UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

SIDNEY HENRIQUE DALE CRODE

HOMOMORFISMOS DE JORDAN DE ANÉIS DE MATRIZES

Maringá-PR
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Homomorfismos de Jordan de anéis de matrizes

SIDNEY HENRIQUE DALE CRODE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosali Brusamarello
Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Érica Z. Fornaroli

Maringá-PR
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Dale Crode, Sidney Henrique
D139h Homomorfismos de Jordan de anéis de matrizes / Sidney Henrique Dale Crode. -- Maringá, 2017.
63 f. : il. figs., tabs.

Orientador: Prof°. Dr°. Rosali Brusamarello.
Co-orientadora: Profª. Drª. Érica Zancanella Fornaroli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2017.

1.Homomorfismo de Jordan. 2. Soma próxima. 3. Matrizes triangulares superiores. 4. Matrizes estruturais. 5. Jordan homomorphism. 6. Near sum. 7. Upper triangular matrices. 8. Structural matrices. I. Brusamarello, Rosali, orient. II. Fornaroli, Érica Zancanella, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. IV. Título.

CDD 22.ed. 512.46

SIDNEY HENRIQUE DALE CRODE

"HOMOMORFISMOS DE JORDAN DE ANÉIS DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Rosali Brusamarello.
Profa. Dra. Rosali Brusamarello
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Ivan Chestakov
Universidade de São Paulo

Ednei Ap. Santulo Jr.
Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Érica Zancanella
Profa. Dra. Érica Zancanella Fornaroli
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 20 de fevereiro de 2017.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho aos meus pais, minha irmã,
minha namorada e a toda minha família que,
com muito carinho e apoio, não mediaram esforços
para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades e por me dar força e disposição para aproveitá-las.

Agradeço também à minha família, por toda a ajuda e compreensão, em especial aos meu pais, por proporcionarem o que fosse preciso para que tudo desse certo.

A minha namorada Andri, por sempre acreditar em mim e estar ao meu lado.

Aos meus amigos Marcelo, Pablo, Jéssica e Alisson, por sempre me apoiarem, me darem forças e torcerem por mim.

A todos os professores de minha vida acadêmica, em especial aos professores da graduação e do mestrado, pela inspiração.

As minhas orientadoras Rosali Brusamarello e Érica Z. Fornaroli, não só pelo conhecimento transmitido, mas também por todo o apoio, paciência, dedicação e confiança.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

E, finalmente, a todos que fazem parte da minha vida e que torceram por mim.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre
aquilo que todo mundo vê.
Arthur Schopenhauer

Resumo

Neste trabalho apresentamos condições suficientes para que um homomorfismo de Jordan de alguns anéis de matrizes seja um homomorfismo ou um anti-homomorfismo de anéis ou uma soma próxima de um homomorfismo e um anti-homomorfismo.

Palavras-chave: Homomorfismo de Jordan, soma próxima, matrizes triangulares superiores, matrizes estruturais.

Abstract

In this work we give sufficient conditions for a Jordan homomorphism of some matrix rings to be a homomorphism or an anti-homomorphism of rings or a near sum of a homomorphism and an anti-homomorphism.

Keywords: Jordan homomorphism, near sum, upper triangular matrices, structural matrices.

SUMÁRIO

Introdução **9**

1 Preliminares **11**

1.1 Anéis 11

1.2 Ideais e anéis primos 15

1.3 Módulos 17

1.4 Álgebras 18

1.5 Conjuntos parcialmente ordenados 19

2 Homomorfismos de Jordan **21**

2.1 Definição e propriedades 21

2.2 Ideais de Jordan 25

2.3 Relação entre homomorfismos de Jordan e (anti-) homomorfismos 27

3 Homomorfismos de Jordan entre anéis de matrizes triangulares superiores **32**

4 Homomorfismos de Jordan de álgebras de matrizes estruturais **48**

4.1 Soma próxima 51

4.2 Álgebra de matrizes estruturais 54

Bibliografia **62**

INTRODUÇÃO

O estudo de aplicações aditivas de um anel R em um anel R', que preservam quadrados foi iniciado por Ancochea [2] em conexão com problemas que surgiram na geometria projetiva, por volta de 1942. A partir de 1950 vários pesquisadores como N. Jacobson, C. Rickart [10] e I. N. Herstein [9] estudaram esse tipo de função, e obtiveram muitos resultados, como por exemplo o clássico teorema de Herstein que nos diz que todo homomorfismo de Jordan sobrejetor de um anel R em um anel primo R' de característica diferente de 2 é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.

Vários autores obtiveram generalizações para o resultado de Herstein, tais como M. F. Smiley [15], W. E. Baxter e W. S. Martindale III [3], M. Brešar [6, 7], W. S. Martindale III [11, 12] e K. McCrimmon [13].

N. Jacobson, C. Rickart provaram em [10, Teorema 7] que, para $n \geq 2$, todo homomorfismo de Jordan do anel de matrizes $M_n(R)$ sobre um anel R em um anel arbitrário é a soma de um homomorfismo com um anti-homomorfismo.

Seguindo esta linha de homomorfismo de Jordan com domínio em anéis de matrizes, em 1998, L. Molnár e P. Šemrl [14] iniciaram o estudo de funções de Jordan sobre os anéis $T_n(C)$ das matrizes triangulares superiores. Eles mostraram que todo automorfismo de Jordan de $T_n(C)$ é um automorfismo ou um anti-automorfismo, sendo C um corpo com pelo menos 3 elementos.

Outras generalizações foram surgindo a partir deste trabalho, tais como K. I. Beidar, M.Brešar e M. A. Chebotar [4] e D. Benkovič [5]. Este último introduziu a noção de soma próxima o que o ajudou a descrever todos os homomorfismos de Jordan de $T_n(C)$ em A, onde C é um anel com unidade, comutativo livre de 2-torção e A é uma C-álgebra.

Mais recentemente, em 2013, Y. Wang e Y. Wang [16] provaram que sob certas condições todo homomorfismo de Jordan sobrejetor de matrizes triangulares superiores sobre um anel unitário cujos únicos idempotentes são 0 e 1 é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo. No ano seguinte Y. Du e Y. Wang [8] mostraram que todo homomorfismo de Jordan de um anel de matrizes triangulares superiores sobre um anel unitário em um anel de matrizes superiores sobre um anel primo de característica diferente de 2 é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.

Uma generalização do trabalho de Benkovič [5] foi feita em 2015 por E. Akkurt, M. Akkurt e P. Barker em [1] para o caso de matrizes estruturais $T_n(C, \rho)$, onde ρ é uma ordem parcial ou uma quase-ordem cujas classes de equivalência têm pelo menos dois elementos.

Esta dissertação é um estudo dos resultados de E. Akkurt, M. Akkurt e G. P. Barker [1], D. Benkovič [5], Y. Du e Y. Wang [8] e Y. Wang, Y. Wang [16] e esta organizada da seguinte maneira. No Capítulo 1, é feita uma revisão de conceitos básicos de estruturas algébricas e de resultados que são utilizados no decorrer do trabalho. No Capítulo 2, introduzimos o conceito de homomorfismo de Jordan e iniciamos o estudo de sua relação com homomorfismos e anti-homomorfismos de anéis. No Capítulo 3, são apresentados resultados de [8] e [16], que nos dão condições suficientes para que homomorfismos de Jordan entre anéis de matrizes triangulares superiores sejam homomorfismos ou anti-homomorfismos de anéis. Por fim, no Capítulo 4, são apresentados resultados de [5] e [1] que nos dão condições suficientes para que um homomorfismo de Jordan de uma álgebra de matrizes estruturais em uma álgebra arbitrária seja uma soma próxima de um homomorfismo e um anti-homomorfismo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado a alguns conceitos essenciais para o estudo dos homomorfismos de Jordan, como anéis, idempotentes, homomorfismos, módulos e algumas propriedades dos mesmos.

1.1 Anéis

Definição 1.1. Um *anel* é um conjunto não vazio R com duas operações binárias

$$\begin{array}{rlcrl} + : & R \times R \to R & \quad \text{e} \quad & \cdot : & R \times R \to R \\ & (a,b) \mapsto a+b & & & (a,b) \mapsto ab \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:
(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$, para todos $a, b, c \in R$;
(2) para cada $a \in R$ existe um elemento $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$;
(3) $a + b = b + a$, para todos $a, b \in R$;
(4) existe um elemento neutro $0 \in R$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in R$;
(5) $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in R$;
(6) $a(b+c) = ab + ac$ e $(a+b)c = ac + bc$, para todos $a, b, c \in R$.

Observação 1.2. Seja R um anel.
(i) Se $ab = ba$ para todos $a, b \in R$, dizemos que o anel R é *comutativo*.
(ii) Se existe $1_R \in R$ tal que $a1_R = a = 1_R a$, para todo $a \in R$, dizemos que o anel possui unidade e que 1_R é a *unidade* de R.

Definição 1.3. Seja R um anel. Um subconjunto não vazio S de R é um *subanel* se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) S é fechado para as operações de adição e multiplicação, isto é, para todos $a, b \in S$ temos que $a + b, ab \in S$.
(ii) S é um anel (isto é, S com as operações de adição e multiplicação de R é um anel).

Exemplo 1.4. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as operações usuais de adição e multiplicação são anéis comutativos com unidade.

Exemplo 1.5. Seja R um anel. O conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em R, denotado por $M_n(R)$, é um anel com as operações de adição e multiplicação usuais de matrizes. O subconjunto de $M_n(R)$ constituido de todas as matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em R é um subanel de $M_n(R)$. Tal conjunto é denotado por $T_n(R)$.

Exemplo 1.6. O conjunto $R[x]$ de todos os polinômios na variável x com coeficientes em um anel comutativo com unidade R, com a multiplicação e a adição usuais, é um anel comutativo com unidade.

Definição 1.7. Seja R um anel com unidade. Um elemento $r \in R$ é dito *invertível* se existe $s \in R$ tal que $rs = sr = 1_R$. Um *anel com divisão* é um anel não nulo R com unidade onde todo elemento não nulo é invertível. Quando R também é comutativo, dizemos que R é um *corpo*.

Exemplo 1.8. Os anéis $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos.

Definição 1.9. Seja R um anel. Um subconjunto não vazio I de R é um *ideal à esquerda* de R quando as seguintes condições são satisfeitas:
(i) Para todos $x, y \in I$, tem-se que $x - y \in I$;
(ii) Para todo $r \in R$ e para todo $x \in I$, tem-se que $rx \in I$.

De maneira análoga, define-se *ideal à direita*. Um *ideal*, é ao mesmo tempo, um ideal à esquerda e à direita.

Exemplo 1.10. Se R é um anel, então R e $\{0\}$ são ideais de R.

Exemplo 1.11. Seja m um inteiro. Então o conjunto $m\mathbb{Z} = \{mk : k \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.

Exemplo 1.12. O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ é um ideal de $T_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.13. Seja R um anel comutativo com unidade. O conjunto $I = \{f(x) \in R[x] : f(0) = 0\}$ é um ideal de $R[x]$.

Definição 1.14. Um anel R é dito ser *simples* se $RR \neq \{0\}$ e se os únicos ideais de R forem $\{0\}$ e R.

Exemplo 1.15. Todo anel com divisão é simples. De fato, se D é um anel com divisão e $I \neq \{0\}$ é um ideal de D, então existe $0 \neq x \in I$. Assim, $1 = xx^{-1} \in I$, implicando que $r = r1 \in I$, para todo $r \in D$. Portanto, $I = D$.

Exemplo 1.16. Se R é um anel não nulo e $n \geq 2$, então $T_n(R)$ não é simples, pois o conjuto I formado por todas as matrizes $(a_{ij}) \in T_n(R)$ tais que $a_{ij} = 0$ se $j < n$, é um ideal de $T_n(R)$, que é não nulo e diferente de $T_n(R)$.

Definição 1.17. Um *domínio de integridade* é um anel R comutativo com unidade tal que para todos $x, y \in R$ tais que $xy = 0$ implique que $x = 0$ ou $y = 0$.

Exemplo 1.18. O anel $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade.

Exemplo 1.19. Todo corpo é um domínio de integridade.

Exemplo 1.20. Se R é um domínio de integridade, então $R[x]$ também é.

Proposição 1.21. *Se D é um domínio de integridade finito, então D é um corpo.*

Demonstração. Como D é um domínio de integridade, D já é um anel comutativo com unidade. Assim só precisamos provar que todo elemento não nulo é invertível. Seja $a \neq 0$ um elemento de D. Como D é finito, a sequência $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ começará a se repetir, isto é, existe $i > j$ tal que $a^i = a^j$. Assim $a^j(a^{i-j} - 1) = 0$, e como $a \neq 0$, temos que $a^{i-j} = 1$, ou seja, $a^{i-j-1}a = 1$. Portanto, a é invertível. $\square$

Definição 1.22. Sejam I e J ideais de um anel R. O produto de I e J é definido por

$$IJ := \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_i \in I \text{ e } b_i \in J, i = 1, \ldots, n; \text{ para } n = 1, 2, \ldots\}.$$

É fácil mostrar que o produto de ideais IJ é também um ideal de R.

Definição 1.23. Seja R um anel e seja I um ideal de R. Dizemos que I é *nilpotente* se $I^n = \{0\}$ para algum inteiro positivo n.

Exemplo 1.24. O conjunto $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ é um ideal nilpotente de $T_2(\mathbb{R})$, pois $I^2 = \{0\}$.

Definição 1.25. Seja R um anel. Dizemos que $r \in R$ é um *idempotente de* R se $r^2 = r$. Se R possuir unidade, dizemos que 0 e 1_R são os *idempotentes triviais* de R.

Exemplo 1.26. Seja R um anel com unidade e seja r um idempotente de R. Então $1_R - r$ também é um idempotente de R, pois $(1_R - r)^2 = 1_R - 2r + r = 1_R - r$.

Proposição 1.27. *Seja R um anel com unidade 1 e idempotentes g e f tais que $g + f = 1$. Então $gf = fg = 0$ e $R = gRg \oplus gRf \oplus fRg \oplus fRf$ (soma direta de grupos abelianos).*

Demonstração. De fato, de $g + f = 1$ temos que $f = 1 - g$. Multiplicando esta última equação à esquerda por g, obtemos $gf = 0$. Analogamente, multiplicando à direita por g, chegamos que $fg = 0$.

Observe que gRg, gRf, fRg e fRf são subanéis de R e $R = 1R1 = (g+f)R(g+f) = gRg + gRf + fRg + fRf$. Resta mostrarmos que tal soma é direta. Suponha que $gag + gbf + fcg + fdf = 0$, onde $a, b, c, d \in R$. Multiplicando esta última equação por

- g em ambos os lados, temos $gag = 0$;
- g à esquerda e f à direita, temos $gbf = 0$;
- f à esquerda e g à direita, temos $fcg = 0$;
- f em ambos os lados, temos $fdf = 0$,

o que implica que a soma é direta. □

Definição 1.28. Sejam R e S anéis. Uma aplicação $f : R \to S$ é um *homomorfismo de anéis* se para todos $x, y \in R$ tivermos

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{e} \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

Exemplo 1.29. A aplicação $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é um homomorfismo de anéis.

Exemplo 1.30. Seja R um anel comutativo com unidade. Então $\phi : R[x] \to R$, definida por $\phi(f) = f(1)$ é um homomorfismo de anéis.

Definição 1.31. Seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. O *núcleo* de f, denotado por $\ker f$, é o conjunto

$$\ker f = \{a \in R : f(a) = 0\}.$$

Exemplo 1.32. O núcleo do homomorfismo f do Exemplo 1.29 é o conjunto

$$\ker f = \left\{ a + bi \in \mathbb{C} : \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0 + 0i\}.$$

Proposição 1.33. *Sejam R e S anéis e seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Então*
(1) $f(0) = 0$;
(2) $f(-a) = -f(a)$;
(3) *f é injetora se, e somente se,* $\ker f = \{0\}$.

Demonstração. (1) e (2) são de fácil verificação.
(3) Suponhamos que f seja injetora. Se $a \in \ker f$, então $f(a) = 0 = f(0)$ implicando que

$a = 0$, pois f é injetora. Assim $\ker f = \{0\}$. Reciprocamente, suponha que $\ker f = \{0\}$. Se $f(a) = f(b)$, então $f(a-b) = 0$, isto é, $a - b \in \ker f = 0$. Logo $a = b$, mostrando que f é injetora. □

Definição 1.34. Sejam R e S anéis. Uma aplicação $f : R \to S$ é um *anti-homomorfismo de anéis* se para todos $x, y \in R$ tivermos

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{e} \qquad f(xy) = f(y)f(x).$$

Exemplo 1.35. Considere $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = A^t$, onde A^t representa a matriz transposta de A. Note que para todos $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ temos que $f(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = f(A) + f(B)$ e $f(AB) = (AB)^t = B^t A^t = f(B)f(A)$. Portanto, f é um anti-homomorfismo de anéis.

1.2 Ideais e anéis primos

Definição 1.36. Um ideal P de um anel R é dito ser *primo* se $P \neq R$ e, para ideais I, J de R, com $IJ \subset P$ implique que $I \subset P$ ou $J \subset P$.

Observação 1.37. Se R é um anel e $a \in R$, vamos denotar por $\langle a \rangle$ o ideal de R gerado por a, ou seja, $\langle a \rangle$ é a interseção de todos os ideais de R que contêm a, assim $\langle a \rangle = RaR$.

Proposição 1.38. *Seja P um ideal de R, $P \neq R$. São equivalentes:*
(1) *P é primo;*
(2) *Para $a, b \in R$, $\langle a \rangle \langle b \rangle \subset P$ implica que $a \in P$ ou $b \in P$;*
(3) *Para $a, b \in R$, $aRb \subset P$ implica que $a \in P$ ou $b \in P$;*
(4) *Para ideais à esquerda I, J de R, $IJ \subset P$ implica que $I \subset P$ ou $J \subset P$.*

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$ É imediato.
$(2) \Rightarrow (3)$ Suponhamos que $aRb \subset P$. Então $\langle a \rangle \langle b \rangle \subset P$, pois

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle \langle b \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i v_i : u_i \in \langle a \rangle, v_i \in \langle b \rangle, m \geq 1 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} a y_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^{t} r_{ik} b s_{ik} \right) : x_{ij}, y_{ij}, r_{ik}, s_{ik} \in R, m, n, t \geq 1 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{t} x_{ij} (a y_{ij} r_{ik} b) s_{ik} : x_{ij}, y_{ij}, r_{ik}, s_{ik} \in R, m, n, t \geq 1 \right\} \\
&\subset P,
\end{aligned}$$

pois $a y_{ij} r_{ik} b \in P$ e P é um ideal. Logo $a \in P$ ou $b \in P$.
$(3) \Rightarrow (4)$ Sejam I, J ideais à esquerda de R tais que $IJ \subset P$ e $I \not\subset P$. Seja $a \in I$ tal

que $a \notin P$. Para todo $b \in J$, temos $aRb \subset IJ \subset P$ donde $b \in P$, uma vez que $a \notin P$. Portanto, $J \subset P$.
$(4) \Rightarrow (1)$ Imediato. $\square$

Definição 1.39. Seja R um anel. Dizemos que R é *primo* se $R \neq \{0\}$ e $\{0\}$ for um ideal primo de R.

