n \in \mathbb{Z}$.

Agora, $f$ pode ser escrito como em (2.6) e, escrevendo $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = x_{\alpha\beta\gamma\delta} + iy_{\alpha\beta\gamma\delta}$ com

$x_{\alpha\beta\gamma\delta}, y_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbb{R}$ e, usando novamente que $\overline{a_{\alpha\beta\gamma\delta}} = a_{\beta\alpha\delta\gamma}$ temos

$$\begin{aligned}
f(z_1, z_2) &= \sum_{\alpha<\beta} (x_{\alpha\beta\gamma\delta} + i y_{\alpha\beta\gamma\delta})(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}(\overline{z_1}^{lm} z_2^{kn}) \\
&\quad + \sum_{\alpha\leq\beta} (x_{\alpha\beta\gamma\delta} - i y_{\alpha\beta\gamma\delta})(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}(z_1^{lm} \overline{z_2}^{kn}) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} x_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}(\overline{z_1}^{lm} z_2^{kn} + z_1^{lm}\overline{z_2}^{kn}) \\
&\quad + \sum_{\alpha<\beta} i y_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}(\overline{z_1}^{lm} z_2^{kn} - z_1^{lm}\overline{z_2}^{kn}) \\
&\quad + x_{\alpha\alpha\delta\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}.
\end{aligned}$$

Usando as seguintes identidades indutivamente,

$$\begin{aligned}
(\overline{z_1}^{lm} z_2^{kn} + z_1^{lm}\overline{z_2}^{kn}) &= (\overline{z_1}^{l} z_2^{k} + z_1^{l}\overline{z_2}^{k})(\overline{z_1}^{(m-1)l} z_2^{(n-1)k} + z_1^{(m-1)l}\overline{z_2}^{(n-1)k}) + \\
&\quad -(z_1\overline{z_1})^{l}(z_2\overline{z_2})^{k}(\overline{z_1}^{(m-2)l} z_2^{(n-2)k} + z_1^{(m-2)l}\overline{z_2}^{(n-2)k}) \quad \text{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(\overline{z_1}^{lm} z_2^{kn} - z_1^{lm}\overline{z_2}^{kn}) &= i(\overline{z_1}^{l} z_2^{k} - z_1^{l}\overline{z_2}^{k})(\overline{z_1}^{(m-1)l} z_2^{(n-1)k} + z_1^{(m-1)l}\overline{z_2}^{(n-1)k}) + \\
&\quad + i(z_1\overline{z_1})^{l}(z_2\overline{z_2})^{k}(\overline{z_1}^{(m-2)l} z_2^{(n-2)k} - z_1^{(m-2)l}\overline{z_2}^{(n-2)k}),
\end{aligned}$$

com $m, n \geq 2$ e considerando que $(\overline{z_1}^{l} z_2^{k} + z_1^{l}\overline{z_2}^{k}) = 2Re(z_1^{l}\overline{z_2}^{k})$ e $i(\overline{z_1}^{l} z_2^{k} - z_1^{l}\overline{z_2}^{k}) = 2Im(z_1^{l}\overline{z_2}^{k})$, concluímos finalmente que

$$f(z_1, z_2) = \sum B_{rstu}(z_1\overline{z_1})^{r}(z_2\overline{z_2})^{s}(Re(z_1^{l}\overline{z_2}^{k}))^{t}(Im(z_1^{l}\overline{z_2}^{k}))^{u},$$

com $B_{rstu} \in \mathbb{R}$, $r, s, t, u \in \mathbb{N}$. Portanto $\{|z_1|^2, |z_2|^2, Re(z_1^l\overline{z}_2^k), Im(z_1^l\overline{z}_2^k)\}$ constitui uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ com a ação considerada neste exemplo.

Como visto, determinar uma base de Hilbert para o anel $P_V(\Gamma)$ pode ser uma tarefa extremamente difícil. Existem programas computacionais, como o Singular [28], que nos auxiliam nesta tarefa quando o grupo $\Gamma$ é finitamente gerado.

## 2.3 Aplicações Equivariantes

Nesta seção, vamos descrever a primeira estrutura modular sobre o anel $P_V(\Gamma)$, a saber, as aplicações que comutam com a ação de $\Gamma$. Em todo o texto, denotamos por $(\rho, V)$ o espaço vetorial $V$ sob a representação $\rho$ de um grupo de Lie $\Gamma$ em $V$.

**Definição 2.3.1.** *Dizemos que uma aplicação* $g : (\rho, V) \to (\eta, W)$ *comuta com* $\Gamma$*, ou é* $\Gamma-$*equivariante, se*

$$g(\rho_\gamma(x)) = \eta_\gamma g(x), \tag{2.7}$$

*para todo* $\gamma \in \Gamma$ *e para todo* $x \in V$*. Quando* $(\rho, V) = (\eta, W)$ *dizemos que* $g$ *satisfazendo (2.7) é puramente equivariante. Uma aplicação polinomial equivariante é definida da mesma forma.*

Denotaremos o espaço das aplicações polinomiais $\Gamma-$equivariantes por $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ e das puramente $\Gamma-$equivariantes por $\vec{P}_V(\Gamma)$. O elemento $\gamma \in \Gamma$ que satisfaz (2.7) é chamado simetria da aplicação $g$.

Por um abuso de notação, escrevemos a igualdade (2.7) simplesmente como

$$g(\gamma x) = \gamma g(x),$$

quando não houver dúvidas sobre as respectivas ações e representações.

É possível ver que se $f : (\rho, V) \to \mathbb{R}$ é uma função $\Gamma-$invariante e se $g : (\rho, V) \to (\eta, W)$ é uma aplicação $\Gamma$-equivariante, então o produto $fg : (\rho, V) \to (\eta, W)$ é $\Gamma$-equivariante. Com igual facilidade, é possível ver que $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel dos polinômios invariantes $P_V(\Gamma)$[7]. Então, faz sentido a definição abaixo.

**Definição 2.3.2.** *Dizemos que as aplicações polinomiais* $\Gamma-$*equivariantes* $g_1, \cdots, g_r$ *geram o módulo* $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ *sobre o anel* $P_V(\Gamma)$ *se toda aplicação* $\Gamma-$*equivariante* $g \in \vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ *pode ser escrita como*

$$g = f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r,$$

*para certos* $f_1, \cdots f_r \in P_V(\Gamma)$*. Neste caso, escrevemos* $\vec{P}_{V,W}(\Gamma) = P_V(\Gamma)\{g_1, \cdots, g_r\}$*.*

Abaixo enunciamos a versão equivariante do Teorema de Hilbert-Weyl, cuja demonstração pode ser encontrada em [14, XII, Theorem 6.8].

[7]Se $R$ é um anel, um $R-$módulo à direita é um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ em conjunto com uma operação $M \times R \to M$, $(m, r) \longmapsto mr$, que satisfaz $(m+n)r = mr+nr, m(r+s) = mr+ms, m(rs) = (mr)s$ e $m1_R = m$, para todo $m, n \in M$, e $r, s \in R$. Um $R-$ módulo à esquerda é definido de maneira simétrica e dizemos que $M$ é um $R-$módulo se o for à direita e à esquerda.

**Teorema 2.3.3.** *Se $\Gamma$ é um grupo de Lie compacto agindo em $V$ e em $W$, então existe um conjunto finito $\{g_1, \cdots, g_r\}$ de aplicações polinomiais $\Gamma-$equivariantes que gera o módulo $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ sobre o anel $P_V(\Gamma)$.*

Nos próximos exemplos, até o fim desta seção, vamos determinar os geradores de módulos puramente equivariantes sob ações distintas de um grupo de Lie compacto $\Gamma$.

**Exemplo 2.3.4.** O exemplo mais simples nos é dado quando $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ age em $\mathbb{R}$ como no Exemplo 2.2.3. Se $g \in \vec{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)$, então $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinômio da forma $g(x) = \sum a_i x^i$, com $a_i \in \mathbb{R}$, que satisfaz $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $a_i(-x)^i = -a_i x^i$, implicando que ou $a_i = 0$ ou $i$ é ímpar, ou seja,

$$g(x) = \sum b_j x^{2j+1} = \sum b_j x^{2j} x = h(x^2)x,$$

onde $b_j = a_{2j+1}$. Pelo Exemplo 2.2.3, podemos escrever $g(x) = f(x)x$, onde $f \in P_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)$. Portanto,

$$\vec{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2) = P_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)\{g_1\},$$

onde $g_1(x) = x$.

**Exemplo 2.3.5.** Seja $\Gamma = S^1$ agindo em $\mathbb{C}$ como $\theta \cdot z = e^{i\theta} z$. Vamos mostrar que toda $g \in \vec{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ tem a forma

$$g(z) = p(z)z + q(z)iz, \tag{2.8}$$

onde $p, q \in P_{\mathbb{C}}(S^1)$. Para isso, tome $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio $S^1-$equivariante

$$g(z) = \sum b_{jk} z^j \overline{z}^k \tag{2.9}$$

com $b_{jk} \in \mathbb{C}$. Como $g(\theta z) = \theta g(z)$, ou seja, $g(z) = \theta^{-1} g(\theta z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{-i\theta} \sum b_{jk} e^{i\theta(j-k)} z^j \overline{z}^k \\ &= \sum b_{jk} e^{i\theta(j-k-1)} z^j \overline{z}^k, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in S^1, z \in \mathbb{C}$. Por (2.9) segue que $b_{jk} = 0$ ou $j = k+1$ e daí

$$g(z) = \sum b_{k+1,k} (z\overline{z})^k z.$$

Como $b_{k+1,k} \in \mathbb{C}$, podemos denotar $b_{k+1,k} = x_k + iy_k$, com $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, de onde temos

$$g(z) = \sum x_k (z\overline{z})^k z + \sum y_k (z\overline{z})^k iz.$$

Tomando $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como $p(z) = \sum x_k (z\overline{z})^k$ e $q(z) = \sum y_k (z\overline{z})^k$ temos, pelo Exemplo 2.2.4, que $p, q \in P_{\mathbb{C}}(S^1)$, o que prova (2.8). Aqui também, se trocarmos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}^2$ temos que os geradores serão $g_1(x,y) = (x,y)$ e $g_2(x,y) = (-y,x)$.

**Exemplo 2.3.6.** Seja $S^1$ agindo em $\mathbb{C}^2$ como no Exemplo 2.2.5. Vamos mostrar que o módulo das aplicações polinomiais equivariantes sobre o anel $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ é gerado pelas aplicações $g_i$, com $1 \leq i \leq 8$, onde

$$g_1(z_1,z_2) = (z_1,0), \quad g_2(z_1,z_2) = (z_2,0), \quad g_3(z_1,z_2) = (iz_1,0), \quad g_4(z_1,z_2) = (iz_2,0),$$

$$g_5(z_1,z_2) = (0,z_1), \quad g_6(z_1,z_2) = (0,z_2), \quad g_7(z_1,z_2) = (0,iz_1), \quad g_8(z_1,z_2) = (0,iz_2).$$

Seja $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ uma aplicação polinomial equivariante por esta ação de $S^1$. Escrevendo $g = (p,q)$, com $p, q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, temos

$$(p(\theta(z_1,z_2)), q(\theta(z_1,z_2))) = \theta(p(z_1,z_2), q(z_1,z_2)) = (e^{i\theta}p(z_1,z_2), e^{i\theta}q(z_1,z_2)),$$

para todo $\theta \in S^1, (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Então, $p(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)) = e^{i\theta}p(z_1,z_2)$, o mesmo valendo para $q$. Escrevendo $p$ como

$$p(z_1,z_2) = \sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} z_1^{\alpha}\overline{z_1}^{\beta} z_2^{\gamma}\overline{z_2}^{\delta}, \tag{2.10}$$

com $a_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbb{C}$, temos que a igualdade $p(z_1,z_2) = e^{-i\theta}p(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$ é satisfeita se, e somente se,

$$p(z_1,z_2) = e^{-i\theta} \sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{i\theta(\alpha-\beta+\gamma-\delta)} z_1^{\alpha}\overline{z_1}^{\beta} z_2^{\gamma}\overline{z_2}^{\delta},$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$, $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Logo, $\alpha - \beta + \gamma - \delta - 1 = 0$ quando $a_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. Observe que se $\alpha \geq \beta$, então $\gamma \leq \delta + 1$ e se $\alpha < \beta$, então $\gamma > \delta + 1$. Assim, no primeiro caso, se $\alpha - \beta = m \in \mathbb{N}$, então $\delta - \gamma = m - 1$ e, no segundo caso se $\beta - \alpha = n \in \mathbb{N}$, então $\gamma - \delta = n + 1$. Fatorando em (2.10) os termos de menor grau e substituindo os respectivos expoentes por $n, m, n+1$ e $m-1$ temos

$$\begin{aligned}
p(z_1,z_2) =& \sum_{\alpha<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}\overline{z_1}^{\beta-\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}z_2^{\gamma-\delta} + \sum_{\alpha>\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^{\beta}z_1^{\alpha-\beta}(z_2\overline{z_2})^{\gamma}\overline{z_2}^{\delta-\gamma} + \\
&+ a_{\alpha\alpha(\delta+1)\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}z_2 \\
=& \sum_{\alpha<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}\overline{z_1}^{n}z_2^{n+1} + \sum_{\alpha>\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^{\beta}(z_2\overline{z_2})^{\gamma}z_1^{m}\overline{z_2}^{m-1} + \\
&+ a_{\alpha\alpha(\delta+1)\delta}(z_1\overline{z_1})^{\alpha}(z_2\overline{z_2})^{\delta}z_2. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Das identidades

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}^{n}z_2^{n+1} &= (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\overline{z_1}^{n-1}z_2^{n} - (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})\overline{z_1}^{n-2}z_2^{n-1} \\
z_1^{m}\overline{z_2}^{m-1} &= (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)z_1^{m-1}\overline{z_2}^{m-2} - (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})z_1^{m-2}\overline{z_2}^{m-3}
\end{aligned}$$

válidas para $m \geq 3$ e $n \geq 2$, podemos reduzir os termos $\overline{z_1}^{n}z_2^{n+1}$ e $z_1^{m}\overline{z_2}^{m-1}$ até $m = 2$ e $n = 1$, o que nos dá, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}z_2^{2} &= (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)z_2 - (z_2\overline{z_2})z_1 \\
z_1^{2}\overline{z_2} &= (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)z_1 - (z_1\overline{z_1})z_2.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos em (2.11), escrevemos $p$ como

$$p(z_1,z_2) = \sum A_{rst}(z_1\overline{z_1})^{r}(z_2\overline{z_2})^{s}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)^{t}z_1 + \sum B_{uvw}(z_1\overline{z_1})^{u}(z_2\overline{z_2})^{v}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)^{w}z_2$$

com $A_{rst}$ e $B_{uvw} \in \mathbb{C}$. Se $A_{rst} = M_{rst} + iN_{rst}$ e $B_{uvw} = P_{uvw} + iQ_{uvw}$, com $M_{rst}, N_{rst}, P_{uvw}$ e $Q_{uvw} \in \mathbb{R}$, então reescrevemos $p$ como

$$p(z_1,z_2) = f_1(z_1,z_2)z_1 + f_2(z_1,z_2)iz_1 + f_3(z_1,z_2)z_2 + f_4(z_1,z_2)iz_2,$$

com $f_i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ funções de $|z_1|^2$, $|z_2|^2$, $Re(z_1\overline{z_2})$ para $i = 1,2,3,4$. Analogamente, encontraremos

$$q(z_1,z_2) = g_1(z_1,z_2)z_1 + g_2(z_1,z_2)iz_1 + g_3(z_1,z_2)z_2 + g_4(z_1,z_2)iz_2,$$

com $g_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ funções de $|z_1|^2$, $|z_2|^2$, $Re(z_1\overline{z_2})$ para $i = 1,2,3,4$. Portanto,

$$\begin{aligned}
g(z_1,z_2) =& f_1(z_1,z_2)(z_1,0) + f_2(z_1,z_2)(iz_1,0) + f_3(z_1,z_2)(z_2,0) + f_4(z_1,z_2)(iz_2,0) + \\
&+ g_1(z_1,z_2)(0,z_1) + g_2(z_1,z_2)(0,iz_1) + g_3(z_1,z_2)(0,z_2) + g_4(z_1,z_2)(0,iz_2),
\end{aligned}$$

com $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3$ e $g_4 \in P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, pelo Exemplo 2.2.5.

**Exemplo 2.3.7.** Seja $S^1$ agindo em $\mathbb{C}^2$ como no Exemplo 2.2.7. Então, o módulo $\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ dos equivariantes segundo essa ação é gerado pelas aplicações

$$h_1(z_1,z_2)=(z_1,0),\ h_2(z_1,z_2)=(iz_1,0),\ h_3(z_1,z_2)=(\overline{z}_1^{l-1}z_2^k,0),\ h_4(z_1,z_2)=(i\overline{z}_1^{l-1}z_2^k,0),$$

$$h_5(z_1,z_2)=(0,z_2),\ h_6(z_1,z_2)=(0,iz_2),\ h_7(z_1,z_2)=(0,z_1^l\overline{z}_2^{k-1}) \text{ e } h_8(z_1,z_2)=(0,iz_1^l\overline{z}_2^{k-1}).$$

Se $g\in\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, então $g(\theta(z_1,z_2))=\theta g(z_1,z_2)$, para todo $\theta\in S^1,(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$. Escrevendo $g(z_1,z_2)=(p(z_1,z_2),q(z_1,z_2))$, com $p,q:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, temos

$$g(z_1,z_2)=\theta^{-1}g(\theta(z_1,z_2))=(e^{-ki\theta}p(e^{ki\theta}z_1,e^{li\theta}z_2),e^{-li\theta}q(e^{ki\theta}z_1,e^{li\theta}z_2))$$

e daí

$$p(z_1,z_2)=e^{-ki\theta}p(e^{ki\theta}z_1,e^{li\theta}z_2) \quad \text{e} \quad q(z_1,z_2)=e^{-li\theta}q(e^{ki\theta}z_1,e^{li\theta}z_2), \tag{2.12}$$

para todo $\theta\in[0,2\pi),(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$. Como $p$ é polinomial, podemos escrever

$$p(z_1,z_2)=\sum a_{\alpha\beta\gamma\delta}z_1^\alpha\overline{z_1}^\beta z_2^\gamma\overline{z_2}^\delta, \tag{2.13}$$

com $a_{\alpha\beta\gamma\delta}\in\mathbb{C}$. Pela condição (2.12)

$$p(z_1,z_2)=e^{-ki\theta}\sum a_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{k(\alpha-\beta)+l(\gamma-\delta)}z_1^\alpha\overline{z_1}^\beta z_2^\gamma\overline{z_2}^\delta$$

e tal igualdade é válida se $a_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$ ou $k(\alpha-\beta-1)+l(\gamma-\delta)=0$. Supondo a segunda igualdade, como $k$ e $l$ são coprimos, necessariamente $l$ divide $\alpha-\beta-1$ e $k$ divide $\gamma-\delta$. Então $\alpha-\beta\equiv 1(\text{mod } l)$ e $\gamma-\delta\equiv 0(\text{mod } k)$. Observe que se $\alpha\geq\beta+1$ então $\gamma\leq\delta$ e se $\alpha<\beta+1$ então $\gamma>\delta$. Fatorando em (2.13) as potências de $z_1\overline{z_1}$ e $z_2\overline{z_2}$, obtemos

$$\begin{aligned} p(z_1,z_2) &= \sum_{\alpha-1\geq\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^\beta z_1^{\alpha-\beta}(z_2\overline{z_2})^\gamma\overline{z_2}^{\delta-\gamma}+\sum_{\alpha-1<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^\alpha\overline{z_1}^{\beta-\alpha}(z_2\overline{z_2})^\delta z_2^{\gamma-\delta}\\ &= \sum_{\alpha-1\geq\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^\beta(z_2\overline{z_2})^\gamma z_1^{ml+1}\overline{z_2}^{nk}+\sum_{\alpha-1<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z_1\overline{z_1})^\alpha(z_2\overline{z_2}^\delta)\overline{z_1}^{m'l-1}z_2^{n'k}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

para alguns $l,m,n,m',n'\in\mathbb{N}$, com $m'\neq 0$. Das identidades

$$z_1^{ml+1}\overline{z_2}^{nk}=(z_1^l\overline{z_2}^k+\overline{z_1}^l z_2^k)z_1^{(m-1)l+1}\overline{z_2}^{(n-1)k}-(z_1\overline{z_1})^l(z_2\overline{z_2})^k z_1^{(m-2)l+1}\overline{z_2}^{(n-2)k},$$
$$\overline{z_1}^{m'l-1}z_2^{n'k}=(z_1^l\overline{z_2}^k+\overline{z_1}^l z_2^k)\overline{z_1}^{(m'-1)l-1}z_2^{(n'-1)k}-(z_1\overline{z_1})^l(z_2\overline{z_2})^k\overline{z_1}^{(m'-2)l-1}z_2^{(n'-2)k},$$

observamos que os termos $z_1^{ml+1}\overline{z_2}^{nk}$ e $\overline{z_1}^{m'l-1}z_2^{n'k}$ são redutíveis para $m, n \geq 2$ e $m', n' \geq 3$, respectivamente. Além disso, para $m = n = 1$, $m' = n' = 2$, temos

$$\begin{aligned} z_1^{l+1}\overline{z_2}^k &= (z_1^l\overline{z_2}^k + \overline{z_1}^l z_2^k)z_1 - (z_1\overline{z_1})\overline{z_1}^{l-1}z_2^k \quad \text{e} \\ \overline{z_1}^{2l-1}z_2^{2k} &= (z_1^l\overline{z_2}^k + \overline{z_1}^l z_2^k)\overline{z_1}^{l-1}z_2^k - (z_1\overline{z_1})^{l-1}(z_2\overline{z_2})^k z_1. \end{aligned}$$

Portanto, (2.14) torna-se

$$\begin{aligned} p(z_1, z_2) = &\sum A_{rst}(z_1\overline{z_1})^r(z_2\overline{z_2})^s(z_1^l\overline{z_2}^k + \overline{z_1}^l z_2^k)^t z_1 + \\ &+ \sum B_{uvw}(z_1\overline{z_1})^u(z_2\overline{z_2})^v(z_1^l\overline{z_2}^k + \overline{z_1}^l z_2^k)^w\overline{z_1}^{l-1}z_2^k. \end{aligned}$$

Escrevendo $A_{rst} = M_{rst} + iN_{rst}$ e $B_{uvw} = P_{uvw} + iQ_{uvw}$, com $M_{rst}, N_{rst}, P_{uvw}, Q_{uvw} \in \mathbb{R}$ e observando que $z_1^l\overline{z_2}^k + \overline{z_1}^l z_2^k = 2Re(z_1^l\overline{z_2}^k)$ temos

$$p(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2)z_1 + f_2(z_1, z_2)iz_1 + f_3(z_1, z_2)\overline{z_1}^{l-1}z_2^k + f_4(z_1, z_2)i\overline{z_1}^{l-1}z_2^k,$$

com $f_i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, funções de $|z_1|^2$, $|z_2|^2$, $Re(z_1^l\overline{z_2}^k)$, ou seja, $f_i \in P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, pelo Exemplo 2.2.7.

Fazendo o mesmo processo para $q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, obtemos

$$q(z_1, z_2) = g_1(z_1, z_2)z_2 + g_2(z_1, z_2)iz_2 + g_3(z_1, z_2)z_1^l\overline{z_2}^{k-1} + g_4(z_1, z_2)iz_1^l\overline{z_2}^{k-1}$$

com $g_1, g_2, g_3, g_4 \in P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. Temos então

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2) = &f_1(z_1, z_2)(z_1, 0) + f_2(z_1, z_2)(iz_1, 0) + f_3(z_1, z_2)(\overline{z_1}^{l-1}z_2^k, 0) + f_4(z_1, z_2)(i\overline{z_1}^{l-1}z_2^k, 0) \\ &+ g_1(z_1, z_2)(0, z_2) + g_2(z_1, z_2)(0, iz_2) + g_3(z_1, z_2)(0, z_1^l\overline{z_2}^{k-1}) + g_4(z_1, z_2)(0, iz_1^l\overline{z_2}^{k-1}), \end{aligned}$$

com $f_i, g_i \in P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, como desejado.

Para encerrar este capítulo, introduzimos o conceito de módulo livre.

**Definição 2.3.8.** *Dizemos que $g_1, \cdots, g_r$ geram livremente o módulo $\vec{P}_V(\Gamma)$ sobre $P_V(\Gamma)$ se a relação*

$$f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r \equiv 0,$$

*onde $f_j \in P_V(\Gamma)$, implicar que $f_1 \equiv \cdots \equiv f_r \equiv 0$. Neste caso, dizemos que $\vec{P}_V(\Gamma)$ é um módulo livre sobre $P_V(\Gamma)$.*

**Exemplo 2.3.9.** Segundo a ação de $S^1$ em $\mathbb{C}$ dada no Exemplo 2.3.5, $\vec{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ é um módulo livre sobre $P_{\mathbb{C}}(S^1)$. De fato, pelo Exemplo 2.3.5 temos que $\vec{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ é gerado por $g_1(z) = z$ e $g_2(z) = iz$ sobre $P_{\mathbb{C}}(S^1)$, cuja base de Hilbert é $\{u(z) = z\overline{z}\}$. Suponha que $p(z)z + q(z)iz = 0$, onde $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ são funções arbitrárias em $P_{\mathbb{C}}(S^1)$. Então, $z(p(z) + iq(z)) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de onde $p(z) + iq(z) = 0$. Como $p(z), q(z) \in \mathbb{R}$ e $z$ é qualquer, temos $p \equiv q \equiv 0$ como desejado.

# CAPÍTULO 3

# TEORIA REVERSÍVEL EQUIVARIANTE E FORMAS NORMAIS

Muitos problemas em sistemas dinâmicos possuem estruturas especiais que são preservadas no estudo qualitativo do sistema. Uma dessas estruturas é um dos objetivos em nosso estudo e é dada pela presença de transformações que deixam as equações de movimento invariantes, as já mencionadas simetrias (equivariâncias) e antissimetrias (reversibilidades) . Um exemplo simples deste comportamento é o pêndulo ideal (sem perda de energia) mencionado na Introdução.

A teoria de formas normais é uma ferramenta importante na análise qualitativa local (em uma vizinhança de um ponto singular) de sistemas em presença de simetrias e antissimetrias e o seu desenvolvimento é o nosso segundo objetivo principal.

Neste capítulo, vamos continuar descrevendo a abordagem algébrica inerente ao contexto reversível equivariante, analisando as relações entre a teoria reversível e a teoria invariante apresentada no Capítulo 2. Num segundo momento, vamos apresentar a teoria de formas normais para campos de vetores reversíveis equivariantes como uma adaptação da teoria desenvolvida por Belitskii [5, 6] e Elphick *et al.* [13], usando as ferramentas algébricas apresentadas no Capítulo 2 e no presente.

Em todo este capítulo assumimos $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço vetorial $V$ de dimensão finita. Nossa abordagem aqui baseia-se nas referências [1] e [3].

## 3.1 Simetrias e Antissimetrias

Considere um homomorfismo de grupos

$$\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2. \tag{3.1}$$

Vamos denotar por $\Gamma_+$ o kernel de $\sigma$. Se $\sigma$ é o homomorfismo trivial, então obviamente $\Gamma = \Gamma_+$. Caso contrário, $\Gamma_+$ é um subgrupo próprio de $\Gamma$. Em ambos os casos, $\Gamma_+$ é um subgrupo normal de $\Gamma$ já que é o kernel de um homomorfismo de grupos. Denotamos por $\Gamma_-$ o complementar de $\Gamma_+$ em $\Gamma$. Temos então a seguinte definição:

**Definição 3.1.1.** *Um elemento $\gamma \in \Gamma_+$ é chamado simetria de $\Gamma$ e um elemento $\gamma \in \Gamma_-$ é chamado antissimetria de $\Gamma$.*

O próximo resultado deriva simplesmente do fato de $\sigma$ ser um homomorfismo de grupos.

**Proposição 3.1.2.** *O produto de duas simetrias ou de duas antissimetrias é uma simetria; o produto de uma simetria e uma antissimetria é uma antissimetria e o inverso de uma simetria (respectivamente, antissimetria) é uma simetria (respectivamente, antissimetria).*

Devido à proposição anterior, para todo $\gamma \in \Gamma_+$ temos $\gamma\Gamma_+ = \Gamma_+$. Além disso, se $\delta \in \Gamma_-$, então $\delta\Gamma_+ = \Gamma_-$ pois, pela proposição anterior, $\delta\Gamma_+ \subseteq \Gamma_-$ e se $\beta \in \Gamma_-$ podemos escrever $\beta = \delta(\delta^{-1}\beta) \in \delta\Gamma_+$. Logo, se $\sigma$ é não trivial, então existem duas classes laterais de $\Gamma_+$ em $\Gamma$: $\Gamma_+$ e $\delta\Gamma_+$, com $\delta \in \Gamma_-$ fixado (porém arbitrário). Portanto, neste caso, $\Gamma_+$ é um subgrupo normal de $\Gamma$ de índice 2. Além disso, podemos escrever

$$\Gamma = \Gamma_+ \mathbin{\dot\cup} \Gamma_- = \Gamma_+ \mathbin{\dot\cup} \delta\Gamma_+,$$

para qualquer $\delta \in \Gamma_-$ fixado.

Sob este formalismo algébrico temos a seguinte definição:

**Definição 3.1.3.** *Sejam $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo*[1] *e $(\rho, V)$ o espaço $V$ sob a representação $\rho$ de $\Gamma$. Uma função polinomial $f : (\rho, V) \to \mathbb{R}$ é chamada de $\Gamma-$anti-invariante, ou simplesmente anti-invariante, se*

$$f(\gamma x) = \sigma(\gamma) f(x) \tag{3.2}$$

*para todo $x \in V$ e para todo $\gamma \in \Gamma$. Uma aplicação polinomial $g : (\rho, V) \to (\rho, V)$ é chamada de $\Gamma-$reversível-equivariante, ou reversível-equivariante, se*

$$g(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma g(x), \tag{3.3}$$

*para todo $\gamma \in \Gamma$ e para todo $x \in V$.*

Denotamos por $Q_V(\Gamma)$ o espaço de todas as funções polinomiais $\Gamma-$anti-invariantes e por $\vec{Q}_V(\Gamma)$ o espaço de todas as aplicações polinomiais $\Gamma-$reversíveis-equivariantes.

