UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

MARIA CLÁUDIA AGUITONI

Álgebras de Lie, grupos de Lie e espaços girovetoriais de Lie

Maringá-PR
2010

MARIA CLÁUDIA AGUITONI

Álgebras de Lie, grupos de Lie e espaços girovetoriais de Lie

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Carlos José Braga Barros
Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva

Maringá
2010

MARIA CLÁUDIA AGUITONI

Álgebras de Lie, grupos de Lie e espaços girovetoriais de Lie

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Carlos José Braga Barros

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 09 de abril de 2010.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a Deus.

À minha mãe.

Agradecimentos

À Deus, que me permitiu estar aqui hoje.

À minha mãe, que sempre me apoiou e incentivou os meus estudos. As minhas irmãs, que indiretamente me incentivaram, encorajando-me a prosseguir e dando-me forças para vencer cada etapa e a meu pai, que infelizmente não pode estar presente neste momento tão importante da minha vida.

Ao meu namorado Michel, pelo apoio incondicional, companheirismo, amizade e principalmente por estar ao meu lado nessa caminhada.

Ao meu orientador Carlos, por aceitar me orientar.

Ao meu co-orientador Eduardo, que tantas vezes me reanimou e me fez acreditar ser possível a realização desse trabalho. Obrigada por sua paciência e esforço!

Ao professor Josiney, pela paciência e serenidade, além de uma singular habilidade de se colocar no lugar do outro e dizer as palavras certas, nos momentos certos.

Aos amigos de curso, pelos esclarecimentos e contribuições de informações durante todo esse tempo. Em particular, a Dani, a Tássia e ao Michel, que fizeram muita diferença.

À minha amiga Luciana, por entender minha ausência e me apoiar em todas as circunstâncias da vida.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nosso primeiro objetivo nesse trabalho é apresentar de forma organizada e detalhada os conceitos estudados na teoria de Lie. Para isso, fizemos um estudo elaborado sobre álgebras e grupos de Lie: apresentamos as álgebras de Lie solúveis, nilpotente, simples e semisimples; mostramos os critérios de Cartan, que nos permitem investigar a solubilidade e semisimplicidade dessas álgebras de Lie e por fim, introduzimos o conceito de aplicação exponencial e variedades homogêneas. Nosso segundo objetivo é estabelecer critérios para definirmos em um espaço homogêneo, uma estrutura de espaço girovetorial de Lie. Para isto, fizemos um estudo da teoria de girogrupos através de laços visando atender nossos interesses e usando a teoria de Lie, para uma seção arbitrária da projeção canônica do grupo de Lie G sobre G/H, onde H é um subgrupo fechado de G, definimos uma operação binária sobre as classes laterais. Através dessa operação fornecemos condições suficientes para obtermos laços de Lie à esquerda e a partir destes, obtemos os espaços girovetoriais de Lie.

Abstract

The first objective in this work is to present in a organized and detailed way, the concepts of Lie theory. To reach this one, we did an extensive study about Lie groups and Lie algebras: we present the soluble, nilpotent, simple and semisimple Lie algebras; we give the Cartan criterions, which allow us to investigate the solubility and semisimplicity of these Lie algebras and, finally we introduce the definition of exponential map and homogenous manifolds. Our second objective is to establish criterions to define a structure of a Lie gyrovector space in a homogenous space. To reach this one, we did a study of gyrogroups through of loop theory, and using Lie theory, for an arbitrary section of the canonic map of the Lie group G on G/H, where H is a closed subgroup of G, we define an binary operation on the cosets. With this operation, we give conditions to obtain Lie left loops and from these, we obtain the Lie gyrovector spaces.

Sumário

Introdução

Um grupo de Lie é uma variedade G com estrutura de grupo, de tal modo que as aplicações

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis. Um campo X de vetores tangentes a G é uma aplicação que a cada ponto $p \in G$ corresponde um vetor X_p de T_pG, onde X_p denota o valor do campo X no ponto $p \in G$. Esse campo X de vetores tangentes a G, se diz invariante pela esquerda quando $X_{xy} = dL_x(X_y)$, quaisquer que sejam x e y em G, e os conjuntos desses campos invariantes pela esquerda é denotado por LG.

A teoria de Lie consiste em estudar os grupos de Lie através de suas álgebras de Lie. Isso significa que deve-se classificar e descrever as propriedades estruturais dos grupos de Lie, reduzindo-as às propriedades correspondentes das álgebras de Lie.

Assim, o primeiro passo no estudo dos grupos de Lie consiste na construção das álgebras de Lie associadas aos grupos. Uma álgebra de Lie é definida como um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido de uma operação bilinear $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, denominada colchete de Lie, satisfazendo as propriedades de anti-simetria e identidade de Jacobi. Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos $\mathcal{C}^\infty$ tangentes a uma variedade diferenciável G, denotado por $\mathfrak{X}(G)$, onde para $f : G \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, definimos $[X, Y]$ como o campo

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

Esse exemplo nos possibilita mostrar que LG também é uma álgebra de Lie de G. Dessa forma, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G, é definida como o espaço dos campos invariantes (à esquerda ou à direita), com o colchete dado pelo colchete de campos de vetores. Essa álgebra de Lie é isomorfa ao espaço tangente de G na origem e.

Os fluxos dos campos invariantes estabelecem a aplicação exponencial exp:$\mathfrak{g} \rightarrow G$, que é o principal elo de ligação entre $\mathfrak{g}$ e G. A idéia básica de sua construção é que, por definição, os elementos de $\mathfrak{g}$ são equações diferenciais ordinárias em G (campos invariantes), que possuem fluxos, os quais são formados por difeomorfismos locais de G. Os elementos formadores desses fluxos se identificam naturalmente a elementos de G, permitindo construir, a partir de $X \in \mathfrak{g}$, um subgrupo de G parametrizado por $t \in \mathbb{R}$. Dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tome $X \in \mathfrak{g}$ um campo invariante. A aplicação exp$X$ é o valor em $t = 1$ da solução de X que passa pelo elemento neutro quando $t = 0$.

Um dos objetivos desse trabalho é estabelecer critérios para definirmos em um espaço homogêneo, uma estrutura de espaço girovetorial de Lie, e isso só é possível se "estendermos" a teoria de Lie à teoria de girogrupos através de laços.

Após o desenvolvimento da Teoria Especial da Relatividade por Einstein em 1905, houveram tentativas de se interpretar a lei da adição da velocidade usando Geometria Hiperbólica. Mas, a falta da propriedade associativa, foi considerado um fator complicador e essa teoria foi abandonada. Foi através de sua retomada que surgiu o conceito de girogrupo, uma estrutura álgebrica que deu fundamento a toda essa teoria.

Desde sua introdução por Abraham A. Ungar, os girogrupos transformaram-se em um assunto de intensivas investigações em seu significado físico e geométrico, assim como em sua interpretação laço-teórica. Entretanto, a melhor maneira de introduzir a noção de girogrupos, é fornecida pelas transformações de Möbius do disco aberto complexo unitário. A mais geral transformação de Möbius de disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ é da forma

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{a+z}{1+\overline{a}z} \tag{1}$$

onde $a, z \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$ fixo e $\overline{a}$ representa o complexo conjugado de a. A transformação 1 pode ser vista como a transformação

$$z \mapsto \frac{a+z}{1+\overline{a}z}, \tag{2}$$

seguida de uma rotação de θ em relação ao eixo x. A partir de 2, definimos a operação $\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$z \mapsto (a \oplus z) = \frac{a+z}{1+\overline{a}z}, \tag{3}$$

a qual chamamos de adição de Möbius. A operação $\oplus$ não é comutativa nem associativa. Mas, pode-se "reparar" a não comutatividade de $\oplus$ pela introdução da operação

$$gyr : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow Aut(\mathbb{D}, \oplus),$$

dada pela equação

$$gyr[a,b] = \frac{a \oplus b}{b \oplus a} = \frac{1 + a\overline{b}}{1 + \overline{a}b}, \tag{4}$$

onde $Aut(\mathbb{D}, \oplus)$ é grupo dos automorfismo do grupóide $(\mathbb{D}, \oplus)$. Assim, de 4 vemos que

$$a \oplus b = gyr[a,b](b \oplus a).$$

De forma supreendente, o girador "gyr", que "repara" a comutatividade, também "repara" a associatividade para $\oplus$. Surgem assim, as seguintes identidades:

$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a,b]c$	Lei da giroassociatividade à esquerda.
$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus gyr[b,a]c)$	Lei da giroassociatividade à direita.
$gyr[a,b] = gyr[a \oplus b, b]$	Propriedade do laço à esquerda.
$gyr[a,b] = gyr[a, b \oplus a]$	Propriedade do laço à direita.

Dessa forma, a adição de Möbius e seu girador associado, estão ligados e onde há coincidências, há também um significado. Das coincidências emergentes do girador, descobre-se uma estrutura algébrica interessante que merece a extensão pela abstração, e esta é chamada de girogrupo.

Temos dois objetivos a cumprir nesse trabalho: o primeiro consiste em fazer um estudo organizado e detalhado de certos conceitos da teoria clássica de grupos de Lie e álgebras de Lie; o segundo é estabelecer critérios para definirmos em um espaço homogêneo uma estrutura de espaço girovetorial de Lie, o que deve ser feito a partir da "extensão" da teoria de Lie, à teoria de girogrupos através de laços.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1, desenvolvemos o estudo das álgebras de Lie. Em nossa exposição, detalhamos alguns resultados apresentados em [3] e [18]. Apresentamos as primeiras propriedades, definimos série derivada e série central descendente de uma álgebra e Lie, de modo a introduzirmos o conceito de álgebra solúvel e nilpotente. Classificamos as álgebras de Lie quanto as suas dimensões e também definimos as álgebras de Lie simples e semisimples. Finalizamos o capítulo expondo os critérios de Cartan, os quais servem para decidir se uma álgebra de Lie é solúvel ou semisimples, em termos de uma forma bilinear na álgebra - a forma de Cartan-Killing. Recorremos também as referências [2], [10], [12] e [22].

No capítulo 2, mostramos que a teoria de grupos de Lie, está baseada na existência das álgebras de lie associadas aos grupos. As álgebras de Lie possibilitam transportar métodos da álgebra linear ao estudo de objetos não lineares, como são os grupos de Lie. Expomos detalhadamente alguns resultados apresentados em [5], [7], [11] e [23]. Após apresentados os conceitos básicos desse capítulo, estudamos a aplicação exponencial, a qual estabelece um vínculo entre o colchete na álgebra de Lie e o produto no grupo, determinando quase que, ou completamente, a estrutura do grupo de Lie a partir das álgebras de Lie. Completamos esse capítulo, apresentando variedades homogêneas, com o intuito de expor o conceito de espaço homogêneo. As referências [2], [15] e [22] também contribuiram de forma significativa em alguns resultados.

O capítulo 3 será dedicado a introdução da teoria de girogrupos através de laços. Para uma seção arbitrária da projeção canônica do grupo G sobre G/H, onde H é um subgrupo de G, definimos uma operação binária sobre as classes laterias. Através desta operação binária, fornecemos condições suficientes para obtermos laços à esquerda. A partir desse conceito pode-se definir espaços girovetoriais. As referências utilizadas são [13], [17], [20] e [21]. Para melhor entender o contexto histórico-teórico de girogrupos, basta consultar as referências [19] e [20].

No capítulo 4, estendemos a teoria de Lie à teoria de girogrupos através de laços, afim de se estabeler critérios para introduzir uma estrutura de espaço girovetorial de Lie em um espaço homogêneo. Este problema foi abordado por Abraham A. Hungar e Azniv Kasparian em [21] e este é um assunto que ainda se encontra longe de ser fechado. Inicialmente apresentamos um espaço homogêneo com estrutura de laço de lie à esquerda e introduzimos neste, uma multiplicação escalar satisfazendo certas condições de modo a obtermos uma estrutura de espaço girovetorial de Lie quase à esquerda. Depois apresentamos o conceito de girogrupo de Lie à esquerda, possibilitando assim definirmos um espaço girovetorial de Lie à esquerda. Finalmente apresentamos as condições para que um espaço homogêneo, tenha uma estrutura de espaço girovetorial de Lie. Consultamos também as referências [4], [6], [11], [14] e [16].

Espera-se que a teoria apresentada aqui ainda possa ser desenvolvida de modo a contribuir em outros trabalhos.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais resultados estudados na teoria das álgebras de Lie. Alguns destes resultados são usados mais adiante. As referências principais para este capítulo são [10], [12], [18] e [22].

1.1 Conceitos Básicos

Esta é uma seção introdutória, formada em sua maior parte por definições de conceitos que formam toda a base da teoria das álgebras de Lie. Esses conceitos são ilustrados por exemplos com o intuito de deixar o leitor familiarizado com essa teoria.

1.1.1 Definições e primeiras propriedades

Definição 1.1 *Uma **álgebra de Lie** sobre um corpo $\mathbb{K}$, é um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$, munido de uma operação bilinear $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, denominada colchete de Lie, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(ii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A primeira condição exige que o colchete de Lie seja anti-simétrico e a segunda que o colchete de Lie satisfaça a **Identidade de Jacobi**. Note que a condição (i) equivale a dizer que $[X,X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.1 *O espaço vetorial das matrizes quadradas reais $M(n,\mathbb{R})$ com colchete definido por*

$$[A,B] = AB - BA$$

é uma álgebra de Lie. E se considerarmos o colchete $[\ ,\ ]^*$ *dado por*

$$[A,B]^* = BA - AB = -[A,B],$$

teremos que, $M(n,\mathbb{R})$ *também será uma álgebra de Lie. Esse colchete mede a comutatividade do produto das matrizes, pois se* A *e* B *comutam, temos que* $[A,B]=0$.

Exemplo 1.2 *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e denotemos*

$$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \{\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\ ;\ \phi \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Tomando $\phi_1,\ \phi_2\ \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *temos que* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *com o colchete de Lie dado por*

$$[\phi_1,\phi_2] = \phi_1 \circ \phi_2 - \phi_2 \circ \phi_1, \tag{1.1}$$

é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.3 *Seja* V *um espaço vetorial qualquer e definimos* $[X,Y]=0$ *para quaisquer que sejam* $X,Y\in V$. *É claro que* V *munido deste colchete é uma álgebra de Lie, que recebe o nome de* ***álgebra de Lie Abeliana.***

Proposição 1.2 *Em uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *tem-se* $[X,X]=0$ *se, e somente se,*

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

para quaisquer que sejam $X,Y\in\mathfrak{g}$.

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= [X+Y, X+Y] \\ &= [X, X+Y] + [Y, X+Y] \\ &= [X,X] + [X,Y] + [Y,X] + [Y,Y] \\ &= [X,Y] + [Y,X]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $[X,Y]=-[Y,X]$, então $[X,Y]+[Y,X]=0$ para quaisquer que sejam $X,Y\in\mathfrak{g}$. Se $X=Y$, temos que $[X,X]+[X,X]=0$ e concluímos que $[X,X]=0$. $\square$

Naturalmente, definimos a seguir o conceito de subálgebra de Lie.

Definição 1.3 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com colchete $[\ ,\ ]$ e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma* ***subálgebra de Lie*** *de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, para quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{h}$ tem-se que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$* **.**

Assim, toda subálgebra de Lie de uma álgebra de Lie é uma álgebra de Lie. É imediato que, a interseção de duas subálgebras de Lie de uma álgebra de Lie é também uma subálgebra. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.4 *Sabemos que o espaço vetorial das matrizes quadradas $M(n, \mathbb{R})$, é soma direta do subespaço das matrizes anti-simétricas, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R});\ A^t = -A\}$, com o subespaço das matrizes simétricas, $\mathfrak{s}\,(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R});\ A^t = A\}$. É fácil verificar que, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ é uma subálgebra de Lie de $M(n, \mathbb{R})$, porém, $\mathfrak{s}\,(n, \mathbb{R})$ não é uma subálgebra de Lie de $M(n, \mathbb{R})$, pois o colchete de duas matrizes simétricas é uma matriz anti-simétrica.*

Exemplo 1.5 *O conjunto das matrizes quadradas de traço zero, denotadas por*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \mathrm{tr}(X) = 0\},$$

também é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie $M(n, \mathbb{R})$, com colchete definido por $[A, B] = AB - BA$.

Uma subálgebra de uma álgebra de Lie, que é uma álgebra abeliana é chamada subálgebra abeliana. Como exemplo temos:

Exemplo 1.6 *O espaço das matrizes diagonais é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.*

Teorema 1.4 *Todo subespaço unidimensional de uma álgebra de Lie é uma subálgebra abeliana dessa álgebra.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço unidimensional de $\mathfrak{g}$. Tome $\{Z\}$ uma base de $\mathfrak{h}$. Se $X, Y \in \mathfrak{h}$, então existem α e β em $\mathbb{R}$, tais que $X = \alpha Z$ e $Y = \beta Z$. Portanto, $[X, Y] = 0 \in \mathfrak{h}$. □

Portanto numa álgebra de Lie arbitrária, todas suas subálgebras não abelianas tem dimensão maior que um.

Como consequência desse teorema, temos o seguinte:

Corolário 1.5 *Toda álgebra de Lie unidimensional é abeliana.*

Para álgebras bidimensionais, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra bidimensional de $\mathfrak{g}$. Então, ou $\mathfrak{h}$ é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{h}$, tal que $[A, B] = B$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathfrak{h}$ seja uma subálgebra não abeliana bidimensional. Tomemos $\{X, Y\}$ uma base de $\mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é não abeliana, e $X, Y \in \mathfrak{h}$, temos que $[X, Y] \neq 0$. Definamos $Y' = [X, Y]$ e escolhamos $X' \in \mathfrak{h}$ de modo que $\{X', Y'\}$ seja uma base de $\mathfrak{h}$. Como $X', Y' \in \mathfrak{h}$, temos que $X' = aX + bY$ e $Y' = cX + dY$. Assim

$$[X', Y'] = [aX + bY, cX + dY] = (ad - bc)[X, Y].$$

Como $[X, Y] \neq 0$ e $\mathfrak{h}$ é não abeliana, segue que $ad - bc \neq 0$. Logo, tomando $A = (ad - bc)^{-1}X'$ e $B = Y'$ temos

$$\begin{aligned} [A, B] &= [(ad - bc)^{-1}X', Y'] \\ &= (ad - bc)^{-1}[X', Y'] \\ &= (ad - bc)^{-1}(ad - bc)[X, Y] \\ &= [X, Y] \\ &= Y' \\ &= B. \end{aligned}$$

Portanto $\{A, B\}$ é a base de $\mathfrak{h}$ procurada. □

Decorre imediatamente desse teorema, o seguinte corolário:

Corolário 1.7 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie bidimensional, então ou $\mathfrak{g}$ é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[A, B] = B$.*

Apresentamos aqui uma classificação das álgebras de Lie unidimensionais e bidimensionais. Posteriormente, faremos o mesmo para álgebras de Lie tridimensionais, já que antes, necessitamos estudar outros conceitos.

A seguir definimos o conceito de ideal, que é uma importante classe de subálgebras.

Definição 1.8 *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}$ *um subespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$*. Dizemos que* $\mathfrak{h}$ *é um* ***ideal*** *de* $\mathfrak{g}$*, se para quaisquer* $X \in \mathfrak{g}$ *e* $Y \in \mathfrak{h}$ *tivermos* $[X, Y] \in \mathfrak{h}$*.*

Em particular todo ideal é uma subálgebra, mas nem toda subálgebra é um ideal. Para verificar isso, basta considerar $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}); A^t = -A\}$, a subálgebra das matrizes quadradas anti-simétricas de ordem 2. Temos que $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ não é um ideal de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. De fato, seja $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Note que

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Exemplo 1.7 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie abeliana, então todo subespaço* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *é um ideal, pois, se* $X \in \mathfrak{h}$ *e* $Y \in \mathfrak{g}$ *temos que* $[X, Y] = 0 \in \mathfrak{h}$*.*

A seguir, definimos o centralizador de um subconjunto de uma álgebra de Lie e mostramos que o centralizador de um ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, também é um ideal de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.9 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* B *um subconjunto de* $\mathfrak{g}$ *. O* ***centralizador*** *de* B *em* $\mathfrak{g}$ *é o conjunto*

$$\mathfrak{z}(B) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] = 0 \qquad \text{para todo } Y \in B\}.$$

Definição 1.10 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. O centralizador de* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{g}$ *é chamado* ***centro de*** $\mathfrak{g}$ *e é denotado por*

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] = 0 \qquad \text{para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Proposição 1.11 *Se* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}$ *um ideal de* $\mathfrak{g}$*, então* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*.*

Demonstração: É imediato que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é um subespaço de $\mathfrak{g}$. Sejam $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, $Y \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \mathfrak{h}$. A identidade de Jacobi nos diz que

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0. \tag{1.2}$$

Dessa forma, desde que $\mathfrak{h}$ é ideal de $\mathfrak{g}$, então $[Y, Z] \in \mathfrak{h}$. Assim da definição de $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ temos que $[X, [Y, Z]] = 0$. Como $[Z, X] = 0$, então $[[Z, X], Y] = 0$. Logo em (1.2) segue que $[[X, Y], Z] = 0$ e $[X, Y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Portanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é ideal de $\mathfrak{g}$.
□

Mostramos a seguir que a soma e a interseção de ideais ainda é ideal.

