

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Álgebras de Incidência Finitárias

SIMONE FRANCISCO RUIZ

Orientadora: Érica Zancanella Fornaroli

Maringá - PR

2013

Álgebras de Incidência Finitárias

Simone Francisco Ruiz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Prof^{fa}. Dr^a. Érica Zancanella Fornari

Maringá - PR

2013

“Só pode saborear bem a vitória
aquele que já sentiu o amargo da derrota.

O avesso é repleto de ensinamentos,
a vida também ...”

(Pe. Fábio de Melo)

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que foi infinitamente misericordioso comigo em todos os momentos que precisei até aqui.

À minha família, que sempre me apoiou em minhas escolhas. Aos meus pais, Antonio e Bernadete, e às minhas irmãs, Ana Claudia, Adriana e Fernanda, obrigada pelas orações e por todos os sacrifícios que fizeram para que eu chegasse até aqui.

À minha orientadora, Professora Érica, obrigada por me orientar com tanto profissionalismo e dedicação e por contribuir grandiosamente para meu aprimoramento intelectual.

Às minhas irmãs de coração, que foram o maior presente que a matemática deixou em minha vida. Juliana, Patricia e Denise, obrigada por me fazerem sorrir quando humanamente não existiam motivos para isso.

Aos professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e principalmente aqueles que me tornaram um ser humano melhor. A todos os colegas que encontrei em minha caminhada na UEM e principalmente aos da pós-graduação. Obrigada por fazerem com que essa caminhada, que tantas vezes se mostrou tão amarga, tivesse um gosto bom de felicidade.

A todos aqueles que torceram por mim e que sempre confiaram em minha força.

Resumo

No presente trabalho descrevemos algumas propriedades básicas da álgebra de incidência finitária $FI(P)$ de um conjunto parcialmente ordenado P sobre um corpo. Dentre elas descrevemos os elementos inversíveis, idempotentes e regulares de $FI(P)$. Também investigamos a relação entre isomorfismos, antiautomorfismos e involuções de $FI(P)$ e os isomorfismos, antiautomorfismos e involuções de P . Além desses aspectos, também examinamos as propriedades Zassenhaus de $FI(P)$, do espaço de incidência $I(P)$ e da idealização $FI(P)(+)I(P)$.

Palavras-Chave: Álgebra de incidência finitária, isomorfismo, antiautomorfismo, involução, propriedades Zassenhaus.

Abstract

In this work we describe some basic properties of the finitary incidence algebra $FI(P)$ of a partially ordered set P over a field. Among them, we describe the invertible elements, idempotents and regular elements of $FI(P)$. We also investigate the relation between the isomorphisms, anti-isomorphisms and involutions of $FI(P)$ and the isomorphisms, anti-isomorphisms and involutions of P . Besides these aspects, we examine the Zassenhaus properties of $FI(P)$, of the incidence space $I(P)$ and of the idealization $FI(P)(+)I(P)$ of $I(P)$.

Keywords: Finitary incidence algebra, isomorphism, anti-isomorphism, involution, Zassenhaus properties.

SUMÁRIO

Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Conjuntos parcialmente ordenados	1
1.2 Anéis e álgebras	8
1.3 Propriedades Zassenhaus de álgebras e módulos	18
2 Álgebra de Incidência Finitária	23
2.1 A álgebra $FI(P)$	23
2.2 Elementos idempotentes e regulares de $FI(P)$	30
2.3 Super-regularidade em $FI(P)$ e o centro de $FI(P)$	34
3 Isomorfismos, Anti-isomorfismos e Involuções	42
3.1 O Problema do Isomorfismo	42
3.2 Antiautomorfismos e involuções em $FI(P)$	46
4 Propriedades Zassenhaus	51
4.1 Propriedades Zassenhaus de $FI(P)$ e $I(P)$	51
4.2 Propriedades Zassenhaus de $FI(P)(+)I(P)$	59
4.3 Propriedades Zassenhaus de $(FI(P)\widehat{+})I(P)^l$ e $(FI(P)\widehat{+})I(P)^r$	67
Referências Bibliográficas	76

INTRODUÇÃO

O estudo das álgebras de incidência surgiu por volta de 1960 com Doubilet, Rota e Stanley em [9]. A princípio tal estudo foi visto somente como uma ferramenta para a compreensão de problemas de combinatória. Somente depois passou também a ser um objeto de estudo dos algebristas. As álgebras de incidência são definidas sobre um conjunto parcialmente ordenado e localmente finito. Em 2009, Khripchenko e Novikov [5], definiram as álgebras de incidência finitárias, que são uma generalização das álgebras de incidência, uma vez que elas são definidas sobre um conjunto parcialmente ordenado qualquer, não necessariamente localmente finito. Nesse trabalho, Khripchenko e Novikov descreveram algumas propriedades das álgebras de incidência finitárias e também obtiveram uma resposta positiva para o problema do isomorfismo para tais álgebras.

Buckner e Dugas em [2], voltaram suas atenções para as álgebras de incidência de um conjunto parcialmente ordenado finito investigando as propriedades Zassenhaus dessas álgebras. O estudo das propriedades Zassenhaus de um anel surgiu por meio de um resultado publicado em [4] por Hans Zassenhaus em 1967. A partir daí, outros pesquisadores se dedicaram a generalizar o que Hans Zassenhaus havia publicado em [4], levando ao surgimento das propriedades Zassenhaus para anéis e ideais e, conseqüentemente, para álgebras e módulos. Em 2010, Dugas [3] estudou as propriedades Zassenhaus para a idealização de um módulo. Posteriormente, em [7], Dugas analisou as propriedades Zassenhaus para a álgebra de incidência finitária $FI(P)$ de um poset qualquer P sobre um corpo K , verificando que, tanto $FI(P)$ quanto o espaço de incidência $I(P)$ satisfazem todas as propriedades Zassenhaus, mas que o mesmo nem sempre acontece para a idealização $FI(P)(+)I(P)$ de $I(P)$.

A seguir, faremos um resumo dos capítulos que compõem esta dissertação.

O Capítulo 1 é dividido em três seções. Na primeira seção descrevemos os conjuntos

parcialmente ordenados, apresentando conceitos, notações e resultados que serão necessários para o estudo das álgebras de incidência finitárias. A segunda seção contém basicamente conceitos e resultados de Teoria de Anéis. Finalmente, na Seção 3 apresentamos as propriedades Zassenhaus que uma álgebra e um módulo podem satisfazer e alguns resultados que mostram como essas propriedades são preservadas via isomorfismo e anti-isomorfismo.

No Capítulo 2 definimos a álgebra de incidência finitária de um conjunto parcialmente ordenado sobre um corpo e descrevemos seus elementos inversíveis, idempotentes, regulares, entre outros. Também descrevemos nesse capítulo o centro da álgebra em questão.

No Capítulo 3 apresentamos o Problema do Isomorfismo para álgebras de incidência finitárias e investigamos a existência de antiautomorfismos e involuções dessas álgebras.

Por fim, no Capítulo 4, investigamos as propriedades Zassenhaus de $FI(P)$, $I(P)$ e da idealização $FI(P)(+)I(P)$ de $I(P)$.

Preliminares

Este capítulo é destinado a fornecer alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Iniciamos o capítulo definindo conjunto parcialmente ordenado e algumas de suas propriedades. Na seção seguinte nos atentamos em especificar alguns conceitos da Teoria de Anéis que assumiremos durante o texto, bem como alguns resultados desse assunto que serão aqui utilizados. Por fim, na última seção definimos as propriedades Zassenhaus de álgebras e módulos, apresentando também alguns resultados que faremos uso no último capítulo desta dissertação.

1.1 Conjuntos parcialmente ordenados

Nesta seção, introduzimos o conceito de conjunto parcialmente ordenado e apresentamos alguns resultados básicos que serão úteis para definirmos as álgebras de incidência finitárias. Para tanto, utilizaremos o livro [10].

Definição 1.1.1. Um *conjunto parcialmente ordenado* (poset) é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial.

Recordemos que uma relação \sim em um conjunto P é uma *relação de ordem parcial* se a mesma é reflexiva, antissimétrica e transitiva, ou seja:

- (i) $x \sim x$, para todo $x \in P$;
- (ii) se $x \sim y$ e $y \sim x$ então $x = y$;
- (iii) se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$.

Denotaremos a relação de ordem parcial de um poset P por \leq . Os elementos de um poset P serão chamados de *pontos* e ainda, dizemos que $p, q \in P$ são *comparáveis* se $p \leq q$ ou $q \leq p$. Escreve-se $p < q$ se $p \leq q$ e $p \neq q$. Um poset P será chamado de *finito* (*infinito*) se o conjunto P for finito (infinito).

Exemplo 1.1.2. O conjunto dos números naturais \mathbb{N} , os inteiros \mathbb{Z} , os racionais \mathbb{Q} e os reais \mathbb{R} com suas ordens usuais são posets.

Exemplo 1.1.3. Um conjunto formado por conjuntos, com a ordem \subseteq (inclusão) é um poset. Um exemplo simples deste caso pode ser visto quando tomamos um conjunto X e $P = P(X)$ como sendo o conjunto das partes de X .

Exemplo 1.1.4. Os números naturais podem também ser ordenados da seguinte forma: para $p, q \in \mathbb{N}$ dizemos que $p \sqsubseteq q$ se p divide q . Entende-se que p divide q , se existe um número natural c de modo que $q = cp$. Sob esta definição, 1 divide todos os números naturais e todos naturais (incluindo o 0) dividem 0. Logo $1 \sqsubseteq a$ e $a \sqsubseteq 0$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Podemos ver que $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ também é um poset.

Exemplo 1.1.5. Dado um poset (P, \leq) , constrói-se o *poset dual*, denotado por \tilde{P} , formado pelos mesmos elementos de P , com a ordem \preceq dada por $x \preceq y$ se $y \leq x$.

Exemplo 1.1.6. Consideremos a ordem em \mathbb{N}^n , para algum natural n fixado, dada como $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$ se $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ ou existe um $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i = y_i$ para $i < k$ e $x_k < y_k$. Então \mathbb{N}^n munido desta ordem é um poset. Tal ordem é chamada de *ordem lexicográfica*.

Definição 1.1.7. Um elemento x de um poset P é dito *maximal* se sempre que $x \leq y$, com $y \in P$, então $x = y$. Se P tem um elemento x tal que $y \leq x$ para todo $y \in P$, então x é chamado o elemento *máximo* de P . Analogamente define-se elemento *minimal* e elemento *mínimo* de um poset.

Observação 1.1.8. Note que todo elemento mínimo (máximo) é minimal (maximal), mas o contrário nem sempre ocorre. Considere, por exemplo, o conjunto dos números naturais com a ordem definida no Exemplo 1.1.4. Neste caso, 1 é o mínimo e 0 é o máximo. Se

considerarmos o subconjunto Y dos naturais maiores ou iguais a 2, com a mesma ordem citada anteriormente, temos agora que cada número primo é um elemento minimal desse novo subconjunto que não possui elemento mínimo.

Seja (P, \leq_P) um poset e seja $Q \subseteq P$ um subconjunto. É fácil ver que, restringindo a Q a ordem de P temos que Q é também um poset. Diremos então que (Q, \leq_P) é um *subconjunto ordenado* ou *subposet* de P .

Salvo menção contrária, assumiremos que subconjuntos de conjuntos parcialmente ordenados carregam a ordem induzida do conjunto que o contém.

Definição 1.1.9. Um subconjunto C de um poset é uma *cadeia* se para quaisquer $x, y \in C$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Um subconjunto B de um poset é uma *anticadeia* se para qualquer par de elementos distintos $x, y \in B$ tem-se $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Uma cadeia C é dita ter *comprimento* n se C tem n elementos e uma cadeia desse tipo será também denotada por C_n .

Definição 1.1.10. Dados x e z elementos de um poset P , o *intervalo* ou *segmento* de x a z é o conjunto

$$[x, z] = \{y \in P : x \leq y \leq z\}.$$

Um poset P é *localmente finito* se todo intervalo de P é finito. Um intervalo $[x, y]$ de um poset P é dito ter *comprimento* n se existe uma cadeia de comprimento n em $[x, y]$ e qualquer outra cadeia neste intervalo tem comprimento menor ou igual a n .

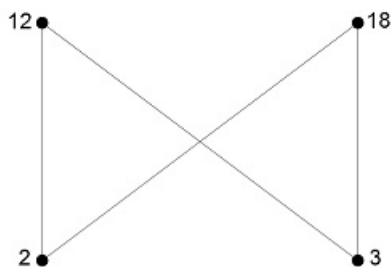
Definição 1.1.11. Dizemos que os elementos x e y de um poset P são *conexos* se para algum inteiro positivo n existem $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y$ elementos de P com $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Claramente, a conexidade de elementos de P é uma relação de equivalência e dizemos que a classe de equivalência de um elemento é uma *componente conexa*. Todo poset P pode então ser escrito como a união disjunta das suas componentes conexas.

Definição 1.1.12. Um poset P é dito *conexo* quando P possui apenas uma componente conexa, ou seja, dados quaisquer $x, y \in P$ existe uma sequência $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ de elementos de X tal que $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Exemplo 1.1.13. Considere o conjunto dos números reais com a ordem \leq dada por $x \leq y$ se $x = y$ ou $x < 0 = y$ ou $x = 0 < y$. Note que o intervalo $[x, y]$ só não é vazio se $x \leq 0 \leq y$ e que cada intervalo possui no máximo três elementos. Temos aqui um poset não enumerável e localmente finito.

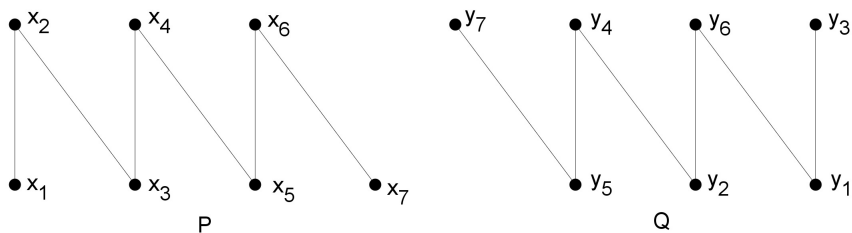
Os posets finitos (e alguns casos particulares de enumeráveis) podem ser representados visualmente pelos diagramas de Hasse. Tais diagramas consistem de pontos, que chamamos de vértices, que representam os elementos do poset, e segmentos de reta tendo como extremidades os vértices, que determinam a relação entre os elementos. Sempre que um elemento y “cobrir” um elemento x (ou seja, $x \leq y$ e $[x, y] = \{x, y\}$) ambos devem ser ligados por um segmento de reta, e a posição do ponto que representa o elemento coberto, no caso x , deve ser inferior ao ponto que representa o elemento que o cobre, no caso y .

Exemplo 1.1.14. Considere o subconjunto $Y = \{2, 3, 12, 18\} \subseteq \mathbb{N}$ com a ordem \sqsubseteq herdada de \mathbb{N} (veja o Exemplo 1.1.4). Um diagrama de Hasse que representa esse poset é o seguinte:



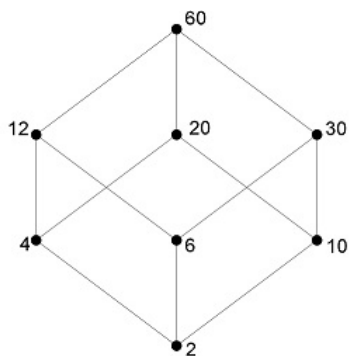
Note que Y é um poset conexo, uma vez que qualquer par de pontos de Y pode ser ligado por uma sequência de segmentos.

Exemplo 1.1.15. Seja $P = \{x_i : i \in I\}$ o poset enumerável representado pelo diagrama de Hasse a seguir:



A aplicação φ é uma bijeção satisfazendo $x_i \leq x_j$ se, e somente se $\varphi(x_j) \leq \varphi(x_i)$, para todos $x_i, x_j \in P$, com $i = 1, \dots, 7$. Portanto φ é um anti-isomorfismo.

Exemplo 1.1.18. Seja X o poset a seguir e considere as aplicações ϕ , ψ e φ de X em X definidas abaixo.

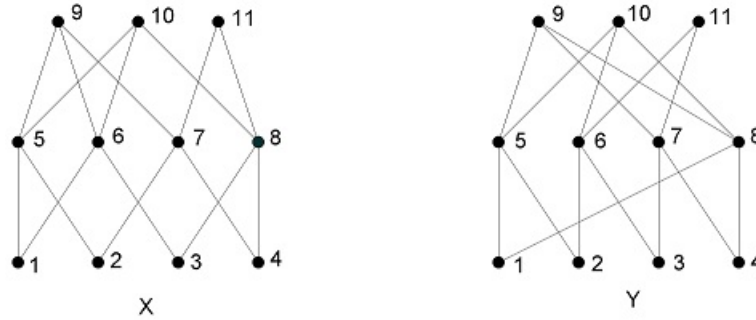


$$\begin{array}{lll}
 \phi(2) = 2 & \varphi(2) = 60 & \psi(2) = 60 \\
 \phi(4) = 6 & \varphi(4) = 30 & \psi(4) = 12 \\
 \phi(6) = 10 & \varphi(6) = 12 & \psi(6) = 30 \\
 \phi(10) = 4 & \varphi(10) = 20 & \psi(10) = 20 \\
 \phi(12) = 30 & \varphi(12) = 6 & \psi(12) = 6 \\
 \phi(20) = 12 & \varphi(20) = 10 & \psi(20) = 4 \\
 \phi(30) = 20 & \varphi(30) = 4 & \psi(30) = 10 \\
 \phi(60) = 60 & \varphi(60) = 2 & \psi(60) = 2
 \end{array}$$

É possível ver que ϕ é um automorfismo, φ é uma involução e ψ é um antiautomorfismo, mas não é involução pois, por exemplo, $\psi^2(10) = 4$.

Exemplo 1.1.19. Considere os posets X e Y e a aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ a seguir.

$$\begin{aligned} \phi(1) = 1, \quad \phi(2) = 2, \quad \phi(3) = 4, \quad \phi(4) = 3, \quad \phi(5) = 5, \quad \phi(6) = 8, \\ \phi(7) = 6, \quad \phi(8) = 7, \quad \phi(9) = 10, \quad \phi(10) = 9 \quad \text{e} \quad \phi(11) = 11. \end{aligned}$$



A aplicação ϕ assim definida é um isomorfismo de posets.

Proposição 1.1.20. *Sejam (P, \leq_P) , (Q, \leq_Q) , (R, \leq_R) posets e sejam $f : P \rightarrow Q$ e $g : Q \rightarrow R$ bijeções.*

- (i) *Se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo.*
- (ii) *Se f e g são anti-isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo.*
- (iii) *Se f é um isomorfismo (anti-isomorfismo) e g é um anti-isomorfismo (isomorfismo), então $g \circ f$ é um anti-isomorfismo.*

Demonstração: Faremos a prova somente para o item (iii). Os outros itens são análogos. Suponhamos que f seja um isomorfismo e g um anti-isomorfismo. Então, dados $x, y \in P$ temos

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y) \Leftrightarrow g(f(y)) \leq_R g(f(x)) \Leftrightarrow (g \circ f)(y) \leq_R (g \circ f)(x).$$

Como f e g são bijetoras, $g \circ f$ também é. Portanto $g \circ f$ é um anti-isomorfismo. \square

Proposição 1.1.21. *Sejam (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) posets. Se $f : P \rightarrow Q$ é um isomorfismo (anti-isomorfismo), então $f^{-1} : Q \rightarrow P$ é também um isomorfismo (anti-isomorfismo).*

Demonstração: Claramente f^{-1} é bijetora. Sejam $q_1, q_2 \in Q$. Como f é bijetora, existem $p_1, p_2 \in P$ tais $f(p_1) = q_1$ e $f(p_2) = q_2$, ou seja, $f^{-1}(q_1) = p_1$ e $f^{-1}(q_2) = p_2$. Assim,

$$q_1 \leq_Q q_2 \Leftrightarrow f(p_1) \leq_Q f(p_2) \Leftrightarrow p_1 \leq_P p_2 \Leftrightarrow f^{-1}(q_1) \leq_P f^{-1}(q_2).$$

Portanto f^{-1} é um isomorfismo. □

1.2 Anéis e álgebras

Apresentamos nesta seção os conceitos de anel, módulo e álgebra dos quais faremos uso no decorrer desta dissertação. Também exibiremos aqui resultados bem conhecidos da Teoria de Anéis, que serão indispensáveis para o estudo das álgebras de incidência finitárias que veremos no decorrer de nosso trabalho.

Definição 1.2.1. Um anel R é um conjunto não vazio dado com duas operações binárias

$$\begin{array}{ccc} + : R \times R & \longrightarrow & R \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \cdot : R \times R & \longrightarrow & R \\ (a, b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

satisfazendo, para todos $a, b, c \in R$:

- (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- (ii) $a + b = b + a$;
- (iii) Existe $0 \in R$ tal que $a + 0 = a$;
- (iv) Para todo $a \in R$ existe $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$;
- (v) $a(bc) = (ab)c$;
- (vi) $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$;
- (vii) Existe $1 \in R$ tal que $a1 = 1a = a$.

Se, além disso, R satisfizer

(viii) $ab = ba$, para todos $a, b \in R$,

dizemos que R é um *anel comutativo*.

Observação 1.2.2. Segue das propriedades (i) à (iv) que $(R, +)$ é um *grupo abeliano*, chamado de *grupo aditivo de R* .

Exemplo 1.2.3. Seja $\{R_i : i \in I\}$ um conjunto de anéis. O produto cartesiano $\prod_{i \in I} R_i = \{(a_i) : a_i \in R_i\}$ é um anel com as operações

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \quad \text{e} \quad (a_i)(b_i) = (a_i b_i),$$

chamado *produto direto* dos anéis $R_i, i \in I$.

Definição 1.2.4. Dado um anel R , definimos o centro de R como sendo o conjunto $\{r \in R : rs = sr, \text{ para todo } s \in R\}$ e o denotaremos por $\text{Cen}(R)$.

Definição 1.2.5. Dado um anel R , um elemento $a \in R$ é *inversível à direita* se existir $b \in R$ tal que $ab = 1$. O elemento b é chamado de *inverso à direita* de a . Analogamente, a é *inversível à esquerda* se existir $c \in R$ tal que $ca = 1$. Neste caso, o elemento c é chamado de *inverso à esquerda* de a . Se a tem um inverso à direita e um inverso à esquerda, estes coincidem e, neste caso, dizemos que a é *inversível* em R .

Seja R um anel. Se $a \in R$ for inversível em R , denotaremos o inverso de a por a^{-1} e o conjunto de todos os elementos inversíveis de R será denotado por $U(R)$. Além disso, se R for um anel não nulo tal que $U(R) = R - \{0\}$, R será dito um *anel com divisão*. E mais, se R for um anel com divisão comutativo, diremos que R é um *corpo*.

Definição 1.2.6. Um subconjunto S de um anel R é um *subanel* de R se

- (i) $1 \in S$;
- (ii) Dados $a, b \in S, a - b \in S$;
- (iii) Dados $a, b \in S, ab \in S$.

Definição 1.2.7. Um subconjunto I de um anel R é um *ideal à esquerda* de R se

- (i) $0 \in I$;
- (ii) Dados $a, b \in I$, $a + b \in I$;
- (iii) Dados $a \in I$ e $r \in R$, $ra \in I$.

A definição de ideal à direita é simétrica.

Definição 1.2.8. Um subconjunto I de um anel R é um *ideal* de R se I for um ideal à esquerda e à direita de R .

Definição 1.2.9. Seja R um anel e seja M um ideal à esquerda de R .

- (i) Dizemos que M é um *ideal à esquerda maximal* de R se $M \neq R$ e, sempre que existir um ideal à esquerda I de R tal que $M \subset I$, então $I = M$ ou $I = R$.
- (ii) Dizemos que M é um *ideal à esquerda minimal* de R se $M \neq \{0\}$ e, sempre que existir um ideal à esquerda I de R tal que $I \subset M$, então $I = M$ ou $I = \{0\}$.

Se R é um anel não nulo, é possível mostrar, usando o Lema de Zorn, que todo ideal à esquerda (direita) próprio de R está contido em um ideal à esquerda (direita) maximal. Em particular, R contém ideais à esquerda (direita) maximais.

Definição 1.2.10. Seja R um anel não nulo. O *radical de Jacobson* de R , denotado por $\text{Rad}(R)$, é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R . Se $R = \{0\}$, definimos $\text{Rad}(R) = \{0\}$.