Proposição 1.40. *Seja R um anel e seja I um ideal de R tal que $I \neq R$. Então, R/I é primo se, e somente se, I é um ideal primo.*

Demonstração. De fato, suponhamos que R/I seja primo. Sejam J, K ideais de R tais que $JK \subset I$ e considere os ideais $\frac{J+I}{I}$ e $\frac{K+I}{I}$ de $\frac{R}{I}$. Então

$$\left(\frac{J+I}{I}\right)\left(\frac{K+I}{I}\right) \subset \frac{JK+JI+IK+I^2}{I} = \{0+I\},$$

implicando que $\frac{J+I}{I} \subset \{0+I\}$ ou $\frac{K+I}{I} \subset \{0+I\}$, pois $\{0+I\}$ é um ideal primo de $\frac{R}{I}$. Logo $J \subset I$ ou $K \subset I$, mostrando que I é primo. Suponha agora que I seja primo. Sejam $\frac{J}{I}$ e $\frac{K}{I}$ ideais de R/I tais que $\frac{J}{I}\frac{K}{I} \subset \{0+I\}$. Então, $\frac{JK}{I} \subset \{0+I\}$ implicando que $JK \subset I$. Mas I é primo, assim $J \subset I$ ou $K \subset I$, ou seja, $\frac{J}{I} \subset \{0+I\}$ ou $\frac{K}{I} \subset \{0+I\}$. $\square$

Exemplo 1.41. Todo domínio de integridade é primo. De fato, seja R um domínio de integridade e sejam $a, b \in R$ tais que $aRb = \{0\}$. Então $ab = a1b \in aRb = \{0\}$. Logo $a = 0$ ou $b = 0$ e, portanto $\{0\}$ é um ideal primo.

Exemplo 1.42. Todo anel simples também é primo. Se R é um anel simples, então $R \neq \{0\}$ e seus únicos ideais são $\{0\}$ e R. Sejam I, J ideais de R tais que $IJ = \{0\}$. Se $I \neq \{0\}$ e $J \neq \{0\}$, então $I = J = R$ e daí $\{0\} = IJ = RR$, o que é uma contradição, pois R é simples. Logo, $I = \{0\}$ ou $J = \{0\}$ implicando que $\{0\}$ é um ideal primo.

Exemplo 1.43. Se R é um domínio de integridade, então R só possui os idempotentes triviais. De fato, temos que R é em particular um anel primo, assim se r é um idempotente de R, então $rR(1_R - r) = r(1_R - r)R = 0R = \{0\}$. Daí como R é primo, segue que $r = 0$ ou $r = 1_R$.

Exemplo 1.44. Note que, no Exemplo 1.43, a hipótese de comutatividade do anel R é, de fato, necessária. Por exemplo, $M_2(\mathbb{R})$ é um anel primo (pois é simples) com unidade, porém possui idempotentes não triviais, como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposição 1.45. *Seja R um anel com unidade. O anel de matrizes $M_n(R)$ é primo se, e somente se, R é um anel primo.*

Demonstração. Nesta demonstração iremos utilizar o fato de que se A é um ideal de $M_n(R)$, então existe um ideal I de R tal que $A = M_n(I)$.

Suponhamos que R não seja primo. Logo existem ideais não nulos I, J de R tais que $IJ = \{0\}$. Então $M_n(I)$ e $M_n(J)$ são ideais não nulos de $M_n(R)$ tais que $M_n(I)M_n(J) = \{0\}$. Logo, $M_n(R)$ não é primo.

Para provar a recíproca, denote por e_{ij} a matriz de $M_n(R)$ com 1_R na entrada ij e 0 nas demais entradas. Se $M_n(R)$ não é primo, então existem ideais não nulos A e B de $M_n(R)$ tais que $AB = \{0\}$. Agora, $A = M_n(I)$ e $B = M_n(J)$, para alguns ideais I e J de R. Além disso, $I \neq \{0\}$, $J \neq \{0\}$ e $IJ = \{0\}$, pois caso contrário, existiriam $x \in I$ e $y \in J$ tais que $xy \neq 0$. Daí $xe_{11} \in M_n(I) = A$ e $ye_{11} \in M_n(J) = B$ e $(xe_{11})(ye_{11}) = xye_{11} \neq 0$, implicando que $AB \neq \{0\}$, o que é uma contradição. Portanto, o anel R não é primo. $\square$

1.3 Módulos

Definição 1.46. Seja R um anel com unidade. Um *R-módulo à direita* é um grupo abeliano aditivo M com uma função

$$\begin{array}{rcl} M \times R & \to & M \\ (m, r) & \mapsto & mr \end{array}$$

satisfazendo, para todos $m, n \in M$ e $r, s \in R$, as seguintes propriedades:
(1) $(m + n)r = mr + nr$;
(2) $m(r + s) = mr + ms$;
(3) $m(rs) = (mr)s$;
(4) $m1_R = m$.

Observação 1.47. R-módulos à esquerda são definidos de forma simétrica.

Exemplo 1.48. O grupo trivial $M = \{0\}$ é um R-módulo à direita sobre qualquer anel com unidade R.

Exemplo 1.49. Todo anel com unidade R é um R-módulo à direita e à esquerda com a ação dada pelo pruduto do próprio anel.

Exemplo 1.50. Todo grupo abeliano G pode ser considerado um $\mathbb{Z}$-módulo à direita, definindo o produto de um elemento $g \in G$ por um inteiro n da seguinte maneira:

$$\begin{cases} gn = g(n-1) + g, & \text{se } n \geq 0; \\ gn = (-g)(-n), & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Definição 1.51. Sejam M e N R-módulos à direita. Um *homomorfismo de R-módulos* de M em N é uma função $f : M \to N$ tal que

$$f(m + n) = f(m) + f(n) \qquad \text{e} \qquad f(mr) = f(m)r$$

para todos $m, n \in M$ e $r \in R$.

Exemplo 1.52. Seja R um anel comutativo com unidade e seja M um R-módulo à direita. Considere $r \in R$ fixo. A aplicação $\varphi_r : M \to M$ definida por $\varphi_r(m) = mr$ é um homomorfismo de R-módulos.

Definição 1.53. Seja R um anel com unidade e seja M um R-módulo à direita. O conjunto $Ann(M) := \{r \in R : Mr = \{0\}\}$ é chamado *anulador* de M. Em particular, se $Ann(M) = \{0\}$, dizemos que M é um *R-módulo fiel*.

Exemplo 1.54. O anulador do módulo M do Exemplo 1.48 é igual a R.

Exemplo 1.55. Considere o grupo aditivo $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$ e o anel $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$. Com a operação $mr := \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & yx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, M é um R-módulo à direita. Observe que $Ann(M) = \{0\}$, portanto M é um R-módulo fiel.

Definição 1.56. Sejam R e S anéis com unidade e seja M um grupo abeliano aditivo. Dizemos que M é um *(R, S)-bimódulo* se M for um R-módulo à esquerda, um S-módulo à direita e $r(ms) = (rm)s$ para todos $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$.

Exemplo 1.57. Se R é um anel com unidade e I é um ideal de R, então I é um (R, R)-bimódulo.

1.4 Álgebras

Definição 1.58. Seja K um anel comutativo com unidade. Um anel A com uma estrutura de K-módulo satisfazendo

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b),$$

para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in K$, é chamado *K-álgebra* (ou *álgebra sobre K*).

Exemplo 1.59. Todo anel comutativo com unidade é uma álgebra sobre si mesmo.

Exemplo 1.60. Seja $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Note que R é uma $\mathbb{Z}$-álgebra com as operações:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \;\; (a, b)(c, d) = (ac, bd), \;\; a(c, d) = (ac, ad),$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.61. Seja K um anel comutativo com unidade e seja X um conjunto não vazio. A *álgebra livre* sobre K gerada por X é

$$K\langle X \rangle := \left\{ \sum_{\text{finita}} \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} : n \in \mathbb{N}, \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in K, x_{i_j} \in X \right\},$$

com multiplicação induzida por $\lambda x = x\lambda$, para todos $\lambda \in K$ e $x \in X$. O produto de dois monômios do conjunto $K\langle X\rangle$ é definido pela justaposição.

Definição 1.62. Uma função de uma K-álgebra A em uma K-álgebra B é um *homomorfismo de K-álgebras* se ela for um homomorfismo de anéis K-linear (ou seja, $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ para todos $\alpha \in K$ e $a \in A$).

Exemplo 1.63. A aplicação ϕ do Exemplo 1.30 é um homomorfismo de R-álgebras, pois $\phi(\alpha f) = (\alpha f)(1) = \alpha f(1) = \alpha\phi(f)$ para todos $\alpha \in R$ e $f \in R[x]$.

1.5 Conjuntos parcialmente ordenados

Recordemos que uma relação $\preceq$ em um conjunto X é uma *relação de ordem parcial* se a mesma é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é:

1. $x \preceq x$, para todo $x \in X$;
2. Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x = y$;
3. Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.

Definição 1.64. Um *conjunto parcialmente ordenado*, ou simplesmente *poset* é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial.

Definição 1.65. Uma *quase ordem* é uma relação que é reflexiva e transitiva. E um *conjunto quase ordenado* é um conjunto que possui uma relação de quase ordem.

Exemplo 1.66. Os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, dos inteiros $\mathbb{Z}$, dos racionais $\mathbb{Q}$ e dos números reais $\mathbb{R}$ com suas ordens usuais são posets.

Exemplo 1.67. O conjunto $P(X)$ das partes de um conjunto X, considerado com a relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$, é um poset.

Exemplo 1.68. Os números naturais podem também ser parcialmente ordenados da seguinte forma: dados $p, q \in \mathbb{N}$, dizemos que $p \mid q$ se p divide q. Entende-se que p divide q se existe um número natural c de modo que $q = cp$. É fácil mostrar que a relação $\mid$ satisfaz as três condições da relação de ordem parcial. Assim, $(\mathbb{N}, \mid)$ também é um poset.

Exemplo 1.69. Note que se tomarmos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ no lugar do conjunto $\mathbb{N}$ no Exemplo 1.68, teremos que $(\mathbb{Z}, \mid)$ será um conjunto quase ordenado, pois a relação $\mid$ é reflexiva e transitiva. Tal relação não é antissimétrica já que $3|-3$ e $-3|3$, porém $3 \neq -3$.

Exemplo 1.70. Dado um poset $(X, \preceq)$, o *poset dual* de X, denotado por $\widetilde{X}$, é formado pelos mesmos elementos de X com a ordem $\preceq^*$ dada por: $x \preceq^* y \Leftrightarrow y \preceq x$.

Proposição 1.71. *Todo conjunto finito parcialmente ordenado $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ pode ser renomeado de forma que $x_i \preceq x_j$ implique que $i \leq j$ (ordem dos naturais).*

Demonstração. Usaremos indução sobre a cardinalidade de X. Se X possui apenas um elemento, então o resultado é óbvio. Dado $n > 1$, suponha que o resultado seja válido para $n - 1$ e vamos mostrar que também é válido para n. Se X possui n elementos, então X possui um elemento maximal, ou seja, existe $x \in X$ tal que se $x \preceq x_i$ então $x = x_i$. Coloque x como sendo x_n. Para renomear os demais elementos, observe que o conjunto ordenado $X \backslash \{x_n\}$ possui $n - 1$ elementos, logo pela hipótese de indução, $X \backslash \{x_n\}$ pode ser renomeado como na afirmação da proposição. Desta forma, temos o desejado. $\square$

CAPÍTULO 2

HOMOMORFISMOS DE JORDAN

Neste capítulo introduzimos o conceito de homomorfismos de Jordan e apresentamos algumas de suas propriedades básicas, que podem ser encontradas em [10].

2.1 Definição e propriedades

Definição 2.1. Sejam R e S anéis e seja $\varphi : R \to S$ uma aplicação. Dizemos que φ é um *homomorfismo de Jordan* se

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(xy + yx) = \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x),$$

para todos $x, y \in R$. Quando a aplicação φ for bijetora dizemos que φ é um *isomorfismo de Jordan*.

Para simplificar a notação, às vezes utilizaremos $x \circ y = xy + yx$. Desta forma, podemos reescrever a segunda igualdade da definição acima por $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$. A operação $\circ$ é chamada *produto de Jordan*.

Exemplo 2.2. Homomorfismos e anti-homomorfismos de anéis são exemplos de homomorfismos de Jordan.

Outros exemplos de homomorfismos de Jordan podem ser obtidos através da próxima proposição.

Proposição 2.3. *Sejam $\psi : R \to S$ um homomorfismo e $\theta : R \to S$ um anti-homomorfismo. Temos que $\varphi = \psi + \theta$ é um homomorfismo de Jordan se, e somente se, $\psi(a)\theta(b) + \theta(a)\psi(b) + \psi(b)\theta(a) + \theta(b)\psi(a) = 0$, para todos $a, b \in R$.*

Demonstração. De fato, suponha que φ seja um homomorfismo de Jordan. Temos para todos $a, b \in R$ que

$$\begin{aligned}
\varphi(ab+ba) &= \varphi(a)\varphi(b)+\varphi(b)\varphi(a) \\
&= (\psi(a)+\theta(a))(\psi(b)+\theta(b))+(\psi(b)+\theta(b))(\psi(a)+\theta(a)) \\
&= \psi(a)\psi(b)+\psi(a)\theta(b)+\theta(a)\psi(b)+\theta(a)\theta(b) \\
&\quad +\psi(b)\psi(a)+\psi(b)\theta(a)+\theta(b)\psi(a)+\theta(b)\theta(a),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi(ab+ba) &= \psi(ab+ba)+\theta(ab+ba) \\
&= \psi(a)\psi(b)+\psi(b)\psi(a)+\theta(b)\theta(a)+\theta(a)\theta(b).
\end{aligned}$$

Logo, comparando essas duas últimas equações, temos a equação desejada. Suponha agora que $\psi(a)\theta(b)+\theta(a)\psi(b)+\psi(b)\theta(a)+\theta(b)\psi(a)=0$, para todos $a, b \in R$. Como

$$\begin{aligned}
\varphi(a)\varphi(b)+\varphi(b)\varphi(a) &= (\psi(a)+\theta(a))(\psi(b)+\theta(b))+(\psi(b)+\theta(b))(\psi(a)+\theta(a)) \\
&= \psi(a)\psi(b)+\psi(a)\theta(b)+\theta(a)\psi(b)+\theta(a)\theta(b) \\
&\quad +\psi(b)\psi(a)+\psi(b)\theta(a)+\theta(b)\psi(a)+\theta(b)\theta(a) \\
&= \psi(a)\psi(b)+\psi(b)\psi(a)+\theta(b)\theta(a)+\theta(a)\theta(b) \\
&= \psi(ab+ba)+\theta(ab+ba) \\
&= \varphi(ab+ba),
\end{aligned}$$

segue que φ é um homomorfismo de Jordan. □

Exemplo 2.4. Sejam A e B K-álgebras com bases $\{e, f, g\}$ e $\{e', f', g'\}$ respectivamente, onde as multiplicações são dadas pelas seguintes tabelas:

	e	f	g
e	e	e	e
f	f	f	f
g	g	g	g

	e'	f'	g'
e'	e'	g'	g'
f'	$e'+f'-g'$	f'	f'
g'	e'	g'	g'

Note que $e \circ e = 2e$, $f \circ f = 2f$, $g \circ g = 2g$, $e \circ f = e+f$, $e \circ g = e+g$, $f \circ g = f+g$ e $e' \circ e' = 2e'$, $f' \circ f' = 2f'$, $g' \circ g' = 2g'$, $e' \circ f' = e'+f'$, $e' \circ g' = e'+g'$, $f' \circ g' = f'+g'$. Logo

$$\begin{aligned}
\varphi : A &\to B \\
\alpha e+\beta f+\gamma g &\mapsto \alpha e'+\beta f'+\gamma g',
\end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in K$, é um homomorfismo de Jordan. E, como

$$\varphi(ef) = e', \qquad \varphi(e)\varphi(f) = g', \qquad \varphi(f)\varphi(e) = e' + f' - g',$$

segue que $\varphi(e)\varphi(f) \neq \varphi(ef) \neq \varphi(f)\varphi(e)$, ou seja, φ não é um homomorfismo nem um anti-homomorfismo.

Observação 2.5. O exemplo anterior nos mostra que existem homomorfismos de Jordan que não são homomorfismos e nem anti-homomorfismos. Nesta dissertação iremos estudar a relação que existe entre homomorfismos de Jordan, homomorfismos e anti-homomorfismos de certos anéis de matrizes.

Ao longo deste capítulo, assumimos que o anel R possui unidade 1_R e que o anel S é livre de torção 2 (isto é, $x \in S$ e $2x = 0$ implica que $x = 0$).

Proposição 2.6. *Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de Jordan. Então, para todos $x, y, z \in R$, temos as seguintes igualdades:*
(1) $\varphi(2x) = 2\varphi(x),\ \varphi(-x) = -\varphi(x),\ \varphi(0) = 0$;
(2) $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$;
(3) $\varphi(xyx) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)$;
(4) $\varphi(xyz + zyx) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) + \varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)$.

Demonstração. (1) Como φ é aditiva, estas igualdades são imediatas.

(2) Observe que, para $x \in R$,

$$2\varphi(x^2) = \varphi(x^2) + \varphi(x^2) = \varphi(x^2 + x^2) = \varphi(x)\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(x) = 2\varphi(x)^2$$

e como S é livre de torção 2, segue-se que $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$.

(3) Temos que, para todos $x, y \in R$,

$$\begin{aligned}
\varphi[(xy + yx)x + x(xy + yx)] &= \varphi(xy + yx)\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(xy + yx) \\
&= [\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)]\varphi(x) + \varphi(x)[\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)] \\
&= 2\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x) + \varphi(y)\varphi(x)^2 + \varphi(x)^2\varphi(y)
\end{aligned}$$

e, por outro lado, vemos que

$$\begin{aligned}
\varphi[(xy + yx)x + x(xy + yx)] &= \varphi(xyx + yx^2 + x^2y + xyx) \\
&= \varphi(yx^2 + x^2y) + 2\varphi(xyx) \\
&= \varphi(y)\varphi(x)^2 + \varphi(x)^2\varphi(y) + 2\varphi(xyx).
\end{aligned}$$

Comparando essas duas últimas expressões, obtemos $2\varphi(xyx) = 2\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)$. Pelo fato de S ser livre de torção 2, temos a equação desejada.

(4) Pelo item anterior, sabemos que, para $x, y, z \in R$,

$$\begin{aligned}\varphi[(x+z)y(x+z)] &= \varphi(x+z)\varphi(y)\varphi(x+z)\\ &= \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)+\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)+\varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)+\varphi(z)\varphi(y)\varphi(z)\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}\varphi[(x+z)y(x+z)] &= \varphi(xyx)+\varphi(xyz+zyx)+\varphi(zyz)\\ &= \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)+\varphi(xyz+zyx)+\varphi(z)\varphi(y)\varphi(z).\end{aligned}$$

Desta forma obtemos $\varphi(xyz+zyx) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)+\varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)$, para $x, y, z \in R$. □

Observação 2.7. Note que se $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo de Jordan e e é um idempotente de R, então $\varphi(e)$ é um idempotente de S, pois utilizando a equação do item (2) acima, vemos que $\varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$.

Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de Jordan. Vamos verificar que $\varphi(1_R)$ é a identidade do conjunto $\varphi(R)$. Para isso, primeiro definimos a seguinte operação colchete (chamada *colchete de Lie*):

$$[x, y] = xy - yx, \text{ para todos } x, y \in R.$$

Lema 2.8. *Se $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo de Jordan, então para todos $x, y, z \in R$ temos que $\varphi([[x, y], z]) = [[\varphi(x), \varphi(y)], \varphi(z)]$.*

Demonstração. De fato, se $x, y, z \in R$ então

$$\begin{aligned}\varphi([[x,y],z]) &= \varphi([xy-yx,z])\\ &= \varphi(xyz-yxz-zxy+zyx)\\ &= \varphi(xyz+zyx)-\varphi(yxz+zxy)\\ &= \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)+\varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)-\varphi(y)\varphi(x)\varphi(z)-\varphi(z)\varphi(x)\varphi(y)\\ &= [\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x),\varphi(z)]\\ &= [[\varphi(x),\varphi(y)],\varphi(z)].\end{aligned}$$

□

Proposição 2.9. *Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de Jordan. Sejam $a, e \in R$ onde e é um idempotente de R tal que $[e, a] = 0$. Então $\varphi(ea) = \varphi(e)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e)$. Em particular, se $ea = ae = a$, então $\varphi(e)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e) = \varphi(a)$.*

Demonstração. Por hipótese temos que $[e,a]=0$, assim $[[e,a],e]=0$. Logo

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi([[e,a],e]) = [[\varphi(e),\varphi(a)],\varphi(e)] \\ &= [\varphi(e)\varphi(a)-\varphi(a)\varphi(e),\varphi(e)] \\ &= \varphi(e)\varphi(a)\varphi(e)-\varphi(a)\varphi(e)-\varphi(e)\varphi(a)+\varphi(e)\varphi(a)\varphi(e) \end{aligned}$$

donde $\varphi(e)\varphi(a)\varphi(e)-\varphi(a)\varphi(e)=\varphi(e)\varphi(a)-\varphi(e)\varphi(a)\varphi(e)$. Multiplicando esta última equação por $\varphi(e)$ à esquerda, obtemos

$$\varphi(e)\varphi(a)\varphi(e)=\varphi(e)\varphi(a). \tag{2.1}$$

Analogamente, multiplicando por $\varphi(e)$ à direita, obtemos

$$\varphi(e)\varphi(a)\varphi(e)=\varphi(a)\varphi(e). \tag{2.2}$$

Note também que de $[e,a]=0$, segue que $ea=ae$, assim $ea=eae$. Aplicando φ obtemos que

$$\varphi(ea)=\varphi(e)\varphi(a)\varphi(e). \tag{2.3}$$

De (2.1), (2.2) e (2.3), concluímos que $\varphi(ea)=\varphi(e)\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(e)$.

Agora, se $ea=ae=a$, então $ea-ae=0$, isto é, $[e,a]=0$. Desta forma, pelo mostrado acima, temos que $\varphi(ea)=\varphi(e)\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(e)$, e como $ea=a$, obtemos que $\varphi(a)=\varphi(e)\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(e)$. $\square$

Observação 2.10. Seja $\varphi: R\to S$ um homomorfismo de Jordan, onde R é um anel com unidade. Temos que $1_Ra=a1_R=a$, para todo $a\in R$ e como 1_R é um idempotente de R, segue da proposição acima que $\varphi(1_R)\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(1_R)=\varphi(a)$, para todo $a\in R$. Logo $\varphi(1_R)$ é a unidade de $\varphi(R)$.

2.2 Ideais de Jordan

Definição 2.11. Seja R um anel e seja $U\subset R$ um subgrupo aditivo. Dizemos que U é um *ideal de Jordan* de R se, sempre que $x\in U$ e $a\in R$, tivermos $x\circ a\in U$.

Exemplo 2.12. Sejam R e S anéis e seja $\varphi: R\to S$ um homomorfismo de Jordan. O conjunto $\ker\varphi=\{x\in R : \varphi(x)=0\}$ é um ideal de Jordan de R. Com efeito, como em particular φ é um homomorfismo de grupos aditivos, $\ker\varphi$ é um subgrupo aditivo de R. Agora, se $x\in\ker\varphi$, então $\varphi(x)=0$. Assim para todo $y\in R$, temos que $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ\varphi(y)=0$, ou seja, $x\circ y\in\ker\varphi$. Portanto $\ker\varphi$ é um ideal de Jordan.

Exemplo 2.13. Ideais de um anel são ideais de Jordan.

Lema 2.14. *Se U é um ideal de Jordan de um anel R, então para todos $a, b \in U$ e $x \in R$, $x(ab+ba)-(ab+ba)x \in U$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in U$. Como U é um ideal de Jordan, então para todo $x \in R$

$$a(xb-bx)+(xb-bx)a,\ b(xa-ax)+(xa-ax)b \in U,$$

uma vez que, $xb-bx,\ xa-ax \in R$. Mas

$$x(ab+ba)-(ab+ba)x = [a(xb-bx)+(xb-bx)a]+[b(xa-ax)+(xa-ax)b]$$

e como U é um subgrupo aditivo de R, temos o resultado. □

Antes de expor o próximo resultado, observe que, se R é um anel que não possui ideais nilpotentes não nulos, então R não possui ideais laterais nilpotentes não nulos.

Para ver isso, suponha sem perda de generalidade, que I seja um ideal à direita de R tal que $I^n = 0$. Então, o conjunto RI é um ideal de R tal que $(RI)^{n+1} = 0$, pois se $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ e $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$, então

$$(a_1x_1)(a_2x_2)\cdots(a_nx_n)(a_{n+1}x_{n+1}) = a_1(x_1a_2)(x_2a_3)\cdots(x_na_{n+1})x_{n+1} = 0$$

já que $(x_1a_2)(x_2a_3)\cdots(x_na_{n+1})x_{n+1} \in I^n = 0$. Logo devemos ter $I = 0$, pois caso contrário teríamos um ideal não nulo nilpotente RI.

Proposição 2.15. *Seja R um anel com unidade, livre de torção 2. Se R não possui ideais nilpotentes não nulos, então todo ideal de Jordan não nulo de R contém um ideal não nulo de R.*

Demonstração. Seja $U \neq \{0\}$ um ideal de Jordan de R e tome $a, b \in U$. Pelo Lema 2.14, para todo $x \in R$, $xc - cx \in U$, onde $c = ab + ba$. Mas como $c \in U$, temos também que $xc+cx \in U$. Assim $2xc \in U$ para todo $x \in R$. Logo, para todo $y \in R$, $(2xc)y+y(2xc) \in U$. E como $2(yx)c = y(2xc) \in U$, temos que $2xcy \in U$ e, portanto, $2RcR \subset U$.

Note que $2RcR$ é um ideal de R e se $2RcR \neq \{0\}$, temos o resultado.

Suponha que $2RcR = \{0\}$. Assim $RcR = \{0\}$ implicando que $c = 0$, ou seja,

$$ab + ba = 0, \text{ para todos } a, b \in U. \tag{2.4}$$

Desta forma, se tomarmos $0 \neq a \in U$ e $b = ax + xa \in U$, temos por (2.4) que $a(ax + xa) + (ax + xa)a = 0$, isto é,

$$a^2x + xa^2 + 2axa = 0, \text{ para todo } x \in R. \tag{2.5}$$

E, se tomarmos $b = a$, por (2.4) temos $0 = aa + aa = 2a^2$, donde $a^2 = 0$. Logo de (2.5) obtemos que $2axa = 0$, para todo $x \in R$, isto é, $aRa = \{0\}$. Mas agora observe que $aR \neq \{0\}$ é um ideal à direita nilpotente de R (já que $(aR)^2 = aRaR = \{0\}$) contrariando nossa hipótese (ver observação antes da proposição). Em outras palavras, mostramos que existe $c \in U$ tal que $2RcR \subset U$ e que $2RcR \neq \{0\}$. Logo U contém um ideal não nulo de R. □

Proposição 2.16. *Sejam R e S anéis e seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de Jordan.*

1. *Se φ é um isomorfismo de Jordan, então φ^{-1} também é um isomorfismo de Jordan.*

2. *Se φ é sobrejetora e I é um ideal de Jordan em R, então $\varphi(I)$ é um ideal de Jordan em S.*

3. *Se φ é um isomorfismo de Jordan e R é um anel simples livre de torção 2, então S é simples.*

Demonstração. 1. Dados $x, y \in S$, existem $a, b \in R$ tais que $\varphi(a) = x$ e $\varphi(b) = y$, já que φ é sobrejetora. Note que $\varphi^{-1}(x + y) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(a + b)) = a + b = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)$ e $\varphi^{-1}(x \circ y) = \varphi^{-1}(\varphi(a) \circ \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(a \circ b)) = a \circ b = \varphi^{-1}(x) \circ \varphi^{-1}(y)$. Portanto φ^{-1} é um isomorfismo de Jordan.

2. Como φ é, em particular, um homomorfismo de grupos aditivos, facilmente vemos que $\varphi(I)$ é um subgrupo do grupo aditivo S. Sejam $y \in \varphi(I)$ e $s \in S$. Então existem $x \in I$ e $r \in R$ tais que $\varphi(x) = y$ e $\varphi(r) = s$, pois φ é sobrejetora. Mais ainda $x \circ r \in I$, uma vez que I é um ideal de Jordan. Logo

$$y \circ s = \varphi(x) \circ \varphi(r) = \varphi(x \circ r) \in \varphi(I),$$

ou seja, $\varphi(I)$ é um ideal de Jordan de S.

3. Tome I um ideal de S e observe que, em particular, I é um ideal de Jordan. Logo, pelos itens anteriores, $\varphi^{-1}(I)$ é um ideal de Jordan em R.

Se $\varphi^{-1}(I) \neq \{0\}$, pela Proposição 2.15, $\varphi^{-1}(I)$ contém um ideal não nulo de R, mas como R é simples, acarreta que $\varphi^{-1}(I) = R$. Desta forma, $\varphi^{-1}(I) = \{0\}$ ou $\varphi^{-1}(I) = R$ implicando que $I = \{0\}$ ou $I = S$. Logo S é simples. □

2.3 Relação entre homomorfismos de Jordan e (anti-) homomorfismos

Nesta seção, vamos iniciar o estudo de condições para que um homomorfismo de Jordan seja um homomorfismo ou um anti-homomorfismo. Para o primeiro caso, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.17 (Lema de Hua). *Sejam R e S anéis, não necessariamente associativos. Se $\varphi : R \to S$ é uma aplicação aditiva tal que para todos $a, b \in R$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ou $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$, então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ e $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$ para todos $a, b \in R$, então φ é ao mesmo tempo um homomorfismo e um anti-homomorfismo.

Suponhamos então que existam $a, b \in R$ tais que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \neq \varphi(b)\varphi(a)$. Vamos mostrar que φ é um homomorfismo.

Se d é qualquer outro elemento de R, então $\varphi(ad) = \varphi(a)\varphi(d)$. De fato, suponha por absurdo que $\varphi(ad) = \varphi(d)\varphi(a) \neq \varphi(a)\varphi(d)$ para algum $d \in R$. Como por hipótese, $\varphi(a(b+d)) = \varphi(a)\varphi(b+d)$ ou $\varphi(a(b+d)) = \varphi(b+d)\varphi(a)$, segue que

$$\varphi(a(b+d)) = \begin{cases} \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\varphi(d) & \text{ou} \\ \varphi(b)\varphi(a) + \varphi(d)\varphi(a) \end{cases}$$

donde

$$\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(d)\varphi(a) = \begin{cases} \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\varphi(d) & \text{ou} \\ \varphi(b)\varphi(a) + \varphi(d)\varphi(a), \end{cases}$$

isto é, $\varphi(d)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(d)$ ou $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$, o que é uma contradição. Portanto, $\varphi(ad) = \varphi(a)\varphi(d)$, para todo $d \in R$. De modo análago, mostra-se que $\varphi(db) = \varphi(d)\varphi(b)$, para todo $d \in R$.

Agora, se por absurdo existissem elementos $x, y \in R$ tais que $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x) \neq \varphi(x)\varphi(y)$, então de modo análago ao que foi feito acima, obteríamos que $\varphi(dy) = \varphi(y)\varphi(d)$ e $\varphi(xd) = \varphi(d)\varphi(x)$, para todo $d \in R$. Mas, observe que

$$\varphi((a+x)(b+y)) = (\varphi(a) + \varphi(x))(\varphi(b) + \varphi(y))$$

ou

$$\varphi((a+x)(b+y)) = (\varphi(b) + \varphi(y))(\varphi(a) + \varphi(x)).$$

No primeiro caso, chega-se que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ e no segundo, chega-se que $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$, que é uma contradição. Logo se existem $a, b \in R$ tais que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \neq \varphi(b)\varphi(a)$, então não existem $x, y \in R$ tais que $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x) \neq \varphi(x)\varphi(y)$, em outras palavras, devemos ter $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todos $x, y \in R$.

De modo análago, se supusermos que existem $a, b \in R$ tais que $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a) \neq \varphi(a)\varphi(b)$ obtemos que φ é um anti-homomorfismo. $\square$

Teorema 2.18. *Se φ é um homomorfismo de Jordan de um anel R em um domínio S, então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Para todos $a, b \in R$ temos que

$$\begin{aligned}
[\varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b)][\varphi(ab) - \varphi(b)\varphi(a)] &= \varphi(ab)^2 - \varphi(ab)\varphi(b)\varphi(a) \\
&\quad -\varphi(a)\varphi(b)\varphi(ab) + \varphi(a)\varphi(b)^2\varphi(a) \\
&= \varphi(abab) - \varphi((ab)ba + ab(ab)) + \varphi(ab^2a) \\
&= \varphi(abab - ab^2a - abab + ab^2a) = 0.
\end{aligned}$$

Como S é um domínio, então para todos $a, b \in R$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ou $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$. Com isso, o resultado segue imediatamente como consequência do Lema de Hua. □

Para homomorfismos de Jordan de um domínio de integridade em um anel arbitrário, não podemos garantir que seja um homomorfismo ou um anti-homomorfismo, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.19. Seja $A = K[x, y]$ o anel de polinômios em duas indeterminadas sobre um corpo K de característica diferente de 2. Os elementos $x^k y^l$, com $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ formam uma base de A e

$$x^k y^l \circ x^m y^n = 2x^{k+m} y^{l+n}.$$

Seja B a K-álgebra gerada pelas variáveis X, Y, Z satisfazendo as relações

$$YX = XY + Z \qquad [X, Z] = [Y, Z] = Z^2 = 0.$$

Vamos mostrar que a aplicação linear $\varphi : A \to B$ definida por $\varphi(x^k y^l) = \frac{1}{2}(X^k \circ Y^l)$ é um homomorfismo de Jordan. Mas antes, mostremos que para quaisquer inteiros positivos l, k, temos que

$$Y^l X^k = X^k Y^l + klX^{k-1} Y^{l-1} Z. \tag{2.6}$$

Vamos provar utilizando indução sobre k.

Para $k = 1$, devemos provar que $Y^l X = XY^l + lY^{l-1}Z$ e para isso, utilizaremos indução sobre l. Se $l = 1$, já sabemos que $YX = XY + Z$. Suponhamos que $l > 1$ e que a igualdade seja válida para $l - 1$. Vamos mostrar que é válida para l. Temos que

$$\begin{aligned}
Y^l X &= Y(Y^{l-1}X) \\
&= Y(XY^{l-1} + (l-1)Y^{l-2}Z) \\
&= (YX)Y^{l-1} + (l-1)Y^{l-1}Z \\
&= (XY + Z)Y^{l-1} + (l-1)Y^{l-1}Z \\
&= XY^l + lY^{l-1}Z.
\end{aligned}$$

Logo $Y^lX = XY^l + lY^{l-1}Z$ é válida para todo $l > 0$, concluindo o caso para $k = 1$.

Suponhamos que $k > 1$ e que (2.6) seja válida para $k-1$. Vamos mostrar que tal igualdade também é válida para k. Com efeito,

$$\begin{aligned}
Y^lX^k &= (Y^lX^{k-1})X \\
&= (X^{k-1}Y^l + (k-1)lX^{k-2}Y^{l-1}Z)X \\
&= X^{k-1}(Y^lX) + (k-1)lX^{k-2}(Y^{l-1}X)Z \\
&= X^{k-1}(XY^l + lY^{l-1}Z) + (k-1)lX^{k-2}(XY^{l-1} + (l-1)Y^{l-2}Z)Z \\
&= X^kY^l + lX^{k-1}Y^{l-1}Z + (k-1)lX^{k-1}Y^{l-1}Z \\
&= X^kY^l + klX^{k-1}Y^{l-1}Z.
\end{aligned}$$

Assim (2.6) é válida para todo $k > 0$.

Aplicando (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(X^k \circ Y^l) &= \frac{1}{2}(X^kY^l + Y^lX^k) \\
&= \frac{1}{2}(X^kY^l + X^kY^l + klX^{k-1}Y^{l-1}Z) \\
&= X^kY^l + \frac{kl}{2}X^{k-1}Y^{l-1}Z.
\end{aligned}$$

Desta forma, para quaisquer inteiros positivos k, l, m, n temos

$$\frac{1}{2}(X^k \circ Y^l) \circ \frac{1}{2}(X^m \circ Y^n) = X^{k+m} \circ Y^{l+n}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(X^k \circ Y^l) \circ \frac{1}{2}(X^m \circ Y^n) \\
= \;& (X^kY^l + \frac{kl}{2}X^{k-1}Y^{l-1}Z) \circ (X^mY^n + \frac{mn}{2}X^{m-1}Y^{n-1}Z) \\
= \;& (X^kY^l + \frac{kl}{2}X^{k-1}Y^{l-1}Z)(X^mY^n + \frac{mn}{2}X^{m-1}Y^{n-1}Z) \\
& + (X^mY^n + \frac{mn}{2}X^{m-1}Y^{n-1}Z)(X^kY^l + \frac{kl}{2}X^{k-1}Y^{l-1}Z) \\
= \;& X^k(Y^lX^m)Y^n + \frac{mn}{2}X^k(Y^lX^{m-1})Y^{n-1}Z + \frac{kl}{2}X^{k-1}(Y^{l-1}X^m)Y^nZ \\
& + X^m(Y^nX^k)Y^l + \frac{kl}{2}X^m(Y^nX^{k-1})Y^{l-1}Z + \frac{mn}{2}X^{m-1}(Y^{n-1}X^k)Y^lZ \\
= \;& X^k(X^mY^l + mlX^{m-1}Y^{l-1}Z)Y^n + \frac{mn}{2}X^k(X^{m-1}Y^l + (m-1)lX^{m-2}Y^{l-1}Z)Y^{n-1}Z \\
& + \frac{kl}{2}X^{k-1}(X^mY^{l-1} + m(l-1)X^{m-1}Y^{l-2}Z)Y^nZ + X^m(X^kY^n + knX^{k-1}Y^{n-1}Z)Y^l \\
& + \frac{kl}{2}X^m(X^{k-1}Y^n + (k-1)nX^{k-2}Y^{n-1}Z)Y^{l-1}Z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{mn}{2}X^{m-1}(X^kY^{n-1}+k(n-1)X^{k-1}Y^{n-2}Z)Y^lZ \\
= \; & X^{k+m}Y^{l+n}+mlX^{k+m-1}Y^{l+n-1}Z+\frac{mn}{2}X^{k+m-1}Y^{l+n-1}Z+\frac{kl}{2}X^{m+k-1}Y^{l+n-1}Z \\
& +X^{k+m}Y^{l+n}+knX^{k+m-1}Y^{l+n-1}Z+\frac{kl}{2}X^{m+k-1}Y^{n+l-1}Z+\frac{mn}{2}X^{m+k-1}Y^{n+l-1}Z \\
= \; & 2X^{k+m}Y^{l+n}+(kn+mn+kl+ml)X^{m+k-1}Y^{n+l-1}Z \\
= \; & X^{k+m}Y^{l+n}+X^{k+m}Y^{l+n}+(l+n)(k+m)X^{m+k-1}Y^{n+l-1}Z \\
= \; & X^{k+m}Y^{l+n}+Y^{l+n}X^{k+m} \\
= \; & X^{k+m}\circ Y^{l+n}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, a aplicação linear φ é um homomorfismo de Jordan, pois

$$
\begin{aligned}
\varphi(x^ky^l\circ x^my^n) &= \varphi(2x^{k+m}y^{l+n}) \\
&= X^{k+m}\circ Y^{l+n} \\
&= \frac{1}{2}(X^k\circ Y^l)\circ\frac{1}{2}(X^m\circ Y^n) \\
&= \varphi(x^ky^l)\circ\varphi(x^my^n).
\end{aligned}
$$

Note também que $\varphi(y)\varphi(x)=\varphi(x^0y^1)\varphi(x^1y^0)=\frac{1}{2}(1\circ Y)\frac{1}{2}(X\circ 1)=YX=XY+Z$ e $\varphi(yx)=\varphi(xy)=\frac{1}{2}(X\circ Y)=\frac{1}{2}(XY+YX)=XY+\frac{1}{2}Z$. Se tivéssemos $\varphi(yx)=\varphi(y)\varphi(x)$ ou $\varphi(xy)=\varphi(y)\varphi(x)$, então $Z=\frac{1}{2}Z$, donde $Z=0$, o que é uma contradição. Logo φ não é um homomorfismo e também não é um anti-homomorfismo.