Na definição acima, se $\sigma$ é o homomorfismo trivial, então $f$ satisfazendo (3.2) se reduz a uma função $\Gamma-$invariante e $g$ satisfazendo (3.3) se reduz a uma aplicação puramente $\Gamma-$equivariante.

**Observação 3.1.4.** Note que a existência de um epimorfismo $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ é garantida sempre que $\Gamma$ possuir um subgrupo normal de índice 2. Caso contrário, não faz sentido falarmos em $Q_V(\Gamma)$ e $\vec{Q}_V(\Gamma)$.

Assim como $\vec{P}_V(\Gamma)$, os espaços $Q_V(\Gamma)$ e $\vec{Q}_V(\Gamma)$ também possuem estrutura de módulos sobre o anel $P_V(\Gamma)$. Para ver isso, considere a seguinte definição:

**Definição 3.1.5.** *Sejam $\rho$ uma representação de $\Gamma$ em $V$ e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo. A representação $\sigma-$dual de $\rho$ é a representação de $\Gamma$ em $V$ definida por*

$$\begin{array}{rcccl} \rho_\sigma & : & \Gamma & \to & GL(V) \\ & & \gamma & \longmapsto & \sigma(\gamma)\rho_\gamma. \end{array}$$

*A ação correspondente é chamada de ação dual. Além disso, podemos definir uma ação de $\Gamma$ em $\mathbb{R}$ por*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \Gamma \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (\gamma, x) & \longmapsto & \sigma(\gamma)x. \end{array}$$

[1] Um homomorfismo sobrejetor

Assim, se $g \in \vec{Q}_V(\Gamma)$ então, por (3.3), temos

$$g(\rho_\gamma(x)) = g(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma g(x) = \rho_\sigma(\gamma)(g(x)),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$, ou seja, $g$ pode ser vista como uma aplicação equivariante de $(\rho, V)$ em $(\rho_\sigma, V)$. Do mesmo modo, se $f \in Q_V(\Gamma)$, então por (3.2) temos válida a igualdade $f(\rho_\gamma(x)) = \sigma(\gamma)f(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$, e podemos ver $f$ como uma aplicação equivariante de $(\rho, V)$ em $(\sigma, \mathbb{R})$. Portanto, $Q_V(\Gamma)$ e $\vec{Q}_V(\Gamma)$ tem a estrutura de módulo herdada de $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ e, pelo Teorema 2.3.3, ambos $Q_V(\Gamma)$ e $\vec{Q}_V(\Gamma)$ são finitamente gerados sobre $P_V(\Gamma)$.

O lema a seguir caracteriza o anel $P_V(\Gamma)$ e os módulos $Q_V(\Gamma)$, $\vec{P}_V(\Gamma)$ e $\vec{Q}_V(\Gamma)$, relacionando-os com os invariantes e equivariantes sob $\Gamma_+$ apenas.

**Lema 3.1.6.** *Seja $\Gamma_+$ o subgrupo das simetrias de $\Gamma$ e fixe $\delta \in \Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$. Então,*

$$\begin{aligned}
P_V(\Gamma) &= \{f \in P_V(\Gamma_+);\ f(\delta x) = f(x),\ \forall\ x \in V\} \\
\vec{P}_V(\Gamma) &= \{g \in \vec{P}_V(\Gamma_+);\ g(\delta x) = \delta g(x),\ \forall\ x \in V\} \\
Q_V(\Gamma) &= \{f \in P_V(\Gamma_+);\ f(\delta x) = -f(x),\ \forall\ x \in V\} \\
\vec{Q}_V(\Gamma) &= \{g \in \vec{P}_V(\Gamma_+);\ g(\delta x) = -\delta g(x),\ \forall\ x \in V\}.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar somente a terceira igualdade e as demais seguem analogamente. Considere um epimorfismo $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ com $\Gamma_+ = \ker \sigma$ e $\Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$. Seja $f \in P_V(\Gamma_+)$ tal que $f(\delta x) = -f(x)$ para todo $x \in V$. Então $f(\gamma x) = f(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma_+$. Além disso, uma vez que $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$, dado $\gamma \in \Gamma_-$, podemos escrever $\gamma = \delta\gamma'$ para algum $\gamma' \in \Gamma_+$ e daí

$$f(\gamma x) = f((\delta\gamma')x) = f(\delta(\gamma' x)) = -f(\gamma' x) = -f(x).$$

Portanto, $f(\gamma x) = \sigma(\gamma)f(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e para todo $x \in V$, ou seja, $f \in Q_V(\Gamma)$. Para a inclusão contrária, seja $f \in Q_V(\Gamma)$. Então, $f(\gamma x) = \sigma(\gamma)f(x)$ para todo $x \in V$ e para todo $\gamma \in \Gamma$. Mas, $\sigma(\gamma) = 1$ se $\gamma \in \Gamma_+$ e $\sigma(\gamma) = -1$ se $\gamma \in \Gamma_-$. Então $f \in P_V(\Gamma_+)$ e $f(\delta x) = -f(x)$ para todo $x \in V$, como desejado. □

A fim de facilitar futuros cálculos, enunciamos o seguinte lema, cuja demonstração segue da definição de produto de aplicações, da definição dos respectivos módulos e anel e da linearidade da ação de $\Gamma$ em $V$.

**Lema 3.1.7.** *Seja $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo em $V$. Sejam $f \in P_V(\Gamma)$, $p \in Q_V(\Gamma)$, $g \in \vec{P}_V(\Gamma)$ e $q \in \vec{Q}_V(\Gamma)$. Então, $fp \in Q_V(\Gamma)$, $fg \in \vec{P}_V(\Gamma)$, $pq \in \vec{P}_V(\Gamma)$, $fq \in \vec{Q}_V(\Gamma)$, $pg \in \vec{Q}_V(\Gamma)$.*

*Demonstração.* Sejam $p \in Q_V(\Gamma)$ e $q \in \vec{Q}_V(\Gamma)$. Então

$$pq(\gamma x) = p(\gamma x)q(\gamma x) = \sigma(\gamma)p(x)\sigma(\gamma)\gamma q(x) = \sigma(\gamma)^2\gamma p(x)q(x) = \gamma(pq)(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Os outros casos seguem analogamente. □

## 3.2 Cálculo de Geradores

Já vimos que se $\Gamma$ é um grupo de Lie compacto, então $Q_V(\Gamma)$ e $\vec{Q}_V(\Gamma)$ são módulos finitamente gerados sobre $P_V(\Gamma)$. Nessa seção vamos apresentar um algoritmo que nos fornece seus geradores a partir do conhecimento dos invariantes e equivariantes apenas sob a ação do grupo de simetrias $\Gamma_+$. A principal ferramenta utilizada neste processo são os operadores e $\sigma-$operadores de Reynolds. A importância da construção dos geradores de $\vec{Q}_V(\Gamma)$ se tornará clara no cálculo das formas normais reversíveis equivariantes apresentada neste capítulo e no próximo.

### 3.2.1 Operadores de Reynolds

Os operadores e $\sigma-$operadores de Reynolds constituem um importante mecanismo algébrico na teoria invariante de grupos de Lie. Sua definição faz uso do grupo $\Gamma_+$ das simetrias de $\Gamma$.

**Definição 3.2.1.** *Sejam $\Gamma$ um grupo de Lie compacto e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos. Considere $\Gamma_+ = \ker\sigma$ e fixe $\delta \in \Gamma_-$. Os operadores de Reynolds sobre $P_V(\Gamma_+)$ e $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ são aplicações $R : P_V(\Gamma_+) \to P_V(\Gamma_+)$ e $\vec{R} : \vec{P}_V(\Gamma_+) \to \vec{P}_V(\Gamma_+)$ definidas por*

$$R(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) \text{ e } \vec{R}(g)(x) = \frac{1}{2}(g(x) + \delta^{-1}g(\delta x)), \tag{3.4}$$

*respectivamente. Os $\sigma-$operadores de Reynolds sobre $P_V(\Gamma_+)$ e $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ são aplicações $S : P_V(\Gamma_+) \to P_V(\Gamma_+)$ e $\vec{S} : \vec{P}_V(\Gamma_+) \to \vec{P}_V(\Gamma_+)$ definidas por*

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(\delta x)) \text{ e } \vec{S}(g)(x) = \frac{1}{2}(g(x) - \delta^{-1}g(\delta x)), \tag{3.5}$$

*respectivamente.*

Para a próxima proposição $Id_{P_V(\Gamma_+)}$ e $Id_{\vec{P}_V(\Gamma_+)}$ denotam os operadores identidade em $P_V(\Gamma_+)$ e $\vec{P}_V(\Gamma_+)$, respectivamente.

**Proposição 3.2.2.** *Os operadores de Reynolds $R$, $\vec{R}$, $S$ e $\vec{S}$ definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente, satisfazem as seguintes propriedades:*

*(i) São homomorfismos de $P_V(\Gamma)-$módulos tais que*

$$R + S = Id_{P_V(\Gamma_+)} \text{ e } \vec{R} + \vec{S} = Id_{\vec{P}_V(\Gamma_+)}.$$

*(ii) Eles são projeções idempotentes com*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im} S = \ker R = Q_V(\Gamma) & e & \ker S = \mathrm{Im} R = P_V(\Gamma); \\ \mathrm{Im} \vec{S} = \ker \vec{R} = \vec{Q}_V(\Gamma) & e & \ker \vec{S} = \mathrm{Im} \vec{R} = \vec{P}_V(\Gamma). \end{array}$$

*(iii) Valem as seguintes decomposições como espaços vetoriais:*

$$\begin{array}{rcl} P_V(\Gamma_+) & = & \ker R \oplus \mathrm{Im} R = \ker S \oplus \mathrm{Im} S \text{ e} \\ \vec{P}_V(\Gamma_+) & = & \ker \vec{R} \oplus \mathrm{Im} \vec{R} = \ker \vec{S} \oplus \mathrm{Im} \vec{S}. \end{array}$$

*Demonstração.* *(i)* Temos que $P_V(\Gamma) \subseteq P_V(\Gamma_+)$ pelo Lema 3.1.6. Logo, $P_V(\Gamma)$ é um subanel do anel $P_V(\Gamma_+)$ de modo que $P_V(\Gamma_+)$ pode ser visto como um $P_V(\Gamma)-$módulo. Por consequência, como $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ é um módulo sobre $P_V(\Gamma_+)$ temos que $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ é um $P_V(\Gamma)-$módulo. Agora, fixando $\delta \in \Gamma_-$, se $f, g \in P_V(\Gamma_+)$ e $p \in P_V(\Gamma)$ temos para todo $x \in V$

$$\begin{array}{rcl} R(f+g)(x) & = & \frac{1}{2}((f+g)(x) + (f+g)(\delta x)) \\ & = & \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + f(\delta x) + g(\delta x)) \\ & = & \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) + \frac{1}{2}(g(x) + g(\delta x)) = R(f)(x) + R(g)(x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} R(pf)(x) & = & \frac{1}{2}(pf(x) + pf(\delta x)) \\ & = & \frac{1}{2}(p(x)f(x) + p(\delta x)f(\delta x)) \\ & = & \frac{1}{2}(p(x)f(x) + p(x)f(\delta x)) \\ & = & \frac{1}{2}p(x)(f(x) + f(\delta x)) = (pR(f))(x). \end{array}$$

Da mesma forma, mostramos que $R(fp) = (R(f)p)$. Portanto, $R$ é um homomorfismo de $P_V(\Gamma)-$módulos. Para os outros operadores a demonstração é análoga. Além disso,

$$(R+S)(f)(x) = R(f)(x) + S(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(\delta x)) = f(x),$$

para todo $f \in P_V(\Gamma_+)$ e para todo $x \in V$. Logo, $R+S = Id_{P_V(\Gamma_+)}$. Da mesma forma, usando a definição de $\vec{R}$ e $\vec{S}$ temos que $\vec{R} + \vec{S} = Id_{\vec{P}_V(\Gamma_+)}$.

*(ii)* Vamos mostrar que $\ker \vec{R} = \vec{Q}_V(\Gamma)$ e que $\mathrm{Im}\vec{R} = \vec{P}_V(\Gamma)$ e as demais igualdades seguem de modo análogo. Seja $f \in \ker \vec{R}$ e fixe $\delta \in \Gamma_-$. Então, $f \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$ e, para todo $x \in V$, $\vec{R}(f)(x) = 0$. Por definição, $\dfrac{1}{2}(f(x) + \delta^{-1} f(\delta x)) = 0$, o que implica em $f(x) = -\delta^{-1} f(\delta x)$, para todo $x \in V$. Portanto, $f(\delta x) = -\delta f(x)$ e pelo Lema 3.1.6, $f \in \vec{Q}_V(\Gamma)$. Por outro lado, se $f \in \vec{Q}_V(\Gamma)$, então $f(\delta x) = \sigma(\delta)\delta f(x) = -\delta f(x)$, para todo $x \in V$. Logo, $\delta^{-1} f(\delta x) = -f(x)$ e, consequentemente, $R(f) \equiv 0$. Portanto, $\ker \vec{R} = \vec{Q}_V(\Gamma)$.

Seja agora $f \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$. Por definição $\vec{R}(f) \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$. Vamos usar novamente o Lema 3.1.6 para mostrar que $\vec{R}(f) \in \vec{P}_V(\Gamma)$. Temos:

$$\begin{aligned}
\vec{R}(f)(\delta x) &= \frac{1}{2}(f(\delta x) + \delta^{-1} f(\delta\delta x)) \\
&= \frac{1}{2}(f(\delta x) + \delta^{-1}\delta^2 f(x)) \\
&= \frac{1}{2}(f(\delta x) + \delta f(x)) \\
&= \frac{1}{2}\delta(\delta^{-1} f(\delta x) + f(x)) = \delta \vec{R}(f)(x),
\end{aligned}$$

a segunda igualdade seguindo pois $\delta^2 \in \Gamma_+$. Assim, $\mathrm{Im}\vec{R} \subseteq \vec{P}_V(\Gamma)$. Por outro lado, se $f \in \vec{P}_V(\Gamma)$, então $f(\delta x) = \delta f(x)$ e daí

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + \delta^{-1} f(\delta x)) = \vec{R}(f)(x) \tag{3.6}$$

para todo $x \in V$. Portanto, segue a igualdade $\mathrm{Im}\vec{R} = \vec{P}_V(\Gamma)$. Resta mostrar a idempotência de $\vec{R}$. De fato, de (3.6) segue que $\vec{R}|_{\vec{P}_V(\Gamma)} = Id_{\vec{P}_V(\Gamma)}$. Como $\vec{R}(f) \in \vec{P}_V(\Gamma)$, para todo $f \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$, temos que $\vec{R} \circ \vec{R}(f) = \vec{R}(\vec{R}(f)) = \vec{R}(f)$, de onde $\vec{R}^2 = \vec{R}$.

*(iii)* Mostremos somente a igualdade $\vec{P}_V(\Gamma_+) = \ker \vec{R} \oplus \mathrm{Im}\vec{R}$. Já temos que $\mathrm{Im}\vec{R} \subseteq \vec{P}_V(\Gamma_+)$, bem como $\ker \vec{R} \subseteq \vec{P}_V(\Gamma_+)$ implicando que $\ker \vec{R} + \mathrm{Im}\vec{R} \subseteq \vec{P}_V(\Gamma_+)$. Seja $f \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$. Podemos escrever $f = (f - \vec{R}(f)) + \vec{R}(f)$. Como $\vec{R}$ é idempotente e é um homomorfismo de módulos, temos $\vec{R}(f - \vec{R}(f)) = \vec{R}(f) - \vec{R}^2(f) \equiv 0$, ou seja, $f - \vec{R}(f) \in \ker(\vec{R})$. Então, $f = (f - \vec{R}(f)) + \vec{R}(f) \in \ker \vec{R} + \mathrm{Im}\vec{R}$ e a igualdade segue. Resta mostrar que a soma é direta. Se $f \in \ker \vec{R} \cap \mathrm{Im}\vec{R}$, então $\vec{R}(f) \equiv 0$ e existe $\overline{f} \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$ tal que $\vec{R}(\overline{f}) = f$. Como $\vec{R}$ é idempotente, $f = \vec{R}(\overline{f}) = \vec{R}(\vec{R}(\overline{f})) = \vec{R}(f) \equiv 0$, fazendo-nos concluir o resultado.

□

Do item *(iii)* da proposição anterior estão consequências imediatas e valiosas, tanto para o desenvolvimento da teoria quanto para as aplicações do último capítulo. Por isso, daremos destaque a elas, enunciando-as em forma de corolário.

**Corolário 3.2.3.** *Sejam $\Gamma$ agindo linearmente em $V$ e $\Gamma_+$ o grupo das simetrias de $\Gamma$. Então, as seguintes decomposições em soma direta de módulos sobre o anel $P_V(\Gamma)$ valem:*

$$P_V(\Gamma_+) = P_V(\Gamma) \oplus Q_V(\Gamma) \quad e \tag{3.7}$$

$$\vec{P}_V(\Gamma_+) = \vec{P}_V(\Gamma) \oplus \vec{Q}_V(\Gamma). \tag{3.8}$$

### 3.2.2 Cálculo dos Geradores Reversíveis Equivariantes

A sequência de resultados dessa subseção culminará em um algoritmo para a determinação dos geradores do módulo $\vec{Q}_V(\Gamma)$ sobre o anel de invariantes $P_V(\Gamma)$. Começamos com um teorema que nos mostra como encontrarmos os geradores dos anti-invariantes como um módulo sobre $P_V(\Gamma)$. Para a demonstração deste teorema usamos a notação de multi-índice, ou seja, $a_\alpha$ representa $a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s}$ se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ é uma $s-$upla de inteiros não negativos.

**Teorema 3.2.4.** *Seja $\Gamma$ agindo linearmente em $V$ e fixe $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos com $\ker \sigma = \Gamma_+$. Considere o operador $S$ definido em (3.5). Se $\{u_1, \cdots, u_s\}$ é uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma_+)$, então o conjunto*

$$\{S(u_1), \cdots, S(u_s)\} \tag{3.9}$$

*gera $Q_V(\Gamma)$ como módulo sobre $P_V(\Gamma)$.*

*Demonstração.* Sejam $f \in Q_V(\Gamma)$ e $\{u_1, \cdots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma_+)$. Fixe $\delta \in \Gamma_-$ qualquer. Como $I_{P_V(\Gamma_+)} = R + S$, podemos escrever $u_i = R(u_i) + S(u_i)$, para todo $i = 1, \cdots, s$. Deste modo, o conjunto $\{R(u_i), S(u_i);\ i = 1, \cdots, s\}$ também forma uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma_+)$. Pelo Lema 3.1.6, $f \in P_V(\Gamma_+)$ e o escrevemos como

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \cdots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}, \tag{3.10}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_s) \in \mathbb{N}^{2s}$ e $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Sabemos pela Proposição 3.2.2 que $R(u_i) \in P_V(\Gamma)$ e $S(u_i) \in Q_V(\Gamma)$. Então,

$$\begin{aligned} f(\delta x) &= \sum_{\alpha} a_\alpha [R(u_1)(\delta x)]^{\alpha_1} \cdots [R(u_s)(\delta x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(\delta x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_s)(\delta x)]^{\beta_s} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{\beta_1 + \cdots + \beta_s} a_\alpha [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \cdots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}. \end{aligned}$$

Como $f \in Q_V(\Gamma)$ temos que $f(\delta x) = -f(x)$, para todo $x \in V$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= f(\delta x) + f(x) \\ &= \sum_{\alpha} ((-1)^{\beta_1 + \cdots + \beta_s} + 1) a_\alpha [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \cdots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}, \end{aligned}$$

de onde $a_\alpha = 0$ ou $\beta_1 + \cdots + \beta_s$ é um número ímpar. Neste caso, $\beta_1 + \cdots + \beta_{j-1} + (\beta_j - 1) + \beta_{j+1} + \cdots + \beta_s$ é par e temos a parcela $k_\alpha(x) S(u_j)(x)$ onde

$$k_\alpha(x) = a_\alpha [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \cdots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_j)(x)]^{\beta_j - 1} \cdots [S(u_s)(x)]^{\beta_s},$$

para algum $j = 1, \cdots, s$. Tal produto é $\Gamma$-invariante, uma vez que temos um produto par de funções $\Gamma-$anti-invariantes[2]. Logo, $k_\alpha \in P_V(\Gamma)$. Escrevemos $L_j$ para a soma de todas as funções $k_\alpha$ que acompanham $S(u_j)$. Assim, para todo $x \in V$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{s} L_j(x) S(u_j)(x) = \left( \sum_{j=1}^{s} L_j S(u_j) \right)(x),$$

com $L_j \in P_V(\Gamma)$ e, portanto, segue o resultado. $\square$

[2]Basta observar que se $f_i \in Q_V(\Gamma)$, com $1 \leq i \leq n$, e $f(x) = f_1(x) \cdots f_n(x)$, com $n$ par, então $f(\delta x) = (-1)^n f_1(x) \cdots f_n(x) = f(x)$. Logo, f é $\Gamma-$invariante.

**Corolário 3.2.5.** *Nas condições do teorema anterior, o conjunto* $\{1, S(u_1), \cdots, S(u_s)\}$ *gera* $P_V(\Gamma_+)$ *como um módulo sobre* $P_V(\Gamma)$.

*Demonstração.* O resultado segue usando a decomposição dada em (3.7). De fato, se $f \in P_V(\Gamma_+)$, então

$$f = f_0 + \sum_{j=1}^{s} f_j S(u_j),$$

com $f_i \in P_V(\Gamma)$, para todo $i = 0, \cdots, s$ e $S(u_j)$ geradores de $Q_V(\Gamma)$. Portanto, $P_V(\Gamma_+) = P_V(\Gamma)\{1, S(u_1), \cdots, S(u_s)\}$. $\square$

**Lema 3.2.6.** *Seja* $\{S(u_0) \equiv 1, S(u_1), \cdots, S(u_s)\}$ *um conjunto de geradores para* $P_V(\Gamma_+)$ *como no corolário anterior. Seja* $\{H_0, \cdots, H_r\}$ *um conjunto de geradores para o módulo* $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ *sobre o anel* $P_V(\Gamma_+)$. *Então,*

$$\{H_{ij} = S(u_i)H_j; i = 0, \cdots, s \text{ e } j = 0, \cdots, r\}$$

*é um conjunto de geradores para o módulo* $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ *sobre o anel* $P_V(\Gamma)$.

*Demonstração.* Seja $G \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$. Então existem $p_j \in P_V(\Gamma_+)$, $j = 0, \cdots, r$ tais que $G = \sum_{j=0}^{r} p_j H_j$. Como $\{S(u_0) \equiv 1, S(u_1), \cdots, S(u_s)\}$ gera $P_V(\Gamma_+)$ sobre $P_V(\Gamma)$, então para cada $j = 0, \cdots, r$ existem $p_{ij} \in P_V(\Gamma)$ com $i = 0, \cdots, s$ tais que $p_j = \sum_{i=0}^{s} p_{ij} S(u_i)$. Substituindo devidamente temos

$$G = \sum_{j=0}^{r} p_j H_j = \sum_{j=0}^{r} \left( \sum_{i=0}^{s} p_{ij} S(u_i) \right) H_j = \sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij} S(u_i) H_j,$$

com $p_{ij} \in P_V(\Gamma)$ e $S(u_i)H_j \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$, conforme o Lema 3.1.7, para todo $i = 0, \cdots, s$ e $j = 0, \cdots, r$. $\square$

Segue, portanto, o principal resultado desta seção:

**Teorema 3.2.7.** *Seja* $\{H_{ij};\ i = 0, \cdots, s \text{ e } j = 0, \cdots, r\}$ *um conjunto de geradores para* $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ *sobre* $P_V(\Gamma)$ *obtido como no lema anterior. Considere o* $\sigma-$*operador de Reynolds* $\vec{S}$ *definido em (3.5). Então*

$$\{\vec{S}(H_{ij});\ i = 0, \cdots, s \text{ e } j = 0, \cdots, r\}$$

*é um conjunto de geradores para* $\vec{Q}(\Gamma)$ *sobre* $P_V(\Gamma)$.

*Demonstração.* Seja $\tilde{G} \in \vec{Q}_V(\Gamma)$. Sabemos, pela Proposição 3.2.2, que $\vec{Q}_V(\Gamma) = \mathrm{Im}\vec{S}$. Logo, existe $G \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$ tal que $\tilde{G} = \vec{S}(G)$. Por hipótese, $G = \sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij} H_{ij}$ com $p_{ij} \in P_V(\Gamma)$. Como $\vec{S}$ é um homomorfismo de $P_V(\Gamma)-$módulos, temos

$$\tilde{G} = \vec{S}(\sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij} H_{ij}) = \sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij} \vec{S}(H_{ij}),$$

com $p_{ij} \in P_V(\Gamma)$ e $\vec{S}(H_{ij}) \in \vec{Q}_V(\Gamma)$, o que prova o resultado. □

Vamos organizar todos os resultados desta subseção na forma de um algoritmo, que será utilizado no Capítulo 4 na determinação das formas normais de campos de vetores Hamiltonianos reversíveis equivariantes.

**Algoritmo 3.2.8. (Geradores Reversíveis equivariantes)**

1. Considere $\Gamma$ um grupo de Lie compacto. Fixe um epimorfismo $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$, com $\ker\sigma = \Gamma_+$, e fixe uma antissimetria $\delta \in \Gamma_-$;

2. Considere uma base de Hilbert $\{u_1, \cdots, u_s\}$ para $P_V(\Gamma_+)$ e $\{H_0, \cdots, H_r\}$ um conjunto de geradores para $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ sobre $P_V(\Gamma_+)$;

3. Defina $S(u_0) \equiv 1$ e faça $S(u_i)$ para $i = 1, \cdots, s$;

4. Construa $H_{ij} = S(u_i)H_j$ para $i = 0, \cdots, s$ e $j = 0, \cdots, r$;

5. Para $i = 0, \cdots, s$ e $j = 0, \cdots, r$, calcule $\vec{S}(H_{ij})$.

**Resultado:** Conjunto de geradores $\{\vec{S}(H_{ij}); i = 0, \cdots, s \text{ e } j = 0, \cdots, s\}$ para $\vec{Q}_V(\Gamma)$ como módulo sobre $P_V(\Gamma)$.

Ainda com o propósito de determinarmos formas normais, é necessário a obtenção de uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma)$. O próximo teorema, cuja demonstração é encontrada em [4], nos mostra que podemos fazer isto a partir de uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma_+)$.

**Teorema 3.2.9.** *Sejam $\Gamma$ agindo linearmente em $V$ e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo com $\ker\sigma = \Gamma_+$. Considere os operadores $R$ e $S$ definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente. Se $\{u_1, \cdots, u_s\}$ é uma base de Hilbert para o anel $P_V(\Gamma_+)$, então o conjunto*

$$\{R(u_i), S(u_i)S(u_j);\ i, j = 1, \cdots, s\}$$

*é uma base de Hilbert para o anel $P_V(\Gamma)$.*

*Demonstração.* Vamos seguir a mesma ideia da demonstração do Teorema 3.2.4. Começamos fixando $\delta \in \Gamma_-$ e seja $f \in P_V(\Gamma)$. Sabemos que $\{R(u_1), \cdots, R(u_s), S(u_1), \cdots, S(u_s)\}$ é também uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma_+)$. Como $f \in P_V(\Gamma)$, em particular $f \in P_V(\Gamma_+)$ e podemos escrevê-la como em (3.10). Já que $R(u_i) \in P_V(\Gamma)$ e $S(u_i) \in Q_V(\Gamma)$ para todo $i = 1, \cdots, s$, então

$$f(\delta x) = \sum_\alpha (-1)^{\beta_1+\cdots+\beta_s} a_\alpha [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \cdots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}.$$

Como $f \in P_V(\Gamma)$ temos que $f(\delta x) = f(x)$, de onde $a_\alpha = 0$ ou $\beta_1 + \cdots + \beta_s$ é um número par. Como produto par de funções $\Gamma$-anti-invariantes é $\Gamma$-invariante, temos que

$$k_\alpha(x) = a_\alpha [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \cdots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}$$

é uma função $\Gamma$-invariante. Assim, de (3.10) os geradores de $P_V(\Gamma)$, como anel, são dados por

$$R(u_1)(x), \cdots, R(u_s), \ S(u_1)^{\beta_1} \cdots S(u_s)^{\beta_s},$$

onde $\beta_1 + \cdots + \beta_s$ é par. Portanto, o conjunto $\{R(u_i), S(u_i)S(u_j);\ i, j = 1, \cdots, s\}$ é uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma)$. □

Similar ao resultado anterior, o próximo teorema nos mostra uma forma de encontrar os geradores de $\vec{P}_V(\Gamma)$ como um módulo sobre $P_V(\Gamma)$ a partir de um conjunto de geradores para o módulo $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ sobre $P_V(\Gamma)$. Este processo será usado no caso específico das formas normais de campos hamiltonianos $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi-$reversíveis-equivariantes do Capítulo 4. Sua demonstração é idêntica à demonstração do Teorema 3.2.7 trocando $\vec{S}$ por $\vec{R}$ e por isso a omitimos aqui.

**Teorema 3.2.10.** *Seja $\{H_{ij};\ 0 \leq i \leq s,\ 0 \leq j \leq r\}$ um conjunto gerador de $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ sobre $P_V(\Gamma)$ obtido como no Lema 3.2.6. Considere o operador $\vec{R}$ definido em (3.4). Então*

$$\{\vec{R}(H_{ij});\ 0 \leq i \leq s,\ 0 \leq j \leq r\}$$

*é um conjunto gerador para o módulo $\vec{P}_V(\Gamma)$ sobre $P_V(\Gamma)$.*

## 3.3 Teoria Invariante para o Produto Semidireto

Para calcularmos as formas normais pelo método descrito na Subseção 3.5, precisaremos construir o produto semidireto de dois grupos. Essa construção generaliza o produto direto e depende da existência de um homomorfismo de grupos. Essa seção destina-se a descrever algumas ferramentas da teoria invariante para os produtos direto e semidireto. Para o que segue, denotamos por $Aut(\Gamma)$ o grupo dos automorfismos de $\Gamma$ com a operação de composição.