Proposição 1.12 *A soma e a interseção de dois ideais de uma álgebra de Lie, ainda é um ideal desta álgebra de Lie.*

Demonstração: Sejam $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ ideais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. É claro que a soma e a interseção de dois subespaços é um subespaço. Assim, seja $X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Assim, $X = X_1 + X_2$ com $X_1 \in \mathfrak{h}_1$ e $X_2 \in \mathfrak{h}_2$. Então

$$[X, Y] = [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2.$$

Também, tomando $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ e $Y \in \mathfrak{g}$ é imediato da definição de ideal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. □

Da mesma forma é fácil verificar que a soma de um ideal com uma subálgebra de uma álgebra de Lie, é uma subálgebra da álgebra de Lie.

Para uma álgebra de Lie bidimensional e não abeliana, verifica-se facilmente que o seu centro é nulo.

Um outro conceito importante é o de quociente de álgebras de Lie.

Definição 1.13 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{h}$ é subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, podemos determinar o* ***espaço quociente*** $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{X + \mathfrak{h};\ X \in \mathfrak{g}\}$.

Note que $X + \mathfrak{h} = Y + \mathfrak{h}$ se, se somente se, $X - Y \in \mathfrak{h}$. Sabendo que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial com as operações definidas por

$$(X + \mathfrak{h}) + (Y + \mathfrak{h}) = (X + Y + \mathfrak{h}) \qquad \text{e}$$

$$\alpha(X+\mathfrak{h}) = (\boldsymbol{\alpha}X)+\mathfrak{h}$$

para todo α em $\mathbb{R}$. Podemos mostrar que:

Proposição 1.14 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie com o colchete $[(X+\mathfrak{h}),(Y+\mathfrak{h})] = [X,Y]+\mathfrak{h}$.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que este colchete está bem definido. De fato, se $(X+\mathfrak{h}) = (X_1+\mathfrak{h})$ e $(Y+\mathfrak{h}) = (Y_1+\mathfrak{h})$, então $X-X_1, Y-Y_1 \in \mathfrak{h}$. Assim, $X = X_1+Z_1, Y = Y_1+Z_2$ com $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{h}$. Logo

$$\begin{aligned} & [X,Y]+\mathfrak{h} \\ = \; & [X_1+Z_1, Y_1+Z_2]+\mathfrak{h} \\ = \; & [X_1, Y_1+Z_2]+[Z_1, Y_1+Z_2]+\mathfrak{h} \\ = \; & [X_1,Y_1]+[X_1,Z_2]+[Z_1,Y_1]+[Z_1,Z_2]+\mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, temos que $[X_1,Z_2],[Z_1,Y_1],[Z_1,Z_2] \in \mathfrak{h}$. Portanto,

$$[X,Y]+\mathfrak{h} = [X_1,Y_1]+\mathfrak{h},$$

ou seja, o colchete está bem definido. Note que é essencial que $\mathfrak{h}$ seja um ideal de $\mathfrak{g}$, pois se $\mathfrak{h}$ for apenas uma subálgebra, o colchete pode não estar bem definido.

Agora vejamos que:

• O colchete é bilinear,

$$\begin{aligned} & [\alpha(X+\mathfrak{h})+\beta(Y+\mathfrak{h}), Z+\mathfrak{h}] \\ = \; & [\alpha(X+\mathfrak{h}), Z+\mathfrak{h}]+[\beta(Y+\mathfrak{h}), Z+\mathfrak{h}] \\ = \; & \alpha[(X+\mathfrak{h}), Z+\mathfrak{h}]+\beta[Y+\mathfrak{h}, Z+\mathfrak{h}]. \end{aligned}$$

• O colchete é anti-simétrico,

$$[(X+\mathfrak{h}),(X+\mathfrak{h})] = [X,X]+\mathfrak{h} = 0+\mathfrak{h} = \mathfrak{h}.$$

• A identidade de Jacobi é satisfeita,

$$
\begin{aligned}
& [X+\mathfrak{h},[Y+\mathfrak{h},Z+\mathfrak{h}]]+[Y+\mathfrak{h},[Z+\mathfrak{h},X+\mathfrak{h}]]+[Z+\mathfrak{h},[X+\mathfrak{h},Y+\mathfrak{h}]] \\
= \; & [X+\mathfrak{h},[Y,Z]+\mathfrak{h}]+[Y+\mathfrak{h},[Z,X]+\mathfrak{h}]+[Z+\mathfrak{h},[X,Y]+\mathfrak{h}] \\
= \; & [X,[Y,Z]]+\mathfrak{h}+[Y,[Z,X]]+\mathfrak{h}+[Z,[X,Y]]+\mathfrak{h} \\
= \; & ([X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]])+\mathfrak{h} \\
= \; & 0+\mathfrak{h} \\
= \; & \mathfrak{h}.
\end{aligned}
$$

□

Mostramos, a seguir, que a soma direta de álgebras de Lie é uma álgebra de Lie. Para isso, sejam $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie. Como $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ são espaço vetoriais podemos considerar a soma direta dos espaços vetoriais $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_n$. Sejam $X = X_1 + ... + X_n$ e $Y = Y_1 + ... + Y_n$ elementos de $\mathfrak{g}$. Temos que

$$X+Y=(X_1+Y_1)+...+(X_n+Y_n) \qquad \text{e} \qquad \alpha X = \alpha X_1 + ... + \alpha X_n.$$

Logo $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie com colchete

$$[X,Y]=[X_1,Y_1]+...+[X_n,Y_n].$$

De fato,

• O colchete é bilinear,

$$
\begin{aligned}
& [\alpha X+\beta Y,Z] \\
= \; & [(\alpha X_1+\beta Y_1),Z_1]+...+[(\alpha X_n+\beta Y_n),Z_n] \\
= \; & \alpha[X_1,Z_1]+\beta[Y_1,Z_1]+...+\alpha[X_n,Z_n]+\beta[Y_n,Z_n] \\
= \; & \alpha[X_1,Z_1]+...+\alpha[X_n,Z_n]+\beta[Y_1,Z_1]+...+\beta[Y_n,Z_n]. \\
& \alpha[X,Z]+\beta[Y,Z]
\end{aligned}
$$

• O colchete é anti-simétrico,

$$[X,X]=[X_1,X_1]+...+[X_n,X_n]=0+..+0=0.$$

• A identidade de Jacobi é satisfeita,

$$\begin{aligned}
& [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] \\
= \ & [X,[Y_1,Z_1]+\cdots+[Y_n,Z_n]]+[Y,[Z_1,X_1]+\cdots+[Z_n,X_n]] \\
& +[Z,[X_1,Y_1]+\cdots+[X_n,Y_n]] \\
= \ & [X,[Y_1,Z_1]]+\cdots+[X,[Y_n,Z_n]]+[Y,[Z_1,X_1]]+\cdots+[Y,[Z_n,X_n]] \\
& +[Z,[X_1,Y_1]]+\cdots+[Z,[X_n,Y_n]] \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Passamos a estudar aplicações entre álgebras de Lie. Uma aplicação entre álgebras de Lie que preserva o colchete é chamada homomorfismo de álgebras de Lie, ou seja

Definição 1.15 *Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie. Uma transformação linear $\phi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ é um **homomorfismo de álgebras de Lie**, se satisfaz a propriedade*

$$\phi([X,Y])=[\phi(X),\phi(Y)].$$

*Se ϕ é um isomorfismo entre espaços vetoriais e um homomorfismo de álgebras de Lie, então dizemos que ϕ é um **isomorfismo de álgebras de Lie**. Um isomorfismo $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ é dito **automorfismo de álgebras de Lie**.*

Vejamos alguns exemplos de homomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo 1.8 *A aplicação traço $\mathrm{tr}: M(n\times n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ é um homomorfismo. De fato, dadas $X,Y\in M(n\times n,\mathbb{R})$ tem-se que $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)=0$. Isso implica que $\mathrm{tr}(XY-YX)=0$ para quaisquer transformações lineares X,Y. Portanto,*

$$\mathrm{tr}([X,Y])=0=[\mathrm{tr}(X),\mathrm{tr}(Y)],$$

já que $\mathbb{R}$, por ser unidimensional, é uma álgebra de Lie abeliana.

Exemplo 1.9 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. A aplicação*

$$\begin{aligned}
\pi:\ \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\
X &\mapsto X+\mathfrak{h}
\end{aligned}$$

*é um homomorfismo de álgebras de Lie. De fato, a conclusão que π é linear, segue da definição das operações no espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ e claramente $\pi([X,Y])=[\pi(X),\pi(Y)]$. Este homomorfismo é chamado **homomorfismo canônico** de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Exemplo 1.10 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ a álgebra de Lie das transformações de $\mathfrak{g}$ nela mesma. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definamos a transformação linear*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{ad}(X): & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ & Y & \mapsto & \mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]. \end{array}$$

A aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ & X & \mapsto & \mathrm{ad}(X) \end{array}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie. De fato, note que ad *é uma aplicação linear, pois*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(X + \alpha Y)(Z) &= [X + \alpha Y, Z] \\ &= [X, Z] + [\alpha Y, Z] \\ &= [X, Z] + \alpha[Y, Z] \\ &= \mathrm{ad}(X)(Z) + \alpha \mathrm{ad}(Y)(Z). \end{aligned}$$

Mostremos agora que ad *é um homomorfismo de álgebras de Lie usando a identidade de Jacobi. Observe que*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([X, Y])(Z) &= [[X, Y], Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \mathrm{ad}(X)([Y, Z]) - \mathrm{ad}(Y)([X, Z]) \\ &= \mathrm{ad}(X)(\mathrm{ad}(Y)(Z)) - \mathrm{ad}(Y)(\mathrm{ad}(X)(Z)) \\ &= (\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{ad}(X))(Z) \\ &= [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z). \end{aligned}$$

Essa aplicação é chamada de ***representação adjunta*** *da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Vale lembrar que quando $\mathfrak{g}$ é álgebra abeliana segue que* $\mathrm{ad}(X)$ *é a aplicação nula.*

Na sequência mostramos que o núcleo e a imagem de um homomorfismo de álgebras de Lie, são subálgebras de Lie.

Teorema 1.16 *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie e $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então* $\ker(\phi)$ *é ideal de $\mathfrak{g}$ e* $\mathrm{Im}(\phi)$ *é subálgebra de $\mathfrak{h}$.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $\ker(\phi)$ é ideal de $\mathfrak{g}$. Sejam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \ker(\phi)$. Devemos mostrar que $[X, Y] \in \ker(\phi)$. De fato,

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = [\phi(X), 0] = 0.$$

Portanto $[X,Y] \in \ker(\phi)$, ou seja, $\ker(\phi)$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Agora sejam $X, Y \in \mathrm{Im}(\phi)$. Mostraremos que $[X,Y] \in \mathrm{Im}(\phi)$. Como $X, Y \in \mathrm{Im}(\phi)$ então, $\phi(X_1) = X$ e $\phi(Y_1) = Y$ para algum $X_1, Y_1 \in \mathfrak{g}$. Assim

$$[X,Y] = [\phi(X_1), \phi(Y_1)] = \phi([X_1, Y_1]) \in \mathrm{Im}(\phi).$$

$\square$

As seguintes proposições introduzem os resultados clássicos sobre homomorfismos, cujas demonstrações são as usuais.

Proposição 1.17 *Seja $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então*

$$\frac{\mathfrak{g}}{\ker(\varphi)} \approx \mathrm{Im}(\varphi).$$

Proposição 1.18 *Se $\mathfrak{h}_1$e $\mathfrak{h}_2$ são ideais de $\mathfrak{g}$ então*

$$\frac{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_2} \approx \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2},$$

onde o isomorfismo é natural.

Uma forma de determinar um isomorfismo entre duas álgebras de Lie de dimensão finita, é através dos colchetes dos elementos de suas bases. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Como $[X_i, Y_j]$ é elemento de $\mathfrak{g}$ podemos escrevê-lo como combinação linear dos elementos desta base, ou seja,

$$[X_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k = c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + ... + c_{ij}^k X_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k são denominados **constantes de estrutura** da álgebra de Lie em relação à base. Estas constantes determinam a álgebra, a menos de isomorfismo.

Proposição 1.19 *Duas álgebras de Lie são isomorfas se, e somente se, elas possuem as mesmas constantes de estruturas.*

Demonstração: Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie, $\{X_1, ..., X_n\}$ e $\{Y_1, ..., Y_m\}$ bases de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Suponhamos que $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ seja um isomorfismo. Mostremos que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ possuem as mesmas constantes de estrutura. Como as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas, então elas possuem o mesmo número de elementos em suas bases. Considere $\psi(X_i) = Y_i$, assim $\psi([X_i, X_j]) = [Y_i, Y_j]$. Sabemos que para cada $X_i, X_j \in \mathfrak{g}$, com $k = 1, ..., n$ tem-se que

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + ... + c_{ij}^n X_k = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

e para $Y_i, Y_j \in \mathfrak{h}$, com $k = 1, ..., n$ temos que

$$[Y_i, Y_j] = b_{ij}^1 Y_1 + b_{ij}^2 Y_2 + ... + b_{ij}^n Y_k = \sum_k b_{ij}^k Y_k.$$

Como ψ é isomorfismo segue que

$$\begin{aligned}
[Y_i, Y_j] &= \psi([X_i, X_j]) \\
&= \psi(c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + ... + c_{ij}^n X_k) \\
&= c_{ij}^1 \psi(X_1) + c_{ij}^2 \psi(X_2) + ... + c_{ij}^n \psi(X_k) \\
&= c_{ij}^1 Y_1 + c_{ij}^2 Y_2 + ... + c_{ij}^n Y_k.
\end{aligned}$$

O que implica que $\sum_k b_{ij}^k Y_k = \sum_k c_{ij}^k Y_k$. Como $\{Y_1, ..., Y_m\}$ é base, então $\sum_k (b_{ij}^k - c_{ij}^k) = 0$ e portanto $b_{ij}^k = c_{ij}^k$.

Reciprocamente suponhamos que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ possuam a mesma constante de estrutura c_{ij}^k. Dessa forma $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ possuem a mesma dimensão. Consideremos a transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ definida por $\psi(X_i) = Y_i$. Tomemos $X = \sum_i a^i X_i$ e $Y = \sum_j b^j X_j$ em $\mathfrak{g}$. Logo, $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$. □

1.1.2 Séries de composição

No que segue, definimos série derivada e série central descendente. Apresentamos também, alguns resultados referentes a essas séries. Esse estudo é importante para definirmos álgebras solúveis e nilpotentes.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Para dois subconjuntos A e B de $\mathfrak{g}$, é usada a notação $[A, B]$ para indicar o subespaço gerado por $\{[X, Y];\ X \in A, Y \in B\ \}$, o qual é denotado por $\langle\{[X, Y];\ X, Y \in \mathfrak{g}\ \}\rangle$. Dessa forma, consideremos a seguinte sequência de subespaços dessa álgebra,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = \langle\{[X,Y];\ X,Y \in \mathfrak{g}\ \}\rangle = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = \langle\{[X,Y]; X,Y \in \mathfrak{g}'\}\rangle = [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \langle\{[X,Y];\ X,Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\ \}\rangle = [\mathfrak{g}^{k-1},\mathfrak{g}^{k-1}]$$

$$\vdots$$

Proposição 1.20 $\mathfrak{g}^{(k)}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$ *para todo* $k \geq 0$.

Demonstração: Mostremos por indução sobre k. Se $k = 0$ é imediato, pois $\mathfrak{g}$ é ideal de $\mathfrak{g}$. Suponhamos que o resultado seja válido para $k-1$. Tome $Z \in \mathfrak{g}$ e $W \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Como $W = \sum \alpha_i[X_i,Y_i]$, onde $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$ usando a identidade de Jacobi obtemos

$$\begin{aligned}
[Z,W] &= [Z, \textstyle\sum \alpha_i[X_i,Y_i]] \\
&= \textstyle\sum \alpha_i[Z,[X_i,Y_i]] \\
&= \textstyle\sum \alpha_i([[Y_i,Z],X_i] + [Y_i,[X_i,Z]]) \\
&= \textstyle\sum \alpha_i[[Y_i,Z],X_i] + \sum \alpha_i[Y_i,[X_i,Z]] \in \mathfrak{g}^{(k)},
\end{aligned}$$

e temos o desejado. □

Como $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}^{(k)}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Assim $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)}$ para todo $k \geq 1$ e temos as inclusões:

$$\cdots \subset \mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^{(2)} \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}$$

que é chamada **série derivada** *de* $\mathfrak{g}$. A álgebra $\mathfrak{g}^{(k)}$ é chamada **álgebra derivada** *de* $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.11 $\mathfrak{g}$ *é abeliana se, e somente se,* $\mathfrak{g}' = 0$.

Exemplo 1.12 *Seja* $\mathfrak{g}$ *a álgebra das matrizes triangulares superiores*

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}_{n\times n} \right\}.$$

Então, $\mathfrak{g}'$ *é a álgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal, portanto* $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ *se* $k \geq k_0$ *para algum* k_0 *suficientemente grande.*

Agora, consideremos a sequência de subespaços de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}' = \langle \{[X,Y];\ X, Y \in \mathfrak{g}\ \}\rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}^3 = \langle \{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}'\ \}\rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{g}^k = \left\langle \{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\ \}\right\rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$$

$$\vdots$$

Mostramos que $\mathfrak{g}^k$ é ideal de $\mathfrak{g}$. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 1.21 *Para quaisquer números naturais $i, j \geq 1$ tem-se que $\langle \{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}^i,$ $Y \in \mathfrak{g}^j\}\rangle \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.*

Demonstração: Para provar esse resultado, usamos indução sobre o índice j. Para $j = 1$, o resultado segue, já que $\mathfrak{g}^{j+1} = \langle \{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{g}^j\}\rangle$. Suponhamos que a inclusão seja válida para j e mostremos que ela é válida também para $j+1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \{[X,Y] &: X \in \mathfrak{g}^i, Y \in \mathfrak{g}^{j+1}\}\rangle = \langle \{[X,[Z,S]] : X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j,\ S \in \mathfrak{g}\}\rangle \\
&\subset \{[[X,Z],S] : X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{g}\}\rangle \\
+\langle \{[Z,[X,S]] &: X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{g}\}\rangle \\
&\subset \langle \{[X,Y] :\ X \in \mathfrak{g}^{i+j}, Y \in \mathfrak{g}\ \}\rangle + \langle \{[X,Y] :\ X \in \mathfrak{g}^j, Y \in \mathfrak{g}^{i+1}\ \}\rangle \\
&\subset \mathfrak{g}^{i+j+1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.22 $\mathfrak{g}^k$ *é ideal de* $\mathfrak{g}$ *para todo* $k \geq 1$.

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $\mathfrak{g}^k$ é subespaço gerado por todos os possíveis colchetes que possuam k elementos de $\mathfrak{g}$. Faremos isso por indução sobre k. Para $k = 2$ é imediato da definição de $\mathfrak{g}^k$. Suponhamos que $\mathfrak{g}^{k-1}$ é subespaço gerado por todos os possíveis colchetes que possuam $k-1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Sabemos que os elementos de

$\mathfrak{g}^{k-1}$ podem ser escritos como $\sum_i \alpha_i Y_i$ sendo que, Y_i é o produto de $k-1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Assim, $\mathfrak{g}^k$ é gerado por elementos da forma $\sum_i [X_i, Y_i]$, ou seja, por produtos de k elementos. Por outro lado, decorre do lema anterior, que todo elemento de $\mathfrak{g}$, que pode ser escrito como produto de k elementos, está em $\mathfrak{g}^k$. Como o produto de $k+1$ elementos também é produto de k elementos, segue que $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. Portanto, se $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}^k$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. □

Como todo ideal é uma subálgebra, então $\mathfrak{g}^k$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$. Logo obtemos as inclusões

$$\cdots \subset \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{g}$$

que é chamada de **série central descendente**.

Exemplo 1.13 *Para a álgebra bidimensional e não abeliana $\mathfrak{g}$, com base $\{X, Y\}$ tal que $[X, Y] = Y$, temos que $\mathfrak{g}^k$ é o subespaço gerado por Y para todo $k \geq 2$.*

1.1.3 Derivação

Aqui introduzimos o conceito de derivação de uma álgebra de Lie e apresentamos alguns exemplos.

Definição 1.23 *Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma **derivação** da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se satisfaz*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY],$$

para quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Essa condição acima, é a regra de Leibniz para o produto definida pelo colchete.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.14 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie abeliana, então toda transformação linear é uma derivação. De fato, se $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma transformação linear temos que*

$$D([X, Y]) = D(0) = 0 + 0 = [DX, Y] + [X, DY].$$

Exemplo 1.15 *A representação adjunta* $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *definida por* $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ *é uma derivação, pois usando a Identidade de Jacobi, temos que*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(X)[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] \\ &= -[Z, [X, Y]] - [Y, [Z, X]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\mathrm{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)(Z)]. \end{aligned}$$

Essa derivação é chamada ***derivação interna****.*

Nem toda derivação é interna. Para verificarmos este fato, basta considerarmos $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie abeliana e $D_x(Y) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definida por $D_x(Y) = [X, Y]$. Como $\mathfrak{g}$ é abeliana, segue que $D_x(Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Portanto, em uma álgebra abeliana, a única derivação interna é a transformação linear nula.

Para soma de derivações e produto de um número real por uma derivação temos:

Proposição 1.24 *São válidas:*

i) A soma de derivações é uma derivação.

ii) O produto de um número real por uma derivação é uma derivação.