Proposição 1.2.11. *Seja R um anel. Então $\text{Rad}(R)$ é o conjunto de todos elementos $r \in R$ tais que $1 - tr$ é inversível à esquerda para todo $t \in R$.*

Demonstração: Se $r \in \text{Rad}(R)$ então $r \in M$, para todo ideal à esquerda maximal M de R . Logo, $tr \in M$, para todo $t \in R$. Como $1 \notin M$, pois $M \neq R$, então $1 - tr \notin M$, para todo ideal à esquerda maximal M de R . Segue que o ideal à esquerda $R(1 - tr)$ de R não está contido em nenhum ideal à esquerda maximal de R . Logo $R(1 - tr) = R$ e, portanto, existe $a \in R$ tal que $a(1 - tr) = 1$, ou seja, $1 - tr$ é inversível à esquerda em R .

Reciprocamente, seja $r \in R$ tal que $1 - tr$ é inversível à esquerda para todo $t \in R$. Então $1 - tr \notin M$ para cada ideal à esquerda maximal M de R , uma vez que $M \neq R$. Segue que $1 \notin M + Rr$ e, pela maximalidade de M , $Rr \subseteq M$, pois $M \subseteq M + Rr \neq R$. Portanto $r \in M$ para cada ideal à esquerda maximal de R , ou seja, $r \in \text{Rad}(R)$. \square

Sabemos que o radical de Jacobson de um anel R é um ideal à esquerda de R , uma vez que é uma interseção de ideais à esquerda. Veremos na próxima proposição que, na verdade, é mais do que isto.

Proposição 1.2.12. *Seja R um anel. Então $\text{Rad}(R)$ é um ideal de R .*

Demonstração: Basta mostrar que $\text{Rad}(R)$ é um ideal à direita. Sejam $s \in \text{Rad}(R)$ e $r \in R$. Queremos mostrar que $sr \in \text{Rad}(R)$. Pela proposição anterior basta mostrar que $1 - usr$ é inversível à esquerda, para todo $u \in R$. Como $s \in \text{Rad}(R)$ temos que $rus \in \text{Rad}(R)$, para todo $u \in R$, pois $\text{Rad}(R)$ é um ideal à esquerda de R . Pela proposição anterior, existe $v \in R$ tal que $v(1 - rus) = 1$, então $vrus = v - 1$. Segue que

$$(1 + usvr)(1 - usr) = 1 - usr + usvr - us(vrus)r = 1 - usr + usr - usvr + usvr = 1.$$

Portanto, $1 - usr$ é inversível à esquerda, para todo $u \in R$. \square

Exemplo 1.2.13. Se R é um anel com divisão, então $\text{Rad}(R) = 0$, pois o único ideal à esquerda maximal de um anel com divisão é o ideal nulo.

No decorrer de nosso trabalho, alguns elementos de um anel serão usados frequentemente. A seguir definiremos três desses elementos.

Definição 1.2.14. Dados um anel R e $x \in R$, x é denominado:

- (i) *Idempotente*, se $x^2 = x$.
- (ii) *Regular*, se existe $\chi \in R$ tal que $x = x\chi x$.
- (iii) *Conjugado a $y \in R$* , se existe $u \in U(R)$ tal que $x = uyu^{-1}$. Nesse caso dizemos que x e y são conjugados.

Definição 1.2.15. Dados R e S anéis, um *homomorfismo* de R em S é uma função $f : R \rightarrow S$ tal que

- (i) $f(1_R) = 1_S$;
- (ii) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in R$;
- (iii) $f(ab) = f(a)f(b)$, para todos $a, b \in R$.

Se, além disso, f for bijetora, então diremos que f é um *isomorfismo de anéis*.

Definição 1.2.16. Sejam R e S anéis. Um *anti-homomorfismo* de R em S é uma função $f : R \rightarrow S$ tal que

- (i) $f(1_R) = 1_S$;
- (ii) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in R$;
- (iii) $f(ab) = f(b)f(a)$, para todos $a, b \in R$.

Se, além disso, f for uma bijeção, diremos que f é um *anti-isomorfismo de anéis*.

Definição 1.2.17. Se $f : R \rightarrow R$ for um isomorfismo (anti-isomorfismo) de anéis, diremos que f é um *automorfismo* (*antiautomorfismo*) de R .

Definição 1.2.18. Seja K um anel comutativo. Um anel A junto com uma função

$$\begin{aligned} K \times A &\longrightarrow A \\ (k, a) &\longmapsto ka \end{aligned}$$

tal que

- (i) $k(a + b) = ka + kb$;
- (ii) $(k + s)a = ka + sa$;
- (iii) $(ks)a = k(sa)$;
- (iv) $1_K a = a$;

$$(v) \quad k(ab) = (ka)b = a(kb),$$

para todos $a, b \in A$ e $k, s \in K$ é uma K -álgebra.

Observação 1.2.19. Se K é um corpo, então uma K -álgebra A é, em particular, um K -espaço vetorial.

Exemplo 1.2.20. Dada uma K -álgebra A , considere o conjunto A^{op} consistindo dos elementos de A , munido com a mesma soma e produto por escalar de A e a multiplicação da forma $a \cdot b = ba$, para todos $a, b \in A^{op}$. Com essas operações A^{op} é também uma K -álgebra.

Exemplo 1.2.21. Seja $\{A_i : i \in I\}$ um conjunto de K -álgebras. O produto direto $\prod_{i \in I} A_i$ dos anéis $A_i, i \in I$, é também uma K -álgebra com o produto por escalar dado por $k(a_i) = (ka_i)$. Tal K -álgebra é denominada *produto direto* das K -álgebras $A_i, i \in I$.

Exemplo 1.2.22. Seja K um anel comutativo e seja $M_n(K)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ sobre K . Então $M_n(K)$ com a adição e a multiplicação usual de matrizes e o produto por escalar usual é uma K -álgebra.

Definição 1.2.23. Um subanel S de uma K -álgebra A é uma *subálgebra* se $ka \in S$, para todos $k \in K$ e $a \in S$.

Exemplo 1.2.24. Seja K um anel comutativo e seja $UT_n(K)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre K . Então $UT_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$.

Definição 1.2.25. Dadas duas K -álgebras A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ é um *homomorfismo de K -álgebras* se f for um homomorfismo de anéis K -linear, ou seja, $f(ka) = kf(a)$, para todos $k \in K$ e $a \in A$. Se f for bijetora, então diremos que f é um *isomorfismo de K -álgebras*. E, além disso, se f for um isomorfismo de uma K -álgebra sobre ela mesma, diremos que f é um *automorfismo*.

Definição 1.2.26. Se $f : A \rightarrow B$ for um anti-homomorfismo K -linear de anéis, então f será dito um *anti-homomorfismo de K -álgebras*. Quando f for bijetora, diremos que f é um anti-isomorfismo de K -álgebras. Se f for um anti-isomorfismo de uma K -álgebra nela mesma, diremos que f é um *antiautomorfismo*. Além disso, f for um antiautomorfismo de K -álgebras que satisfaz $f^2 = 1$, então f será uma *involução* de A .

Exemplo 1.2.27. Seja A uma K -álgebra e seja $a \in U(A)$. Então $f : A \rightarrow A$ definida por $f(x) = axa^{-1}$ é um automorfismo de A , denominado *automorfismo interno*.

Exemplo 1.2.28. Seja K um anel comutativo e seja $g : M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ definida por $g(A) = A^t$, onde A^t é a matriz transposta de A . Então g é uma involução de $M_n(K)$.

Definição 1.2.29. Seja R um anel. Um R -módulo à direita é um grupo abeliano aditivo M dado com uma função

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m, r) &\longmapsto mr \end{aligned}$$

tal que

- (i) $(m + n)r = mr + nr$, para todos $m, n \in M$ e $r \in R$;
- (ii) $m(r + s) = mr + ms$, para todos $m \in M$ e $r, s \in R$;
- (iii) $m(rs) = (mr)s$, para todos $m \in M$ e $r, s \in R$;
- (iv) $m1_R = m$, para todo $m \in M$.

R -módulos à esquerda são definidos simetricamente.

Exemplo 1.2.30. Seja $\{M_i : i \in I\}$ um conjunto de R -módulos à direita. O produto cartesiano $\prod_{i \in I} M_i = \{(m_i) : m_i \in M_i\}$ tem uma estrutura de R -módulo à direita dada por

$$(m_i) + (n_i) = (m_i + n_i) \quad \text{e} \quad (m_i)r = (m_i r), r \in R,$$

chamado *produto direto* dos R -módulos M_i , $i \in I$.

Definição 1.2.31. Seja M um R -módulo à direita. Um subconjunto N de M é um *submódulo* de M se N é não-vazio e, dados $m, n \in N$ e $r \in R$,

- (i) $m + n \in N$;
- (ii) $nr \in N$.

Exemplo 1.2.32. Seja $\{M_i : i \in I\}$ um conjunto de R -módulos à direita e seja N o subconjunto de $M = \prod_{i \in I} M_i$ formado pelos elementos (x_i) para os quais o conjunto $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ é finito. Então N é um submódulo de M , o qual é denotado por $\bigoplus_{i \in I} M_i$ e é chamado de *soma direta* dos R -módulos $M_i, i \in I$.

Definição 1.2.33. Sejam R e S anéis e seja M um grupo abeliano aditivo. Dizemos que M é um (R, S) -bimódulo se M for um R -módulo à esquerda, um S -módulo à direita e $(rm)s = r(ms)$, para todos $r \in R, s \in S$ e $m \in M$. Se $R = S$, dizemos apenas que M é um R -bimódulo.

Exemplo 1.2.34. Dado um anel R , se I for um ideal de R , então I é um R -bimódulo.

Definição 1.2.35. Sejam M e N R -módulos à direita. Um *homomorfismo* de M em N é uma função $f : M \rightarrow N$ tal que, dados $m, n \in M$ e $r \in R$,

(i) $f(m + n) = f(m) + f(n)$;

(ii) $f(mr) = f(m)r$.

Se, além disso, f for bijetora, então diremos que f é um *isomorfismo* de R -módulos.

Simetricamente definiremos homomorfismo (isomorfismo) entre R -módulos à esquerda.

Proposição 1.2.36. *Sejam M e N R -módulos à direita.*

(i) $\text{Hom}_R(M, N) = \{f : M \rightarrow N : f \text{ é homomorfismo}\}$ é um grupo abeliano aditivo com a operação de adição dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m),$$

para todos $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$, para todo $m \in M$.

(ii) $\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$ é um anel com a operação de adição definida acima e a multiplicação dada por

$$(fg)(m) = (f \circ g)(m),$$

para todos $f, g \in \text{End}_R(M)$, para todo $m \in M$.

Sejam M_1, M_2, \dots, M_n R -módulos à direita. Seja

$$\begin{aligned} [\text{Hom}_R(M_i, M_j)] &= \begin{bmatrix} \text{Hom}_R(M_1, M_1) & \text{Hom}_R(M_2, M_1) & \dots & \text{Hom}_R(M_n, M_1) \\ \text{Hom}_R(M_1, M_2) & \text{Hom}_R(M_2, M_2) & \dots & \text{Hom}_R(M_n, M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_R(M_1, M_n) & \text{Hom}_R(M_2, M_n) & \dots & \text{Hom}_R(M_n, M_n) \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} : \phi_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i) \right\}. \end{aligned}$$

Em $[\text{Hom}_R(M_i, M_j)]$ definimos as seguintes operações

$$(\phi_{ij}) + (\psi_{ij}) = (\phi_{ij} + \psi_{ij}) \text{ e } (\phi_{ij})(\psi_{ij}) = (\rho_{ij}), \text{ onde } \rho_{ij} = \sum_{k=1}^n \phi_{ik}\psi_{kj}.$$

Com essas operações, é fácil ver que $[\text{Hom}_R(M_i, M_j)]$ é um anel, onde

$$1_{[\text{Hom}_R(M_i, M_j)]} = \begin{bmatrix} Id_{M_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Id_{M_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Id_{M_n} \end{bmatrix}.$$

O último resultado desta seção nos dá uma representação interessante de $\text{End}_R(M)$ quando $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, onde cada M_i é um R -módulo à direita. Tal representação será de total importância para o desenvolvimento de alguns resultados do Capítulo 4 deste trabalho.

Proposição 1.2.37. *O anel $[\text{Hom}_R(M_i, M_j)]$ é isomorfo a $\text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right)$.*

Demonstração: Denotemos $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ e considere as funções projeção e inclusão definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \pi_j : \bigoplus_{i=1}^n M_i &\longrightarrow M_j & \text{e} & \mu_j : M_j &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \\ (m_i) &\longmapsto m_j & & n_j &\longmapsto (l_i) \end{aligned}$$

onde $l_i = \begin{cases} n_j, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$. É fácil ver que π_j e μ_j são homomorfismos de R -módulos à direita, para todo $j = 1, \dots, n$. Defina

$$\alpha : \text{End}_R(M) \longrightarrow [\text{Hom}_R(M_j, M_i)]$$

e

$$\beta : [\text{Hom}_R(M_j, M_i)] \longrightarrow \text{End}_R(M)$$

por $\alpha(\phi) = (\pi_i \phi \mu_j)$ e $\beta((\phi_{ij})) = \sum_{i,j=1}^n \mu_i \phi_{ij} \pi_j$. Claramente α e β são homomorfismos de anéis.

Além disso, sabendo que $\pi_j \mu_k = \delta_{jk} \text{Id}_{M_j}$, onde δ_{jk} é o delta de Kronecker e $\sum_{j=1}^n \mu_j \pi_j = \text{Id}_M$, é fácil verificar que $\alpha^{-1} = \beta$, de onde segue que α um isomorfismo de anéis. \square

Observação 1.2.38. Pela proposição anterior, dada $\phi \in \text{End}_R \left(\bigoplus_{i=1}^n M_i \right)$, ϕ pode ser vista como uma matriz (ϕ_{ij}) , com $\phi_{ij} = \pi_i \phi \mu_j \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$, onde $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $(a_i) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$ e denotemos $(b_i) = \phi((a_i))$. Temos

$$\begin{aligned} b_l = \pi_l((b_i)) &= (\pi_l \phi)((a_i)) = (\pi_l \phi)((a_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_n)) \\ &= (\pi_l \phi)(\mu_1(a_1) + \dots + \mu_n(a_n)) \\ &= (\pi_l \phi \mu_1)(a_1) + \dots + (\pi_l \phi \mu_n)(a_n) \\ &= \phi_{l1}(a_1) + \dots + \phi_{ln}(a_n). \end{aligned}$$

Logo, $\phi((a_i)) = (\phi_{i1}(a_1) + \dots + \phi_{in}(a_n))$.

Identificando ϕ com (ϕ_{ij}) e (a_i) com $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, podemos escrever

$$\phi((a_i)) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(a_1) + \phi_{12}(a_2) + \dots + \phi_{1n}(a_n) \\ \phi_{21}(a_1) + \phi_{22}(a_2) + \dots + \phi_{2n}(a_n) \\ \vdots \\ \phi_{n1}(a_1) + \phi_{n2}(a_2) + \dots + \phi_{nn}(a_n) \end{pmatrix}.$$

1.3 Propriedades Zassenhaus de álgebras e módulos

Nesta seção definiremos as propriedades Zassenhaus envolvendo álgebras e módulos afim de investigar, no Capítulo 4, tais propriedades para as álgebras de incidência finitárias. As definições das propriedades Zassenhaus possuem algumas variações na literatura, portanto aqui nos basearemos nas definições apresentadas em [7].

Definição 1.3.1. Sejam K um corpo e R uma K -álgebra. Sejam M e N R -módulos à esquerda e à direita, respectivamente. Seja R^+ o grupo aditivo de R . Definimos:

1. $\widehat{R}^l = \{\varphi \in \text{End}_K(R^+) : \varphi(x) \in Rx, \forall x \in R\}$;
2. $\widehat{R}^r = \{\varphi \in \text{End}_K(R^+) : \varphi(x) \in xR, \forall x \in R\}$;
3. $\widehat{M}^l = \{\varphi \in \text{End}_K(M) : \varphi(m) \in Rm, \forall m \in M\}$;
4. $\widehat{N}^r = \{\varphi \in \text{End}_K(N) : \varphi(n) \in nR, \forall n \in N\}$;
5. $H^l(R, M) = \{\varphi \in \text{Hom}_K(R, M) : \varphi(x) \in xM, \forall x \in R\}$;
6. $H^r(R, N) = \{\varphi \in \text{Hom}_K(R, N) : \varphi(x) \in Nx, \forall x \in R\}$.

Não é difícil ver que \widehat{R}^l e \widehat{R}^r são K -subálgebras de $\text{End}_K(R^+)$ e \widehat{M}^l e \widehat{N}^r são subanel de $\text{End}_K(M)$ e de $\text{End}_K(N)$, respectivamente. Da mesma forma que $H^l(R, M)$ e $H^r(R, N)$ são K -subespaços vetoriais de $\text{Hom}_K(R, M)$ e de $\text{Hom}_K(R, N)$, respectivamente.

Definição 1.3.2. Sejam K um corpo, R uma K -álgebra e M e N R -módulos à esquerda e à direita, respectivamente.

1. Dado $s \in R$ definimos a aplicação $s \cdot : R \rightarrow R$ por $(s \cdot)(x) = sx$, para todo $x \in R$. Claramente, $s \cdot \in \widehat{R}^l$ e o subconjunto $R \cdot = \{s \cdot : R \rightarrow R : s \in R\}$ é uma K -subálgebra de \widehat{R}^l . Simetricamente, definimos as aplicações $\cdot s \in \widehat{R}^r$ e a K -subálgebra $\cdot R$ de \widehat{R}^r .
2. Dado $s \in R$ definimos a aplicação $s \cdot : M \rightarrow M$ por $(s \cdot)(m) = sm$, para todo $m \in M$. Então, $s \cdot \in \widehat{M}^l$ e o subconjunto $R_M \cdot = \{s \cdot : M \rightarrow M : s \in R\}$ é um subanel de \widehat{M}^l . Simetricamente, definimos as aplicações $\cdot s \in \widehat{N}^r$ e o subanel $\cdot R_N$ de \widehat{N}^r .

3. Dado $m \in M$ definimos a aplicação $\cdot m : R \longrightarrow M$ por $(\cdot m)(x) = xm$, para todo $x \in R$. É fácil ver que $\cdot m \in H^l(R, M)$ e o subconjunto $\cdot M = \{\cdot m : R \longrightarrow M : m \in M\}$ é um K -subespaço de $H^l(R, M)$. Simetricamente, definimos as aplicações $n \cdot \in H^r(R, N)$ e o K -subespaço $N \cdot$ de $H^r(R, N)$.

Definição 1.3.3. Sejam K um corpo, R uma K -álgebra e M e N R -módulos à esquerda e à direita, respectivamente.

1. R é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda se $\widehat{R}^l = R \cdot$;
2. R é uma K -álgebra Zassenhaus à direita se $\widehat{R}^r = \cdot R$;
3. M é um R -módulo Zassenhaus à esquerda se $\widehat{M}^l = R_M \cdot$;
4. N é um R -módulo Zassenhaus à direita se $\widehat{N}^r = \cdot R_N$;
5. (R, M) é um par Zassenhaus à esquerda se $H^l(R, M) = \cdot M$;
6. (R, N) é um par Zassenhaus à direita se $H^r(R, N) = N \cdot$.

Proposição 1.3.4. Sejam R, R' K -álgebras, M um R -módulo à esquerda e M' um R' -módulo à direita. Sejam também $\sigma : R \longrightarrow R'$ um anti-isomorfismo de K -álgebras e $\tau : M \longrightarrow M'$ uma bijeção K -linear satisfazendo $\tau(rm) = \tau(m)\sigma(r)$, para todos $m \in M$ e $r \in R$. Então:

1. Existe um isomorfismo de anéis $' : \widehat{M}^l \longrightarrow \widehat{M}'^r$ tal que $\varphi' = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$, para toda $\varphi \in \widehat{M}^l$. Além disso, M é um R -módulo Zassenhaus à esquerda se, e só se, M' é um R' -módulo Zassenhaus à direita. E ainda, $(r \cdot)' = \cdot \sigma(r)$, para todo $r \in R$.
2. Existe um isomorfismo de K -álgebras $' : \widehat{R}^l \longrightarrow \widehat{R}'^r$ tal que $\varphi' = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$, para toda $\varphi \in \widehat{R}^l$. Além disso, R é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda se, e só se, R' é uma K -álgebra Zassenhaus à direita. E ainda, $(r \cdot)' = \cdot \sigma(r)$, para todo $r \in R$.
3. Existe um isomorfismo de K -espaços $' : H^l(R, M) \longrightarrow H^r(R', M')$ tal que $\varphi' = \tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$, para toda $\varphi \in H^l(R, M)$. Além disso, (R, M) é um par Zassenhaus à esquerda se, e só se, (R', M') é um par Zassenhaus à direita. E ainda, $(\cdot m)' = \tau(m) \cdot$, para todo $m \in M$.

Valem os resultados análogos trocando “esquerda” por “direita” em toda parte.

Demonstração: Faremos a prova somente para o primeiro caso. As demonstrações de 2 e 3 seguem de forma análoga ao que faremos para 1.

Considere a aplicação $' : \widehat{M}^l \longrightarrow \widehat{M}'^r$ tal que $\varphi' = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$, para toda $\varphi \in \widehat{M}^l$. Note que tal aplicação está bem definida, isto é, dada $\varphi \in \widehat{M}^l$, $\varphi' \in \widehat{M}'^r$. De fato, se $\varphi \in \widehat{M}^l$, então $\varphi \in \text{End}_K(M)$. Como τ é K -linear, $\tau \in \text{Hom}_K(M, M')$. Assim, $\varphi' = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1} \in \text{End}_K(M')$. Agora, dado $m' \in M'$, seja $m \in M$ tal que $\tau(m) = m'$. Como $\varphi \in \widehat{M}^l$, existe $r \in R$ tal que $\varphi(m) = rm$. Assim,

$$\varphi'(m') = (\tau \circ \varphi \circ \tau^{-1})(m') = (\tau\varphi)(m) = \tau(rm) = \tau(m)\sigma(r) = m'\sigma(r) \in m'R'.$$

Portanto $\varphi' \in \widehat{M}'^r$.

Mostremos que $'$ é homomorfismo de anéis. Sejam $\varphi, \psi \in \widehat{M}^l$. Então

$$(\varphi + \psi)' = \tau \circ (\varphi + \psi) \circ \tau^{-1} = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1} + \tau \circ \psi \circ \tau^{-1} = \varphi' + \psi';$$

$$(\varphi \circ \psi)' = \tau \circ \varphi \circ \psi \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ \psi \circ \tau^{-1}) = \varphi' \circ \psi';$$

$$(Id_M)' = \tau \circ Id_M \circ \tau^{-1} = Id_{M'}.$$

Portanto $'$ é um homomorfismo de anéis.

Obviamente $'$ é injetora. Agora, dada $\phi \in \widehat{M}'^r$, considere a aplicação $\varphi = \tau^{-1} \circ \phi \circ \tau : M \longrightarrow M$. Claramente $\varphi \in \text{End}_K(M)$. Dado $m \in M$ seja $m' \in M'$ tal que $\tau(m) = m'$. Como $\phi \in \widehat{M}'^r$, existe $s \in R'$ tal que $\phi(m') = m's$. Então

$$\varphi(m) = (\tau^{-1} \circ \phi \circ \tau)(m) = \tau^{-1}(\phi(m')) = \tau^{-1}(m's) = \tau^{-1}(\tau(m)\sigma(\sigma^{-1}(s))) = \sigma^{-1}(s)m \in Rm.$$

Portanto $\varphi \in \widehat{M}^l$. Além disso, $\varphi' = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1} = \phi$ e, portanto, $'$ é sobrejetora. Logo $'$ é um isomorfismo de anéis.

Suponha agora que M é um R -módulo Zassenhaus à esquerda. Seja $\psi \in \widehat{M}'^r$. Então existe $\varphi \in \widehat{M}^l$ tal que $\psi = \varphi'$. Como $\widehat{M}^l = R_M \cdot$, então $\varphi = r \cdot$, para algum $r \in R$. Daí,

$$\psi(m') = \varphi'(m') = \tau(\varphi(\tau^{-1}(m'))) = \tau(r\tau^{-1}(m')) = \tau(\tau^{-1}(m'))\sigma(r) = m'\sigma(r),$$

para todo $m' \in M'$. Logo $\psi = \cdot\sigma(r) \in \cdot R'_{M'}$, o que implica que M' é um R' -módulo Zassenhaus à direita.