**Definição 3.3.1.** *Dados dois grupos $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, o produto semidireto de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, denotado por $\Gamma \rtimes \Gamma_2$, é o produto direto $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ como conjunto munido de uma operação induzida por um homomorfismo $\mu : \Gamma_2 \to Aut(\Gamma_1)$, onde*

$$(\gamma_1, \gamma_2) \cdot_\mu (\tau_1, \tau_2) = (\gamma_1 \mu(\gamma_2)(\tau_1), \gamma_2 \tau_2).$$

O produto semidireto tem estrutura de grupo e, da forma como foi definido, segue que $\Gamma_1 \times \{0\} \triangleleft \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$. Note também que se $\mu$ é o homomorfismo trivial, que leva $\gamma_2 \in \Gamma_2$ no automorfismo identidade de $\Gamma_1$, então $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Dadas $(\rho, V)$ e $(\eta, V)$ representações de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ em $V$, respectivamente, gostaríamos de definir uma representação do produto semidireto $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ em $V$. Para isso, considere as ações $(\gamma_1, x) \mapsto \gamma_1 x$ e $(\gamma_2, x) \mapsto \gamma_2 x$ de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, respectivamente, e defina a operação $(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) \times V \to V$ por

$$(\gamma_1, \gamma_2)x = \gamma_1(\gamma_2 x). \tag{3.11}$$

Note que (3.11) pode ser reescrita como $(\gamma_1, \gamma_2)x = \rho_{\gamma_1}(\eta_{\gamma_2}(x))$, para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $x \in V$. Então, temos:

**Proposição 3.3.2.** *A operação definida em (3.11) define uma ação de $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ em $V$ se, e somente se, $\rho_{\mu(\gamma_2)(\gamma_1)} = \eta_{\gamma_2} \circ \rho_{\gamma_1} \circ \eta_{\gamma_2}^{-1}$. Em particular, quando $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ como grupo, a operação em questão define uma ação se, e somente se, as ações de $\Gamma_1$ e de $\Gamma_2$ comutam.*

*Demonstração.* Veja primeiramente que a aplicação definida em (3.11) é contínua pois é a composta das ações de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ em $V$, que são contínuas. Além disso, ela define uma ação se, e somente se, para cada $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$, a aplicação $\varrho_{(\gamma_1,\gamma_2)} : V \to V$ definida por $\varrho_{(\gamma_1,\gamma_2)}(x) = \gamma_1(\gamma_2 x)$ é linear e

$$(\gamma_1, \gamma_2)((\tau_1, \tau_2)x) = ((\gamma_1, \gamma_2) \cdot_\mu (\tau_1, \tau_2))x, \tag{3.12}$$

para todo $(\gamma_1, \gamma_2), (\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ e $x \in V$. A primeira condição sempre ocorre pois $\varrho_{(\gamma_1,\gamma_2)} = \rho_{\gamma_1} \circ \eta_{\gamma_2}$, sendo $\rho_{\gamma_1}$ e $\eta_{\gamma_2}$ lineares. Assim, a aplicação (3.11) define uma ação se, e somente se, vale (3.12). Por um lado,

$$(\gamma_1, \gamma_2)((\tau_1, \tau_2)x) = \rho_{\gamma_1}(\eta_{\gamma_2}(\rho_{\tau_1}(\eta_{\tau_2}(x)))) = \rho_{\gamma_1} \circ \eta_{\gamma_2} \circ \rho_{\tau_1} \circ \eta_{\tau_2}(x)$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} ((\gamma_1, \gamma_2) \cdot_\mu (\tau_1, \tau_2))x &= (\gamma_1 \mu(\gamma_2)(\tau_1), \gamma_2 \tau_2)x = \rho_{\gamma_1 \mu(\gamma_2)(\tau_1)} \circ \eta_{\gamma_2 \tau_2}(x) \\ &= \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\mu(\gamma_2)(\tau_1)} \circ \eta_{\gamma_2} \circ \eta_{\tau_2}(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. Portanto, (3.12) vale se, e somente se,

$$\rho_{\gamma_1} \circ \eta_{\gamma_2} \circ \rho_{\tau_1} \circ \eta_{\tau_2} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\mu(\gamma_2)(\tau_1)} \circ \eta_{\gamma_2} \circ \eta_{\tau_2},$$

ou seja, $\rho_{\mu(\gamma_2)(\tau_1)} = \eta_{\gamma_2} \circ \rho_{\tau_1} \circ \eta_{\gamma_2}^{-1}$ para todo $\tau_1 \in \Gamma_1$ e $\gamma_2 \in \Gamma_2$. □

Portanto, neste trabalho, sempre que $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ admitirem um produto semidireto $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ com uma representação $\varrho_{(\gamma_1,\gamma_2)} = \rho_{\gamma_1} \circ \eta_{\gamma_2}$, vamos assumir as condições da proposição anterior.

O próximo resultado relaciona, de certo modo, a teoria invariante para $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ com a teoria invariante de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$. Tal resultado é de fundamental importância na dedução das formas normais no Capítulo 4, quando $\Gamma_1$ for um grupo de Lie compacto cujos elementos agem como simetrias. Sendo assim, suponha que exista um epimorfismo $\sigma_2 : \Gamma_2 \to \mathbb{Z}_2$ e defina

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\sigma} : & \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 & \to & \mathbb{Z}_2 \\ & (\gamma_1, \gamma_2) & \longmapsto & \sigma_2(\gamma_2). \end{array} \tag{3.13}$$

Esta construção é um modo de ver $\Gamma_1$ como um grupo que contém somente simetrias, ou seja, dotado do homomorfismo trivial $\sigma_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{Z}_2$. Temos, então o seguinte resultado:

**Proposição 3.3.3.** *Sejam $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ grupos de Lie compactos agindo linearmente em $V$ e considere o epimorfismo $\tilde{\sigma}$ definido em (3.13). Então*

*(i)* $P_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = P_V(\Gamma_1) \cap P_V(\Gamma_2)$;

*(ii)* $\vec{P}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \vec{P}_V(\Gamma_1) \cap \vec{P}_V(\Gamma_2)$;

*(iii)* $Q_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = P_V(\Gamma_1) \cap Q_V(\Gamma_2)$;

*(iv)* $\vec{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \vec{P}_V(\Gamma_1) \cap \vec{Q}_V(\Gamma_2)$.

*Demonstração.* Mostremos apenas o item *(iv)*, os demais itens seguem de forma análoga. Sejam $g \in \vec{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2)$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ e $x \in V$ quaisquer. Então

$$g(\gamma_1(\gamma_2 x)) = g((\gamma_1, \gamma_2)x) = \tilde{\sigma}(\gamma_1, \gamma_2)\gamma_1\gamma_2 g(x).$$

Sejam $e_1, e_2$ os elementos neutros de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, respectivamente. Então

$$g(\gamma_2 x) = g(e_1(\gamma_2 x)) = \tilde{\sigma}(e_1, \gamma_2)e_1\gamma_2 g(x) = \sigma_2(\gamma_2)\gamma_2 g(x),$$

para todo $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $x \in V$, de onde $g \in \vec{Q}_V(\Gamma_2)$. Ainda

$$g(\gamma_1 x) = g(\gamma_1(e_2 x)) = \tilde{\sigma}(\gamma_1, e_2)\gamma_1 e_2 g(x) = \sigma_2(e_2)\gamma_1 g(x) = \gamma_1 g(x),$$

para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $x \in V$, uma vez que $\sigma_2(e_2) = 1$. Logo, $g \in \vec{P}_V(\Gamma_1)$ e, portanto, $g \in \vec{P}_V(\Gamma_1) \cap \vec{Q}_V(\Gamma_2)$.

Seja agora $g \in \vec{P}_V(\Gamma_1) \cap \vec{Q}_V(\Gamma_2)$. Então

$$g((\gamma_1, \gamma_2)x) = g(\gamma_1(\gamma_2 x)) = \gamma_1 g(\gamma_2 x) = \gamma_1\sigma_2(\gamma_2)\gamma_2 g(x) = \tilde{\sigma}(\gamma_1, \gamma_2)\gamma_1\gamma_2 g(x),$$

para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$, $x \in V$, onde a segunda igualdade segue pois $g \in \vec{P}_V(\Gamma_1)$ e a terceira segue pois $g \in \vec{Q}_V(\Gamma_2)$. Portanto, $g \in \vec{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2)$. $\square$

As igualdades da Proposição 3.3.3 valem, obviamente, para o produto direto $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ quando $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ agem em um mesmo espaço $V$. Agora, se $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ são grupos agindo em $V$ e $W$ respectivamente, podemos definir as ações induzidas de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ em $V \times W$ como

$\gamma_1(x,y) = (\gamma_1 x, y)$ e $\gamma_2(x,y) = (x, \gamma_2 y)$, para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $(x,y) \in V \times W$. Então a ação diagonal do grupo $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ em $V \times W$ é definida por

$$(\gamma_1, \gamma_2)(x,y) = (\gamma_1 x, \gamma_2 y).$$

Neste caso, se $\rho$ é a representação de $\Gamma_1$ em $V$ e $\eta$ é a representação de $\Gamma_2$ em $W$, então a representação diagonal de $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ em $V \times W$ corresponde à matriz

$$\begin{pmatrix} [\rho_{\gamma_1}] & 0 \\ 0 & [\eta_{\gamma_2}] \end{pmatrix} \in GL(V \times W),$$

onde $[\rho_{\gamma_1}]$ e $[\eta_{\gamma_2}]$ denotam as matrizes das respectivas representações.

Finalizamos esta seção com dois resultados da teoria invariante para a ação diagonal de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ em $V \times W$.

**Lema 3.3.4.** *Sejam $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ grupos de Lie compactos agindo linearmente em $V$ e $W$, respectivamente. Sejam $\{u_1, \cdots, u_r\}$ e $\{v_1, \cdots, v_s\}$ bases de Hilbert para $P_V(\Gamma_1)$ e $P_W(\Gamma_2)$, respectivamente. Definimos $U_c : V \times W \to \mathbb{R}$ e $V_d : V \times W \to \mathbb{R}$ como $U_c(x,y) = u_c(x)$ e $V_d(x,y) = v_d(y)$ para $c = 1, \cdots, r$ e $d = 1, \cdots, s$. Então $\{U_1, \cdots, U_r, V_1, \cdots, V_s\}$ é uma base de Hilbert para $P_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.*

*Demonstração.* Seja $H \in P_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ e escreva $H(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$, com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Pela proposição anterior, $H \in P_{V\times W}(\Gamma_1) \cap P_{V\times W}(\Gamma_2)$ o que implica em

$$H(\gamma_1 x, y) = H(x,y) \quad \text{e} \quad H(x, \gamma_2 y) = H(x,y),$$

para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $(x,y) \in V \times W$. Então

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} (\gamma_1 x)^\alpha y^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha (\gamma_2 y)^\beta,$$

ou seja, $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}((\gamma_1 x)^\alpha - x^\alpha) y^\beta = 0 = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha ((\gamma_2 y)^\beta - y^\beta)$.

Como $x \in V$ e $y \in W$ são arbitrários, segue que $(\gamma_1 x)^\alpha = x^\alpha$ e $(\gamma_2 y)^\beta = y^\beta$ uma vez que $a_{\alpha\beta} \neq 0$. Defina $p_\alpha(x) = x^\alpha$ e $q_\beta(y) = y^\beta$. Das duas últimas igualdades temos que $p_\alpha \in P_V(\Gamma_1)$ e $q_\beta \in P_W(\Gamma_2)$ se $a_{\alpha\beta} \neq 0$. Assim, existem $p'_\alpha : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ e $q'_\beta : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$

tais que $p_\alpha(x) = p'_\alpha(u_1(x), \cdots, u_r(x))$ e $q_\beta(y) = q'_\beta(v_1(y), \cdots, v_s(y))$, para todo $x \in V$ e $y \in W$. Portanto, existe $h : \mathbb{R}^{r+s} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
H(x,y) &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} p_\alpha(x) q_\beta(y) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} p'_\alpha(u_1(x), \cdots, u_r(x)) q'_\beta(v_1(y), \cdots, v_s(y)) \\
&= h(u_1(x), \cdots, u_r(x), v_1(y), \cdots, v_s(y)) \\
&= h(U_1(x,y), \cdots, U_r(x,y), V_1(x,y), \cdots, V_s(x,y)).
\end{aligned}$$

Como $H \in P_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

**Lema 3.3.5.** *Nas condições do lema anterior, sejam $\vec{P}_V(\Gamma_1)$ e $\vec{P}_W(\Gamma_2)$ módulos dos $\Gamma_1-$equivariantes e $\Gamma_2-$equivariantes sobre $P_V(\Gamma_1)$ e $P_W(\Gamma_2)$, respectivamente. Suponhamos que ambos os módulos sejam livres e que $\vec{P}_V(\Gamma_1) = P_V(\Gamma_1)\{f_1, \cdots, f_m\}$ e $\vec{P}_W(\Gamma_2) = P_W(\Gamma_2)\{g_1, \cdots, g_n\}$. Definimos $F_i : V \times W \to V$ e $G_j : V \times W \to W$ por $F_i(x,y) = f_i(x)$ e $G_j(x,y) = g_j(y)$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Então,*

$$\vec{P}_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = P_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)\left\{ \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} F_m \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ G_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ G_n \end{pmatrix} \right\}.$$

*Demonstração.* Seja $H \in \vec{P}_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ e escreva $H \equiv (p,q)$ com $p : V \times W \to V$ e $q : V \times W \to W$. Como a ação de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ é diagonal temos

$$H(\gamma_1 x, \gamma_2 y) = H((\gamma_1, \gamma_2)(x,y)) = (\gamma_1, \gamma_2) H(x,y) = (\gamma_1 p(x,y), \gamma_2 q(x,y)),$$

para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ e $(x,y) \in V \times W$, de onde

$$p(\gamma_1 x, \gamma_2 y) = \gamma_1 p(x,y) \quad \text{e} \quad q(\gamma_1 x, \gamma_2 y) = \gamma_2 q(x,y). \tag{3.14}$$

Defina, para cada $y \in W$,

$$\begin{aligned} p_y :\ V &\to V \\ x &\longmapsto p(x,y). \end{aligned}$$

Por (3.14), $p_y(\gamma_1 x) = p(\gamma_1 x, y) = \gamma_1 p(x,y) = \gamma_1 p_y(x)$, ou seja, $p_y \in \vec{P}_V(\Gamma_1)$. Por hipótese, para cada $y \in W$, existem $h_i^y \in P_V(\Gamma_1)$, $i = 1, \cdots, m$, tais que

$$p_y(x) = \sum_{i=1}^{m} h_i^y(x) f_i(x). \tag{3.15}$$

Defina agora

$$\begin{array}{rccc} h_i: & V\times W & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h_i^y(x). \end{array}$$

Então, de (3.15) e pela definição de $F_i$ obtemos

$$p(x,y)=\sum_{i=1}^{m} h_i(x,y)F_i(x,y),$$

para todo $(x,y)\in V\times W$. Como $h_i^y\in P_V(\Gamma_1)$ temos que $h_i\in P_{V\times W}(\Gamma_1)$. Mostremos que $h_i\in P_{V\times W}(\Gamma_2)$. De (3.14), tomando $\gamma_1=e_1$ o elemento neutro de $\Gamma_1$, podemos concluir que $p(x,\gamma_2 y)=p(x,y)$, para todo $\gamma_2\in\Gamma_2$, $(x,y)\in V\times W$. Além disso, $F_i(x,\gamma_2 y)=f_i(x)=F_i(x,y)$. Então,

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(x,y)F_i(x,y)=p(x,y)=p(x,\gamma_2 y)=\sum_{i=1}^{m} h_i(x,\gamma_2 y)F_i(x,\gamma_2 y)=\sum_{i=1}^{m} h_i(x,\gamma_2 y)F_i(x,y),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m}(h_i^y(x)-h_i^{\gamma_2 y}(x))f_i(x)=\sum_{i=1}^{m}(h_i(x,y)-h_i(x,\gamma_2 y))F_i(x,y)=0,$$

para todo $\gamma_2\in\Gamma_2$, $(x,y)\in V\times W$. Uma vez que $\{f_1,\cdots,f_m\}$ gera livremente o módulo $\vec{P}_V(\Gamma_1)$ sobre $P_V(\Gamma_1)$ e $h_i^y-h_i^{\gamma_2 y}\in P_V(\Gamma_1)$, segue que $h_i^y(x)=h_i^{\gamma_2 y}(x)$ para todo $i=1,\cdots,m$, $x\in V$, $y\in W$ e $\gamma_2\in\Gamma_2$. Reescrevendo esta igualdade, temos $h_i(x,\gamma_2 y)=h_i(x,y)$, provando que $h_i\in P_{V\times W}(\Gamma_2)$. Pela proposição anterior, $h_i\in P_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Por meio de uma construção análoga, também podemos mostrar que

$$q(x,y)=\sum_{j=1}^{n} h'_j(x,y)G_j(x,y),$$

onde $h'_j\in P_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ para todo $j=1,\cdots,n$. Portanto,

$$H(x,y)=(p(x,y),q(x,y))=\sum_{i=1}^{m} h_i(x,y)(F_i(x,y),0)+\sum_{j=1}^{n} h'_j(x,y)(0,G_j(x,y)),$$

com $h_i,h'_j\in P_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, como queríamos. $\square$

**Exemplo 3.3.6.** Considere $\Gamma=S^1$ agindo em $V=\mathbb{C}$ como $\theta z=e^{i\theta}z$. Pelo Exemplo 2.2.4 temos que $\{u(z)=z\overline{z}\}$ é uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}}(S^1)$. Pelos Exemplos 2.3.5

e 2.3.9 temos que $\vec{P}_{\mathbb{C}}(S^1) = P_{\mathbb{C}}(S^1)\{z, iz\}$, sendo $\vec{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ um módulo livre sobre $P_{\mathbb{C}}(S^1)$. Considere o toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ agindo em $\mathbb{C}^n$ por

$$(\theta_1, \cdots, \theta_n)(z_1, \cdots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \cdots, e^{i\theta_n} z_n).$$

Claramente, tal ação é diagonal e, pelo Lema 3.3.4, uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^n}(T^n)$ é $\{z_1\overline{z_1}, \cdots, z_n\overline{z_n}\}$. Ainda, pelo Lema 3.3.5

$$\vec{P}_{\mathbb{C}^n}(T^n) = P_{\mathbb{C}^n}(T^n)\{(z_1, 0\cdots, 0), (iz_1, 0\cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, z_n), (0, \cdots, 0, iz_n)\}.$$

Além disso, $\vec{P}_{\mathbb{C}^n}(T^n)$ é um módulo livremente gerado sobre $P_{\mathbb{C}^n}(T^n)$. De fato, suponha que

$$(f_1(z)z_1 + g_1(z)iz_1, \cdots, f_n(z)z_n + g_n(z)iz_n) \equiv 0,$$

onde $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ e $f_j, g_j \in P_{\mathbb{C}^n}(T^n)$, para todo $j = 1, \cdots, n$. Então $f_j(z)z_j + g_j(z)iz_j \equiv 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Logo, $f_j(z) + ig_j(z) = 0$ e, como $f_j, g_j$ são funções com imagem real, segue que $f_j \equiv g_j \equiv 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$, provando o desejado.

## 3.4 Teoria de Formas Normais

A teoria de formas normais tem sido usada como uma ferramenta para o estudo local e qualitativo de campos de vetores. Segundo Belitskii [5, 6], o conceito e os primeiros resultados da teoria iniciaram-se com Poincaré em 1928, com o objetivo de encontrar coordenadas locais de modo que o sistema dinâmico em questão tenha uma forma mais conveniente ou mais "simples", perto de um ponto de equilíbrio. Essa simplificação é obtida através de mudanças de coordenadas em cada grau da expansão em série de Taylor do campo de vetores, de modo que essas mudanças preservem propriedades a serem investigadas. O método desenvolvido por Belitskii [5, 6] reduz este processo ao cálculo do kernel do chamado operador homológico.

Na próxima subseção, apresentamos a forma normal de Belitskii seguindo [12] como principal referência, cuja abordagem pode ser aplicada a qualquer sistema dinâmico, incluindo os reversíveis equivariantes e os Hamiltonianos. Na Subseção 3.4.2, apresentamos o método de Elphick *et al.* desenvolvido em [13] e que nos fornece um método alternativo ao de Belitskii baseado na matriz da parte linear do sistema.

Para o que segue, $V$ é um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$ e $\vec{P}_V^k$ denota o espaço vetorial real das aplicações polinomiais homogêneas de $V$ em $V$ e de grau $k$. Um monômio em $\vec{P}_V^k$ é uma expressão da forma $x^\alpha e_j$, onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $e_j$ é o $j-$ésimo elemento da base canônica de $V \equiv \mathbb{R}^n$. É possível mostrar que $\vec{P}_V^k$ tem dimensão finita igual a $n\binom{n+k-1}{k}$ (veja [12]).

### 3.4.1 Forma Normal de Belitskii

Considere o sistema de equações diferenciais dado por

$$\dot{x} = h(x), \tag{3.16}$$

onde $x \in V$ e $h : V \to V$ é um campo de vetores de classe $C^\infty$ tal que $h(0) = 0$.

Dizemos que dois campos vetoriais $h, f : V \to V$ são conjugados se existe um difeomorfismo $\phi : V \to V$ tal que $f(x) = d\phi(x)^{-1} h(\phi(x))$, para todo $x \in V$. Nosso primeiro objetivo é encontrar um campo conjugado à $h$ em (3.16) que seja mais "simples" (termo que parece ser consenso entre os autores, apesar de "simples" ser bastante abstrato) e que mantenha a parte linear de (3.16) e a dinâmica do fluxo numa vizinhança da origem.

Seja $L = dh(0)$ a linearização de $h$ na origem[3]. Podemos expandir $h$ em sua série de Taylor formal[4] em torno da origem como

$$L + h^2 + h^3 + \cdots,$$

com $h^k \in \vec{P}_V^k$ para cada $k \geq 2$. Em outras palavras, em uma vizinhança $\Omega$ suficientemente pequena da origem, o sistema (3.16) pode ser reescrito como

$$\dot{x} = L(x) + H(x) \tag{3.17}$$

onde $H(x) = h^2(x) + h^3(x) + \cdots$, para todo $x \in \Omega$.

[3]Em toda a parte confundimos $L = dh(0)$ com sua matriz na base canônica de $V \equiv \mathbb{R}^n$.

[4]Quando utilizamos o termo "série formal" nos referimos apenas à expansão de Taylor, sem necessariamente haver convergência da série. Além disso, nessa expansão surge um problema técnico quando $h$ e suas derivadas de todas as ordens se anulam na origem. Por isso, desconsideramos esse caso.

Para cada $k \geq 2$, considere uma sequência indutiva de mudanças de coordenadas da forma

$$x = \xi(y) = y + \xi^k(y), \tag{3.18}$$

onde $\xi^k \in \vec{P}_V^k$, $\xi^k(0) = 0$ e $y \in \Omega_k$ com $\Omega_k$ uma vizinhança da origem em $V$. Faremos algumas observações sobre tais mudanças de coordenadas. Primeiramente, veja que para cada $y \in \Omega_k$,

$$d\xi(y) = Id + d\xi^k(y),$$

onde $Id : V \to V$ denota o operador identidade. Logo, $d\xi(y)$ é inversível com a inversa dada por $(d\xi(y))^{-1} = Id + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(d\xi^k(y))^i$. De fato,

$$\begin{aligned}
d\xi(y)(d\xi(y))^{-1} &= (Id + d\xi^k(y))(Id + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(d\xi^k(y))^i) \\
&= Id + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(d\xi^k(y))^i) + d\xi^k(y) + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(d\xi^k(y))^{i+1} \\
&= Id - d\xi^k(y) + \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i(d\xi^k(y))^i) + d\xi^k(y) + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(d\xi^k(y))^{i+1}) \\
&= Id.
\end{aligned}$$

Por fim, como $\xi(y) = y + O(|y|^2)$,[5] e como $y$ está numa vizinhança suficientemente pequena da origem temos que $d\xi(0) = (d\xi(0))^{-1} = Id$. Voltando a (3.18) temos que $\dot{x} = d\xi(y)\dot{y}$, de onde segue que

$$\dot{y} = f(y), \tag{3.19}$$

com $f(y) = (d\xi(y))^{-1}h(\xi(y)) = (d\xi(y))^{-1}(L(\xi(y)) + H(\xi(y)))$ e $y \in \Omega$.

Mostremos que tais mudanças de coordenadas mantêm a parte linear de (3.17). Denotando por $D(y)$ a derivada de $d\xi(y)^{-1}$ com respeito a $y$ temos

$$df(y) = D(y)(L(\xi(y)) + H(\xi(y))) + (d\xi(y))^{-1}(Ld\xi(y) + dH(\xi(y))d\xi(y)).$$

[5] A expressão $O(|y|^s)$ será usada para denotar os termos polinomiais de grau maior ou igual a $s$, com $s \geq 2$.

Aplicando em $y = 0$ obtemos a linearização de $f$ na origem:

$$\begin{aligned} df(0) &= D(0)(L(\xi(0)) + H(\xi(0))) + (d\xi(0))^{-1}(Ld\xi(0) + dH(\xi(0))d\xi(0)) \\ &= D(0)(L(0) + H(0)) + (d\xi(0))^{-1}Ld\xi(0) + d\xi(0)^{-1}dH(0)d\xi(0) \\ &= d\xi(0)^{-1}Ld\xi(0), \end{aligned}$$

uma vez que $\xi(0) = H(0) = 0$ e $dH(0) = 0$. Como $d\xi(0) = d\xi(0)^{-1} = Id$, temos que $df(0) = L$, ou seja, podemos, então escrever o novo sistema (3.19) como

$$\dot{y} = L(y) + g(y),$$

onde $g \in \vec{P}_V$ tem termos de ordem $k \geq 2$.

Antes de prosseguirmos, como $\xi : V \to V$ é continuamente diferenciável e $d\xi(0)$ é inversível, temos pelo Teorema da Função Inversa[6] que $\xi$ é um difeomorfismo em alguma vizinhança $\tilde{\Omega}$ da origem. Além disso, $h$ e $f$ são campos conjugados na vizinhança $\tilde{\Omega}$ uma vez que a mudança de coordenadas (3.18) transforma $h$ no campo conjugado $f(y) = d\xi(y)^{-1}h(\xi(y))$ do sistema (3.19), satisfazendo os propósitos iniciais da teoria. É possível provar que a relação de conjugação estabelecida entre os campos é uma relação de equivalência.

Antes do principal teorema desta subseção, Teorema 3.4.2, definimos o seguinte operador:

**Definição 3.4.1.** *Dado $L : V \to V$ um operador linear, definimos, para cada $k \geq 2$, a aplicação $Ad_L^k : \vec{P}_V^k \to \vec{P}_V^k$ por*

$$Ad_L^k f(x) = df(x)L(x) - L(f(x)), \tag{3.20}$$

*com $f \in \vec{P}_V^k$ e $x \in V$.*

É fácil ver que $Ad_L^k$ é também um operador linear. Como $Ad_L^k(\vec{P}_V^k)$ é um subespaço vetorial de $\vec{P}_V^k$, cuja dimensão é finita, existe um subespaço complementar $C^k$ de $Ad_L^k(\vec{P}_V^k)$

[6] "Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^k$ $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $df(a)$ é inversível, então existem abertos $W \subset U$ e $Z \subset \mathbb{R}^m$ contendo $a$ e $f(a)$, respectivamente, tal que a $f|_W$ é um difeomorfismo sobre $Z$".

em $\vec{P}_V^k$. Podemos então escrever

$$\vec{P}_V^k = Ad_L^k(\vec{P}_V^k) \oplus C^k. \tag{3.21}$$

para cada $k \geq 2$.

**Teorema 3.4.2.** *Seja $h : V \to V$ um campo de vetores de classe $C^\infty$ com $h(0) = 0$ e $dh(0) = L$. Fixe um inteiro $r \geq 2$ e considere a decomposição (3.21) para $k = 2, \cdots, r$. Então existe uma sequência de transformações polinomiais próximas à identidade da forma $x = y + \xi^k(y)$, $y \in \Omega_k$, onde $\xi^k \in \vec{P}_V^k$ e $\Omega_k$ é uma vizinhança da origem, com $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, tal que nas novas coordenadas o sistema (3.16) tem a forma*

$$\dot{y} = L(y) + g^2(y) + \cdots + g^r(y) + O(|y|^{r+1}), \; y \in \Omega_r, \tag{3.22}$$

*onde $g^k \in C^k$ para $k = 2, \cdots, r$.*

*Demonstração.* Seja $h$ como nas hipóteses do teorema e considere

$$L(x) + h^2(x) + h^3(x) + \cdots + h^r(x) + O(|x|^{r+1})$$

a série de Taylor formal de $h$ na origem. Considere a mudança de coordenadas dada em (3.18). Então, truncando a série de $h$ na ordem $k$, para $k \geq 2$, e lembrando que $d\xi^k(y)$ tem grau $k-1$, reescrevemos (3.19) como

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= d\xi(y)^{-1}(L(\xi(y)) + H(\xi(y))) \\
&= (Id - d\xi^k(y) + O(|y|^{2k-2}))(L(\xi(y)) + h^2(\xi(y)) + \cdots + h^k(\xi(y)) \\
&= (L(y) + L(\xi^k(y)) + h^2(y + \xi^k(y)) + \cdots + h^k(y + \xi^k(y)) + \\
&- (d\xi^k(y)L(y) + d\xi^k(y)L(\xi^k(y)) + d\xi^k(y)h^2(\xi(y)) + \cdots + d\xi^k(y)h^k(\xi(y))) + O(|y|^{2k-2}) \\
&= L(y) + h^2(y) + \cdots + h^{k-1}(y) + [h^k(y) - (d\xi^k(y)L(y) - L(\xi^k(y)))] + O(|y|^{k+1}) \\
&= L(y) + h^2(y) + \cdots + h^{k-1}(y) + [h^k(y) - Ad_L^k(\xi^k(y))] + O(|y|^{k+1}),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

para $y \in \Omega_k$ onde $\Omega_k$ é uma vizinhança pequena o suficiente da origem tal que $d\xi(y) = Id + d\xi^k(y)$ seja inversível.