Demonstração: Sejam D_1 e D_2 derivações de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ e $a \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)([X, Y]) &= D_1([X, Y]) + D_2([X, Y]) \\ &= [D_1X, Y] + [X, D_1Y] + [D_2X, Y] + [X, D_2Y] \\ &= [D_1X + D_2X, Y] + [X, D_1Y + D_2Y] \\ &= [(D_1 + D_2)X, Y] + [X, (D_1 + D_2)Y] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} aD_1([X, Y]) &= a([D_1X, Y] + [X, D_1Y]) \\ &= a[D_1X, Y] + a[X, D_1Y] \\ &= [aD_1X, Y] + [X, aD_1Y]. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

□

O próximo resultado nos fornece mais um conceito sobre derivação.

Proposição 1.25 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita e $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma transformação linear. Então D é uma derivação se, e somente se, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se que, e^{tD} é um automorfismo de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Suponha que D é uma derivação e sejam $\alpha(t) = e^{tD}[X,Y]$ e $\beta(t) = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$ curvas de $\mathfrak{g}$. Note que

$$\alpha(0) = [X,Y] = \beta(0),$$

$$\alpha'(t) = De^{tD}[X,Y] = D\alpha(t) \qquad \text{e}$$

$$\beta'(t) = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y] = D\beta(t).$$

Como α e β satisfazem a mesma equação diferencial linear e as mesmas condições iniciais, segue que $\alpha = \beta$, ou seja, $e^{tD}[X,Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$.
Por outro lado, suponha que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que e^{tD} é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, ou seja, $e^{tD}[X,Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$. Derivando em função de t temos

$$De^{tD}[X,Y] = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y].$$

Tomando $t = 0$ temos o desejado. □

É importante mostrar que todas as derivações de uma álgebra bidimensional não abeliana, são internas.

Teorema 1.26 *Todas as derivações de uma álgebra de Lie bidimensional não abeliana são derivações internas, ou seja, toda derivação $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é $\mathrm{ad}(L) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ para algum $L \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie bidimensional não abeliana. Assim existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que $[X,Y] = Y$. Considere $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma derivação. Note que,

$$D(Y) = D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] = \delta Y$$

para algum $\delta \in \mathbb{R}$. Mais ainda,

$$\mathrm{ad}(\delta X)(Y) = [\delta X, Y] = \delta[X,Y] = \delta Y.$$

Consideremos a derivação $E = D - \mathrm{ad}(\delta X)$. Assim,

$$E(Y) = (D - \mathrm{ad}(\delta X))(Y) = D(Y) - \mathrm{ad}(\delta X)(Y) = \delta Y - \delta Y = 0.$$

Como $[X, Y] = Y$ tem-se que

$$0 = E(Y) = E[X, Y] = [EX, Y] + [X, EY] = [EX, Y].$$

Então $E(X)$ é múltiplo de Y, ou seja, $E(X) = \gamma Y$ para algum $\gamma \in \mathbb{R}$. Note que,

$$\mathrm{ad}(-\gamma Y)(X) = [-\gamma Y, X] = -\gamma[Y, X] = \gamma[X, Y] = \gamma Y \qquad \text{e}$$

$$\mathrm{ad}(-\gamma Y)(Y) = [-\gamma Y, Y] = -\gamma[Y, Y] = 0.$$

Como $E(X) = \mathrm{ad}(-\gamma Y)(X) = \gamma Y$ e $E(Y) = \mathrm{ad}(-\gamma Y)(Y) = 0$, então

$$E = \mathrm{ad}(-\gamma Y) = D - \mathrm{ad}(\delta X).$$

Isso implica que $D = \mathrm{ad}(-\gamma Y + \delta X)$ e portanto, $D = \mathrm{ad}(L)$, onde $L = -\gamma Y + \delta X \in \mathfrak{g}$.
$\square$

Como aplicação desse teorema temos:

Proposição 1.27 *Se $\mathfrak{h}$ é um ideal bidimensional não abeliano de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.*

Demonstração: Seja $V \in \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $[V, A] \in \mathfrak{h}$ para todo $A \in \mathfrak{h}$. Note que $D = \mathrm{ad}(V) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ definida por $\mathrm{ad}(V)(A) = [V, A]$ é uma derivação de $\mathfrak{h}$. Pela proposição anterior, temos que existe $L \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathrm{ad}(V) = \mathrm{ad}(L)$. Ou seja

$$\mathrm{ad}(V)(A) = \mathrm{ad}(L)(A)$$

para todo $A \in \mathfrak{h}$. Logo $[V, A] = [L, A]$ e então $[V - L, A] = 0$. Como $A \in \mathfrak{h}$, da definição de $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ segue que $V - L \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Seja então $B = V - L \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, logo $V = B + L$. Como $V \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ e $L \in \mathfrak{h}$ tem-se que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Seja agora, $U \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{h}$. Suponhamos que $U = aX + bY$, onde $\{X, Y\}$ é base de $\mathfrak{h}$ tal que $[X, Y] = Y$. Note que,

$$[U, X] = [aX + bY, X] = b[Y, X] = -b[X, Y] = -bY.$$

Como $U \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ e $X \in \mathfrak{h}$, então $[U, X] = 0$. Isso implica que $b = 0$, pois $Y \neq 0$. Também $[U, Y] = aY = 0$ e então $a = 0$. Logo $U = aX + bY = 0$ e portanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. $\square$

1.1.4 Representações

Aqui, abordamos a definição de uma representação de uma álgebra de Lie e algumas construções com representações.

Definição 1.28 *Sejam V um espaço vetorial, $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma **representação de $\mathfrak{g}$ em V** é um homomorfismo*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$

*Dizemos que uma representação é **fiel** quando* $\ker \rho = \{0\}$.

O espaço vetorial V é denominado espaço da representação ρ e sua dimensão é igual a dimensão da representação. No caso em que a representação é fiel, temos que $\mathfrak{g} \approx$Im$\mathfrak{g}$ e portanto a álgebra pode ser vista como uma subálgebra de transformações lineares.

Exemplo 1.16 *Se $\mathfrak{g}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, então*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(V), \\ & X & \mapsto & X \end{array}$$

define uma representação, pois

$$\rho([X,Y]) = [X,Y] = [\rho X, \rho Y].$$

*Ou seja, ρ é um homomorfismo. Essa representação é denominada **representação canônica.***

Exemplo 1.17 *Seja* $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{K} \right\}$ *uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{K})$. A aplicação $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \to \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3,\mathbb{K})$ é uma representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. De fato, seja $\{X,H,Y\}$ uma base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$, onde*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, suas constantes de estrutura são dadas por $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$ e $[X,Y] = H$. As imagens dos elementos desta base formam uma base de Imρ*, que possue as mesmas constantes de estruturas. Dessa forma, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3,\mathbb{K})$ são isomorfas e portanto, ρ é um homomorfismo.*

Apresentamos algumas construções com representações, as quais tem grande importância no decorrer de nosso estudo.

- Restrições de Representações

Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V e suponha que W seja um subespaço invariante por ρ, ou seja, para todo $X \in \mathfrak{g}$, temos que $\rho(X)W \subset W$.
A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \rho\mid_W : & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(W) \\ & X & \mapsto & \rho(X)\mid_W \end{array}$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em W.

- Quociente de Representações

Sejam ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V e $W \subset V$ um subespaço invariante por ρ. A aplicação

$$\begin{array}{rcccccl} \overline{\rho_W} : & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(V/W) & & & \\ & X & \mapsto & \overline{\rho(X)} : & V/W & \rightarrow & V/W \\ & & & & v+W & \mapsto & \rho(X)v+W \end{array}$$

é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V/W.

- Soma Direta de Representações

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\rho_1,\ldots, \rho_n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, \ldots, V_n$. Então

$$\begin{array}{rccl} \rho : & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \\ & X & \mapsto & \rho_1(X) \oplus \cdots \oplus \rho_n(X) \end{array}$$

é uma representação em $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, denominada soma direta das permutações ρ_i. Fixemos uma base de $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Em forma de matriz, ρ se escreve em blocos como

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix}$$

- Decomposições de Representações

Definimos quando uma representação é irredutível e quando é completamente redutível.

Definição 1.29 *Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é dita **irredutível** se os únicos subespaços invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e V.*

Definição 1.30 *A representação é dita* ***completamente redutível*** *se V se decompõe como*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

onde cada V_i é invariante pela representação e a restrição de ρ a V_i é irredutível.

Uma representação irredutível é sempre completamente redutível. As representações completamente redutíveis são denominadas também **representações semisimples**.

A proposição a seguir nos fornece um critério, bastante utilizado, para verificar se uma representação é completamente redutível.

Proposição 1.31 *Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Então ρ é completamente redutível se, e somente se, todo subespaço invariante admite um complementar invariante, ou seja,*

$$\text{para todo subespaço } W \text{ em } V, \text{ existe um subespaço } W_1 \text{ invariante tal que} \tag{1.3}$$

$$V = W + W_1.$$

Demonstração: Suponhamos que 1.3 aconteça. Devemos mostrar que ρ é completamente redutível. Para isso, suponhamos que V não é irredutível, pois caso contrário, os únicos subespaços invariantes de V seriam os triviais, e o resultado segueria. Tome W um subespaço invariante não trivial. Então existe W_1 invariante tal que

$$V = W \oplus W_1.$$

Essa soma direta, é o que desejamos se W e W_1 forem irredutíveis. Logo, suponhamos que W é redutível. Então, se mostrarmos que W também satisfaz 1.3, segue o desejado. Seja $W' \subset W$ subespaço invariante, por hipótese temos

$$W' \oplus W_1 \subset V.$$

Como $W' \oplus W_1 \subset V$ é um subespaço invariante e V satisfaz 1.3, existe W_2, um subespaço invariante, tal que

$$(W' \oplus W_1) \oplus W_2 = V. \tag{1.4}$$

Note que $(W_1 \oplus W_2) \cap W$ é invariante. Mostrar que

$$W = ((W_1 \oplus W_2) \cap W) \oplus W' \tag{1.5}$$

é o mesmo que mostrar que W satisfaz 1.3. Seja $x \in W'$ e suponha que $x \in W_1 \oplus W_2$. Temos que $x = y + z$, onde $y \in W_1$ e $z \in W_2$. Como $x - y \in W' \oplus W_1$ e $x - y = z$ tem-se que $z \in W' \oplus W_1$. Mas $z \in W_2$, logo $z = 0$ e isso implica que $x = y$. Daí $x \in W' \cap W_1$ e portanto $x = 0$. Agora seja $x \in W$. Então por (1.4) podemos escrever

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

com $x_1 \in W'$, $x_2 \in W_1$ e $x_3 \in W_2$. Segue que $x - x_1 = x_2 + x_3 \in W$. Logo W é soma direta dos subespaços em (1.5) e portanto W satisfaz 1.3.

Reciprocamente, mostremos que se ρ é completamente redutível, então todo subespaço invariante admite um complementar invariante. Faremos essa demonstração usando indução sobre a dimensão de V. Se $\dim V = 1$, não há o que demonstrar. Suponhamos que $\dim V = n$, ou seja

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

com cada V_i invariante irredutível. Seja $W \subset V$ um subespaço invariante. Cada $W \cap V_i$ é invariante e como os subespaços V_i são invariantes e $W \cap V_i \subset V_i$,então $W \cap V_i = \{0\}$ ou $W \cap V_i = V_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Logo há duas possibilidades:

1^a) Para algum i, digamos $i = 1$ temos $W \cap V_1 = V_1$, ou seja $V_1 \subset W$. Dessa forma, temos que

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)).$$

De fato, tome $x \in W$. Como $W \subset V = V_1 \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$ temos que $x = x_1 + x_2$, onde $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$. Note que, $x, x_1 \in W$ e assim $x_2 \in W$. Daí

$$W = V_1 + (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n))$$

e esta soma é direta, pois $V_1 \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = \{0\}$. Como

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \subset V_1 \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = V$$

temos que

$$W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) \subset V_2 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Assim, existe W' tal que

$$V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \oplus W'.$$

Logo

$$V = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \oplus W',$$

ou seja, W' complementa W.

2^a) Para todo i temos $W \cap V_i = \{0\}$. Note que $W + V_1$ é uma soma direta. Logo $W \oplus V_1$ está nas condições do caso anterior, pois $W \oplus V_1 \subset V$ e $(W \oplus V_1) \cap V_1 = V_1$. Assim, existe um subespaço invariante W' tal que

$$V = (W \oplus V_1) \oplus W',$$

ou seja, $V = W \oplus (V_1 \oplus W')$.

Concluímos então a demonstração da recíproca. □

1.1.5 Classificação das álgebras de Lie tridimensionais

Classificamos as álgebras de Lie tridimensionais de acordo com as dimensões da álgebra derivada. A bibliografia para esse estudo se encontra em [3].

Primeiramente, consideremos $\dim(\mathfrak{g}') = 0$, ou equivalentemente, $\mathfrak{g}' = 0$. Nesse caso, segue do Exemplo 1.11, que $\mathfrak{g}$ é abeliana. Então, temos o seguinte resultado de classificação:

Teorema 1.32 *Se $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional, tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é nula. Então, $\mathfrak{g}$ é abeliana.*

Passemos a analisar o caso em que $\dim(\mathfrak{g}') = 1$. Dividimos este caso em duas etapas, a primeira considerando $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ e a outra considerando que $\mathfrak{g}'$ não está contida em $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$. Para $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$, temos o seguinte resultado sobre classificação de álgebras de Lie tridimensionais:

Teorema 1.33 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é unidimensional. Se $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$, então existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[Y, Z] = X$, $[X, Y] = 0$ e $[X, Z] = 0$.*

Demonstração: Sejam $\{X\}$ e $\{X, Y_1, Z\}$ bases de $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}$ respectivamente. Como $\mathfrak{g}'$ está em $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$, para qualquer $U \in \mathfrak{g}'$ tem-se que $[U, W] = 0$ para qualquer $W \in \mathfrak{g}$. Mas $\{X\}$ é base de $\mathfrak{g}'$, logo $[X, W] = 0$ para qualquer $W \in \mathfrak{g}$. Em particular, $[X, Y_1] = 0$ e $[X, Z] = 0$, pois $Y_1, Z \in \mathfrak{g}$. Como $[Y_1, Z] \in \mathfrak{g}'$ segue que $[Y_1, Z] = aX$, $a \neq 0$. Aqui a é realmente não nulo, pois caso contrário, teríamos $[Y_1, Z] = 0$ e do fato de $[X, Y_1] = 0$ e $[X, Z] = 0$

seguiria que, para quaisquer $U, V \in \mathfrak{g}$ valeria $[U,V] = [aX+bY_1+cZ, \alpha X+\beta Y_1+\gamma Z] = 0$. Concluiríamos que $\dim(\mathfrak{g}') = 0$ e isso contradiz nossa hipótese. Definamos $Y = \frac{1}{a}Y_1$. Então, $\{X,Y,Z\}$ também é uma base de $\mathfrak{g}$ e $[X,Y]=0$, $[X,Z]=0$ e $[Y,Z] = \frac{1}{a}aX = X$.

□

Para analisar o caso em que $\mathfrak{g}'$ não está contida em $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ precisamos dos dois lemas a seguir.

Lema 1.34 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é unidimensional. Se $\mathfrak{g}$ possui uma subálgebra bidimensional $\mathfrak{h}$ que não é abeliana, então $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Seja $\{Y\}$ com $Y \neq 0$ uma base de $\mathfrak{g}'$. Seja $\{X,Y\}$ a base canônica da subálgebra não abeliana de $\mathfrak{h}$. Completemos a base canônica de $\mathfrak{h}$ de modo a obtermos a base $\{X,Y,Z\}$ de $\mathfrak{g}$. Tomemos $W \in \mathfrak{h}$ e $V \in \mathfrak{g}$. Temos que $W = aX + bY$ e $V = cX + dY + eZ$ com $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$. Logo

$$\begin{aligned}
[V,W] &= [cX+dY+eZ, aX+bY] \\
&= ca[X,X] + cb[X,Y] + da[Y,X] + db[Y,Y] + ea[Z,X] + eb[Z,Y] \\
&= cb[X,Y] - da[X,Y] + ea[Z,X] + eb[Z,Y]
\end{aligned}$$

e como $[Z,X], [Z,Y] \in \mathfrak{g}'$, existem a', $a'' \in \mathbb{R}$ tais que, $[Z,X] = a'Y$ e $[Z,Y] = a''Y$. Então, $[V,W] = (cb-da)Y + eaa'Y + eba''Y \in \mathfrak{h}$. Portanto $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. □

Lema 1.35 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é unidimensional. Se $\mathfrak{g}'$ não está contido em $c(\mathfrak{g})$, então existe uma subálgebra bidimensional de $\mathfrak{g}$ que não é abeliana.*

Demonstração: Sejam $\{X\}$ e $\{X, Y_1, Z\}$ bases de $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}$ respectivamente. Se $\mathfrak{g}'$ não está contido em $c(\mathfrak{g})$, então, ou $[X,Z] \neq 0$ ou $[X,Y_1] \neq 0$, pois caso contrário $[X,W]=0$ para qualquer $W = aX + bY_1 + cZ \in \mathfrak{g}$. Isso implicaria que $X \in c(\mathfrak{g})$, daí $\mathfrak{g}' \subset c(\mathfrak{g})$ e isso seria um absurdo. Se $[X,Y_1] \neq 0$, o fato de $\mathfrak{g}'$ ser um ideal, implica que $[X,Y_1] \in \mathfrak{g}'$ e então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $[X,Y_1] = aX$. Se definirmos $Y = \frac{1}{a}Y_1$ temos que $[X,Y] = X$. Logo, a subálgebra gerada por $\{X,Y\}$ é a subálgebra bidimensional não abeliana procurada. □

Agora classificamos as álgebras de Lie tridimensionais, cuja álgebra derivada é unidimensional e não está contida no centro da álgebra.

Teorema 1.36 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é unidimensional. Se $\mathfrak{g}'$ não está contido em $c(\mathfrak{g})$, então existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = X, [X, Z] = 0$ e $[Y, Z] = 0$.*

Demonstração: Do lema anterior, sabemos que $\mathfrak{g}$ possui uma subálgebra bidimensional não abeliana $\mathfrak{h}$. Seja $\{X, Y\}$ a base canônica de $\mathfrak{h}$ com $[X, Y] = X$. Pelo Lema 1.34, temos que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Assim da Proposição 1.27 segue que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Completemos a base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{h}$ de modo a obtermos a base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ e $\{X, Y\}$ geram $\mathfrak{h}$, então temos que $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Portanto, $[Z, X] = 0$ e $[Z, Y] = 0$. □

Analisamos a situação em que a álgebra derivada é bidimensional.

Lema 1.37 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é bidimensional. Se $\mathfrak{g}$ possui uma subálgebra não abeliana bidimensional $\mathfrak{h}$, então o ideal $\mathfrak{g}'$ é diferente de $\mathfrak{h}$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}$. Seja $\{X, Y\}$ uma base de $\mathfrak{h}$ tal que $[X, Y] = Y$. Como $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, temos pela Proposição 1.27 que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Logo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&= [\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] \\
&= [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] + [\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}] + [\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] \\
&= [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})].
\end{aligned}$$

Como $\dim(\mathfrak{h}) = 2$ e $\dim(\mathfrak{g}) = 3$, então de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ tem-se que $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{h})) = 1$. Assim, da Proposição 1.4 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é abeliano e portanto $[\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] = 0$. Logo, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}'$. Mas $\mathfrak{h}'$ é unidimensional, logo $\mathfrak{g}'$ também o será e isso contraria nossa hipótese. □

Uma consequência desse lema é que $\mathfrak{g}'$ é abeliana. De fato, se $\mathfrak{g}$ não possui uma subálgebra não abeliana bidimensional e como $\mathfrak{g}'$ é bidimensional, então $\mathfrak{g}'$ só pode ser abeliana. Caso contrário, se $\mathfrak{g}$ possui uma subálgebra bidimensional não abeliana $\mathfrak{h}$, do lema anterior temos que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}'$. Portanto $\mathfrak{g}'$ é abeliana.

Lema 1.38 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é bidimensional, então $\mathrm{ad}(Z) : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ é isomorfismo para todo $Z \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: É claro que $\text{ad}(Z)$ é homomorfismo. Mostremos que $\text{ad}(Z) : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ é bijetora. Suponhamos que $\{X, Y\}$ é uma base de $\mathfrak{g}'$ e estendemos essa base a uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$. Como $[X, Y] = 0$, temos que $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é gerada por $[Y, Z]$ e $[X, Z]$. Assim $\{[Y, Z]\ ,\ [X, Z]\}$ é uma base de $\mathfrak{g}'$. Tome $D \in \ker(\text{ad}(Z))$, então $\text{ad}(Z)(D) = 0$. Como $D \in \mathfrak{g}'$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $D = \alpha X + \beta Y$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z)(D) &= [Z, D] \\ &= [Z, \alpha X + \beta Y] \\ &= \alpha[Z, X] + \beta[Z, Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $[Z, X]$ e $[Z, Y]$ são linearmente independentes, segue que $\alpha = \beta = 0$. Logo $D = 0$. Aplicando o teorema do núcleo e da imagem para espaços vetoriais obtemos que $\dim(\mathfrak{g}') = \dim(\text{Im}(\text{ad}(Z)))$. Portanto $\text{ad}(Z) : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ é bijetora. $\square$

No resultado que segue, classificamos as álgebras de Lie tridimensionais, cuja álgebra derivada é bidimensional.