CAPÍTULO 3

HOMOMORFISMOS DE JORDAN ENTRE ANÉIS DE MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES

Neste capítulo apresentamos dois teoremas que nos dão condições suficientes para que homomorfismos de Jordan sejam homomorfismos ou anti-homomorfismos de anéis. O primeiro resultado, Teorema 3.7, envolve anéis de matrizes triangulares superiores sobre anéis primos e pode ser encontrado em [8]. O segundo resultado, Teorema 3.10, pode ser encontrado em [16] e os anéis de matrizes são considerados sobre um anel cujos únicos idempotentes são 0 e 1.

Definição 3.1. Sejam A e B anéis com unidade e seja M um (A,B)-bimódulo que é fiel como A-módulo à esquerda e também como B-módulo à direita. O anel

$$Tri(A,M,B) := \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in A, m \in M, b \in B \right\}$$

com as operações usuais de matrizes é chamado *anel triangular*.

Como $Tri(A,M,B) = Tri(A,0,0) \oplus Tri(0,M,0) \oplus Tri(0,0,B)$ e $Tri(A,0,0) \cong A$, $Tri(0,0,B) \cong B$ (isomorfismos de anéis), $Tri(0,M,0) \cong M$ (isomorfismo de grupos), então para simplificar a notação nós usaremos a seguinte convenção

$$Tri(A,M,B) = A \oplus M \oplus B.$$

Sendo assim, note que

$$AB = BA = MA = BM = M^2 = 0.$$

Exemplo 3.2. Seja R um anel com unidade e seja $T_n(R)$ o anel das matrizes triangulares superiores de ordem n com entradas em R, $n \geq 2$. Observe que podemos ver $T_n(R)$ como um anel triangular

$$\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

onde $A = T_{n-1}(R)$, $B = R$ e $M = M_{(n-1)\times 1}(R)$.

Seja R um anel com unidade e considere $T_n(R)$. Vamos denotar por e_{ij} a matriz de $T_n(R)$ que possui 1 na entrada ij e zero nas demais, para $1 \leq i \leq j \leq n$. Note que

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il},$$

onde δ_{jk} representa o delta de Kronecker.

Para provar os teoremas principais deste capítulo, iremos demonstrar alguns lemas que nos auxiliarão.

Lema 3.3. *Seja R um anel primo com unidade. Suponha que g e f sejam idempotentes não triviais em $T_n(R)$ tais que $g + f = 1_{T_n(R)}$ e*

$$aT_n(R)f = 0 = fT_n(R)(g - a),$$

$$bT_n(R)g = 0 = gT_n(R)(f - b),$$

onde $a = gag, b = fbf \in T_n(R)$. Então $gT_n(R)f = 0$ ou $fT_n(R)g = 0$.

Demonstração. Escreva

$$a = a_1 + m_1 + b_1 \quad \text{e} \quad f = a_2 + m_2 + b_2,$$

onde $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ e $m_1, m_2 \in M$.

Se $b_2 = 0$, então $f = a_2 + m_2$. Assim, de $g + f = 1_{T_n(R)}$, obtemos que $g = 1_A - a_2 + 1_B - m_2$. Multiplicando por 1_B à esquerda em ambos os lados, segue que $1_Bg = 1_B$. Logo, como $bT_n(R)g = 0$ temos $bT_n(R)1_Bg = 0$ donde $bT_n(R)1_B = 0$. Em particular, $b1_B = 0$ e $bM1_B = 0$. Assim $bM = 0$ e, consequentemente,

$$0 = bM = b1_{T_n(R)}M = b(1_A + 1_B)M = b1_AM + b0 = b1_AM.$$

Mas, como $b \in T_n(R)$, segue que $b1_A \in A$ e dessa maneira $b1_A = 0$, pois M é um A-módulo à esquerda fiel. Portanto $b = b1_{T_n(R)} = b(1_A + 1_B) = b1_A + b1_B = 0$ e da igualdade $gT_n(R)(f - b) = 0$, segue que $gT_n(R)f = 0$.

Suponha que $b_2 \neq 0$. Segue de $aT_n(R)f = 0$ que $aBf = 0$ donde $0 = aBf = (a_1 + m_1 + b_1)B(a_2 + m_2 + b_2) = m_1Bb_2 + b_1Bb_2$, implicando que $m_1Bb_2 = 0$ e $b_1Bb_2 = 0$.

Como $B = R$ é primo e $b_2 \neq 0$, então $b_1 = 0$. Logo, de $fT_n(R)(g-a) = 0$, temos que $fB(g-a) = 0$. Assim

$$\begin{aligned} 0 &= fB(g-a) \\ &= (a_2+m_2+b_2)B(1_{T_n(R)} - f - a) \\ &= (a_2+m_2+b_2)B(1_A - a_2 - a_1 + 1_B - b_2 - m_1 - m_2) \\ &= m_2B(1_B - b_2) + b_2B(1_B - b_2), \end{aligned}$$

implicando que $b_2B(1_B - b_2) = 0$. E, novamente, como B é primo e $b_2 \neq 0$, segue que $b_2 = 1_B$. Com isso, temos que $1_Bf = 1_B(a_2+m_2+b_2) = b_2 = 1_B$, isto é, $1_Bf = 1_B$ e, analogamente ao primeiro caso, utilizando a igualdade $aT_n(R)f = 0$ chegamos que $a = 0$ e, consequentemente, de $fT_n(R)(g-a) = 0$ obtemos $fT_n(R)g = 0$. □

Lema 3.4. *Seja R um anel primo com unidade e seja $n \geq 2$ um inteiro. Suponha que g e f sejam idempotentes não triviais em $T_n(R)$ tais que $g + f = 1_{T_n(R)}$. Se $gT_n(R)f = 0$, então $1_Bg = 1_B$ e $ge_{11} = 0$.*

Demonstração. Provaremos este resultado utilizando indução sobre n.

Escreva $g = a + b + m$, onde $a \in A$, $b \in B$ e $m \in M$. Para $n = 2$, temos que $A = B = M = R$.

Suponha que $a \neq 0$. Como $gT_2(R)f = 0$, então

$$(a+b+m)M(1_A + 1_B - a - b - m) = 0 \quad \text{e} \quad (a+b+m)A(1_A + 1_B - a - b - m) = 0.$$

Assim $aM(1_B - b) = 0$ e $aA(1_A - a) + aA(-m) = 0$, donde $aM(1_B - b) = 0$, $aA(1_A - a) = 0$ e $aA(-m) = 0$. Mas como $M = A = R$ é um anel primo e $a \neq 0$, segue que $b = 1_B$, $a = 1_A$ e $m = 0$. Desta forma $f = 1_{T_n(R)} - g = 1_{T_n(R)} - a - b - m = -m = 0$ e isto é uma contradição, pois f é um idempotente não trivial. Portanto $a = 0$.

Temos que $g = b + m$ e, como g é um idempotente não trivial, segue que $b \neq 0$ (pois se $g = m$, teríamos $g = g^2 = m^2 = 0$, que é um absurdo). Como $gT_2(R)f = 0$, em particular

$$(b+m)B(1_A + 1_B - b - m) = bB(1_B - b) + mB(1_B - b) = 0,$$

implicando que $bB(1_B - b) = 0$ e $mB(1_B - b) = 0$. Logo $b = 1_B$, pois B é primo e $b \neq 0$. Assim $g = 1_B + m$ implicando que $1_Bg = 1_B(1_B + m) = 1_B$ e $gA = (1_B + m)A = 0$ e, consequentemente, $1_Bg = 1_B$ e $ge_{11} = 0$. Portanto o resultado é válido para $n = 2$.

Suponhamos que o resultado seja válido para r, onde $2 \leq r < n$. Vamos mostrar que vale para n.

Se $a = 0$, então $g = b + m$ e como g é um idempotente não trivial, $b \neq 0$. Logo, de

$gT_n(R)f = 0$ segue que $bB(1_B - b) = 0$, mas B é primo e $b \neq 0$, assim $b = 1_B$. Portanto $g = 1_B + m$, o que implica $1_B g = 1_B$ e $ge_{11} = 0$ (análago ao caso $n = 2$).

Se $a \neq 0$, então $aM(1_B - b) = 0$ (de maneira análoga ao caso $n = 2$). Escreva

$$a = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n-1} a_{ij} e_{ij},$$

com $a_{ij} \in R$. Como $a \neq 0$, então $a_{i_0 j_0} \neq 0$ para alguns i_0, j_0 tais que $1 \leq i_0 \leq j_0 \leq n - 1$. Deste modo, de $aM(1_B - b) = 0$ segue que $a(e_{j_0 n}R)(1_B - b) = 0$, donde $a_{i_0 j_0}R(1_B - b) = 0$. Assim $b = 1_B$, visto que R é primo e $a_{i_0 j_0} \neq 0$. Logo $g = a + 1_B + m$ e, consequentemente, $1_B g = 1_B$. Note também que $a \neq 1_A$, pois caso contrário teríamos $f = 1_{T_n(R)} - 1_A - 1_B - m = -m$, o que seria uma contradição, já que f é um idempotente não trivial. Sendo assim, de $gT_n(R)f = 0$, temos que $(a + 1_B + m)A(1_A - a - m) = aA(1_A - a) + aA(-m) = 0$, donde $aA(1_A - a) = 0$.

Afirmação: a e $1_A - a$ são idempotentes não triviais de A.

De fato, temos que

$$a + 1_B + m = g = g^2 = (a + 1_B + m)(a + 1_B + m) = a^2 + 1_B + (am + m),$$

logo $a = a^2$, e assim $(1_A - a)^2 = 1_A - 2a + a = 1_A - a$.

Como $a \neq 0$ e $a \neq 1_A$, segue que $1_A - a$ também é um idempotente não trivial de A, o que conclui a afirmação.

Agora, aplicando a hipótese de indução sobre A, temos que $ae_{11} = 0$ e como $(1_B + m)e_{11} = 0$ (pois $BA = MA = 0$) segue que $ge_{11} = (a + 1_B + m)e_{11} = 0$, o que conclui o resultado. $\square$

Lema 3.5. *Seja R um anel primo com unidade e sejam g e f idempotentes não triviais em $T_n(R)$ tais que $g + f = 1_{T_n(R)}$ e $gT_n(R)f = 0$.*

1. *Se $u \in fT_n(R)f$ e $uT_n(R)g = 0$, então $u = 0$.*

2. *Se $v \in gT_n(R)g$ e $fT_n(R)v = 0$, então $v = 0$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que $1_B g = 1_B$ e $ge_{11} = 0$.

1. Suponha que $u \in fT_n(R)f$ e que $uT_n(R)g = 0$. Então, em particular, $u1_B g = 0$ donde $u1_B = 0$.

Por outro lado, da igualdade $uT_n(R)g = 0$ concluímos que $u(1_A 1_A T_n(R) 1_B)g = 0$ e assim $u1_A(1_A T_n(R) 1_B) = 0$. E, como $1_A T_n(R) 1_B = 1_A(A \oplus M \oplus B)1_B = M$ é fiel como A-módulo à esquerda e $u1_A \in A$, segue que $u1_A = 0$. Desta forma $u = u1_{T_n(R)} = u(1_A + 1_B) = 0$.

2. Como $f + g = 1_{T_n(R)}$ e $ge_{11} = 0$, então $fe_{11} = e_{11}$. Logo, da igualdade $fT_n(R)v =$

0, obtemos que $f(e_{11}T_n(R))v = 0$, ou seja, $e_{11}T_n(R)v = 0$. Em particular, $e_{11}e_{1i}v = 0$, isto é, $e_{1i}v = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, o que nos fornece $v = 0$. $\square$

Lema 3.6. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros e sejam R um anel com unidade e R' um anel com unidade, primo, livre de torção 2. Suponha que $\varphi : T_n(R) \to T_{n'}(R')$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor tal que $\varphi(e_{nn}) \neq 0, 1_{T_{n'}(R')}$. Então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo de anéis.*

Demonstração. Tome $g = \varphi(1_A)$ e $f = \varphi(1_B)$. De $\varphi(e_{nn}) \neq 0, 1_{T_{n'}(R')}$, segue que $f = \varphi(1_B) = \varphi(e_{nn}) \neq 0, 1_{T_{n'}(R')}$. Note também que $g \neq 0, 1_{T_{n'}(R')}$, uma vez que $g + f = 1_{T_{n'}(R')}$ e $f \neq 0, 1_{T_{n'}(R')}$. Como φ é um homomorfismo de Jordan, φ leva idempotente em idempotente, assim g e f são idempotentes não triviais em $T_{n'}(R')$ e, pela sobrejetividade de φ, também temos que $g + f = 1_{T_{n'}(R')}$. Pela Proposição 1.27, segue que

$$T_{n'}(R') = gT_{n'}(R')g \oplus gT_{n'}(R')f \oplus fT_{n'}(R')g \oplus fT_{n'}(R')f. \tag{3.1}$$

Agora, note que

$$\varphi(A) = \varphi(1_A A 1_A) = g\varphi(A)g \subseteq gT_{n'}(R')g,$$
$$\varphi(B) = \varphi(1_B B 1_B) = f\varphi(B)f \subseteq fT_{n'}(R')f$$

e, como

$$\varphi(1_A x 1_B) = \varphi(1_A x 1_B + 0) = \varphi(1_A x 1_B + 1_B x 1_A) = g\varphi(x)f + f\varphi(x)g,$$

para todo $x \in T_n(R)$, e $1_A T_n(R) 1_B = 1_A(A + M + B)1_B = M$, concluímos que $\varphi(M) \subseteq gT_{n'}(R')f + fT_{n'}(R')g$.

Afirmação 1: $\varphi(A) = gT_{n'}(R')g$, $\varphi(B) = fT_{n'}(R')f$ e $\varphi(M) = gT_{n'}(R')f + fT_{n'}(R')g$.

Seja $y \in gT_{n'}(R')g$. Como φ é sobrejetora, existe $a + m + b \in T_n(R)$ tal que

$$\varphi(a + m + b) = \varphi(a) + \varphi(m) + \varphi(b) = y.$$

Logo $(\varphi(a) - y) + \varphi(m) + \varphi(b) = 0$ e, consequentemente, $\varphi(a) = y$, uma vez que a soma em (3.1) é direta. Isto mostra que $\varphi(A) = gT_{n'}(R')g$. As outras igualdades são análogas.

Considere $M_1 = \varphi^{-1}(gT_{n'}(R')f) \cap M$ e $M_2 = \varphi^{-1}(fT_{n'}(R')g) \cap M$.

Afirmação 2: $\varphi(M_1) = gT_{n'}(R')f$ e $\varphi(M_2) = fT_{n'}(R')g$.

De fato, $\varphi(M_1) = \varphi(\varphi^{-1}(gT_{n'}(R')f) \cap M) \subseteq gT_{n'}(R')f \cap \varphi(M) \subseteq gT_{n'}(R')f$. Por outro lado, se $x \in gT_{n'}(R')f$, então pela sobrejetividade de φ, existe $a + m + b \in T_n(R)$ tal que $\varphi(a + m + b) = \varphi(a) + \varphi(m) + \varphi(b) = x \in gT_{n'}(R')f$ implicando que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$ e $\varphi(m) = x \in gT_{n'}(R')f$, ou seja, $m \in \varphi^{-1}(gT_{n'}(R')f) \cap M = M_1$. Logo $x = \varphi(m) \in \varphi(M_1)$. A outra igualdade é análoga.

Afirmação 3: $M = M_1 + M_2$.

Seja $m \in M$. Como $\varphi(m) \in \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$, existem $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$ tais que $\varphi(m) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$. Tome $m_0 = m - m_1 - m_2$ e observe que $\varphi(m_0) = 0$ e, portanto, $m_0 \in M_1 \cap M_2$ (pois $\ker \varphi \cap M \subseteq M_1 \cap M_2$). Sendo assim, escreva $m = (m_0 + m_1) + m_2$, onde $m_0 + m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$. Agora, como M_1 e M_2 são subconjuntos de M por definição, segue a outra inclusão.

Afirmação 4: M_1 e M_2 são (A, B)-bimódulos.

Como M_1 e M_2 são subgrupos de M (pois são interseções de subgrupos), basta mostrarmos que $AM_1 \subseteq M_1$, $M_1B \subseteq M_1$, $AM_2 \subseteq M_2$ e $M_2B \subseteq M_2$. Para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$ temos que

$$\varphi(am_1) = \varphi(a \circ m_1) = \varphi(a) \circ \varphi(m_1) = \varphi(a)\varphi(m_1), \tag{3.2}$$

$$\varphi(am_2) = \varphi(a \circ m_2) = \varphi(a) \circ \varphi(m_2) = \varphi(m_2)\varphi(a), \tag{3.3}$$

$$\varphi(m_1b) = \varphi(m_1 \circ b) = \varphi(m_1) \circ \varphi(b) = \varphi(m_1)\varphi(b), \tag{3.4}$$

$$\varphi(m_2b) = \varphi(m_2 \circ b) = \varphi(m_2) \circ \varphi(b) = \varphi(b)\varphi(m_2). \tag{3.5}$$

Das igualdades (3.2) e (3.4) segue que $\varphi(am_1), \varphi(m_1b) \in gT_{n'}(R')f$ e com isso $am_1, m_1b \in \varphi^{-1}(gT_{n'}(R')f) \cap M = M_1$. Portanto M_1 é um (A, B)-bimódulo. Analogamente, concluímos de (3.3) e (3.5) que M_2 é um (A, B)-bimódulo.

Note também que de (3.2),

$$\varphi(a_1a_2)\varphi(m_1) = \varphi(a_1a_2m_1) = \varphi(a_1)\varphi(a_2m_1) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(m_1),$$

para todos $a_1, a_2 \in A$ e $m_1 \in M_1$. Logo, para todos $a_1, a_2 \in A$,

$$(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))gT_{n'}(R')f = 0. \tag{3.6}$$

De (3.3), $\varphi(m_2)\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1a_2m_2) = \varphi(a_2m_2)\varphi(a_1) = \varphi(m_2)\varphi(a_2)\varphi(a_1)$, para todos $a_1, a_2 \in A$ e $m_2 \in M_2$. Assim para todos $a_1, a_2 \in A$,

$$fT_{n'}(R')g(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) = 0. \tag{3.7}$$

Analogamente de (3.4) e (3.5) podemos obter para todos $b_1, b_2 \in B$,

$$(\varphi(b_1b_2) - \varphi(b_2)\varphi(b_1))fT_{n'}(R')g = 0, \tag{3.8}$$

$$gT_{n'}(R')f(\varphi(b_1b_2) - \varphi(b_1)\varphi(b_2)) = 0. \tag{3.9}$$

Visto que $e_{n-1,n} \in M$ e $M = M_1 + M_2$, existem $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$ tais que $e_{n-1,n} =$

$m_1 + m_2$. Daí, como M_1 e M_2 são (A, B)-bimódulos, temos que

$$\begin{aligned} e_{n-1,n} &= e_{n-1,n-1}e_{n-1,n}e_{nn} \\ &= e_{n-1,n-1}(m_1 + m_2)e_{nn} \\ &= e_{n-1,n-1}m_1e_{nn} + e_{n-1,n-1}m_2e_{nn} \\ &= \alpha e_{n-1,n} + \beta e_{n-1,n}, \end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta \in R$ com $\alpha e_{n-1,n} \in M_1$ e $\beta e_{n-1,n} \in M_2$. É claro que $\alpha + \beta = 1_R$.