Para $k = 2$, temos que (3.23) fica como

$$\dot{y} = L(y) + (h^2(y) - Ad_L^2\xi^2(y)) + O(|y|^3), \tag{3.24}$$

com $y \in \Omega_2$. Pela decomposição (3.21), existem $f^2 \in Ad_L^2(\vec{P}_V^2)$ e $g^2 \in C^2$ tais que $h^2 = f^2 + g^2$. Sendo assim, escolhemos $\xi^2 \in \vec{P}_V^2$ de forma que $f^2 = Ad_L^2 \xi^2$. Substituindo em (3.24), temos

$$\dot{y} = L(y) + g^2(y) + O(|y|^3),$$

onde $y \in \Omega_2$ e $g^2 \in C^2$.

Procedemos agora por indução sobre $k$. Assumimos o teorema válido para $k-1 \geq 1$, ou seja, existem sucessivas mudanças de coordenadas que transformam o sistema (3.16) em

$$\dot{x} = L(x) + g^2(x) + g^3(x) + \cdots + g^{k-1}(x) + h^k(x) + O(|x|^{k+1}),$$

onde $x \in \Omega_{k-1}$, $g^t \in C^t$ para $t = 2, \cdots, k-1$, $h^k \in \vec{P}_V^k$ e $\Omega_{k-1}$ é uma vizinhança da origem. Tome a mudança de coordenadas $x = y + \xi^k(y)$, com $y \in \Omega_k$, onde escolhemos $\xi^k \in \vec{P}_V^k$ de modo que $h^k = Ad_L^k \xi^k + g^k$ para algum $g^k \in C^k$. Além disso, $\Omega_k \subseteq \Omega_{k-1}$ é uma vizinhança da origem na qual $Id + d\xi^k(y)$ é inversível. Então, observando que (3.23) nos mostra que as transformações da forma (3.18) não alteram os termos de ordem menor que $k$, temos o novo sistema

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= L(y) + g^2(y) + g^3(y) + \cdots + g^{k-1}(y) + (h^k(y) - Ad_L^k \xi^k(y)) + O(|y|^{k+1}) \\
&= L(y) + g^2(y) + g^3(y) + \cdots + g^{k-1}(y) + (Ad_L^k \xi^k + g^k(y) - Ad_L^k \xi^k(y)) + O(|y|^{k+1}) \\
&= L(y) + g^2(y) + g^3(y) + \cdots + g^{k-1}(y) + g^k(y) + O(|y|^{k+1}),
\end{aligned}$$

com $y \in \Omega_k$, concluindo a prova. □

**Definição 3.4.3.** *Para cada $k \geq 2$, a equação truncada de (3.22)*

$$\dot{y} = L(y) + g^2(y) + g^3(y) + \cdots + g^{r-1}(y) + g^r(y),$$

*onde $g^k \in C^k$, $k = 2, \cdots, r$, é chamada uma forma normal de (3.16) de ordem $r$.*

**Observação 3.4.4.** Como a série de Taylor para $h$ em (3.16) é apenas formal, temos que os campos (3.16) e (3.22) são conjugados no sentido de que suas respectivas séries de Taylor são conjugadas entre si.

Portanto, para determinar uma forma normal de um sistema, precisamos encontrar os espaços complementares $C^k$'s em (3.21), $k = 2, \cdots, r$. Claramente, a forma normal não é única já que depende da escolha dos $C^k$'s. O método do operador adjunto, mais conhecido como método de Belitskii pois foi introduzido por ele, consiste em tomar $C^k$ como o complemento ortogonal de $Ad_L^k(\vec{P}_V^k)$ segundo um produto interno definido em $\vec{P}_V^k$. Vamos formalizar tal método a partir de agora.

**Definição 3.4.5.** *Sejam $p, q \in \vec{P}_V^k$ dados por*

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} x^\alpha e_j \quad e \quad q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha j} x^\alpha e_j,$$

*onde $p_{\alpha j}, q_{\alpha j} \in \mathbb{R}$, $e_j$ é o $j-$ésimo elemento da base canônica de $V \equiv \mathbb{R}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Definimos o produto interno $\langle\ ,\ \rangle : \vec{P}_V^k \times \vec{P}_V^k \to \mathbb{R}$ por*

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} q_{\alpha j} \alpha!, \tag{3.25}$$

*onde $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.*

**Exemplo 3.4.6.** Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $k = 3$. Vamos calcular o produto interno das aplicações

$$p(x_1, x_2) = (2x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, x_1^3 + 3x_2^3) \quad \text{e} \quad q(x_1, x_2) = (5x_1^3, x_2^3).$$

Colocando nas notações da definição do produto interno, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= (p_{(2,1),1} x^{(2,1)} + p_{(1,2),1} x^{(1,2)}, p_{(3,0),2} x^{(3,0)} + p_{(0,3),2} x^{(0,3)}) \\ q(x) &= (q_{(3,0),1} x^{(3,0)}, q_{(0,3),2} x^{(0,3)}), \end{aligned}$$

onde $p_{(2,1),1} = 2$, $p_{(1,2),1} = 1$, $p_{(3,0),2} = 1$, $p_{(0,3),2} = 3$, $q_{(3,0),1} = 5$ e $q_{(0,3),2} = 1$. Então

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= p_{(2,1),1} q_{(2,1),1} 2!1! + p_{(1,2),1} q_{(1,2),1} 1!2! + p_{(3,0),2} q_{(3,0),2} 3!0! + \\ &\quad + p_{(0,3),2} q_{(0,3),2} 0!3! + p_{(3,0),1} q_{(3,0),1} 3!0!. \end{aligned}$$

Agora, $q_{(2,1),1}$ é o coeficiente do termo $x_1^2 x_2 e_1$ em $q(x)$, ou seja, $q_{(2,1),1} = 0$. Da mesma maneira, $q_{(1,2),1} = p_{(3,0),2} = p_{(3,0),1} = 0$. Portanto,

$$\langle p, q \rangle = p_{(0,3),2} q_{(0,3),2} 0!3! = 18.$$

As quatro propriedades de produto interno se verificam facilmente para (3.25). Vamos omitir os passos aqui. Como $\vec{P}_V^k$ tem dimensão finita e admite um produto interno temos então garantida a existência de um operador adjunto de $Ad_L^k$ com respeito a (3.25) que denotamos por $(Ad_L^k)^*$. Mais do que isso, através do teorema abaixo, sabemos caracterizar $(Ad_L^k)^*$.

**Teorema 3.4.7.** *Sejam $L : V \to V$ um operador linear e $Ad_L^k$ definido em (3.20). Para cada $k \geq 2$, $Ad_{L^*}^k$ é o operador adjunto de $Ad_L^k$ com respeito ao produto interno definido em (3.25), onde $L^*$ é o adjunto de $L$ com respeito ao produto interno canônico em $V$.*

*Demonstração.* Sejam $p, q \in \vec{P}_V^k$ dados por $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} x^\alpha e_i$ e $q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} x^\beta e_j$. Queremos mostrar que $\left\langle Ad_L^k p, q \right\rangle = \left\langle p, Ad_{L^*}^k q \right\rangle$. De um lado, usando a linearidade de $Ad_L^k$ e do produto interno temos

$$\begin{aligned}
\left\langle Ad_L^k p, q \right\rangle &= \left\langle Ad_L^k\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} x^\alpha e_i\Big), \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} x^\beta e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} Ad_L^k(x^\alpha e_i), x^\beta e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} p_{\alpha i} q_{\beta j} \left\langle Ad_L^k(x^\alpha e_i), x^\beta e_j \right\rangle .
\end{aligned}$$

Do outro lado, usando a linearidade de $Ad_{L^*}^k$ e do produto interno também temos

$$\left\langle p, Ad_{L^*}^k q \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} p_{\alpha i} q_{\beta j} \left\langle x^\alpha e_i, Ad_{L^*}^k(x^\beta e_j) \right\rangle .$$

Assim, para provar a igualdade desejada, basta provarmos que $\left\langle Ad_L^k f, g \right\rangle = \left\langle f, Ad_{L^*}^k g \right\rangle$, onde $f(x) = x^\alpha e_i$ e $g(x) = x^\beta e_j$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$ e $\alpha, \beta$ tais que $|\alpha| = |\beta| = k$. Lembramos que vamos confundir os operadores $L$ e $df(x)$ com suas formas matriciais. Escrevendo $L = (a_{lm})$ e levando em consideração que

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x_l} = \frac{\partial x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}}{\partial x_l} = \alpha_l \frac{x^\alpha}{x_l}$$

temos por (3.20) que

$$Ad_L^k f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x^\alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^n a_{l1}\alpha_l \dfrac{x^\alpha}{x_l} & \sum_{l=1}^n a_{l2}\alpha_l \dfrac{x^\alpha}{x_l} & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{ln}\alpha_l \dfrac{x^\alpha}{x_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1i}x^\alpha \\ a_{2i}x^\alpha \\ \vdots \\ aiix^\alpha \\ \vdots \\ a_{ni}x^\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \left( \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l a_{lm} \frac{x^\alpha x_m}{x_l} \right) e_i - (a_{1i}x^\alpha e_1 + \cdots + a_{ni}x^\alpha e_n)$$

$$= \left( \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l a_{lm} \frac{x^\alpha x_m}{x_l} \right) e_i - \sum_{l=1}^n a_{li}x^\alpha e_l$$

Como $L^* = L^t$ segundo uma base ortonormal $V$ com relação ao produto interno de $V$ onde $t$ denota a transposta, obtemos analogamente que

$$\begin{aligned} Ad_{L^t}^k g(x) &= dg(x)L^t x - L^t g(x) \\ &= \left( \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \beta_m a_{lm} \frac{x^\beta x_l}{x_m} \right) e_j - \sum_{m=1}^n a_{jm}x^\beta e_m. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\langle Ad_L^k f(x), g(x)\right\rangle &= \left\langle \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l a_{lm}\frac{x^\alpha x_m}{x_l}\right)e_i - \sum_{l=1}^{n} a_{li}x^\alpha e_l,\ x^\beta e_j\right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l a_{lm}\left\langle \frac{x^\alpha x_m}{x_l}e_i, x^\beta e_j\right\rangle - \sum_{l=1}^{n} a_{li}\left\langle x^\alpha e_l, x^\beta e_j\right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\alpha_l a_{l1}\left\langle \frac{x^\alpha x_1}{x_l}e_i, x^\beta e_j\right\rangle + \cdots + \alpha_l a_{ln}\left\langle \frac{x^\alpha x_n}{x_l}e_i, x^\beta e_j\right\rangle\right) \\
&\quad - \left(a_{1i}\left\langle x^\alpha e_1, x^\beta e_j\right\rangle + \cdots + a_{ni}\left\langle x^\alpha e_n, x^\beta e_j\right\rangle\right) \\
&= \begin{cases}
\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\alpha_l a_{ll} - a_{ii}\right)\alpha!,\ \text{se } i=j \text{ e } \alpha=\beta; \\
\alpha_l a_{lm}\beta!,\ \text{se } i=j,\ \beta_l=\alpha_l-1,\ \beta_m=\alpha_m+1,\ \text{e } \beta_s=\alpha_s, \\
\text{para algum } l\neq m \text{ e todo } s\neq l,m; \\
-a_{ji}\alpha!,\ \text{se } i\neq j \text{ e } \alpha=\beta; \\
0,\ \text{nos demais casos,}
\end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\left\langle f(x), Ad_{L^t}^k g(x)\right\rangle = \begin{cases}
\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\beta_l a_{ll} - a_{ii}\right)\beta!,\ \text{se } i=j \text{ e } \alpha=\beta; \\
\beta_l a_{lm}\alpha!,\ \text{se } i=j,\ \alpha_l=\beta_l+1,\ \alpha_m=\beta_m-1,\ \text{e } \beta_s=\alpha_s \\
\text{para algum } l\neq m \text{ e todo } s\neq l,m; \\
-a_{ji}\beta!,\ \text{se } i\neq j \text{ e } \alpha=\beta; \\
0,\ \text{nos demais casos.}
\end{cases}$$

Com relação à segunda linha de cada expressão temos

$$\begin{aligned}
\alpha_l a_{lm}\beta! &= \alpha_l a_{lm}\beta_1!\cdots\beta_m!\cdots\beta_n! \\
&= \alpha_l a_{lm}\alpha_1!\cdots(\alpha_l-1)!\cdots(\alpha_m+1)!\cdots\alpha_n! \\
&= (\alpha_m+1)a_{lm}\alpha! \\
&= \beta_m a_{lm}\alpha!.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $(Ad_L^k)^* = Ad_{L^t}^k = Ad_{L^*}^k$, como desejado. $\square$

Assim sendo, segundo o produto interno (3.25), podemos escrever

$$\vec{P}_V^k = Ad_L^k(\vec{P}_V^k) \oplus (Ad_L^k(\vec{P}_V^k))^\perp,$$

onde

$$Ad_L^k(\vec{P}_V^k)^{\perp} = \{g \in \vec{P}_V^k;\ \left\langle g, Ad_L^k f \right\rangle = 0,\ \forall\ f \in \vec{P}_V^k\}.$$

Portanto, $Ad_L^k(\vec{P}_V^k)^{\perp}$ é uma possível escolha, proposta por Belitskii em [5, 6], para o subespaço $C^k$ em (3.21). Mas se $g \in Ad_L^k(\vec{P}_V^k)^{\perp}$, então $\left\langle g, Ad_L^k f \right\rangle = \left\langle Ad_{L^t}^k g, f \right\rangle = 0$ para todo $f \in \vec{P}_V^k$, o que implica em $Ad_{L^t}^k g = 0$, ou seja, $g \in \ker(Ad_{L^t}^k)$. Reciprocamente, se $g \in \ker(Ad_{L^t}^k)$, então $g \in (Ad_L^k(\vec{P}_V^k))^{\perp}$. Portanto,

$$Ad_L^k(\vec{P}_V^k)^{\perp} = \ker(Ad_{L^t}^k).$$

Segue pelo Teorema 3.4.2 que o sistema (3.16) é formalmente conjugado ao sistema $\dot{x} = L(x) + g^2(x) + g^3(x) + \cdots$, onde $g^k \in \ker(Ad_{L^t}^k)$ para $k \geq 2$. Portanto, o método da forma normal de Belitskii consiste em determinar soluções polinomiais $g^k \in \vec{P}_V^k$ para a equação $Ad_{L^t}^k g^k \equiv 0$. Mostramos agora que, na prática, este processo equivale a encontrar os polinômios de um dado grau $k$ sem termos constantes e lineares que estão em $\ker Ad_{L^t}$, onde $Ad_{L^t}$ é um operador linear definido em $\vec{P}_V$, o espaço vetorial das aplicações polinomiais em $V$, tal que $Ad_{L^t}|_{\vec{P}_V^k} = Ad_{L^t}^k$. Para isso, note primeiramente que $\vec{P}_V^k \subset \vec{P}_V$ e que

$$\vec{P}_V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \vec{P}_V^k.$$

**Definição 3.4.8.** *Dado $L$ um operador linear em $V$, definimos $Ad_L : \vec{P}_V \to \vec{P}_V$, chamado operador homológico, por*

$$Ad_L\xi(x) = d\xi(x)L(x) - L(\xi(x)), \tag{3.26}$$

*para todo $\xi \in \vec{P}_V$.*

Como $Ad_L$ é linear e preserva a graduação de $\vec{P}_V$, temos que $Ad_L^k = Ad_L|_{\vec{P}_V^k}$. Considere um polinômio de grau $r$ da forma $g = g^2 + g^3 + \cdots g^r$, onde $g^k \in \vec{P}_V^k$, $k = 2, \cdots, r$. Então $g \in \ker(Ad_{L^t})$ se, e somente se $g^k \in \ker(Ad_{L^t}^k)$. De fato, como

$$Ad_{L^t}g = Ad_{L^t}(g^2 + \cdots + g^r) = Ad_{L^t}g^2 + \cdots + Ad_{L^t}g^r = Ad_{L^t}^2 g^2 + \cdots + Ad_{L^t}^r g^r,$$

então se $g^k \in \ker Ad^k_{L^t}$ para $k = 2, \cdots, r$ temos $Ad_{L^t} g \equiv 0$. Por outro lado, se $Ad^2_{L^t} g^2 + \cdots + Ad^r_{L^t} g^r \equiv 0$, então $Ad^k_{L^t} g^k \equiv 0$ para todo $k = 2, \cdots, r$ uma vez que $Ad_{L^t} g^k \in \vec{P}^k_V$.

Assim, pelo método de Belitskii, uma forma normal de ordem $r$ é obtida se determinarmos as soluções polinomiais $\xi$ de grau $r$, sem constantes e termos lineares, da equação diferencial parcial (EDP) $Ad_{L^t}\xi \equiv 0$. Mostraremos como isso é feito no próximo exemplo.

**Exemplo 3.4.9.** Considere o sistema $\dot{x} = h(x)$, com $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^\infty$ tal que $h(0) = 0$ e $L = dh(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Seja $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x)) \in \mathbb{R}^2$, onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\xi_i$ são polinômios de grau $r \geq 2$. Então, por (3.26) temos

$$
\begin{aligned}
Ad_{L^t}\xi(x) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) \\ x_1 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) - \xi_1(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como queremos $Ad_{L^t}\xi(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, nosso problema resume-se a encontrar uma solução para o sistema de EDP's

$$
\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) = 0 \\ x_1 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) - \xi_1(x) = 0, \end{cases} \tag{3.27}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Como a primeira equação de (3.27) deve valer para todo $x_1 \in \mathbb{R}$, temos necessariamente $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) = 0$. Então $\xi_1$ é constante com relação à $x_2$ e podemos escrever $\xi_1(x) = \varphi(x_1) + a$, para alguma constante $a \in \mathbb{R}$ e alguma função polinomial $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Como queremos $\xi_1$ sem termos lineares e constantes, podemos escrever $\xi_1(x) = x_1 f_1(x_1)$, onde $f_1(x_1)$ é um polinômio de grau $r - 1$ sem termos constantes. Pela segunda equação de (3.27), temos $x_1 \dfrac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_2} - x_1 f_1(x_1) = 0$, para todo $x_1 \in \mathbb{R}$, ou seja, $\dfrac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_2} = f_1(x_1)$. Logo, $\xi_2(x) = f_1(x_1)x_2 + f_2(x_1)$, onde $f_2(x_1)$ é um polinômio em $x_1$ de grau $r$ sem termos constantes e lineares. Portanto, uma forma normal de grau $r$ para o sistema $\dot{x} = h(x)$ é

$$
\dot{x} = L(x) + \xi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 f_1(x) \\ x_2 f_1(x_1) + f_2(x_1) \end{pmatrix},
$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x_1} = & x_2 + x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x_2} = & x_2 f_1(x_1) + f_2(x_1). \end{cases}$$

### 3.4.2 O Método de Elphick *et al.*

Em geral não é fácil determinar o kernel do operador $Ad_L^t$ uma vez que isso envolve resolver uma EDP. Neste caso, a forma normal é truncada em uma baixa ordem pois os cálculos ficam mais complicados conforme a ordem aumenta. Uma alternativa a este método foi dada por Elphick *et al.* em [13] ao mostrar que o subespaço complementar $C^k$ pode ser considerado como o módulo das aplicações polinomiais de $V$ em $V$ equivariantes por um grupo de matrizes a um parâmetro, definido a partir da linearização $L$ do campo de vetores (Teorema 3.4.14). Isso é bastante confortável para nós, pois podemos utilizar as ferramentas da teoria invariante apresentada no Capítulo 2 para encontrar as formas normais.

Lembremos que se $B$ é uma matriz quadrada, $e^B = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}$. Lembremos também que vamos confundir $L = dh(0)$ com sua matriz de ordem $n = \dim V$. Defina então o grupo abeliano

$$R = \{e^{rL^t};\ r \in \mathbb{R}\} \subset GL(n), \tag{3.28}$$

com $L = dh(0)$, onde $h$ em (3.16) é um campo de vetores.

Como o fecho $\overline{R} \subseteq GL(n)$[7] é um subgrupo fechado, então $\overline{R}$ é um grupo de Lie linear. Sendo assim, temos:

**Definição 3.4.10.** *Definimos o grupo de Lie* $\mathbf{S}$ *como*

$$\mathbf{S} = \overline{R} = \overline{\{e^{rL^t};\ r \in \mathbb{R}\}}. \tag{3.29}$$

Com cálculos simples é possível mostrar que como $R$ é abeliano, então $\mathbf{S}$ também é, pois se $P, Q \in \mathbf{S}\backslash R$ então existem sequências não constantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R$ tais

[7] Pela Proposição 2.11 de [26] se $G$ é um grupo topológico e $H \leq G$ é um subgrupo, então o fecho $\overline{H}$ também é um subgrupo de $G$.

que $\lim X_n = P$ e $\lim Y_n = Q$. Daí

$$PQ = (\lim X_n)(\lim Y_n) = \lim(X_nY_n) = \lim(Y_nX_n) = \lim(Y_n)\lim(X_n) = QP.$$

Além disso, $\mathbf{S}$ comuta com a matriz $L^t$. De fato, se $s \in \mathbf{S}$, então $s = \lim e^{r_jL^t}$, para alguma sequência $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números reais. Daí, considerando $s_j^i = \dfrac{r_j^i}{i!}$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} sL^t = \lim e^{r_jL^t}L^t &= \lim(\sum_{i=0}^{\infty} s_j^i(L^t)^i)L^t = \lim(\sum_{i=0}^{\infty} s_j^i(L^t)^{i+1}) \\ &= \lim(L^t\sum_{i=0}^{\infty} s_j^i(L^t)^i) = L^t\lim(\sum_{i=0}^{\infty} s_j^i(L^t)^i) = L^ts. \end{aligned}$$

A ação natural de $\mathbf{S}$ em $V$ é dada pelo produto de matriz por vetor.

**Exemplo 3.4.11.** Vamos determinar o grupo $\mathbf{S}$ relativo à matriz $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Seja $B = rL^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$ com $r \in \mathbb{R}$. Então, $B^i \equiv 0$ para todo $i \geq 2$, ou seja,

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{B^i}{i!} = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

onde $r \in \mathbb{R}$. Então,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note assim que $R \cong \mathbb{R}$ e, portanto, $R$ é fechado. Logo $\mathbf{S} = R$. Uma última observação acerca desse exemplo é que, como $\mathbb{R}$ não é limitado, ele ilustra o fato de que $\mathbf{S}$ definido em (3.29) não é necessariamente compacto.

A proposição abaixo está demonstrada em [14, XVI, Proposition 5.7] e será de grande valia para as aplicações feitas no último capítulo desta dissertação. Ela determina uma caracterização do grupo $\mathbf{S}$ quando $L$ tem apenas autovalores puramente imaginários.

**Proposição 3.4.12.** *Decomponha $L = D + N$ onde $D$ é uma matriz semissimples*[8]*, $N$ é uma matriz nilpotente e $ND = DN$. Se os autovalores não nulos de $L$ são puramente imaginários, então*

$$\mathbf{S} = \begin{cases} T^k & \text{se } N = 0 \\ R \times T^k & \text{se } N \neq 0, \end{cases}$$

*onde $k$ é o número de autovalores algebricamente independentes de $L$, $T^k = \overline{\{e^{rD};\ r \in \mathbb{R}\}}$ e $R = \{e^{rN^t};\ r \in \mathbb{R}\}$.*

O lema a seguir mostra que $C^k = \ker Ad^k_{L^t}$ coincide com o espaço $\vec{P}^k_V(\mathbf{S})$ das aplicações polinomiais em $V$ que são $\mathbf{S}-$equivariantes. O Teorema 3.4.14, devido a Elphick *et al.* [13], segue quase que imediatamente.

**Lema 3.4.13.** *Seja $p \in \vec{P}^k_V$ para $k \geq 2$ fixado. Seja $L = dh(0)$ a parte linear do campo de vetores $h$ e considere o operador $Ad^k_{L^t}$ definido em (3.20). Então,*

*(i)* $Ad^k_{L^t}p(x) = \dfrac{d}{dr}e^{-rL^t}p(e^{rL^t}x)|_{r=0}$;

*(ii)* $\vec{P}^k_V(\mathbf{S}) = \ker Ad^k_{L^t}$, *onde $\vec{P}^k_V(\mathbf{S})$ é o espaço das aplicações $p \in \vec{P}^k_V$ que são $\mathbf{S}$-equivariantes.*

*Demonstração.* $(i)$ Vamos direto aos cálculos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}e^{-rL^t}p(e^{rL^t}x) &= -L^te^{-rL^t}p(e^{rL^t}x) + e^{-rL^t}(dp)(e^{rL^t}x)L^te^{rL^t}x \\ &= e^{-rL^t}((dp)(e^{rL^t}x)L^te^{rL^t}x - L^tp(e^{rL^t}x)) \\ &= e^{-rL^t}Ad^k_{L^t}p(e^{rL^t}x),\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pois $L^t$ comuta com $e^{-rL^t}$. Quando $r = 0$ segue que $\dfrac{d}{dr}e^{-rL^t}p(e^{rL^t}x)|_{r=0} = Ad^k_{L^t}p(x)$ como desejado.

[8]Sejam $F$ um subcorpo de $\mathbb{C}$, $V$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita sobre $F$ e $T$ um operador linear sobre $V$. Então, $T$ é semissimples se, e somente se, $T$ é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ (veja [15, Teorema 7, página 232]).

$(ii)$ Seja $p \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S})$. Então $p$ comuta com $\mathbf{S}$, em particular, $p(e^{rL^t}x) = e^{rL^t}p(x)$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Por $(i)$

$$\begin{aligned} Ad_{L^t}^k p(x) &= \frac{d}{dr} e^{-rL^t} p(e^{rL^t}x)|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr} e^{-rL^t} e^{rL^t} p(x)|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr} p(x)|_{r=0} = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in V$, de onde $p \in \ker Ad_{L^t}^k$. Reciprocamente, se $Ad_{L^t}^k p \equiv 0$ então, uma vez que $e^{-rL^t} Ad_{L^t}^k p(e^{rL^t}x) = \dfrac{d}{dr} e^{-rL^t} p(e^{rL^t}x)$, temos $\dfrac{d}{dr} e^{-rL^t} p(e^{rL^t}x) = 0$ para todo $x \in V$. Isto implica que $e^{-rL^t}p(e^{rL^t}x)$ é constante com relação à $r$. Em especial, para $r = 0$ temos $e^{-rL^t}p(e^{rL^t}x) = p(x)$, ou seja, $e^{rL^t}p(x) = p(e^{rL^t}x)$, para todo $x \in V$. Portanto, $p$ comuta com $R$. Por fim, se $s \in \mathbf{S}$ então $s = \lim e^{r_j L^t}$, para alguma sequência $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de números reais e, portanto,

$$p(sx) = p(\lim e^{r_j L^t} x) = \lim p(e^{r_j L^t} x) = \lim e^{r_j L^t} p(x) = sp(x)$$

para todo $s \in \mathbf{S}$ e $x \in V$, a segunda igualdade segue pois $p$ é polinomial. Logo $p$ é $\mathbf{S}$-equivariante. □

**Teorema 3.4.14.** *Seja* $\mathbf{S}$ *como definido em (3.29). Então, para* $k \geq 2$,

$$\vec{P}_V^k = \vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \oplus Ad_L^k(\vec{P}_V^k).$$

*Demonstração.* Como mostrado no lema anterior, $\vec{P}_V^k(\mathbf{S}) = \ker Ad_{L^t}^k$. Como pelo método de Belitskii $\vec{P}_V^k = Ad_{L^t}^k(\vec{P}_V^k) \oplus (Ad_{L^t}^k(\vec{P}_V^k))^\perp$, onde $Ad_{L^t}^k(\vec{P}_V^k)^\perp = \ker Ad_{L^t}^k$, segue imediatamente o resultado. □

Assim, pelo método de Elphick *et al.*, uma forma normal de ordem $r$ para o sistema (3.16) é dada por $\dot{x} = L(x) + g_2(x) + \cdots + g_r(x)$, onde $g_k \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S})$ para $k = 2, \cdots, r$. Portanto, este método nos permite usar ferramentas da teoria invariante de grupos na determinação de uma forma normal de um sistema, uma vez que o processo se resume na determinação dos geradores de grau $k$ do módulo $\vec{P}_V(\mathbf{S})$. Neste caso, é possível determinar a forma normal em qualquer ordem que se deseje pois a dificuldade de encontrar os geradores de $\vec{P}_V(\mathbf{S})$ independe da ordem. Ou seja, a determinação dos geradores

$\mathbf{S}-$equivariantes nos permite escrever um polinômio $\mathbf{S}-$equivariante em qualquer grau e, para exibir a forma normal truncada, basta truncarmos o polinômio neste grau. Essa é uma diferença relevante entre as formas normais de Belitskii e de Elphick *et al.*, já que a primeira delas, por ter em seu processo o cálculo de um sistema de EDP's, muitas vezes precisa ser determinada grau a grau.

Exemplificaremos o método de Elphick *et al.* a seguir. Denotemos por $P_V^k(\mathbf{S})$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau $k$ que são $\mathbf{S}-$invariantes e por $\vec{P}_V^k(\mathbf{S})$ o espaço das aplicações polinomiais homogêneas de grau $k$ que são $\mathbf{S}-$equivariantes.

**Exemplo 3.4.15.** Considere o sistema (3.16) onde $L = dh(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. O grupo $\mathbf{S}$ com relação a esta matriz já foi calculado no Exemplo 3.4.11 e considere-o agindo em $\mathbb{R}^2$ pela multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ rx_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

para todo $r \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Para calcularmos a forma normal deste sistema precisamos encontrar os geradores dos equivariantes com relação à $\mathbf{S}$, ou seja, precisamos determinar uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ e os geradores de $\vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ sobre este anel. Apesar de $\mathbf{S}$ não ser compacto, é possível estabelecer tais cálculos desde que $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ e $\vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ sejam finitamente gerados.