Teorema 1.39 *Se $\mathfrak{g}$ uma álgebra de lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é bidimensional, então, existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$ e escalares α, β, δ e γ tais que $[X, Y] = 0$, $[Z, X] = \alpha X + \beta Y$, $[Z, Y] = \gamma X + \delta Y$ e*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

é uma matriz invertível.

Demonstração: Tomemos uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}'$ e a estendemos a uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}'$ é abeliana, então $[X, Y] = 0$. Do lema anterior, temos que $\{[Y, Z]\ ,\ [X, Z]\}$ é uma base de $\mathfrak{g}'$. Assim $[X, Z] = \alpha X + \beta Y$ e, do mesmo modo $[Y, Z] = \gamma X + \delta Y$, já que $\{X, Y\}$ também é base de $\mathfrak{g}'$. Como $\text{ad}(Z)$ é um isomorfismo temos que

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

é invertível, pois é a matriz do isomorfismo $\text{ad}(Z)$. Como a transposta de uma matriz invertível é invertível segue que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

é invertível. □

Resta analisarmos o caso em que as álgebras tridimensionais possuem álgebras derivadas também tridimensionais. Para isso necessitamos da seguinte definição:

Definição 1.40 *Duas matrizes A e B são* ***cogradientes****, se existe uma matriz invertível N e um número real $\rho \neq 0$ tal que $B = \rho N^t AN$. Usaremos a notação $A \sim B$ para denotar que A é cogradiente a B.*

Proposição 1.41 *A relação A cogradiente a B é uma relação de equivalência.*

Demonstração: É claro que $A \sim A$, pois $A = I^t AI$. Suponhamos que $A \sim B$, então existe uma matriz N e $\rho \in \mathbb{R}^*$ tal que $B = \rho N^t AN$. Logo $A = \frac{1}{\rho}(N^{-1})^t BN^{-1}$ e portanto $B \sim A$. Suponhamos agora que $A \sim B$ e $B \sim C$, assim existem matrizes invertíveis N_1 e N_2 e $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^*$ tais que

$$B = \rho_1 N_1^t AN_1 \qquad \text{e} \qquad C = \rho_2 N_2^t BN_2.$$

Note que

$$C = \rho_2 N_2^t BN_2 = \rho_2 N_2^t \rho_1 N_1^t AN_1 N_2 = \rho_2 \rho_1 (N_1 N_2)^t A(N_1 N_2).$$

Portanto $C \sim A$. □

Proposição 1.42 *Se A é uma matriz 3×3 real, simétrica e invertível, então A é cogradiente a*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{ ou a } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demonstração: Seja A uma matriz real simétrica e invertível. Como A é simétrica, o operador linear dela é auto-adjunto, assim pelo teorema espectral existe uma matriz ortogonal N, tal que $N^t AN$ é uma matriz diagonal, ou seja,

$$N^t AN = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Note que $\det(N^tAN) = \alpha\beta\gamma \neq 0$, pois $\det(N) \neq 0$ e $\det(A) \neq 0$. Multiplicando N^tAN por γ^{-1} obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chamando $\frac{\alpha}{\gamma} = \alpha'$ e $\frac{\beta}{\gamma} = \beta'$, A é cogradiente a

$$B = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostremos que B é cogradiente a C ou D. Seja

$$N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Assim

$$N^tBN = \begin{pmatrix} x^2\alpha' & 0 & 0 \\ 0 & y^2\beta' & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Para concluir, veremos todas as possibilidades para os sinais de α' e β'.

1) Se $\alpha' > 0$ e $\beta' > 0$ tomamos a matriz N, tal que $x = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{\beta'}}$, $z = 1$. Temos

$$N^tBN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, $B \sim C$ e portanto $A \sim C$.

2) Se $\alpha' < 0$ e$\beta' > 0$, tomamos a matriz N, tal que $x = \frac{1}{\sqrt{-\alpha'}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{\beta'}}$ e $z = 1$, temos

$$N^tBN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e então $B \sim D$. Portanto $A \sim D$.

3) Se $\alpha' > 0$ e $\beta' < 0$ tomamos a matriz N, tal que $x = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{-\beta'}}$ e $z = 1$, temos

$$N^t B N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

assim $B \sim E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tomando $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $(-1)N^t E N = D$ e, assim $E \sim D$. Logo $B \sim D$ e portanto $A \sim D$.

4) Se $\alpha' < 0$ e $\beta' < 0$ tomamos $x = \frac{1}{\sqrt{-\alpha'}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{-\beta'}}$ e $z = 1$, para obter

$$N^t B N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, B é cogradiente a $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tomemos

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e notemos que $(-1)N^t F N = D$. Daí temos que $F \sim D$, logo $B \sim D$ e portanto $A \sim D$. $\square$

Com este resultado demostramos o teorema que segue.

Teorema 1.43 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de lie tridimensional tal que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ também é tridimensional. Então, existem exatamente duas classes de álgebras de Lie tridimensionais distintas, uma com colchetes entre os elementos da base dados por $[Y, Z] = X$; $[Z, X] = Y$ e $[X, Y] = Z$ e a outra com colchetes dos elementos da base, dados por $[Y, Z] = -X$; $[Z, X] = Y$ e $[X, Y] = Z$.*

Demonstração: Seja $\{X_1, X_2, X_3\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. É imediato que $[X_2, X_3] = Y_1$; $[X_3, X_1] = Y_2$ e $[X_1, X_2] = Y_3$ geram $\mathfrak{g}'$ e portanto constituem uma base de $\mathfrak{g}'$. Como

$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ segue que $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ também é uma base de $\mathfrak{g}$. Denotaremos por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

a matriz mudança de base, da base $\{X_1, X_2, X_3\}$ para a base $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$. Sabendo que A é invertível, mostraremos que A é simétrica. De fato, pela identidade de Jacobi, temos que $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_3, [X_1, X_2]] + [X_2, [X_3, X_1]] = 0$, porém

$$\begin{aligned}
0 &= [X_1, [X_2, X_3]] + [X_3, [X_1, X_2]] + [X_2, [X_3, X_1]] \\
&= [X_1, Y_1] + [X_3, Y_3] + [X_2, Y_2] \\
&= [X_1, \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3] + [X_3, \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3] \\
&\quad + [X_2, \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3] \\
&= \alpha_{12}[X_1, X_2] + \alpha_{13}[X_1, X_3] + \alpha_{31}[X_3, X_1] + \alpha_{32}[X_3, X_2] + \alpha_{21}[X_2, X_1] + \alpha_{23}[X_2, X_3] \\
&= (\alpha_{12} - \alpha_{21})[X_1, X_2] + (\alpha_{31} - \alpha_{13})[X_3, X_1] + (\alpha_{23} - \alpha_{32})[X_2, X_3].
\end{aligned}$$

Como $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é linearmente independente, temos que $\alpha_{12} - \alpha_{21} = 0$, $\alpha_{31} - \alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} - \alpha_{32} = 0$. O que implica que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$ e $\alpha_{23} = \alpha_{32}$. Portanto A é simétrica. Denotemos $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3\}$ uma outra base de $\mathfrak{g}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\overline{X}_1 &= \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2 + \beta_{13}X_3 \\
\overline{X}_2 &= \beta_{21}X_1 + \beta_{22}X_2 + \beta_{23}X_3] \\
\overline{X}_3 &= \beta_{31}X_1 + \beta_{32}X_2 + \beta_{33}X_3
\end{aligned}$$

e a matriz

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

é invertível. Definamos $\overline{Y}_1 = [\overline{X}_2, \overline{X}_3]$, $\overline{Y}_2 = [\overline{X}_3, \overline{X}_1]$ e $\overline{Y}_3 = [\overline{X}_1, \overline{X}_2]$. Para qualquer permutação cíclica (i, j, k) de $(1, 2, 3)$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_i &= [\overline{X}_j, \overline{X}_k] \\
&= [\beta_{j1}X_1 + \beta_{j2}X_2 + \beta_{j3}X_3, \beta_{k1}X_1 + \beta_{k2}X_2 + \beta_{k3}X_3] \\
&= (\beta_{j2}\beta_{k3} - \beta_{j3}\beta_{k2})Y_1 + (\beta_{j3}\beta_{k1} - \beta_{j1}\beta_{k3})Y_2 + (\beta_{j1}\beta_{k2} - \beta_{j2}\beta_{k1})Y_3 \\
&= \gamma_{i1}Y_1 + \gamma_{i2}Y_2 + \gamma_{i3}Y_3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(B^t)^{-1}\det(B^t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

que é a matriz adjunta de B^t. A matriz mudança de base de $\{X_1, X_2, X_3\}$ para $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é A e a matriz mudança de base de $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3\}$ para $\{X_1, X_2, X_3\}$ é $(B^t)^{-1}$. Portanto, se $\overline{A}$ é a matriz $(\overline{\alpha}_{ij})$ tal que $\overline{Y}_i = \overline{\alpha}_{i1}\overline{X}_1+\overline{\alpha}_{i2}\overline{X}_2+\overline{\alpha}_{i3}\overline{X}_3$ temos que $\overline{A} = \det(B^t)(B^t)^{-1}AB^{-1}$. Logo A e $\overline{A}$ são matrizes simétricas e cogradientes. Portanto A(ou $\overline{A}$) é cogradiente a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou a } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que, no caso da matriz C obtemos a primeira classe de álgebras do enunciado e no caso da matriz D obtemos a segunda classe de álgebras. $\square$

O exemplo a seguir ilustra o caso de uma álgebra de Lie tridimensional, cuja álgebra derivada é tridimensional

Exemplo 1.18 *A álgebra* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{X \in M(2,\mathbb{R});\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$ *é uma álgebra de Lie tridimensional cuja álgebra derivada* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})' = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$*. De fato, os elementos de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *são da forma* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$*. Analisamos agora a álgebra derivada*

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})' = \{[X,Y];\ X, Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\}.$$

Sejam $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}$ *matrizes em* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$*, note que*

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 & -2a_2b_1 \\ 2(c_1a_2 - a_1c_2) & -b_1c_2 + b_2c_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e concluímos que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})'$ *tem dimensão 3, já que a primeira e a quarta entrada da matriz acima são múltiplas. Portanto* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})' = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$*.*

1.1.6 Álgebras de Lie solúveis e nilpotentes

Agora definimos as álgebras solúveis e nilpotentes.

Definição 1.44 *Um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é* ***solúvel*** *se alguma de suas álgebras derivadas for nula.*

Assim, uma álgebra de Lie é solúvel se, e somente se, existir $k_1 > 0$ tal que $a^{(k_1)} = 0$. Note que se isso acontecer teremos $a^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_1$. Segue alguns exemplos de álgebras de Lie solúveis.

Exemplo 1.19 *As álgebras de matrizes triangulares superiores*

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}_{n\times n} \right\}$$

são solúveis, pois $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ se $k \geq n$.

Exemplo 1.20 *A subálgebra de $M(3,\mathbb{R})$ definida por*

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

é chamada ***álgebra de Heisenberg*** *e é uma álgebra de Lie solúvel. De fato*

$$\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e$$

$$\mathfrak{h}^{(2)} = [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = 0.$$

Evidentemente, a álgebra derivada está contida propriamente na álgebra.

O resultado seguinte mostra que toda álgebra abeliana é solúvel.

Proposição 1.45 *Uma álgebra de Lie é abeliana se, e somente se, a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ é nula. Em particular toda álgebra de Lie abeliana é solúvel.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$ tem-se que $[X, Y] = 0$ e segue da definição de $\mathfrak{g}'$ que ela é nula. Reciprocamente, se $\mathfrak{g}'$ é nula, então $[X, Y] = 0$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$. Portanto $\mathfrak{g}$ é abeliana. □

Desse resultado concluímos que todas as álgebras derivadas de uma álgebra abeliana são nulas.

Teorema 1.46 *Toda álgebra de Lie bidimensional é solúvel.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie bidimensional. Pelo Corolário 1.7 temos que $\mathfrak{g}$ é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[A, B] = B$. Se $\mathfrak{g}$ é abeliana temos da proposição anterior que $\mathfrak{g}$ é solúvel. Se $\mathfrak{g}$ não for abeliana, $\mathfrak{g}'$ é unidimensional e, portanto, abeliana. De fato, seja $Z \in \mathfrak{g}'$. Temos que $Z = \alpha_1[A_1, B_1] + ... + \alpha_n[A_n, B_n]$ onde $A_1, ..., A_n$ e $B_1, ..., B_n$ estão em $\mathfrak{g}$. Como $\{A, B\}$ é base de $\mathfrak{g}$ segue que

$$\begin{aligned} Z &= \alpha_1[a_1A + b_1B, c_1A + d_1B] + ... + \alpha_n[a_nA + b_nB, c_nA + d_nB] \\ &= \alpha_1(a_1d_1 - b_1c_1)[A, B] + ... + \alpha_n(a_nd_n - b_nc_n)[A, B] \\ &= (\alpha_1(a_1d_1 - b_1c_1) + ... + \alpha_n(a_nd_n - b_nc_n))[A, B] \end{aligned}$$

ou seja, todo elemento de $\mathfrak{g}'$ é gerado por $[A, B] = B$. Assim $\mathfrak{g}'$ é unidimensional e portanto abeliana. Assim $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$ e $\mathfrak{g}$ é solúvel. □

É imediato que uma subálgebra de uma álgebra de Lie solúvel é uma álgebra de Lie solúvel, em particular, qualquer ideal de uma álgebra solúvel também é solúvel.

O quociente de uma álgebra solúvel por um ideal é solúvel, ou seja,

Proposição 1.47 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel.*

Demonstração: Seja $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico. Se mostrarmos que $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$ por indução sobre k, segue o resultado. Se $k = 0$, o resultado segue da sobrejetividade de π. Suponhamos que o resultado seja válido para $k - 1$, logo

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^{(k)}) &= \pi([\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]) \\ &= [\pi(\mathfrak{g}^{(k-1)}), \pi(\mathfrak{g}^{(k-1)})] \\ &= [(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}, (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}] \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g}$ é solúvel, então $\pi(0) = 0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$, ou seja, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel. □

A próxima proposição complementa a anterior ao dizer que a álgebra propriamente dita é solúvel, se algum de seus quocientes juntamente com o seu núcleo é solúvel.

Proposição 1.48 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ são solúveis, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel, existe $k_0 \geq 0$ tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_0)} = 0$. Da proposição anterior segue que, $\pi(\mathfrak{g}^{(k_0)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_0)} = 0$ e assim $\mathfrak{g}^{(k_0)} \subset \mathfrak{h}$. Mas $\mathfrak{h}$ é solúvel, ou seja, existe $k_1 \geq 0$ tal que $\mathfrak{h}^{(k_1)} = 0$. Assim

$$\mathfrak{g}^{(k_0+k_1)} = (\mathfrak{g}^{(k_0)})^{k_1} \subset \mathfrak{h}^{(k_1)} = 0.$$

Portanto $\mathfrak{g}$ é solúvel. □

É claro que, a soma de ideais solúveis em uma álgebra de Lie é um ideal solúvel. Mostramos esse fato na proposição abaixo.

Proposição 1.49 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathfrak{g}$ ideais solúveis (isto é, solúveis como álgebras de Lie). Então $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é ideal solúvel.*

Demonstração: O fato de que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ ser ideal é consequência de que a soma de ideais é ideal. Pela Proposição 1.18, temos

$$\frac{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_2} \approx \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2}.$$

Como $\mathfrak{h}_1$ é solúvel e $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é ideal de $\mathfrak{h}_1$, da Proposição 1.47 segue que $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é solúvel. Daí $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$ é solúvel. Como $\mathfrak{h}_2$ é solúvel, da Proposição 1.48, temos que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é solúvel. □

A partir de agora, temos a garantia da existência e unicidade de um ideal solúvel maximal numa álgebra de Lie de dimensão finita.

Proposição 1.50 *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$, que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Denote por n o máximo das dimensões dos ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ e seja $\mathfrak{r}$ um ideal solúvel com $\dim \mathfrak{r} = n$. Então, todo ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ está contido em $\mathfrak{r}$. De fato, se $\mathfrak{h}$ é ideal solúvel, $\mathfrak{r}+\mathfrak{h}$ também é. Pela maximalidade da dimensão, $\dim(\mathfrak{r}+\mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}$ e daí que, $\mathfrak{r}+\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Portanto, $\mathfrak{r}$ contém todos os ideais solúveis e ele é evidentemente o único. □

Nesta proposição, a hipótese de $\mathfrak{g}$ ser de dimensão finita não é essencial. Ela foi colocada apenas para facilitar a demonstração. Em geral, pode-se aplicar algum princípio de maximalidade ao invés do argumento da maximalidade da dimensão e chegar ao mesmo resultado.

Definição 1.51 *O ideal* $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ *que contém todos os ideais solúveis de* $\mathfrak{g}$ *é chamado de* ***radical solúvel*** *(ou simplesmente radical) de* $\mathfrak{g}$. *Para o radical de* $\mathfrak{g}$ *será utilizada a notação* $\mathfrak{r}\ (\mathfrak{g})$.

Exemplo 1.21 $\mathfrak{g}$ *é solúvel se, e somente se,* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.22 *O radical de* $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ *é*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\}.$$

De fato, primeiramente mostraremos que $\mathfrak{z}$ *é ideal abeliano de* $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$. *Seja*

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})\ e\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}.$$

Então

$$\left[\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$$

ou seja, $\mathfrak{z}$ *é ideal abeliano e, portanto, solúvel. Afirmamos agora que os únicos ideais de* $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ *são* $\mathfrak{z}$ *e* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, *além dos triviais. De fato, observe que*

$$\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z},$$

pois

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a-d)}{2} & b \\ c & -\frac{(a-d)}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(a+d)}{2} & 0 \\ 0 & (\frac{a+d)}{2} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \frac{(a-d)}{2} & b \\ c & -\frac{(a-d)}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \ e \ \begin{pmatrix} \frac{(a+d)}{2} & 0 \\ 0 & (\frac{a+d)}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}.$$

Além disso, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{z} = 0$. *Agora, pela Proposição 1.18 temos*

$$\frac{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) + \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \approx \frac{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{z}},$$

ou seja

$$\frac{\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})}{\mathfrak{z}} \approx \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}).$$

Seja $\mathfrak{h}$ *um ideal não trivial de* $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$. *Tome* $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. *Como* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \approx \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})/\mathfrak{z}$, *então* $X = \mathfrak{i} + \mathfrak{z}$ *com* $\mathfrak{i} \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$. *Tome* $Y \in \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$. *Assim* $Y = h_1 + \mathfrak{z}$ *com* $h_1 \in \mathfrak{h}$. *Então,*

$$[X,Y] = [\mathfrak{i} + \mathfrak{z}, h_1 + \mathfrak{z}] = [\mathfrak{i}, h_1] + \mathfrak{z} = h_2 + \mathfrak{z} \in \mathfrak{h}/\mathfrak{z}.$$

Portanto $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ *é ideal de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. *Mostremos agora que os únicos ideais de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *são os triviais. Seja* $\{X, Y, H\}$ *uma base de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, *onde*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$, *e* $[X,Y] = H$. *Tome* $Z = aX + bH + cY$, *então*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(X)Z &= [X,Z] = [X, aX + bH + cY] = -2bX + cH \\ \mathrm{ad}(X)^2 Z &= \mathrm{ad}(X)(\mathrm{ad}(X)Z) = [X,[X,Z]] = [X, -2bX + cH] = -2cX, \end{aligned}$$

de onde segue que se $Z \neq 0$, *então ou* Z *ou* $\mathrm{ad}(X)Z$ *ou* $\mathrm{ad}(X)^2 Z$ *é um múltiplo não nulo de* X *(pois se* Z, $\mathrm{ad}(X)Z$ *e* $\mathrm{ad}(X)^2 Z$ *forem múltiplos nulos de* X *temos que* $Z = 0$*). Tome* $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ *ideal de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *e suponhamos que* $Z \in \mathfrak{h}$. *Se* $\mathrm{ad}(X)^2 Z$ *é múltiplo não nulo de* X, *então*

$$0 \neq -2cX = [X,[X,Z]] \subset \mathfrak{h}.$$

O que implica que X *está em* $\mathfrak{h}$. *O mesmo ocorre se* Z *ou* $\mathrm{ad}(X)Z$ *são múltiplos não nulos de* X. *Segue agora que,* $H = -[Y,X] \subset \mathfrak{h}$ *e consequentemente,* $Y = (1/2)[X,H] \subset \mathfrak{h}$. *Daí* $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. *Concluímos que os únicos ideais de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *são os triviais. Logo* $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ $= 0$ *ou* $\mathfrak{h}/\mathfrak{z} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, *ou seja* $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}$ *ou* $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *é não nulo. Neste último caso,* $\mathfrak{h}$ *contém* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, *pois como* $[X_1, h_1] \subset \mathfrak{h}$ *para todo* $X_1 \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ *e para todo* $h_1 \in \mathfrak{h}$, *então em particular,* $[Y_1, h_1] \subset \mathfrak{h}$ *para todo* $Y_1 \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *e para todo* $h_1 \in \mathfrak{h}$. *Dessa forma,* $\mathfrak{h}$ *é ideal de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *ou* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{h}$. *Assim* $\mathfrak{h} = \{0\}$ *ou* $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. *Mas* $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \neq \{0\}$ *e assim* $\mathfrak{h} \neq \{0\}$. *Portanto* $\mathfrak{h}$ *deve ser* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *ou* $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$.