Como M_1 é um A-módulo à esquerda e $\alpha e_{n-1,n} \in M_1$, então

$$\alpha e_{in} = e_{i,n-1}\alpha e_{n-1,n} \in M_1,$$

para $1 \leq i \leq n-1$. Isto implica que $\alpha M \cup M\alpha \subseteq M_1$, pois

$$\alpha m = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha e_{in})(e_{nn}m_{in}) \in M_1$$

e

$$m\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} (m_{in}e_{ii})(e_{in}\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} (m_{in}e_{ii})(\alpha e_{in}) \in M_1,$$

já que M_1 é um (A, B)-bimódulo. Analogamente, temos $\beta M \cup M\beta \subseteq M_2$.

Assim, segue de $\alpha M \subseteq M_1$ que $\varphi(\alpha M) \subseteq gT_{n'}(R')f$ e, como $\varphi(A) = gT_{n'}(R')g$ e $\varphi(M_2) = fT_{n'}(R')g$, temos que, para todo $m_2 \in M_2$

$$\varphi(m_2)\varphi(\alpha 1_A) = \varphi(\alpha 1_A) \circ \varphi(m_2) = \varphi(\alpha m_2) \in gT_{n'}(R')f.$$

Logo $fT_{n'}(R')g\varphi(\alpha 1_A) \subseteq gT_{n'}(R')f$ e, portanto,

$$fT_{n'}(R')g\varphi(\alpha 1_A) = 0. \tag{3.10}$$

Observe também que $\varphi(M\alpha) \subseteq gT_{n'}(R')f$, $\varphi(B) = fT_{n'}(R')f$ e $\varphi(M_2) = fT_{n'}(R')g$. Desta forma, para todo $m_2 \in M_2$,

$$\varphi(\alpha 1_B)\varphi(m_2) = \varphi(\alpha 1_B) \circ \varphi(m_2) = \varphi(m_2\alpha) \in gT_{n'}(R')f.$$

Logo $\varphi(\alpha 1_B)fT_{n'}(R')g \subseteq gT_{n'}(R')f$ e, portanto,

$$\varphi(\alpha 1_B)fT_{n'}(R')g = 0. \tag{3.11}$$

Analogamente, usando que $\beta M \cup M\beta \subseteq M_2$, chegamos em

$$\varphi(\beta 1_A) g T_{n'}(R') f = 0, \tag{3.12}$$
$$g T_{n'}(R') f \varphi(\beta 1_B) = 0. \tag{3.13}$$

Agora, como $\varphi(\alpha 1_A) + \varphi(\beta 1_A) = g,\ \varphi(\alpha 1_B) + \varphi(\beta 1_B) = f$ e temos as equações de (3.10) a (3.13), segue do Lema 3.3 que $gT_{n'}(R')f = 0$ ou $fT_{n'}(R')g = 0$.

Suponhamos que $gT_{n'}(R')f = 0$. Pelo Lema 3.5 e pelas equações (3.7) e (3.8) obtemos

$$\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(b_1b_2) - \varphi(b_2)\varphi(b_1) = 0, \tag{3.14}$$

para todos $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Note que $\varphi(M_1) = gT_{n'}(R')f = 0$, pela Afirmação 2. Assim, para todos $a \in A$, $b \in B$, $m = m_1 + m_2 \in M$, com $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$, segue de (3.3) e (3.5) que

$$\varphi(am) = \varphi(am_2) = \varphi(m_2)\varphi(a) = \varphi(m)\varphi(a), \tag{3.15}$$
$$\varphi(mb) = \varphi(m_2b) = \varphi(b)\varphi(m_2) = \varphi(b)\varphi(m). \tag{3.16}$$

Sejam $x = a + m + b, y = a' + m' + b' \in T_n(R)$. Aplicando as equações (3.14), (3.15) e (3.16) obtemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi((a+m+b)(a'+m'+b')) \\
&= \varphi(aa') + \varphi(am') + \varphi(mb') + \varphi(bb') \\
&= \varphi(a')\varphi(a) + \varphi(m')\varphi(a) + \varphi(b')\varphi(m) + \varphi(b')\varphi(b) \\
&= (\varphi(a') + \varphi(m') + \varphi(b'))(\varphi(a) + \varphi(m) + \varphi(b)) \\
&= \varphi(y)\varphi(x).
\end{aligned}$$

Portanto φ é um anti-homomorfismo.

Suponhamos agora que $fT_{n'}(R')g = 0$, isto é, $\varphi(M_2) = 0$, pela Afirmação 2. De maneira análoga, aplicando o Lema 3.5 juntamente com as equações (3.6) e (3.9), obtemos

$$\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(b_1b_2) - \varphi(b_1)\varphi(b_2) = 0, \tag{3.17}$$

para todos $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. E utilizando (3.2), (3.4) e (3.17) concluímos que φ é um homomorfismo. □

Podemos agora demonstrar o primeiro teorema deste capítulo.

Teorema 3.7. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros e sejam R um anel com unidade e R' um anel com unidade, primo, livre de torção 2. Suponha que $\varphi : T_n(R) \to T_{n'}(R')$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor tal que $\varphi(R1_{T_n(R)}) \neq T_{n'}(R')$. Então φ é um homomorfismo ou um anti-*

homomorfismo.

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado utilizando indução sobre n. Para $n = 2$, se $\varphi(e_{22}) = 1_{T_{n'}(R')}$, então $\varphi(1_A) = 0$, já que $\varphi(1_A) + \varphi(1_B) = 1_{T_{n'}(R')}$. Assim, para todos $a \in A$ e $m \in M$,

$$\varphi(a) = \varphi(1_A a 1_A) = \varphi(1_A)\varphi(a)\varphi(1_A) = 0,$$
$$\varphi(m) = \varphi(1_A \circ m) = \varphi(1_A) \circ \varphi(m) = 0.$$

Logo, $\varphi(A) = \varphi(M) = 0$ e $\varphi(B) = T_{n'}(R')$, pois φ é sobrejetora. Mas $\varphi(R1_{T_2(R)}) = \varphi(R1_B) = \varphi(B) = T_{n'}(R')$, o que é uma contradição. Portanto $\varphi(e_{22}) \neq 1_{T_{n'}(R')}$.

Se $\varphi(e_{22}) = 0$, então $\varphi(1_B) = 0$ e, de modo análogo, obtemos $\varphi(B) = 0 = \varphi(M)$. Assim $\varphi(A) = T_{n'}(R')$, donde $\varphi(R1_{T_2(R)}) = T_{n'}(R')$, o que é uma contradição. Desta forma $\varphi(e_{22}) \neq 0$.

Como $\varphi(e_{22}) \neq 0, 1_{T_{n'}(R')}$, o resultado para $n = 2$ segue do Lema 3.6.

Suponhamos $n > 2$ e que o resultado seja válido para $r < n$. Vamos mostrar que vale para n.

Suponha, inicialmente, que $\varphi(e_{nn}) = 1_{T_{n'}(R')}$. Assim $\varphi(1_A) = 0$ e de forma análoga ao que foi feito anteriormente, temos que $\varphi(B) = T_{n'}(R')$, donde $\varphi(R1_{T_n(R)}) = T_{n'}(R')$, o que é um absurdo. Logo $\varphi(e_{nn}) \neq 1_{T_{n'}(R')}$.

Suponha, agora, que $\varphi(e_{nn}) = 0$, isto é, $\varphi(1_B) = 0$. De modo análago obtemos que $\varphi(B) = 0 = \varphi(M)$. Desta forma, $\varphi(A) = T_{n'}(R')$ e como $T_{n'}(R') \neq \varphi(R1_{T_{n'}(R')}) = \varphi(R1_A)$, segue, pela hipótese de indução, que $\varphi|_A$ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo e, portanto, φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.

Se $\varphi(e_{nn}) \neq 0$, o resultado segue pelo Lema 3.6. $\square$

Corolário 3.8. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros, C um anel comutativo com unidade e R um anel com unidade, primo, livre de torção 2. Suponha que $\varphi : T_n(C) \to T_{n'}(R)$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor. Então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Suponha que $\varphi(C1_{T_n(C)}) = T_{n'}(R)$. Assim, φ induz um homomorfismo de Jordan sobrejetor de C em $T_{n'}(R)$. Como

$$\varphi([[x, y], z]) = [[\varphi(x), \varphi(y)], \varphi(z)],$$

para todos $x, y, z \in C$, segue que

$$[[T_{n'}(R), T_{n'}(R)], T_{n'}(R)] = 0,$$

pois C é comutativo e φ é sobrejetora. Mas isto é um absurdo, já que $[[e_{12}, e_{11}], e_{11}] \neq 0$. Portanto, devemos ter que $\varphi(C1_{T_n(C)}) \neq T_{n'}(R)$ e com isso o resultado segue do

Teorema 3.7. □

Corolário 3.9. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros, S um anel simples com unidade e R um anel primo com unidade livre de torção 2. Suponha que $\varphi : T_n(S) \to T_{n'}(R)$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor. Então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Suponha que $\varphi(S1_{T_n(S)}) = T_{n'}(R)$. Assim φ induz um homomorfismo de Jordan sobrejetor $\varphi' = \varphi \circ i : S \to T_{n'}(R)$ onde $i : S \to S1_{T_n(S)}$ é definida por $i(s) = s1_{T_n(S)}$.

Afirmação: S é livre de torção 2.

Seja $a \in S$ tal que $2a = 0$. Assim $0 = \varphi'(2a) = 2\varphi'(a)$ e, portanto, $\varphi'(a) = 0$. Como S é simples e SaS é um ideal de S, devemos ter que $SaS = S$ ou $SaS = \{0\}$.

Se $a \neq 0$, então $1_S a 1_S \neq 0$ e assim $SaS = S$. Logo

$$T_{n'}(R) = \varphi'(S) = \varphi'(SaS) = T_{n'}(R)\varphi'(a)T_{n'}(R) = \{0\},$$

o que é um absurdo. Portanto $a = 0$, mostrando que S é livre de torção 2.

Denote por K o núcleo de φ' e lembre-se que K é um ideal de Jordan de S.

Se $K = \{0\}$, então φ' é um isomorfismo de Jordan e como S é simples com unidade livre de torção 2, segue da Proposição 2.16 que $T_{n'}(R)$ é simples, o que é um absurdo, pois $n' \geq 2$.

Agora, se $K \neq \{0\}$, então K contém um ideal não nulo de S, pela Proposição 2.15. Como S é simples, K contém S. Logo $K = S$, implicando que $\varphi' = 0$, o que é uma contradição, pois $\varphi'(S) = T_{n'}(R)$.

Note que, em ambos os casos, ($K = \{0\}$ e $K \neq \{0\}$) chegamos a uma contradição. Isso se deve ao fato de termos suposto inicialmente $\varphi(S1_{T_n(S)}) = T_{n'}(R)$. Desta forma, $\varphi(S1_{T_n(S)}) \neq T_{n'}(R)$ e o resultado segue pelo Teorema 3.7. □

Provaremos agora um resultado semelhante ao teorema anterior para o caso em que R tem apenas os idempotentes triviais.

Teorema 3.10. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros e seja R um anel com unidade livre de torção 2 e cujos únicos idempotentes são 0 e 1_R. Suponha que $\varphi : T_n(R) \to T_{n'}(R)$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor tal que $\varphi(R1_{T_n(R)}) \neq T_{n'}(R)$. Então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Pela sobrejetividade de φ temos $\varphi(1_{T_n(R)}) = 1_{T_{n'}(R)}$, assim $\varphi(e_{ii}) \neq 0$ para algum i com $1 \leq i \leq n$. Escolha i_0 tal que $\varphi(e_{i_0 i_0}) \neq 0$ e de modo que, se $i_0 \neq 1$, então $\varphi(e_{ii}) = 0$ para todo $i < i_0$. Desta forma,

$$\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ii} \circ e_{ij}) = \varphi(e_{ii}) \circ \varphi(e_{ij}) = 0,$$

para todo $i < j$ com $i < i_0$.

Suponha que $i_0 = n$. Então $\varphi(e_{nn}) = \varphi(1_{T_n(R)}) = 1_{T_{n'}(R)}$ e

$$\begin{aligned} 2\varphi(ae_{nn}) &= \varphi(a1_{T_n(R)}e_{nn} + e_{nn}a1_{T_n(R)}) \\ &= \varphi((a1_{T_n(R)}) \circ e_{nn}) \\ &= \varphi(a1_{T_n(R)}) \circ \varphi(e_{nn}) \\ &= \varphi(a1_{T_n(R)}) \circ 1_{T_{n'}(R)} \\ &= 2\varphi(a1_{T_n(R)}), \end{aligned}$$

para todo $a \in R$. Logo $\varphi(R1_{T_n(R)}) = \varphi(Re_{nn})$. Agora vamos mostrar que $\varphi(Re_{nn}) = T_{n'}(R)$ e para isso, basta verificarmos que $\varphi(Re_{nn}) \supseteq T_{n'}(R)$. Seja $y \in T_{n'}(R)$ e seja $x = (x_{ij}) \in T_n(R)$ tal que $\varphi(x) = y$. Note que

$$2\varphi(x_{ij}e_{ij}) = \varphi((x_{ij}1_{T_n(R)}) \circ e_{ij}) = \varphi(x_{ij}1_{T_n(R)}) \circ \varphi(e_{ij}) = 0,$$

para todo $i < n = i_0$. Logo $y = \varphi(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \varphi(x_{ij}e_{ij}) = \varphi(x_{nn}e_{nn})$ implicando que $\varphi(Re_{nn}) \supseteq T_{n'}(R)$. Daí $\varphi(Re_{nn}) = T_{n'}(R)$ e, portanto, $\varphi(R1_{T_n(R)}) = \varphi(Re_{nn}) = T_{n'}(R)$, o que é uma contradição. Deste modo $i_0 \neq n$.

Se $n = 2$, então $\varphi(e_{11}) \neq 0$. Se $n > 2$, escreva $A = T_{i_0-1}(R)$, $M = M_{(i_0-1)\times(n-i_0+1)}(R)$ e $B = T_{n-i_0+1}(R)$. Deste modo $T_n(R)$ pode ser visto como um anel triangular

$$\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Note que $\varphi(1_A) = 0$ e com isso temos que $\varphi(A) = 0$ e $\varphi(M) = 0$, pois $\varphi(a) = \varphi(1_A a 1_A) = \varphi(1_A)\varphi(a)\varphi(1_A) = 0$ e $\varphi(m) = \varphi(1_A \circ m) = \varphi(1_A) \circ \varphi(m) = 0$. Assim, φ induz um homomorfismo de Jordan sobrejetor $\varphi_{i_0} : B \to T_{n'}(R)$, onde $n - (i_0 - 1) = n - i_0 + 1 \geq 2$, visto que $i_0 \leq n - 1$. Observe também que, se φ_{i_0} for um homomorfismo ou um anti-homomorfismo, φ também será um homomorfismo ou um anti-homomorfismo. Desta forma, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $i_0 = 1$, isto é, $\varphi(e_{11}) \neq 0$.

Como e_{11} é um idempotente, então $\varphi(e_{11})$ também é. Vamos mostrar que $\varphi(e_{11}) \neq 1_{T_{n'}(R)}$. Suponha que $\varphi(e_{11}) = 1_{T_{n'}(R)}$. Assim, para todo $x = (x_{ij}) \in T_n(R)$, temos que

$$\varphi(e_{11}xe_{11}) = \varphi(e_{11})\varphi(x)\varphi(e_{11}) = \varphi(x)$$

e também

$$\begin{aligned} 2\varphi(e_{11}xe_{11}) &= 2\varphi(x_{11}e_{11}) \\ &= \varphi(x_{11}1_{T_n(R)}e_{11} + e_{11}x_{11}1_{T_n(R)}) \\ &= \varphi(x_{11}1_{T_n(R)}) \circ \varphi(e_{11}) \\ &= 2\varphi(x_{11}1_{T_n(R)}). \end{aligned}$$

Logo $\varphi(R1_{T_n(R)}) = T_{n'}(R)$, já que φ é sobrejetora, mas isso contradiz a hipótese. Portanto $\varphi(e_{11}) \neq 1_{T_{n'}(R)}$ e, desta forma, $\varphi(e_{11})$ é um idempotente não trivial de $T_{n'}(R)$.

Escreva $A = R,\ M = R^{n-1}$ e $B = T_{n-1}(R)$. Considere $g = e_{11}$ e $f = \sum_{i=2}^{n} e_{ii}$, as unidades de A e B, respectivamente. Tome $g' = \varphi(g)$ e $f' = \varphi(f)$ e observe que tais elementos são idempotentes não triviais de $T_{n'}(R)$ (uma vez que g e f são idempotentes não triviais de $T_n(R)$) e $g' + f' = 1_{T_{n'}(R)}$. Assim,

$$T_{n'}(R) = g'T_{n'}(R)g' + g'T_{n'}(R)f' + f'T_{n'}(R)g' + f'T_{n'}(R)f'.$$

Considere $M_1 = \varphi^{-1}(g'T_{n'}(R)f') \cap M$ e $M_2 = \varphi^{-1}(f'T_{n'}(R)g') \cap M$. Analogamente ao que foi feito na demonstração do Lema 3.6, temos aqui também as seguintes afirmações:

Afirmação 1: $\varphi(A) = g'T_{n'}(R)g'$, $\varphi(B) = f'T_{n'}(R)f'$ e $\varphi(M) = g'T_{n'}(R)f' + f'T_{n'}(R)g'$.

Afirmação 2: $\varphi(M_1) = g'T_{n'}(R)f'$ e $\varphi(M_2) = f'T_{n'}(R)g'$.

Afirmação 3: $M = M_1 + M_2$.

Afirmação 4: M_1 e M_2 são (A, B)-bimódulos.

Na demontração da Afirmação 4, chega-se nas seguintes equações:

$$\varphi(am_1) = \varphi(a \circ m_1) = \varphi(a) \circ \varphi(m_1) = \varphi(a)\varphi(m_1), \tag{3.18}$$
$$\varphi(am_2) = \varphi(a \circ m_2) = \varphi(a) \circ \varphi(m_2) = \varphi(m_2)\varphi(a), \tag{3.19}$$
$$\varphi(m_1b) = \varphi(m_1 \circ b) = \varphi(m_1) \circ \varphi(b) = \varphi(m_1)\varphi(b), \tag{3.20}$$
$$\varphi(m_2b) = \varphi(m_2 \circ b) = \varphi(m_2) \circ \varphi(b) = \varphi(b)\varphi(m_2). \tag{3.21}$$

E destas equações, ainda observando o Lema 3.6, obtemos

$$(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))g'T_{n'}(R)f' = 0, \tag{3.22}$$
$$f'T_{n'}(R)g'(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) = 0, \tag{3.23}$$
$$(\varphi(b_1b_2) - \varphi(b_2)\varphi(b_1))f'T_{n'}(R)g' = 0, \tag{3.24}$$
$$g'T_{n'}(R)f'(\varphi(b_1b_2) - \varphi(b_1)\varphi(b_2)) = 0, \tag{3.25}$$

para todos $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$.