Seja $f_k \in P_{\mathbb{R}^2}^k(\mathbf{S})$ dado por $f_k(x_1, x_2) = \sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Supondo $f_k$ invariante com relação à $\mathbf{S}$ temos que $f_k(x_1, rx_1 + x_2) = f_k(x_1, x_2)$, para todo $r \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j = \sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i (x_2 + rx_1)^j.$$

Como $r \in \mathbb{R}$ é qualquer, $f_k$ não pode depender de $x_2$. Assim $f_k(x_1, x_2) = a_k x_1^k$, para algum $a_k \in \mathbb{R}$.

Tome agora $f \in P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. Como $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} P_{\mathbb{R}^2}^k(\mathbf{S})$, existem $f_k \in P_{\mathbb{R}^2}^k(\mathbf{S})$ para todo

$k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_0(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) + \cdots \\ &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots \\ &= g(x_1), \end{aligned}$$

para alguma função polinomial $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Logo, $\{u(x_1, x_2) = x_1\}$ é uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$.

Vamos calcular agora os geradores de $\vec{P}^k_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. Seja $p = (p_1, p_2) \in \vec{P}^k_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. Então, $sp(x) = p(sx)$, para todo $s \in \mathbf{S}$ e $x \in \mathbb{R}^2$, de onde

$$s \cdot (p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2)) = (p_1(s \cdot (x_1, x_2)), p_2(s \cdot (x_1, x_2)))$$

ou seja,

$$(p_1(x_1, x_2), rp_1(x_1, x_2) + p_2(x_1, x_2)) = (p_1(x_1, rx_1 + x_2), p_2(x_1, rx_1 + x_2)),$$

para todo $r \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$p_1(x_1, x_2) = p_1(x_1, rx_1 + x_2) \tag{3.30}$$

$$p_2(x_1, x_2) = p_2(x_1, rx_1 + x_2) - rp_1(x_1, x_2). \tag{3.31}$$

Para que a igualdade em (3.30) seja válida, $p_1$ deve ser independente de $x_2$, pois $r \in \mathbb{R}$ é qualquer. Como $p_1$ é homogêneo de grau $k$, $p_1(x_1, x_2) = cx_1^k$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Substituindo em (3.31) temos $p_2(x_1, x_2) = p_2(x_1, rx_1 + x_2) - rcx_1^k$. Diferenciando essa última equação com respeito a $r$, obtemos $0 = \dfrac{\partial p_2}{\partial x_2}(x_1, rx_1 + x_2)x_1 - cx_1^k$, ou seja, $\dfrac{\partial p_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = cx_1^{k-1}$ (para $r = 0$). Portanto,

$$p_2(x_1, x_2) = cx_1^{k-1}x_2 + dx_1^k,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$, pois $p_2$ é homogêneo de grau $k$. Assim,

$$p(x_1, x_2) = (cx_1^k, cx_1^{k-1}x_2 + dx_1^k) = c(x_1^k, x_1^{k-1}x_2) + d(0, x_1^k),$$

para $c, d \in \mathbb{R}$. Então $h_{1,k}(x_1, x_2) = (x_1^k, x_1^{k-1}x_2)$ e $h_{2,k}(x_1, x_2) = (0, x_1^k)$ geram $\vec{P}^k_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ para todo $k \geq 1$. Para $k = 0$, $p_1(x_1, x_2) = a_0$ e $p_2(x_1, x_2) = b_0$

para alguns $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Da equação (3.31) temos que $b_0 = b_0 - ra_0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, o que implica em $a_0 = 0$. Como $b_0$ é qualquer, $p(x_1, x_2) = b_0(0,1)$ e daí $h_0(x_1, x_2) = (0,1)$ gera $\vec{P}^0_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ sobre $\mathbb{R}$.

Seja agora $g \in \vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. Similarmente, vale que $\vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \vec{P}^k_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ e, então, para $g_k \in \vec{P}^k_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$, temos

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2) &= g_0(x_1,x_2) + g_1(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2) + \cdots \\ &= b_0(0,1) + a_1(0,x_1) + b_1(x_1,x_2) + a_2(0,x_1^2) + b_2(x_1^2, x_1x_2) + \cdots \\ &= b_0(0,1) + a_1x_1(0,1) + b_1(x_1,x_2) + a_2x_1^2(0,1) + b_2x_1(x_1,x_2) + \cdots \\ &= k_1(x_1)(0,1) + k_2(x_1)(x_1,x_2), \end{aligned}$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $k_1, k_2 \in P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$, pois $u(x_1,x_2) = x_1$ constitui uma base de Hilbert para o anel $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. Portanto, $H_0(x_1,x_2) = (0,1)$ e $H_1(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$ geram $\vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$.

Pelo método de Elphick *et al.* temos que uma forma normal para o sistema (3.16) é dada por $\dot{x} = L(x) + g(x)$, onde $g \in \vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ tem grau maior ou igual a 2 sem termos constantes ou lineares, ou seja,

$$g(x) = u_1(x)(x_1,x_2) + u_2(x)(0,1),$$

onde $u_1, u_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ são tais que $u_1$ não tem termos constantes e $u_2$ não tem termos constantes e lineares. Logo, uma forma normal é

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 f_1(x_1) \\ f_1(x_1)x_2 + f_2(x_1) \end{pmatrix},$$

que na forma de sistema torna-se

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 + x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x_2} &= x_2 f_1(x_1) + f_2(x_1) \end{cases}$$

com $f_1, f_2$ funções polinomiais, sendo $f_1$ sem termos constantes e $f_2$ sem termos constantes e lineares. Note que essa forma normal coincide com a encontrada no Exemplo 3.4.9 usando o método de Belitskii.

Observe que $\vec{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$ é um módulo livremente gerado sobre $P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. De fato, suponha que

$$p(x_1, x_2)(0, 1) + q(x_1, x_2)(x_1, x_2) \equiv 0,$$

com $p, q \in P_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S})$. Então, $(q(x_1, x_2)x_1, p(x_1, x_2)+q(x_1, x_2)x_2) \equiv 0$, ou seja, $q(x_1, x_2)x_1 = 0$ e $p(x_1, x_2) + q(x_1, x_2)x_2 = 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Da primeira condição segue que $q \equiv 0$ e, substituindo na segunda condição, temos que $p \equiv 0$, como desejado.

## 3.5 Formas Normais Reversíveis Equivariantes

Uma maneira de encontrar formas normais de sistemas que são reversíveis equivariantes segundo a ação de um grupo de Lie compacto $\Gamma$ é pelo método clássico de Belitskii ou pelo método algébrico de Elphick *et al.*, impondo, no final do processo, as simetrias e as antissimetrias do campo de vetores na forma normal predeterminada. Descrevemos nesta seção um método alternativo, que é a versão reversível equivariante do Teorema 3.4.14, levando em consideração a teoria invariante para $\Gamma$ e para $\mathbf{S}$ com base na abordagem apresentada no Capítulo 2. Como sabemos, $\mathbf{S}$ não é necessariamente compacto, mas a teoria continua válida se existirem conjuntos finitos de geradores para o anel de invariantes $P_V(\mathbf{S})$ e para o módulo de equivariantes $\vec{P}_V(\mathbf{S})$ sobre $P_V(\mathbf{S})$.

Nossa abordagem nesta seção baseia-se em [3]. Seguindo o que viemos fazendo, a ideia é reconhecer um subespaço complementar de $Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma))$ em $\vec{Q}_V^k(\Gamma)$ — o espaço das aplicações polinomiais homogêneas $\Gamma-$reversíveis-equivariantes de grau $k$ — e procurar os $g^k$'s do Teorema 3.4.2 em tal complementar. O método é puramente algébrico e assim como ocorreu na Subseção 3.4.2, o aparecimento do grupo de simetrias $\mathbf{S}$ culminará no resultado principal, o Teorema 3.5.8.

Para o que segue, sejam $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial real de dimensão finita $V$, $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos com $\Gamma_+ = \ker \sigma$ e considere o sistema de equações diferenciais (3.16) de classe $C^\infty$ com $h(0) = 0$ e $h \in \vec{Q}_V(\Gamma)$.

A primeira observação que fazemos é que se $h$ é $\Gamma$-reversível-equivariante, então $L = dh(0)$ também é. De fato, lembrando que confundimos $\gamma \in \Gamma$ com sua representação (operador linear) $\rho_\gamma$, temos que $h(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma h(x)$ para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Derivando ambos os lados desta igualdade temos que $dh(\gamma x)\gamma = \sigma(\gamma)\gamma dh(x)$, que em $x = 0$ nos dá $dh(0)\gamma = \sigma(\gamma)\gamma dh(0)$. Aplicando em $x \in V$ segue que $L(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma L(x)$ para todo $x \in V$ e para todo $\gamma \in \Gamma$.

Começamos com algumas propriedades preliminares do operador homológico $Ad_L$ definido em (3.26) onde, de agora em diante, $L = dh(0)$ é um operador $\Gamma-$reversível-equivariante.

**Lema 3.5.1.** *O operador $Ad_L : \vec{P}_V \to \vec{P}_V$ definido em (3.26) permuta as parcelas da decomposição $\vec{P}_V(\Gamma_+) = \vec{P}_V(\Gamma) \oplus \vec{Q}_V(\Gamma)$ dada em (3.8).*

*Demonstração.* Seja $g \in \vec{P}_V(\Gamma) \subset \vec{P}_V$. Então $g(\gamma x) = \gamma g(x)$ de onde $dg(\gamma x)\gamma = \gamma dg(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$. Assim,

$$\begin{aligned}
Ad_L g(\gamma x) &= dg(\gamma x)L(\gamma x) - L(g(\gamma x)) \\
&= \gamma dg(x)\gamma^{-1}\sigma(\gamma)\gamma L(x) - L(\gamma g(x)) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma dg(x)L(x) - \sigma(\gamma)\gamma L(g(x)) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma(dg(x)L(x) - L(g(x))) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma Ad_L g(x),
\end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma, x \in V$, ou seja, $Ad_L g \in \vec{Q}_V(\Gamma)$. Agora, seja $p \in \vec{Q}_V(\Gamma)$. Então $p(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma p(x)$ de onde $dp(\gamma x)\gamma = \sigma(\gamma)\gamma dp(x)$. Lembrando que $(\sigma(\gamma))^2 = 1$, temos, para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$, que

$$\begin{aligned}
Ad_L p(\gamma x) &= dp(\gamma x)L(\gamma x) - L(p(\gamma x)) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma dp(x)\gamma^{-1}L(\gamma x) - L(\sigma(\gamma)\gamma p(x)) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma dp(x)\gamma^{-1}\sigma(\gamma)\gamma L(x) - \sigma(\gamma)L(\gamma p(x)) \\
&= \gamma dp(x)L(x) - (\sigma(\gamma))^2\gamma L(p(x)) \\
&= \gamma dp(x)L(x) - \gamma L(p(x)) \\
&= \gamma Ad_L p(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $Ad_L p \in \vec{P}_V(\Gamma)$. $\square$

Para o próximo resultado lembramos que $\Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$ denota o conjunto das antissimetrias de $\Gamma$, ou seja, $\sigma(\delta) = -1$ para todo $\delta \in \Gamma_-$.

**Lema 3.5.2.** *Sejam $\vec{R}$ e $\vec{S}$ os operadores de Reynolds definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente. Para todo $p \in \vec{P}_V(\Gamma_+) \subset \vec{P}_V$ temos*

$$\vec{S}(Ad_L(p)) = Ad_L(\vec{R}(p)).$$

*Demonstração.* Seja $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Então $\sigma(\delta) = \sigma(\delta^{-1}) = -1$. Lembrando que $L$ é $\Gamma-$reversível-equivariante temos

$$\begin{aligned}
Ad_L(\vec{R}(p))(x) &= Ad_L(\frac{1}{2}(p(x) + \delta^{-1}p(\delta x))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) + Ad_L(\delta^{-1}p(\delta x))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) + (d(\delta^{-1}p(\delta x))L(x) - L(\delta^{-1}p(\delta x)))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) + (\delta^{-1}dp(\delta x)\delta L(x) - \sigma(\delta^{-1})\delta^{-1}L(p(\delta x)))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) + (\delta^{-1}dp(\delta x)\delta L(x) + \delta^{-1}L(p(\delta x)))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) + (\sigma(\delta)^2\delta^{-1}dp(\delta x)\delta L(x) + \delta^{-1}L(p(\delta x)))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) + \sigma(\delta)\delta^{-1}(dp(\delta x)\sigma(\delta)\delta L(x) - L(p(\delta x)))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) - \delta^{-1}(dp(\delta x)L(\delta x) - L(p(\delta x)))) \\
&= \frac{1}{2}(Ad_L p(x) - \delta^{-1}Ad_L p(\delta x)) \\
&= \vec{S}(Ad_L p)(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in V$ e para todo $p \in \vec{P}_V(\Gamma_+)$ e, portanto, segue o resultado. □

Vamos mostrar agora que está bem definido um produto semidireto entre os grupos de simetrias $\Gamma$ e $\mathbf{S}$, onde $\mathbf{S}$ é como em (3.29), bem como uma ação deste produto em $V$. Considere o produto semidireto $\mathbf{S} \rtimes \Gamma$ munido da operação

$$(s_1, \gamma_1) \cdot_\mu (s_2, \gamma_2) = (s_1\mu(\gamma_1)(s_2), \gamma_1\gamma_2),$$

para todo $s_1, s_2 \in \mathbf{S}$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, induzida pelo homomorfismo $\mu : \Gamma \to Aut(\mathbf{S})$ definido por

$$\mu(\gamma)(s) = s^{\sigma(\gamma)},$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $s \in \mathbf{S}$. Observe que se $\gamma \in \Gamma_+$ então $\mu(\gamma)$ é a identidade e se $\gamma \in \Gamma_-$, então $\mu(\gamma)(s) = s^{-1}$, ou seja, $\mu(\gamma)$ é um automorfismo de $\mathbf{S}$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Mostremos que $\mu$ é de fato um homomorfismo. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Então

$$\begin{aligned}\mu(\gamma_1\gamma_2)(s) = s^{\sigma(\gamma_1\gamma_2)} = s^{\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)} = (s^{\sigma(\gamma_2)})^{\sigma(\gamma_1)} = \mu(\gamma_1)(s^{\sigma(\gamma_2)}) = \mu(\gamma_1)(\mu(\gamma_2)s))\\ = \mu(\gamma_1) \circ \mu(\gamma_2)(s),\end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbf{S}$.

Vejamos agora que a aplicação

$$\begin{array}{ccc}(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) \times V & \to & V\\ ((s,\gamma),v) & \longmapsto & s(\gamma v)\end{array} \tag{3.32}$$

é uma ação de $\mathbf{S} \rtimes \Gamma$ em $V$. De fato, pela Proposição 3.3.2 a operação (3.32) define uma ação se a representação de $\mu(\gamma)(s)$ é uma conjugação.

Primeiramente vejamos que $\gamma e^{rL^t} = e^{\sigma(\gamma)rL^t}\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $r \in \mathbb{R}$, pois, como $\Gamma$ é compacto, podemos supor que ele age ortogonalmente em $V$, ou seja, $\gamma^t = \gamma^{-1}$. Sendo assim temos

$$\gamma^{-1}L^t = \gamma^t L^t = (L\gamma)^t = (\sigma(\gamma)\gamma L)^t = \sigma(\gamma)L^t\gamma^t = \sigma(\gamma)L^t\gamma^{-1},$$

uma vez que $L$ é $\Gamma-$reversível-equivariante. Logo, $L^t = \sigma(\gamma)^{-1}\gamma^{-1}L^t\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, ou seja, $L^t = \sigma(\gamma)\gamma^{-1}L^t\gamma$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}(L^t)^2 &= (\sigma(\gamma)\gamma^{-1}L^t\gamma)(\sigma(\gamma)\gamma^{-1}L^t\gamma)\\ &= \sigma(\gamma)^2\gamma^{-1}L^t\gamma\gamma^{-1}L^t\gamma\\ &= \sigma(\gamma)^2\gamma^{-1}(L^t)^2\gamma.\end{aligned}$$

Procedendo por indução, temos que $(L^t)^i = (\sigma(\gamma))^i\gamma^{-1}(L^t)^i\gamma$. Tendo isso em mãos, segue que

$$\gamma e^{rL^t} = \gamma\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(rL^t)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma\frac{(rL^t)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\sigma(\gamma))^i(rL^t)^i}{i!}\gamma = e^{\sigma(\gamma)rL^t}\gamma, \tag{3.33}$$

para todo $\gamma \in \Gamma, r \in \mathbb{R}$. Disto segue que $\gamma s = s^{\sigma(\gamma)}\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma, s \in \mathbf{S}$. De fato, seja $s \in \mathbf{S}\backslash R$, onde $R$ é como em (3.28). Então existe uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inteiramente contida em $R$ convergindo para $s$. Como $s_n \in R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue de (3.33) que $\gamma s_n = s_n^{\sigma(\gamma)}\gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Fixe $\gamma \in \Gamma$ (arbitrário) e defina as funções

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : \mathbf{S} & \to & Gl(n) \\ s & \longmapsto & \gamma s \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \varphi_2 : \mathbf{S} & \to & Gl(n) \\ s & \longmapsto & s^{\sigma(\gamma)}\gamma. \end{array}$$

Ambas são claramente contínuas, pois produto e inversão de matrizes são contínuas. Dessa forma, $\varphi_1(s) = \varphi_1(\lim s_n) = \lim \varphi_1(s_n)$ e $\varphi_2(s) = \varphi_2(\lim s_n) = \lim \varphi_2(s_n)$ e, portanto,

$$\gamma s = \varphi_1(s) = \lim \varphi_1(s_n) = \lim \gamma s_n = \lim s_n^{\sigma(\gamma)}\gamma = \lim \varphi_2(s_n) = \varphi_2(s) = s^{\sigma(\gamma)}\gamma,$$

onde a quarta igualdade segue pois $s_n \in R$. Segue portanto que $\mu(\gamma)(s) = s^{\sigma(\gamma)} = \gamma s \gamma^{-1}$, ou seja, $\mu(\gamma)s$ é uma conjugação. Pela Proposição 3.3.2 a aplicação dada em (3.32) é uma ação do produto semidireto $\Gamma \rtimes \mathbf{S}$ em $V$, como desejado.

Para os próximos resultados, defina a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} \star : \Gamma \times \vec{P}_V & \to & \vec{P}_V \\ (\gamma, g) & \longmapsto & \gamma \star g \end{array}$$

por $\gamma \star g(x) = \gamma^{-1} g(\gamma x)$, para todo $x \in V$. Esta operação define uma ação de $\Gamma$ em $\vec{P}_V$ induzida pela ação de $\Gamma$ em $V$.

**Definição 3.5.3.** *Fixado $\delta \in \Gamma_-$, definimos $\pi : \vec{P}_V \to \vec{P}_V$ como*

$$\pi(p) = \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p d\tau\right), \tag{3.34}$$

*onde $\int_{\Gamma_+}$ é a integral de Haar normalizada em $\Gamma_+$.*

Pela Observação 2.1.15, tal definição faz sentido pois $V \cong \mathbb{R}^n$ para algum inteiro positivo $n$ e, assim, $\vec{P}_V \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Mais especificamente, na definição anterior, estamos integrando funções $f_p, g_p : \Gamma_+ \to \vec{P}_V$ das formas $f_p(\tau) = \tau \star p$ e $g_p(\tau) = (\delta\tau) \star p$ para $p \in \vec{P}_V$ fixado, porém arbitrário.

Para o próximo lema vamos restringir $\pi$ a $\vec{P}_V^k$ e continuar denotando por $\pi$.

**Lema 3.5.4.** *A aplicação $\pi : \vec{P}_V^k \to \vec{Q}_V^k(\Gamma)$ é uma projeção linear.*

*Demonstração.* Seja $\delta \in \Gamma_-$ fixado. A linearidade de $\pi$ segue pois a integral de Haar e a operação $\star$ são lineares. Além disso, se $p \in \vec{P}_V^k$ então $\pi(p)$ também pertence a $\vec{P}_V^k$, uma vez $\gamma \star p$ é também um polinômio homogêneo de grau $k$ e a integral de Haar mantém o grau desses polinômios (veja [14, XVI, Lema 5.10]). Queremos mostrar que $\pi(p) \in \vec{Q}_V^k(\Gamma)$, ou seja, $\pi(p)(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma\pi(p)(x)$ para todo $p \in \vec{P}_V^k, x \in V$. Mas isto é equivalente a mostrar que $\sigma(\gamma)\gamma^{-1}\pi(p)(\gamma x) = \pi(p)(x)$, para todo $x \in V$, ou seja, que

$$\sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) = \pi(p),$$

para todo $p \in \vec{P}_V^k$. Temos que $\tau \star (\gamma \star p) = (\gamma\tau) \star p$, para todo $p \in \vec{P}_V^k$. De fato, dados $\tau, \gamma \in \Gamma$,

$$\tau \star \gamma \star p(x) = \tau \star (\gamma^{-1}p(\gamma x)) = \tau^{-1}(\gamma^{-1}p(\gamma\tau x)) = (\gamma\tau)^{-1}p(\gamma\tau x) = \gamma\tau \star p(x), \quad (3.35)$$

para todo $x \in V$. Então, por (3.34) e para todo $\gamma \in \Gamma$ fixado (porém arbitrário), temos

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) &= \sigma(\gamma)\gamma \star \left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p d\tau\right) \\ &= \sigma(\gamma)\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \gamma \star \tau \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} \gamma \star (\delta\tau) \star p d\tau\right) \\ &= \sigma(\gamma)\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\gamma) \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\gamma) \star p d\tau\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se $\gamma \in \Gamma_+$, então $\sigma(\gamma) = 1$ e pela invariância à direita da integral de Haar, a igualdade (3.36) torna-se

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p d\tau\right) \\ &= \pi(p). \end{aligned}$$

Se, por outro lado, $\gamma \in \Gamma_- = \delta\Gamma_+$, então $\sigma(\gamma) = -1$ e $\gamma = \delta\lambda$ para algum $\lambda \in \Gamma_+$. Como $\gamma, \delta$ estão fixados, $\lambda$ também está. Por [9, I, Theorem 5.12], se $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ é um automorfismo então $\int_\Gamma f(\gamma)d\gamma = \int_\Gamma f \circ \varphi(\gamma)d\gamma$, para todo $f : \Gamma \to \vec{P}_V^k$. Defina, então $f_1, f_2 : \Gamma \to \vec{P}_V^k$ por $f_1(\tau) = \tau\delta\lambda \star p$, $f_2(\tau) = \delta\tau\delta\lambda \star p$ e considere o automorfismo

$\varphi(\tau) = \delta\tau\delta^{-1}$. Logo, (3.36) torna-se

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) &= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\delta\lambda) \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\delta\lambda) \star p d\tau\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} f_1(\tau) d\tau - \int_{\Gamma_+} f_2(\tau) d\tau\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} f_1 \circ \varphi(\tau) d\tau - \int_{\Gamma_+} f_2 \circ \varphi(\tau) d\tau\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\delta\tau\lambda) \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta^2\tau\lambda) \star p d\tau\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p d\tau + \int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau\right) \\
&= \pi(p),
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue do fato da integral de Haar ser invariante à direita e à esquerda por $\Gamma_+$, com $\lambda, \delta^2 \in \Gamma_+$. Logo, $\pi(p) \in \vec{Q}_V^k(\Gamma)$, para todo $p \in \vec{P}_V^k$, ou seja, $\pi(\vec{P}_V^k) \subseteq \vec{Q}_V^k(\Gamma)$.

Seja agora $p \in \vec{Q}_V^k(\Gamma)$. Então, se $\tau \in \Gamma_+$, temos

$$\tau \star p(x) = \tau^{-1} p(\tau x) = \sigma(\tau)\tau^{-1}\tau p(x) = p(x) \quad \text{e}$$

$$(\delta\tau) \star p(x) = (\delta\tau)^{-1} p(\delta\tau x) = \sigma(\delta\tau)(\delta\tau)^{-1}(\delta\tau) p(x) = -p(x).$$

para todo $x \in V$, uma vez que $\delta \in \Gamma_-$. Daí, por (3.34) e lembrando que $\int_{\Gamma_+}$ é normalizada,

$$\begin{aligned}
\pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p d\tau\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} p d\tau - \int_{\Gamma_+} -p d\tau\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} p d\tau + \int_{\Gamma_+} p d\tau\right) \\
&= p \int_{\Gamma_+} d\tau \\
&= p.
\end{aligned}$$

Então, $p \in \pi(\vec{P}_V^k)$ e, assim, $\pi(\vec{P}_V^k) = \vec{Q}_V^k(\Gamma)$. Pelo que mostramos acima, $\pi$ restrita a $\vec{Q}_V^k(\Gamma)$ é o operador identidade e, portanto, $\pi$ é uma projeção sobre $\vec{Q}_V^k(\Gamma)$. □

**Lema 3.5.5.** *A projeção $\pi$ definida em (3.34) satisfaz $\pi(\vec{P}_V^k(\boldsymbol{S})) = \vec{Q}_V^k(\boldsymbol{S} \rtimes \Gamma)$.*

*Demonstração.* Seja $g \in \vec{Q}_V^k(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$. Então $g \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \cap \vec{Q}_V^k(\Gamma)$, pela Proposição 3.3.3. Pelo lema anterior, como $g \in \vec{Q}_V^k(\Gamma)$ então $g = \pi(g) \in \pi(\vec{P}_V^k(\mathbf{S}))$, ou seja, $\vec{Q}_V^k(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) \subseteq \pi(\vec{P}_V^k(\mathbf{S}))$. Por outro lado, seja $p \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S})$. Pelo lema anterior, como $\vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \subset \vec{P}_V^k$, temos que $\pi(p) \in \vec{Q}_V^k(\Gamma)$. Se mostrarmos que $\pi(p) \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S})$ terminamos, pois $\vec{Q}_V^k(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) = \vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \cap \vec{Q}_V^k(\Gamma)$. Precisamos então mostrar que $\pi(p)(sx) = s\pi(p)(x)$, para todo $x \in V$ e $s \in (S)$, ou seja, $s^{-1}\pi(p)(sx) = \pi(p)(x)$ para todo $x \in V$ e $s \in \mathbf{S}$. Mas isso é mostrar que $s \star \pi(p) = \pi(p)$ para todo $p \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S})$ e, de fato, isto ocorre. Primeiramente veja que, como $\mu(\gamma)(s) = s^{\sigma(\gamma)} = \gamma s \gamma^{-1}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, $s \in \mathbf{S}$, então

$$\begin{cases} \gamma s &= s\gamma, \quad \text{se} \quad \gamma \in \Gamma_+ \\ \gamma s &= s^{-1}\gamma \quad \text{se} \quad \gamma \in \Gamma_-. \end{cases}$$

Assim, se $\tau \in \Gamma_+$ e usando que $p \in \vec{P}_V^k(\mathbf{S})$, temos

$$(\tau s) \star p(x) = (\tau s)^{-1} p(\tau s x) = (s\tau)^{-1} p(s\tau x) = \tau^{-1} s^{-1} s p(\tau x) = \tau \star p(x) \quad \text{e}$$

$$(\delta\tau s) \star p(x) = (\delta\tau s)^{-1} p(\delta\tau s x) = (s^{-1}\delta\tau)^{-1} p(s^{-1}\delta\tau x) = (\delta\tau)^{-1} s s^{-1} p(\delta\tau x) = (\delta\tau) \star p(x),$$

para todo $x \in V, s \in \mathbf{S}$ e para $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Então, usando (3.35) segue, para cada $s \in \mathbf{S}$,

$$\begin{aligned} s \star \pi(p) &= s \star \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} \delta\tau \star p d\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau s) \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau s) \star p d\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p d\tau - \int_{\Gamma_+} \delta\tau \star p d\tau\right) \\ &= \pi(p), \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. □

**Lema 3.5.6.** *Considere $Ad_L^k$ definida em (3.20). A projeção $\pi$ dada em (3.34) satisfaz $\pi(Ad_L^k(\vec{P}_V^k)) = Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma))$.*

*Demonstração.* Seja $p \in \vec{P}_V^k$. Para todo $\gamma \in \Gamma$ temos

$$d(\gamma \star p)x = d(\gamma^{-1} p \gamma x) = \gamma^{-1}(dp)(\gamma x)\gamma,$$

para todo $x \in V$. Como $L$ é $\Gamma-$reversível-equivariante segue que

$$\begin{aligned}
Ad_L^k(\gamma \star p)(x) &= d(\gamma \star p)(x)L(x) - L((\gamma \star p)(x)) \\
&= \gamma^{-1}(dp)(\gamma x)\gamma L(x) - L(\gamma^{-1}p(\gamma x)) \\
&= \gamma^{-1}(dp)(\gamma x)\gamma L(x) - \sigma(\gamma^{-1})\gamma^{-1}L(p(\gamma x)) \\
&= (\sigma(\gamma))^2\gamma^{-1}(dp)(\gamma x)\gamma L(x) - \sigma(\gamma)\gamma^{-1}L(p(\gamma x)) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma^{-1}((dp)(\gamma x)\sigma(\gamma)\gamma L(x) - L(p(\gamma x))) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma^{-1}((dp)(\gamma x)L(\gamma x) - L(p(\gamma x))) \\
&= \sigma(\gamma)\gamma \star Ad_L^k p(x),
\end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma, x \in V$. Assim $\gamma \star Ad_L^k p = \sigma(\gamma)Ad_L^k(\gamma \star p)$, para todo $p \in \vec{P}_V^k$, de onde

$$\begin{aligned}
\pi(Ad_L^k p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \gamma \star Ad_L^k p d\gamma - \int_{\Gamma_+} (\delta\gamma) \star Ad_L^k p d\gamma\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \sigma(\gamma)Ad_L^k(\gamma \star p)d\gamma - \int_{\Gamma_+} \sigma(\delta\gamma)Ad_L^k(\delta\gamma \star p)d\gamma\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} Ad_L^k(\gamma \star p)d\gamma + \int_{\Gamma_+} Ad_L^k(\delta\gamma \star p)d\gamma\right) \\
&= Ad_L^k\left(\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \gamma \star pd\gamma + \int_{\Gamma_+} (\delta\gamma) \star pd\gamma\right)\right) \\
&= Ad_L^k\left(\int_{\Gamma} \gamma \star pd\gamma\right),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 2.1.17. Agora, se $\displaystyle\int_\Gamma \gamma \star pd\gamma \in \vec{P}_V^k(\Gamma)$ teríamos $\pi(Ad_L^k(\vec{P}_V^k)) \subseteq Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma))$. De fato, considere $f_p : \Gamma \to \vec{P}_V^k$ definido por $f_p(\gamma) = \gamma \star p$. Dado $\tau \in \Gamma$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
\tau \star \int_\Gamma \gamma \star pd\gamma = \int_\Gamma \tau \star \gamma \star pd\gamma = \int_\Gamma (\gamma\tau) \star pd\gamma = \int_\Gamma f_p(\gamma\tau)d\gamma \\
= \int_\Gamma f_p(\gamma)d\gamma = \int_\Gamma \gamma \star pd\gamma,
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue de (3.35) e a penúltima igualdade segue da invariância da integral de Haar à direita, mostrando que

$$\tau^{-1}\int_\Gamma \gamma \star p(\tau x)d\gamma = \int_\Gamma \gamma \star p(x)d\gamma,$$

para todo $\tau \in \Gamma$, ou seja, $\displaystyle\int_\Gamma \gamma \star p d\gamma \in \vec{P}_V^k(\Gamma)$ como desejado. Ainda, se $p \in \vec{P}_V^k(\Gamma)$ então

$$\gamma \star p(x) = \gamma^{-1}p(\gamma x) = \gamma^{-1}\gamma p(x) = p(x),$$

para todo $x \in V, \gamma \in \Gamma$, de onde para cada $\gamma \in \Gamma$ temos

$$p = p \cdot 1 = p\int_\Gamma d\gamma = \int_\Gamma p d\gamma = \int_\Gamma \gamma \star p d\gamma,$$

uma vez que a integral de Haar sobre $\Gamma$ é normalizada. Logo, dado $p \in \vec{P}_V^k(\Gamma)$ temos

$$Ad_L^k p = Ad_L^k(\int_\Gamma \gamma \star p d\gamma) = \pi(Ad_L^k p)$$

e, portanto, $Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma)) \subseteq \pi(Ad_L^k(\vec{P}_V^k))$ uma vez que $\vec{P}_V^k(\Gamma) \subseteq \vec{P}_V^k$. Segue então o resultado. □

O seguinte resultado é a versão reversível equivariante do Teorema 3.4.14.