Definimos agora uma álgebra de Lie nilpotente.

Definição 1.52 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita* ***nilpotente*** *se um dos termos da sua série central descendente se anula.*

Dessa forma, uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente se, e somente se, existe $k_1 \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^{k_1} = 0$. Note que nesse caso $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_1$.

As álgebras de Lie abelianas, são trivialmente solúveis e nilpotentes. Além disso, as álgebras nilpotentes são solúveis, pois $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois se, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra bidimensional, então pelo Teorema 1.6, temos que $\mathfrak{g}$ é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[A, B] = B$. Se $\mathfrak{g}$ é abeliana, temos que $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Se $\mathfrak{g}$ não for abeliana, $\mathfrak{g}'$ é unidimensional e sua série central descendente se estabiliza no subespaço gerado por B, ou seja, $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}$. Portanto, a álgebra de Lie bidimensional que possui $\{A, B\}$ como base é solúvel pelo Teorema 1.46, mas não é nilpotente.

Segue alguns exemplos de álgebras de Lie nilpotentes.

Exemplo 1.23 *A subálgebra de matrizes quadradas triangulares superiores com elementos da diagonal principal iguais*

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & * \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}_{n\times n} \right\}.$$

é nilpotente. Em particular, a subálgebra das matrizes quadradas triangulares superiores com zeros na diagonal também é nilpotente.

Exemplo 1.24 *A álgebra de Heisenberg em $M(3, \mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie nilpotente, pois*

$$\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ b \in \mathbb{R}\} \qquad e$$

$$\mathfrak{h}^3 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2] = 0.$$

Observe que a álgebra das matrizes triangulares superiores é um exemplo de álgebra de Lie solúvel que não é nilpotente.

Como toda álgebra de Lie nilpotente também é solúvel, os resultados apresentados para álgebras de Lie solúveis se aplicam para álgebras de Lie nilpotentes.

1.1.7 Álgebras de Lie simples e semisimples

Definição 1.53 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é **semisimples** se,*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0.$$

(isto é, $\mathfrak{g}$ não contém ideais solúveis além de 0)

Definição 1.54 *Uma álgebra $\mathfrak{g}$ é **simples** se,*

1. *Os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são 0 e $\mathfrak{g}$*

2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$

É imediato a partir da definição, que as álgebras unidimensionais não são semisimples. Porém, as demais álgebras que não possuem ideais próprios são semisimples. De fato, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra que não possui ideais não triviais. Como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é um ideal, ele deve ser 0 ou $\mathfrak{g}$. No primeiro caso, $\mathfrak{g}$ é semisimples como se pretende. O segundo caso não pode ocorrer se $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, pois se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel e portanto, $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}'$ também é um ideal, $\mathfrak{g}' = 0$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é abeliana. Mas isso é impossível se $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, pois todo subespaço de uma álgebra abeliana é um ideal. Em outras palavras, as álgebras simples são semisimples.

Como o centro de uma álgebra é um ideal abeliano, e portanto solúvel, o centro de uma álgebra semisimples é necessariamente nulo. Como o centro de uma álgebra qualquer coincide com o núcleo da representação adjunta, então a representação adjunta de uma álgebra semisimples é fiel. Por isso toda álgebra semisimples pode ser vista como uma subálgebra de transformações lineares. Notemos que, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é simples, conforme mostrado no exemplo 1.22.

1.2 Álgebras nilpotentes

Nesta seção mostramos que para uma álgebra de Lie de transformações lineares cujos elementos são nilpotentes, é possível encontrar uma base em que as matrizes dessas transformações nesta base, são todas triangulares superiores com zeros na diagonal principal. Como consequência desse resultado temos o teorema de Engel, o qual afirma que dada uma álgebra de Lie de dimensão finita, se as adjuntas dos seus elementos são nilpotentes, então a álgebra de Lie também é nilpotente.

Antes de apresentarmos tais resultados, precisamos introduzir o conceito de representações nilpotentes.

Definição 1.55 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que a representação ρ de $\mathfrak{g}$ no espaço vetorial V é uma **representação nilpotente** ou uma **nil-representação,** se $\rho(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Isto significa que, dado $X \in \mathfrak{g}$, existe um inteiro positivo k (dependente de X) tal que $\rho(X)^k = 0$.*

Um exemplo de nil-representação é a representação adjunta de uma álgebra nilpotente. De fato, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente. Então existe $k \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, ou seja,

$$\mathfrak{g}^k = \left\langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g} \text{ e } Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\} \right\rangle = 0.$$

Isso significa que todos os colchetes envolvendo k elementos de $\mathfrak{g}$, se anulam. Disso segue que, $\mathrm{ad}(X)^{k-1}Z = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$ e portanto $\mathrm{ad}(X)$, é nilpotente. Observe que o teorema de Engel mostra exatamente a recíproca desse fato.

Para estudar as representações nilpotentes utilizamos a seguinte proposição:

Proposição 1.56 *Seja V um espaço de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Se A é nilpotente então $\mathrm{ad}(A)$ é nilpotente. Portanto, se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma nil-representação, então $X \mapsto \mathrm{ad}(\rho(X))$ também é uma nil-representação.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que $\mathrm{ad}(A)^n B$ é uma soma de termos da forma $A^r B A^s$, com $r + s = n$. De fato, por indução sobre n, se $n = 1$ temos

$$\mathrm{ad}(A)B = [A, B] = AB - BA = ABA^0 - A^0 BA.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja

$$\mathrm{ad}(A)^k B = a_1 A^{r_1} B A^{s_1} + a_2 A^{r_2} B A^{s_2} + \cdots + a_n A^{r_n} B A^{s_n},$$

com $r_i + s_i = k$, para todo $i = 1, ..., n$ e $a_i \in \mathbb{K}$. Mostremos que o resultado é valido para

$n = k+1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(A)^{k+1}B &= \operatorname{ad}(A)(\operatorname{ad}(A)^k B) \\
&= [A, a_1A^{r_1}BA^{s_1} + a_2A^{r_2}BA^{s_2} + \cdots + a_nA^{r_n}BA^{s_n}] \\
&= A(a_1A^{r_1}BA^{s_1} + a_2A^{r_2}BA^{s_2} + \cdots + a_nA^{r_n}BA^{s_n}) - \\
&\quad -(a_1A^{r_1}BA^{s_1} + a_2A^{r_2}BA^{s_2} + \cdots + a_nA^{r_n}BA^{s_n})A \\
&= a_1A^{r_1+1}BA^{s_1} + \cdots + a_nA^{r_n+1}BA^{s_n} - a_1A^{r_1}BA^{s_1+1} \\
&\quad - \cdots - a_nA^{r_n}BA^{s_n+1}
\end{aligned}$$

com $r_i + s_i + 1 = k+1$, para todo $i = 1, ..., n$. O que conclui o processo de indução. Agora, como A é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$. Tomando n suficientemente grande e sabendo que $n = r + s$, teremos que $r \geq k$ ou $s \geq k$. Daí, $A^r = 0$ ou $A^s = 0$. Portanto, a soma dos termos de $\operatorname{ad}(A)^n B$ se anulam, isto é, $\operatorname{ad}(A)$ é nilpotente. □

O objetivo agora é encontrar uma base na qual todos os elementos de uma nil-representação são triangulares superiores. Para isso precisamos do seguinte resultado:

Teorema 1.57 *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra de Lie. Se todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, então existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g}$ é unidimensional, seja X não nulo em $\mathfrak{g}$. Como X é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja $w \in V$ tal que $X^{k-1}w \neq 0$ e tome $v = X^{k-1}w$. Então

$$Xv = XX^{k-1}w = X^k w = 0$$

para todo X em $\mathfrak{g}$. Concluímos o resultado para álgebras de dimensão um.

Para mostrar o passo de indução, suponha que $\dim \mathfrak{g} > 1$ e que o resultado vale para toda álgebra com dimensão estritamente menor que $\dim \mathfrak{g}$. É claro que $\mathfrak{g}$ admite subálgebras distintas das triviais, pois subespaços de dimensão um são subálgebras. Seja então $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra distinta das triviais tal que a $\dim \mathfrak{h}$ é máxima entre as dimensões das subálgebras não triviais. Mostraremos que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ de codimensão um. Consideremos o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Note que $\operatorname{ad}(X)$ para $X \in \mathfrak{h}$, deixa $\mathfrak{h}$ invariante, pois $\operatorname{ad}(X)\mathfrak{h} = [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, uma vez que $\mathfrak{h}$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$. Logo, a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ induz uma representação ρ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ e X é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{h}$, então $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente em $\mathfrak{gl}(V)$. Em particular $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente em $\mathfrak{g}$. Isso implica que ρ é uma nil-representação. Dessa forma, $\rho(\mathfrak{h})$ é uma álgebra que satisfaz as hipóteses do teorema e tem dimensão estritamente menor que $\mathfrak{g}$. Portanto, a hipótese de indução vale para $\rho(\mathfrak{h})$ e então existe w não nulo em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tal que $\rho(\mathfrak{h})w = 0$. Isso significa, que existe $X_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ tal que, $\rho(\mathfrak{h})X_0 + \mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, X_0] + \mathfrak{h} = 0$ e então $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Como o subespaço gerado por X_0 e $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de dimensão estritamente maior que a dimensão de $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}$ foi esolhido de dimensão a máxima entre as subálgebras não triviais, segue que o subespaço gerado por X_0 e $\mathfrak{h}$ é o próprio $\mathfrak{g}$. Logo $\mathfrak{h}$ tem codimensão um. E como $X_0 \notin \mathfrak{h}$, $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}$ tem codimesão um, $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Agora, aplicando a hipótese de indução para $\mathfrak{h}$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, o subespaço

$$W = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\}$$

é não nulo. Como os elementos de W se anulam pelos elementos de $\mathfrak{h}$, se mostrarmos que existe v não nulo em W tal que $X_0 v = 0$, onde X_0 é dado acima, concluímos a demonstração do teorema. Temos que, se $X \in \mathfrak{h}$ e $w \in W$, então

$$XX_0 w = [X, X_0]w + X_0 X w = 0,$$

pois $X, [X, X_0] \in \mathfrak{h}$. Isso mostra que $X_0 w \in W$ e que W é invariante por X_0. Mas X_0 é nilpotente, logo sua restrição a W também é nilpotente. Assim o argumento usado no caso em que $\dim \mathfrak{g} = 1$, nos permite concluir a demonstração do teorema. □

Teorema 1.58 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra em que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, existem subespaços*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tal que $XV_i \subset V_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. Esses subespaços podem ser definidos indutivamente por

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_i &= \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Em particular, estendendo sucessivamente bases dos subespaços V_i, obtem-se uma base β de V, tal que a matriz de X em relação a β é triangular superior com zeros na diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Defina

$$V_1 = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}.$$

Pelo teorema anterior, temos que V_1 é não nulo. Além disso, V_1 é claramente $\mathfrak{g}$-invariante. Portanto a representação canônica de $\mathfrak{g}$ em V induz uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V/V_1. Como cada $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, segue que ρ é uma nil-representação e o teorema anterior se aplica a ρ. Dessa forma, existe w não nulo em V/V_1, tal que $\rho(X)w = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Isso significa que existe $v \in V - V_1$ tal que $Xv \in V_1$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, o que garante que o subespaço

$$V_2 = \{v \in V : Xv \in V_1 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

contém V_1, e é distinto de V_1. O mesmo argumento nos permite construir, sucessivamente,

$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\},$$

o qual é distinto de V_{i-1} e o contém. Como $\dim V$ é finita, algum $V_i = V$ e isso mostra a primeira parte do teorema. Quanto à segunda parte, tome a base

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \ldots, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-1}+1}, \ldots, v_{i_n}\}$$

com $v_{i_j+1}, \ldots, v_{i_{j+1}} \in V_{j+1}$, $j = 0, \ldots, n-1$. Em relação a esta base, os elementos de $\mathfrak{g}$ se representam todos como matrizes triangulares superiores com zeros nos blocos diagonais, correspondentes às dimensões dos subespaços V_i. □

Este resultado mostra que toda subálgebra de matrizes, cuja representação canônica é uma nil-representação, está contida na álgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal e, como tal, é nilpotente. Como consequência desse teorema temos o seguinte corolário:

Corolário 1.59 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Em particular, dada uma álgebra arbitrária $\mathfrak{h}$ temos que $\rho(\mathfrak{h})$ é uma álgebra nilpotente, se ρ é uma nil-representação da álgebra $\mathfrak{h}$ em V.*

Desse corolário, segue que, se uma álgebra $\mathfrak{h}$ possui representação adjunta nilpotente e tem dimensão finita, então $\mathfrak{h}$ é solúvel. De fato, dada ad: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$, note que

$$\ker(\mathrm{ad}) = \mathfrak{c}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{h} : [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}$$

é abeliano e portanto solúvel. A Im(ad) também é solúvel pois por hipótese Im(ad) é nilpotente. Como Im(ad) $\approx \mathfrak{h}/\ker(\mathrm{ad})$, tem-se que $\mathfrak{h}/\ker(\mathrm{ad})$ é solúvel e portanto $\mathfrak{h}$ é solúvel. Para mostrar que nessa situação $\mathfrak{h}$ é nilpotente convém introduzir a série central ascendente de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que é definida indutivamente como

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= 0 \\ \mathfrak{g}_i &= \{X \in \mathfrak{g} : [Y, X] \in \mathfrak{g}_{i-1} \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Por definição $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_i$ para todo i , assim $\mathfrak{g}_i$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Geralmente, pode ocorrer que a partir de algum termo, a série central ascendente se estabilize em algum ideal próprio de $\mathfrak{g}$. Porém, isso não ocorre se a representação adjunta de uma álgebra de dimensão finita é nilpotente. De fato, a sequência de subespaços V_i do teorema anterior coincide, no caso de uma representação adjunta, com a série central ascendente. Assim, se a representação adjunta é nilpotente, a série central ascendente termina em $\mathfrak{g}$. Isso mostra o seguinte corolário:

Corolário 1.60 *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que* ad *é uma nil-representação. Então, a série central ascendente satisfaz*

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

para algum n.

Podemos mostrar o teorema de Engel.

Teorema 1.61 (Engel) *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se para todo $X \in \mathfrak{g}$ tivermos que* $\mathrm{ad}(X)$ *é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

Demonstração: Observe que, pelo corolário anterior a série central ascendente termina em $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$. Usando o fato de que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1}$ mostraremos por indução que

$$\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{n-i+1}.$$

De fato, se $i = 1$ o argumento é válido, pois $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n-1+1}$. Assim, $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{g}_{n-1+1}$. Suponhamos que o resultado seja válido para $i = k$, ou seja $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}_{n-k+1}$. Devemos mostrar que o resultado também vale para $i = k + 1$. Note que

$$\mathfrak{g}^{k+1} = \left\langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g} \text{ e } Y \in \mathfrak{g}^k\} \right\rangle$$

e como por hipótese, $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}_{n-k+1}$ temos que

$$\mathfrak{g}^{k+1} \subset \langle \{[X,Y] : X \in \mathfrak{g} \text{ e } Y \in \mathfrak{g}_{n-k+1}\} \rangle .$$

Mas $Y \in \mathfrak{g}_{n-k+1}$, o que significa

$$[X,Y] \in \mathfrak{g}_{n-k+1-1} = \mathfrak{g}_{n-k}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ e assim $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}_{n-k}$. Daí que $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$ e, portanto, $\mathfrak{g}$ nilpotente. □

Em geral, uma representação de uma álgebra nilpotente nem sempre é nilpotente. Mostremos esse fato nos dois exemplos que seguem.

Exemplo 1.25 *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores com diagonal não nula, mas com os elementos diagonais iguais:*

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \}$$

A representação canônica de $\mathfrak{g}$ não é nilpotente, pois as matrizes que são múltiplas da identidade, pertencem a $\mathfrak{g}$ e não são nilpotentes.

Exemplo 1.26 *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra das matrizes diagonais $n \times n$, que é abeliana e, portanto, nilpotente. A representação canônica de $\mathfrak{g}$, dada pela inclusão, não é uma nil-representação pois uma matriz diagonal não é nilpotente, a menos que seja nula.*

A diferença de uma nil-representação de uma álgebra nilpotente $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ para uma representação arbitrária, está no fato de que, geralmente podem aparecer autovalores não nulos dessa representação, desde que com um certo padrão de repetição, como no caso do exemplo acima. Esse padrão de repetição é dado pelas decomposições de Jordan dos elementos da álgebra, das quais falamos a seguir.

Para analisar essas decomposições, seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $A : V \to V$ uma transformação linear. O teorema da decomposição primária decompõe V em subespaços A-invariantes

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

que são os auto-espaços generalizados

$$V_i = \{v \in V : p_i(A)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}$$

onde os polinômios irredutíveis p_i, $i = 1, \ldots, s$, são as componentes primárias do polinômio minimal $p = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$ de A. Quando o corpo de escalares é algebricamente fechado, temos que $p_i(A) = A - \lambda_i$, com λ_i autovalor de A. Os subespaços da decomposição primária se escrevem como

$$V_i = \{v \in V : (A - \lambda_i)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Denotamos tais subespaços por V_{λ_i}, de modo a enfatizarmos a relação destes com os autovalores de A.

Verificamos agora como age uma outra transformação linear B nos espaços da decomposição primária de A. Para isso precisamos da fórmula de comutação em álgebras associativas que se aplicam em particular à álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial.

Proposição 1.62 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e tome $x, y \in \mathcal{A}$.*

1. Denotando $\mathrm{ad}_e(x)y = xy - yx$, tem-se para todo $n \geq 1$ que, a fórmula de comutação à esquerda é dada por

$$x^n y = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p} y) x^p.$$

2. A fórmula de comutação à direita é dada por

$$y x^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (\mathrm{ad}_d(x)^{n-p} y),$$

onde $\mathrm{ad}_d(x)y = yx - xy$ é a adjunta à direita.

Demonstração: Mostraremos por indução sobre p. Para $p = n = 1$ é imediato, já que $xy = yx + [x, y]$. Para $p = n + 1$ e aplicando a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} x^{n+1} y &= x(x^n y) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p+1} y) x^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p} y) x^{p+1}. \end{aligned}$$

Substituindo-se p por $p-1$ na segunda soma dessa igualdade, tem-se

$$\begin{aligned} x^{n+1}y &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(\mathrm{ad}_e(x)^{n-p+1}y)x^p + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1}(\mathrm{ad}_e(x)^{n+1-p}y)x^p \\ &= \mathrm{ad}_e(x)^{n+1}y + yx^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}\right)(\mathrm{ad}_e(x)^{n+1-p}y)x^p. \end{aligned}$$

E esta é a fórmula de comutação à esquerda. A fórmula de comutação à direita segue com o mesmo tipo de indução. □

A partir dessas formas de comutação, é possível mostrar que os espaços das decomposições primárias dos elementos de uma álgebra nilpotente são invariantes pela álgebra.

Proposição 1.63 *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Sejam A e B operadores lineares de V. Tome V_{λ_i}, dados como acima, os auto-espaços generalizados de A. Então, $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ para todo i se, e somente se, ad$(A)^qB = 0$ para algum $q \geq 1$.*

Demonstração: Como o corpo de escalares é algebricamente fechado temos que

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : (A-\lambda_i I)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Dado i, seja $A_i = A - \lambda_i = (A - \lambda_i I)$. Como λ_i é múltiplo da identidade temos $\mathrm{ad}(A)^qB = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^qB = 0$. De fato, vamos mostrar isso usando por indução sobre q. Se $q = 1$ temos $\mathrm{ad}(A_i)B = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A-\lambda_i)B = 0$. Mas, $\mathrm{ad}(A-\lambda_i)B = 0$ se, e somente se,$[A-\lambda_i, B] = 0$, o que por sua vez ocorre se, e somente se, $[A, B] = 0$, ou seja, $\mathrm{ad}(A)B = 0$. Dessa forma, o resultado é válido para $q = 1$. Suponha agora que o resultado é válido para $q = k$, ou seja, $\mathrm{ad}(A)^kB = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^kB = 0$. Então, temos que $\mathrm{ad}(A)^{k+1}B = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A)^k(\mathrm{ad}(A)B) = 0$, o qual ocorre se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^k(\mathrm{ad}(A)B) = 0$. Mas $\mathrm{ad}(A_i)^k(\mathrm{ad}(A)B) = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^k([A, B]) = 0$ e isso vale se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^k([A-\lambda_i, B]) = 0$. Temos que essa última igualdade acontece se, e somene se, $\mathrm{ad}(A_i)^k([A_i, B]) = 0$ e esta também ocorre se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^k\mathrm{ad}(A_i)B = 0$. Como $\mathrm{ad}(A_i)^k\mathrm{ad}(A_i)B = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^{k+1}B = 0$. Portanto $\mathrm{ad}(A)^qB = 0$ se, e somente se, $\mathrm{ad}(A_i)^qB = 0$.