Reciprocamente suponha que M' é um R' -módulo Zassenhaus à direita e seja $\varphi \in \widehat{M}^l$. Então existe $\psi \in \widehat{M}'^r$ tal que $\psi = \varphi' = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$. Como $\widehat{M}'^r = \cdot R'_{M'}$, existe $r' \in R'$ tal que $\psi = \cdot r'$. Então,

$$\varphi(m) = \tau^{-1}(\psi(\tau(m))) = \tau^{-1}(\tau(m)r') = \tau^{-1}(\tau(m)\sigma(\sigma^{-1}(r'))) = \sigma^{-1}(r')m,$$

para todo $m \in M$. Logo $\varphi = \sigma^{-1}(r')\cdot \in R_{M\cdot}$ e, portanto M é R -módulo Zassenhaus à esquerda.

Por fim, mostremos que $(r\cdot)' = \cdot\sigma(r)$, para todo $r \in R$, onde $r\cdot \in R_{M\cdot}$ e $\cdot\sigma(r)' \in \cdot R'_{M'}$. Dados $r \in R$ e $m' \in M'$, temos

$$(r\cdot)'(m') = \tau((r\cdot)(\tau^{-1}(m'))) = \tau(r\tau^{-1}(m')) = \tau(\tau^{-1}(m'))\sigma(r) = m'\sigma(r) = (\cdot\sigma(r))(m').$$

Portanto $(r\cdot)' = \cdot\sigma(r)$. □

Proposição 1.3.5. *Sejam K um corpo, R e S K -álgebras, M e N R -módulos à esquerda (direita) tais que $R \cong S$ e $M \cong N$. Então:*

1. *R é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda (direita) se, e só se S é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda (direita).*
2. *M é um R -módulo Zassenhaus à esquerda (direita) se, e só se N é um R -módulo Zassenhaus à esquerda (direita).*

Demonstração: Mostraremos somente o item 1. O item 2 é análogo.

Suponhamos que R seja uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda. Seja $\phi : R \rightarrow S$ um isomorfismo de K -álgebras. Seja também $\psi \in \widehat{S}^l$ e considere a aplicação $\lambda = \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi$. Uma vez que ψ e ϕ são K -lineares, $\lambda \in \text{End}_K(R)$. Dado $r \in R$, existe $x_r \in S$ tal que $\psi(\phi(r)) = x_r\phi(r)$. Assim,

$$\lambda(r) = \phi^{-1}(\psi(\phi(r))) = \phi^{-1}(x_r\phi(r)) = \phi^{-1}(x_r)r.$$

Logo, $\lambda \in \widehat{R}^l = R \cdot$ e, portanto, existe $a \in R$ tal que $\lambda = a \cdot$. Se $s \in S$, então

$$\psi(s) = \phi(\lambda(\phi^{-1}(s))) = \phi(a\phi^{-1}(s)) = \phi(a)s.$$

Logo $\psi = \phi(a) \cdot \in S \cdot$ e, com isso, temos que S é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda. A recíproca segue diretamente do que acabamos de provar uma vez que $\phi^{-1} : S \rightarrow R$ é um isomorfismo de K -álgebras. \square

Álgebra de Incidência Finitária

Neste capítulo definiremos a álgebra de incidência finitária de um poset P sobre um corpo K e descreveremos os elementos idempotentes, inversíveis e regulares dessa álgebra. Também descreveremos o centro da álgebra em questão.

O presente capítulo baseia-se no artigo de Khripchenko e Novikov [5]. Salvo menção contrária, K denotará sempre um corpo.

2.1 A álgebra $FI(P)$

Introduziremos aqui o conceito da álgebra de incidência finitária $FI(P)$ e apresentaremos a descrição dos seus elementos inversíveis, por meio dos quais obteremos informações sobre o radical de Jacobson de $FI(P)$.

Sejam K um corpo e P um poset qualquer. O *espaço de incidência* $I(P)$ é o conjunto das funções $f : P \times P \rightarrow K$ tal que $f(x, y) = 0$ se $x \not\leq y$, com as operações de soma e produto por escalar definidos da seguinte forma:

- $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$,
- $(rf)(x, y) = rf(x, y)$,

para todos $f, g \in I(P)$, $r \in K$ e $x, y \in P$. É fácil verificar que $I(P)$ com essas operações é realmente um espaço vetorial sobre K .

Uma função $f \in I(P)$ é dita *finitária* se, para todos $x, y \in P$ com $x < y$, existe somente um número finito de subsegmentos $[u, v] \subset [x, y]$ tal que $u \leq v$ e $f(u, v) \neq 0$. O conjunto de

todas as funções finitárias é denotado por $FI(P)$ e tal conjunto é um subespaço vetorial de $I(P)$.

Definimos em $FI(P)$ uma operação de multiplicação da seguinte forma:

$$\bullet (fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y),$$

para todos $f, g \in FI(P)$ e $x \leq y$ em P .

O primeiro resultado desta seção mostra que $FI(P)$ é uma K -álgebra, denominada *álgebra de incidência finitária* e que $I(P)$, embora não seja uma K -álgebra, é um $FI(P)$ -bimódulo.

Teorema 2.1.1. *$FI(P)$ é uma K -álgebra e $I(P)$ é um $FI(P)$ -bimódulo.*

Demonstração: Mostremos que se $f \in FI(P)$ e $g \in I(P)$, então fg está bem definido e se, além disso, $g \in FI(P)$, então $fg \in FI(P)$.

Dados $f \in FI(P)$, $g \in I(P)$ e $x, y \in P$ com $x \leq y$, seja

$$h(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y). \quad (2.1)$$

Como $f \in FI(P)$, existe somente um número finito de subintervalos $[x, z] \subset [x, y]$ tal que $f(x, z) \neq 0$. Logo a soma do lado direito de (2.1) é finita e, conseqüentemente, $h(x, y) \in K$. Portanto fg está bem definido. Note que, se supormos $f \in I(P)$ e $g \in FI(P)$, de forma análoga obtemos que fg está bem definida.

Agora, sejam $f, g \in FI(P)$ e suponhamos que $h = fg \notin FI(P)$. Então existem $x, y \in P$ com $x < y$ e um número infinito de subsegmentos $[u_i, v_i] \subset [x, y]$, ($i = 1, 2, \dots$) tais que $u_i \neq v_i$ e $h(u_i, v_i) \neq 0$. Dessa forma, um dos conjuntos $\{u_i\}$ ou $\{v_i\}$ deve ser infinito. Consideremos $|\{u_i\}| = \infty$. Como $h(u_i, v_i) \neq 0$, para cada i existe $z_i \in [u_i, v_i]$ tal que $f(u_i, z_i) \neq 0$ e $g(z_i, v_i) \neq 0$. Uma vez que $f \in FI(P)$ e $[u_i, z_i] \subset [x, y]$, temos que $u_i = z_i$ para um número infinito de índices. Dessa forma, $g(u_i, v_i) = g(z_i, v_i) \neq 0$ para esse conjunto infinito de índices, o que é um absurdo pois $u_i \neq v_i$ e $g \in FI(P)$.

Considere a função $\delta : P \times P \rightarrow K$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Claramente tal função pertence a $FI(P)$ e é conhecida como *função característica*. Além disso,

$$(f\delta)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)\delta(z, y) = f(x, y)$$

e

$$(\delta f)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta(x, z)f(z, y) = f(x, y),$$

para toda $f \in FI(P)$. Sendo assim, concluímos que δ é a identidade de $FI(P)$.

Não é difícil verificar que as condições das Definições 1.2.1, 1.2.18 e 1.2.29 são satisfeitas. Portanto, $FI(P)$ é uma K -álgebra e $I(P)$ é um $FI(P)$ -bimódulo. \square

No caso em que P é localmente finito, $FI(P)$ também é denotado por $I(P, K)$ e, neste caso, também temos que $I(P) = FI(P)$. A álgebra $I(P, K)$ de um poset localmente finito P é usualmente chamada de álgebra de incidência de P sobre K .

Definição 2.1.2. Dados um poset P e $\alpha \in I(P)$, definimos o *suporte* de α como sendo o conjunto

$$\text{supp}(\alpha) = \{(x, y) \in P \times P : \alpha(x, y) \neq 0\}.$$

Para cada par $x, y \in P$, com $x \leq y$, definimos $\delta_{xy} \in FI(P)$ por

$$\delta_{xy}(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

e escrevemos δ_x para δ_{xx} . Tal elemento de $FI(P)$ será frequentemente usado no decorrer de nosso trabalho.

O próximo resultado caracteriza os elementos de $FI(P)$ quando P é finito.

Proposição 2.1.3. *Se P um poset finito, então $FI(P) = I(P, K) = \bigoplus_{x \leq y} K\delta_{xy}$.*

Demonstração: Seja $f \in I(P, K)$. Para todos $u, v \in P$,

$$\left(\sum_{x \leq y} f(x, y)\delta_{xy} \right) (u, v) = f(u, v).$$

Daí $f = \sum_{x \leq y} f(x, y)\delta_{xy}$.

Além disso, se $\sum_{x \leq y} f(x, y)\delta_{xy} = 0$, então $f(x, y) = 0$, para todo par (x, y) , uma vez que $\delta_{xy}(x, y) = 1$. Assim, $f(x, y)\delta_{xy} = 0$, para todos $x, y \in P$. Portanto $FI(P) = I(P, K) = \bigoplus_{x \leq y} K\delta_{xy}$. \square

No próximo resultado descrevemos os elementos inversíveis de $FI(P)$, como segue.

Teorema 2.1.4. *Sejam P um poset qualquer e $f \in FI(P)$. Então f tem inverso multiplicativo em $FI(P)$ se, e só se, $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$.*

Demonstração: Suponhamos $f \in FI(P)$ inversível. Então existe $g \in FI(P)$ tal que $fg = \delta$. Assim, dado $x \in P$,

$$(fg)(x, x) = f(x, x)g(x, x) = \delta(x, x) = 1.$$

Como $f(x, x), g(x, x) \in K$ e K é corpo, segue que $f(x, x) \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos $f(x, x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Observe que se existir $g \in I(P)$ satisfazendo:

$$(i) \quad g(x, x) = f(x, x)^{-1}, \text{ para todo } x \in P;$$

$$(ii) \quad g(u, v) = -f(u, u)^{-1} \sum_{u < x \leq v} f(u, x)g(x, v), \text{ para todos } u, v \in P, u < v,$$

então g será o inverso à direita de f . De fato, se $u < v$ em P então por (ii), $f(u, u)g(u, v) = - \sum_{u < x \leq v} f(u, x)g(x, v)$. Logo,

$$(fg)(u, v) = \sum_{u \leq x \leq v} f(u, x)g(x, v) = 0 = \delta(u, v).$$

Além disso, se $g(x, x) = f(x, x)^{-1}$, para todo $x \in P$, então

$$(fg)(x, x) = f(x, x)g(x, x) = 1 = \delta(x, x).$$

Portanto $fg = \delta$ e g é o inverso à direita de f .

Vamos provar a existência de $g \in FI(P)$ satisfazendo as condições (i) e (ii).

Para cada $x \in P$, defina $g(x, x) = f(x, x)^{-1}$. Sejam $u, v \in P, u < v$. Seja $C_f(u, v)$ o número de subsegmentos $[x, y] \subset [u, v]$ tal que $x \neq y$ e $f(x, y) \neq 0$. Como $f \in FI(P)$, temos que $C_f(u, v)$ é finito. Façamos a demonstração por indução sobre $C_f(u, v)$.

Se $C_f(u, v) = 0$, então $f(x, y) = 0$ para todos $x, y \in [u, v]$ com $x < y$. Neste caso, definimos $g(u, v) = 0$ e a condição está satisfeita. Se $C_f(u, v) = 1$, então existe um único subsegmento $[x, y] \subset [u, v]$ com $x \neq y$ e $f(x, y) \neq 0$. Temos duas possibilidades para tal subsegmento, a saber, $[u, x_0]$, com $u < x_0 \leq v$ e $[x_0, y_0]$, com $u < x_0 < y_0 \leq v$.

No primeiro caso, $f(u, x_0) \neq 0$ e $C_f(x_0, v) = 0$. Logo,

$$g(x_0, v) = \begin{cases} f(v, v)^{-1}, & \text{se } x_0 = v \\ 0, & \text{se } x_0 \neq v \end{cases}.$$

Definimos então

$$g(u, v) = -f(u, u)^{-1}f(u, x_0)g(x_0, v) = \begin{cases} -f(u, u)^{-1}f(u, x_0)g(x_0, v), & \text{se } x_0 = v \\ 0, & \text{se } x_0 \neq v \end{cases}.$$

No segundo caso, $f(u, x) = 0$, para todo $x \in P$ tal que $u < x \leq v$. Definimos, neste caso, $g(u, v) = 0$. Portanto, se $C_f(u, v) = 1$, definimos $g(u, v)$ satisfazendo (ii).

Agora, suponhamos que $g(x, y)$ está definida para todo $x, y \in P$ tal que $C_f(x, y) < n$. Suponha que $C_f(u, v) = n$. Se $f(u, x) \neq 0$ para algum $x \in P$ tal que $u < x \leq v$, então $C_f(x, v) \leq n - 1$ e, pela hipótese de indução, $g(x, v)$ está definido. Assim, todas as parcelas de (ii) estão definidas e, uma vez que tal soma é finita, segue que $g(u, v)$ está definido. Se $f(u, x) = 0$ para todo $x \in P$ tal que $u < x \leq v$, definimos $g(u, v) = 0$. Portanto $g(u, v)$ está definido e satisfaz a condição (ii).

Segue que existe $g \in I(P)$ satisfazendo as condições (i) e (ii) e, portanto, $fg = \delta$.

De maneira análoga é possível construir $h \in I(P)$ tal que $hf = \delta$. Tal h pode ser construído de modo que $h(x, x) = f(x, x)^{-1}$ e

$$h(u, v) = -f(v, v) \sum_{u \leq x < v} h(u, x)f(x, v).$$

Daí, como $f \in FI(P)$ e $g, h \in I(P)$, então $hf \in I(P)$, $fg \in I(P)$ e, conseqüentemente, $(hf)g = h(fg) \in I(P)$. Assim, $g = \delta g = (hf)g = h(fg) = h\delta = h$. Portanto, $fg = gf = \delta$.

Suponhamos que $g \notin FI(P)$. Então podemos encontrar um segmento $[x, y]$ e um número infinito de subsegmentos $[u_i, v_i] \subset [x, y]$, com $u_i \neq v_i$ tal que $g(u_i, v_i) \neq 0$. Como $fg = \delta = gf$ e $u_i \neq v_i$, temos

$$0 = (gf)(u_i, v_i) = \sum_{u_i \leq z_i \leq v_i} g(u_i, z_i)f(z_i, v_i) = g(u_i, v_i)f(v_i, v_i) + \sum_{u_i \leq z_i < v_i} g(u_i, z_i)f(z_i, v_i),$$

ou seja,

$$g(u_i, v_i) = -f(v_i, v_i)^{-1} \sum_{u_i \leq z_i < v_i} f^{-1}(u_i, z_i) f(z_i, v_i), \quad (2.2)$$

e

$$0 = (fg)(u_i, v_i) = \sum_{u_i \leq z_i \leq v_i} f(u_i, z_i) g(z_i, v_i) = f(u_i, u_i) g(u_i, v_i) + \sum_{u_i < z_i \leq v_i} f(u_i, z_i) g(z_i, v_i),$$

ou seja,

$$g(u_i, v_i) = -f(u_i, u_i)^{-1} \sum_{u_i < z_i \leq v_i} f(u_i, z_i) g(z_i, v_i). \quad (2.3)$$

Sendo $g(u_i, v_i) \neq 0$, de (2.2) segue que, para cada i , existe z_i tal que $f(z_i, v_i) \neq 0$. Mas o número de segmentos $[z_i, v_i]$ que satisfaz $f(z_i, v_i) \neq 0$ é finito, uma vez que $f \in FI(P)$. Logo $|\{v_i\}| < \infty$. Analogamente, de (2.3) segue que $|\{u_i\}| < \infty$. Assim, o número de subsegmentos $[u_i, v_i] \subset [x, y]$ satisfazendo $g(u_i, v_i) \neq 0$ é finito, o que é uma contradição. Logo $g \in FI(P)$ e, portanto, f é inversível em $FI(P)$ com inverso g . \square

Exemplo 2.1.5. Uma maneira simples de visualizar o teorema anterior é considerarmos o poset $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ com a ordem usual dos números naturais. Seja $UT_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares superiores sobre \mathbb{R} . Podemos identificar $I(I_n, \mathbb{R})$ com a álgebra $UT_n(\mathbb{R})$, associando cada elemento $f \in I(I_n, \mathbb{R})$ à matriz A com entradas $a_{ij} = f(i, j)$, notando que se $i \not\leq j$ então $f(i, j) = 0$, isto é,

$$f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & \dots & f(1,n) \\ 0 & f(2,2) & f(2,3) & \dots & f(2,n) \\ \vdots & 0 & f(3,3) & \dots & f(3,n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(n,n) \end{pmatrix}.$$

É interessante lembrar que uma matriz triangular superior só possui inversa se nenhum elemento de sua diagonal principal é nulo, evidenciando o que acabamos de mostrar no teorema anterior.

Do Teorema 2.1.4 seguem os três próximos corolários.

Corolário 2.1.6. *Os elementos inversíveis à direita, à esquerda e bilaterais em $FI(P)$ coincidem.*

Demonstração: Suponhamos $f \in FI(P)$ inversível à direita. Então existe $g \in FI(P)$ tal que $fg = \delta$. Assim, dado $x \in P$,

$$(fg)(x, x) = f(x, x)g(x, x) = 1.$$

Como K é corpo e $f(x, x) \in K$, temos que $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Daí, pelo teorema anterior f é inversível em $FI(P)$ e, conseqüentemente, possui um inverso à esquerda, digamos $h \in FI(P)$. Além disso,

$$h = h\delta = h(fg) = (hf)g = \delta g = g.$$

Portanto os inversos à direita e à esquerda de f coincidem.

De maneira análoga, se $f \in FI(P)$ é inversível à esquerda, mostra-se que f também é inversível à direita e que os inversos à esquerda e à direita coincidem. \square

Corolário 2.1.7. *Dado $f \in FI(P)$, $f \in \text{Rad}(FI(P))$ se, e só se, $f(x, x) = 0$ para todo $x \in P$.*

Demonstração: Seja $f \in FI(P)$. Temos que $f \in \text{Rad}(FI(P))$ se, e somente se, $\delta - gf$ é inversível, para toda $g \in FI(P)$. Assim, pelo teorema anterior, dado $x \in P$

$$(\delta - gf)(x, x) = 1 - g(x, x)f(x, x) \neq 0.$$

Logo, $g(x, x)f(x, x) \neq 1$, para todos $g \in FI(P)$ e $x \in P$, ou seja, $f(x, x)$ não é inversível em K , para todo $x \in P$. Como K é um corpo, segue que $f(x, x) = 0$, para todo $x \in P$. \square

Exemplo 2.1.8. Considerando ainda o Exemplo 2.1.5, tome $f \in \text{Rad}(I(I_n, \mathbb{R}))$. Então, pelo

corolário anterior, f pode ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & f(1,2) & f(1,3) & \dots & f(1,n) \\ 0 & 0 & f(2,3) & \dots & f(2,n) \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & f(3,n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Corolário 2.1.9. *O anel quociente $\frac{FI(P)}{\text{Rad}(FI(P))}$ é comutativo.*

Demonstração: Suponhamos que $\frac{FI(P)}{\text{Rad}(FI(P))}$ não seja comutativo. Então existem $f, g \in FI(P)$ tal que

$$fg + \text{Rad}(FI(P)) \neq gf + \text{Rad}(FI(P)).$$

Daí, $fg - gf \notin \text{Rad}(FI(P))$. Então, pelo corolário anterior, existe $x \in P$ tal que $(fg - gf)(x, x) \neq 0$ ou seja, $f(x, x)g(x, x) \neq g(x, x)f(x, x)$ para algum $x \in P$, o que é um absurdo uma vez que, dado $x \in P$, $f(x, x), g(x, x)$ estão em K , que é corpo. \square

2.2 Elementos idempotentes e regulares de $FI(P)$

Afim de descrever os elementos idempotentes e regulares de $FI(P)$, apresentaremos nesta seção alguns resultados que fornecem características específicas de cada um desses elementos, bem como informações que relacionam os mesmos. Começamos com os idempotentes.

Proposição 2.2.1. *Seja $f \in FI(P)$ um elemento idempotente. Então $f(x, x) = 0$ ou $f(x, x) = 1$, para cada $x \in P$.*

Demonstração: Se f é idempotente, então

$$f(x, x) = f^2(x, x) = f(x, x)f(x, x),$$

para todo $x \in P$, ou seja, $f(x, x)(f(x, x) - 1) = 0$, para todo $x \in P$. Como K é corpo, segue que $f(x, x) = 0$ ou $f(x, x) = 1$. \square

Antes de prosseguirmos no estudo da álgebra de incidência finitária, precisaremos do conceito de elemento diagonal, que será fundamental para a demonstração de grande parte dos resultados que ainda serão apresentados neste capítulo.

Definição 2.2.2. Dado um elemento $f \in FI(P)$, dizemos que f é *diagonal* se $f(x, y) = 0$, para todos $x, y \in P$ com $x \neq y$.

Corolário 2.2.3. *Seja $f \in FI(P)$ um elemento diagonal. Então f é idempotente se, e só se, $f(x, x) = 0$ ou $f(x, x) = 1$, para todo $x \in P$.*

Demonstração: Seja $f \in FI(P)$ um elemento diagonal tal que, dado $x \in P$, $f(x, x) = 0$ ou $f(x, x) = 1$. Então,

$$f^2(x, x) = f(x, x)f(x, x) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x, x) = 1 \\ 0, & \text{se } f(x, x) = 0 \end{cases} = f(x, x).$$

E, se $x < y$ em P , então

$$f^2(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)f(z, y) = 0 = f(x, y).$$

Portanto f é idempotente.

A recíproca segue diretamente da proposição anterior. □

Teorema 2.2.4. *Dado $\alpha \in FI(P)$ idempotente, existe $\epsilon \in FI(P)$ idempotente diagonal tal que α é conjugado a ϵ , de modo que $\alpha(x, x) = \epsilon(x, x)$, para todo $x \in P$.*

Demonstração: Sejam $\alpha, \epsilon \in FI(P)$ tal que α é idempotente e ϵ é diagonal definida por $\epsilon(x, x) = \alpha(x, x)$, para todo $x \in P$. Segue da Proposição 2.2.1 e do Corolário 2.2.3 que ϵ é idempotente. Então, $\alpha(x, x) - \epsilon(x, x) = 0$ e, pelo Corolário 2.1.7, $\alpha - \epsilon \in \text{Rad}(FI(P))$. Fazamos $\rho = \alpha - \epsilon$. Dessa forma, dado $x \in P$, $\rho(x, x) = 0$. Também,

$$\rho - \rho^2 = (\alpha - \epsilon) - (\alpha - \epsilon)^2 = -2\epsilon + \alpha\epsilon + \epsilon\alpha,$$

e

$$\epsilon\rho + \rho\epsilon = \epsilon\alpha + \alpha\epsilon - 2\epsilon.$$

Logo

$$\rho - \rho^2 = \epsilon\rho + \rho\epsilon. \quad (2.4)$$

Multiplicando à esquerda ambos os lados de (2.4) por ϵ , obtemos

$$\epsilon\rho - \epsilon\rho^2 = \epsilon\rho + \epsilon\rho\epsilon$$

o que nos dá

$$\epsilon\rho\epsilon + \epsilon\rho^2 = 0. \quad (2.5)$$

Seja $\beta = \delta + (2\epsilon - \delta)\rho$. Dado $x \in P$, temos $\beta(x, x) = 1$, uma vez que $\rho(x, x) = 0$. Então, $\beta(x, x) \neq 0$, para todo $x \in P$ e, pelo Teorema 2.1.4, existe $\beta^{-1} \in FI(P)$. Agora,

$$\beta\alpha = (\delta + 2\epsilon\rho - \rho)(\epsilon + \rho) = \epsilon + \rho + 2(\epsilon\rho\epsilon + \epsilon\rho^2) - \rho\epsilon - \rho^2.$$

Então, por (2.5), temos

$$\beta\alpha = \epsilon + \rho - \rho\epsilon - \rho^2 = \epsilon + \epsilon\rho.$$

Por outro lado,

$$\epsilon\beta = \epsilon(\delta + 2\epsilon\rho - \rho) = \epsilon + \epsilon\rho.$$

Logo $\beta\alpha = \epsilon\beta$, donde segue que $\alpha = \beta^{-1}\epsilon\beta$. Portanto α e ϵ são conjugados. \square

As informações desse último resultado acerca dos elementos idempotentes diagonais serão de grande importância para a demonstração do próximo teorema, que caracteriza os elementos regulares de $FI(P)$.