**Teorema 3.5.7.** *Seja $\boldsymbol{S}$ como definido em (3.29). Para cada $k \geq 2$ temos*

$$\vec{Q}_V^k(\Gamma) = \vec{Q}_V^k(\boldsymbol{S} \rtimes \Gamma) \oplus Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma)).$$

*Demonstração.* Aplicando a projeção $\pi$ na igualdade $\vec{P}_V^k = \vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \oplus Ad_L^k(\vec{P}_V^k)$ do Teorema 3.4.14 teremos $\pi(\vec{P}_V^k) = \pi(\vec{P}_V^k(\mathbf{S})) + \pi(Ad_L^k(\vec{P}_V^k))$. Pelos Lemas 3.5.4, 3.5.5 e 3.5.6 segue que

$$\vec{Q}_V^k(\Gamma) = \vec{Q}_V^k(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) + Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma)).$$

Resta mostrar então que esta soma é direta. Já sabemos que $\vec{Q}_V^k(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) = \vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \cap \vec{Q}_V^k(\Gamma)$ e, do Teorema 3.4.14, que $\vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \cap Ad_L^k(\vec{P}_V^k) = \{0\}$. Como $\vec{P}_V^k(\Gamma) \subseteq \vec{P}_V^k$ temos $\vec{P}_V^k(\mathbf{S}) \cap Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma)) = \{0\}$, de onde segue que $\vec{Q}_V^k(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) \cap Ad_L^k(\vec{P}_V^k(\Gamma)) = \{0\}$, como desejado. □

Toda a discussão dessa seção juntamente com o teorema anterior resulta no principal resultado deste trabalho, que determina uma maneira algébrica de encontrar uma forma normal de um sistema reversível equivariante.

**Teorema 3.5.8.** *Seja $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo em $V$ e considere $h \in \vec{Q}_V(\Gamma)$ com $h(0) = 0$ e $L = dh(0)$. Seja $\boldsymbol{S}$ como em (3.29). Então a forma normal de $\dot{x} = h(x)$ é dada por*

$$\dot{x} = L(x) + g^2(x) + g^3(x) + \cdots, \tag{3.37}$$

*onde para cada* $k \geq 2$, $g^k \in \vec{Q}^k_V(\boldsymbol{S} \rtimes \Gamma)$.

*Demonstração.* Para cada $k \geq 2$ fixado, considere a mudança de coordenadas próxima à identidade $x = \xi(y) = y + \xi^k(y)$. Queremos que tal mudança de coordenadas preserve as simetrias e antissimetrias do sistema, ou seja, se $h$ é $\Gamma$-reversível-equivariante, então $f(y) = d\xi(y)^{-1}h(\xi(y))$ dada em (3.19) também é. Vamos mostrar que se $\xi^k$ é $\Gamma-$equivariante, isto acontece. Primeiro note que, neste caso, $\xi$ também é $\Gamma-$equivariante. De fato,

$$\xi(\gamma y) = \gamma y + \xi^k(\gamma x) = \gamma(y + \xi^k(x)) = \gamma\xi(y),$$

para todo $\gamma \in \Gamma, y \in V$. Logo, $d\xi(\gamma y)\gamma = \gamma d\xi(y)$ e daí $d\xi(\gamma y) = \gamma d\xi(y)\gamma^{-1}$, para todo $\gamma \in \Gamma, y \in V$. Assim,

$$\begin{aligned} f(\gamma y) &= (d\xi(\gamma y))^{-1}h(\xi(\gamma y)) \\ &= (\gamma d\xi(y)\gamma^{-1})^{-1}h(\gamma\xi(y)) \\ &= \gamma d\xi(y)^{-1}\gamma^{-1}\sigma(\gamma)\gamma h(\xi(y)) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma f(y), \end{aligned}$$

mostrando que $f$ em (3.19) é $\Gamma-$reversível-equivariante. Além disso, já sabemos dos Lemas 3.5.4 e 3.5.6 que $Ad^k_L(\vec{P}^k_V(\Gamma)) \subset \vec{Q}^k_V(\Gamma)$. Assim, $Ad^k_L\xi^k \in \vec{Q}^k_V(\Gamma)$ e devemos considerar $Ad^k_L$ definido em (3.20) restrito às aplicações em $\vec{P}^k_V(\Gamma)$. Pelo Teorema 3.4.2, cada $g^k$ em (3.37) está no subespaço complementar de $Ad^k_L(\vec{P}^k_V(\Gamma))$ que é, neste caso, $\vec{Q}^k_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$. $\square$

No próximo capítulo dedicamo-nos ao cálculo das formas normais de sistemas Hamiltonianos reversíveis equivariantes segundo a ação de específicos grupos de Lie compactos.

# CAPÍTULO 4

# CAMPOS HAMILTONIANOS REVERSÍVEIS EQUIVARIANTES

Este capítulo é uma contribuição ao estudo local de sistemas Hamiltonianos reversíveis equivariantes definidos em um espaço vetorial $V$ de dimensão finita em presença de duas involuções lineares[1] $\phi$ e $\psi$ que agem como antissimetrias em $V$. Estes são casos particulares de sistemas Hamiltonianos $\Gamma$-reversíveis-equivariantes. As involuções $\phi$ e $\psi$ podem comutar ou não. No primeiro caso, elas geram o grupo $\Gamma = \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$, onde uma componente é gerada por $\phi$ e a outra por $\psi$. No segundo caso, o grupo em ação é o diedral $\mathbb{D}_4$, que é um dos dois grupos não abelianos com 8 elementos.

No presente capítulo, tais sistemas têm a forma

$$\dot{x} = X_H(x) \tag{4.1}$$

definido em um espaço vetorial $V$ de dimensão finita, onde $X_H(x)$ é um campo Hamiltoniano como em (1.7) e é reversível equivariante segundo um dos grupos $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, $\Gamma = \mathbb{D}_4$ ou $\Gamma = \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$, onde $\phi$ e $\psi$ comutam entre si. Nosso objetivo aqui é então aplicar a teoria de formas normais apresentada na Seção 3.5, mais especificamente o Teorema 3.5.8, para

[1] Uma involução $\phi$ é uma aplicação inversível que é igual à sua inversa, ou seja, $\phi^2 = Id$.

calcular a forma normal de (4.1). A Seção 4.1 é destinada ao cálculo de formas normais $\mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes de campos Hamiltonianos com aproximação linear do tipo

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nos casos $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$ (caso genérico), $\alpha = \beta$ (caso $1:1$) e $q\alpha - p\beta = 0$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq q$ (caso $p:q$).

As Seções 4.2 e 4.3 são destinadas ao cálculo de formas normais de campos Hamiltonianos reversíveis equivariantes segundo a ação de $\mathbb{D}_4$ e $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$, respectivamente. Na Seção 4.2, o campo tem parte linear do tipo (4.2) para o caso genérico, ou seja, $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$. Na Seção 4.3 o campo Hamiltoniano $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$-reversível-equivariante tem parte linear

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \omega_1 & & & \\ & & -\omega_1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \omega_n \\ & & & & & -\omega_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

onde $\omega_1, \cdots, \omega_n$ são algebricamente independentes[2]. Lembremos que $\Gamma_+$ denota o subgrupo das simetrias de $\Gamma$ e $\Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$.

Na Seção 4.4 vamos provar que existem, de fato, campos Hamiltonianos com as linearizações $L$ e $M$ dadas em (4.2) e (4.3), respectivamente.

[2]Se $M$ é uma matriz da forma (4.3), dizemos que $M$ é ressonante se existem inteiros não nulos $k_1, \cdots, k_n$ tais que $k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0$. Caso contrário, $M$ é não ressonante e $\omega_1, \cdots, \omega_n$ são algebricamente independentes.

## 4.1 Formais normais $\mathbb{Z}_2$-reversíveis-equivariantes

Nesta seção vamos calcular formas normais de sistemas Hamiltonianos $\mathbb{Z}_2$-reversíveis-equivariantes da forma (4.1) com parte linear do tipo (4.2), onde $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{id, \tilde{\delta}\}$ age em $\mathbb{R}^4$ como

$$\tilde{\delta}(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_1, x_2, y_1, -y_2). \tag{4.4}$$

Consideramos aqui o epimorfismo $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\tilde{\delta} \in \Gamma_-$. É facil ver que $L$ em (4.2) anticomuta com $\tilde{\delta}$, bastando tomar $\tilde{\delta}$ em sua forma matricial, ou seja, $L\tilde{\delta} = -\tilde{\delta}L$.

Em alguns casos, será mais fácil trabalhar em $\mathbb{C}^2$ ao invés de $\mathbb{R}^4$. Neste caso temos $\tilde{\delta}(z_1, z_2) = (-\overline{z_1}, \overline{z_2})$, onde $z_1 = x_1 + ix_2 \cong (x_1, x_2)$ e $z_2 = y_1 + iy_2 \cong (y_1, y_2)$. Além disso, sobre o corpo dos números complexos, $L$ pode ser escrita como

$$L = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & \beta i \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

que é uma matriz diagonal. Então $L$ é semissimples e seus autovalores são $\alpha i$ e $\beta i$.

### 4.1.1 Caso genérico

Comecemos com o caso em que $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$. Decompomos $L$ como $L = D + N$, onde $D = L$ é semissimples e $N = 0$ é nilpotente. Seus autovalores $\alpha i$ e $\beta i$ são algebricamente independentes pois $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$. Pela Proposição 3.4.12 temos que o conjunto $\mathbf{S}$ definido em (3.29) é o toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Observe também que tal grupo age diagonalmente em $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Para o cálculo da forma normal precisamos encontrar os geradores do módulo $\vec{Q}_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)$ das aplicações $\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes e, para isso, utilizamos o Algoritmo 3.2.8. O primeiro passo é encontrar uma base de Hilbert para o anel $P_{\mathbb{R}^4}((T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)_+)$, que coincide com $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \times \{id\}) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2) \cap P_{\mathbb{R}^4}(\{id\}) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2)$, e os geradores de $\vec{P}_{\mathbb{R}^4}(T^2)$ sobre $P_{\mathbb{R}^4}(T^2)$. Pelo Exemplo 3.3.6, para $n = 2$ e escrevendo em coordenadas reais, temos que uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^4}(T^2)$ é $\{u_1, u_2\}$ com $u_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 + x_2^2$ e $u_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Pelo mesmo exemplo, $\vec{P}_{\mathbb{R}^4}(T^2) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2)\{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ com

$$H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, x_2, 0, 0), \;\; H_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_2, x_1, 0, 0),$$

$$H_2(x_1,x_2,y_1,y_2) = (0,0,y_1,y_2) \text{ e } H_3(x_1,x_2,y_1,y_2) = (0,0,-y_2,y_1).$$

Convencionamos então $S(u_0) \equiv 1$ e calculamos $S(u_1)$ e $S(u_2)$, para $S$ definido em (3.5) e $\delta = (s,\tilde{\delta}) \in (T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)_- = T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2 \backslash T^2 \times \{id\}$, onde escolhemos $s = (0,0)$ o elemento neutro de $\mathbf{S} = T^2$ e $\tilde{\delta}$ é como em (4.4). Então,

$$\delta(x_1,x_2,y_1,y_2) = s(\tilde{\delta}(x_1,x_2,y_1,y_2)) = s(-x_1,x_2,y_1,-y_2) = (-x_1,x_2,y_1,-y_2), \tag{4.6}$$

para todo $(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$. Note que $u_1$ e $u_2$ são invariantes pela ação de $\delta$. Então, pelo item $(ii)$ da Proposição 3.2.2, $S(u_1) = S(u_2) \equiv 0$. Fazemos agora $H_{ij} = S(u_i)H_j$. Como $S(u_1) = S(u_2) \equiv 0$ resta-nos $H_{0j} = H_j$, para $j = 0,1,2,3$. O último passo do Algoritmo 3.2.8 é calcularmos $\vec{S}(H_{ij}) = \vec{S}(H_j)$, para $\vec{S}$ definido em (3.5) e $j = 0,1,2,3$. Veja que

$$\begin{aligned}
H_0(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_0(-x_1,x_2,y_1,-y_2) = (-x_1,x_2,0,0) = \delta(x_1,x_2,0,0)\\
&= \delta H_0(x_1,x_2,y_1,y_2),\\
H_1(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_1(-x_1,x_2,y_1,-y_2) = (-x_2,-x_1,0,0) = \delta(x_2,-x_1,0,0)\\
&= -\delta H_1(x_1,x_2,y_1,y_2),\\
H_2(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_2(-x_1,x_2,y_1,-y_2) = (0,0,y_1,-y_2) = \delta(0,0,y_1,y_2)\\
&= \delta H_2(x_1,x_2,y_1,y_2) \quad \text{e}\\
H_3(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_3(-x_1,x_2,y_1,-y_2) = (0,0,y_2,y_1) = \delta(0,0,y_2,-y_1)\\
&= -\delta H_3(x_1,x_2,y_1,y_2).
\end{aligned}$$

Em outras palavras, $H_0$ e $H_2$ são $T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$-equivariantes e $H_1$ e $H_3$ são $T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$-reversíveis-equivariantes. Novamente pelo item $(ii)$ da Proposição 3.2.2, temos $\vec{S}(H_0) = \vec{S}(H_2) \equiv 0$, $\vec{S}(H_1) = H_1$, e $\vec{S}(H_3) = H_3$. Assim, pelo Algoritmo 3.2.8,

$$\vec{Q}_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)\{H_1, H_3\}.$$

Precisamos ainda de uma base de Hilbert para o anel $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)$. Como já temos uma base para $P_{\mathbb{R}^4}((T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)_+)$, que é dada por $\{u_1,u_2\}$, pelo Teorema 3.2.9, basta calcularmos $R(u_i)$ e $S(u_i)S(u_j)$ com $i,j = 1,2$ onde $R$ e $S$ são definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente. Sabemos que $S(u_1) = S(u_2) \equiv 0$ e, uma vez que $u_1,u_2$ são invariantes por $\mathbb{Z}_2$, segue que $R(u_i) = u_i$ para $i = 1,2$. Portanto $\{u_1,u_2\}$ também é uma base de

Hilbert para $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)$. Pelo Teorema 3.5.8, a forma normal $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante do sistema (4.1) é

$$\dot{x} = L(x) + f_0(x)H_1(x) + f_1(x)H_3(x),$$

com $x = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ e $f_0, f_1 \in P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \mathbb{Z}_2)$, que em termos matriciais torna-se

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + f_0(x) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f_1(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a forma normal procurada é

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\alpha x_2 - x_2 f_0(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{x_2} = \alpha x_1 + x_1 f_0(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{y_1} = -\beta y_2 - y_2 f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{y_2} = \beta y_1 + y_1 f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $f_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}(x_1^2 + x_2^2)^i (y_1^2 + y_2^2)^j$ e $f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}(x_1^2 + x_2^2)^i (y_1^2 + y_2^2)^j$, com $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$.

Esta mesma forma normal também foi obtida em [23], onde Martins usou o método clássico desenvolvido por Belitskii sem impor a reversibilidade de $\mathbb{Z}_2$, obtendo primeiro uma pré-forma normal. Depois disso, Martins considerou a ação de $\mathbb{Z}_2$ para obter a forma normal (4.7). O método algébrico que nós apresentamos aqui (Teorema 3.5.8) nos permite impor a reversibilidade de $\mathbb{Z}_2$ desde o início dos cálculos.

### 4.1.2 Caso 1:1

Consideramos aqui o caso $\alpha = \beta$ e calculamos a forma normal $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante de (4.1) com linearização $L$ como em (4.2). Para facilitar os cálculos, vamos trabalhar com $\mathbb{C}^2$ ao invés de $\mathbb{R}^4$. Podemos escrever $L = D + N$, onde $D = L$ é semissimples e $N = 0$ é nilpotente, mas agora $L$ tem apenas um autovalor algebricamente independente, pois $\alpha = \beta$. Pela Proposição 3.4.12, $\mathbf{S} = S^1$ e consideramos sua ação em $\mathbb{C}^2$ como $\theta(z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$, para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\theta \in S^1$.

Para aplicarmos o Teorema 3.5.8, precisamos dos geradores do módulo das aplicações $S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes sobre o anel $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$. Sigamos novamente o Algoritmo 3.2.8. Veja que $P_{\mathbb{C}^2}((S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)_+) = P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \times \{id\}) = P_{\mathbb{C}^2}(S^1) \cap P_{\mathbb{C}^2}(\{id\}) = P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ e da mesma forma $\vec{P}_{\mathbb{C}^2}((S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)_+) = \vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. Pelos Exemplos 2.2.5 e 2.3.6,

$$u_1(z_1, z_2) = |z_1|^2, \ u_2(z_1, z_2) = |z_2|^2, \ u_3(z_1, z_2) = Re(z_1 \overline{z_2}), \ \text{e } u_4(z_1, z_2) = Im(z_1 \overline{z_2})$$

formam uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ e

$$H_0(z_1, z_2) = (z_1, 0), \ H_1(z_1, z_2) = (z_2, 0), \ H_2(z_1, z_2) = (iz_1, 0), \ H_3(z_1, z_2) = (iz_2, 0),$$

$$H_4(z_1, z_2) = (0, z_1), \ H_5(z_1, z_2) = (0, z_2), \ H_6(z_1, z_2) = (0, iz_1), \ \text{e } H_7(z_1, z_2) = (0, iz_2)$$

geram $\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ sobre $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$.

Lembrando que $\tilde{\delta}(z_1, z_2) = (-\overline{z_1}, \overline{z_2})$, fixe $\delta = (0, \tilde{\delta}) \in (S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)_- = S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2 \backslash S^1 \times \{id\}$, onde 0 é o elemento neutro do grupo $S^1$. É fácil ver que $u_1$ e $u_2$ são invariantes por $\delta$. Agora,

$$u_3(\delta(z_1, z_2)) = u_3(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = Re(-\overline{z_1} z_2) = -Re(\overline{z_1} z_2) = -Re(z_1 \overline{z_2}) = -u_3(z_1, z_2),$$

ou seja, $u_3 \in Q_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{Z}_2)$. Já $u_4$ é invariante por $\delta$, pois

$$u_4(\delta(z_1, z_2)) = u_4(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = Im(-\overline{z_1} z_2) = Im(z_1 \overline{z_2}) = u_4(z_1, z_2).$$

Assim, por $(ii)$ da Proposição 3.2.2, $S(u_1) = S(u_2) = S(u_4) \equiv 0$, e $S(u_3) = u_3$. Definindo $S(u_0) \equiv 1$, construímos $H_{ij} = S(u_i)H_j$ e calculamos $\vec{S}(H_{ij})$, para todo $i = 0, \cdots, 4$, $j = 0, \cdots, 7$ com os operadores $S$ e $\vec{S}$ definidos em (3.5). Então, faremos os cálculos apenas para $H_{0j} = H_j$ e $H_{3j} = u_3 H_j$ com $j = 0, \cdots, 7$, visto que $H_{ij} = 0$ para $i = 1, 2, 4$.

Temos

$$
\begin{aligned}
H_0(\delta(z_1,z_2)) &= H_0(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (-\overline{z_1},0) = \delta(z_1,0) = \delta H_0(z_1,z_2),\\
H_1(\delta(z_1,z_2)) &= H_1(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (\overline{z_2},0) = -\delta(z_2,0) = -\delta H_1(z_1,z_2),\\
H_2(\delta(z_1,z_2)) &= H_2(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (-i\overline{z_1},0) = -\delta(iz_1,0) = -\delta H_2(z_1,z_2),\\
H_3(\delta(z_1,z_2)) &= H_3(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (i\overline{z_2},0) = \delta(iz_2,0) = \delta H_3(z_1,z_2),\\
H_4(\delta(z_1,z_2)) &= H_4(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (0,-\overline{z_1}) = -\delta(0,z_1) = -\delta H_4(z_1,z_2),\\
H_5(\delta(z_1,z_2)) &= H_5(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (0,\overline{z_2}) = \delta(0,z_2) = \delta H_5(z_1,z_2),\\
H_6(\delta(z_1,z_2)) &= H_6(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (0,-i\overline{z_1}) = \delta(0,iz_1) = \delta H_6(z_1,z_2),\\
H_7(\delta(z_1,z_2)) &= H_7(-\overline{z_1},\overline{z_2}) = (0,i\overline{z_2}) = -\delta(0,iz_2) = -\delta H_7(z_1,z_2),
\end{aligned}
$$

ou seja, $H_0, H_3, H_5, H_6 \in \vec{P}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{Z}_2)$ e $H_1, H_2, H_4, H_7 \in \vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{Z}_2)$. Portanto, novamente por $(ii)$ da Proposição 3.2.2, temos $\vec{S}(H_i) \equiv 0$ para $i = 0,3,5,6$ e $\vec{S}(H_j) = H_j$, para $j = 1,2,4,7$. Agora, como $S(u_3) = u_3 \in Q_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{Z}_2)$ então, pelo Lema 3.1.7, temos $u_3H_0$, $u_3H_3$, $u_3H_5$, $u_3H_6 \in \vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{Z}_2)$ e $u_3H_1, u_3H_2, u_3H_4, u_3H_7 \in \vec{P}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{Z}_2)$. Novamente pela Proposição 3.2.2, $\vec{S}(H_{3j}) = H_{3j}$, para $j = 0,3,5,6$ e $\vec{S}(H_{3j}) \equiv 0$ para $j = 1,2,4,7$. Dessa forma, $\vec{S}(H_i) = H_i$ e $\vec{S}(H_{3j}) = H_{3j} = u_3H_j$ para $i = 1,2,4,7$ e $j = 0,3,5,6$, determinam os geradores do módulo $\vec{Q}_2(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$ sobre o anel $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$. Mais especificamente,

$$
\begin{aligned}
K_1(z_1,z_2) &= H_1(z_1,z_2) = (z_2,0)\\
K_2(z_1,z_2) &= H_2(z_1,z_2) = (iz_1,0)\\
K_3(z_1,z_2) &= H_{30}(z_1,z_2) = Re(z_1\overline{z_2})(z_1,0)\\
K_4(z_1,z_2) &= H_{33}(z_1,z_2) = Re(z_1\overline{z_2})(iz_2,0)\\
K_5(z_1,z_2) &= H_4(z_1,z_2) = (0,z_1)\\
K_6(z_1,z_2) &= H_7(z_1,z_2) = (0,iz_2)\\
K_7(z_1,z_2) &= H_{35}(z_1,z_2) = Re(z_1\overline{z_2})(0,z_2)\\
K_8(z_1,z_2) &= H_{36}(z_1,z_2) = Re(z_1\overline{z_2})(0,iz_1),
\end{aligned}
$$

geram $\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S_1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$ sobre $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$.

Precisamos ainda calcular uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$. Como conhecemos uma base de $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, basta utilizarmos o Teorema 3.2.9 tomando $\Gamma_+ = S^1$. Cálculos diretos mostram que $u_1, u_2$ e $u_4$ são invariantes e $u_3$ é anti-invariante pela ação de $S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2$ dada em (4.6). Então $R(u_j) = u_j$, $R(u_3) \equiv 0 \equiv S(u_j)$ e $S(u_3) = u_3$ para todo $j = 1, 2, 4$, graças à Proposição 3.2.2. Assim,

$$u_1(z_1, z_2) = |z_1|^2,\ u_2(z_1, z_2) = |z_2|^2,\ u_4(z_1, z_2) = Im(z_1\overline{z_2}) \text{ e } (u_3(z_1, z_2))^2 = (Re(z_1\overline{z_2}))^2$$

compõem uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$, segundo o Teorema 3.2.9.

Portanto, uma forma normal $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante para o sistema (4.1) em que $\alpha = \beta$ na linearização $L$ é dada por

$$\dot{z} = L(z) + \sum_{j=1}^{8} f_j(z) K_j(z),$$

com $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ e $f_j \in P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$ para $j = 1, \cdots, 8$. Lembrando que $L$ pode ser escrita como (4.5), uma forma normal para o sistema em questão é então

$$\begin{cases} \dot{z_1} = \alpha i z_1 + f_1(z_1, z_2) z_2 + f_2(z_1, z_2) i z_1 + f_3(z_1, z_2) Re(z_1\overline{z_2}) z_1 + f_4(z_1, z_2) Re(z_1\overline{z_2}) i z_2 \\ \dot{z_2} = \beta i z_2 + f_5(z_1, z_2) z_1 + f_6(z_1, z_2) i z_2 + f_7(z_1, z_2) Re(z_1\overline{z_2}) z_2 + f_8(z_1, z_2) Re(z_1\overline{z_2}) i z_1 \end{cases}$$

onde $f_t$ com $t = 1, \cdots, 8$ é da forma

$$f_t(z_1, z_2) = \sum_{i+j+k+l=1}^{\infty} a_{ijkl} (|z_1|^2)^i (|z_2|^2)^j (Im(z_1\overline{z_2}))^k ((Re(z_1\overline{z_2}))^2)^l,$$

com $a_{ijkl} \in \mathbb{R}$.

### 4.1.3 Caso $p : q$

Suponha agora que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que $q\alpha - p\beta = 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $p$ e $q$ são primos entre si. Então $\beta = \dfrac{q}{p}\alpha$ e reescrevemos $L$ em (4.5) como

$$L = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & \frac{q}{p}\alpha i \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Assim como no caso anterior, temos pela Proposição 3.4.12 que $\mathbf{S}$ definido em (3.29) é o grupo do círculo $S^1$. Para determinar uma ação apropriada de $S^1$ em $\mathbb{C}^2$, determinemos como pode ser escrito o grupo $\mathbf{S}$. Pela definição de $R$ dada em (3.28) temos[3]

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{\frac{q}{p}\theta} \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \text{ e } \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Por [26, Seção 6.1, Exemplo 5] temos que $R$ é fechado e compacto em $T^2$ e, portanto, $R = \mathbf{S}$. Note que, por meio de um isomorfismo de grupos, podemos considerar

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} R_{p\theta} & 0 \\ 0 & R_{q\theta} \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

de modo que $\mathbf{S}$ age em $\mathbb{C}^2$ como produto de matriz por vetor, ou seja, $\theta(z_1, z_2) = (e^{pi\theta} z_1, e^{iq\theta} z_2)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Novamente, usamos o Algoritmo 3.2.8. Como $P_{\mathbb{C}^2}((S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)_+) = P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, bem como $\vec{P}_{\mathbb{C}^2}((S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)_+) = \vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, já obtivemos pelos Exemplos 2.2.7 e 2.3.7 que

$$u_1(z_1, z_2) = |z_1|^2,\ u_2(z_1, z_2) = |z_2|^2,\ u_3(z_1, z_2) = Re(z_1^q \overline{z}_2^p) \text{ e } u_4(z_1, z_2) = Im(z_1^q \overline{z}_2^p)$$

formam uma base de Hilbert para o anel dos invariantes $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ e que as aplicações

$$\begin{aligned} H_0(z_1, z_2) =& (z_1, 0),\ H_1(z_1, z_2) = (iz_1, 0),\ H_2(z_1, z_2) = (\overline{z}_1^{q-1} z_2^p, 0),\ H_3(z_1, z_2) = (i\overline{z}_1^{q-1} z_2^p, 0), \\ H_4(z_1, z_2) =& (0, z_2),\ H_5(z_1, z_2) = (0, iz_2),\ H_6(z_1, z_2) = (0, z_1^q \overline{z}_2^{p-1}) \text{ e } H_7(z_1, z_2) = (0, iz_1^q \overline{z}_2^{p-1}) \end{aligned}$$

compõem um conjunto de geradores para o módulo $\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ sobre o anel $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$.