Suponha que $\mathrm{ad}(A)^qB = 0$. Assim, $\mathrm{ad}(A_i)^qB = 0$. Tome $v \in V_{\lambda_i}$. Logo existe k tal que $(A-\lambda_i)^kv = 0$ e isso implica que $(A_i)^kv = 0$. Fixando os expoentes q e k tome $n > q + k$. Então, para $0 \leq p \leq n$ tem-se que ou $n - p > q$ ou $p > k$ e, portanto na fórmula de comutação para $A_i^n B$, todos os termos aplicados a v se anulam. De fato, como ou $n-p > q$ ou $p > k$ temos ou $\mathrm{ad}(A)^{n-p}B = 0$ ou $A_i^p v = 0$. Como $A_i^n B = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\mathrm{ad}_e(A)^{n-p}B)A^p$ tem-se que $A_i^n Bv = 0$ e então $Bv \in V_{\lambda_i}$. Portanto, V_{λ_i} é B-invariante.

Reciprocamente, como a restrição de A_i a V_{λ_i} é nilpotente, tem-se pela Proposição 1.56 que $\mathrm{ad}(A_i)$ é nilpotente, ou seja, existe q_i tal que $\mathrm{ad}(A_i)^{q_i}B_i = 0$, onde B_i é a restrição de B a V_{λ_i}. Dessa forma, mostramos que, para algum q, $\mathrm{ad}(A)^q B = 0$. □

Esta proposição permite decompor o espaço de uma representação em auto-espaços generalizados, conforme foi feito acima, com o refinamento de que eles são auto-espaços simultâneos para todos os elementos da álgebra. De fato, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente e ρ uma representação finita de $\mathfrak{g}$ em V. Como $\mathfrak{g}$ é nilpotente, dados X, Y em $\mathfrak{g}$ temos que $\mathrm{ad}(X)^q(Y) = 0$ para algum $q \geq 1$. Aplicando ρ a esta igualdade temos, $\mathrm{ad}(\rho(X))^q \rho(Y) = 0$ para algum $q \geq 1$. Tomando o corpo de escalares algebricamente fechado, pela proposição acima segue que $\rho(Y)V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$. Logo fixando $X \in \mathfrak{g}$ consideremos a decomposição primária de V por $\rho(X)$

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

Como cada V_i é invariante por $\rho(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$, tem-se que esses subespaços são $\mathfrak{g}$-invariantes e como tal, $\mathfrak{g}$ se representa em cada um deles.. Podemos tomar então a decomposição primária de V_i em relação as restrições de $\rho(Y)$, com Y em $\mathfrak{g}$. Agora, se para todo Y em $\mathfrak{g}$ com $i = 1, \ldots, s$, a decomposição primária de $\rho(Y)$ em V_i se constitui de um único elemento, então cada V_i é um auto-espaço generalizado das correspondentes restrições de $\rho(Y)$, para todo Y em $\mathfrak{g}$. Isso significa que, dado Y em $\mathfrak{g}$ com $i = 1, \ldots, s$ existe um autovalor $\lambda_i(Y)$ para $\rho(Y)$ tal que V_i está contido no auto-espaço generalizado associado a $\lambda_i(Y)$, ou seja, $(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$ para algum $k \geq 1$, se v está em V_i.

Por outro lado, se algum V_i se decompõe por algum $\rho(Y)$, podemos tomar uma nova decomposição de V e repetir o argumento. Como a dimensão dos subespaços diminuem, obtemos por indução, uma decomposição em subespaços $\mathfrak{g}$-invariantes,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t,$$

tal que para todo Y em $\mathfrak{g}$ com $i = 1, \ldots, t$ existe $\lambda_i(Y)$ autovalor de $\rho(Y)$ com $(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$ para algum $k \geq 1$, se $v \in W_i$.

A partir daí, obtemos a decomposição em relação a representação de uma álgebra nilpotente.

Teorema 1.64 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V de dimensão finita. Se o corpo de escalares é algebricamente fechado e $\mathfrak{g}$ nilpotente, então existem funcionais lineares $\lambda_1, ..., \lambda_s$ tal que, se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \textit{ para todo } X \in \mathfrak{g}, \textit{existe } n \geq 1, (\rho_i(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

então V_{λ_i} é $\mathfrak{g}$-invariante, $i = 1, \ldots, s$ e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Demonstração: Já sabemos da existência de subespaços $\mathfrak{g}$-invariantes $W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ e aplicações $\lambda_i : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tais que

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

com $W_i \subset V_{\lambda_i}$ e V_{λ_i} como no enunciado. Assumindo que $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ e se necessário, somando as parcelas para as quais os λ coincidem, podemos mostrar que $W_i = V_{\lambda_i}$.

Afirmamos que λ_i é linear. De fato, denote por ρ_i a restrição da representação a V_{λ_i}. Pela definição de V_{λ_i} tem-se que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo X em $\mathfrak{g}$. Portanto, $\mathrm{tr}(\rho_i(X) - \lambda_i(X)Id) = 0$ e então $\mathrm{tr}(\rho_i(X)) - \mathrm{tr}(\lambda_i(X)Id) = 0$. Mas isso implica que $\mathrm{tr}(\rho_i(X)) - (\dim V_{\lambda_i})\lambda_i(X) = 0$, que por sua vez, implica que $\lambda_i(X) = \dfrac{\mathrm{tr}(\rho_i(X))}{\dim V_{\lambda_i}}$. Da linearidade do traço tem-se que λ_i é linear.

Como os funcionais lineares $\lambda_i - \lambda_j$ não são nulos e são em quantidade finita, é possível tomar X em $\mathfrak{g}$ tal que $\lambda_i(X)$ e $\lambda_j(X)$ são distintos para todo $i \neq j$. Para X dessa forma, cada $\lambda_i(X)$ é autovalor de $\rho(X)$. Então podemos considerar o auto-espaço generalizado associado, ou seja, $V_{\lambda_i(X)}$. Como os autovalores são distintos, a soma $V_{\lambda_1(X)} + \cdots + V_{\lambda_s(X)}$ é direta. Mais ainda, essa soma coincide com V, já que $W_i \subset V_{\lambda_i(X)}$. Isso mostra que $W_i = V_{\lambda_i(X)}$ com $i = 1, \ldots, s$. Mas, por definição tem-se que $V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i(X)}$ e então$W_i = V_{\lambda_i}$. Como queríamos. □

Por conveniência, introduzimos a seguinte terminologia ligada aos autovalores λ_i da representação.

Definição 1.65 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* ρ *uma representação de* $\mathfrak{g}$ *em* V. *Um* ***peso*** *de* ρ *é um funcional linear* $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ *tal que o subespaço* V_λ *de* V *definido por*

$$V_\lambda = \{v \in V : \textit{para todo } X \in \mathfrak{g}, \textit{ existe } n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\},$$

satisfaz $V_\lambda \neq 0$. *O subespaço* V_λ *é chamado de* ***subespaço de pesos associado a*** λ. *A dimensão de* V_λ *é chamada de* ***multiplicidade de*** λ.

Concluímos então, que os pesos de uma representação são os autovalores dos elementos da álgebra.

Exemplo 1.27 *Tome* $\mathfrak{g}$ *a álgebra das matrizes diagonais em relação à base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$. *Os funcionais* λ_i, $i = 1, \ldots, n$ *definidos por*

$$\lambda_i(diag\{a_1, \ldots, a_n\}) = a_i$$

são pesos da representação canônica de $\mathfrak{g}$. *Neste caso* V_{λ_i}, $i = 1, \ldots, n$ *é o subespaço gerado por* e_i.

Exemplo 1.28 *Se* ρ *é uma nil-representação de dimensão finita, então* 0 *é o único peso de* ρ *e* V_0 *coincide com o espaço da representação.*

Note que no Teorema 1.64, se ρ_i denota a restrição de ρ a V_{λ_i}, então $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo X em $\mathfrak{g}$. Esse fato, juntamente com o que foi mostrado para as nil-representações, possibilita o esclarecimento da forma de ρ_i, de modo a concluirmos que $\rho_i - \lambda_i$ é uma representação. Para verificar esse fato, veja [18] Proposição 2.11.

O próximo resultado é o melhor que pode-se dizer sobre representações de álgebras de Lie nilpotentes.

Teorema 1.66 *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado e seja* ρ *uma representação da álgebra nilpotente* $\mathfrak{g}$ *sobre o espaço de dimensão finita* V. *Então, existe uma base de* V, *tal que nessa base* ρ *se escreve como*

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_1(X) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_s(X) \end{pmatrix}, \qquad X \in \mathfrak{g}$$

com os blocos diagonais $\rho_i(X)$ da forma

$$\rho_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix}, \qquad X \in \mathfrak{g}$$

onde λ_i é peso da representação.

1.3 Álgebras solúveis

Os elementos das álgebras solúveis $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, também podem ser colocados em forma triangular, porém não temos aqui uma decomposição do tipo de Jordan, em blocos, com as diagonais de cada bloco múltiplas da identidade. O principal resultado que apresentamos aqui é o teorema de Lie, o qual mostra a existência de uma base que triangulariza simultaneamente os elementos de uma álgebra solúvel, através de quociente sucessivos.

Para construir uma base que triangularize os elementos de uma álgebra solúvel, devemos garantir a existência de um autovetor comum para os elementos da álgebra. Isso é feito no seguinte teorema:

Teorema 1.67 *Sejam $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra solúvel. Então, existe $v \in V$, $v \neq 0$ e um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que $Xv = \lambda(X)v$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, ou seja, v é um autovetor comum a $X \in \mathfrak{g}$ com autovalor $\lambda(X)$.*

Demonstração: Observemos que λ é linear, pois

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha X + Y)v &= (\alpha X + Y)v = \alpha Xv + Yv \\ &= \alpha\lambda(X)v + \lambda(Y)v, \end{aligned}$$

para quaisquer que sejam X e Y em $\mathfrak{g}$ e α em $\mathbb{K}$. Resta mostrarmos que existe um autovetor comum para todo X em $\mathfrak{g}$. Faremos isso por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$.

Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, então $\mathfrak{g}$ é gerada por X e a existência do autovetor para X segue do fato do corpo ser algebricamente fechado.

Se $\dim \mathfrak{g} > 1$, então $\mathfrak{g}$ possui um ideal $\mathfrak{h}$ de codimensão 1. Aplicando a hipótese de indução sobre $\mathfrak{h}$ temos que existe $w \in V$, $w \neq 0$ tal que

$$Xw = \lambda(X)w \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{h}.$$

Como $\mathfrak{h}$ tem codimensão 1, então existe X_0 em $\mathfrak{g}$, tal que X_0 e $\mathfrak{h}$ geram $\mathfrak{g}$. Assim, se encontrarmos um autovetor comum a X_0 e aos elementos de $\mathfrak{h}$, teremos o desejado. Isso é garantido se encontrarmos um subespaço $W \neq 0$ que satisfaz:

1. W é invariante por X_0 e
2. todo $v \in W$, $v \neq 0$ é autovetor de todo $Y \in \mathfrak{h}$.

De fato, como o corpo de escalares é algebricamente fechado e W é invariante por X_0, então X_0 tem um autovetor em W e, portanto, esse autovetor é comum a todos os elementos de $\mathfrak{g}$.

Um subespaço W que satisfaz essas condições é o subespaço cíclico de X_0 gerado por W, ou seja, $W = ger\{X_0^i w : i \geq 0\}$. Claramente este subespaço é invariante por X_0. Observe que para algum $p \geq 0$ temos que $\beta = \{w, X_0 w, \ldots, X_0^p w\}$ é base de W. Logo, dado $Y \in \mathfrak{h}$, seu valor nos elementos dessa base é dado pela fórmula de comutação à direita como

$$YX_0^k w = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X_0^j (\mathrm{ad}_d(X_0)^{k-j} Y) w,$$

com $0 \leq k \leq p$. Como $\mathfrak{h}$ é ideal e w é autovetor para os elementos de $\mathfrak{h}$, então

$$\begin{aligned} YX_0^k w &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda(\mathrm{ad}_d(X_0)^{k-j} Y) X_0^j w \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (\binom{k}{j} \lambda(\mathrm{ad}_d(X_0)^{k-j} Y)(X_0^j w)) + \lambda(Y) X_0^j w \in W. \end{aligned} \tag{1.6}$$

O que mostra que W é invariante por $\mathfrak{h}$ e que em relação a base β, a restrição de Y a W é uma matriz diagonal, sendo esses elementos da diagonal são todos iguais a $\lambda(Y)$. Calculando $\mathrm{tr}(Y_{|W})$ tem-se que

$$\lambda(Y) = \frac{\mathrm{tr}(Y_{|W})}{\dim W}.$$

Como todo colchete entre transformações lineares tem traço zero, então

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_d(X_0)^{k-j} Y_{|W}) = 0$$

se $k - j \geq 1$. Juntando isso com a expressão para $YX_0^k w$ dada em (1.6), tem-se que

$$YX_0^k w = \lambda(Y) X_0^k w$$

com $Y \in \mathfrak{h}$, $k = 0, \ldots, p$ e $X_0^k w$ autovetor de $Y \in \mathfrak{h}$. Assim W satisfaz as condições desejadas e concluímos a demonstração. □

Finalmente, apresentamos o teorema de Lie.

Teorema 1.68 (de Lie) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra solúvel. Então, existe uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e funcionais lineares $\lambda_1, \ldots \lambda_n : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que, em relação a β, $X \in \mathfrak{g}$ se escreve como*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Sejam v_1 autovetor comum a todos os elementos de $\mathfrak{g}$ com autovalor $\lambda_1(X)$ e V_1 o subespaço gerado por v_1. Assim $\mathfrak{g}$ deixa V_1 invariante e então se representa em V/V_1. Como $\mathfrak{g}$ é solúvel, existe um autovalor $w \in V/V_1$ comum aos elementos da representação de $\mathfrak{g}$ com autovalor dado pelo funcional linear λ_2. Tomando v_2 como representante de w em V tem-se que $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + u$ com $u \in V_1$. Como $w \neq 0$ em V/V_1, $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Como a dimensão de V é finita, procedendo assim sucessivamente, obtemos a base e os pesos requeridos. □

Como consequência do teorema anterior temos o seguinte resultado:

Proposição 1.69 *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é nilpotente.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente. Vimos logo após a Definição 1.52 que toda álgebra nilpotente é solúvel, dessa forma $\mathfrak{g}'$ é solúvel. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ é sempre abeliana, da Proposição 1.45 temos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ é solúvel. Logo, da Proposição 1.48, $\mathfrak{g}$ é solúvel. Reciprocamente, vamos assumir que o corpo de escalares é algebricamente fechado e que $\mathfrak{g}$ é solúvel. Pelo teorema de Lie, a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ se escreve, em alguma base, como matrizes triangulares superiores. Como o colchete entre matrizes triangulares superiores é triangular superior com zeros na diagonal, os elementos de $\mathfrak{g}'$, na representação adjunta, se escrevem como matrizes triangulares superiores com diagonal nula. Do exemplo 1.23, segue que estes elementos de $\mathfrak{g}'$ são nilpotentes e portanto a representação adjunta de $\mathfrak{g}'$ em $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Mais ainda, a representação adjunta de $\mathfrak{g}'$ também é nilpotente. Logo, usando o teorema de Engel, segue que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente. □

1.4 Critérios de Cartan

A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, é a forma bilinear definida por $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$, e atua como um instrumento que nos permite investigar, através dos critérios de Cartan, a semisimplicidade e a solubilidade de álgebras de Lie.

Analisamos aqui a decomposição de Jordan de uma derivação de uma álgebra de Lie e os resultados obtidos são utilizados nas demonstrações dos critérios de Cartan.

Proposição 1.70 *Seja $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma derivação da álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Tome a decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0 \text{ para algum } n \geq 1\}$$

é o auto-espaço generalizado associado ao autovalor λ_i. Então,

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}.$$

($\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de D).

Demonstração: Cada $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ se decompõe em componentes de Jordan, ou seja, existem conjuntos *linearmente independentes* $\{X_1, \ldots X_r\}$ tais que $DX_j = \lambda_i X_j + X_{j-1}$, com $j = 1, \ldots, r$ e $X_{-1} = 0$ e também existe uma base de $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ formada por tais conjuntos. Para concluirmos a demonstração é suficiente mostrar que, se

$$\{X_1, \ldots, X_r\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i} \qquad \text{e} \qquad \{Y_1, \ldots, Y_s\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_j}$$

são conjuntos *linearmente independentes,* como acima, então

$$[X_k, Y_l] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} \qquad \text{com } k = 1, \ldots, r \text{ e } l = 1, \ldots, s.$$

A demonstração será feita por indução dupla sobre k e l. O passo de indução consiste da seguinte igualdade

$$\begin{aligned} D[X_k, Y_l] &= [DX_k, Y_l] + [X_k, DY_l] \\ &= [\lambda_i X_k + X_{k-1}, Y_l] + [X_k, \lambda_j Y_l + Y_{l-1}] \\ &= (\lambda_i + \lambda_j)[X_k, Y_l] + [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}] \end{aligned}$$

de onde segue que

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_k, Y_l] = [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]. \tag{1.7}$$

Se $k = l = 1$, então o segundo membro da igualdade acima se anula e $[X_1, Y_1] \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))$. Então $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. Suponha que o resultado seja válido para $k' < k$, com l arbitrário e válido para $l' < l$, com k arbitrário. Note que o segundo membro de (1.7) está no núcleo de $(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n$, para algum n, pois

$$\begin{aligned}(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l]) \\ &\quad + (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_k, Y_{l-1}]).\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, $(D-(\lambda_i+\lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l]) = 0$ e $(D-(\lambda_i+\lambda_j))^n([X_k, Y_{l-1}]) = 0$. Assim,

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) = 0 \tag{1.8}$$

e então $([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n$. Logo

$$\begin{aligned}(D - (\lambda_i + \lambda_j))^{n+1}[X_k, Y_l] &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n((D - (\lambda_i + \lambda_j)[X_k, Y_l]) \\ &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) \\ &= 0\end{aligned}$$

para algum n. Portanto $[X_k, Y_l] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. □

Definimos agora quando um elemento de $\mathfrak{gl}(V)$ é semisimples.

Definição 1.71 *Um elemento $X \in \mathfrak{gl}(V)$ (V de dimensão finita) é dito* ***semisimples****, se as raízes de seu polinômio minimal forem todas distintas. Equivalentemente, X é semisimples se, e somente se, X é diagonal.*

Em espaços vetoriais sobre corpos gerais, uma transformação linear T se decompõe de maneira única como

$$T = S + N$$

onde N é nilpotente e S semisimples, com S e N comutando entre si e também com T. Essa decomposição é conhecida como **Decomposição de Jordan-Chevalley**.

A partir do resultado anterior pode-se provar que as componentes semisimples e nilpotentes de uma derivação também são derivações.

Teorema 1.72 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e D uma derivação de $\mathfrak{g}$. Escreva $D = S + N$, de maneira única, com S semisimples, N nilpotente e suponha que*

$$[D, S] = [D, N] = [S, N] = 0.$$

Então, S e N também são derivações.

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Mostraremos que $S[X, Y] = [SX, Y] + [X, SY]$ para X, Y elementos de uma base. Como $\mathfrak{g}$ se decompõe nos auto-espaços generalizados de D devemos mostrar a propriedade de derivação para $X \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ e $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ com λ_i, λ_j autovalores. Temos pela proposição anterior que $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$ e assim $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. Os auto-espaços generalizados de D são auto-espaços de S. Logo $S[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y]$, sendo que $[X, Y] = 0$, se $\lambda_i + \lambda_j$ não for autovalor. Por outro lado, temos que

$$[SX, Y] + [X, SY] = [\lambda_i X, Y] + [X, \lambda_j Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y]$$

e então $S[X, Y] = [SX, Y] + [X, SY]$. Portanto S é derivação. Como $N = D - S$ e D é derivação, temos que N é derivação. □

Este resultado afirma que certas transformações associadas de alguma forma a derivações, são também derivações. A proposição seguinte segue a mesma direção que este resultado, porém é necessário introduzir a seguinte terminologia:

Definição 1.73 *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ uma sequência finita de elementos de um corpo. Uma terna ordenada (i_1, i_2, i_3) de elementos de $\{1, \ldots, k\}$ é dita λ-fechada (ou simplesmente fechada) se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$.*

Exemplo 1.29 *Para a sequência $(1, 1, 2)$, as ternas fechadas são $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 3)$.*

Exemplo 1.30 *Diz-se que uma sequência $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ imita λ se as ternas fechadas para λ são também μ-fechadas, isto é, $\mu_{i_1} + \mu_{i_2} = \mu_{i_3}$ se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$.*

Exemplo 1.31 *A sequência $\mu = (3, 0, 3)$ imita a sequência $\lambda = (1, 2, 3)$ pois as ternas fechadas de λ são $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 3)$, que também são μ-fechadas.*

Proposição 1.74 *Seja S uma derivação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita. Suponha que S seja diagonalizável, ou seja, $SX_i = \lambda_i X_i$, $i = 1, \ldots, k$, para $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ os autovalores e $\{X_1, \ldots, X_k\}$ uma base de autovetores de $\mathfrak{g}$. Seja $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ uma sequência que imita λ e defina a transformação linear $T_\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, por $T_\mu X_i = \mu_i X_i$, $i = 1, \ldots, k$. Então, T_μ também é derivação.*

Demonstração: Se mostrarmos que

$$T_\mu[X_i, X_j] = [T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j]$$

para $i, j = 1, \ldots, k$ teremos o desejado. Quando $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de S, temos $[X_i, X_j] = 0$ e essa igualdade é satisfeita já que,

$$[T_\mu X_i, Y_j] + [X_i, T_\mu Y_j] = (\mu_i + \mu_j)[X_i, X_j].$$

Já se, $\lambda_i + \lambda_j$ é autovalor de S, então $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_l$ para algum l e a terna (i, j, l) é λ-fechada. Como μ imita λ temos que $\mu_i + \mu_j = \mu_l$ e assim

$$[T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j] = \mu_l[X_i, X_j].$$

Por outro lado, pela Proposição 1.70 $S[X_i, X_j] = \lambda_l[X_i, X_j]$. Entretanto, os autovetores de S associados a λ_l são autovetores de T_μ associados a μ_l, e isso mostra que $T_\mu[X_i, X_j] = \mu_l[X_i, X_j]$. Portanto,

$$T_\mu[X_i, X_j] = \mu_l[X_i, X_j] = [T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j].$$

Como queríamos demonstrar. □

Nesta proposição, vimos que as sequências que imitam os autovalores de uma derivação diagonalizável, permitem construir novas derivações. Isso nos permite provar o seguinte teorema:

Teorema 1.75 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e D uma derivação de $\mathfrak{g}$. Suponha que para toda derivação M de $\mathfrak{g}$ se tenha*

$$\operatorname{tr}(DM) = 0.$$

Então D é nilpotente.