Teorema 2.2.5. *Um elemento $\alpha \in FI(P)$ é regular se, e só se, existem $\epsilon, \beta, \gamma \in FI(P)$ tal que $\alpha = \beta\epsilon\gamma$, onde ϵ é idempotente diagonal e $\beta, \gamma \in U(FI(P))$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in FI(P)$ e suponha que existam $\epsilon, \beta, \gamma \in FI(P)$ tal que $\alpha = \beta\epsilon\gamma$, com ϵ idempotente e $\beta, \gamma \in U(FI(P))$. Tome $\chi = \gamma^{-1}\epsilon\beta^{-1} \in FI(P)$. Assim,

$$\alpha\chi\alpha = (\beta\epsilon\gamma)(\gamma^{-1}\epsilon\beta^{-1})(\beta\epsilon\gamma) = \beta\epsilon^3\gamma = \beta\epsilon\gamma = \alpha.$$

Portanto α é regular.

Reciprocamente, suponha $\alpha \in FI(P)$ regular. Então existe $\chi \in FI(P)$ tal que $\alpha = \alpha\chi\alpha$. Note que $\alpha\chi$ e $\chi\alpha$ são idempotentes. De fato,

$$(\alpha\chi)^2 = (\alpha\chi)(\alpha\chi) = (\alpha\chi\alpha)\chi = \alpha\chi$$

e

$$(\chi\alpha)^2 = (\chi\alpha)(\chi\alpha) = \chi(\alpha\chi\alpha) = \chi\alpha.$$

Então, pelo teorema anterior, existem $\eta, \gamma, \epsilon, \epsilon_1 \in FI(P)$, onde η e γ são inversíveis e ϵ e ϵ_1 são idempotentes diagonais tais que $\alpha\chi = \eta^{-1}\epsilon\eta$, $\chi\alpha = \gamma^{-1}\epsilon_1\gamma$ e, além disso, $(\alpha\chi)(x, x) = \epsilon(x, x)$ e $(\chi\alpha)(x, x) = \epsilon_1(x, x)$, para todo $x \in P$. Assim,

$$\epsilon(x, x) = \alpha(x, x)\chi(x, x) = \chi(x, x)\alpha(x, x) = \epsilon_1(x, x).$$

Além disso, como ϵ e ϵ_1 são diagonais, $\epsilon_1(x, y) = 0 = \epsilon(x, y)$, sempre que $x \neq y$. Portanto $\epsilon = \epsilon_1$. Note também que, para todo $x \in P$, $\epsilon(x, x) = \alpha(x, x)\chi(x, x)$ e $\alpha(x, x) = \alpha(x, x)\chi(x, x)\alpha(x, x)$. Então,

$$\epsilon(x, x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x, x) = 0,$$

para todo $x \in P$. Agora,

$$\alpha = \alpha\chi\alpha = (\alpha\chi\alpha)\chi(\alpha\chi\alpha) = (\alpha\chi)(\alpha\chi\alpha)(\chi\alpha) = (\eta^{-1}\epsilon\eta)\alpha(\gamma^{-1}\epsilon\gamma) = \eta^{-1}\epsilon(\eta\alpha\gamma^{-1})\epsilon\gamma. \quad (2.6)$$

Como $\eta, \gamma \in U(FI(P))$, temos que $\eta(x, x) \neq 0$ e $\gamma(x, x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Assim, dado $x \in P$,

$$(\eta\alpha\gamma^{-1})(x, x) = 0 \Leftrightarrow \eta(x, x)\alpha(x, x)\gamma^{-1}(x, x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x, x) = 0 \Leftrightarrow \epsilon(x, x) = 0. \quad (2.7)$$

Afirmamos que $\eta\alpha\gamma^{-1}$ pode ser escrito da forma $\eta\alpha\gamma^{-1} = \eta_1\epsilon + \rho$, onde η_1 é diagonal inversível e $\rho \in \text{Rad}(FI(P))$. De fato, defina $\eta_1 \in FI(P)$ de forma que $\eta_1(x, y) = 0$ se $x \neq y$ e

$$\eta_1(x, x) = \begin{cases} (\eta\alpha\gamma^{-1})(x, x), & \text{se } \epsilon(x, x) = 1 \\ 1, & \text{se } \epsilon(x, x) = 0 \end{cases}.$$

Mostremos que $(\eta\alpha\gamma^{-1} - \eta_1\epsilon) \in \text{Rad}(FI(P))$. Com efeito, dado $x \in P$, temos

$$(\eta\alpha\gamma^{-1} - \eta_1\epsilon)(x, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \epsilon(x, x) = 1 \\ 0, & \text{se } \epsilon(x, x) = 0 \end{cases},$$

por (2.7). Ou seja, $(\eta\alpha\gamma^{-1} - \eta_1\epsilon)(x, x) = 0$ para todo $x \in P$. Então, pelo Teorema 2.1.7, $\eta\alpha\gamma^{-1} - \eta_1\epsilon \in \text{Rad}(FI(P))$. Logo, existe $\rho \in \text{Rad}(FI(P))$ tal que $\eta\alpha\gamma^{-1} - \eta_1\epsilon = \rho$, ou seja, $\eta\alpha\gamma^{-1} = \eta_1\epsilon + \rho$. Além disso, da forma como foi definida η_1 , $\eta_1(x, x) \neq 0$, para todo $x \in P$. De fato, se $\epsilon(x, x) = 0$, então $\eta_1(x, x) = 1 \neq 0$. Se $\epsilon(x, x) = 1$, por (2.7) temos, $(\eta\alpha\gamma^{-1})(x, x) \neq 0$ e, portanto, $\eta_1(x, x) \neq 0$.

Agora, sabendo que elementos diagonais comutam entre si e sendo ϵ e η_1 diagonais, temos

$$\epsilon\eta\alpha\gamma^{-1}\epsilon = \epsilon(\eta_1\epsilon + \rho)\epsilon = \eta_1\epsilon + \epsilon\rho\epsilon = (\eta_1 + \epsilon\rho)\epsilon. \quad (2.8)$$

Temos também que $\eta_1 + \epsilon\rho$ é inversível pois, dado $x \in P$,

$$(\eta_1 + \epsilon\rho)(x, x) = \eta_1(x, x) + \epsilon(x, x)\rho(x, x) = \eta_1(x, x) \neq 0.$$

Então, de (2.6) e (2.8), temos

$$\alpha = \eta^{-1}\epsilon\eta\alpha\gamma^{-1}\epsilon\gamma = \eta^{-1}(\eta_1 + \epsilon\rho)\epsilon\gamma.$$

Como $\eta^{-1}(\eta_1 + \epsilon\rho)$ e γ são inversíveis e ϵ é idempotente diagonal, temos o desejado. \square

2.3 Super-regularidade em $FI(P)$ e o centro de $FI(P)$

Nesta seção, veremos que tanto os elementos super-regulares quanto o centro de $FI(P)$ estão estreitamente relacionados às componentes conexas de P . Nosso objetivo aqui é descrever os elementos super-regulares de $FI(P)$ e o centro desta álgebra.

Seja $\alpha \in FI(P)$ um elemento regular, isto é, existe $\chi \in FI(P)$ tal que $\alpha = \alpha\chi\alpha$. É fácil ver que o elemento $\alpha^* = \chi\alpha\chi$ satisfaz

$$\alpha\alpha^*\alpha = \alpha \quad \text{e} \quad \alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*. \quad (2.9)$$

Definição 2.3.1. Dado $\alpha \in FI(P)$, α é dito *super-regular* se existe um único $\alpha^* \in FI(P)$ satisfazendo (2.9).

Notemos que nem sempre um elemento regular é super-regular, pois embora a regularidade de $\alpha \in FI(P)$ implique na existência de α^* satisfazendo (2.9), sua unicidade não pode ser garantida. No entanto, é claro que a super-regularidade implica na regularidade.

Proposição 2.3.2. *O zero e os elementos inversíveis de $FI(P)$ são super-regulares.*

Demonstração: Seja $\alpha \in U(FI(P))$. Primeiro note que α e 0 são regulares pois $\alpha = \alpha\alpha^{-1}\alpha$ e, dado $\beta \in FI(P)$, $0 = 0\beta 0$. Então podemos tomar $0^* = \beta 0\beta = 0$ e $\alpha^* = \alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$. Assim, pela unicidade do zero e de α^{-1} , segue que 0 e α são super-regulares. \square

Uma vez que escrevemos um poset P como a união disjunta de suas componentes conexas, é possível relacionar $FI(P)$ com o produto direto das álgebras de incidência finitárias de cada componente conexa, como apresentamos no próximo teorema.

Teorema 2.3.3. *Seja $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ um poset escrito como a união disjunta de suas componentes conexas. Então $FI(P) \cong \prod_{i \in I} FI(P_i)$.*

Demonstração: Defina

$$\psi : FI(P) \longrightarrow \prod_{i \in I} FI(P_i)$$

tal que $\psi(\alpha) = (\alpha_i)$, $\alpha \in FI(P)$, onde $\alpha_i = \alpha|_{P_i \times P_i}$, $i \in I$. Não é difícil ver que ψ está bem definida, isto é, $\psi(FI(P)) \subset \prod_{i \in I} FI(P_i)$ e que ψ é um homomorfismo de K -álgebras.

Se $\psi(\alpha) = 0$, então $\alpha_i = 0$, para todo $i \in I$. Se $x, y \in P$ e $x \leq y$, então $x, y \in P_j$, para algum $j \in I$. Logo $\alpha(x, y) = \alpha_j(x, y) = 0$. Segue que $\alpha = 0$ e, portanto ψ é injetora.

Dado $(\beta_i) \in \prod_{i \in I} FI(P_i)$, seja $\alpha : P \times P \longrightarrow K$ definida por

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \beta_i(x, y), & \text{se } x, y \in P_i, \text{ para algum } i \in I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostremos que $\alpha \in FI(P)$. Sejam $x, y \in P$. Suponhamos $x \not\leq y$. Se x e y não pertencem a uma mesma componente conexa, então $\alpha(x, y) = 0$. E, se $x, y \in P_i$, para algum $i \in I$, então

$\alpha(x, y) = \beta_i(x, y) = 0$. Logo $\alpha \in I(P)$. Agora, se $x \leq y$ e $\alpha(u, v) \neq 0$ para $x \leq u < v \leq y$, então existe $i \in I$ tal que $x, y, u, v \in P_i$ e $\beta_i(u, v) = \alpha(u, v) \neq 0$. Logo, como $\beta_i \in FI(P_i)$, segue que $\alpha \in FI(P_i)$. Além disso, $\psi(\alpha) = (\beta_i)$ e, portanto, ψ é sobrejetora. \square

Denotemos $U(FI(P))^0 = U(FI(P)) \cup \{0\}$, o qual é um monóide com o produto.

Proposição 2.3.4. *Se P é um poset conexo e S é o conjunto de todos os elementos super-regulars de $FI(P)$, então $S \subset U(FI(P))^0$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in S$. Então α é regular e, pelo Teorema 2.2.5, existem $\epsilon, \beta, \gamma \in FI(P)$ onde β e γ são inversíveis e ϵ é idempotente diagonal tais que $\alpha = \beta\epsilon\gamma$ e, portanto, $\epsilon = \beta^{-1}\alpha\gamma^{-1}$. Afirmamos que ϵ é também super-regular, ou seja, que $\epsilon \in S$. De fato, como α é super-regular, existe um único α^* satisfazendo (2.9). Tome $\epsilon^* = \gamma\alpha^*\beta$. Então

$$\epsilon\epsilon^*\epsilon = (\beta^{-1}\alpha\gamma^{-1})(\gamma\alpha^*\beta)(\beta^{-1}\alpha\gamma^{-1}) = \beta^{-1}(\alpha\alpha^*\alpha)\gamma^{-1} = \beta^{-1}\alpha\gamma^{-1} = \epsilon$$

e

$$\epsilon^*\epsilon\epsilon^* = (\gamma\alpha^*\beta)(\beta^{-1}\alpha\gamma^{-1})(\gamma\alpha^*\beta) = \gamma(\alpha^*\alpha\alpha^*)\beta = \gamma\alpha^*\beta = \epsilon^*.$$

Portanto ϵ^* satisfaz (2.9) e mais, pela unicidade de α^* segue também a unicidade de ϵ^* . Dessa forma, ϵ é idempotente, diagonal e super-regular.

Suponhamos que $\epsilon \notin U(FI(P))^0$, ou seja, $\epsilon \neq 0$ e ϵ não é inversível. Então existem $x, y \in P$ tais que $\epsilon(x, x) \neq \epsilon(y, y)$. Como P é conexo, podemos escolher x e y de modo que $x < y$. De fato, como P é conexo, dados $u, v \in P$ existem $u = x_0, x_1, \dots, x_n = v \in P$ tais que $x_j \leq x_{j+1}$ ou $x_{j+1} \leq x_j$, para todo $j = 0, \dots, n-1$. Logo, se $\epsilon(x, x) \neq \epsilon(y, y)$ apenas quando $x \not\leq y$, então $\epsilon(x_j, x_j) = \epsilon(x_{j+1}, x_{j+1})$ para todo $j = 0, \dots, n-1$ e, conseqüentemente, $\epsilon(u, u) = \epsilon(v, v)$, para todos $u, v \in P$, o que é uma contradição.

Defina $\eta = \epsilon + \delta_{xy}$. Afirmamos que $\epsilon\eta\epsilon = \epsilon$ e $\eta\epsilon\eta = \eta$. De fato, note que $\epsilon\eta\epsilon = \epsilon(\epsilon + \delta_{xy})\epsilon = \epsilon + \epsilon\delta_{xy}\epsilon$. Além disso, dados $u, v \in P$,

$$\begin{aligned}
(\epsilon\delta_{xy}\epsilon)(u, v) &= \sum_{u \leq z \leq v} \epsilon(u, z)(\delta_{xy}\epsilon)(z, v) \\
&= \epsilon(u, u)(\delta_{xy}\epsilon)(u, v) \\
&= \epsilon(u, u) \sum_{u \leq l \leq v} \delta_{xy}(u, l)\epsilon(l, v) \\
&= \epsilon(u, u)\delta_{xy}(u, v)\epsilon(v, v) \\
&= \begin{cases} \epsilon(x, x)\epsilon(y, y), & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\epsilon\eta\epsilon = \epsilon$. Também, $\eta\epsilon\eta = (\epsilon + \delta_{xy})\epsilon(\epsilon + \delta_{xy}) = \epsilon + \epsilon\delta_{xy} + \delta_{xy}\epsilon + \delta_{xy}\epsilon\delta_{xy}$. Sejam $u, v \in P$. Temos

$$\begin{aligned}
(\delta_{xy}\epsilon\delta_{xy})(u, v) &= \sum_{u \leq z \leq w \leq v} \delta_{xy}(u, z)\epsilon(z, w)\delta_{xy}(w, v) \\
&= \begin{cases} \delta_{xy}(x, x)\epsilon(x, y)\delta_{xy}(y, y), & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $\delta_{xy}\epsilon\delta_{xy} = 0$ e, portanto, $\eta\epsilon\eta = \epsilon + \epsilon\delta_{xy} + \delta_{xy}\epsilon$. Mas,

$$\begin{aligned}
(\epsilon\delta_{xy} + \delta_{xy}\epsilon)(u, v) &= \sum_{u \leq z \leq v} \epsilon(u, z)\delta_{xy}(z, v) + \sum_{u \leq z \leq v} \delta_{xy}(u, z)\epsilon(z, v) \\
&= \epsilon(u, u)\delta_{xy}(u, v) + \delta_{xy}(u, v)\epsilon(v, v) \\
&= \delta_{xy}(u, v)(\epsilon(u, u) + \epsilon(v, v)) \\
&= \begin{cases} \epsilon(x, x) + \epsilon(y, y), & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \delta_{xy}(u, v).
\end{aligned}$$

Logo $\epsilon\delta_{xy} + \delta_{xy}\epsilon = \delta_{xy}$ e, portanto, $\eta\epsilon\eta = \epsilon + \delta_{xy} = \eta$.

Segue que $\eta = \epsilon^*$. Por outro lado, como ϵ é idempotente, $\epsilon\epsilon\epsilon = \epsilon$. Logo, $\epsilon = \epsilon^*$ e, portanto, $\eta = \epsilon$. Assim, $\delta_{xy} = 0$, o que é uma contradição. Portanto $\epsilon \in U(FI(P))^0$.

Agora, lembremos que $\alpha = \beta\epsilon\gamma$. Então, se $\epsilon = 0$, temos $\alpha = 0$. E se $\epsilon \in U(FI(P))$, então α é o produto de elementos inversíveis e, conseqüentemente, inversível. Logo, $\alpha \in U(FI(P))^0$, como queríamos demonstrar. \square

Estamos aptos a demonstrar o próximo resultado, que relaciona os elementos super-regulars de $FI(P)$ e os elementos inversíveis de $FI(P_i)$, onde cada P_i é uma componente conexa de P .

Corolário 2.3.5. *Seja $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ um poset escrito como a união disjunta de suas componentes conexas. Então o conjunto de todos os elementos super-regulars de $FI(P)$ é igual a $\prod_{i \in I} U(FI(P_i))^0$.*

Demonstração: Vamos identificar $FI(P)$ com $\prod_{i \in I} FI(P_i)$. Seja S o conjunto de todos os elementos super-regulars de $FI(P)$ e seja S_i o conjunto de todos os elementos super-regulars de $FI(P_i)$, $i \in I$. Queremos mostrar que $S = \prod_{i \in I} U(FI(P_i))^0$.

Primeiro, note que $S = \prod_{i \in I} S_i$. De fato, seja $\alpha \in S$. Então $\alpha = (\alpha_i)$, onde $\alpha_i \in FI(P_i)$, $i \in I$. Mostremos que $\alpha_i \in S_i$, $i \in I$. Como α é super-regular, existe um único $\alpha^* = (\chi_i) \in FI(P)$ tal que $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$ e $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$. Então $\alpha_i\chi_i\alpha_i = \alpha_i$ e $\chi_i\alpha_i\chi_i = \chi_i$, para cada $i \in I$. Suponha que exista $\beta_i \in FI(P)$, tal que $\alpha_i\beta_i\alpha_i = \alpha_i$ e $\beta_i\alpha_i\beta_i = \beta_i$. Tomando $\beta = (\beta_i) \in FI(P)$ obtemos $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e $\beta\alpha\beta = \beta$ e, portanto, $\beta = \alpha^*$. Logo $\beta_i = \chi_i$, de onde segue que α_i é super-regular, para todo $i \in I$. Assim, $S \subset \prod_{i \in I} S_i$. A inclusão contrária é análoga.

Pela Proposição 2.3.2, $U(FI(P_i))^0 \subset S_i$ e, pelo que acabamos de mostrar, $\prod_{i \in I} U(FI(P_i))^0 \subset S$. Além disso, como cada P_i é um poset conexo, pela proposição anterior temos que $S_i \subset U(FI(P_i))^0$. Logo, $S = \prod_{i \in I} S_i \subset \prod_{i \in I} U(FI(P_i))^0$ e, portanto, $S = \prod_{i \in I} U(FI(P_i))^0$. \square

No livro *Álgebras de Incidência* [11], Spigel e O'Donnell consideram um poset localmente finito P e apresentam resultados importantes sobre o centro da álgebra de incidência $I(P, K)$. A seguir mostraremos que tais resultados continuam válidos se P for um poset qualquer, não

necessariamente localmente finito.

Seja $f \in FI(P)$ um elemento diagonal. Dizemos que f é *constante no subconjunto* A de P , se $f(x, x) = f(y, y)$, para todo $x, y \in A$.

Teorema 2.3.6. *Suponha que $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ é um poset escrito como união disjunta de suas componentes conexas. Então $\text{Cen}(FI(P))$ é o conjunto de todas as funções diagonais que são constantes em cada componente conexa.*

Demonstração: Suponha que $f \in FI(P)$ seja diagonal e constante em cada componente conexa de P e seja $g \in FI(P)$. Sejam $x, y \in P$ com $x \leq y$. Então x e y estão na mesma componente conexa de P e $f(x, x) = f(y, y)$. Então

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y) = f(x, x)g(x, y)$$

e

$$(gf)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} g(x, z)f(z, y) = g(x, y)f(y, y) = f(y, y)g(x, y) = f(x, x)g(x, y),$$

implicando que $f \in \text{Cen}(FI(P))$.

Mostremos agora que cada elemento de $\text{Cen}(FI(P))$ é uma função diagonal constante nas componentes conexas de P .

Sejam $h \in \text{Cen}(FI(P))$ e $x, y \in P$. Se $x < y$, então

$$h(x, y) = (\delta_x h)(x, y) = (h \delta_x)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} h(x, z) \delta_x(z, y) = 0,$$

pois $x \neq y$ e, portanto, h é uma função diagonal.

Suponhamos agora que x, y são elementos distintos na mesma componente conexa de P . Então existe uma sequência $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ de elementos de P tais que $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Se $n = 1$, então temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$. Se $x \leq y$, então

$$h(x, x) = (h \delta_{xy})(x, y) = (\delta_{xy} h)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta_{xy}(x, z) h(z, y) = h(y, y).$$

Se $y \leq x$, a prova é análoga. Suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para $n-1$, ou seja, $h(x, x) = h(x_{n-1}, x_{n-1})$. Pelo caso $n = 1$ temos que $h(x_{n-1}, x_{n-1}) = h(y, y)$ e com

isto conclui-se que $h(x, x) = h(y, y)$, mostrando assim o desejado. \square

Desse último teorema decorrem os próximos dois corolários, que nos fornecem informações sobre o centro de $FI(P)$.

Corolário 2.3.7. *Se $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ é um poset escrito como união disjunta de suas componentes conexas, então $\text{Cen}(FI(P))$ é isomorfo a $\prod_{i \in I} K$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior podemos definir $\varphi : \text{Cen}(FI(P)) \rightarrow \prod_{i \in I} K$ por $\varphi(f) = (r_i)$, onde $r_i = f(x, x) \in K$, para todo $x \in P_i$. Mostremos que φ é um isomorfismo de anéis.

Dadas $f, g \in \text{Cen}(FI(P))$, sejam $r_i = f(x, x)$ e $s_i = g(x, x)$, para todo $x \in P_i$. Então, $(f + g)(x, x) = f(x, x) + g(x, x) = r_i + s_i$ e $(fg)(x, x) = f(x, x)g(x, x) = r_i s_i$, para todo $x \in P_i$. Assim,

$$\varphi(f + g) = (r_i + s_i) = (r_i) + (s_i) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

$$\varphi(fg) = (r_i s_i) = (r_i)(s_i) = \varphi(f)\varphi(g).$$

Além disso, como $\delta(x, x) = 1$, para todo $x \in P$, então $\varphi(\delta) = 1$. Portanto φ é um homomorfismo de anéis.

Agora, dado $(a_i) \in \prod_{i \in I} K$, considere $g \in FI(P)$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} a_i, & \text{se } x = y \in P_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Temos que $g \in \text{Cen}(FI(P))$ e $\varphi(g) = (a_i)$, implicando assim que φ é sobrejetora.

Seja $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Então $f(x, x) = 0$ para todo $x \in P_i$ e todo $i \in I$. Logo $f(x, x) = 0$ para todo $x \in P$. Como $f \in \text{Cen}(FI(P))$, temos que $f(x, y) = 0$ para todos $x, y \in P$ com $x \neq y$. Segue que $f = 0$ e assim concluímos a injetividade de φ . Portanto φ é um isomorfismo, como queríamos. \square

Corolário 2.3.8. *Se P é um poset conexo então*

$$\text{Cen}(FI(P)) = \{k\delta : k \in K\} \cong K.$$

Demonstração: Obviamente $\{k\delta : k \in K\} \subset \text{Cen}(FI(P))$. Seja $h \in \text{Cen}(FI(P))$. Como P tem apenas uma componente conexa, do teorema anterior temos que h é diagonal e $h(x, x) = k \in K$, para todo $x \in P$, ou seja, $h = k\delta$. \square

Isomorfismos, Anti-isomorfismos e Involuções

Seria natural pensar que, dados posets isomorfos P e Q , exista também um isomorfismo entre $FI(P)$ e $FI(Q)$, e isso de fato acontece. Mas será que o contrário também vale? Neste capítulo mostraremos que a resposta para tal questão é afirmativa. Mostraremos também que existe um antiautomorfismo (involução) de P se, e somente se, existe um antiautomorfismo (involução) de $FI(P)$. Aqui nos basearemos nos resultados apresentados nos artigos [5] e [8].

3.1 O Problema do Isomorfismo

Nesta seção apresentaremos o problema do isomorfismo para álgebras de incidência finitárias. Antes de prosseguirmos precisamos definir o que é um idempotente primitivo e, com isso, apresentar o próximo lema, que relacionará os idempotentes primitivos de $FI(P)$ com os elementos δ_x , $x \in P$.