Agora, como $M = M_1 + M_2$ segue que $e_{12} = u + v$, onde $u \in M_1$ e $v \in M_2$. Deste modo, pelo fato de M_1 e M_2 serem (A, B)-bimódulos, temos que

$$e_{12} = e_{11}e_{12}e_{22} = e_{11}(u+v)e_{22} = e_{11}ue_{22} + e_{11}ve_{22},$$

com $e_{11}ue_{22} \in M_1$ e $e_{11}ve_{22} \in M_2$. Logo $e_{11}ue_{22} = \alpha e_{12}$ e $e_{11}ve_{22} = \beta e_{12}$, onde $\alpha, \beta \in R$ e $\alpha + \beta = 1_R$. Com isso, segue que

$$\alpha e_{1i} = e_{11}(\alpha e_{12})e_{2i} \in M_1,$$

para $i = 1, \ldots, n$, implicando que $\alpha M \cup M\alpha \subseteq M_1$, pois, para todo $m \in M$,

$$\begin{aligned} \alpha m &= \alpha \sum_{i=2}^{n} e_{1i}m_{1i} = \sum_{i=2}^{n} (\alpha e_{1i})(e_{ii}m_{1i}) \in M_1, \\ m\alpha &= \left(\sum_{i=2}^{n} m_{1i}e_{1i} \right) \alpha = \sum_{i=2}^{n} (m_{1i}e_{11})(\alpha e_{1i}) \in M_1. \end{aligned}$$

Analogamente, chega-se que $\beta M \cup M\beta \subseteq M_2$.

Segue de $\alpha M \subseteq M_1$ que $\varphi(\alpha M) \subseteq g'T_{n'}(R)f'$ e, como $\varphi(A) = g'T_{n'}(R)g'$ e $\varphi(M_2) = f'T_{n'}(R)g'$, temos que

$$\varphi(m_2)\varphi(\alpha g) = \varphi(\alpha g) \circ \varphi(m_2) = \varphi(\alpha m_2) \in g'T_{n'}(R)f',$$

para todo $m_2 \in M_2$, isto é, $f'T_{n'}(R)g'\varphi(\alpha g) \subseteq g'T_{n'}(R)f'$. Logo

$$f'T_{n'}(R)g'\varphi(\alpha g) = 0. \tag{3.26}$$

Observe também que $\varphi(M\alpha) \subseteq g'T_{n'}(R)f'$, $\varphi(B) = f'T_{n'}(R)f'$ e $\varphi(M_2) = f'T_{n'}(R)g'$. Desta forma

$$\varphi(\alpha f)\varphi(m_2) = \varphi(\alpha f) \circ \varphi(m_2) = \varphi(m_2\alpha) \in g'T_{n'}(R)f',$$

para todo $m_2 \in M_2$, ou seja, $\varphi(\alpha f)f'T_{n'}(R)g' \subseteq g'T_{n'}(R)f'$ e, portanto,

$$\varphi(\alpha f)f'T_{n'}(R)g' = 0. \tag{3.27}$$

Analogamente, usando que $\beta M \cup M\beta \subseteq M_2$, chegamos a

$$\varphi(\beta g)g'T_{n'}(R)f' = 0, \tag{3.28}$$

$$g'T_{n'}(R)f'\varphi(\beta f) = 0. \tag{3.29}$$

Escreva

$$g' = \sum_{1\leq i\leq j\leq n'} a_{ij}e_{ij},$$

onde $a_{ij} \in R$. Como g' é um idempotente em $T_{n'}(R)$, segue facilmente que a_{ii} é um idempotente em R, para todo $i = 1, \ldots, n'$. Logo $a_{ii} = 0$ ou $a_{ii} = 1$, pois R não contém idempotentes não triviais. Do fato que $g' + f' = 1_{T_{n'}(R)}$ temos que

$$f' = \sum_{i=1}^{n'} (1 - a_{ii})e_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq n'} a_{ij}e_{ij}.$$

Vamos mostrar que se $a_{11} = 0$, então φ é um anti-homomorfismo e se $a_{11} = 1$, então φ é um homomorfismo.

Suponha inicialmente que $a_{11} = 0$. Então $1 - a_{11} = 1$ e de (3.26) obtemos que $f'e_{1i}g'\varphi(\alpha g) = 0$. Como $\varphi(\alpha g) \in g'T_{n'}(R)g'$, segue que $f'e_{1i}\varphi(\alpha g) = 0$. Logo, multiplicando à esquerda por e_{11}, temos que

$$0 = e_{11}f'e_{1i}\varphi(\alpha g) = \left(e_{11} - \sum_{1<j\leq n'} a_{1j}e_{1j}\right) e_{1i}\varphi(\alpha g) = e_{1i}\varphi(\alpha g),$$

para $i = 1, \ldots, n'$. Isto implica que $\varphi(\alpha g) = 0$ e, consequentemente, de (3.28) obtemos

$$0 = \varphi(\beta g)g'T_{n'}(R)f' = (\varphi(g) - \varphi(\alpha g))g'T_{n'}(R)f' = g'T_{n'}(R)f' = \varphi(M_1).$$

Afirmação: $a_{n'n'} = 1$.

Se $a_{n'n'} = 0$, então $1 - a_{n'n'} = 1$. Como $g'T_{n'}(R)f' = 0$, temos que $g'e_{jn'}f' = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
0 &= g'e_{jn'}f'e_{n'n'} \\
&= g'e_{jn'}\left(\sum_{i=1}^{n'}(1 - a_{ii})e_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq n'} a_{ij}e_{ij}\right)e_{n'n'} \\
&= g'e_{jn'}(1 - a_{n'n'})e_{n'n'} - g'e_{jn'}\left(\sum_{1\leq i<n'} a_{in'}e_{in'}\right) \\
&= g'e_{jn'}(1 - a_{n'n'})e_{n'n'} = g'e_{jn'}e_{n'n'} = g'e_{jn'}
\end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, n'$, implicando que $g' = 0$, o que é uma contradição. Portanto $a_{n'n'} = 1$.

Da equação (3.23) temos que $f'e_{1k}g'(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) = 0$, para todo $k =$

$1, \ldots, n'$ e quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Assim

$$\begin{aligned}
0 &= e_{11}f'e_{1k}(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) \\
&= e_{11}\left(\sum_{i=1}^{n'}(1-a_{ii})e_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq n'} a_{ij}e_{ij}\right)e_{1k}(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) \\
&= e_{11}e_{1k}(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) - \left(\sum_{1<j\leq n'} a_{1j}e_{1j}\right)e_{1k}(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)) \\
&= e_{1k}(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1))
\end{aligned}$$

para todo $k = 1, \ldots, n'$ e quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Logo

$$\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1) = 0, \tag{3.30}$$

para todos $a_1, a_2 \in A$. De forma análoga, concluímos de (3.24) que

$$\varphi(b_1b_2) - \varphi(b_2)\varphi(b_1) = 0, \tag{3.31}$$

para todos $b_1, b_2 \in B$.

Sejam $x = a + m + b, y = a' + b' + m' \in T_n(R)$. Como $\varphi(M_1) = 0$ e $M = M_1 + M_2$, obtemos das equações (3.19), (3.21), (3.30) e (3.31) que

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi((a+m+b)(a'+m'+b')) \\
&= \varphi(aa') + \varphi(am') + \varphi(mb') + \varphi(bb') \\
&= \varphi(a')\varphi(a) + \varphi(m')\varphi(a) + \varphi(b')\varphi(m) + \varphi(b')\varphi(b) \\
&= (\varphi(a') + \varphi(m') + \varphi(b'))(\varphi(a) + \varphi(m) + \varphi(b)) \\
&= \varphi(y)\varphi(x),
\end{aligned}$$

portanto φ é um anti-homomorfismo.

Suponha agora que $a_{11} = 1$. Da equação (3.29), temos que $g'e_{1i}f'\varphi(\beta f) = 0$, e como $\varphi(\beta f) \in f'T_{n'}(R)f'$, então $g'e_{1i}\varphi(\beta f) = 0$. Multiplicando por e_{11} à esquerda, segue que $0 = e_{11}g'e_{1i}\varphi(\beta f) = e_{1i}\varphi(\beta f)$, para todo $i = 1, \ldots, n'$. Logo $\varphi(\beta f) = 0$, e de $\alpha + \beta = 1$ temos $f' = \varphi(f) = \varphi(\alpha f) + \varphi(\beta f) = \varphi(\alpha f)$. Desta forma, da equação (3.27), concluímos que $f'T_{n'}(R)g' = 0$.

Afirmação: $a_{n'n'} = 0$.

Suponha que $a_{n'n'} = 1$. De $f'T_{n'}(R)g' = 0$ segue que $f'e_{in'}g' = 0$ e, portanto, $f'e_{in'} = 0$, para $i = 1, \ldots, n'$. Logo $f' = 0$, o que é uma contradição. Desta forma $a_{n'n'} = 0$ e $1 - a_{n'n'} = 1$.

Agora, da equação (3.22) temos que $(\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))g'e_{jn'}f' = 0$ para todo

$j = 1, \ldots, n'$ e quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Como $\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2) \in g'T_{n'}(R)g'$, então

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))e_{jn'}f'e_{n'n'} \\
&= (\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))e_{jn'}\left(\sum_{i=1}^{n'}(1 - a_{ii})e_{ii} - \sum_{1\le i<j\le n'} a_{ij}e_{ij}\right)e_{n'n'} \\
&= (\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))e_{jn'}\left(e_{n'n'} - \sum_{1\le i<n'} a_{in'}e_{in'}\right) \\
&= (\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2))e_{jn'},
\end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, n'$ e quaisquer $a_1, a_2 \in A$, implicando que

$$\varphi(a_1a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2) = 0, \tag{3.32}$$

para todos $a_1, a_2 \in A$. De maneira análoga concluímos de (3.25) que

$$\varphi(b_1b_2) - \varphi(b_1)\varphi(b_2) = 0, \tag{3.33}$$

para todos $b_1, b_2 \in B$. Do fato que $\varphi(M_2) = f'T_{n'}(R)g' = 0$, $M = M_1 + M_2$ e das equações (3.18), (3.20), (3.32) e (3.33), temos para todos $x = a + m + b, y = a' + b' + m' \in T_n(R)$ que

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi((a + m + b)(a' + m' + b')) \\
&= \varphi(aa') + \varphi(am') + \varphi(mb') + \varphi(bb') \\
&= \varphi(a)\varphi(a') + \varphi(a)\varphi(m') + \varphi(m)\varphi(b') + \varphi(b)\varphi(b') \\
&= (\varphi(a) + \varphi(m) + \varphi(b))(\varphi(a') + \varphi(m') + \varphi(b')) \\
&= \varphi(x)\varphi(y).
\end{aligned}$$

Portanto φ é um homomorfismo. □

Corolário 3.11. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros e seja R um anel simples com unidade livre de torção 2, cujos únicos idempotentes são 0 e 1_R. Suponha que $\varphi : T_n(R) \to T_{n'}(R)$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor. Então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do Corolário 3.9. □

Corolário 3.12. *Sejam $n, n' \geq 2$ inteiros e seja D um anel com divisão livre de torção 2. Suponha que $\varphi : T_n(D) \to T_{n'}(D)$ seja um homomorfismo de Jordan sobrejetor. Então φ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Segue diretamente do corolário anterior. □

CAPÍTULO 4

HOMOMORFISMOS DE JORDAN DE ÁLGEBRAS DE MATRIZES ESTRUTURAIS

Neste capítulo apresentamos um conceito denominado soma próxima e estudamos homomorfismos de Jordan de uma álgebra de matrizes estruturais em uma álgebra arbitrária. Todos os resultados desse capítulo podem ser encontrados em [5] e [1].

No capítulo anterior estudamos algumas situações em que homomorfismos de Jordan eram homomorfismos ou anti-homomorfismos. Estudaremos neste capítulo homomorfismos de Jordan que não são homomorfismos nem anti-homomorfismos. Comecemos com um exemplo.

Exemplo 4.1. Seja C um anel comutativo com unidade e seja B a subálgebra da álgebra $M_n(C) \times M_n(C)$, $n \geq 2$, consistindo de todos os elementos (a, b), onde a é uma matriz triangular superior e b é uma matriz triangular inferior, com a e b tendo a mesma diagonal. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : T_n(C) &\rightarrow B \\ a &\mapsto (a, a^t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde a^t denota a transposta de a. Mostremos que φ é um homomorfismo de Jordan.

Para todos $a, b \in T_n(C)$, temos facilmente que $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ e

$$\begin{aligned}
\varphi(ab+ba) &= (ab+ba, (ab+ba)^t) \\
&= (ab+ba, b^t a^t + a^t b^t) \\
&= (ab, a^t b^t) + (ba, b^t a^t) \\
&= (a, a^t)(b, b^t) + (b, b^t)(a, a^t) \\
&= \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a).
\end{aligned}$$

Observe que $\varphi(e_{11}e_{12}) \neq \varphi(e_{11})\varphi(e_{12})$ e $\varphi(e_{11}e_{12}) \neq \varphi(e_{12})\varphi(e_{11})$. Logo φ não é um homomorfismo nem um anti-homomorfismo.

Também temos que φ não é uma soma de um homomorfismo com um anti-homomorfismo. De fato, suponha que exista um homomorfismo $\psi : T_n(C) \to B$ e um anti-homomorfismo $\theta : T_n(C) \to B$ tais que $\varphi = \psi + \theta$. Denote por 1 a matriz identidade de $T_n(C)$, assim $1' = (1, 1)$ é a unidade da álgebra B e $\varphi(1) = 1'$.

Tome $g = \psi(1)$ e $f = \theta(1)$. Desta forma, g e f são idempotentes de B com $g + f = 1'$. Logo, para todo $a \in T_n(C)$ temos que

$$\varphi(a) = \varphi(a)1' = (\psi(a) + \theta(a))(g + f) = \psi(a) + \psi(a)f + \theta(a)g + \theta(a),$$

implicando que $\psi(a)f + \theta(a)g = 0$. Agora, multiplicando esta última equação por $g = 1' - f$ à direita, obtemos $\psi(a)f = \theta(a)g = 0$. E, de modo análago, chega-se que $f\psi(a) = g\theta(a) = 0$. Como $f\theta(a) = \theta(1)\theta(a) = \theta(1a) = \theta(a1) = \theta(a)\theta(1) = \theta(a)f$ e $g\psi(a) = \psi(a)g$, segue que g e f comutam com todos os elementos da forma $\psi(a) + \theta(a) = (a, a^t)$. Mas os elementos de B que comutam com todos os elementos (a, a^t), com $a \in T_n(C)$, são da forma $\lambda 1'$, com $\lambda \in C$.

Portanto, existe um idempotente $\varepsilon \in C$ tal que $g = \varepsilon 1'$ e $f = (1 - \varepsilon)1'$. Logo

$$\psi(a) = g\psi(a) = g(\varphi(a) - \theta(a)) = g\varphi(a) = \varepsilon\varphi(a),$$

para todo $a \in T_n(C)$. Em particular, $\varepsilon\varphi(e_{12}) = \psi(e_{12})$ implicando que

$$\varepsilon(e_{12}, e_{21}) = \psi(e_{11}e_{12}) = \psi(e_{11})\psi(e_{12}) = \varepsilon\varphi(e_{11})\varepsilon\varphi(e_{12}) = \varepsilon(e_{12}, 0).$$

Assim $\varepsilon e_{21} = 0$ e, consequentemente, $\varepsilon = 0$. Com isso, segue que $\psi = 0$ e $\varphi = \theta$. Portanto φ é um anti-homomorfismo, o que é uma contradição.

Apesar de φ não ser uma soma de um homomorfismo com um anti-homomorfismo, vamos buscar uma expressão de φ em função de um homomorfismo e um anti-homomorfismo.

Denote por $D_n(C)$ o conjunto das matrizes diagonais $n \times n$ com entradas em C

e por $S_n(C)$ o conjunto das matrizes estritamente triangulares superiores $n \times n$ com entradas em C. Note que $D_n(C)$ é uma subálgebra de $T_n(C)$, $S_n(C)$ é um ideal de $T_n(C)$ e $T_n(C) = D_n(C) \oplus S_n(C)$ como C-módulos, isto é, todo $a \in T_n(C)$ pode ser representado unicamente por $a = d + s$, onde $d \in D_n(C)$ e $s \in S_n(C)$.

Definimos a projeção $\pi : T_n(C) \to D_n(C)$ por $\pi(a) = d$. E, como $D_n(C)$ é uma álgebra comutativa, então π é simultaneamente um homomorfismo e um anti-homomorfismo.

Mostremos que para $\varphi : T_n(C) \to B$ definida em (4.1), podemos definir um homomorfismo $\psi : T_n(C) \to B$ e um anti-homomorfismo $\theta : T_n(C) \to B$ tais que $\psi|_{D_n(C)} = \theta|_{D_n(C)}$,

$$\psi(S_n(C))\theta(S_n(C)) = \theta(S_n(C))\psi(S_n(C)) = \{0\},$$

e $\varphi = \psi + \theta - \alpha$, onde $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$.

Defina $\psi, \theta : T_n(C) \to B$ por $\psi(a) = (a, \pi(a))$ e $\theta(a) = (\pi(a), a^t)$. Como π é um homomorfismo e um anti-homomorfismo, é fácil ver que ψ é um homomorfismo e θ é um anti-homomorfismo.

Para todos $x, y \in S_n(C)$ e $d \in D_n(C)$ temos que

$$\psi(d) = (d, \pi(d)) = (d, d) = (\pi(d), d^t) = \theta(d)$$

e

$$\psi(x)\theta(y) = (x, 0)(0, y^t) = (0, 0) = (0, y^t)(x, 0) = \theta(y)\psi(x).$$

Agora, tome $a = d + x \in T_n(C)$ com $d \in D_n(C)$ e $x \in S_n(C)$. Temos

$$\begin{aligned} \psi(a) + \theta(a) - \alpha(a) &= (d + x, d) + (d, d^t + x^t) - \psi(\pi(a)) \\ &= (2d + x, d + d^t + x^t) - (d, d) \\ &= (d + x, d^t + x^t) \\ &= \varphi(a), \end{aligned}$$

e, portanto, $\varphi = \psi + \theta - \alpha$.

Mostremos agora que existe uma álgebra $\widetilde{B} \supset B$ e uma extensão $\widetilde{\varphi} : T_n(C) \to \widetilde{B}$ de φ tal que $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} + \widetilde{\theta}$, onde $\widetilde{\psi} : T_n(C) \to \widetilde{B}$ é um homomorfismo e $\widetilde{\theta} : T_n(C) \to \widetilde{B}$ é um anti-homomorfismo.

Seja $\widetilde{B}$ a subálgebra de $M_n(C) \times M_n(C)$ constituída de todos os elementos da forma (a, b), onde a é uma matriz triangular superior e b uma matriz triangular inferior. Obviamente, $B \subset \widetilde{B}$. Temos também que $\widetilde{\psi}(a) = (a, 0)$ e $\widetilde{\theta}(a) = (0, a^t)$ definem um homomorfismo e um anti-homomorfismo de $T_n(C)$ em $\widetilde{B}$ tal que $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} + \widetilde{\theta}$.

Este exemplo serve de motivação para introduzirmos o conceito de soma próxima.