Já vimos na subseção anterior que $u_1$ e $u_2$ são invariantes por $\delta = (0, \tilde{\delta})$, cuja ação também é dada por (4.6), o que implica em $S(u_1) = S(u_2) \equiv 0$, para $S$ como em (3.5). Vejamos o que ocorre com $u_3$ e $u_4$. Temos que

$$\begin{aligned} u_3(\delta(z_1, z_2)) &= u_3(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = Re((-\overline{z_1})^q z_2^p) = Re((-1)^q \overline{z_1}^q z_2^p) \\ &= \begin{cases} Re(z_1^q \overline{z_2}^p), \text{ se } q \text{ é par} \\ -Re(z_1^q \overline{z_2}^p), \text{ se } q \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

[3]Basta calcular $e^{rL^t}$, com $r \in \mathbb{R}$ e considerar $\theta = r\alpha$.

e, consequentemente, pelo item $(ii)$ da Proposição 3.2.2,

$$\begin{cases} S(u_3) \equiv 0, \text{ se } q \text{ é par} \\ S(u_3) = u_3, \text{ se } q \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Fazendo a mesma análise para $u_4$ temos que

$$\begin{cases} S(u_4) = u_4, \text{ se } q \text{ é par} \\ S(u_4) \equiv 0, \text{ se } q \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Convencionando $S(u_0) \equiv 1$, vamos calcular $H_{ij} = S(u_i)H_j$ e depois $\vec{S}(H_{ij})$, com $i = 0, \cdots, 4$ e $j = 0, \cdots, 7$. Mas antes note que[4]

$$H_0(\delta(z_1, z_2)) = H_0(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (-\overline{z_1}, 0) = \delta H_0(z_1, z_2),$$

$$H_1(\delta(z_1, z_2)) = H_1(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (-i\overline{z_1}, 0) = -\delta H_1(z_1, z_2),$$

$$H_2(\delta(z_1, z_2)) = H_2(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = ((-z_1)^{q-1}\overline{z_2}^p, 0) = \begin{cases} \delta H_2(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é par} \\ -\delta H_2(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é ímpar} \end{cases},$$

$$H_3(\delta(z_1, z_2)) = H_3(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (i(-z_1)^{q-1}\overline{z_2}^p, 0) = \begin{cases} -\delta H_3(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é par} \\ \delta H_3(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é ímpar} \end{cases},$$

$$H_4(\delta(z_1, z_2)) = H_4(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (0, \overline{z_2}) = \delta H_4(z_1, z_2),$$

$$H_5(\delta(z_1, z_2)) = H_5(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (0, i\overline{z_2}) = -\delta H_5(z_1, z_2),$$

$$H_6(\delta(z_1, z_2)) = H_6(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (0, (-\overline{z_1})^q z_2^{p-1}) = \begin{cases} \delta H_6(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é par} \\ -\delta H_6(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é ímpar} \end{cases},$$

$$H_7(\delta(z_1, z_2)) = H_3(-\overline{z_1}, \overline{z_2}) = (0, i(-\overline{z_1})^q z_2^p) = \begin{cases} -\delta H_7(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é par} \\ \delta H_7(z_1, z_2), \text{ se } q \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Assim sendo, $H_0, H_4 \in \vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, $H_1, H_5 \in \vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ e os demais casos dependem de $q$. Por isso, vamos dividir nos casos: $q$ par e $q$ ímpar.

$(i)$ $q$ é par.

[4]Para as aplicações $H_0, H_1, H_4$ e $H_5$ as contas já foram feitas na subseção anterior, lá denotadas por $H_0, H_2, H_5$ e $H_7$, respectivamente.

Neste caso, $S(u_1)=S(u_2)=S(u_3)\equiv 0$ e $S(u_4)=u_4$. Então, ao formarmos $H_{ij}=S(u_i)H_j$ temos apenas os elementos $H_{0j}=H_j$ e $H_{4j}=u_4H_j$ para $j=1,\cdots,7$. Como $q$ é par, da análise anterior segue que $H_2,H_6\in\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ e $H_3,H_7\in\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. Pela Proposição 3.2.2 temos $\vec{S}(H_j)\equiv 0$ para todo $j=0,2,4,6$, pois nestes casos $H_j\in\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. Além disso, $\vec{S}(H_j)=H_j$ se $j=1,3,5,7$, pois estes pertencem à $\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. Pelo Lema 3.1.7 temos que $u_4H_k\in\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ se $k=0,2,4,6$ e $u_4H_j\in\vec{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ se $j=1,3,5,7$. Então, novamente pelo item $(ii)$ da Proposição 3.2.2 temos $S(u_4)H_k=u_4H_k$ e $\vec{S}(u_4H_j)\equiv 0$ para todo $k=0,2,4,6$ e $j=1,3,5,7$. Portanto, pelo Algoritmo 3.2.8, as aplicações $\vec{S}(u_4H_k)=u_4H_k$ geram $\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ sobre $P_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, para $k=0,2,4,6$ e $j=1,3,5,7$. Ou seja, as aplicações

$$K_1(z_1,z_2)=(iz_1,0),\ K_2(z_1,z_2)=(i\overline{z}_1^{q-1}z_2^p,0),\ K_3(z_1,z_2)=Im(z_1^q\overline{z}_2^p)(z_1,0),$$

$$K_4(z_1,z_2)=Im(z_1^q\overline{z}_2^p)(\overline{z}_1^{q-1}z_2^p,0),\ H_5(z_1,z_2)=(0,iz_2),\ K_6(z_1,z_2)=(0,iz_1^q\overline{z}_2^{p-1}),$$

$$K_7(z_1,z_2)=Im(z_1^q\overline{z}_2^p)(0,z_2),\ K_8(z_1,z_2)=Im(z_1^q\overline{z}_2^p)(0,z_1^q\overline{z}_2^{p-1})$$

geram $\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1\rtimes\mathbb{Z}_2)$ sobre $P_{\mathbb{C}^2}(S^1\rtimes\mathbb{Z}_2)$.

Para a forma normal, resta encontrar uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2)$. Considere $R$ e $S$ como definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente. Sabemos que $S(u_j)\equiv 0$ se $j=1,2,3$ e $S(u_4)=u_4$. Portanto, $R(u_j)=u_j$ se $j=1,2,3$ e $R(u_4)\equiv 0$. Logo, o Teorema 3.2.9 nos dá que

$$u_1(z_1,z_2)=|z_1|^2,\ u_2(z_1,z_2)=|z_2|^2,\ u_3(z_1,z_2)=Re(z_1^q\overline{z}_2^p),\ (u_4(z_1,z_2))^2=(Im(z_1^q\overline{z}_2^p))^2$$

formam uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1\rtimes\mathbb{Z}_2)$.

Portanto, se $q$ é par, uma forma normal $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante para (4.1) é dada por

$$\dot{z}=L(z)+\sum_{j=1}^{8}f_j(z)K_j(z), \tag{4.9}$$

com $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, $f_j\in P_{\mathbb{C}^2}(S^1\rtimes\mathbb{Z}_2)$ e $K_j$ os geradores de $\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1\rtimes\mathbb{Z}_2)$ para

$j = 1, \cdots, 8$. Lembrando que $L$ é como em (4.8), temos a forma normal

$$\begin{cases} \dot{z_1} = & \alpha i z_1 + f_1(z_1,z_2) i z_1 + f_2(z_1,z_2) i \overline{z_1}^{q-1} z_2^p + f_3(z_1,z_2) Im(z_1^q \overline{z_2}^p) z_1 + \\ & + f_4(z_1,z_2) Im(z_1^q \overline{z_2}^p) \overline{z_1}^{q-1} z_2^p \\ \dot{z_2} = & \dfrac{q}{p} \alpha i z_2 + f_5(z_1,z_2) i z_2 + f_6(z_1,z_2) i z_1^q \overline{z_2}^{p-1} + f_7(z_1,z_2) Im(z_1^q \overline{z_2}^p) z_2 + \\ & + f_8(z_1,z_2) Im(z_1^q \overline{z_2}^p) z_1^q \overline{z_2}^{p-1}. \end{cases}$$

onde os $f_t$'s são da forma

$$f_t(z_1,z_2) = \sum_{i+j+k+l=1}^{\infty} a_{ijkl} (|z_1|^2)^i (|z_2|^2)^j (Re(z_1^q \overline{z_2}^p))^k ((Im(z_1^q \overline{z_2}^p))^2)^l,$$

com $a_{ijkl} \in \mathbb{R}$.

$(ii)$ $q$ é ímpar.

Neste caso, $S(u_1) = S(u_2) = S(u_4) \equiv 0$ e $S(u_3) = u_3$. Logo, consideramos apenas $H_{0j} = H_j$ e $H_{3j} = u_3 H_j$ para $j = 1, \cdots, 7$. Procedendo como no caso anterior, temos $\vec{S}(H_0) = \vec{S}(H_3) = \vec{S}(H_4) = \vec{S}(H_7) = \vec{S}(H_{31}) = \vec{S}(H_{32}) = \vec{S}(H_{35}) = \vec{S}(H_{36}) \equiv 0$, $\vec{S}(H_j) = H_j$ se $j = 1,2,5,6$ e $\vec{S}(H_{3k}) = H_{3k}$ se $k = 0,3,4,7$. Portanto, pelo Algoritmo 3.2.8 temos que as aplicações

$$K_1(z_1,z_2) = (iz_1, 0),\ K_2(z_1,z_2) = (\overline{z}_1^{q-1} z_2^p, 0),\quad K_3(z_1,z_2) = Re(z_1^q \overline{z}_2^p)(z_1, 0),$$

$$K_4(z_1,z_2) = Re(z_1^q \overline{z}_2^p)(i\overline{z}_1^{q-1} z_2^p, 0),\ K_5(z_1,z_2) = (0, iz_2),\ K_6(z_1,z_2) = (0, z_1^q \overline{z}_2^{p-1}),$$

$$K_7(z_1,z_2) = Re(z_1^q \overline{z}_2^p)(0, z_2),\ K_8(z_1,z_2) = Re(z_1^q \overline{z}_2^p)(0, iz_1^q \overline{z}_2^{p-1})$$

geram $\vec{Q}_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$ sobre $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$.

Como $R(u_1) = u_1$, $R(u_2) = u_2$ e para $q$ ímpar também temos $R(u_3) \equiv 0$ e $R(u_4) = u_4$, então $S(u_1) = S(u_2) = S(u_4) \equiv 0$ e $S(u_3) = u_3$ de onde, pelo Teorema 3.2.9, segue que

$$u_1(z_1,z_2) = |z_1|^2,\ u_2(z_1,z_2) = |z_2|^2,\ (u_3(z_1,z_2))^2 = (Re(z_1^q \overline{z}_2^p))^2 \text{ e } u_4(z_1,z_2) = Im(z_1^q \overline{z}_2^p)$$

formam uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^2}(S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2)$.

Portanto, para $q$ ímpar, uma forma normal $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante para (4.1) é dada por (4.9) onde $L$ é como em (4.8), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{z_1} = & \alpha i z_1 + f_1(z_1,z_2) i z_1 + f_2(z_1,z_2)\overline{z_1}^{q-1} z_2^p + f_3(z_1,z_2) Re(z_1^q \overline{z_2}^p) z_1 + \\ & + f_4(z_1,z_2) Re(z_1^q \overline{z_2}^p) i \overline{z_1}^{q-1} z_2^p \\ \dot{z_2} = & \dfrac{q}{p}\alpha i z_2 + f_5(z_1,z_2) i z_2 + f_6(z_1,z_2) z_1^q \overline{z_2}^{p-1} + f_7(z_1,z_2) Re(z_1^q \overline{z_2}^p) z_2 + \\ & + f_8(z_1,z_2) Re(z_1^q \overline{z_2}^p) i z_1^q \overline{z_2}^{p-1}, \end{cases}$$

onde os $f_t$'s são da forma

$$f_t(z_1,z_2) = \sum_{i+j+k+l=1}^{\infty} a_{ijkl}(|z_1|^2)^i (|z_2|^2)^j (Re(z_1^q \overline{z_2}^p))^{2k} (Im(z_1^q \overline{z_2}^p))^l,$$

para todo $t = 1, \cdots, 8$ com $a_{ijkl} \in \mathbb{R}$.

## 4.2 Forma normal $\mathbb{D}_4-$reversível-equivariante para o caso genérico.

Nesta seção vamos calcular uma forma normal para o sistema Hamiltoniano (4.1) com parte linear $L$ como em (4.2), para o caso em que $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$ e $X_H$ é $\mathbb{D}_4$-reversível-equivariante. Para isso, consideramos o grupo diedral $\mathbb{D}_4 = \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, onde $r^4 = s^2 = id$ e $rs = sr^{-1}$, que é um grupo de Lie linear pois é finito.

Considere $G = \langle \phi, \psi \rangle$ um grupo não-comutativo de difeomorfismos cujos geradores são involuções tais que $(\phi\psi)^2 = (\psi\phi)^2$ e $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Por [23, Lema 2.18] temos que $G$ é isomorfo ao grupo diedral $\mathbb{D}_4$ — o grupo de simetrias do quadrado. Para ver isto, basta considerar o isomorfismo $T : \mathbb{D}_4 \to G$ definido por

$$T(r) = \phi\psi \quad \text{e} \quad T(s) = \psi.$$

Pelo Teorema de Montgomery-Bochner citado em [23], existe uma mudança de coordenadas de modo que cada difeomorfismo $\phi$, $\psi$ seja linear. Mais do que isso, por [23, Corolário 2.20], se $G'$ é o grupo linearizado correspondente a $G$, dado pelo Teorema de Montgomery-Bochner, então $G'$ também é isomorfo a $\mathbb{D}_4$. Por fim, Martins mostra em [23, Corolário 2.25] que se um campo de vetores $X : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é $\mathbb{D}_4$-reversível-equivariante, onde $r$ e

$s$ agem como antissimetrias em $V$, então existe um sistema de coordenadas onde $X$ é $G_j$-reversível-equivariante para algum dos grupos $G_j$ dados por

$$G_1 = \langle A, B_1 \rangle\,,\ G_2 = \langle A, B_2 \rangle\,,\ G_3 = \langle A, B_3 \rangle$$
$$G_4 = \langle A, B_4 \rangle\,,\ G_5 = \langle A, B_5 \rangle\,,\ G_6 = \langle A, B_6 \rangle\,,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

agem como antissimetrias em $\mathbb{R}^4$.

Vamos assumir aqui que o campo $X_H$ em (4.1) é $G_1$-reversível-equivariante, onde $A$ e $B_1$ são antissimetrias de $G_1$. Note que, de fato, $L$ em (4.2) anticomuta com $A$ e $B_1$, ou seja, $L$ é $G_1$-reversível-equivariante.

Suponha que $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$. Vamos mostrar agora que a forma normal $G_1$-reversível-equivariante de (4.1) coincide com a forma normal $\mathbb{Z}_2-$reversível-equivariante obtida na Subseção 4.1.1.

Como $A$ e $B_1$ são antissimetrias de $\Gamma = G_1$, então os elementos

$$\gamma_1 = AB_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = B_1A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = (AB_1)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

juntamente com a matriz identidade, formam o subgrupo das simetrias $(G_1)_+$, que denotamos aqui simplesmente por $\Gamma_+ = \{id, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Considerando a ação de $G_1$ em $\mathbb{R}^4$ como o produto de matriz por vetor, temos

$$\gamma_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_2, -x_1, -y_1, -y_2),$$

$$\gamma_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_2, x_1, -y_1, -y_2),$$

$$\gamma_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_1, -x_2, y_1, y_2),$$

para todo $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Para calcularmos a forma normal, precisamos de um conjunto de geradores para $\vec{Q}_{\mathbb{R}^4}(\mathbf{S} \rtimes G_1)$ sobre o anel $P_{\mathbb{R}^4}(\mathbf{S} \rtimes G_1)$, onde $\mathbf{S}$ é determinado como em (3.29). Pelo Algoritmo 3.2.8, para determinar tal conjunto de geradores, precisamos primeiro de uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^4}(\mathbf{S} \rtimes \Gamma_+)$ e um conjunto de geradores para o módulo $\vec{P}_{\mathbb{R}^4}(\mathbf{S} \rtimes \Gamma_+)$ sobre $P_{\mathbb{R}^4}(\mathbf{S} \rtimes \Gamma_+)$, uma vez que, assumindo $\mathbf{S}$ como um grupo de simetrias, temos $(\mathbf{S} \rtimes G_1) = \mathbf{S} \rtimes \Gamma_+$.

Começamos lembrando que o grupo $\mathbf{S}$ para o caso genérico já foi obtido na Subseção 4.1.1, sendo $\mathbf{S} = T^2$. Se $f \in P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$, então $f \in P_{\mathbb{R}^4}(T^2) \cap P_{\mathbb{R}^4}(\Gamma_+)$. Pelo Exemplo 3.3.6 temos, para $n = 2$ e usando coordenadas reais, que

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum a_{\alpha\beta}(x_1^2 + x_2^2)^\alpha (y_1^2 + y_2^2)^\beta,$$

com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$. Através de cálculos simples verificamos que

$$f(\gamma_i(x_1, x_2, y_1, y_2)) = f(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

para todo $i = 1, 2, 3$, ou seja, $f$ é invariante por $\Gamma_+$. Assim, $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2)$ e uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$ é dada pelas funções

$$u_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{e} \quad u_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2. \tag{4.10}$$

Para os equivariantes, se $g \in \vec{P}_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$ então $g \in \vec{P}_{\mathbb{R}^4}(T^2) \cap \vec{P}_{\mathbb{R}^4}(\Gamma_+)$. Pelo Exemplo 3.3.6, novamente para $n = 2$ e usando coordenadas reais, podemos escrever

$$g(x) = f_1(x)(x_1, x_2, 0, 0) + f_2(x)(-x_2, x_1, 0, 0) + f_3(x)(0, 0, y_1, y_2) + f_4(x)(0, 0, -y_2, y_1)$$

onde $x = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ e $f_j \in P_{\mathbb{R}^4}(T^2)$, $j = 1, \cdots, 4$, ou seja,

$$g(x) = (f_1(x)x_1 - f_2(x)x_2, f_1(x)x_2 + f_2(x)x_1, f_3(x)y_1 - f_4(x)y_2, f_3(x)y_2 + f_4(x)y_1).$$

Como $f_j \in P_{\mathbb{R}^4}(T^2) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$, então $f(\gamma_j x) = f_j(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$ e $j = 1, 2, 3$. Logo,

$$\begin{aligned} g(\gamma_1(x_1, x_2, y_1, y_2)) &= g(x_2, -x_1, -y_1, -y_2) \\ &= (f_1(x)x_2 + f_2(x)x_1, -f_1(x)x_1 + f_2(x)x_2, \\ &\quad - f_3(x)y_1 + f_4(x)y_2, -f_3(x)y_2 - f_4(x)y_1) \\ &= \gamma_1 g(x_1, x_2, y_1, y_2), \end{aligned}$$

para todo $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Analogamente, temos que $g(\gamma_j x) = \gamma_j g(x)$ para $j = 2, 3$, mostrando que $g \in \vec{P}_{\mathbb{R}^4}(\Gamma_+)$. Logo,

$$H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, x_2, 0, 0), \quad H_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_2, x_1, 0, 0)$$

$$H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0, y_1, y_2), \quad H_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0, -y_2, y_1)$$

geram $\vec{P}_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$ sobre $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$.

Seguindo o Algoritmo 3.2.8, defina $S(u_0) \equiv 1$ e fixe a antissimetria $\delta = (s, A) \in (T^2 \rtimes G_1)_-$, com $s = (0, 0)$ o elemento neutro de $T^2$, de onde

$$\delta(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_1, x_2, -y_1, y_2).$$

Como $u_1(\delta(x_1, x_2, y_1, y_2)) = u_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ e $u_2(\delta(x_1, x_2, y_1, y_2)) = u_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$, temos $S(u_1) = S(u_2) \equiv 0$, por $(ii)$ da Proposição 3.2.2. Com isso, precisamos avaliar o operador $\vec{S}$ apenas em $H_{0j} = S(u_0)H_j = H_j$, para $j = 0, \cdots, 3$. Observe que

$$
\begin{aligned}
H_0(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_0(-x_1,x_2,-y_1,y_2) = (-x_1,x_2,0,0) = \delta H_0(x_1,x_2,y_1,y_2),\\
H_1(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_1(-x_1,x_2,-y_1,y_2) = (-x_2,-x_1,0,0) = -\delta H_1(x_1,x_2,y_1,y_2),\\
H_2(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_2(-x_1,x_2,-y_1,y_2) = (0,0,-y_1,y_2) = \delta H_2(x_1,x_2,y_1,y_2),\\
H_3(\delta(x_1,x_2,y_1,y_2)) &= H_3(-x_1,x_2,-y_1,y_2) = (0,0,-y_2,-y_1) = -\delta H_3(x_1,x_2,y_1,y_2),
\end{aligned}
$$

implicando que $\vec{S}(H_0) = \vec{S}(H_2) \equiv 0$, $\vec{S}(H_1) = H_1$ e $\vec{S}(H_3) = H_3$, diretamente pela definição de $\vec{S}$ dada em (3.5). Pelo Algoritmo 3.2.8,

$$
\vec{Q}_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes G_1) = P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes G_1)\{H_1, H_3\}.
$$

Como $u_1$ e $u_2$ em (4.10) são invariantes por $T^2 \rtimes \Gamma_+$ e por $\delta$, temos que $R(u_1) = u_1$ e $R(u_2) = u_2$, diretamente pela definição de $R$ em (3.4). Logo, $S(u_1) = S(u_2) \equiv 0$, de onde segue que $\{u_1, u_2\}$ é uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes G_1)$, pelo Teorema 3.2.9. Portanto, a forma normal $\mathbb{D}_4$-reversível equivariante de (4.1) para o presente caso é dada por

$$
\dot{x} = L(x) + f_0(x)H_1(x) + f_1(x)H_3(x),
$$

com $x = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ e $f_j \in P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes G_1)$, o que resulta na forma normal $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante (4.7) obtida na Subseção 4.1.1.

**Observação 4.2.1.** De modo análogo, é possível mostrar que a forma normal não se altera se considerarmos que o campo $X_H$ em (4.1) é $G_j$-reversível-equivariante para $j = 2, \cdots, 8$. Isto porque os anéis $P_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$ e os módulos $\vec{P}_{\mathbb{R}^4}(T^2 \rtimes \Gamma_+)$ são idênticos para qualquer $\Gamma = G_j$, com $j = 1, \cdots, 8$, bem como a antissimetria $\delta$ fixada pode sempre ser escolhida como $\delta = (s, A)$, com $s$ o elemento neutro de $T^2$.

## 4.3 Forma normal $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$−reversível-equivariante

Nosso objetivo nesta seção é obter uma forma normal $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$-reversível-equivariante para o sistema Hamiltoniano (4.1), com $X_H : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ um campo de vetores de classe $C^\infty$ tal que $X_H(0) = 0$ e cuja linearização $M = dX_H(0)$ tem a forma matricial

(4.3). Lembramos que $M$ é não ressonante e $\phi$ e $\psi$ são involuções que comutam entre si agindo como antissimetrias em $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Antes de prosseguirmos com o nosso objetivo, apresentamos alguns resultados que nos ajudarão com os cálculos. Sejam $\Gamma$ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial real de dimensão finita $V$ e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo. Se $\Gamma_+ = \ker \sigma$ admite um subrupo normal de índice 2, digamos $\Gamma^*$, então podemos definir um novo epimorfismo de grupos por

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\sigma} : \tilde{\Gamma} & \to & \mathbb{Z}_2 \\ \gamma & \longmapsto & \begin{cases} 1, \text{ se } \gamma \in \Gamma^* \\ -1, \text{ se } \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} \backslash \Gamma^* \end{cases} \end{array}, \tag{4.11}$$

onde $\tilde{\Gamma} = \Gamma_+$, de modo que $\tilde{\Gamma}_+ = \ker \tilde{\sigma} = \Gamma^*$.

Definido $\tilde{\sigma}$, fixe $\tilde{\delta} \in \tilde{\Gamma} \backslash \tilde{\Gamma}_+$ e considere os operadores e $\sigma$-operadores de Reynolds $\tilde{R}, \tilde{S} : P_V(\tilde{\Gamma}_+) \to P_V(\tilde{\Gamma}_+)$, $\tilde{\vec{R}}, \tilde{\vec{S}} : \vec{P}_V(\tilde{\Gamma}_+) \to \vec{P}_V(\tilde{\Gamma}_+)$ como definidos em (3.4) e (3.5) trocando $\delta$ por $\tilde{\delta}$ nas respectivas definições. Assim sendo, todos os resultados da Seção 3.2 valem trocando $\Gamma$ por $\tilde{\Gamma}$, $R$ por $\tilde{R}$, $S$ por $\tilde{S}$, $\vec{R}$ por $\tilde{\vec{R}}$, $\vec{S}$ por $\tilde{\vec{S}}$ e $\delta$ por $\tilde{\delta}$. Em especial, relembramos aqui dois resultados já demonstrados na Subseção 3.2.2 (Teoremas 3.2.9 e 3.2.10, respectivamente), os quais serão facilitadores na aplicação do Algoritmo 3.2.8 logo a seguir.

**Teorema 4.3.1.** *Se $\{v_1, \cdots, v_s\}$ é uma base de Hilbert para $P_V(\tilde{\Gamma}_+)$, então o conjunto $\{\tilde{R}(v_i), \tilde{S}(v_i)\tilde{S}(v_j);\ 1 \leq i, j \leq s\}$ é uma base de Hilbert para o anel $P_V(\tilde{\Gamma})$.*

**Teorema 4.3.2.** *Sejam $\{v_1, \cdots, v_s\}$ um base de Hilbert para $P_V(\tilde{\Gamma}_+)$ e $\{K_0, \cdots, K_r\}$ um conjunto de geradores para $\vec{P}_V(\tilde{\Gamma}_+)$ sobre $P_V(\tilde{\Gamma}_+)$. Defina $\tilde{S}(v_0) \equiv 1$ e construa o conjunto $\{K_{ij} = \tilde{S}(v_i)K_j;\ 0 \leq i \leq s \text{ e } 0 \leq j \leq r\}$. Então, $\{\tilde{\vec{R}}(K_{ij});\ 0 \leq i \leq s \text{ e } 0 \leq j \leq r\}$ é um conjunto gerador para o módulo $\vec{P}_V(\tilde{\Gamma})$ sobre $P_V(\tilde{\Gamma})$.*

Portanto, se $\tilde{\Gamma} = \Gamma_+$ admite um subgrupo normal de índice 2, podemos encontrar uma base de Hilbert para $P_V(\Gamma_+)$ e geradores do módulo $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ sobre $P_V(\Gamma_+)$ por meio dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente. Tais elementos podem não ser tão fáceis de encontrar, no entanto são elementos de entrada do Algoritmo 3.2.8 e, assim, necessários para a determinação da forma normal nesta seção.

Considere as involuções

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \psi = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ & -a_0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_n & \\ & & & & -a_n \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

com $a_k = \pm 1$, para todo $0 \leq k \leq n$. Como ambas são involuções, cada uma gera um grupo de ordem 2 isomorfo à $\mathbb{Z}_2$, denotados aqui por $\mathbb{Z}_2^\phi$ e $\mathbb{Z}_2^\psi$, respectivamente. Por meio de cálculos simples é possível verificar que $\phi$ e $\psi$ anticomutam com a matriz $M$ dada em (4.3) e comutam entre si. Logo, $\phi$ e $\psi$ geram o produto direto

$$\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi = \{(id, id), (id, \psi), (\phi, id), (\phi, \psi)\},$$

onde $id$ é o elemento identidade dos grupos. Note que quando $a_i = 1$ para todo $i = 0, \cdots, n$ temos $\phi = \psi$ e, neste caso, o grupo $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2^\phi$. Além disso, como $\mathbb{Z}_2^\phi$ e $\mathbb{Z}_2^\psi$ agem em $\mathbb{R}^{2n+2}$ pelo produto de matriz por vetor, definimos a ação de $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$ em $\mathbb{R}^{2n+2}$ por (3.11), onde $\gamma_1 x$ é a ação de $\mathbb{Z}_2^\phi$ em $\mathbb{R}^{2n+2}$ e $\gamma_2 x$ é a ação de $\mathbb{Z}_2^\psi$ em $\mathbb{R}^{2n+2}$. Garantimos que essa operação é uma ação de $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$ em $\mathbb{R}^{2n+2}$ pela Proposição 3.3.2, uma vez que as ações de $\mathbb{Z}_2^\phi$ e $\mathbb{Z}_2^\psi$ comutam.

Suponhamos que $\phi$ e $\psi$ agem como antissimetrias em $\mathbb{R}^{2n+2}$. Então podemos fixar o epimorfismo

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \Gamma & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ & (id, \psi) & \longmapsto & -1 \\ & (\phi, id) & \longmapsto & -1, \end{array} \tag{4.13}$$

de modo que $(id, \psi)$ e $(\phi, id)$ são antissimetrias de $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$.

Por conveniência vamos usar coordenadas complexas $(x, z) = (x_1, x_2, z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$. Então as ações de $\phi$ e $\psi$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$ se tornam, naturalmente,

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, z_1, \cdots, z_n) &= (x_1, -x_2, \overline{z_1}, \cdots, \overline{z_n}) \quad \text{e} \\ \psi(x_1, x_2, z_1, \cdots, z_n) &= (a_0 x_1, -a_0 x_2, a_1 \overline{z_1}, \cdots, a_n \overline{z_n}), \end{aligned}$$

onde $a_k = \pm 1, 0 \leq k \leq n$.

Pelo Teorema 3.5.8, para calcular a forma normal $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}$−reversível-equivariante de (4.1), precisamos encontrar geradores para o módulo $\vec{Q}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$ sobre o anel $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$, onde $\mathbf{S}$ é como em (3.29) tomando $L = M$ em (4.3). Como $\omega_1, \cdots, \omega_n$ são algebricamente independentes, temos pela Proposição 3.4.12 que $\mathbf{S} = R \times T^n$, onde $R \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} ;\ r \in \mathbb{R} \right\}$ [5] e $T^n$ é o $n$-toro.