Definição 3.1.1. Seja A uma K -álgebra. Um idempotente não nulo $\alpha \in A$ é *primitivo* se $\alpha\epsilon = \epsilon\alpha = \epsilon$ para algum idempotente $\epsilon \in A$ implicar que $\epsilon = 0$ ou $\epsilon = \alpha$.

Lema 3.1.2. Um idempotente $\alpha \in FI(P)$ é primitivo se, e somente se, ele é conjugado a δ_x , para algum $x \in P$.

Demonstração: Como mostrado no Exemplo 1.2.27, a conjugação é um automorfismo. Dessa forma, não é difícil ver que a conjugação preserva a primitividade. Pelo Teorema 2.2.4, cada idempotente de $FI(P)$ é conjugado a um idempotente diagonal. Assim, se α é idempo-

tente primitivo, α é conjugado a algum idempotente diagonal que, por sua vez, será também primitivo. Mostremos que os idempotentes primitivos diagonais de $FI(P)$ são os elementos δ_x , com $x \in P$.

Da forma como foi definido, claramente δ_x é um idempotente diagonal. Mostremos que é também primitivo. Seja $\epsilon \in FI(P)$ idempotente tal que $\epsilon\delta_x = \epsilon = \delta_x\epsilon$. Então, dados $u, v \in P$ com $u \leq v$, temos que

$$\epsilon(u, v) = (\epsilon\delta_x)(u, v) = \sum_{u \leq z \leq v} \epsilon(u, z)\delta_x(z, v) = \begin{cases} \epsilon(u, x), & \text{se } v = x \\ 0, & \text{se } v \neq x \end{cases}$$

e

$$\epsilon(u, v) = (\delta_x\epsilon)(u, v) = \sum_{u \leq z \leq v} \delta_x(u, z)\epsilon(z, v) = \begin{cases} \epsilon(x, v), & \text{se } u = x \\ 0, & \text{se } u \neq x \end{cases}.$$

Assim, $\epsilon(u, v) = 0$, se $(u, v) \neq (x, x)$. Como ϵ é idempotente, $\epsilon(x, x) = 0$ ou $\epsilon(x, x) = 1$. Se $\epsilon(x, x) = 0$, então $\epsilon = 0$. Se $\epsilon(x, x) = 1$, então $\epsilon = \delta_x$. Portanto δ_x é primitivo.

Agora, seja $\gamma \in FI(P)$ idempotente primitivo diagonal. Como $\gamma \neq 0$, então existe $x \in P$ tal que $\gamma(x, x) = 1$. Considere o idempotente δ_x . Temos, para $u \leq v$ em P ,

$$(\gamma\delta_x)(u, v) = \sum_{u \leq z \leq v} \gamma(u, z)\delta_x(z, v) = \begin{cases} \gamma(u, x), & \text{se } v = x \\ 0, & \text{se } v \neq x \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v = x \\ 0, & \text{se } u \neq x \text{ ou } v \neq x \end{cases}.$$

Também

$$(\delta_x\gamma)(u, v) = \sum_{u \leq z \leq v} \delta_x(u, z)\gamma(z, v) = \begin{cases} \gamma(x, v), & \text{se } u = x \\ 0, & \text{se } u \neq x \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v = x \\ 0, & \text{se } u \neq x \text{ ou } v \neq x \end{cases}.$$

Logo, $\gamma\delta_x = \delta_x = \delta_x\gamma$. Como γ é primitivo e $\delta_x \neq 0$, temos que $\gamma = \delta_x$.

Portanto, se α é um idempotente primitivo, segue que α é conjugado a δ_x , para algum $x \in P$. Por outro lado, se α é conjugado a δ_x , para algum $x \in P$, segue que α é um idempotente primitivo, uma vez que δ_x é primitivo e a conjugação preserva a primitividade. \square

Note que se $x, y \in P$ são tais que δ_x é conjugado a δ_y , então $x = y$.

Sejam P e Q posets arbitrários. No teorema a seguir usaremos a notação δ_{xy}^P para o elemento δ_{xy} de $FI(P)$ e δ_{zw}^Q para o elemento δ_{zw} de $FI(Q)$.

Teorema 3.1.3. *Sejam P e Q posets arbitrários. Então $FI(P) \cong FI(Q)$ se, e só se, $P \cong Q$.*

Demonstração: Seja $\phi : FI(P) \longrightarrow FI(Q)$ um isomorfismo de K -álgebras. Dado $x \in P$, considere o elemento idempotente primitivo δ_x^P de $FI(P)$. Claramente $\phi(\delta_x^P)$ é também idempotente primitivo em $FI(Q)$. Então, pelo lema anterior, existe $y \in Q$ tal que $\phi(\delta_x^P)$ é conjugado a δ_y^Q . Note que tal y é unico. De fato, se $z \in P$ é tal que $\phi(\delta_x^P)$ é conjugado a δ_z^Q , então $\phi(\delta_x^P) = \alpha\delta_y^Q\alpha^{-1}$ e $\phi(\delta_x^P) = \beta\delta_z^Q\beta^{-1}$, com $\alpha, \beta \in U(FI(Q))$. Assim, $\delta_y^Q = \alpha^{-1}\beta\delta_z^Q\beta^{-1}\alpha = (\alpha^{-1}\beta)\delta_z^Q(\alpha^{-1}\beta)^{-1}$, ou seja, δ_y^Q é conjugado a δ_z^Q e, portanto, $y = z$.

Dessa forma, ϕ induz uma aplicação $\varphi : P \longrightarrow Q$ onde, dado $x \in P$, $\phi(\delta_x^P)$ é conjugado a $\delta_{\varphi(x)}^Q$. Mostremos que φ é um isomorfismo de posets.

Sejam $x, y \in P$ tais que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Sejam $\alpha, \beta \in U(FI(Q))$ tais que $\phi(\delta_x^P) = \alpha\delta_{\varphi(x)}^Q\alpha^{-1}$ e $\phi(\delta_y^P) = \beta\delta_{\varphi(y)}^Q\beta^{-1}$. Então

$$\begin{aligned} \delta_x^P &= \phi^{-1}(\alpha)\phi^{-1}(\delta_{\varphi(x)}^Q)\phi^{-1}(\alpha)^{-1} = \phi^{-1}(\alpha)\phi^{-1}(\delta_{\varphi(y)}^Q)\phi^{-1}(\alpha)^{-1} \\ &= \phi^{-1}(\alpha)\phi^{-1}(\beta)^{-1}\delta_y^P\phi^{-1}(\beta)\phi^{-1}(\alpha)^{-1} \\ &= (\phi^{-1}(\alpha)\phi^{-1}(\beta)^{-1})\delta_y^P(\phi^{-1}(\alpha)\phi^{-1}(\beta)^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Logo $x = y$ e, portanto, φ é injetora.

Dado $z \in Q$, $\phi^{-1}(\delta_z^Q)$ é um idempotente primitivo de $FI(P)$ e, pelo lema anterior, é conjugado a δ_x^P , para algum $x \in P$. Logo $\phi(\delta_x^P)$ é conjugado a δ_z^Q e, portanto, $\varphi(x) = z$, de onde podemos concluir que φ é sobrejetora.

Mostremos agora que, dados $x, y \in P$, $u, v \in Q$,

$$(i) \quad x \leq y \Leftrightarrow \delta_x^P FI(P) \delta_y^P \neq 0;$$

$$(ii) \quad u \leq v \Leftrightarrow \delta_u^Q FI(Q) \delta_v^Q \neq 0.$$

Suponha $x \leq y$. Então $(\delta_x^P \delta_{xy}^P \delta_y^P)(x, y) = 1$. Assim, $\delta_x^P \delta_{xy}^P \delta_y^P \neq 0$ e, portanto, $\delta_x^P FI(P) \delta_y^P \neq 0$. Reciprocamente, suponhamos $\delta_x^P FI(P) \delta_y^P \neq 0$. Então existem $\alpha \in FI(P)$ e $w, z \in P$ tais que $(\delta_x^P \alpha \delta_y^P)(w, z) \neq 0$. Dessa forma, é claro que devemos ter $x = w$ e $y = z$, o que implica $x \leq y$. Portanto vale (i). De forma análoga mostra-se que vale (ii).

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Como $\phi(\delta_x^P)$ e $\phi(\delta_y^P)$ são conjugadas a $\delta_{\varphi(x)}^Q$ e $\delta_{\varphi(y)}^Q$, respectivamente, existem $\beta_1, \beta_2 \in U(FI(Q))$ tais que

$$\phi(\delta_x^P) = \beta_1 \delta_{\varphi(x)}^Q \beta_1^{-1} \quad \text{e} \quad \phi(\delta_y^P) = \beta_2 \delta_{\varphi(y)}^Q \beta_2^{-1}.$$

Por (i) temos que $\delta_x^P FI(P) \delta_y^P \neq 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \phi(\delta_x^P FI(P) \delta_y^P) = \phi(\delta_x^P) FI(Q) \phi(\delta_y^P) \neq 0 &\Rightarrow \beta_1 \delta_{\varphi(x)}^Q \beta_1^{-1} FI(Q) \beta_2 \delta_{\varphi(y)}^Q \beta_2^{-1} \neq 0 \\ &\Rightarrow \beta_1 \delta_{\varphi(x)}^Q FI(Q) \delta_{\varphi(y)}^Q \beta_2^{-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\delta_{\varphi(x)}^Q FI(Q) \delta_{\varphi(y)}^Q \neq 0$ e, por (ii), $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Agora, suponha $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, com $x, y \in P$. Então, por (ii), $\delta_{\varphi(x)}^Q FI(Q) \delta_{\varphi(y)}^Q \neq 0$. Como $\phi(\delta_x^P)$ e $\phi(\delta_y^P)$ são conjugados a $\delta_{\varphi(x)}^Q$ e $\delta_{\varphi(y)}^Q$, respectivamente, existem $\gamma_1, \gamma_2 \in U(FI(Q))$ tais que

$$\phi(\delta_x^P) = \gamma_1 \delta_{\varphi(x)}^Q \gamma_1^{-1} \quad \text{e} \quad \phi(\delta_y^P) = \gamma_2 \delta_{\varphi(y)}^Q \gamma_2^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma_1^{-1} \phi(\delta_x^P) \gamma_1 FI(Q) \gamma_2^{-1} \phi(\delta_y^P) \gamma_2 \neq 0 &\Rightarrow \gamma_1^{-1} \phi(\delta_x^P) FI(Q) \phi(\delta_y^P) \gamma_2 \neq 0 \\ &\Rightarrow \gamma_1^{-1} \phi(\delta_x^P) \phi(FI(P)) \phi(\delta_y^P) \gamma_2 \neq 0 \\ &\Rightarrow \phi(\delta_x^P FI(P) \delta_y^P) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\delta_x^P FI(P) \delta_y^P \neq 0$ e, por (i) temos que $x \leq y$. Portanto φ é um isomorfismo de posets.

Reciprocamente, seja $\phi : P \rightarrow Q$ um isomorfismo de posets. Defina $\psi : FI(P) \rightarrow FI(Q)$ por $\psi(\alpha)(u, v) = \alpha(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$, para todos $\alpha \in FI(P)$ e $u, v \in Q$. Note que ψ está bem definida, ou seja, $\psi(\alpha) \in FI(Q)$, para toda $\alpha \in FI(P)$. De fato, se $u \not\leq v$ em Q , então $\phi^{-1}(u) \not\leq \phi^{-1}(v)$ em P e, neste caso, $\psi(\alpha)(u, v) = \alpha(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) = 0$. Logo $\psi(\alpha) \in I(Q)$. Agora, sejam $[s, t] \subset [u, v] \subset Q$. Então existem $[a, b] \subset [x, y] \subset P$ tais que $s = \phi(a)$, $t = \phi(b)$, $u = \phi(x)$ e $v = \phi(y)$. Dessa forma, se existir um número infinito de subintervalos $[s, t]$ de $[u, v]$ satisfazendo $\psi(\alpha)(s, t) \neq 0$, o número de subintervalos $[a, b]$ de $[x, y]$ satisfazendo $\alpha(a, b) \neq 0$ também será infinito, o que não pode ocorrer pois $\alpha \in FI(P)$. Logo $\psi(\alpha) \in FI(Q)$.

Mostremos que ψ é um isomorfismo de K -álgebras. Sejam $\alpha, \beta \in FI(P)$, $u, v \in Q$ e $k \in K$. Então,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha + \beta)(u, v) = (\alpha + \beta)(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) &= \alpha(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) + \beta(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \\ &= \psi(\alpha)(u, v) + \psi(\beta)(u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi(\alpha)\psi(\beta))(u, v) &= \sum_{u \leq z \leq v} \psi(\alpha)(u, z)\psi(\beta)(z, v) = \sum_{u \leq z \leq v} \alpha(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(z))\beta(\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(v)) \\
&= (\alpha\beta)(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \\
&= \psi(\alpha\beta)(u, v);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\delta)(u, v) = \delta(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) &= \begin{cases} 1, & \text{se } \phi^{-1}(u) = \phi^{-1}(v) \\ 0, & \text{se } \phi^{-1}(u) \neq \phi^{-1}(v) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } u = v \\ 0, & \text{se } u \neq v \end{cases};
\end{aligned}$$

$$\psi(k\alpha)(u, v) = (k\alpha)(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) = k(\alpha(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))) = k\psi(\alpha)(u, v).$$

Dos quatro itens anteriores concluímos que ψ é um homomorfismo de K -álgebras.

De maneira análoga, se definirmos $\eta : FI(Q) \rightarrow FI(P)$ por $\eta(\beta)(x, y) = \beta(\phi(x), \phi(y))$, para todos $x, y \in P$, então η é um homomorfismo de K -álgebras e, claramente $\eta = \psi^{-1}$. Portanto ψ é um isomorfismo. \square

Corolário 3.1.4. *Seja P um poset não localmente finito. Então não existe um poset localmente finito Q tal que $FI(P) \cong I(Q)$.*

Demonstração: Se existisse um poset localmente finito Q satisfazendo $FI(P) \cong I(Q)$, teríamos $FI(P) \cong FI(Q)$, uma vez que $I(Q) = FI(Q)$. Daí, pelo teorema anterior, teríamos $P \cong Q$, o que é um absurdo pois P não é localmente finito. \square

3.2 Antiautomorfismos e involuções em $FI(P)$

Na seção anterior mostramos que dois posets P e Q são isomorfos se, e somente se, $FI(P)$ e $FI(Q)$ são K -álgebras isomorfas. Aqui nosso objetivo é mostrar que um antiautomorfismo (involução) de posets também induz um anti-automorfismo (involução) entre as álgebras de incidência finitárias desses posets e que o contrário também vale.

Iniciamos a seção com um resultado envolvendo um poset e seu dual, definido em 1.1.5. Tal resultado será muito útil para a demonstração do Teorema 3.2.5.

Proposição 3.2.1. *Um poset P tem um antiautomorfismo se, e só se, P é isomorfo ao poset dual \tilde{P} .*

Demonstração: Seja $\varphi : P \rightarrow P$ um antiautomorfismo. Defina $\psi : \tilde{P} \rightarrow P$ por $\psi(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in \tilde{P}$.

Como φ é bijetora, claramente ψ também é. Mostremos que $x \preceq y$ em \tilde{P} se, e só se, $\psi(x) \leq \psi(y)$. Sejam $x, y \in \tilde{P}$ tais que $x \preceq y$. Então $y \leq x$ em P e, portanto, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, o que implica $\psi(x) \leq \psi(y)$ em P . Por outro lado, se $\psi(x) \leq \psi(y)$ em P , para alguns $x, y \in \tilde{P}$, então $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ e, portanto, $y \leq x$ em P . Logo, $x \preceq y$ em \tilde{P} . Portanto ψ é um isomorfismo de posets.

Reciprocamente, se existe um isomorfismo entre \tilde{P} e P , digamos $\psi : \tilde{P} \rightarrow P$, defina $\varphi : P \rightarrow P$ por $\varphi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in P$. Claramente φ é bijetora, uma vez que ψ o é. Além disso, dados $x, y \in P$ com $x \leq y$, temos $y \preceq x$ em \tilde{P} . Daí, $\psi(y) \leq \psi(x)$ e, portanto, $\varphi(y) \leq \varphi(x)$ em P . Agora, se $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ para $x, y \in P$, então $\psi(x) \leq \psi(y)$. Logo, $x \preceq y$ em \tilde{P} e, portanto, $y \leq x$ em P . Portanto φ é um anti-isomorfismo de P . \square

Com o objetivo de obter ferramentas que serão úteis para a demonstração de muitos resultados no decorrer desta dissertação, apresentamos o próximo teorema. Deste decorrerá o Corolário 3.2.3, que será muito importante para provarmos o Teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.2. *A aplicação $\tau : I(P) \rightarrow I(\tilde{P})$ definida por $\tau(\alpha)(x, y) = \alpha(y, x)$, para $x, y \in \tilde{P}$, $\alpha \in I(P)$, é uma bijeção K -linear satisfazendo $\tau(\alpha\beta) = \tau(\beta)\tau(\alpha)$, para todos $\alpha \in I(P)$, $\beta \in FI(P)$. Além disso, $\tau|_{FI(P)} : FI(P) \rightarrow FI(\tilde{P})$ é um anti-isomorfismo de K -álgebras.*

Demonstração: Dados $\alpha, \beta \in I(P)$ tais que $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, temos que, para todos $x, y \in \tilde{P}$, $\tau(\alpha)(x, y) = \tau(\beta)(x, y)$, ou seja, $\alpha(y, x) = \beta(y, x)$. Logo $\alpha = \beta$. Além disso, dada $\gamma \in I(\tilde{P})$, tome $\alpha \in I(P)$ tal que $\alpha(u, v) = \gamma(v, u)$, para todos $u, v \in P$. Então $\tau(\alpha)(x, y) = \alpha(y, x) = \gamma(x, y)$, para todos $x, y \in \tilde{P}$, ou seja $\tau(\alpha) = \gamma$. Portanto τ é bijetora. Claramente, τ é K -linear.

Agora, dados $\alpha \in I(P)$, $\beta \in FI(P)$ e $x, y \in \tilde{P}$, temos

$$\begin{aligned} \tau(\alpha\beta)(x, y) = (\alpha\beta)(y, x) &= \sum_{y \leq z \leq x} \alpha(y, z)\beta(z, x) = \sum_{y \leq z \leq x} \tau(\alpha)(z, y)\tau(\beta)(x, z) \\ &= \sum_{x \leq z \leq y} \tau(\beta)(x, z)\tau(\alpha)(z, y) \\ &= (\tau(\beta)\tau(\alpha))(x, y). \end{aligned}$$

Portanto $\tau(\alpha\beta) = \tau(\beta)\tau(\alpha)$.

Resta mostrar que $\tau(FI(P)) = FI(\tilde{P})$. Seja $\alpha \in FI(P)$. Então, dados $[s, t] \subset [x, y] \subset \tilde{P}$, temos $[t, s] \subset [y, x] \subset P$. Dessa forma, se $\tau(\alpha)(s, t) \neq 0$ para uma quantidade infinita de subintervalos $[s, t]$ de $[x, y]$, teremos $\alpha(t, s) \neq 0$ também para uma quantidade infinita de subintervalos $[t, s]$ de $[y, x]$, o que contraria o fato de α estar em $FI(P)$. Portanto $\tau(\alpha) \in FI(\tilde{P})$, o que nos dá $\tau(FI(P)) \subset FI(\tilde{P})$. Por outro lado, dada $\beta \in FI(\tilde{P})$, tome $\alpha \in I(P)$ tal que $\tau(\alpha) = \beta$. Então $\alpha(u, v) = \beta(v, u)$ para todos $u, v \in P$. De maneira análoga ao que fizemos acima, segue que $\alpha \in FI(P)$, o que nos dá $FI(\tilde{P}) \subset \tau(FI(P))$. Portanto $\tau(FI(P)) = FI(\tilde{P})$. Com isso e com o que já foi mostrado anteriormente podemos concluir que $\tau|_{FI(P)} : FI(P) \rightarrow FI(\tilde{P})$ é um anti-isomorfismo de K -álgebras. \square

Corolário 3.2.3. *Seja P um poset. Então $FI(P)^{op} \cong FI(\tilde{P})$.*

Demonstração: Basta tomar $\psi : FI(P)^{op} \rightarrow FI(\tilde{P})$, definida por $\psi(\alpha) = \tau(\alpha)$, onde τ é a aplicação definida no teorema anterior. \square

Observação 3.2.4. O isomorfismo ψ definido da demonstração do corolário anterior satisfaz $\psi(\delta_x) = \delta_x \in FI(\tilde{P})$, para todo $x \in P$. De fato, dados $u, v \in \tilde{P}$, temos

$$\psi(\delta_x)(u, v) = \delta_x(v, u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v = x \\ 0, & \text{se } u \neq x \text{ ou } v \neq y \end{cases} = \delta_x(u, v).$$

Teorema 3.2.5. *A K -álgebra $FI(P)$ tem um antiautomorfismo (involução) se, e somente se, P tem um antiautomorfismo (involução).*

Demonstração: Seja $\phi : FI(P) \rightarrow FI(P)$ um antiautomorfismo de K -álgebras. Então ϕ induz um isomorfismo $FI(P) \rightarrow FI(P)^{op}$ que também denotaremos por ϕ .

Seja $\psi : FI(P)^{op} \longrightarrow FI(\tilde{P})$ o isomorfismo do Corolário 3.2.3. Logo $\tilde{\phi} := \psi \circ \phi : FI(P) \longrightarrow FI(\tilde{P})$ é um isomorfismo. Assim, pelo Teorema 3.1.3, existe um isomorfismo de posets $\varphi : P \longrightarrow \tilde{P}$ tal que $\tilde{\phi}(\delta_x)$ é conjugado a $\delta_{\varphi(x)}$. Daí, pela Proposição 3.2.1, φ induz um antiautomorfismo de P que também denotaremos por φ .

Uma vez que $\tilde{\phi}(\delta_x)$ é conjugado a $\delta_{\varphi(x)}$, segue que, para cada $x \in P$ existe $\beta_x \in FI(\tilde{P})$ inversível tal que $\tilde{\phi}(\delta_x) = \beta_x \delta_{\varphi(x)} \beta_x^{-1}$. Assim, em $FI(P)^{op}$,

$$\phi(\delta_x) = (\psi^{-1} \circ \tilde{\phi})(\delta_x) = \psi^{-1}(\beta_x \delta_{\varphi(x)} \beta_x^{-1}) = \psi^{-1}(\beta_x) \delta_{\varphi(x)} (\psi^{-1}(\beta_x))^{-1}.$$

Logo, em $FI(P)$,

$$\phi(\delta_x) = (\psi^{-1}(\beta_x))^{-1} \delta_{\varphi(x)} \psi^{-1}(\beta_x).$$

Portanto, φ é um antiautomorfismo de P tal que $\phi(\delta_x)$ é conjugado a $\delta_{\varphi(x)}$, para todo $x \in P$.

Agora, se ϕ for uma involução e $\phi(\delta_x) = \gamma_x \delta_{\varphi(x)} \gamma_x^{-1}$, para todo $x \in P$, então

$$\delta_x = \phi^2(\delta_x) = \phi(\gamma_x \delta_{\varphi(x)} \gamma_x^{-1}) = \phi(\gamma_x)^{-1} \phi(\delta_{\varphi(x)}) \phi(\gamma_x) = \phi(\gamma_x)^{-1} (\gamma_{\varphi(x)} \delta_{\varphi^2(x)} \gamma_{\varphi(x)}^{-1}) \phi(\gamma_x).$$

Dessa forma, δ_x é conjugado a $\delta_{\varphi^2(x)}$. Então, como observado antes do Teorema 3.1.3, $\varphi^2(x) = x$, para todo $x \in P$. Portanto φ também tem ordem 2, ou seja, φ é uma involução.

Reciprocamente, seja $\phi : P \longrightarrow P$ um antiautomorfismo de P . Defina $\psi : FI(P) \longrightarrow FI(P)$ por $\psi(\alpha)(x, y) = \alpha(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x))$, para todos $\alpha \in FI(P)$ e $x, y \in P$. Note que ψ está bem definida, ou seja, $\psi(\alpha) \in FI(P)$. De fato, sejam $[s, t] \subset [u, v] \subset P$. Então existem $[a, b] \subset [x, y] \subset P$ tais que $s = \phi(b)$, $t = \phi(a)$, $u = \phi(y)$ e $v = \phi(x)$. Assim, $\psi(\alpha)(s, t) = \alpha(a, b)$. Dessa forma, se existir um número infinito de subintervalos $[s, t]$ de $[u, v]$ satisfazendo $\psi(\alpha)(s, t) \neq 0$, o número de subintervalos $[a, b]$ de $[x, y]$ satisfazendo $\alpha(a, b) \neq 0$ também será infinito, o que não pode ocorrer pois $\alpha \in FI(P)$. Logo $\psi(\alpha) \in FI(P)$.