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que o corpo de escalares seja algebricamente fechado. Seja $D = S + N$ a decomposição de D em componentes semi-simples (S) e nilpotente (N) que comutam entre si. Vamos mostrar que $S = 0$. Como foi visto anteriormente, S é uma derivação e com a hipótese que o corpo de escalares é algebricamente fechado, $S = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ em alguma base de $\mathfrak{g}$.

Para provar que $S = 0$, mostraremos que, $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, k$. Isto será feito construindo uma quantidade suficiente de sequências que imitam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Como o corpo de escalares $\mathbb{K}$ é de característica zero, temos que $\mathbb{K}$ contém uma cópia dos racionais $\mathbb{Q}$ e é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Seja $V \subset \mathbb{K}$ o subespaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. É claro que V tem dimensão finita.
Seja $\psi : V \to \mathbb{Q}$ funcional linear em V definido por

$$\mu_i = \psi(\lambda_i) \qquad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k).$$

A sequência μ imita λ, pois se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$, temos

$$\mu_{i_1} + \mu_{i_2} = \psi(\lambda_{i_1}) + \psi(\lambda_{i_2}) = \psi(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) = \psi(\lambda_{i_3}) = \mu_{i_3}.$$

Para essa sequência μ, tome T_μ como na proposição anterior. Logo T_μ é derivação e por hipótese

$$0 = \operatorname{tr}(DT_\mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi(\lambda_i).$$

Essa última expressão é uma combinação linear sobre $\mathbb{Q}$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Aplicando ψ a esta combinação temos

$$0 = \psi(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{k} \psi(\lambda_i)\psi(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \psi(\lambda_i)^2,$$

e como esta é uma soma de racionais positivos, conclui-se que $\psi(\lambda_i) = 0$ para todo i. Como ψ é um funcional linear arbitrário e V é de dimensão finita, tem-se que $\lambda_i = 0$ para todo i, o que mostra o teorema. $\square$

Definimos a seguir, a forma traço em uma álgebra de Lie.

Definição 1.76 *Dada uma representação ρ de dimensão finita de uma álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, define-se em $\mathfrak{g}$ a **forma traço** β_ρ que é a forma bilinear simétrica dada por*

$$\beta_\rho(X, Y) = \operatorname{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

*Para o caso em que ρ é a representação adjunta, a forma traço será denominada **forma de Cartan-Killing** da álgebra e será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ quando se quiser ressaltar a álgebra $\mathfrak{g}$.*

Definição 1.77 *Uma forma bilinear β num espaço vetorial V de dimensão finita, diz-se **não-degenerada**, se o único elemento $v \in V$ que satisfaz $\beta\ (v, w) = 0$ para todo $w \in V$ é, $v = 0$.*

Vejamos dois exemplos de formas bilineares.

Exemplo 1.32 *Seja ρ uma representação de uma álgebra solúvel $\mathfrak{g}$. Supondo que o corpo de escalares é algebricamente fechado, temos pelo teorema de Lie que os elementos dessa álgebra são escritos como matrizes triangulares superiores. Assim, os elementos de $\mathfrak{g}'$ são representados por matrizes triangulares superiores com zero na diagonal. Assim, $\rho(X)\rho(Y)$ é nilpotente se $X \in \mathfrak{g}'$. Dessa forma, no caso em que $\mathfrak{g}$ é solúvel, $\beta_\rho(X, Y) = 0$ se $X \in \mathfrak{g}'$. Em particular, β_ρ é identicamente nula em $\mathfrak{g}'$.*

Exemplo 1.33 *Um elemento X de $\mathfrak{sl}(2)$, se escreve como*

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

E disso segue que $trX^2 = 2(a^2 + bc)$, que é portanto a expressão de $\beta_\rho(X, X)$, se ρ é a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2)$. Assim, tem-se que a matriz de β_ρ em relação a base $\{X, H, Y\}$, onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e daí concluímos que β_ρ é não-degenerada, já que o determinante desta matriz é não nulo. Em relação a base $\{A, H, S\}$ com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a matriz de β_ρ é diagonal, sendo que $-\beta_\rho(A,A) = 2 = \beta_\rho(S,S)$. Já a forma de Cartan-killing de $\mathfrak{sl}(2)$ é dada por $8(a^2 + bc)$. Note que essa forma, é um múltiplo de β_ρ e é, portanto, não-degenerada.

O critério de Cartan para álgebras solúveis é a recíproca do primeiro exemplo dado acima, ou seja, $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\beta_\rho(X,\cdot) = 0$ para $X \in \mathfrak{g}'$ e ρ a representação adjunta. Já o segundo exemplo ilustra claramente o critério de Cartan para álgebras semisimples, o qual afirma que uma álgebra é semisimples se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é não-degenerada.

Como o traço de duas transformações lineares conjugadas é o mesmo, a forma traço é invariante por conjugações. Em termos da álgebra de Lie, essa invariância se traduz nas seguintes afirmações:

Proposição 1.78 1) *As adjuntas dos elementos de uma álgebra de Lie são anti-simétricas em relação a β_ρ, ou seja,*

$$\beta_\rho([X,Y],Z) + \beta_\rho(Y,[X,Z]) = 0$$

para quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Já no caso da forma de Cartan-Killing tem-se:
2)*Se ϕ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, então $\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle$.*
3) *Se D é uma derivação de $\mathfrak{g}$, então $\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = 0$.*

Demonstração: Como o traço de um comutador se anula, é imediato que a igualdade 1) é satisfeita. Quanto às igualdades correspondentes à forma de Cartan-Killing, a primeira é devido ao fato de $\mathrm{ad}(\phi X) = \phi \mathrm{ad}(X) \phi^{-1}$, se ϕ é um automorfismo. Já a segunda igualdade segue do fato de que, $\mathrm{ad}(DX) = [D, \mathrm{ad}(X)]$ para uma derivação D qualquer. $\square$

A invariância da forma traço é uma das principais propriedades das formas bilineares. Uma outra propriedade importante, é que a restrição da forma de Cartan-Killing a um ideal $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$, coincide com a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{i}$. De fato, dados $X \in \mathfrak{i}$ e $Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X))(Z) = \mathrm{ad}(Y)[X,Z] = [Y,[X,Z]] \subset \mathfrak{i}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$, ou seja, a imagem da $\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)$ está contida em $\mathfrak{i}$. Dessa forma, tomando uma base para $\mathfrak{i}$ e completando-a a uma base de $\mathfrak{g}$, vemos que os elementos que estão fora de $\mathfrak{i}$, não interferem em $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X))$ e portanto $\langle Y, X\rangle$ coincide com $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)\mid_{\mathfrak{i}})$ que é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{i}$ quando Y está em $\mathfrak{i}$.

Afim de demonstrarmos o primeiro dos critérios de Cartan , precisamos do seguinte lema:

Lema 1.79 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é identicamente nula, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: Se mostrarmos que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente, segue o desejado. Dessa forma, seja $X \in \mathfrak{g}'$. Então X se escreve como $X = \sum_i [Y_i, Z_i]$, para quaisquer que sejam Y_i, Z_i em $\mathfrak{g}$. Tomando D uma derivação qualquer, temos que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)D) = 0$, pois

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)D) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\textstyle\sum_i [Y_i, Z_i])D) \\
&= \textstyle\sum_i \mathrm{tr}([\mathrm{ad}(Y_i), \mathrm{ad}(Z_i)]D) \\
&= \textstyle\sum_i \mathrm{tr}((\mathrm{ad}(Y_i)\mathrm{ad}(Z_i)D) - (\mathrm{ad}(Z_i)\mathrm{ad}(Y_i)D)) \\
&= \textstyle\sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Y_i)\mathrm{ad}(Z_i)D) - \sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Z_i)\mathrm{ad}(Y_i)D) \\
&= \textstyle\sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Z_i)D\mathrm{ad}(Y_i) - \mathrm{ad}(Z_i)\mathrm{ad}(Y_i)D) \\
&= \textstyle\sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Z_i)[D, \mathrm{ad}(Y_i)]) \\
&= \textstyle\sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Z_i)\mathrm{ad}(DY_i)) \\
&= \textstyle\sum_i \langle Z_i, DY_i\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

já que por hipótese a forma de Cartan-Killing é identicamente nula. Assim, como D é uma derivação qualquer e $\mathrm{ad}(X)$ também é uma derivação, pelo teorema 1.75 segue que $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente, ou seja, a representação adjunta de $\mathfrak{g}'$ é nilpotente. Logo pelo teorema de Engel, segue que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente. □

Podemos mostrar agora o primeiro critério de Cartan-Killing.

Teorema 1.80 *Denotando por $\langle ., .\rangle$ a forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tem-se que $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e todo $Y \in \mathfrak{g}$,*

$$\langle X, Y\rangle = 0$$

Demonstração: Segue do exemplo 1.32 que se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então $\langle X, Y\rangle = 0$ para $X \in \mathfrak{g}'$. Reciprocamente, note que a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{g}'$ é identicamente nula, logo, como $\mathfrak{g}'$ é um ideal, temos que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$ é identicamente nula. Pelo lema anterior segue que $\mathfrak{g}'$ é solúvel e portanto $\mathfrak{g}$ é solúvel. $\square$

A partir deste critério para álgebras solúveis pode-se mostrar o critério de Cartan para álgebras semisimples.

Teorema 1.81 *A forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não-degenerada se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é semisimples.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathfrak{g}$ não seja semisimples, assim o radical solúvel de $\mathfrak{g}$ é diferente de zero. Como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é solúvel, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^k$ é um ideal abeliano não trivial para algum k. Chamando $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^k = \mathfrak{i}$, tome $X \in \mathfrak{i}$. Então, para todo $Y \in \mathfrak{g}$ tem-se que, a imagem de $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ está contida em $\mathfrak{i}$ e portanto $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$ coincide com $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\mid_{\mathfrak{i}})$. Como $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\mid_{\mathfrak{i}}) = 0$, pois $\mathfrak{i}$ é ideal abeliano,então para todo $X \in \mathfrak{i}$ e para todo $Y \in \mathfrak{g}$, $\langle Y, X\rangle = 0$. Mas isso contraria o fato de $\mathfrak{g}$ ser não-degenerada. Portanto as álgebras que tem forma de Cartan-Killing não-degeneradas são semisimples. Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{g}$ é semisimples. Seja $\mathfrak{g}^{\perp}$ o subespaço definido por

$$\mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : \ \langle X, Y\rangle = 0 \qquad \text{para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Temos pelo item 1) da Proposição 1.78 que

$$\langle [Z, X], Y\rangle = -\langle X, [Z, Y]\rangle = 0$$

se $X \in \mathfrak{g}^{\perp}$ e Y, Z são arbitrários, o que implica $[Z, X] \subset \mathfrak{g}^{\perp}$. Logo $\mathfrak{g}^{\perp}$ é ideal de $\mathfrak{g}$. Mas a restrição de $\langle ., .\rangle$ a $\mathfrak{g}^{\perp}$ é identicamente nula e $\mathfrak{g}^{\perp}$ é ideal de $\mathfrak{g}$, logo a forma Cartan-Killing de $\mathfrak{g}^{\perp}$ é identicamente nula. Consequentemente, pelo Lema 1.79 segue que $\mathfrak{g}^{\perp}$ é solúvel e já que $\mathfrak{g}$ é semisimples, segue que $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$. Portanto a forma de Cartan Killing de $\mathfrak{g}$ é não-degenerada. $\square$

Como a forma Cartan-Killing para álgebras semisimples é não-degenerada, o critério de Cartan para estas álgebras, permite provar diversas propriedades, algumas das quais são apresentadas a seguir.

Proposição 1.82 *Todo ideal de uma álgebra semisimples, é semisimples.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples e $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ um ideal não trivial. Primeiramente vamos provar que $\mathfrak{i}^{\perp}$, o ortogonal de $\mathfrak{i}$ em relação a $\langle .,. \rangle$ é um ideal complementar a $\mathfrak{i}$. É claro que $\mathfrak{i}^{\perp}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, pois se $X \in \mathfrak{i}^{\perp}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ para todo $Z \in \mathfrak{i}$ tem-se que $\langle [Y,X], Z \rangle = -\langle X, [Y,Z] \rangle = 0$. Note que $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}^{\perp} \cap \mathfrak{i}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ e assim $\mathfrak{j}' = [\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] = [\mathfrak{i}^{\perp} \cap \mathfrak{i}, \mathfrak{i}^{\perp} \cap \mathfrak{i}]$. Tome $X_1, X_2 \in \mathfrak{j}$, então $X_1, X_2 \in \mathfrak{i}$. Como $\mathfrak{i}$ é ideal e todo ideal é uma subálgebra, temos que $[X_1, X_2] \in \mathfrak{i}$. Portanto $\langle X_1, Y_1 \rangle = 0$ para todo $X_1 \in \mathfrak{j}$ e para todo $Y_1 \in \mathfrak{j}'$ e do Teorema 1.80, segue que $\mathfrak{j}$ é solúvel. Mas $\mathfrak{g}$ é semisimples , assim $\mathfrak{j} = 0$ e então $\mathfrak{i}^{\perp} \cap \mathfrak{i} = \{0\}$. Portanto $\mathfrak{i}^{\perp}$ é complementar a $\mathfrak{i}$. Mas isso implica que a restrição a i da forma de Cartan-Killing é não degenerada, o que garante que i é semisimples. $\square$

O fato de que $\mathfrak{i}^{\perp}$ é complementar de $\mathfrak{i}$, implica que a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é completamente redutível e portanto se decompõe como soma direta de subespaços invariantes irredutíveis. Lembremos também que, um subespaço invariante irredutível pela adjunta é um ideal simples, pois todo subespaço invariante pela adjunta é um ideal e, sendo este ideal irredutível, segue que ele também é simples.

Vejamos agora um resultado que torna mais precisa a caracterização de uma álgebra semisimples e seus ideais.

Teorema 1.83 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra semisimples, então $\mathfrak{g}$ se decompõe como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s \tag{1.9}$$

com $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, ..., n$ ideais simples. Nessa decomposição $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Além disso:

1) *O ortogonal $\mathfrak{g}_i^{\perp}$ de uma componente simples em relação a forma de Cartan-Killing, é a soma das demais componentes;*

2) *Os ideais de $\mathfrak{g}$ são somas de algumas dessas componentes e*

3) *A decomposição é única.*

Demonstração: Pelo resultado anterior e o comentário acima segue a decomposição de $\mathfrak{g}$ em componentes simples, ou seja,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s.$$

Como $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$ e $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ temos que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Para mostrar os outros itens, suponha que $\mathfrak{g}$ se decomponha como soma direta de dois ideais, ou seja, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Então, o complementar ortogonal de um dos ideais é o outro. De fato, $\mathfrak{h}_1^{\perp}$ complementa $\mathfrak{h}_1$ e portanto tem a mesma dimensão que $\mathfrak{h}_2$. Se $X \in \mathfrak{h}_1$ e $Y \in \mathfrak{h}_2$, então $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ se anula em $\mathfrak{h}_1$ ou $\mathfrak{h}_2$, ou seja, esses ideais são ortogonais. Tomando então uma base de $\mathfrak{g}$, cujos elementos estão contidos ou em $\mathfrak{h}_1$ ou em $\mathfrak{h}_2$ tem-se que $\langle X, Y\rangle = 0$. Logo $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1^{\perp}$ e portanto $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1^{\perp}$ pois as dimensões coincidem. Seja agora $\mathfrak{g}_i$ uma componente simples e denote por $\mathfrak{c}_i$ a soma das demais componetes simples. Note que $\mathfrak{c}_i$ é um ideal, pois o colchete entre componentes simples distintas se anula. Assim $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{g}_i^{\perp}$ e mostramos 1).

Para mostrar 2) seja $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Temos que $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{g}_i$ ou $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ pois $\mathfrak{g}_i$ é simples. Se $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_i$, não o há o que demonstrar. Caso contrário, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}_i$ é um ideal, que se for não nulo, por indução mostramos que ele é soma de componentes simples e o mesmo acontece com $\mathfrak{h}$. Já se $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$, então $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}_i$ e usando novamente a indução conclui-se que $\mathfrak{h}$ é soma de componentes simples da decomposição (1.9). Por fim, o item 3) decorre diretamente do fato de $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, ..., n$, serem os únicos ideais simples de $\mathfrak{g}$. □

Como consequência desse teorema temos:

Corolário 1.84 *Se $\mathfrak{g}$ é semisimples, então $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como $\mathfrak{g}'$ é ideal de $\mathfrak{g}$, existe um ideal $\mathfrak{i}$ que o complementa. Dados X, Y em $\mathfrak{i}$ tem-se que $[X, Y] \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{i}$. Ou seja, $\mathfrak{i}$ é um ideal abeliano e portanto solúvel. Como $\mathfrak{g}$ é semisimples, então temos $\mathfrak{i} = 0$ e portanto $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. □

Corolário 1.85 *Se $\mathfrak{g}$ é semisimples e $\mathfrak{h}$ é uma álgebra abeliana, então a aplicação identicamente nula é o único homomorfismo de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{h}$. Em particular, a única representação unidimensional de $\mathfrak{g}$ é a representação nula, e para uma representação ρ qualquer tem-se que,* $\mathrm{tr}(\rho(X)) = 0$ *para todo X em $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo e $\mathfrak{h}$ é abeliana, então

$$\varphi[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y] = 0$$

para quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$, ou seja, φ é identicamente nula em $\mathfrak{g}'$. Como $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ temos que φ é identicamente nula em $\mathfrak{g}$. Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ tem dimensão um, então $\mathfrak{gl}(V)$

também tem dimensão um. Logo $\mathfrak{gl}(V)$ é abeliana e recaímos nesse caso. Pelo Corolário 1.84, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Tome $X = [Y, Z] \in \mathfrak{g}'$. Temos portanto que

$$\mathrm{tr}\rho\,(X) = \mathrm{tr}\rho([Y,Z]) = \mathrm{tr}([\rho(Y),\rho(Z)]) = \mathrm{tr}(\rho(Y)\rho(Z)) - \mathrm{tr}(\rho(Z)\rho(Y)) = 0.$$

□

Corolário 1.86 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra semisimples e $\mathfrak{i}$ é um ideal próprio de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é semisimples.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{i}$ um ideal próprio de $\mathfrak{g}$. Sabemos que existe um ideal $\mathfrak{j}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$, então $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) \approx \mathfrak{j}$ e é semisimples, pois todos os ideais de $\mathfrak{g}$ são semisimples. □

Quanto às derivações das álgebras semisimples, tem-se:

Proposição 1.87 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semisimples, então toda derivação de $\mathfrak{g}$ é uma derivação interna.*

Demonstração: Seja D uma derivação e definamos um funcional linear em $\mathfrak{g}$ por $X \mapsto \mathrm{tr}(D\ \mathrm{ad}(X))$. Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada, existe $Y_D \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{tr}(D\ \mathrm{ad}(X)) = \langle Y_D, X\rangle$ para todo X em $\mathfrak{g}$. Mostraremos que $D = \mathrm{ad}(Y_D)$. Seja $E = D - \mathrm{ad}(Y_D)$ uma derivação. Assim temos que, $\mathrm{tr}(E\ \mathrm{ad}(X)) = 0$ para todo X em $\mathfrak{g}$. Então, tomando X e Y arbitrários temos

$$\begin{aligned}\langle EX, Y\rangle &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(EX)\mathrm{ad}(Y))\\ &= \mathrm{tr}([E, \mathrm{ad}(X)]\mathrm{ad}(Y))\\ &= \mathrm{tr}(E\ \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(X)E\ \mathrm{ad}(Y))\\ &= \mathrm{tr}(E\ \mathrm{ad}([X,Y]))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como a forma de Cartan-Killing é não-degenerada, $EX = 0$ para todo X em $\mathfrak{g}$, ou seja, $E = 0$. Portanto $D = \mathrm{ad}(Y_D)$. □

A partir desta proposição e do Teorema 1.72 obtemos a seguinte decomposição dos elementos de uma álgebra de Lie semisimples.