A ação considerada de $R \times T^n$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$ é a ação diagonal dada a partir das seguintes ações de $R$ em $\mathbb{R}^2$ e $T^n$ em $C^n$ :

$$\overline{r}(x_1, x_2) = (x_1, rx_1 + x_2) \quad \text{e} \quad (\theta_1, \cdots, \theta_n)(z_1, \cdots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \cdots, e^{i\theta_n} z_n), \tag{4.14}$$

para todo $\overline{r} \in R$ e $(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T^n$.

Agora, para encontrar os geradores de $\vec{Q}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$ vamos utilizar o Algoritmo 3.2.8. O primeiro passo é encontrar uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}((\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})_+) = P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes (\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})_+)$, onde a igualdade vale pois estamos assumindo que $\mathbf{S}$ possui somente simetrias. Para isso, denote $\tilde{\Gamma} = (\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})_+ = \{(id, id), (\phi, \psi)\}$ e $\Lambda = \mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma}$. Para encontrar uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda)$, começamos determinando uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+) = P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}((\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})_+) = P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma}_+)$. Note que $\tilde{\Gamma}$ admite um subgrupo normal de índice 2, a saber $\{(id, id)\}$. Definindo $\tilde{\sigma}$ como em (4.11) com $\Gamma^* = \{(id, id)\}$, obtemos $\tilde{\Gamma}_+ = \{(id, id)\}$. Logo,

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+) &= P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \{(id, id)\}) = P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S}) \cap P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\{(id, id)\}) \\ &= P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S}), \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde a segunda igualdade segue da Proposição 3.3.3.

Agora, lembrando que $\mathbf{S} = R \times T^n$ age diagonalmente em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$, nós aplicamos o Lema 3.3.5 nos Exemplos 3.3.6 e 3.4.15 a fim de obter uma base de Hilbert para

[5] Para determinar $R$ nós usamos o Exemplo 3.4.11, uma vez que a parte nilpotente de $M$ é dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S})$. Mais especificamente, pelo Exemplo 3.4.15, uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2}(R)$ é dada por $\{u(x_1,x_2)=x_1\}$. Pelo Exemplo 3.3.6, uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{C}^n}(T^n)$ é $\{|z_1|^2,\cdots,|z_n|^2\}$. Então, pelo Lema 3.3.5

$$v_1(x,z)=x_1,\ v_2(x,z)=|z_1|^2,\ \cdots,\ v_{n+1}(x,z)=|z_n|^2$$

formam uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S})=P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+)$. Defina $\tilde{R},\tilde{S}:P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+)\to P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+)$ como em (3.4) e (3.5), trocando $\Gamma_+$ por $\Lambda_+$ e $\delta$ por $\tilde{\delta}$, onde $\tilde{\delta}\in\Lambda_-=\Lambda\backslash\Lambda_+$ é uma antissimetria fixada de $\Lambda$. Como $\Lambda_+=(\mathbf{S}\rtimes\tilde{\Gamma})_+=\mathbf{S}\rtimes\tilde{\Gamma}_+=\mathbf{S}\times\{(id,id)\}$, então podemos tomar $\tilde{\delta}=(s,(\phi,\psi))$, com $s$ o elemento neutro do grupo $\mathbf{S}$, ou seja, $s=(I_2,0,\cdots,0)$, onde $I_2$ é a matriz identidade. Veja que

$$(\phi,\psi)(x,z)=\phi(\psi(x,z))=(a_0x_1,a_0x_2,a_1z_1,\cdots,a_nz_n) \tag{4.16}$$

para todo $(x,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n$, e uma vez que $a_k=\pm1$ para todo $k=0,\cdots,n$, temos

$$v_i(\tilde{\delta}(x,z))=v_i(s(\phi(\psi(x,z))))=v_i(\phi(\psi(x,z)))=|a_{i-1}z_{i-1}|^2=|z_{i-1}|^2=v_i(x,z),$$

para todo $i=2,\cdots,n+1$ e $(x,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n$, onde a segunda igualdade segue pois cada $v_i$ é invariante por $\mathbf{S}$. Portanto, da definição de $\tilde{R}$ e $\tilde{S}$ temos

$$\tilde{R}(v_i)=v_i \quad \text{e} \quad \tilde{S}(v_i)\equiv 0, \tag{4.17}$$

para todo $i=2,\cdots,n+1$. Ainda,

$$v_1(\tilde{\delta}(x,y))=v_1(s(\phi(\psi(x,z))))=v_1(\phi(\psi(x,z)))=a_0x_1$$

de onde

$$\tilde{R}(v_1)(x,z)=\frac{1}{2}(x_1+a_0x_1) \quad \text{e} \quad \tilde{S}(v_1)(x,z)=\frac{1}{2}(x_1-a_0x_1). \tag{4.18}$$

Pelo Teorema 4.3.1, uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda)=P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S}\rtimes\tilde{\Gamma})$ é dada pelo conjunto dos elementos

$$\begin{cases} u_1(x,z)=x_1,u_2=v_2,\cdots,u_{n+1}=v_{n+1}, \text{ se } a_0=1\\ u_1(x,z)^2=x_1^2,u_2=v_2,\cdots,u_{n+1}=v_{n+1}, \text{ se } a_0=-1.\end{cases}$$

Para os geradores do módulo $\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+)$ da aplicações $\Lambda_+$-equivariantes, note que, assim como fizemos em (4.15),

$$\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+) = \vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \{(id, id)\}) = \vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S}).$$

Pelo Exemplo 3.4.15,

$$L_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad L_1(x_1, x_2) = (0, 1)$$

geram $\vec{P}_{\mathbb{R}^2}(R)$ sobre $P_{\mathbb{R}^2}(R)$ e, pelo Exemplo 3.3.6,

$$\vec{P}_{\mathbb{C}^n}(T^n) = P_{\mathbb{C}^n}(T^n)\{(z_1, 0\cdots, 0), (iz_1, 0\cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, z_n), (0, \cdots, 0, iz_n)\}.$$

Assim, lembrando que $\mathbf{S} = R \times T^n$ e aplicando novamente o Lema 3.3.5 vemos que

$$K_0(x, z) = (x_1, x_2, 0, \cdots, 0),\ K_1(x, z) = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ K_2(x, z) = (0, 0, z_1, 0, \cdots, 0),$$

$$K_3(x, z) = (0, 0, iz_1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ \ K_{2n}(x, z) = (0, \cdots, 0, z_n) \text{ e}$$

$$K_{2n+1}(x, z) = (0, \cdots, 0, iz_n)$$

são os geradores de $\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda_+) = \vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S})$. O próximo passo agora é utilizar o Teorema 4.3.2, substituindo $\tilde{\Gamma}_+$ por $\Lambda_+$ lá, a fim de obter os geradores de $\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\Lambda) = \vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$. Defina $\tilde{S}(v_0) \equiv 1$ e considere os casos: $a_0 = 1$ e $a_0 = -1$.

$(i)$ Se $a_0 = 1$, $\tilde{S}(v_i) \equiv 0$ para todo $i = 1, \cdots, n+1$, por (4.17) e (4.18). Logo, $K_{ij} = \tilde{S}(v_i)K_j = K_j$ para todo $j = 0, 1, \cdots, 2n+1$. Lembrando que $\tilde{\delta} = (s, (\phi, \psi))$ para $s = (I_2, 0, \cdots, 0)$, então $\tilde{\delta}^{-1} = \tilde{\delta}$ e, de (4.14) e (4.16), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}^{-1}K_0(\tilde{\delta}(x, z)) &= \tilde{\delta}K_0(a_0x_1, a_0x_2, a_1z_1, \cdots, a_nz_n) = \tilde{\delta}(a_0x_1, a_0x_2, 0, \cdots, 0) \\
&= (a_0^2x_1, a_0^2x_2, 0, \cdots, 0), && (4.19) \\
\tilde{\delta}^{-1}K_1(\tilde{\delta}(x, z)) &= \tilde{\delta}K_1(a_0x_1, a_0x_2, a_1z_1, \cdots, a_nz_n) = \tilde{\delta}(0, 1, 0, \cdots, 0) \\
&= (0, a_0, 0, \cdots, 0). && (4.20)
\end{aligned}$$

Como $a_0 = 1$ temos $\tilde{\delta}^{-1}K_0(\tilde{\delta}(x, z)) = K_0(x, z)$ e $\tilde{\delta}^{-1}K_1(x, z)$. Para os demais $j =$

$2, \cdots, 2n+1$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}^{-1}K_j(\tilde{\delta}(x,z)) &= \tilde{\delta}K_j(a_0x_1, a_0x_2, a_1z_1, \cdots, a_nz_n) \\
&= \begin{cases} \tilde{\delta}(0, \cdots, 0, a_{\frac{j}{2}}z_{\frac{j}{2}}, 0, \cdots, 0), \text{ se } j \text{ é par} \\ \tilde{\delta}(0, \cdots, 0, ia_{\frac{j-1}{2}}z_{\frac{j-1}{2}}, 0, \cdots, 0), \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (0, \cdots, 0, a^2_{\frac{j}{2}}z_{\frac{j}{2}}, 0, \cdots, 0), \text{ se } j \text{ é par} \\ (0, \cdots, 0, ia^2_{\frac{j-1}{2}}z_{\frac{j-1}{2}}, 0, \cdots, 0), \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases} \\
&= K_j(x,z), \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

pois $a_k = \pm 1$ para todo $k \geq 1$. Ou seja, $K_j$ é equivariante por $\tilde{\delta}$ para todo $j = 0, \cdots, 2n+1$ e, então, $\vec{\tilde{R}}(K_{ij}) = \vec{\tilde{R}}(K_j) = K_j$. Portanto, pelo Teorema 4.3.2, $\{K_j,\ j = 0, \cdots, 2n+1\}$ é um conjunto de geradores para $\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$.

$(ii)$ Se $a_0 = -1$, temos $\tilde{S}(v_1) = v_1$. Como $\tilde{S}(v_i) \equiv 0$ para os demais $i = 2, \cdots, n+1$, construímos o conjunto

$$\{K_{ij} = \tilde{S}(v_i)K_j;\ i = 0, 1,\ j = 0, \cdots, 2n+1\} = \{K_j, v_1K_j;\ j = 0, \cdots, 2n+1\}.$$

Pelas equações (4.19) e (4.20) vemos que $\tilde{\delta}^{-1}K_0(\tilde{\delta}(x,z)) = K_0(x,z)$ e $\tilde{\delta}^{-1}K_1(\tilde{\delta}(x,z)) = -K_1(x,z)$, ou seja, $K_0$ é equivariante por $\tilde{\delta}$, $K_1$ é reversível-equivariante por $\tilde{\delta}$ e, por (4.21) $K_j$ é equivariante por $\tilde{\delta}$ para todo $j = 2, \cdots, 2n+1$. Assim, $\vec{\tilde{R}}(K_1) \equiv 0$ e $\vec{\tilde{R}}(K_j) = K_j$ para todo $j = 0, 2, \cdots, 2n+1$. Pelo Lema 3.1.7, como $v_1$ é anti-invariante por $\tilde{\delta}$, temos $v_1K_1$ equivariante por $\tilde{\delta}$, logo $\vec{\tilde{R}}(K_{11}) = \vec{\tilde{R}}(v_1K_1) = v_1K_1$. Agora, se $j \neq 1$, temos que $v_1K_j$ é uma aplicação reversível-equivariante por $\tilde{\delta}$ e, por isso, $\vec{\tilde{R}}(v_1K_j) \equiv 0$. Portanto, pelo Teorema 4.3.2, $\{K_0, K_2, \cdots, K_{2n+1}, v_1K_1\}$ é um conjunto de geradores para $\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$.

Agora que temos os invariantes e equivariantes por $(\mathbf{S} \rtimes (\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}))_+ = \mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma}$ podemos finalmente aplicar o Algoritmo 3.2.8. Novamente, vamos trabalhar com os casos separadamente.

$(i)$ Se $a_0 = 1$ temos que

$$u_1(x,z) = x_1, u_2(x,z) = |z_1|^2, \cdots, u_{n+1}(x,z) = |z_n|^2 \qquad (4.22)$$

formam uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$ e

$$H_0(x,z) = (x_1, x_2, 0, \cdots, 0),\ H_1(x,z) = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ H_2(x,z) = (0, 0, z_1, 0, \cdots, 0),$$

$$H_3(x,z) = (0,0,iz_1,0,\cdots,0),\ \cdots,\ H_{2n}(x,z) = (0,\cdots,0,z_n) \text{ e}$$

$$H_{2n+1}(x,z) = (0,\cdots,0,iz_n)$$

geram $\vec{P}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$. Defina $S(u_0) \equiv 1$ e considere os operadores de Reynolds $R, S$ definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente, trocando $\Gamma_+$ por $(\mathbf{S} \rtimes (\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi))_+ = \mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma}$ e tomando $\delta$ em $(\mathbf{S} \rtimes (\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi))_- = (\mathbf{S} \rtimes (\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)) \backslash \mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma}$. Como $\tilde{\Gamma} = \{(id, id), (\phi, \psi)\}$, podemos fixar $\delta = (s, (\phi, id))$, onde $s = (I_2, 0, \cdots, 0)$ é o elemento neutro de $\mathbf{S} = R \times T^n$. Então, por (4.14) temos que

$$\delta(x,z) = (s(\phi(id(x,z)))) = \phi(x,z) = (x_1, -x_2\overline{z_1}, \cdots, \overline{z_n}),$$

para todo $(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$, e por (4.22)

$$u_1(\delta(x,z)) = x_1 = u_1(x,z) \quad \text{e} \quad u_j(\delta(x,z)) = |\overline{z_j}|^2 = |z_j|^2 = u_j(x,z),$$

para todo $j = 2, \cdots, n+1$. Logo, $S(u_i) \equiv 0$ para todo $i = 1, \cdots, n+1$. Dessa forma, $H_{ij} = S(u_i)H_j \equiv 0$ se $i \neq 0$ e $H_{0j} = S(u_0)H_j = H_j$ para todo $j = 0, \cdots, 2n+1$. Agora,

$$\begin{aligned}
\delta^{-1}H_0(\delta(x,z)) &= \delta(x_1, -x_2, 0, \cdots, 0) = H_0(x,z), \\
\delta^{-1}H_1(\delta(x,z)) &= \delta(0,1,0,\cdots,0) = -H_1(x,z), \\
\delta^{-1}H_j(\delta(x,z)) &= \begin{cases} \delta(0,\cdots,0,\overline{z_{\frac{j}{2}}},0,\cdots,0), \text{ se } j \text{ é par} \\ \delta(0,\cdots,0,i\overline{z_{\frac{j-1}{2}}},0,\cdots,0), \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (0,\cdots,0,z_{\frac{j}{2}},0,\cdots,0), \text{ se } j \text{ é par} \\ (0,\cdots,0,-iz_{\frac{j-1}{2}},0,\cdots,0), \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases} \\
&= \begin{cases} H_j, \text{ se } j \text{ é par} \\ -H_j \text{ se } j \text{ é ímpar}, \end{cases}
\end{aligned}$$

para todo $j \geq 2$. Então $\vec{S}(H_j) \equiv 0$ se $j$ é par e $\vec{S}(H_j) = H_j$ se $j$ é ímpar, onde $\vec{S}$ é o $\sigma$-operador de Reynolds definido em (3.5) com $\Gamma_+ = \mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma}$ e $\delta = (s, (\phi, id))$. Pelo Algoritmo 3.2.8, o conjunto $\{H_j,\ j = 1, 3, \cdots, 2n+1\}$ gera $\vec{Q}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Para calcular a forma normal, precisamos ainda de uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$, que pelo Teorema 3.2.9 é dada pelo conjunto

$\{R(u_i) = u_i,\ 1 \leq i \leq n+1\}$ uma vez que cada $S(u_i) \equiv 0$ para todo $i = 1, \cdots, n+1$. Portanto, se $a_0 = 1$, uma forma normal $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi-$reversível-equivariante para o sistema (4.1) é dada por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & -i\omega_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -i\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + f_0(x,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ f_1(x,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ iz_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + f_n(x,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ iz_n \end{pmatrix},$$

onde $f_i \in P_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ e, portanto, dependem de $u_1, \cdots, u_{n+1}$.

$(ii)$ Se $a_0 = -1$ temos

$$u_1(x,z)^2 = x_1^2,\ u_2(x,z) = |z_1|^2,\ \cdots,\ u_{n+1}(x,z) = |z_n|^2 \tag{4.23}$$

formando uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$ e

$$H_0(x,z) = (x_1, x_2, 0, \cdots, 0),\ H_1(x,z) = (0, x_1, 0, \cdots, 0),\ H_2(x,z) = (0,0,z_1,0,\cdots,0),$$

$$H_3(x,z) = (0,0,iz_1,0,\cdots,0),\ \cdots,\ H_{2n}(x,z) = (0,\cdots,0,z_n) \text{ e}$$

$$H_{2n+1}(x,z) = (0,\cdots,0,iz_n)$$

formando um conjunto de geradores para $\vec{P}_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$ sobre $P_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \tilde{\Gamma})$. Neste caso, para $\delta = (s, (\phi, id))$ temos

$$\delta^{-1} H_1(\delta(x,z)) \;=\; \delta(0, x_1, 0, \cdots, 0) = -H_1(x,z),$$

de onde $\vec{S}(H_1) = H_1$. Ainda, para $j \neq 1$, $\vec{S}(H_j) \equiv 0$ se $j$ é par e $\vec{S}(H_j) = H_j$ se $j$ é ímpar, como já mostramos anteriormente no caso em que $a_0 = 1$ (os $H_j$'s são os mesmos desde que $j \neq 1$). Como cada $u_i$ em (4.23) é invariante por $\delta$, para todo $i = 2, \cdots, n+1$

(também já verificado anteriormente no caso $a_0 = 1$), bem como $u_1^2$, segue que $R(u_i) = u_i$ para todo $i = 2, \cdots, n+1$ e $R(u_1^2) = u_1^2$, fazendo-nos concluir, pelo Teorema 3.2.9, que uma base de Hilbert para $P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é dada pelo conjunto

$$\{u_1^2, u_i;\ i = 2, \cdots, n+1\}.$$

Além disso, por este motivo, $S(u_1^2) \equiv 0$ e $S(u_i) \equiv 0$ para todo $i = 2, \cdots, n+1$. Logo, os $H_{ij}$'s relevantes no Algoritmo 3.2.8 são apenas $H_{0j} = S(u_0)H_j = H_j$ e, então, um conjunto de geradores para $\vec{Q}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é dado por $\{H_j;\ j = 1, 3, \cdots, 2n+1\}$. Portanto, se $a_0 = -1$, uma forma normal $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi-$reversível-equivariante para o sistema (4.1) é dada por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & -i\omega_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -i\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + f_0(x,z) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ f_1(x,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ iz_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + f_n(x,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ iz_n \end{pmatrix},$$

onde $f_i \in P_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n}(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ para todo $0 \leq i \leq n$ e, portanto, dependem de $u_1^2, u_2, \cdots, u_{n+1}$.

## 4.4 Observações Finais

Nas Seções 4.1 e 4.2, vimos que a matriz $L$ dada em (4.2) é $\mathbb{Z}_2$-reversível-equivariante, pois anticomuta com a ação de $\tilde{\delta}$ definida em (4.4), e é $\mathbb{D}_4$-reversível-equivariante, pois anticomuta com as matrizes $A$ e $B_1$. Na Seção 4.3, vimos também que a matriz $M$ dada em (4.3) é $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$-reversível-equivariante. Vamos mostrar aqui que as matrizes $L$ e $M$ de fato são linearizações de um sistema Hamiltoniano.

Note que existe um campo de vetores Hamiltoniano $X_H$ que possui $L$ como parte linear. Por exemplo, considere o campo $X_{H_0} = J_1 \nabla H_0$ com $H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta}{2}(y_1^2 + y_2^2) + O(|x|^3)$, onde $O(|x|^3)$ denota os termos de ordem maior ou igual a 3, e

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então não é absurdo supormos $X_H$ em (4.1) um campo Hamiltoniano com linearização $L$.

Para a matriz $M$, seja

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_0 \end{pmatrix}_{2m} \tag{4.24}$$

é antissimétrica e $\det J = 1 \neq 0$.[6] Então $J$ induz uma forma bilinear antissimétrica $\omega$ (pois J é uma matriz antissimétrica) e não degenerada (pois $\det J \neq 0$) em $\mathbb{R}^{2m}$. Escreva $2m = 2n + 2$ e tome $H : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}$ definido por

$$H(x_1, \cdots, x_{2n+2}) = x_2^2 \sin x_1 - \cos x_2 + \frac{\omega_1}{2}(x_3^2 + x_4^2) + \cdots + \frac{\omega_n}{2}(x_{2n+1}^2 + x_{2n+2}^2) + O(|x|^3),$$

onde $\omega_1, \cdots, \omega_n$ são os autovalores da matriz $M$ definida em (4.3). Então, é possível verificar que $M$ é a linearização do campo

$$X_H(x) = J \nabla H(x),$$

[6]Uma propriedade dos determinantes é que, escrevendo $\det[v_1, \cdots, v_n]$ para indicar o determinante da matriz cujas colunas são os vetores $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ então $\det[v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n] = -\det[v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n]$. No nosso caso, fazendo as permutações das colunas em $J$ teremos $\det J = (-1)^m \det A$ onde $A$ é uma matriz diagonal cujo determinante é 1 se $m$ é par e $-1$ se $m$ é ímpar. Assim, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, $\det J = 1$.

com $x = (x_1, \cdots, x_{2n+2}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ e $J$ como em (4.24).

Ainda com respeito à Seção 4.3, em (4.12) nós consideramos as involuções $\phi$ e $\psi$ agindo como antissimetrias em $\mathbb{R}^{2n+2}$. Isto é possível pois em [22] os autores provam que esses são os únicos pares de involuções que anticomutam com $M$ e comutam entre si.

Como mencionamos anteriormente, calcular uma base de Hilbert para o anel de invariantes pode não ser uma tarefa fácil, assim como calcular os geradores do módulo dos equivariantes. Nossa intenção no início deste projeto era aplicar a teoria estudada nos Capítulos 2 e 3 para calcular as formas normais dos sistemas Hamiltonianos apresentados em [23] e comparar as respectivas formas. Infelizmente, alguns casos se tornaram por demais complicados justamente por não conseguirmos calcular uma base de Hilbert para o grupo $P_V(\Gamma_+)$, que é a primeira entrada do Algoritmo 3.2.8, assim como um conjunto de geradores para o módulo $\vec{P}_V(\Gamma_+)$ sobre $P_V(\Gamma_+)$. Os exemplos malsucedidos se referem a sistemas Hamiltonianos $\mathbb{D}_4$-reversíveis-equivariantes com parte linear $L$ dada em (4.2) para o caso $p : q$ e sistemas Hamiltonianos $\mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes com linearização

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste último caso, até mesmo Martins em [23] se conformou com a forma normal dada pelos indícios computacionais, pois os cálculos usando o método clássico de Belitskii são um tanto quanto delicados.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANTONELI, F., BAPTISTELLI, P. H. DIAS, A. P., MANOEL, M. **Invariant theory and reversible-equivariant vector fields.** Journal of Pure and Applied Algebra, v. 2 b13, 2009.

[2] ARNOLD, V. I., ANOSOV, D. V. **Dynamical Systems I: Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems.** v. 1, New York: Springer-Verlag, 1988.

[3] BAPTISTELLI, P. H., MANOEL, M., ZELI, I. O. **Normal form theory for reversible equivariant vector fields.** Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 47, n. 3, p. 935-954, 2016.

[4] BAPTISTELLI, P., MANOEL, M. **Invariants and relatives invariants under compact Lie groups.** Journal of Pure and Applied Algebra, n. 217, p. 2213-2220, 2013.

[5] BELITSKII, G. R. **Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings.** Russ. Math. Surv. 33, p. 107-77, 1978.

[6] BELITSKII, G. R. **Normal forms in relation to the filtering action of a group.** Trudy Moskov Mat. Obsc. 40, p. 3-46, 1979.

[7] BIRKHOFF, G. D. **Dynamical Systems.** American Mathematical Society, Colloquium Publications, v. 9. 1966.

[8] BOURBAKI, N. **Lie Groups and Lie Algebras.** Ch. I-III. Springer-Verlag, 1975.

[9] BRÖCKER, T., TOM DIECK, T. **Representations of Compact Lie Groups.** Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1985.

[10] BUZZI, C. A., ROBERTO, L. A., TEIXEIRA, M. A. **Branching of Periodic Orbits in Reversible Hamiltonian Systems.** Real and complex singularities, p. 46-70, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 380, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[11] BUZZI, C. A., TEIXEIRA, M. A. **Time-reversible Hamiltonian Vector Fields with Symplectic Symmetries.** Journal of Dynamics and Differential Equations 16, n. 2, p. 559-574, 2004.

[12] CHOW, S-N, LI, C., WANG, D. **Normal forms and bifurcation of planar vector fields.** Cambridge University Press, 1994.

[13] ELPHICK, C., TIRAPEGUI, E., BRACHET, M. E., COULLET, P., IOOSS, G. **A simple global characterization for normal forms of singular vector fields.** Amsterdam: North-Holland Physics Publishing Division, 1987.

[14] GOLUBITSKY, M., STEWART, I., SCHAEFFER, D.G. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory.** Applied Mathematical Sciences 69, vol 2, Springer-Verlag, New York, 1988.

[15] HOFFMAN, K., KUNZE, R. **Álgebra Linear.** Traduzido por Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Ed. Univ. S. Paulo e Polígono, 1970.

[16] HOVEIJN, I. LAMB, J. S. W., ROBERTS, M. **Normal forms and unfoldings of linear systems in the eigenspaces of automorphisms of order two.** J. Differential Equations 190, p. 182-213, 2003.

[17] LAMB, J. S. W., MELBOURNE, I. **Normal Form Theory for Relative Equilibria and Relative Periodic Solutions.** Transactions of the American Mathematical Society. V. 359, n. 9, p. 4537-4556, 2007.

[18] LAMB, J. S. W., ROBERTS, J. A. G. **Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey.** Physica D. 112 p. 1-39, 1998.

[19] LEMES, R. C. **Propriedades Genéricas de Sistemas Hamiltonianos.** Dissertação de Mestrado, São José do Rio Preto: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2013.

[20] LIMA, E. L. **Análise Real volume 2: Funções de $n$ variáveis.** 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[21] LIMA, M. F. S., TEIXEIRA, M. A. **Families of periodic orbits in resonant reversible systems.** Bull. Braz. Math. Soc., New Series 40, n. 4, p. 511-537, 2009.

[22] MANCINI, S., MANOEL, M., TEIXEIRA, M. A., **Divergent diagrams of folds and simultaneous conjugacy of involutions.** Discrete and Continuous Dynamical Systems 12, n. 4, p. 657-674, 2005.

[23] MARTINS, R. M. **A Estrutura Hamiltoniana dos Campos Reversíveis em 4D.** Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, 2008.

[24] MEREU, A. C., TEIXEIRA, M. A. **Reversibility and branching of periodic orbits.** Discrete Contin. Dyn. Syst 33, n. 3, p. 1177-1199, 2013.

[25] POINCARÉ, H., **PhD Thesis.** 1879; também Oeuvres I, Gauthier - Villars, Paris, p. 59-129, 1928.

[26] SAN MARTIN, L. A. B. **Grupos de Lie.** 2014. Disponível em << www.ime.unicamp.br/ smartin/cursos/grupolie-2013 >>. Acesso em maio de 2016.

[27] SILVA, A. C. **Lectures on Symplectic Geometry.** Lecture Notes in Mathematics, n. 1764. Springer-Verlag, 2006.

[28] **Singular** << htpp: \\ www.singular.uni-kl.de\ >>, 2006.

# ÍNDICE DE NOTAÇÕES

| | |
|---|---|
| $M_n(\mathbb{R})$: | Grupo de matrizes quadradas de ordem $n$; |
| $A^t$: | Transposta de uma matriz $A$; |
| $I_n$: | Matriz identidade de ordem $n$; |
| $GL(n)$: | Subgrupo de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes inversíveis; |
| $GL(V)$: | Grupo das transformações lineares inversíveis de $V$ em $V$; |
| $\Gamma$: | Grupo de Lie compacto; |
| $\Gamma_+$: | Subgrupo de $\Gamma$ de índice 2, formado pelas simetrias de $\Gamma$; |
| $\Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$: | Suconjunto formado pelas antissimetrias de $\Gamma$; |
| $(\rho, V)$: | Espaço vetorial real $V$ sob a representação $\rho$ de $\Gamma$; |
| $\displaystyle\int_{\gamma\in\Gamma}$: | Integral de Haar normalizada em $\Gamma$; |
| $P_V$: | Anel das funções polinomiais $f : V \to \mathbb{R}$; |
| $P_V(\Gamma)$: | Anel das funções polinomiais $\Gamma$-invariantes $f : V \to \mathbb{R}$; |
| $P_V^k$ : | Espaço vetorial das funções polinomiais homogêneas $f : V \to \mathbb{R}$ de grau $k$; |
| $P_V^k(\Gamma)$ : | Espaço vetorial das funções $f \in P_V^k$ que são $\Gamma$-invariantes; |
| $\vec{P}_V$ : | Espaço vetorial das aplicações polinomiais $g : V \to V$; |
| $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$: | Módulo sobre $P_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $g : V \to W$ que são $\Gamma$-equivariantes; |
| $\vec{P}_V(\Gamma)$ : | Módulo $\vec{P}_{V,W}(\Gamma)$ quando $W = V$; |
| $Q_V(\Gamma)$: | Módulo sobre $P_V(\Gamma)$ das funções polinomiais $\Gamma$-anti-invariantes $f : V \to \mathbb{R}$; |

$Q_V^k(\Gamma)$: Espaço vetorial das funções $f \in Q_V(\Gamma)$ homogêneas de grau $k$;

$\vec{Q}_V(\Gamma)$: Módulo sobre $P_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $\Gamma$-reversíveis-equivariantes $g : V \to V$;

$\vec{Q}_V^k(\Gamma)$: Espaço vetorial das aplicações $g \in \vec{Q}_V(\Gamma)$ homogêneas de grau $k$;

$Ad_L$ : Operador homológico definido em $\vec{P}_V$;

$Ad_L^k$: Restrição de $Ad_L$ a $\vec{P}_V^k$.

# ÍNDICE REMISSIVO