4.1 Soma próxima

Seja C um anel comutativo com unidade e seja A uma álgebra sobre C tal que $A = A_0 \oplus A_1$, como C-módulos, onde A_0 é uma subálgebra comutativa de A e A_1 é um ideal de A.

Denote por B uma C-álgebra qualquer e por π a projeção de A sobre A_0, isto é, $\pi(a_0 + a_1) = a_0$, para todo $a = a_0 + a_1 \in A = A_0 \oplus A_1$.

Todos os homomorfismos, anti-homomorfismos e homomorfismos de Jordan, a partir de agora, serão sobre C-álgebras.

Definição 4.2. Sejam $\psi : A \to B$ e $\theta : A \to B$ um homomorfismo e um anti-homomorfismo, respectivamente, tais que $\psi|_{A_0} = \theta|_{A_0}$ e $\psi(A_1)\theta(A_1) = \theta(A_1)\psi(A_1) = \{0\}$. A aplicação

$$\varphi = \psi + \theta - \alpha,$$

onde $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$, é chamada *soma próxima* (com relação a A_0 e A_1) de ψ e θ.

Note que o homomorfismo de Jordan φ do Exemplo 4.1 é uma soma próxima (com relação a $D_n(C)$ e $S_n(C)$) do homomorfismo ψ e do anti-homomorfismo θ.

Observação 4.3. Se φ é uma soma próxima de ψ e θ, então para todo $a = a_0 + a_1 \in A$ temos que $\varphi(a_0) = \psi(a_0) = \theta(a_0) = \alpha(a_0)$ e

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \psi(a) + \theta(a) - \alpha(a) \\ &= \psi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_0) + \theta(a_1) - \psi(a_0) \\ &= \varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_1). \end{aligned}$$

Em particular, a restrição de φ a A_0 é simultaneamente um homomorfismo e um anti-homomorfismo. No caso em que $A_0 = \{0\}$ a soma próxima coincide com a soma usual.

Proposição 4.4. *Se φ é uma soma próxima de um homomorfismo $\psi : A \to B$ e um anti-homomorfismo $\theta : A \to B$, então φ é um homomorfismo de Jordan.*

Demonstração. Suponha que $\varphi = \psi + \theta - \alpha$, onde $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$. Note que

$$(\psi - \alpha)(A)(\theta - \alpha)(A) = (\theta - \alpha)(A)(\psi - \alpha)(A) = \{0\}.$$

De fato, como $\alpha(A) = \psi(A_0) = \theta(A_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} (\psi - \alpha)(A)(\theta - \alpha)(A) &= (\psi(A_0) + \psi(A_1) - \psi(A_0))(\theta(A_0) + \theta(A_1) - \theta(A_0)) \\ &= \psi(A_1)\theta(A_1) = 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga $(\theta-\alpha)(A)(\psi-\alpha)(A)=\{0\}$. Consequentemente, para todos $a,b\in A$, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(a)\circ\varphi(b) &= [(\psi(a)-\alpha(a))+(\theta(a)-\alpha(a))+\alpha(a)][(\psi(b)-\alpha(b))+(\theta(b)-\alpha(b))+\alpha(b)]\\
&+ [(\psi(b)-\alpha(b))+(\theta(b)-\alpha(b))+\alpha(b)][(\psi(a)-\alpha(a))+(\theta(a)-\alpha(a))+\alpha(a)]\\
&= (\psi(a)-\alpha(a))(\psi(b)-\alpha(b))+(\psi(a)-\alpha(a))\alpha(b)+(\theta(a)-\alpha(a))(\theta(b)-\alpha(b))\\
&+ (\theta(a)-\alpha(a))\alpha(b)+\alpha(a)(\psi(b)+\theta(b)-\alpha(b))+(\psi(b)-\alpha(b))(\psi(a)-\alpha(a))\\
&+ (\psi(b)-\alpha(b))\alpha(a)+(\theta(b)-\alpha(b))(\theta(a)-\alpha(a))+(\theta(b)-\alpha(b))\alpha(a)\\
&+ \alpha(b)(\psi(a)+\theta(a)-\alpha(a))\\
&= (\psi(a)-\alpha(a))\psi(b)+(\theta(a)-\alpha(a))\theta(b)+\alpha(a)\psi(b)+\alpha(a)\theta(b)-\alpha(a)\alpha(b)\\
&+ (\psi(b)-\alpha(b))\psi(a)+(\theta(b)-\alpha(b))\theta(a)+\alpha(b)\psi(a)+\alpha(b)\theta(a)-\alpha(b)\alpha(a)\\
&= \psi(a)\psi(b)+\theta(a)\theta(b)-\alpha(a)\alpha(b)+\psi(b)\psi(a)+\theta(b)\theta(a)-\alpha(b)\alpha(a)\\
&= \psi(ab+ba)+\theta(ab+ba)-\alpha(ab+ba)\\
&= \varphi(a\circ b).
\end{aligned}$$

Portanto, φ é um homomorfismo de Jordan. □

Proposição 4.5. *Suponha que $\pi(I)\subseteq I$ para todo ideal I de A. Se $\gamma:A\to B$ é um homomorfismo ou um anti-homomorfismo, então $\gamma(A)=\gamma(A_0)\oplus\gamma(A_1)$ é uma soma direta de C-módulos da subálgebra $\gamma(A_0)$ e do ideal $\gamma(A_1)$ de $\gamma(A)$.*

Demonstração. Como γ é C-linear, basta mostrar que $\gamma(A_0)\cap\gamma(A_1)=\{0\}$. Sejam $a_0\in A_0$ e $a_1\in A_1$ tais que $\gamma(a_0)=\gamma(a_1)$. Então $a_0-a_1\in\ker\gamma$, mas como $\ker\gamma$ é um ideal de A, segue, por hipótese, que $a_0=\pi(a_0-a_1)\in\ker\gamma$, isto é, $\gamma(a_0)=\gamma(a_1)=0$. □

Proposição 4.6. *Seja $\varphi:A\to B$ uma soma próxima de um homomorfismo ψ e um anti-homomorfismo θ. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

i. *$\pi(I)\subseteq I$ para todo ideal $I\subseteq A$;*

ii. *$\psi(A)\cap\theta(A_1)=\{0\}$ (ou $\psi(A_1)\cap\theta(A)=\{0\}$);*

iii. *A álgebra B é gerada por $\varphi(A)$.*

Então existe uma algebra $\widetilde{B}$ e um homomorfismo injetor $i:B\to\widetilde{B}$ tal que $\widetilde{\varphi}=i\varphi$ é da forma $\widetilde{\varphi}=\widetilde{\psi}+\widetilde{\theta}$, onde $\widetilde{\psi}:A\to\widetilde{B}$ é um homomorfismo e $\widetilde{\theta}:A\to\widetilde{B}$ é um anti-homomorfismo.

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $\varphi(A_0)+\psi(A_1)+\theta(A_1)$ é uma subálgebra de B. Sejam $u=\varphi(a_0)+\psi(a_1)+\theta(b_1), v=\varphi(b_0)+\psi(c_1)+\theta(d_1)\in\varphi(A_0)+\psi(A_1)+\theta(A_1)$ e $\lambda\in C$, onde $a_0,b_0\in A_0$ e $a_1,b_1,c_1,d_1\in A_1$. Note que

$$\begin{aligned}
\lambda u+v &= \lambda(\varphi(a_0)+\psi(a_1)+\theta(b_1))+(\varphi(b_0)+\psi(c_1)+\theta(d_1))\\
&= \varphi(\lambda a_0+b_0)+\psi(\lambda a_1+c_1)+\theta(\lambda b_1+d_1)
\end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda u + v \in \varphi(A_0) + \psi(A_1) + \theta(A_1)$. Agora, $\varphi(A_0)\varphi(A_0) \subseteq \varphi(A_0)$, pois $\varphi(A_0) = \psi(A_0)$ é uma subágebra de $\varphi(A)$. Mais ainda, $\varphi(A_0)\psi(A_1)$, $\psi(A_1)\varphi(A_0)$, $\psi(A_1)\psi(A_1) \subseteq \psi(A_1)$, pois $\varphi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$ e $\psi(A_1)$ é um ideal de $\psi(A)$. Analogamente, $\varphi(A_0)\theta(A_1)$, $\theta(A_1)\varphi(A_0)$, $\theta(A_1)\theta(A_1) \subseteq \theta(A_1)$, pois $\varphi|_{A_0} = \theta|_{A_0}$ e $\theta(A_1)$ é ideal de $\theta(A)$. Assim, como $\psi(A_1)\theta(A_1) = \theta(A_1)\psi(A_1) = 0$, segue que $uv \in \varphi(A_0) + \psi(A_1) + \theta(A_1)$, mostrando que tal conjunto é de fato uma subálgebra de B.

Pela Observação 4.3 vemos que $\varphi(A) \subset \varphi(A_0) + \psi(A_1) + \theta(A_1)$. Desta forma, podemos concluir de (iii) que $B = \varphi(A_0) + \psi(A_1) + \theta(A_1)$. Vamos mostrar que essa soma é direta.

Tome $x \in A_0$ e $y, z \in A_1$, tais que $\varphi(x) + \psi(y) + \theta(z) = 0$. Pela Observação 4.3, $\varphi(x) = \psi(x)$. Logo $\psi(x+y) = -\theta(z)$ e, por (ii), $\psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y) = 0$ e $\theta(z) = 0$. Pela Proposição 4.5, $\psi(x) = \psi(y) = 0$. Assim, $B = \varphi(A_0) \oplus \psi(A_1) \oplus \theta(A_1)$.

Considere $\widetilde{B} = \psi(A) \times \theta(A)$ e defina $i : B \to \widetilde{B}$ por

$$i(\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_1')) = (\varphi(a_0) + \psi(a_1), \varphi(a_0) + \theta(a_1')) = (\psi(a_0 + a_1), \theta(a_0 + a_1')),$$

para todos $a_0 \in A_0$ e $a_1, a_1' \in A_1$. Como mostrado acima, $\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_1') = 0$ implica $\varphi(a_0) = \psi(a_0) = \theta(a_0) = 0$, $\psi(a_1) = 0$ e $\theta(a_1') = 0$, que em particular, mostra que i está bem definida. Além disso, se $\psi(a_0 + a_1) = \theta(a_0 + a_1') = 0$, então, pela Proposição 4.5, segue que $\psi(a_0) = \psi(a_1) = 0$ e $\theta(a_0) = \theta(a_1') = 0$, donde temos que i é injetora. Mostremos que i é um homomorfismo.

Temos que

$$\begin{aligned}
& i((\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_1'))(\varphi(b_0) + \psi(b_1) + \theta(b_1'))) \\
= \; & i(\varphi(a_0b_0) + \psi(a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1) + \theta(b_1'a_0 + b_0a_1' + b_1'a_1')) \\
= \; & (\psi(a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1), \theta(a_0b_0 + b_1'a_0 + b_0a_1' + b_1'a_1')) \\
= \; & (\psi((a_0 + a_1)(b_0 + b_1)), \theta((b_0 + b_1')(a_0 + a_1'))) \\
= \; & (\psi(a_0 + a_1)\psi(b_0 + b_1), \theta(a_0 + a_1')\theta(b_0 + b_1')) \\
= \; & (\psi(a_0 + a_1), \theta(a_0 + a_1'))(\psi(b_0 + b_1), \theta(b_0 + b_1')) \\
= \; & i(\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_1'))i(\varphi(b_0) + \psi(b_1) + \theta(b_1')),
\end{aligned}$$

para todos $a_0, b_0 \in A_0$ e $a_1, a_1', b_1, b_1' \in A_1$. Claramente i é C-linear.

Finalmente, defina $\widetilde{\psi} : A \to \widetilde{B}$ e $\widetilde{\theta} : A \to \widetilde{B}$ por

$$\widetilde{\psi}(a) = (\psi(a), 0) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\theta}(a) = (0, \theta(a)).$$

Claramente $\widetilde{\psi}$ é um homomorfismo e $\widetilde{\theta}$ é um anti-homomorfismo. Observe também que

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(a)+\widetilde{\theta}(a) &= (\psi(\pi(a)+(1-\pi)(a)),\theta(\pi(a)+(1-\pi)(a)))\\ &= i(\varphi\pi(a)+\psi(1-\pi)(a)+\theta(1-\pi)(a))\\ &= i(\varphi(a_0)+\psi(a_1)+\theta(a_1))\\ &= i\varphi(a)=\widetilde{\varphi}(a),\end{aligned}$$

provando a proposição. □

4.2 Álgebra de matrizes estruturais

Definição 4.7. Seja $\{1,2,\ldots,n\}$ um conjunto quase-ordenado pela relação $\preceq$. O conjunto

$$M_n(C,\preceq):=\{A\in M_n(C): a_{ij}=0 \text{ se } i\not\preceq j\}$$

é uma subálgebra de $M_n(C)$, chamada de *álgebra de matrizes estruturais*.

Observação 4.8. No caso particular em que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial, vimos na Proposição 1.71 que é possível renomear os elementos de $\{1,2,\ldots,n\}$ de forma que $i\preceq j$ implique que $i\leq j$ (ordem dos naturais). Após esta renomeação, todo elemento de $M_n(C,\preceq)$ será uma matriz triangular superior. Passaremos então a denotar $M_n(C,\preceq)$ por $T_n(C,\preceq)$. O subconjunto de $T_n(C,\preceq)$ cuja a diagonal é nula denotaremos por $S_n(C,\preceq)$.

Teorema 4.9. *Seja $n\geq 2$ e seja $\preceq$ uma ordem parcial sobre $\{1,2,\ldots,n\}$. Então todo homomorfismo de Jordan $\varphi: T_n(C,\preceq)\to B$ é uma soma próxima, com respeito a $D_n(C)$ e $S_n(C,\preceq)$, de um homomorfismo $\psi: T_n(C,\preceq)\to B$ e um anti-homomorfismo $\theta: T_n(C,\preceq)\to B$.*

Demonstração. Seja $\{e_{ij}: i\preceq j\}$ o conjunto das matrizes unitárias de $T_n(C,\preceq)$, onde e_{ij} é a matriz que tem 1 na posição i,j e zero nas demais. Para cada $i\preceq j$, defina

$$f_{ij}=\varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj}) \quad \text{e} \quad g_{ji}=\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}). \tag{4.2}$$

Uma vez que cada e_{ii} é um idempotente, segue que $\varphi(e_{ii})$ é um idempotente e por (4.2) temos que

$$\varphi(e_{ii})=f_{ii}=g_{ii}. \tag{4.3}$$

Note que $e_{jj}e_{ij}e_{ii}=0$ para $i\prec j$, assim

$$\varphi(e_{ij})=\varphi(e_{ii}e_{ij}e_{jj}+e_{jj}e_{ij}e_{ii})=\varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})+\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii})=f_{ij}+g_{ji}$$

ou seja, para $i\prec j$

$$\varphi(e_{ij})=f_{ij}+g_{ji}. \tag{4.4}$$

Vamos provar que

$$f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}, \qquad \text{se } i \preceq j, k \preceq l \ ; \tag{4.5}$$

$$g_{ji}g_{lk} = \delta_{il}g_{jk}, \qquad \text{se } i \preceq j, k \preceq l \ ; \tag{4.6}$$

$$f_{ij}g_{lk} = 0 = g_{lk}f_{ij}, \quad \text{se } i \prec j, k \prec l. \tag{4.7}$$

Por (4.2) e pela Proposição 2.9, temos para $i \preceq j$ que

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})f_{ij} = f_{ij}\varphi(e_{jj}) \ \text{ e } \ g_{ji} = \varphi(e_{jj})g_{ji} = g_{ji}\varphi(e_{ii})$$

e para $i \prec j$, temos também que

$$f_{ij}\varphi(e_{ii}) = 0 = \varphi(e_{jj})f_{ij} \ \text{ e } \ g_{ji}\varphi(e_{jj}) = 0 = \varphi(e_{ii})g_{ji}.$$

Desta forma, multiplicando a equação (4.4) por $\varphi(e_{ii})$ à esquerda e por $\varphi(e_{jj})$ à direita e depois por $\varphi(e_{ii})$ à direita e por $\varphi(e_{jj})$ à esquerda, deduzimos, para $i \prec j$, que

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj}) \ \text{ e } \ g_{ji} = \varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}). \tag{4.8}$$

Sejam $i \preceq j$ e $k \preceq l$. Vamos considerar dois casos.

Caso (a): $j \neq k$.

Neste caso, segue de (4.8) e da Proposição 2.9 que

$$f_{ij}f_{kl} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{kk})\varphi(e_{kl}) = 0 = \delta_{jk}f_{il}.$$

Caso (b): $j = k$.

Se $i = j = l$, então $f_{ii}f_{ii} = f_{ii}$. Se $i \preceq j \prec l$, então $\varphi(e_{ii})\varphi(e_{ll}) = 0$. Aplicando (4.8), obtemos que

$$f_{ij}f_{jl} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jl})\varphi(e_{ll}) = \varphi(e_{ii}e_{ij}e_{jl} + e_{jl}e_{ij}e_{ii})\varphi(e_{ll}) = \varphi(e_{il})\varphi(e_{ll}) = f_{il}.$$

Se $i \prec j \preceq l$, segue de maneira análoga que $f_{ij}f_{jl} = f_{il}$.

Logo, com esses dois casos, podemos concluir a validade das equações (4.5). As equações (4.6) são provadas de forma análoga.

Para provar (4.7), assuma que $i \prec j$ e $k \prec l$. Vamos considerar dois casos.

Caso (a): $j \neq l$.

Neste caso, temos $f_{ij}g_{lk} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ll})\varphi(e_{kl}) = 0$.

Caso (b): $j = l$.

Se $i = k$, então $f_{ij}g_{ji} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})^2\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}^2)\varphi(e_{ii}) = 0$.

Se $i \neq k$, usando a Proposição 2.9, temos que $\varphi(e_{ii})\varphi(e_{kj}) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} f_{ij}g_{jk} &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{kj}) \\ &= f_{ij}\varphi(e_{kj}) \\ &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{kj}) \\ &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}e_{kj} + e_{kj}e_{ij}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $k \prec l = j$ e $i \prec j$. Portanto $f_{ij}g_{lk} = 0$ em qualquer caso. Analogamente, mostra - se que $g_{lk}f_{ij} = 0$.

Agora, defina $\psi, \theta : T_n(C, \preceq) \to B$ por

$$\psi\left(\sum_{i\preceq j} \lambda_{ij}e_{ij}\right) = \sum_{i\preceq j} \lambda_{ij}f_{ij} \qquad \text{e} \qquad \theta\left(\sum_{i\preceq j} \lambda_{ij}e_{ij}\right) = \sum_{i\preceq j} \lambda_{ij}g_{ji}.$$

Claramente, ψ e θ são aplicações C-lineares. Agora, para todos $e_{ij}, e_{kl} \in T_n(C, \preceq)$, temos que

$$\psi(e_{ij}e_{kl}) = \psi(\delta_{jk}e_{il}) = \delta_{jk}f_{il} = f_{ij}f_{kl} = \psi(e_{ij})\psi(e_{kl})$$

e

$$\theta(e_{ij}e_{kl}) = \theta(\delta_{jk}e_{il}) = \delta_{jk}g_{li} = \delta_{kj}g_{li} = g_{lk}g_{ji} = \theta(e_{kl})\theta(e_{ij}).$$

Portanto ψ é um homomorfismo de C-álgebras e θ é um anti-homomorfismo de C-álgebras, pois o conjunto $\{e_{ij} : i \preceq j\}$ é uma base de $T_n(C, \preceq)$.