Mostremos que ψ é um antiautomorfismo de K -álgebras. Sejam $\alpha, \beta \in FI(P)$, $x, y \in P$ e $k \in K$. Então,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha + \beta)(x, y) &= (\alpha + \beta)(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) = \alpha(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) + \beta(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) \\ &= \psi(\alpha)(x, y) + \psi(\beta)(x, y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi(\alpha\beta))(x, y) &= (\alpha\beta)(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{\phi^{-1}(y) \leq \phi^{-1}(z) \leq \phi^{-1}(x)} \alpha(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(z))\beta(\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{x \leq z \leq y} \psi(\alpha)(z, y)\psi(\beta)(x, z) \\
&= \sum_{x \leq z \leq y} \psi(\beta)(x, z)\psi(\alpha)(z, y) \\
&= (\psi(\beta)\psi(\alpha))(x, y);
\end{aligned}$$

$$\psi(\delta)(x, y) = \delta(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi^{-1}(x) = \phi^{-1}(y) \\ 0, & \text{se } \phi^{-1}(x) \neq \phi^{-1}(y) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases} = \delta(x, y);$$

$$\psi(k\alpha)(x, y) = (k\alpha)(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) = k\alpha(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) = k\psi(\alpha)(x, y).$$

Portanto ψ é um anti-homomorfismo de K -álgebras.

De maneira análoga, seja $\eta : FI(P) \rightarrow FI(P)$ definida por $\eta(\beta)(x, y) = \beta(\phi(y), \phi(x))$, para todos $x, y \in P$. Então η é um anti-homomorfismo de K -álgebras e, claramente, $\eta = \psi^{-1}$. Portanto, ψ é um antiautomorfismo.

Agora, se ϕ for uma involução, então $\phi = \phi^{-1}$ e assim, dados $\alpha \in FI(P)$ e $x, y \in P$,

$$\psi^2(\alpha)(x, y) = \psi(\alpha)(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(x)) = \alpha(\phi^{-1}(\phi^{-1}(x)), \phi^{-1}(\phi^{-1}(y))) = \alpha(x, y).$$

Portanto ψ também é uma involução. □

Propriedades Zassenhaus

Este capítulo é destinado a verificar que $FI(P)$ e $I(P)$ satisfazem todas as propriedades Zassenhaus definidas na Seção 1.3, ou seja, mostraremos que $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus, $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus e $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus. Verificaremos também sob quais condições a idealização $FI(P)(+)I(P)$ de $I(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus.

No presente capítulo nos basearemos no artigo [7].

4.1 Propriedades Zassenhaus de $FI(P)$ e $I(P)$

Nesta seção discutiremos as propriedades Zassenhaus de $FI(P)$ e de $I(P)$. Mais precisamente, verificaremos que $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus, que $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus e que $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus.

Começamos a seção com um lema que será de grande importância para a demonstração do Teorema 4.1.2.

Recordemos que, dado um conjunto X , um subconjunto M de X é dito *co-finito* se $X - M$ for finito.

Lema 4.1.1. *Seja $\psi \in H^l(FI(P), I(P))$. Se $\psi(\delta) = 0$ então $\psi = 0$.*

Demonstração: Considere $\psi \in H^l(FI(P), I(P))$, ou seja, $\psi \in \text{Hom}_K(FI(P), I(P))$ e $\psi(\alpha) \in \alpha I(P)$, para toda $\alpha \in FI(P)$. Sendo ψ K -linear e $\psi(\delta) = 0$, temos $\psi(-\delta) = -\psi(\delta) = 0$. Para cada $u \in P$, tome $\delta_u \in FI(P)$. Dessa forma,

$$\psi(\delta_u) = 0 + \psi(\delta_u) = \psi(-\delta) + \psi(\delta_u) = \psi(-\delta + \delta_u),$$

o que nos dá $\psi(\delta_u) = \psi(-\delta + \delta_u) \in \delta_u I(P) \cap (-\delta + \delta_u)I(P)$. Mostremos que $\delta_u I(P) \cap (-\delta + \delta_u)I(P) = \{0\}$.

Seja $\lambda \in \delta_u I(P) \cap (-\delta + \delta_u)I(P)$. Então existem $\beta, \gamma \in I(P)$ tais que $\lambda = \delta_u \beta = (-\delta + \delta_u)\gamma$. Como δ_u é idempotente, temos

$$\lambda = \delta_u \beta = \delta_u(\delta_u \beta) = \delta_u(-\delta + \delta_u)\gamma = (-\delta_u + \delta_u)\gamma = 0.$$

Portanto $\psi(\delta_u) = 0$ para todo $u \in P$.

Agora, considere $u < v$ em P . Temos

$$\psi(\delta_v + \delta_{uv}) = \psi(\delta_v) + \psi(\delta_{uv}) = \psi(\delta_{uv}).$$

Então $\psi(\delta_v + \delta_{uv}) = \psi(\delta_{uv}) \in (\delta_v + \delta_{uv})I(P) \cap \delta_{uv}I(P)$. Mostremos que $(\delta_v + \delta_{uv})I(P) \cap \delta_{uv}I(P) = \{0\}$.

Seja $\lambda \in (\delta_v + \delta_{uv})I(P) \cap \delta_{uv}I(P)$. Então existem $\beta, \gamma \in I(P)$ tais que $\lambda = (\delta_v + \delta_{uv})\beta = \delta_{uv}\gamma$. Dados $x, y \in P$, temos

$$\begin{aligned} ((\delta_v + \delta_{uv})\beta)(x, y) &= (\delta_v\beta)(x, y) + (\delta_{uv}\beta)(x, y) \\ &= \sum_{x \leq z \leq y} \delta_v(x, z)\beta(z, y) + \sum_{x \leq z \leq y} \delta_{uv}(x, z)\beta(z, y). \\ &= \begin{cases} \beta(v, y), & \text{se } x = v \\ \beta(v, y), & \text{se } x = u \\ 0, & \text{se } x \neq u \text{ e } x \neq v \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

e

$$(\delta_{uv}\gamma)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta_{uv}(x, z)\gamma(z, y) = \begin{cases} \gamma(v, y), & \text{se } x = u \\ 0, & \text{se } x \neq u \end{cases}. \quad (4.2)$$

De (4.1) temos que $\lambda(x, y) = 0$ se $x \neq u$ e $x \neq v$. Analisemos agora $\lambda(x, y)$ quando $x = u$ ou $x = v$. Se $x = v$, de (4.1) segue que $\lambda(v, y) = \beta(v, y)$. No entanto, de (4.2), $\lambda(v, y) = 0$, uma vez que $v \neq u$. Logo $\lambda(x, y) = 0$ se $x = v$ e $\beta(v, y) = 0$ para todo $y \in P$. Se $x = u$, de (4.1) segue que $\lambda(u, y) = \beta(v, y) = 0$ para todo $y \in P$. Portanto, dados $x, y \in P$, $\lambda(x, y) = 0$, ou seja, $\lambda = 0$, o que nos dá $\psi(\delta_{uv}) = 0$ para todos $u \leq v$ em P .

Agora, seja $\alpha \in FI(P)$ tal que $\text{supp}(\alpha)$ é finito. Então, $\alpha = \sum_{(x,y) \in \text{supp}(\alpha)} \alpha(x, y)\delta_{xy}$ e

$$\psi(\alpha) = \sum_{(x,y) \in \text{supp}(\alpha)} \alpha(x, y)\psi(\delta_{xy}) = 0.$$

Fixe $u \in P$ e considere $\alpha \in FI(P)$ tal que $\text{supp}(\alpha) = \{u\} \times S$, onde S é um subconjunto infinito de P . Dado $T \subset S$ co-finito, seja $\alpha_T \in FI(P)$ definida por

$$\alpha_T(x, y) = \begin{cases} \alpha(u, y), & \text{se } x = u \text{ e } y \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então $\alpha = \alpha_T + \sum_{v \in S-T} \alpha(u, v)\delta_{uv}$ e $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_T) + \sum_{v \in S-T} \alpha(u, v)\psi(\delta_{uv}) = \psi(\alpha_T)$. Além disso, $\psi(\alpha_T) = \alpha_T\gamma_T$ para algum $\gamma_T \in I(P)$, uma vez que $\psi \in H^l(FI(P), I(P))$. Portanto $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_T) = \alpha_T\gamma_T$, para todo subconjunto co-finito T de S .

Suponhamos que $\psi(\alpha) \neq 0$ e seja $(u, b) \in \text{supp}(\psi(\alpha))$. Para todo subconjunto co-finito T de S existe $v \in T \cap [u, b]$. Com efeito, sabemos que $\psi(\alpha) = \alpha_T\gamma_T$ e $(\alpha_T\gamma_T)(u, b) = \sum_{v \in T \cap [u, b]} \alpha_T(u, v)\gamma_T(v, b)$. Como, por hipótese, $\psi(\alpha) \neq 0$, devemos ter $T \cap [u, b] \neq \emptyset$ para todo $T \subset S$ co-finito. Afirmamos que $S \cap [u, b]$ é infinito. De fato, suponhamos que $S \cap [u, b]$ seja finito. Então $S \cap [u, b] = S - T$, onde $T = S - (S \cap [u, b]) \subset S$ é co-finito. Assim, $\emptyset \neq T \cap [u, b] \not\subset S - T = S \cap [u, b]$, o que é um absurdo pois $T \subset S$. Dessa forma, $S \cap [u, b]$ é infinito. Como $\{u\} \times (S \cap [u, b]) \subset \{u\} \times S = \text{supp}(\alpha)$, existem infinitos $z \in S \cap [u, b]$ tal que $\alpha(u, z) \neq 0$, o que contradiz o fato de α se um elemento de $FI(P)$. Portanto, para toda α definida como anteriormente, temos $\psi(\alpha) = 0$.

Ainda fixado $u \in P$, considere o conjunto $J_u = \delta_u FI(P)$ e seja $\lambda \in J_u$. Então existe $\beta \in FI(P)$ tal que $\lambda = \delta_u\beta$. Assim,

$$\lambda(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta_u(x, z)\beta(z, y) = \begin{cases} \beta(u, y), & \text{se } x = u \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Dessa forma, $\text{supp}(\lambda) = \{u\} \times S$, para algum subconjunto S de P . Pelo que acabamos de mostrar, $\psi(\lambda) = 0$ e, portanto, $\psi(J_u) = 0$.

Seja $\alpha \in FI(P)$ um elemento arbitrário. Note que $\alpha(x, y) = (\delta_x\alpha)(x, y)$, para todos $x, y \in P$. Assim, $(\alpha - \delta_x\alpha)(x, y) = 0$, para todos $x, y \in P$. Como $\delta_x\alpha \in J_x$, então $\psi(\alpha - \delta_x\alpha) = \psi(\alpha) - \psi(\delta_x\alpha) = \psi(\alpha)$, para todo $x \in P$. Por outro lado, existe $\gamma_x \in I(P)$ tal que $\psi(\alpha - \delta_x\alpha) = (\alpha - \delta_x\alpha)\gamma_x$, uma vez que $\psi \in H^l(FI(P), I(P))$. Logo, para quaisquer $x, y \in P$,

$$\psi(\alpha)(x, y) = ((\alpha - \delta_x\alpha)\gamma_x)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} (\alpha - \delta_x\alpha)(x, z)\gamma_x(z, y) = 0.$$

Portanto $\psi(\alpha) = 0$, para toda $\alpha \in FI(P)$, como queríamos. \square

Agora, já estamos aptos a demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.1.2. $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus à esquerda.

Demonstração: Seja $\varphi \in H^l(FI(P), I(P))$. Mostremos que existe $\mu \in I(P)$ tal que $\varphi(\alpha) = \alpha\mu$, para toda $\alpha \in FI(P)$, ou seja, $\varphi = \cdot\mu$.

Considere $\cdot\varphi(\delta) : FI(P) \longrightarrow I(P)$ e defina $\psi : FI(P) \longrightarrow I(P)$ por $\psi = \varphi - (\cdot\varphi(\delta))$. Como $\varphi \in H^l(FI(P), I(P))$, $\cdot\varphi(\delta) \in \cdot I(P) \subset H^l(FI(P), I(P))$ e $H^l(FI(P), I(P))$ é um K -espaço vetorial, segue que $\psi \in H^l(FI(P), I(P))$. Além disso, $\psi(\delta) = \varphi(\delta) - \delta\varphi(\delta) = 0$. Então, pelo lema anterior, $\psi(\alpha) = 0$, para toda $\alpha \in FI(P)$. Dessa forma, $\varphi(\alpha) = \alpha\varphi(\delta) = (\cdot\varphi(\delta))(\alpha)$, para toda $\alpha \in FI(P)$, ou seja, $\varphi = \cdot\varphi(\delta) \in \cdot I(P)$. Portanto $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus à esquerda. \square

Como consequência desse último teorema, outras três propriedades Zassenhaus podem ser verificadas, conforme apresentamos nos corolários a seguir.

Corolário 4.1.3. $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à direita.

Demonstração: Seja $\varphi \in \widehat{FI(P)}^r$. Como $FI(P) \subset I(P)$, podemos considerar $\varphi \in \text{Hom}_K(FI(P), I(P))$. Além disso, dado $\alpha \in FI(P)$, temos $\varphi(\alpha) \in \alpha FI(P) \subset \alpha I(P)$ e, conseqüentemente, $\varphi \in H^l(FI(P), I(P))$. Então, pelo teorema anterior, existe $\mu \in I(P)$ tal que $\varphi = \cdot\mu$. Mas, note que $\mu = \delta\mu = (\cdot\mu)(\delta) = \varphi(\delta) \in FI(P)$, ou seja, $\varphi = \cdot\mu \in \cdot FI(P)$. Portanto $\widehat{FI(P)}^r = \cdot FI(P)$, ou melhor, $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à direita. \square

Corolário 4.1.4. $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda e $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus à direita.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.2, $\tau : I(P) \longrightarrow I(\tilde{P})$ é uma bijeção K -linear satisfazendo $\tau(\alpha\gamma) = \tau(\gamma)\tau(\alpha)$, para todos $\alpha \in FI(P)$ e $\gamma \in I(P)$, e $\sigma = \tau|_{FI(P)} : FI(P) \longrightarrow FI(\tilde{P})$ é um anti-isomorfismo de K -álgebras. Assim, pela Proposição 1.3.4, item (2), existe um

isomorfismo de K -álgebras $' : \widehat{FI(P)}^l \longrightarrow \widehat{FI(\tilde{P})}^r$ que satisfaz $(\alpha \cdot) ' = \cdot \sigma(\alpha)$, para todo $\alpha \in FI(P)$. Temos, portanto, um isomorfismo de K -álgebras $'|_{FI(P)\cdot} : FI(P)\cdot \longrightarrow \cdot FI(\tilde{P})$. Então, pelo corolário anterior,

$$\widehat{FI(P)}^l \cong \widehat{FI(\tilde{P})}^r = \cdot FI(\tilde{P}) \cong FI(P)\cdot.$$

Se $\psi : \widehat{FI(\tilde{P})}^l \longrightarrow FI(P)\cdot$ é o isomorfismo acima então $\psi = ('|_{FI(P)\cdot})^{-1} \circ'$. Assim, dada $\varphi \in \widehat{FI(\tilde{P})}^l$, $\psi(\varphi) = (('|_{FI(P)\cdot})^{-1} \circ')(\varphi) = ('|_{FI(P)\cdot}^{-1})(\varphi') = \varphi$. Logo, $\varphi \in FI(P)\cdot$. Portanto $\widehat{FI(\tilde{P})}^l \subset FI(P)\cdot$ e, conseqüentemente, $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda.

Ainda pela Proposição 1.3.4, item (3), existe um isomorfismo de K -espaços vetoriais $' : H^r(FI(P), I(P)) \longrightarrow H^l(FI(\tilde{P}), I(\tilde{P}))$ que satisfaz $(\gamma \cdot) ' = \cdot \tau(\gamma)$, para toda $\gamma \in I(P)$. Temos então um isomorfismo de K -espaços vetoriais $'|_{I(P)\cdot} : I(P)\cdot \longrightarrow \cdot I(\tilde{P})$. Então, pelo teorema anterior

$$H^r(FI(P), I(P)) \cong H^l(FI(\tilde{P}), I(\tilde{P})) = \cdot I(\tilde{P}) \cong I(P)\cdot.$$

Se $\phi : H^r(FI(P), I(P)) \longrightarrow I(P)\cdot$ é o isomorfismo acima, então $\phi = ('|_{I(P)\cdot})^{-1} \circ'$. Assim, para toda $f \in H^r(FI(P), I(P))$, $\phi(f) = (('|_{I(P)\cdot})^{-1} \circ')(f) = ('|_{I(P)\cdot})^{-1}(f') = f$, o que implica $f \in I(P)\cdot$, ou seja, $H^r(FI(P), I(P)) \subset I(P)\cdot$. Portanto $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus à direita. \square

Definição 4.1.5. Um subconjunto X de um poset P é dito ser *noetheriano* se, para toda cadeia ascendente $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq \dots$ de elementos de X , existir um inteiro n tal que $x_n = x_{n+j}$, para todo $j \geq 1$.

É possível mostrar, usando o Lema de Zorn, que todo subconjunto noetheriano não vazio de um poset possui um elemento maximal.

Com essas informações, podemos provar o próximo lema, que nos permitirá concluir que $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus.

Lema 4.1.6. Se $\psi \in \widehat{I(P)}^r$ é tal que $\psi(\delta) = 0$, então $\psi = 0$.

Demonstração: Seja $\psi \in \widehat{I(P)}^r$. Então $\psi \in \text{End}_K(I(P))$ e $\psi(\alpha) \in \alpha FI(P)$ para todo $\alpha \in I(P)$. Como $FI(P) \subset I(P)$, temos $\psi(\alpha) \in \alpha I(P)$ e podemos afirmar que $\psi|_{FI(P)} \in H^l(FI(P), I(P))$. Daí, pelo Lema 4.1.1, concluímos que $\psi|_{FI(P)} = 0$.

Fixe $v \in P$ e tome $\alpha \in I(P) - FI(P)$ tal que $supp(\alpha) = S \times \{v\}$, onde S é um subconjunto infinito de P . Dado $T \subset S$ co-finito, seja $\alpha_T \in I(P)$ definida por

$$\alpha_T(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, v), & \text{se } x \in T \text{ e } y = v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então $\alpha = \alpha_T + \sum_{u \in S-T} \alpha(u, v)\delta_{uv}$ e $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_T) + \sum_{u \in S-T} \alpha(u, v)\psi(\delta_{uv}) = \psi(\alpha_T)$, uma vez que $\sum_{u \in S-T} \alpha(u, v)\delta_{uv} \in FI(P)$. Além disso, como $\psi \in \widehat{I(P)}^r$, existe $\gamma_T \in FI(P)$ tal que $\psi(\alpha_T) = \alpha_T\gamma_T$. Assim, $\psi(\alpha) = \alpha_T\gamma_T$, para todo subconjunto co-finito T de S . Mas, se $a, b \in P$, $\psi(\alpha_T)(a, b) = (\alpha_T\gamma_T)(a, b) = \sum_{a \leq z \leq b} \alpha_T(a, z)\gamma_T(z, b)$. Logo, $supp(\psi(\alpha_T)) \subset \{(a, b) : a \in T \text{ e } v \in [a, b]\}$.

Agora, dado $a \in S$ um elemento arbitrário, temos que $T_a = S - \{a\}$ é um subconjunto co-finito de S . Logo, para todo $b \in P$, $\psi(\alpha)(a, b) = \psi(\alpha_{T_a})(a, b) = 0$, uma vez que $a \notin T_a$. Como a é arbitrário em S , segue que $\psi(\alpha)(a, b) = 0$ para todos $(a, b) \in P$ com $a \in S$.

Por outro lado, se $a \notin S$, tomando $T \subset S$ um subconjunto co-finito arbitrário, obtemos que $\psi(\alpha)(a, b) = \psi(\alpha_T)(a, b) = 0$, para todo $b \in P$, uma vez que $a \notin T$. Portanto $\psi(\alpha) = 0$.

Ainda, fixado $v \in P$, considere o conjunto $L_v = I(P)\delta_v$ e seja $\lambda \in L_v$. Assim, existe $\beta \in I(P)$ tal que $\lambda = \beta\delta_v$ e

$$\lambda(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \beta(x, z)\delta_v(z, y) = \begin{cases} \beta(x, v), & \text{se } y = v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Logo, $supp(\lambda) = S \times \{v\}$ para algum subconjunto S de P . Pelo que acabamos de mostrar, $\psi(\lambda) = 0$ e, portanto, $\psi(L_v) = 0$.

Seja $\alpha \in I(P) - FI(P)$ um elemento arbitrário. Fixe $y \in P$ e seja E um subconjunto de $\{v \in P : v \leq y\}$. Seja $\chi \in I(P)$ tal que $supp(\chi) \subset E \times \{y\}$. Como $\alpha, \chi \in I(P)$, não podemos considerar o produto $\alpha\chi$. Para esse produto estar bem definido, ou seja, para que $\alpha\chi \in I(P)$, a soma

$$\sum_{v \in [u, y] \cap E} \alpha(u, v)\chi(v, y)$$

deve ser finita para cada $u \in P$ tal que $u \leq v$, para algum $v \in E$, com $\chi(v, y) \neq 0$. Equivalentemente, $\alpha\chi \in I(P)$ se o conjunto $E^{(u)} := \{v \in E : \chi(v, y) \neq 0, u \leq v \leq y\}$ for

finito, para todo $u \leq y$. Isso nos permite concluir a primeira parte da seguinte afirmação.

Afirmação: Fixe $y \in P$ e sejam $\alpha, \chi \in I(P)$ definidas acima. Seja E um subconjunto noetheriano de $\{v \in P : v \leq y\}$ e assumamos que $\alpha(v, v) \neq 0$ para todo $v \in E$. Suponha também que, para todo $u \in P$, o conjunto $E^{(u)} = \{v \in E : \chi(v, y) \neq 0, u \leq v \leq y\}$ é finito. Então $\alpha\chi \in I(P)$ e se $\alpha\chi = 0$, então $\chi = 0$.

De fato, se $E^{(u)}$ é finito para todo $u \in P$, então $\alpha\chi \in I(P)$, como acabamos de ver. Suponhamos que $\chi \neq 0$. Então existe $v' \in E$ tal que $\chi(v', y) \neq 0$. Daí, o subconjunto $X = \{v \in E : \chi(v, y) \neq 0\}$ de E é não vazio e noetheriano, uma vez que E é noetheriano. Seja μ um elemento maximal de X . Temos

$$(\alpha\chi)(\mu, y) = \sum_{v \in [\mu, y] \cap X} \alpha(\mu, v)\chi(v, y) = \alpha(\mu, \mu)\chi(\mu, y).$$

Como $\alpha(\mu, \mu) \neq 0$ e $\chi(\mu, y) \neq 0$, segue que $\alpha\mu \neq 0$.

Seja $\gamma \in FI(P)$ tal que $\psi(\alpha) = \alpha\gamma$. Para cada $y \in P$, seja $E(y) = \{v \in P : \gamma(v, y) \neq 0\}$. Então $E(y) \times \{y\} \subset \text{supp}(\gamma)$. Como $\gamma \in FI(P)$, $(E(y))^{(u)} = \{v \in E(y) : u \leq v\}$ é finito pois, para todo $v \in (E(y))^{(u)}$, $\gamma(v, y) \neq 0$ e $[v, y] \subset [u, y]$. Além disso, $E(y)$ é noetheriano pois se existisse em $E(y)$ uma cadeia infinita $x_i < x_{i+1}, i \geq 0$, teríamos infinitos subintervalos $[x_i, y] \subset [x_0, y]$ tal que $\gamma(x_i, y) \neq 0$, o que não pode ocorrer pois $\gamma \in FI(P)$.

Suponhamos que $\alpha(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Mostremos que, neste caso, $\gamma = 0$. Suponhamos que existam $v_0, y_0 \in P$ tais que $\gamma(v_0, y_0) \neq 0$. Seja $\beta = \alpha - \alpha\delta_{v_0} \in I(P)$. Como $\alpha\delta_{v_0} \in L_{v_0}$, $\psi(\beta) = \psi(\alpha) - \psi(\alpha\delta_{v_0}) = \psi(\alpha)$. Além disso, $\beta(x, v_0) = 0$, para todo $x \in P$. Seja $\gamma' \in FI(P)$ tal que $\psi(\beta) = \beta\gamma'$. Então $\alpha\gamma = \beta\gamma'$ e, portanto, $\alpha\gamma - \beta\gamma' = 0$. Em particular, se $u \leq v_0$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\gamma - \beta\gamma')(u, y_0) \\ &= \alpha(u, v_0)\gamma(v_0, y_0) + \sum_{\substack{u \leq v \leq y_0 \\ v \neq v_0}} \alpha(u, v)\gamma(v, y_0) - \sum_{\substack{u \leq v \leq y_0 \\ v \neq v_0}} \beta(u, v)\gamma'(v, y_0) \\ &= \alpha(u, v_0)\gamma(v_0, y_0) + \sum_{\substack{u \leq v \leq y_0 \\ v \neq v_0}} \alpha(u, v)[\gamma(v, y_0) - \gamma'(v, y_0)] + \sum_{\substack{u \leq v \leq y_0 \\ v \neq v_0}} (\alpha\delta_{v_0})(u, v)\gamma'(v, y_0) \\ &= \alpha(u, v_0)\gamma(v_0, y_0) + \sum_{\substack{u \leq v \leq y_0 \\ v \neq v_0}} \alpha(u, v)[\gamma(v, y_0) - \gamma'(v, y_0)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tomando os conjuntos noetherianos $E(y_0) = \{v \in P : \gamma(v, y_0) \neq 0\}$ e $E'(y_0) = \{v \in P :$

$\gamma'(v, y_0) \neq 0$ }, obtemos o conjunto noetheriano $E = E(y_0) \cup E'(y_0)$. Seja $\chi \in I(P)$ definida por

$$\chi(x, y) = \begin{cases} \gamma(v_0, y_0), & \text{se } x = v_0 \text{ e } y = y_0 \\ \gamma(x, y_0) - \gamma'(x, y_0), & \text{se } x \in E \setminus \{v_0\} \text{ e } y = y_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Então $\text{supp}(\chi) \subset E \times \{y_0\}$. Além disso, para cada $u \in P$, o conjunto $E^{(u)} = \{v \in E : u \leq v \leq y_0\}$ e $\chi(v, y_0) \neq 0$ é finito, uma vez que $\gamma, \gamma' \in FI(P)$. Por (4.3), $\alpha\chi = 0$, o que nos dá, pela Afirmação acima, $\chi = 0$. Em particular, $0 = \chi(v_0, y_0) = \gamma(v_0, y_0)$, o que é uma contradição. Portanto, $\gamma = 0$ e, conseqüentemente, $\psi(\alpha) = 0$.

Finalmente, para qualquer $\alpha \in I(P)$, temos $\alpha = \alpha' + \alpha''$, onde

$$\alpha'(u, v) = \begin{cases} \alpha(u, v), & \text{se } u < v \\ 1, & \text{se } u = v \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha''(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < v \\ \alpha(u, u) - 1, & \text{se } u = v \end{cases} .$$

Note que $\alpha'(x, x) \neq 0$, para todo $x \in P$, e $\alpha'' \in FI(P)$. Portanto, $\psi(\alpha) = \psi(\alpha') + \psi(\alpha'') = 0$, como queríamos. \square

Agora já estamos aptos a verificar que $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus.

Teorema 4.1.7. $\widehat{I(P)}^r = \cdot FI(P)_{I(P)}$, ou seja, $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus à direita.

Demonstração: Seja $\varphi \in \widehat{I(P)}^r$ e note que $\varphi(\delta) \in FI(P)$. De fato, como $\varphi \in \widehat{I(P)}^r$, existe $\gamma \in FI(P)$ tal que $\varphi(\delta) = \delta\gamma = \gamma \in FI(P)$.

Defina $\psi = \varphi - (\cdot\varphi(\delta))$. Como $\varphi \in \widehat{I(P)}^r$, $\cdot\varphi(\delta) \in \cdot FI(P)_{I(P)} \subset \widehat{I(P)}^r$ e $\widehat{I(P)}^r$ é um anel, segue que $\psi \in \widehat{I(P)}^r$. Além disso, $\psi(\delta) = \varphi(\delta) - (\cdot\varphi(\delta))(\delta) = \varphi(\delta) - \varphi(\delta) = 0$. Então, pelo lema anterior $\psi = 0$, o que implica $\varphi = \cdot\varphi(\delta)$. Dessa forma, $\varphi \in \cdot FI(P)_{I(P)}$, de onde podemos concluir que $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus à direita. \square

Teorema 4.1.8. $\widehat{I(P)}^l = FI(P)_{I(P)\cdot}$, isto é, $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus à esquerda.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.2, $\tau : I(P) \longrightarrow I(\tilde{P})$ é uma bijeção K -linear satisfazendo $\tau(\alpha\gamma) = \tau(\gamma)\tau(\alpha)$ para todos $\alpha \in FI(P), \gamma \in I(P)$ e $\sigma = \tau|_{FI(P)} : FI(P) \longrightarrow FI(\tilde{P})$ é um anti-isomorfismo de K -álgebras. Então pela Proposição 1.3.4 item (1), existe um isomorfismo de K -álgebras $\prime : \widehat{I(P)}^l \longrightarrow \widehat{I(\tilde{P})}^r$ que satisfaz $(\alpha \cdot \prime) = \cdot \sigma(\alpha)$, para toda $\alpha \in FI(P)$. Temos, portanto, um isomorfismo de anéis $\prime|_{FI(P)_{I(P)} \cdot} : FI(P)_{I(P)} \cdot \longrightarrow \cdot FI(\tilde{P})_{I(\tilde{P})}$. Então, pelo teorema anterior

$$\widehat{I(P)}^l \cong \widehat{I(\tilde{P})}^r = \cdot FI(\tilde{P})_{I(\tilde{P})} \cong FI(P)_{I(P)} \cdot.$$

Seja $\psi : \widehat{I(P)}^l \longrightarrow FI(P)_{I(P)} \cdot$ o isomorfismo acima. Então $\psi = (\prime|_{FI(P)_{I(P)} \cdot})^{-1} \circ \prime$. Dessa forma, dada $\varphi \in \widehat{I(P)}^l$, $\psi(\varphi) = (\prime|_{FI(P)_{I(P)} \cdot})^{-1}(\varphi') = \varphi$. Logo, $\varphi \in FI(P)_{I(P)} \cdot$ de onde segue que $\widehat{I(P)}^l = FI(P)_{I(P)} \cdot$, ou seja, $I(P)$ é um $FI(P)$ -módulo Zassenhaus à esquerda. \square

4.2 Propriedades Zassenhaus de $FI(P)(+)I(P)$

Sejam R um anel, M um R -bimódulo e considere a soma direta $R \oplus M$. Definimos em $R \oplus M$ a multiplicação

$$(r, m)(s, n) = (rs, rn + ms),$$

para todos $(r, m), (s, n) \in R \oplus M$. É fácil ver que, com essa multiplicação, $R \oplus M$ é um anel, chamado de *idealização* do R -bimódulo M ou *extensão trivial* de R por M e é denotado por $R(+M)$.

Denotaremos um elemento (r, m) de $R(+M)$ por $\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix}$. Com essa notação, temos

$$\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + s \\ m + n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs \\ rn + ms \end{bmatrix},$$

para todos $r, s \in R$ e $m, n \in M$. Além disso, $0_{R(+M)} = \begin{bmatrix} 0_R \\ 0_M \end{bmatrix}$ e $1_{R(+M)} = \begin{bmatrix} 1_R \\ 0_M \end{bmatrix}$.

Nesta seção voltaremos nossa atenção para a idealização $FI(P)(+)I(P)$ de $I(P)$.

Sabemos que dada $\alpha \in I(P)$, $\alpha(x, y)$ é um elemento de K para todos $x, y \in P$. Com isso, é fácil verificar que $FI(P)(+)I(P)$ satisfaz todas as condições da Definição 1.2.18 e, portanto,

é uma K -álgebra. Acabamos de ver na seção anterior que $FI(P)$ e $I(P)$ satisfazem todas as propriedades Zassenhaus. Nosso interesse aqui é verificar se a idealização $FI(P)(+)I(P)$ é também uma K -álgebra Zassenhaus. Tal fato dependerá do poset em questão. Mais especificamente, $FI(P)(+)I(P)$ será uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda (direita) se, e somente se, P for um poset sem elementos maximais (minimais).

Dado um poset P denotaremos por T e L os conjuntos de todos os elementos maximais e minimais, respectivamente, de P . Sejam também J_T e J_L subconjuntos de $FI(P)$

$$J_T = \{\alpha \in FI(P) : \alpha(x, y) = 0 \text{ se } y \notin T\}$$

e

$$J_L = \{\alpha \in FI(P) : \alpha(x, y) = 0 \text{ se } x \notin L\}.$$

Proposição 4.2.1. J_T e J_L são ideais de $FI(P)$.

Demonstração: Claramente $0 \in J_T$. Dados $\alpha, \beta \in J_T$ e $x, y \in P$ com $y \notin T$, temos

$$(\alpha - \beta)(x, y) = \alpha(x, y) - \beta(x, y) = 0.$$

Logo, $\alpha - \beta \in J_T$. Também, dados $\alpha \in FI(P)$, $\rho \in J_T$ e $x, y \in P$ com $y \notin T$, temos

$$(\rho\alpha)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \rho(x, z)\alpha(z, y) = 0,$$

uma vez que $\rho(x, z) = 0$ para todo $z \in [x, y]$, pois $z \notin T$. E,

$$(\alpha\rho)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \alpha(x, z)\rho(z, y) = 0,$$

pois $y \notin T$. Logo, $\alpha\rho, \rho\alpha \in J_T$.

De forma análoga mostra-se que J_L é ideal de $FI(P)$. □

Dado um poset P e seu dual \tilde{P} , sejam \tilde{T} e \tilde{L} os conjuntos dos elementos maximais e minimais, respectivamente, de \tilde{P} . Considere também os ideais de $FI(\tilde{P})$

$$J_{\tilde{T}} = \left\{ \alpha \in FI(\tilde{P}) : \alpha(x, y) = 0 \text{ se } y \notin \tilde{T} \right\}$$

e

$$J_{\tilde{L}} = \left\{ \alpha \in FI(\tilde{P}) : \alpha(x, y) = 0 \text{ se } x \notin \tilde{L} \right\}.$$

Considerando a aplicação τ definida no Teorema 3.2.2, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.2.2. $\tau(J_T) = J_{\tilde{L}}$ e $\tau(J_L) = J_{\tilde{T}}$.

Demonstração: Primeiramente, é fácil ver que $T = \tilde{L}$ e $L = \tilde{T}$.

Seja $\rho \in J_T$. Se $x, y \in \tilde{P}$ e $y \notin \tilde{L}$, então $\tau(\rho)(y, x) = \rho(x, y) = 0$ pois $y \notin T$. Portanto $\tau(\rho) \in J_{\tilde{L}}$.

Agora, seja $\beta \in J_{\tilde{L}}$. Tome $\alpha \in FI(P)$ tal que $\alpha(x, y) = \beta(y, x)$, para todos $x, y \in P$. Então $\beta = \tau(\alpha)$ e, se $x, y \in P$ e $y \notin T$, $\alpha(x, y) = \beta(y, x) = 0$, pois $y \notin \tilde{L}$. Logo $\alpha \in J_T$ e, portanto, $\beta \in \tau(J_T)$.

De forma análoga mostra-se que $\tau(J_L) = J_{\tilde{T}}$. □

Proposição 4.2.3. *Os pares $(FI(P), J_L)$ e $(FI(P), J_T)$ são Zassenhaus à esquerda e à direita, respectivamente.*

Demonstração: Considerando a Proposição 4.2.2, pode-se demonstrar este resultado por uma construção análoga ao que fizemos anteriormente para mostrar que $(FI(P), I(P))$ é um par Zassenhaus à esquerda e à direita. □

Seja $S = FI(P)(+)I(P)$. Dados $\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} \in S$, temos

$$\left(\begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} \cdot \right) \left(\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho r \\ \rho m + \mu r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 \\ \mu \cdot & \rho \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix}.$$

Logo

$$S \cdot = \left\{ \psi \in \text{End}_K(S) : \psi = \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 \\ \mu \cdot & \rho \cdot \end{bmatrix}, \rho \in FI(P), \mu \in I(P) \right\}.$$

O próximo resultado nos dá uma caracterização de $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^l$.

Teorema 4.2.4. *Se T é o conjunto de todos os elementos maximais de P , então*

$$(FI(\widehat{P}(+)I(P)))^l = ((FI(P)(+)I(P))\cdot) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\},$$

$$\text{onde } \eta_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \cdot \end{bmatrix} \in \text{End}_K(FI(P)(+)I(P)), \text{ com } \lambda \in J_T.$$

Demonstração: Seja $S = FI(P)(+)I(P)$ e tome $\psi \in \widehat{S}^l$. Então $\psi \in \text{End}_K(S)$ e, pela Proposição 1.2.37, existem $\alpha \in \text{End}_K(FI(P))$, $\beta \in \text{Hom}_K(FI(P), I(P))$, $\gamma \in \text{End}_K(I(P))$ e $\theta \in \text{Hom}_K(I(P), FI(P))$ tais que

$$\psi = \begin{bmatrix} \alpha & \theta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Além disso, dados $r \in FI(P)$ e $m \in I(P)$, existem $\rho_{rm} \in FI(P)$ e $\mu_{rm} \in I(P)$ tais que

$$\psi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho_{rm} \\ \mu_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{rm}r \\ \rho_{rm}m + \mu_{rm}r \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\psi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha & \theta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(r) + \theta(m) \\ \beta(r) + \gamma(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{rm}r \\ \rho_{rm}m + \mu_{rm}r \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha(r) + \theta(m) = \rho_{rm}r \\ \beta(r) + \gamma(m) = \rho_{rm}m + \mu_{rm}r \end{cases}.$$

Se $r = 0$, temos $\theta(m) = 0$ para todo $m \in I(P)$, ou seja, $\theta = 0$. Se $m = 0$, então $\beta(r) = \mu_{r0}r$. Como $\mu_{r0} \in I(P)$ e $\beta \in \text{Hom}_K(FI(P), I(P))$, temos que $\beta \in H^r(FI(P), I(P)) = I(P)\cdot$. Agora, se $r = 0$, então $\gamma(m) = \rho_{0m}m$. Mas $\rho_{0m} \in FI(P)$ e $\gamma \in \text{End}_K(I(P))$, o que nos dá $\gamma \in \widehat{I(P)}^l = FI(P)_{I(P)}\cdot$. Além disso, como $\theta = 0$, temos $\alpha(r) = \rho_{rm}r$, para todo $r \in FI(P)$, de onde segue que $\alpha \in \widehat{FI(P)}^l = FI(P)\cdot$. Logo, existem $\rho, \rho_1 \in FI(P)$, $\mu \in I(P)$ tais que $\alpha = \rho\cdot$, $\beta = \mu\cdot$ e $\gamma = \rho_1\cdot$, e assim,

$$\psi = \begin{bmatrix} \rho\cdot & 0 \\ \mu\cdot & \rho_1\cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cdot & 0 \\ \mu\cdot & \rho\cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\rho_1 - \rho)\cdot \end{bmatrix}.$$

Façamos $\psi_1 = \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 \\ \mu \cdot & \rho \cdot \end{bmatrix}$ e $\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\rho_1 - \rho) \cdot \end{bmatrix}$. Assim $\psi_2 = \psi - \psi_1$. Claramente $\psi_1 \in S$ e, portanto, ψ_1 é um elemento de \widehat{S}^l . Logo $\psi_2 \in \widehat{S}^l$, uma vez que $\psi \in \widehat{S}^l$ e \widehat{S}^l é um anel. Vamos mostrar que $\psi_2 \in \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}$.

Escrevamos $\gamma = \rho_1 - \rho$. Dados $r \in FI(P)$ e $m \in I(P)$, existem $\rho_{rm} \in FI(P)$, $\mu_{rm} \in I(P)$ tais que

$$\psi_2 \left(\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho_{rm} \\ \mu_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \rho_{rm}r \\ \rho_{rm}m + \mu_{rm}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma m \end{bmatrix}$$

e, assim,

$$\begin{cases} \rho_{rm}r = 0 \\ (\gamma - \rho_{rm})m = \mu_{rm}r \end{cases}. \quad (4.4)$$

1º caso: P não possui elementos maximais.

Se $\gamma \neq 0$, existem $u \leq v$ em P tais que $\gamma(u, v) \neq 0$. Como P não possui elementos maximais, existe $w \in P$ tal que $v < w$. Considere os elementos $m = \delta_v$ e $r = \delta_{vw}$ e note que ambos estão em $FI(P)$. Seja também $\bar{\rho} = \rho_{rm} \in FI(P)$. Então

$$(\bar{\rho}r)(x, w) = \sum_{x \leq z \leq w} \bar{\rho}(x, z)\delta_{vw}(z, w) = \begin{cases} \bar{\rho}(x, v), & \text{se } v \in [x, w] \\ 0, & \text{se } v \notin [x, w] \end{cases}.$$

Por (4.4) temos que $\bar{\rho}r = 0$, o que implica $\bar{\rho}(x, v) = 0$ para todo $x \leq v$.

Temos também que

$$(\gamma m)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \gamma(x, z)\delta_v(z, y) = \begin{cases} \gamma(x, v), & \text{se } y = v \\ 0, & \text{se } y \neq v \end{cases}.$$

e

$$(\bar{\rho}m)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \bar{\rho}(x, z)\delta_v(z, y) = \begin{cases} \bar{\rho}(x, v), & \text{se } y = v \\ 0, & \text{se } y \neq v \end{cases}.$$

Como $\bar{\rho}(x, v) = 0$ para todo $x \leq v$, temos que $\bar{\rho}m = 0$. Daí, $(\gamma - \bar{\rho})m = \gamma m$.

Agora, considere $\bar{\mu} = \mu_{rm}$. Então

$$(\bar{\mu}r)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \bar{\mu}(x, z)\delta_{vw}(z, y) = \begin{cases} \bar{\mu}(x, v), & \text{se } y = w \text{ e } v \in [x, y] \\ 0, & \text{se } y \neq w \text{ ou } v \notin [x, y] \end{cases}.$$

Por (4.4) temos $(\gamma - \bar{\rho})m = \bar{\mu}r$ e, assim,

$$\gamma(u, v) = (\gamma m)(u, v) = ((\gamma - \bar{\rho})m)(u, v) = (\bar{\mu}r)(u, v) = 0,$$

o que é uma contradição.

Com isso temos que $\gamma = \rho_1 - \rho = 0$, de onde segue que $\psi_2 = 0 \in \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}$. Mais do que isso, neste caso, temos $\psi = \psi_1 \in S^\cdot$, ou seja, se P é um poset que não possui elementos maximais, então $\widehat{S}^l = S^\cdot$ e, portanto, $FI(P)(+)I(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda.

2º caso: P possui elementos maximais.

Mostremos que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \in \widehat{S}^l$, para toda $\gamma \in J_T$. Equivalentemente, mostremos que (4.4) tem uma solução para toda $\gamma \in J_T$.

Seja $\gamma \in J_T$. Fixemos $r \in FI(P)$ e definamos os subconjuntos T_0 e T_1 de T da forma:

$$T_0 = \{v \in T : r(v, v) = 0\} \text{ e } T_1 = \{v \in T : r(v, v) \neq 0\}.$$

Seja $\rho_r \in FI(P)$ definida por $\rho_r(x, y) = \begin{cases} \gamma(x, y), & \text{se } y \in T_0 \\ 0, & \text{se } y \notin T_0 \end{cases}$. Então

$$(\rho_r r)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \rho_r(x, z)r(z, y) = \gamma(x, y)r(y, y) = 0.$$

Portanto $\rho_r r = 0$, para todo $r \in FI(P)$.

Agora, dado $m \in I(P)$, temos

$$(\gamma m)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \gamma(x, z)m(z, y) = \gamma(x, y)m(y, y)$$

e

$$(\rho_r m)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \rho_r(x, z)m(z, y) = \begin{cases} \gamma(x, y)m(y, y), & \text{se } y \in T_0 \\ 0, & \text{se } y \notin T_0 \end{cases}.$$

Assim,

$$(\gamma m - \rho_r m)(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in T_0 \\ \gamma(x, y)m(y, y), & \text{se } y \notin T_0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } y \notin T_1 \\ \gamma(x, y)m(y, y), & \text{se } y \in T_1 \end{cases}.$$

Defina $\mu \in I(P)$ por

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \frac{\gamma(x, y)m(y, y)}{r(y, y)}, & \text{se } y \in T_1 \\ 0, & \text{se } y \notin T_1 \end{cases}.$$

Dado $r \in FI(P)$,

$$\begin{aligned} (\mu r)(x, y) &= \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z)r(z, y) \\ &= \begin{cases} \mu(x, y)r(y, y), & \text{se } y \in T_1 \\ 0, & \text{se } y \notin T_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma(x, y)m(y, y), & \text{se } y \in T_1 \\ 0, & \text{se } y \notin T_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo $(\gamma - \rho_r)m = \mu r$. Como também já mostramos que $\rho_r r = 0$, encontramos uma solução para (4.4), como queríamos.

Voltemos a $\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \end{bmatrix}$, onde $\gamma = \rho_1 - \rho$. Escrevamos $\gamma = \gamma_T + \gamma_{P-T}$, onde

$$\gamma_T(x, y) = \begin{cases} \gamma(x, y), & \text{se } y \in T \\ 0, & \text{se } y \notin T \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_{P-T} = \begin{cases} \gamma(x, y), & \text{se } y \notin T \\ 0, & \text{se } y \in T \end{cases}.$$

Claramente, $\gamma_T \in J_T$. Pelo que acabamos de mostrar, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_T \cdot \end{bmatrix} \in \widehat{S}^l$. Temos que

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_T \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{P-T} \cdot \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{P-T} \cdot \end{bmatrix} = \psi_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_T \cdot \end{bmatrix} \in \widehat{S}^l$. Repetindo para $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{P-T} \cdot \end{bmatrix}$ o mesmo argumento utilizado para ψ_2 no 1º caso, é possível provar que $\gamma_{P-T} = 0$ e, conseqüentemente,

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_T \cdot \end{bmatrix} \in \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}.$$

Agora, claramente $((FI(P)(+)I(P)) \cdot) \cap \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\} = \{0\}$. Dessa forma, considerando $((FI(P)(+)I(P)) \cdot)$ e $\{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}$ como K -subespaços, temos que $(\widehat{FI(P)(+)I(P)})^l = ((FI(P)(+)I(P)) \cdot) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}$, como queríamos. \square

Corolário 4.2.5. *$FI(P)(+)I(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda se, e somente se, P não possui elementos maximais.*

Demonstração: Segue diretamente do teorema anterior que $FI(P)(+)I(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda se, e somente se, $\{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\} = \{0\}$, ou seja, se, e somente se, $J_T = \{0\}$. Agora, se $y \in T$, então $\delta_y \in J_T$ pois

$$\delta_y(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Logo, $J_T = \{0\}$ se, e somente se, $T = \emptyset$. \square

De forma análoga ao Teorema 4.2.4, é possível demonstrar o próximo teorema, do qual decorrerá que $FI(P)(+)I(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à direita se, e somente se, P for um poset sem elementos minimais.

Teorema 4.2.6. *Se L é o conjunto de todos os elementos minimais de P , então*

$$(\widehat{FI(P)(+)I(P)})^r = (\cdot(FI(P)(+)I(P))) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_L\},$$

onde $\eta_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cdot\lambda \end{bmatrix} \in \text{End}_K(FI(P)(+)I(P))$, com $\lambda \in J_L$.

Corolário 4.2.7. *$FI(P)(+)I(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à direita se, e só se P não possui elementos minimais.*

Sendo $FI(P)$ uma K -álgebra e, portanto um anel, é possível considerá-lo como um $FI(P)$ -bimódulo e, nesse sentido, podemos tomar a idealização $FI(P)(+)FI(P)$ de $FI(P)$ e investigar se esta é também uma K -álgebra Zassenhaus.

Proposição 4.2.8. *Seja P um poset. Então a idealização $FI(P)(+)FI(P)$ de $FI(P)$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda (direita) se, e só se, P não possui elementos maximais (minimais).*

Demonstração: Segue de forma análoga à demonstração do Teorema 4.2.4. \square

4.3 Propriedades Zassenhaus de $(FI(\widehat{P})\widehat{(+)}I(P))^l$ e $(FI(\widehat{P})\widehat{(+)}I(P))^r$

Consideremos agora as K -álgebras $A = (FI(\widehat{P})\widehat{(+)}I(P))^l$ e $B = (FI(\widehat{P})\widehat{(+)}I(P))^r$. Nesta seção mostraremos que A e B sempre são K -álgebras Zassenhaus, independente do poset P ter ou não elementos maximais ou minimais.