De (4.3), vemos que $\psi\pi = \theta\pi$, onde π é a projeção sobre $D_n(C)$. De (4.7), temos que $\psi(S_n(C))\theta(S_n(C)) = \theta(S_n(C))\psi(S_n(C)) = \{0\}$. E, finalmente, utilizando (4.3) e (4.4), concluímos que $\varphi = \psi + \theta - \alpha$, onde $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$, mostrando que φ é uma soma próxima de ψ e θ. □

Exemplo 4.10. Note que se $\varphi : A = A_0 \oplus A_1 \to B$ é soma (usual) de um homomorfismo f e um anti-homomorfismo g tal que $g(A_1)f(A_1) = f(A_1)g(A_1) = \{0\}$, então φ é uma soma próxima do homomorfismo $\psi = f + g\pi$ e do anti-homomorfismo $\theta = g + f\pi$. Com efeito, $\psi + \theta - \alpha = (f + g\pi) + (g + f\pi) - (f + g\pi)\pi = f + g\pi + g + f\pi - f\pi - g\pi = f + g = \varphi$. Aqui também está incluso o caso quando f ou g é a função nula.

Teorema 4.11. *Seja $\preceq$ uma ordem parcial sobre $\{1, \ldots, n\}$ e seja $\varphi : T_n(C, \preceq) \to B$, $n \geq 2$, um homomorfismo de Jordan tal que a álgebra B é gerada por $\varphi(T_n(C, \preceq))$. Então existe uma álgebra $\widetilde{B}$ e um homomorfismo injetor $i : B \to \widetilde{B}$ tal que $\widetilde{\varphi} = i\varphi$ é da forma $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} + \widetilde{\theta}$, onde $\widetilde{\psi} : T_n(C, \preceq) \to \widetilde{B}$ é um homomorfismo e $\widetilde{\theta} : T_n(C, \preceq) \to \widetilde{B}$ é um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Em vista do Teorema 4.9, nós precisamos apenas mostrar que as condições (i), (ii) e (iii) da Proposição 4.6 são cumpridas. Observe que

$$\pi(a) = e_{11}ae_{11} + e_{22}ae_{22} + \cdots + e_{nn}ae_{nn},$$

para todo $a \in T_n(C, \preceq)$. Desta forma, se I é um ideal de $T_n(C, \preceq)$, segue que $\pi(I) \subseteq I$. Logo (i) está satisfeita.

Suponha agora que

$$\sum_{i \preceq j} \lambda_{ij} f_{ij} = \sum_{k \prec l} \alpha_{kl} g_{lk},$$

onde $\lambda_{ij}, \alpha_{kl} \in C$. Multiplicando esta equação por f_{rr} à esquerda e por f_{ss} à direita (com $r \preceq s$), e aplicando as equações (4.3), (4.5), (4.6) e (4.7) obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \preceq j} \lambda_{ij} f_{rr} f_{ij} f_{ss} &= \sum_{k \prec l} \alpha_{kl} g_{rr} g_{lk} g_{ss} \\
\sum_{i \preceq j} \lambda_{ij} \delta_{ri} f_{rj} f_{ss} &= \sum_{k \prec l} \alpha_{kl} \delta_{rl} g_{rk} g_{ss} \\
\sum_{r \preceq j} \lambda_{rj} f_{rj} f_{ss} &= \sum_{k \prec r} \alpha_{kr} g_{rk} g_{ss} \\
\sum_{r \preceq j} \lambda_{rj} \delta_{js} f_{rs} &= \sum_{k \prec r} \alpha_{kr} \delta_{ks} g_{rs} \\
\lambda_{rs} f_{rs} &= 0,
\end{aligned}$$

pois $k \prec r \preceq s$ e assim $k \neq s$. Portanto $\lambda_{rs} f_{rs} = 0$, o que mostra a condição (ii).

Como a condição (iii) é dada na hipótese, segue o resultado. □

Teorema 4.12. *Seja $\preceq$ uma quase-ordem sobre $\{1, \ldots, n\}$ tal que, para cada i, existe $j \neq i$ tal que $i \preceq j$ e $j \preceq i$. Se $\varphi : M_n(C, \preceq) \to B$ é um homomorfismo de Jordan, então φ é a soma de um homomorfismo e um anti-homomorfismo.*

Demonstração. Seja $\{e_{ij} : i \preceq j\}$ o conjunto das matrizes unitárias de $M_n(C, \preceq)$. Para cada $i \prec j$, defina

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj}) \quad \text{e} \quad g_{ji} = \varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}). \tag{4.9}$$

Observe que se $j \npreceq i$, então g_{ij} e f_{ji} não estão definidos, pois e_{ji} não pertece a $M_n(C, \preceq)$.

Note que $e_{jj}e_{ij}e_{ii} = 0$ para $i \neq j$, assim

$$\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ii}e_{ij}e_{jj} + e_{jj}e_{ij}e_{ii}) = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj}) + \varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}) = f_{ij} + g_{ji},$$

ou seja, se $i \neq j$

$$\varphi(e_{ij}) = f_{ij} + g_{ji}. \tag{4.10}$$

Como $\varphi(e_{ii})$ é um idempotente, por (4.9) e pela Proposição 2.9, vemos para $i \neq j$ que

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})f_{ij} = f_{ij}\varphi(e_{jj}) \quad \text{e} \quad g_{ji} = \varphi(e_{jj})g_{ji} = g_{ji}\varphi(e_{ii}).$$

Temos também que

$$f_{ij}\varphi(e_{ii}) = 0 = \varphi(e_{jj})f_{ij} \quad \text{e} \quad g_{ji}\varphi(e_{jj}) = 0 = \varphi(e_{ii})g_{ji},$$

para $i \neq j$. Desta forma, multiplicando a equação (4.10) por $\varphi(e_{ii})$ à esquerda e por $\varphi(e_{jj})$ à direita e depois por $\varphi(e_{ii})$ à direita e por $\varphi(e_{jj})$ à esquerda, deduzimos que

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj}) \quad \text{e} \quad g_{ji} = \varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}), \tag{4.11}$$

para $i \neq j$.

Mostremos, agora, que para todos $i \preceq j$ e $k \preceq l$ temos

$$f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}, \tag{4.12}$$

$$g_{lk}g_{ji} = \delta_{jk}g_{li}, \tag{4.13}$$

$$f_{ij}g_{lk} = 0 = g_{lk}f_{ij}. \tag{4.14}$$

(Observe que os elementos f_{ii} e g_{ii} ainda não foram definidos).

Se $i \neq j$, $k \neq l$ e $j \neq k$, então $\varphi(e_{jj})\varphi(e_{kk}) = 0$, implicando que $f_{ij}f_{kl} = 0$.

Se $i \neq j$, $k \neq l$, $j = k$ e $i \neq l$, então

$$f_{ij}f_{jl} = f_{ij}\varphi(e_{jj})\varphi(e_{jl}) = f_{ij}\varphi(e_{jl}) = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jl}).$$

Mas $e_{ii}e_{jl} = 0 = e_{jl}e_{ii}$, assim $\varphi(e_{ii})\varphi(e_{jl}) = 0$ donde $\varphi(e_{ii})\varphi(e_{jl})\varphi(e_{ij}) = 0$. Logo

$$f_{ij}f_{jl} = \varphi(e_{ii})(\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jl}) + \varphi(e_{jl})\varphi(e_{ij})) = \varphi(e_{ii})(\varphi(e_{ij}e_{jl} + e_{jl}e_{ij})) = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{il}) = f_{il}.$$

Desta forma, para $i \neq j$, $k \neq l$ e $i \neq l$, temos que $f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}$.

Para provar (4.13), inicialmente considere $k \neq l$, $i \neq j$ e $j \neq k$. Assim $g_{lk}g_{ji} = 0$, visto que $\varphi(e_{kk})\varphi(e_{jj}) = 0$.

Para $k \neq l$, $i \neq j$, $j = k$ e $i \neq l$ temos que

$$g_{lj}g_{ji} = g_{lj}\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij}) = g_{lj}\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ll})\varphi(e_{jl})\varphi(e_{ij})$$

e, como $e_{ll}e_{ij} = 0 = e_{ij}e_{ll}$, então $\varphi(e_{ll})\varphi(e_{ij}) = 0$, implicando que $\varphi(e_{ll})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jl}) = 0$. Logo

$$g_{lj}g_{ji} = \varphi(e_{ll})(\varphi(e_{jl})\varphi(e_{ij}) + \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jl})) = \varphi(e_{ll})(\varphi(e_{jl}e_{ij} + e_{ij}e_{jl})) = \varphi(e_{ll})\varphi(e_{il}) = g_{li}.$$

Agora, vamos definir os f_{ii} e g_{ii}. Por hipótese, para cada i, podemos escolher $j \neq i$ tal que $i \preceq j$ e $j \preceq i$. Defina

$$f_{ii} := f_{ij}f_{ji} \quad \text{e} \quad g_{ii} := g_{ij}g_{ji}.$$

Primeiramente, note que f_{ii} e g_{ii} independem da escolha de j, pois se $k \neq i$, $k \neq j$, e $i \preceq k$, $k \preceq i$, então $f_{ik}f_{ki} = f_{ik}f_{kj}f_{ji} = f_{ij}f_{ji} = f_{ii}$. Analogamente, g_{ii} também independe de j.

Os elementos f_{ij} e g_{ij} agora estão definidos para todos $i \preceq j$. Sendo assim, vamos terminar de mostrar (4.12) e (4.13).

Já sabemos que (4.12) é válida para $i \neq j$ e $k \neq l$. Suponhamos que $i = j$ e $k \neq l$.

Se $i \neq k$, tome $t \neq i$ tal que $i \preceq t$ e $t \preceq i$. Então

$$f_{ii}f_{kl} = f_{it}f_{ti}f_{kl} = \delta_{ik}f_{it}f_{tl} = 0.$$

Se $i = k$, consideremos dois casos.

Caso 1: Existe $t \neq i, l$ tal que $i \preceq t$ e $t \preceq i$.

Neste caso,

$$f_{ii}f_{il} = f_{it}f_{ti}f_{il} = f_{it}f_{tl} = f_{il}.$$

Caso 2: O elemento $t \neq i$ tal que $i \preceq t$ e $t \preceq i$ é o próprio l.

Neste caso,

$$\begin{aligned}
f_{ii}f_{il} &= f_{il}f_{li}f_{il} \\
&= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{il})\varphi(e_{li})\varphi(e_{ii})f_{il} \\
&= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{il})\varphi(e_{li})f_{il}, \ \ \text{pois } f_{il} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{il}) \\
&= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{il})\varphi(e_{li})\varphi(e_{il})\varphi(e_{ll}) \\
&= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{il})\varphi(e_{ll}) = f_{il}, \ \ \text{pois } \varphi(e_{il})\varphi(e_{li})\varphi(e_{il}) = \varphi(e_{il}).
\end{aligned}$$

De maneira análoga, prova-se a equação (4.12) para $i \neq j$ e $k = l$.

Agora, se $i = j = k = l$, então $f_{ii}f_{ii} = f_{ij}f_{ji}f_{ii} = f_{ij}f_{ji} = f_{ii}$.

Desta forma, concluímos (4.12) e, analogamente ao que foi feito acima, podemos provar (4.13).

Mostremos que (4.10) também é válida para $i = j$. Tome i e escolha $j \neq i$ tal que $i \preceq j$ e $j \preceq i$. Note que da definição de f_{ii} e g_{ii}, temos que

$$f_{ii} = f_{ij}f_{ji} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ji})\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{ij})f_{ji} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{ji})\varphi(e_{ii}),$$

e

$$g_{ii} = g_{ij}g_{ji} = \varphi(e_{ji})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{ji})g_{ji} = \varphi(e_{ji})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_{ii} + g_{ii} &= [\varphi(e_{ij})\varphi(e_{ji}) + \varphi(e_{ji})\varphi(e_{ij})]\varphi(e_{ii}) \\ &= [\varphi(e_{ij}e_{ji} + e_{ji}e_{ij})]\varphi(e_{ii}) \\ &= [\varphi(e_{ii} + e_{jj})]\varphi(e_{ii}) \\ &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ii}) + \varphi(e_{jj})\varphi(e_{ii}) \\ &= \varphi(e_{ii}), \end{aligned}$$

implicando que (4.10) também é válida para $i = j$.

Para mostrar (4.14) podemos assumir que $i \neq j$ e $k \neq l$, pois $f_{jj}g_{kl} = f_{ji}f_{ij}g_{kl}$ e $f_{ij}g_{kk} = f_{ij}g_{kl}g_{lk}$. Assim, é suficiente mostrar que $f_{ij}g_{kl} = 0$.

Se $j \neq k$, então $f_{ij}g_{kl} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{kk})\varphi(e_{lk}) = 0$, pois $e_{jj}e_{kk} = 0$.

Se $j = k$ e $i \neq l$,

$$\begin{aligned} f_{ij}g_{jl} &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{lj}) \\ &= f_{ij}\varphi(e_{lj}) \\ &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{lj}) \\ &= \varphi(e_{ii})[\varphi(e_{ij})\varphi(e_{lj}) + \varphi(e_{lj})\varphi(e_{ij})] \\ &= \varphi(e_{ii})[\varphi(e_{ij}e_{lj} + e_{lj}e_{ij})] \\ &= \varphi(e_{ii})\varphi(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

E, por fim, se $j = k$ e $i = l$, $f_{ij}g_{ji} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij}e_{jj}e_{ij}) = 0$.

Analogamente, temos que $g_{kl}f_{ij} = 0$.

Queremos agora, decompor φ através de uma soma de um homomorfismo φ_1 e um anti-homomorfismo φ_2. Para isso, tomemos $f = f_{11} + f_{22} + \cdots + f_{nn}$ e $g = g_{11} + g_{22} + \cdots + g_{nn}$. Denote por 1 a unidade de $\varphi(M_n(C, \preceq))$, assim $1 = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_{ii})$ e, como $\varphi(e_{ii}) = f_{ii} + g_{ii}$, segue que $1 = f + g$. Logo $f^2 = f$, $g^2 = g$ e $fg = gf = 0$.

Note que, para $k \neq i, j$

$$f_{kk}\varphi(e_{ij}) = f_{kp}f_{pk}\varphi(e_{ij}) = f_{kp}\varphi(e_{pk})\varphi(e_{kk})\varphi(e_{ij}) = 0,$$
$$\varphi(e_{ij})f_{kk} = \varphi(e_{ij})f_{kp}f_{pk} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{kk})\varphi(e_{kp})f_{pk} = 0,$$

pois $\varphi(e_{kk})\varphi(e_{ij}) = 0 = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{kk})$. Desta forma,

$$f\varphi(e_{ij}) = f_{ii}\varphi(e_{ij}) + f_{jj}\varphi(e_{ij}) = f_{ii}(f_{ij} + g_{ji}) + f_{jj}(f_{ij} + g_{ji}) = f_{ij},$$
$$\varphi(e_{ij})f = \varphi(e_{ij})f_{ii} + \varphi(e_{ij})f_{jj} = (f_{ij} + g_{ji})f_{ii} + (f_{ij} + g_{ji})f_{jj} = f_{ij},$$

ou seja, f comuta com todos $\varphi(e_{ij})$. De modo análogo mostra-se que g também comuta com todos $\varphi(e_{ij})$.

Agora, defina as aplicações $\varphi_1, \varphi_2 : M_n(C, \preceq) \to B$ por

$$\varphi_1(x) = \varphi(x)f \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \varphi(x)g.$$

Claramente φ_1 e φ_2 são homomorfismos de C-módulos. Veja também que se $x = \sum_{i \preceq j} \alpha_{ij} e_{ij}$, então

$$\varphi_1(x) = \sum_{i \preceq j} \alpha_{ij} \varphi(e_{ij}) f = \sum_{i \preceq j} \alpha_{ij} f_{ij},$$
$$\varphi_2(x) = \sum_{i \preceq j} \alpha_{ij} \varphi(e_{ij}) g = \sum_{i \preceq j} \alpha_{ij} g_{ji}.$$

Assim, para todos $i \preceq j$ e $k \preceq l$ temos que

$$\varphi_1(e_{ij}e_{kl}) = \varphi_1(\delta_{jk}e_{il}) = \delta_{jk} f_{il} = f_{ij} f_{kl} = \varphi(e_{ij}) f \varphi(e_{kl}) f = \varphi_1(e_{ij})\varphi_1(e_{kl})$$

e

$$\varphi_2(e_{ij}e_{kl}) = \varphi_2(\delta_{jk}e_{il}) = \delta_{jk} g_{li} = \delta_{kj} g_{li} = g_{lk} g_{ji} = \varphi(e_{kl}) g \varphi(e_{ij}) g = \varphi_2(e_{kl})\varphi_2(e_{ij}).$$

Logo, φ_1 é um homomorfismo e φ_2 é um anti-homomorfismo. E, como $\varphi = \varphi 1 = \varphi f + \varphi g = \varphi_1 + \varphi_2$, concluímos o resultado. □

Observação 4.13. Note que a hipótese de que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existir $j \neq i$ tal que $i \preceq j$ e $j \preceq i$ é necessária no Teorema 4.12, pois sem ela teríamos o primeiro exemplo deste capítulo como contra-exemplo de um homomorfismo de Jordan que não é a soma de um homomorfismo com um anti-homomorfismo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AKKURT, E.; AKKURT, M.; BARKER, G. P., Jordan homomorphisms of the structural matrix algebras. *Linear Multilinear Algebra*. **63**, 2518-2525, 2015.

[2] ANCOCHEA, G., Le théorème de von Staudt en géometrie projective quaternionienne. *Journal für Mathematik*. **184**, 192–198, 1942.

[3] BAXTER, W. E.; MARTINDALE III, W. S., Jordan homomorphisms of semiprime rings. *J. Algebra*. **56**, 457–471, 1979.

[4] BEIDAR, K. I.; BREŠAR, M.; CHEBOTAR, M. A., Jordan isomorphisms of triangular matrix algebras over a connected commutative ring. *Linear Algebra Appl*. **312**, 197–201, 2000.

[5] BENKOVIČ, D., Jordan homomorphisms on triangular matrices. *Linear Multilinear Algebra*. **53**, 345–356, 2005.

[6] BREŠAR, M., Jordan mappings of semiprime rings. *J. Algebra*. **127**, 218–228, 1989.

[7] BREŠAR, M., Jordan mappings of semiprime rings II. *Bull. Aust. Math. Soc*. **44**, 233–238, 1991.

[8] DU, Y.; WANG, Y., Jordan homomorphisms of upper triangular matrix rings over a prime ring. *Linear Algebra Appl*. **458**, 197–206, 2014.

[9] HERSTEIN, I.N., Jordan homomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **81**, 331–351, 1956.

[10] JACOBSON, N.; RICKART, C., Jordan homomorphisms of rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **69**, 479–502, 1950.

[11] MARTINDALE III, W. S., Jordan homomorphisms of the symmetric elements of a ring with involution. *J. Algebra*. **5**, 232–249, 1967.

[12] MARTINDALE III, W. S., Jordan homomorphisms onto nondegenerate Jordan algebras. *J. Algebra*. **123**, 457–477, 1989.

[13] MCCRIMMON, K., The Zelmanov approach to Jordan homomorphisms of associative algebras. *J. Algebra*. **123**, 457–477, 1989.

[14] MOLNÁR, L.; ŠEMRL, P., Some linear preserver problems on upper triangular matrices. *Linear Multilinear Algebra*. **45**, 189–206, 1998.

[15] SMILEY, M. F., Jordan homomorphisms onto prime rings. *Trans. Am. Math. Soc*. **84**, 426–429, 1957.

[16] WANG, Y.; WANG, Y., Jordan homomorphisms of upper triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl.* **439**, 4063–4069, 2013.