Pelo Teorema 4.2.4, $A = ((FI(P)\widehat{(+)}I(P))\cdot) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}$. Então, dado $x \in A$, existem $r \in FI(P), m \in I(P), s \in J_T$ tal que $x = \begin{bmatrix} r\cdot & 0 \\ m\cdot & (r+s)\cdot \end{bmatrix}$. Vamos escrever x

da forma $x = \begin{bmatrix} r\cdot \\ m\cdot \\ s\cdot \end{bmatrix}$. É fácil ver que $FI(P)\cdot \cong FI(P)$, $I(P)\cdot \cong I(P)$ e $J_T\cdot \cong J_T$ como

K -espaços vetoriais. Com essas identificações escreveremos $x = \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix}$. Para

$$x = \begin{bmatrix} r\cdot & 0 \\ m\cdot & (r+s)\cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \rho\cdot & 0 \\ \mu\cdot & (\rho+\sigma)\cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \in A,$$

temos

$$\begin{aligned}
xy &= \begin{bmatrix} r \cdot & 0 \\ m \cdot & (r+s) \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 \\ \mu \cdot & (\rho+\sigma) \cdot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (r\rho) \cdot & 0 \\ (m\rho) \cdot + ((r+s)\mu) \cdot & ((r+s)(\rho+\sigma)) \cdot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (r\rho) \cdot & 0 \\ (m\rho + (r+s)\mu) \cdot & (r\rho) \cdot + (s\rho + (r+s)\sigma) \cdot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r\rho \\ m\rho + (r+s)\mu \\ s\rho + (r+s)\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dados $\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \in A$, temos

$$\left(\begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho r \\ \mu r + (\rho + \sigma)m \\ \sigma r + (\rho + \sigma)s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 & 0 \\ \mu \cdot & (\rho + \sigma) \cdot & 0 \\ \sigma & 0 & (\rho + \sigma) \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix}.$$

Logo

$$A = \left\{ \psi \in \text{End}_K(A) : \psi = \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 & 0 \\ \mu \cdot & (\rho + \sigma) \cdot & 0 \\ \sigma \cdot & 0 & (\rho + \sigma) \cdot \end{bmatrix}, \rho \in FI(P), \mu \in I(P), \sigma \in J_T \right\}.$$

Teorema 4.3.1. $A = (FI(\widehat{P})(+)\widehat{I}(P))^l$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda.

Demonstração: Pelo Teorema 4.2.4, $A = ((FI(P)(+)I(P)) \cdot) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\}$, onde consideramos a soma direta de K -espaços. Note que, vistos como K -espaços, $(FI(P)(+)I(P)) \cdot \cong FI(P) \oplus I(P)$ e $\{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\} \cong J_T$ (via isomorfismos naturais). Então

$$A = ((FI(P)(+)I(P)) \cdot) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_T\} \cong FI(P) \oplus I(P) \oplus J_T.$$

Seja $\psi \in \widehat{A}^l$. Então $\psi \in \text{End}_K(A)$ e, pela Proposição 1.2.37, existem $\alpha_1 \in \text{End}_K(FI(P))$, $\alpha_2 \in \text{Hom}_K(I(P), FI(P))$, $\alpha_3 \in \text{Hom}_K(J_T, FI(P))$, $\beta_1 \in \text{Hom}_K(FI(P), I(P))$, $\beta_2 \in \text{End}_K(I(P))$, $\beta_3 \in \text{Hom}_K(J_T, I(P))$, $\lambda_1 \in \text{Hom}_K(FI(P), J_T)$, $\lambda_2 \in \text{Hom}_K(I(P), J_T)$ e $\lambda_3 \in \text{End}_K(J_T)$ tais que

$$\psi = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se $\psi \in \widehat{A}^l$, dados $r \in FI(P)$, $m \in I(P)$ e $s \in J_T$ existem $\rho_{rms} \in FI(P)$, $\mu_{rms} \in I(P)$ e $\sigma_{rms} \in J_T$ tais que

$$\psi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho_{rms} \\ \mu_{rms} \\ \sigma_{rms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{rms}r \\ \mu_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})m \\ \sigma_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})s \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$\psi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha_1(r) + \alpha_2(m) + \alpha_3(s) \\ \beta_1(r) + \beta_2(m) + \beta_3(s) \\ \lambda_1(r) + \lambda_2(m) + \lambda_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{rms}r \\ \mu_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})m \\ \sigma_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})s \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos

$$\begin{cases} \alpha_1(r) + \alpha_2(m) + \alpha_3(s) = \rho_{rms}r \\ \beta_1(r) + \beta_2(m) + \beta_3(s) = \mu_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})m \\ \lambda_1(r) + \lambda_2(m) + \lambda_3(s) = \sigma_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})s \end{cases}.$$

1. Se $m = s = 0$, então $\alpha_1(r) = \rho_{r00}r$, para todo $r \in FI(P)$. Assim, $\alpha_1 \in \widehat{FI(P)}^l = FI(P)$.
2. Se $m = r = 0$, então $\beta_3(s) = 0$, para todo $s \in J_T$ e, portanto $\beta_3 = 0$.
3. Se $r = s = 0$, então $\lambda_2(m) = 0$ e $\alpha_2(m) = 0$, para todo $m \in I(P)$ e, dessa forma, $\alpha_2 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.
4. Se $r = 0$ então $\beta_2(m) = (\rho_{0ms} + \sigma_{0ms})m$, para todo $m \in I(P)$. Logo $\beta_2 \in \widehat{I(P)}^l = FI(P)_{I(P)}$. Também $\lambda_3(s) = (\rho_{0ms} + \sigma_{0ms})s$ e $\alpha_3(s) = 0$, para todo $s \in J_T$, donde segue que $\alpha_3 = 0$.

5. Se $m = 0$, então $\beta_1(r) = \mu_{r0s}r$, para todo $r \in FI(P)$, o que implica $\beta_1 \in H^r(FI(P), I(P)) = I(P)$.

6. Se $s = 0$, então $\lambda_1(r) = \sigma_{rm0}r$, para todo $r \in FI(P)$. Assim $\lambda_1 \in H^r(FI(P), J_T) = J_T$.

Então existem $\rho, \rho_1 \in FI(P)$, $\mu \in I(P)$ e $\sigma \in J_T$ tais que $\alpha_1 = \rho \cdot$, $\beta_2 = \rho_1 \cdot$, $\beta_1 = \mu \cdot$ e $\lambda_1 = \sigma \cdot$. Além disso, em (4) podemos tomar $m = s \in J_T$ e com isso $\beta_2(s) = (\rho_{0ss} + \sigma_{0ss})s = \lambda_3(s)$, o que nos dá $\lambda_3 = (\rho_1 \cdot)|_{J_T}$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 & 0 \\ \mu \cdot & \rho_1 \cdot & 0 \\ \sigma \cdot & 0 & \rho_1 \cdot |_{J_T} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho \cdot & 0 & 0 \\ \mu \cdot & (\rho + \sigma) \cdot & 0 \\ \sigma \cdot & 0 & (\rho + \sigma) \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 \cdot -(\rho + \sigma) \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \cdot |_{J_T} - (\rho + \sigma) \cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \cdot + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 \cdot -(\rho + \sigma) \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \cdot |_{J_T} - (\rho + \sigma) \cdot \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fazendo $\rho_1 \cdot -(\rho + \sigma) \cdot = \rho_2 \cdot$, temos

$$\psi - \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \cdot |_{J_T} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\psi \in \widehat{A}^l$, $\begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \cdot \in A \subset \widehat{A}^l$ e \widehat{A}^l é um anel, temos que $\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \cdot |_{J_T} \end{bmatrix} \in \widehat{A}^l$.

Se mostrarmos que $\varphi = 0$, teremos que $\psi \in A$. Para isso, mostremos que $\rho_2 = 0$.

Como $\varphi \in \widehat{A}^l$, dados $r \in FI(P)$, $m \in I(P)$, $s \in J_T$, existem $\rho_{rms} \in FI(P)$, $\mu_{rms} \in I(P)$ e

$\sigma_{rms} \in J_T$ tais que

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho_{rms} \\ \mu_{rms} \\ \sigma_{rms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{rms}r \\ \mu_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})m \\ \sigma_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})s \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \cdot |_{J_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_2 m \\ \rho_2 s \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{cases} \rho_{rms}r = 0 \\ \mu_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})m = \rho_2 m \\ \sigma_{rms}r + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})s = \rho_2 s \end{cases} \quad (4.5)$$

Afirmamos que $\rho_2 \in J_T$. De fato, suponhamos que $\rho_2 \notin J_T$. Então existem $u, v \in P$ tal que $\rho_2(u, v) \neq 0$ e $v \notin T$. Logo, existe $w \in P$ tal que $u \leq v < w$. Tome $m = \delta_v \in I(P)$ e $r = \delta_{vw} \in FI(P)$. Então

$$(\rho_{rms}\delta_{vw})(x, w) = \sum_{x \leq z \leq w} \rho_{rms}(x, z)\delta_{vw}(z, w) = \begin{cases} \rho_{rms}(x, v), & \text{se } v \in [x, w] \\ 0, & \text{se } v \notin [x, w] \end{cases}.$$

Mas por (4.5), $\rho_{rms}r = 0$, para todo $r \in FI(P)$. Portanto $\rho_{rms}(x, v) = 0$, para todo $x \leq v$.

Temos também

$$(\sigma_{rms}\delta_v)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \sigma_{rms}(x, z)\delta_v(z, y) = \begin{cases} \sigma_{rms}(x, v), & \text{se } y = v \\ 0, & \text{se } y \neq v \end{cases}.$$

Como $v \notin T$ e $\sigma_{rms} \in J_T$, segue que $\sigma_{rms}(x, v) = 0$ e, portanto $\sigma_{rms}\delta_v = 0$. Além disso,

$$(\rho_{rms}\delta_v)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \rho_{rms}(x, z)\delta_v(z, y) = \begin{cases} \rho_{rms}(x, v), & \text{se } y = v \\ 0, & \text{se } y \neq v \end{cases}.$$

Como acabamos de ver, $\rho_{rms}(x, v) = 0$, para todo $x \leq v$ e assim, $\rho_{rms}\delta_v = 0$. Então, de (4.5) temos que

$$\rho_2\delta_v = \mu_{rms}\delta_{vw} + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})\delta_v = \mu_{rms}\delta_{vw}.$$

Por fim,

$$(\mu_{rms}\delta_{vw})(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu_{rms}(x, z)\delta_{vw}(z, y) = \begin{cases} \mu_{rms}(x, v), & \text{se } y = w \text{ e } v \in [x, y] \\ 0, & \text{se } y \neq w \text{ ou } v \notin [x, y] \end{cases}.$$

Além disso,

$$(\rho_2\delta_v)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \rho_2(x, z)\delta_v(z, y) = \begin{cases} \rho_2(x, v), & \text{se } y = v \\ 0, & \text{se } y \neq v \end{cases}.$$

Logo,

$$\rho_2(u, v) = (\rho_2\delta_v)(u, v) = (\mu_{rms}\delta_{vw})(u, v) = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto $\rho_2 \in J_T$.

Suponhamos que $\rho_2 \neq 0$. Então existem $t \in T$ e $u \in P$ tal que $\rho_2(u, t) \neq 0$. Tome $r = \delta_t \in FI(P)$ e $s = -\delta_t \in J_T$. Por (4.5) temos que

$$0 = -\rho_{rms}r = \rho_{rms}(-\delta_t) = \sigma_{rms}\delta_t + (\rho_{rms} + \sigma_{rms})(-\delta_t) = \rho_2s = -\rho_2\delta_t.$$

Mas,

$$(\rho_2\delta_t)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \rho_2(x, z)\delta_t(z, y) = \begin{cases} \rho_2(x, t), & \text{se } y = t \\ 0, & \text{se } y \neq t \end{cases}.$$

Logo $\rho_2(x, t) = 0$ para todo $x \leq t$, donde segue que $\rho_2(u, t) = 0$, o que é uma contradição.

Então $\rho_2 = 0$.

Com isso temos que $\varphi = 0$ e, portanto $\psi \in A$. Logo $A = FI(\widehat{P})(+I(P))^l$ é uma K -álgebra Zassenhaus à esquerda. \square

Seja $B = FI(\widehat{P})(+I(P))^r$. Dados $\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \in B$, temos

$$\left(\begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r\rho \\ m\rho + (r+s)\mu \\ s\rho + (r+s)\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot\rho & 0 & 0 \\ \cdot\mu & \cdot\rho & \cdot\mu \\ \cdot\sigma & 0 & \cdot(\rho + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\cdot B = \left\{ \psi \in \text{End}_K(B) : \psi = \begin{bmatrix} \cdot\rho & 0 & 0 \\ \cdot\mu & \cdot\rho & 0 \\ \cdot\sigma & 0 & \cdot(\sigma + \rho) \end{bmatrix}, \rho \in FI(P), \mu \in I(P), \sigma \in J_L \right\}.$$

Teorema 4.3.2. $B = FI(\widehat{P})(\widehat{+})I(P)^r$ é uma K -álgebra Zassenhaus à direita.

Demonstração: Pelo Teorema 4.2.6, $B = \cdot(FI(P)(+)I(P)) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_L\}$, onde consideramos a soma direta de K -espaços. Como $\cdot(FI(P)(+)I(P)) \cong FI(P) \oplus I(P)$ e $\{\eta_\lambda : \lambda \in J_L\} \cong J_L$, então

$$B = \cdot(FI(P) \oplus I(P)) \oplus \{\eta_\lambda : \lambda \in J_L\} \cong FI(P) \oplus I(P) \oplus J_L.$$

Seja $\psi \in \widehat{B}^r$. Então $\psi \in \text{End}_K(B)$ e, pela Proposição 1.2.37, existem $\alpha_1 \in \text{End}_K(FI(P))$, $\alpha_2 \in \text{Hom}_K(I(P), FI(P))$, $\alpha_3 \in \text{Hom}_K(J_L, FI(P))$, $\beta_1 \in \text{Hom}_K(FI(P), I(P))$, $\beta_2 \in \text{End}_K(I(P))$, $\beta_3 \in \text{Hom}_K(J_L, I(P))$, $\lambda_1 \in \text{Hom}_K(FI(P), J_L)$, $\lambda_2 \in \text{Hom}_K(I(P), J_L)$ e $\lambda_3 \in \text{End}_K(J_L)$ tais que

$$\psi = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, dados $r \in FI(P)$, $m \in I(P)$ e $s \in J_L$, existem $\rho_{rms} \in FI(P)$, $\mu_{rms} \in I(P)$ e $\sigma_{rms} \in J_L$ tais que

$$\psi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho_{rms} \\ \mu_{rms} \\ \sigma_{rms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\rho_{rms} \\ m\rho_{rms} + (r+s)\mu_{rms} \\ s\rho_{rms} + (r+s)\sigma_{rms} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\psi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha_1(r) + \alpha_2(m) + \alpha_3(s) \\ \beta_1(r) + \beta_2(m) + \beta_3(s) \\ \lambda_1(r) + \lambda_2(m) + \lambda_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\rho_{rms} \\ m\rho_{rms} + (r+s)\mu_{rms} \\ s\rho_{rms} + (r+s)\sigma_{rms} \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos

$$\begin{cases} \alpha_1(r) + \alpha_2(m) + \alpha_3(s) = r\rho_{rms} \\ \beta_1(r) + \beta_2(m) + \beta_3(s) = m\rho_{rms} + (r+s)\mu_{rms} \\ \lambda_1(r) + \lambda_2(m) + \lambda_3(s) = s\rho_{rms} + (r+s)\sigma_{rms} \end{cases}.$$

1. Se $m = s = 0$, temos $\alpha_1(r) = r\rho_{r00}$, $\beta_1(r) = r\mu_{r00}$ e $\lambda_1(r) = r\sigma_{r00}$, para todo $r \in FI(P)$.
Assim, $\alpha_1 \in \widehat{FI(P)}^r = \cdot FI(P)$, $\beta_1 \in H^1(FI(P), I(P)) = \cdot I(P)$ e $\lambda_1 \in H^1(FI(P), J_L) = \cdot J_L$
2. Se $m = r = 0$, então $\alpha_3(s) = 0$, $\beta_3(s) = s\mu_{00s}$ e $\lambda_3(s) = s(\rho_{00s} + \sigma_{00s})$, para todo $s \in J_L$.
Portanto $\alpha_3 = 0$.
3. Se $r = s = 0$, segue que $\lambda_2(m) = 0$, $\alpha_2(m) = 0$ e $\beta_2(m) = m\rho_{0m0}$, para todo $m \in I(P)$.
Logo, $\alpha_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\beta_2 \in \widehat{I(P)}^r = \cdot FI(P)_{I(P)}$.

Dessa forma, existem $\rho, \rho_1 \in FI(P)$, $\mu \in I(P)$ e $\sigma \in J_L$ tais que $\alpha_1 = \cdot\rho$, $\beta_1 = \cdot\mu$, $\lambda_1 = \cdot\sigma$ e $\beta_2 = \cdot\rho_1$. Logo,

$$\psi = \begin{bmatrix} \cdot\rho & 0 & 0 \\ \cdot\mu & \cdot\rho_1 & \beta_3 \\ \cdot\sigma & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot\rho & 0 & 0 \\ \cdot\mu & \cdot\rho & 0 \\ \cdot\sigma & 0 & \cdot(\sigma + \rho) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot(\rho_1 - \rho) & \beta_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho) \end{bmatrix}$$

e, assim

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot(\rho_1 - \rho) & \beta_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho) \end{bmatrix} = \psi - \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \in \widehat{B}^r.$$

Mostremos que $\varphi = 0$.

Como $\varphi \in \widehat{B}^r$, dados $r \in FI(P)$, $m \in I(P)$, $s \in J_L$, existem $\rho_{rms} \in FI(P)$, $\mu_{rms} \in I(P)$ e $\sigma_{rms} \in J_L$ tais que

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{rms} \\ \mu_{rms} \\ \sigma_{rms} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\rho_{rms} \\ m\rho_{rms} + (r+s)\mu_{rms} \\ s\rho_{rms} + (r+s)\sigma_{rms} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot(\rho_1 - \rho) & \beta_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ m \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m(\rho_1 - \rho) + \beta_3(s) \\ (\lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho))(s) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{cases} i) & r\rho_{rms} = 0 \\ ii) & m\rho_{rms} + (r+s)\mu_{rms} = m(\rho_1 - \rho) + \beta_3(s) \cdot \\ iii) & s\rho_{rms} + (r+s)\sigma_{rms} = (\lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho))(s) \end{cases} .$$

Em (ii) tome $m = 0$ e $r = -s$. Daí, para todo $s \in J_L$, $\beta_3(s) = 0$. Portanto podemos escrever (ii) da forma $m\rho_{rms} + (r+s)\mu_{rms} = m(\rho_1 - \rho)$. Tomando $m = r$ e $s = -r$ obtemos $r\rho_{rms} = r(\rho_1 - \rho)$. Mas, por (i), $r\rho_{rms} = 0$, o que implica $r(\rho_1 - \rho) = 0$ para todo $r \in FI(P)$. Assim, se $r = \delta \in FI(P)$, temos $\rho_1 - \rho = 0$. Por fim, em (iii), dado $s \in J_L$, tome $r = -s$. Daí, $s\rho_{rms} = (\lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho))(s)$. Mas por (i), $s\rho_{rms} = -r\rho_{rms} = 0$. Logo, $(\lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho))(s) = 0$, para todo $s \in J_L$, ou seja, $\lambda_3 - \cdot(\sigma + \rho) = 0$. Com isso temos que $\varphi = 0$, o que implica que $\psi \in \cdot B$. Portanto $B = (FI(\widehat{P})(+)I(P))^r$ é uma K -álgebra Zassenhaus à direita. \square

Corolário 4.3.3. $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^l$ é K -álgebra Zassenhaus à direita e $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^r$ é K -álgebra Zassenhaus à esquerda.

Demonstração: Considere as aplicações $\psi : (FI(\widehat{P})(+)I(P))^r \longrightarrow (FI(\widetilde{P})(+)\widetilde{I}(\widetilde{P}))^l$ e $\phi : (FI(\widehat{P})(+)I(P))^l \longrightarrow (FI(\widetilde{P})(+)\widetilde{I}(\widetilde{P}))^r$, onde, dados $r \in FI(P)$, $m \in I(P)$, $s \in J_T$ e $w \in J_L$, definimos

$$\psi \left(\begin{bmatrix} \cdot r & 0 \\ \cdot m & \cdot(r+w) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \tau(r)\cdot & 0 \\ \tau(m)\cdot & \tau(r+w)\cdot \end{bmatrix}$$

e

$$\phi \left(\begin{bmatrix} r\cdot & 0 \\ m\cdot & (r+s)\cdot \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cdot\tau(r) & 0 \\ \cdot\tau(m) & \cdot\tau(r+s) \end{bmatrix},$$

onde τ é aplicação definida no Teorema 3.2.2.

Não é difícil verificar que ψ e ϕ são isomorfismos de K -álgebras. Além disso, pelos Teoremas 4.3.2 e 4.3.1, $(FI(\widetilde{P})(+)\widetilde{I}(\widetilde{P}))^r$ e $(FI(\widetilde{P})(+)\widetilde{I}(\widetilde{P}))^l$ são K -álgebras Zassenhaus à direita e à esquerda, respectivamente. Então, pela Proposição 1.3.5, $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^l$ e $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^r$ são também K -álgebras à direita e à esquerda, respectivamente. Portanto $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^l$ e $(FI(\widehat{P})(+)I(P))^r$ são K -álgebras Zassenhaus. \square

REFERÊNCIAS

- [1] Albert, A.A., *Structure of algebras*, AMS Colloquium Publications **24**, 1939.
- [2] Buckner, J., Dugas, M., Left rigid rings, *J. Algebra* **309** (2007) 192–206.
- [3] Dugas, M., Zassenhaus rings as idealization of modules, *J. Commut. Algebra* **2** (2010) 139–158.
- [4] Zassenhaus, H., Orders as endomorphism rings of modules of the same rank, *J. London Math. Soc.* **42** (1967) 180–182.
- [5] Khripchenko, N.S., Novikov, B.V., Finitary incidence algebras, *Comm. Algebra* **37** (2009) 5,1670–1676.
- [6] Lam, T.Y., *A first course in noncommutative rings*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] Dugas, M., Homomorphisms of finitary incidence algebras, *Comm. Algebra* **40** (2012) 7, 2373–2384.
- [8] Brusamarello, R., Fornaroli, E.Z., Santulo Jr., E.A., Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras, *Linear Multilinear Algebra* **60** (2012) 2, 181–188.
- [9] Rota, G-C, Doubilet, P., Stanley, R.P., On the foundations of combinatorial theory I: Theory of Möbius functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* **2** (1964) 340–368.
- [10] Schröder, B.S., *Ordered sets: an introduction*, Birkhäuser Boston, Boston, 2002.
- [11] Spiegel, E., O'Donnell, C.J., *Incidence algebras*, Marcel Dekker, New York, 1997.

ÍNDICE

- álgebra, 13
 - Zassenhaus à direita, 19
 - Zassenhaus à esquerda, 19
- anel, 8
- anti-homomorfismo
 - de álgebras, 13
 - de anéis, 12
- anti-isomorfismo
 - de posets, 5
 - de álgebras, 13
 - de anéis, 12
- antiautomorfismo
 - de álgebras, 13
 - de posets, 5
- anticadeia, 3
- automorfismo
 - de álgebras, 13
 - de anéis, 12
 - de posets, 5
- bimódulo, 15
- cadeia, 3
 - comprimento de uma, 3
- centro, 9
- conjunto
 - co-finito, 51
 - noetheriano, 55
- elemento
 - conjugado, 11
 - diagonal, 31
 - idempotente, 11
 - primitivo, 42
 - inversível, 9
 - máximo, 2
 - mínimo, 2
 - maximal, 2
 - minimal, 2
 - regular, 11
 - super-regular, 35
- função finitária, 23
- homomorfismo
 - de álgebras, 13
 - de anéis, 12
 - de módulos, 15
- ideal, 10
- idealização de um módulo, 59
- intervalo

- comprimento de um, 3
- involução
 - de álgebra, 13
 - de posets, 5
- isomorfismo
 - de álgebras, 13
 - de anéis, 12
 - de módulos, 15
 - de posets, 5
- módulo, 14
 - Zassenhaus à direita, 19
 - Zassenhaus à esquerda, 19
- par Zassenhaus
 - à direita, 19
 - à esquerda, 19
- poset, 1
 - conexo, 3
 - dual, 2
 - finito, 2
 - infinito, 2
 - intervalo de um, 3
 - localmente finito, 3
- radical de Jacobson, 10, 23
- subálgebra, 13
- subanel, 9
- submódulo, 14
- suporte, 25