Corolário 1.88 *Suponha que* $\mathfrak{g}$ *seja semisimples e seja* $X \in \mathfrak{g}$. *Então* X *se decompõe de maneira única em*

$$X = X_S + X_N$$

onde $X_S, X_N \in \mathfrak{g}$ *são tais que* $\mathrm{ad}(X_S)$ *é semisimples,* $\mathrm{ad}(X_N)$ *é nilpotente e*

$$[X_S, X_N] = [X, X_S] = [X, X_N] = 0.$$

Demonstração: Tome a decomposição de Jordan

$$\mathrm{ad}(X) = S + N$$

onde S e N são derivações que comutam entre si e com $\mathrm{ad}(X)$. Como numa álgebra semisimples toda derivação é interna, temos que $S = \mathrm{ad}(X_S)$ e $N = \mathrm{ad}(X_N)$ e daí

$$\mathrm{ad}(X - X_S - X_N) = 0. \tag{1.10}$$

Tomando $X \in \ker(\mathrm{ad})$ temos que $\mathrm{ad}(X) = 0$. Logo $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) = 0$. Como $\mathfrak{g}$ é uma álgebra semisimples, a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não-degenerada e portanto $X = 0$. Dessa forma, temos que $\ker(\mathrm{ad}) = 0$ e de (1.10) segue que $X = X_S + X_N$. Suponha que X não se decomponha de maneira única, ou seja

$$X = X_S + X_N = Y_S + Y_N.$$

Isso implica que $X_S - Y_S = Y_N - X_N$, onde $X_S - Y_S$ é um elemento semi-simples e $Y_N - X_N$ é um elemento nilpotente. Como o único elemento semisimples e nilpotente é o zero tem-se que $X_S = Y_S$ e $Y_N = X_N$. Verificaremos a comutatividade em $\mathfrak{g}$. É claro que

$$[X, X_N] = [X_S + X_N, X_N] = [X_S, X_N] \qquad \text{e}$$

$$[X_S, X] = [X_S, X_S + X_N] = [X_S, X_N].$$

Como $\mathrm{ad}(X_S)(X) = \mathrm{ad}(X_S)(X_N)$, a injetividade da adjunta implica que, $X = X_N$. Portanto $[X, X_N] = 0$ e segue o desejado. $\square$

Capítulo 2

Grupos de Lie

Enquanto que as álgebras de Lie são objetos algébricos por excelência, os grupos de Lie tem uma natureza geométrica e constituem um assunto particularmente rico e de grande interesse na Matemática contemporânea.

Inicialmente, apresentamos alguns conceitos básicos da teoria de grupos de Lie e posteriormente introduzimos o conceito de aplicação exponencial, o qual relaciona os conceitos de álgebras e grupos de Lie.

Finalizamos esse capítulo, com o estudo das variedades homogêneas, que são espaços quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados. A bibliografia utilizada aqui, se encontram em [5], [7], [11], [15] e [23].

A partir de agora, as variedades diferenciáveis que aparecem são de Hausdorff com base enumerável.

2.1 Conceitos Básicos

Definição 2.1 *Um **grupo de Lie** é uma variedade G com estrutura de grupo, de tal modo que as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis.

Note que, num grupo de Lie as aplicações

$$\begin{array}{cccc} L_x: & G & \to & G \\ & y & \mapsto & xy \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} R_x: & G & \to & G \\ & y & \mapsto & yx \end{array}$$

são difeomorfismos para cada $x \in G$. Estas aplicações são chamadas respectivamente de, **translação à esquerda** e **translação à direita** por x.

Exemplo 2.1 *O conjunto dos números reais com a operação soma e estrutura diferenciável usual, é um grupo de Lie, pois a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x.y^{-1} = x - y \end{array}$$

é diferenciável.

Exemplo 2.2 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid = 1\}$ *com a estrutura de grupo multiplicativo é um grupo de Lie. De fato, como as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{0\} & \to & \mathbb{C}-\{0\} \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1*, tem imagem em* S^1*. Portanto,* S^1 *é um grupo de Lie.*

Exemplo 2.3 *O produto* $G \times H$ *de dois grupos de Lie* G *e* H *é um grupo de Lie com a estrutura de variedade produto e com a estrutura de produto direto de grupos*

$$(g_1,h_1)\odot(g_2,h_2) = (g_1.g_2, h_1.h_2),$$

quaisquer que sejam $g_1, g_2 \in G$ *e* $h_1, h_2 \in H$*. Consequentemente,* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ *e* $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ *são grupos de Lie.*

Antes de definirmos um grupo de Lie de matrizes, apresentamos algumas considerações.

Seja $M(n,\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais de ordem $n\times n$. Podemos identificá-lo com $\mathbb{R}^{n^2}$ e muní-lo da topologia usual do $\mathbb{R}^{n^2}$. A aplicação $\varphi : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(A) = \det(A)$, é contínua, pois o determinante de uma matriz é um polinômio em seus coeficientes. Dada uma matriz $A \in M(n\times p,\mathbb{R})$, representaremos por $A^1, ..., A^p$ os vetores coluna de A e o espaço $M(n\times p,\mathbb{R})$ tem uma base canônica $\{E_{r,s}\,; 1 \le r \le n,\ 1 \le s \le p\}$, onde o elemento (r,s) de $E_{r,s}$ é igual a 1 e os restantes são nulos. Indicaremos por A_s^r a matriz $(n-1)\times(p-1)$ obtida de A pela eliminação da r-ésima linha e s-ésima coluna.

O **grupo linear geral** $GL(\mathbb{R}^n)$ é o subconjunto aberto de $M(n,\mathbb{R})$ formado pelas matrizes invertíveis. A função real det : $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$, pois $\det(X)$ é n-linear nos vetores colunas de X. Da expressão geral da derivada de uma função n-linear temos que

$$det'(X).H = \sum_{i=1}^{n} \det(X^1, ..., H^i, ..., X^n),\ X, H \in M(n,\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Em particular para $X = I$ temos

$$det'(I).H = \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, ..., H^i, ..., e_n) = \sum_i h_i^i = \text{ traço de } H \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial \det}{\partial X_s^r}(X) = det'(X).E_{r,s} = (-1)^{r+s} \det X_s^r.$$

Consideremos a restrição $\det : GL(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Note que dada uma matriz $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ existe algum menor $\det(A_s^r) \neq 0$ e isso mostra que $\det : GL(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é uma submersão, ou seja, todo real não nulo c, é valor regular de $\det|_{GL(\mathbb{R}^n)}$. Portanto, o conjunto

$$SL(\mathbb{R}^n) = \{X \in GL(\mathbb{R}^n);\ \det X = 1\} = (\det)^{-1}(1)$$

é uma superfície, e portanto uma variedade, de dimensão $n^2 - 1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^{n^2}$ e é chamado **Grupo Especial Linear** ou **Grupo Unimodular**. É claro que $SL(\mathbb{R}^n)$ é subgrupo de $GL(\mathbb{R}^n)$, pois se $X, Y \in SL(\mathbb{R}^n)$, então $XY \in SL(\mathbb{R}^n)$ e $X^{-1} \in SL(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 1 em [15] e o fato de $det'(I).H =$ traço de H , temos que o espaço tangente a $SL(\mathbb{R}^n)$ em I é o conjunto de todas as matrizes cujo traço é zero.

Relembremos que as matrizes simétricas e anti-simétricas formam subespaços vetoriais $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ de $M(n, \mathbb{R})$ de dimensões $\frac{n}{2}(n+1)$ e $\frac{n}{2}(n-1)$, respectivamente. Dada uma matriz arbitrária $X \in M(n, \mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} XX^t,\, X + X^t &\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ X - X^t &\in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \\ X &= \frac{1}{2}(X + X^t) + \frac{1}{2}(X - X^t). \end{aligned}$$

Note que essa igualdade mostra que $M(n, \mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

O **grupo ortogonal** $O(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as matrizes reais quadradas X, tais que $XX^t = I$. Este grupo tem duas componentes conexas, a das matrizes de determinante 1 e as de determinante -1. Além disso, $O(\mathbb{R}^n)$ é subgrupo de $GL(\mathbb{R}^n)$. De fato, obviamente $O(\mathbb{R}^n) \subset GL(\mathbb{R}^n)$ pois, $A \in O(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $AA^t = I$, ou seja, $A^t = A^{-1}$. Também, dados $X, Y \in O(\mathbb{R}^n)$ tem-se que, $XY \in O(\mathbb{R}^n)$ e $X^{-1} \in O(\mathbb{R}^n)$, pois sabendo que $(XY)^t = Y^t X^t$ segue que

$$(XY)(XY)^t = XYY^tX^t = XIX^t = XX^t = I,$$

ou seja, $XY \in O(\mathbb{R}^n)$. Sabemos também que, se $X \in O(\mathbb{R}^n)$, então $XX^t = I$, ou seja, $X^t = X^{-1}$. Logo

$$X^{-1}.(X^{-1})^t = X^t.(X^t)^t = X^tX = I$$

e portanto $X^{-1} \in O(\mathbb{R}^n)$.

Vamos demonstrar que $O(\mathbb{R}^n)$ é uma superfície, e portanto uma variedade, de dimensão $\frac{n}{2}(n-1)$ e de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^{n^2}$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rlcl} f: & M(n,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & X & \mapsto & XX^t. \end{array}$$

Se mostrarmos que $I \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é valor regular de f, então aplicando novamente o Teorema 1 em [15], concluiremos que $O(\mathbb{R}^n) = f^{-1}(I)$ é uma superfície, e portanto uma variedade, de classe $\mathcal{C}^\infty$ e de dimensão $n^2 - \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n-1)$ em $\mathbb{R}^{n^2}$. Assim, dada $X \in f^{-1}(I)$ se

$$\begin{array}{rlcl} f'(X): & M(n,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & H & \mapsto & XH^t + HX^t \end{array}$$

for sobrejetora, segue o resultado. Dado $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, seja $V = \frac{SX}{2}$. Então,

$$\begin{array}{rcl} f'(X).V & = & X(\frac{SX}{2})^t + (\frac{SX}{2}) + X^t \\ & = & X(\frac{X^t+S^t}{2}) + (\frac{SX}{2}) + X^t \\ & = & XX^t(\frac{S}{2}) + (\frac{S}{2})XX^t \\ & = & S, \end{array}$$

ou seja, f' é sobrejetora para $X \in f^{-1}(I)$. Note ainda que o espaço tangente a $O(\mathbb{R}^n)$ em I, é núcleo de $f^{-1}(I)$, ou seja, é o espaço formado pelas matrizes anti-simétricas.

Enfatizamos que, o **Grupo Especial Ortogonal** $SO(\mathbb{R}^n)$ das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ com determinante unitário que preservam o produto escalar euclidiano, encontra diversas aplicações em várias áreas da Matemática, sobretudo na Álgebra, Geometria e Topologia Algébrica. Esse grupo identifica-se naturalmente com o subgrupo de $M(n,\mathbb{R})$ formado pelas matrizes reais $n \times n$, satisfazendo $XX^t = I$ e $\det(A) = 1$, ou seja, $SO(\mathbb{R}^n)$ é uma componente conexa de $O(\mathbb{R}^n)$, enquanto que a outra componente conexa, é o complementar desta. Observe também que $SO(\mathbb{R}^n) = O(\mathbb{R}^n) \cap SL(\mathbb{R}^n)$.

Baseando-se nessas conclusões, podemos definir um grupo de Lie de matrizes.

Definição 2.2 *Um subgrupo G de $GL(\mathbb{R}^n)$ chama-se **grupo de Lie de matrizes** quando é uma superfície (portanto uma variedade) $\mathcal{C}^\infty$ do espaço $M(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.*

Definição 2.3 *Dado um grupo de Lie de matrizes $G \subset GL(\mathbb{R}^n)$, o espaço vetorial tangente a G no ponto I, $T_I G$, chama-se **álgebra de Lie** do grupo G.*

Dessa forma, o espaço vetorial tangente ao grupo de Lie $O(\mathbb{R}^n)$, na matriz identidade é uma álgebra de Lie, pois sabendo que $T_I(O(\mathbb{R}^n))$ é o conjunto das matrizes anti-simétricas, é fácil ver que, o colchete de duas matrizes anti-simétricas é ainda uma matriz anti-simétrica. Também, o espaço vetorial tangente ao grupo de Lie $SL(\mathbb{R}^n)$, na matriz identidade é uma álgebra de Lie, pois dados $A, B \in T_I(SL(\mathbb{R}^n))$ segue que $\mathrm{tr}([A,B]) = 0$, já que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Definição 2.4 *Um **campo** X **de vetores** tangente a um grupo de Lie G é uma aplicação que a cada ponto $p \in G$ corresponde um vetor X_p de T_pG, onde X_p denota o valor do campo X no ponto $p \in G$. Um campo X de vetores tangentes a um grupo de Lie G, se diz invariante pela esquerda quando $X_{xy} = dL_x(X_y)$, quaisquer que sejam $x, y \in G$. Os conjuntos dos campos invariantes pela esquerda de um grupo de Lie será denotado por LG.*

Indicamos por e o elemento identidade de G. Observe que um campo invariante à esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e, pois $X_{xe} = dL_x(X_e)$. Veja também que LG é um espaço vetorial, pois

$$\begin{aligned}(X+\alpha Y)_{xy} &= X_{xy} + \alpha Y_{xy} \\ &= dL_x(X_y) + \alpha dL_x(Y_y) \\ &= dL_x(X_y + \alpha Y_y) \\ &= dL_x(X+\alpha Y)_y.\end{aligned}$$

Mostramos a seguir que o conjunto dos campos invariantes à esquerda LG é isomorfo ao espaço tangente de G em e e que se X está em LG, então X é diferenciável.

Proposição 2.5 *$i)$ A aplicação*

$$\begin{aligned}\alpha: \; LG &\to T_e(G) \\ X &\mapsto \alpha(X) = X_e,\end{aligned}$$

onde $T_x(G)$ indica o espaço tangente a G no ponto x, é um isomorfismo entre espaços vetoriais.
ii) Se $X \in LG$, então X é diferenciável.

Demonstração: *i)* É claro que α é linear, pois

$$\alpha(X+bY) = (X+bY)_e = X_e + bY_e = \alpha(X) + b\alpha(Y).$$

Mostraremos agora que α é sobrejetora. Seja $Z \in T_e(G)$ e defina um campo X em G por $X_x = dL_x(Z)$. Logo $X_{xy} = dL_{xy}(Z) = dL_x.dL_y(Z) = dL_x(X_y)$ e então $X \in LG$ e $\alpha(X) = X_e = dL_e(Z) = I(Z) = Z$. Finalmente, α é injetora, pois se $\alpha(X) = \alpha(Y)$ temos $X_e = Y_e$. Logo, dado $x \in G$ tem-se $X_x = dL_x(X_e) = dL_x(Y_e) = Y_x$.
ii) Para mostrar que X é diferenciável em $x \in G$, basta fazer a demonstração para x em uma vizinhança coordenada de e, pois $L_{x^{-1}}$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty$. Seja então $\theta : U \to \mathbb{R}^n$ uma vizinhança coordenada de e, com $\theta = (x^1, ..., x^n)$, $x^i : U \to \mathbb{R}$ e $x \in U$. Temos

$$X_x(x^i) = (dL_x.X_e)(x^i) = X_e.(x^i \circ L_x).$$

Na última passagem deveríamos ter $L_x(U) \subset U$. Então, seja $V \subset U$ uma vizinhança de e tal que $x, y \in V$. Devido a continuidade das operações de grupo, temos que $xy^{-1} \in U$. Fazemos agora para V , o mesmo processo que para U. Escrevendo $X_e = \sum_j c_j \dfrac{\partial}{\partial x^j}(e)$ onde c_j são constantes, temos

$$X_x(x^i) = \sum_j c_j \frac{\partial(x^i \circ L_x)}{\partial x^j}(e).$$

Seja agora $f^i : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f^i(x,y) = x^i(x,y)$, ou seja, $f^i(x,y)$ é a i-ésima coordenada do produto $xy = L_x(y)$. Então

$$X_x(x^i) = \sum_j c_j \frac{\partial(x^i \circ L_x(e))}{\partial x^j} = \sum_j c_j \frac{\partial(x^i(x,e))}{\partial x^j} = \sum_j c_j \frac{\partial(f^i(x,e))}{\partial x^j}.$$

Como as f^i são funções diferenciáveis de x, $X(x^i)$ é uma função diferenciável de x. Portanto X é diferenciável em $x \in V$. $\square$

Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço vetorial dos campos $\mathcal{C}^\infty$ tangentes a M. Para $f : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $[X,Y]$ como o campo

$$[X,Y](f) = X\left(Yf\right) - Y\left(Xf\right).$$

onde Xf significa a derivada direcional de f na direção de X, isto é, $Xf(x) = df_x(X(x))$. Com esta operação $\mathfrak{X}(M)$ é uma álgebra de Lie. Esta afirmação é útil na demonstração do fato que, o espaço dos campos invariantes à esquerda, LG, é uma álgebra de Lie.

Sejam G um grupo de Lie e LG o espaço dos campos invariantes à esquerda. Se mostrarmos que LG é fechado em relação a operação definida logo acima, teremos induzida uma estrutura de álgebra de Lie em LG. Para isso, devemos mostrar que

$$[X, Y]_{xy} = dL_x[X, Y]_y$$

para quaisquer que sejam $X, Y \in LG$ e $x, y \in G$. Porém, precisamos de um novo conceito e de uma proposição.

Definição 2.6 *Sejam M, N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \to N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dizemos que os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são φ-relacionados se $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.*

Proposição 2.7 *Seja $\varphi : M \to N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, onde M, N são variedades diferenciáveis. Se $X, X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ são φ-relacionados respectivamente com $Y, Y_1 \in \mathfrak{X}(N)$, então $[X, X_1]$ é φ-relacionado com $[Y, Y_1]$.*

Demonstração: Ver Proposição 1.6.2 em [5]. $\square$

Finalmente, concluímos que o conjunto dos campos invariantes à esquerda, é uma álgebra de Lie de G.

Corolário 2.8 *Se $X, Y \in LG$, então $[X, Y] \in LG$, ou seja, LG é uma subálgebra de $\mathfrak{X}(M)$. Em particular, LG é uma álgebra de Lie de G.*

Demonstração: Se $X \in LG$ e $x \in G$, então X é L_x-relacionado com si mesmo. De fato

$$\begin{aligned} dL_x \circ X(y) &= dL_x.X_y = X_{xy} \\ X \circ L_x(y) &= X(xy) = X_{xy}, \end{aligned}$$

ou seja, $dL_x \circ X = X \circ L_x$. Logo, da proposição anterior segue que $[X, Y]$ é L_x-relacionado com $[X, Y]$, ou seja $dL_x[X, Y](y) = [X, Y] \circ L_x(y)$. Isso implica que

$$dL_x[X, Y]_y = [X, Y](xy) = [X, Y]_{xy}.$$

Portanto, $[X,Y] \in LG$. $\square$

Como LG é uma álgebra de Lie de G, a partir de agora, passemos a denotar LG por $\mathfrak{g}$, que é a notação usada no capítulo anterior.

Ressaltamos que, como $LG = \mathfrak{g}$ é isomorfo a T_eG, podemos introduzir em T_eG um estrutura de álgebra de Lie.

Definição 2.9 *Se G e H são grupos de Lie e o homomorfismo de grupos $\varphi : G \to H$ é aplicação diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$, chamamos φ de* ***homomorfismo de Lie****. Se φ é difeomorfismo e um isomorfismo de grupos, então φ é chamado* ***isomorfismo de Lie****. Se $\varphi : V \to H$ é diferenciável, onde V é uma vizinhança em G, tal que $x, y, x.y \in V$ acarreta $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$, então φ é chamado de* ***homomorfismo local de Lie****. Analogamente, definimos* ***isomorfismo local de Lie****.*

A definição de **representação de um grupo de Lie** num espaço vetorial, é análoga à definição de representação de uma álgebra de Lie, ou seja, dado um espaço vetorial V e um grupo de Lie G, a representação de G em V é um homomorfismo $\rho : G \to GL(V)$.

A seguir, definimos subgrupos de Lie, os quais são subgrupos de grupos de Lie, que ao mesmo tempo são grupos de Lie com uma estrutura de subvariedade. A álgebra de Lie de um subgrupo de Lie, é uma subálgebra da álgebra de Lie do grupo de Lie e coincide com o espaço tangente da subvariedade no elemento neutro. Um dos resultados centrais que discutimos logo mais, é o da construção de um subgrupo de Lie com uma determinada subálgebra de Lie. E isso é feito, recorrendo ao teorema de Frobenius.

Definição 2.10 *Um par (H, φ) é chamado* ***subgrupo de Lie*** *do grupo de Lie G, se*

i) H é um grupo de Lie.

ii) $\varphi : H \to G$ é uma imersão injetora e é um homomorfismo.

Mas será que se (H, φ) é um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G, e se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ são suas respectivas álgebras de Lie, então $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$?

Essa é uma pergunta natural de se fazer, no entanto, necessitamos dos resultados que seguem para respondê-la.

Lema 2.11 *Sejam G e H são grupos de Lie e $\varphi : V \to H$ um homomorfismo de Lie, onde $V \subset G$ é vizinhança da identidade. Então, a aplicação $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ induzida por $d\varphi : T_e(G) \to T_e(H)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração: Pela continuidade do produto em G, existe uma vizinhança da identidade $U \subset V$ tal que para todo $x, y \in U$ tem-se $x.y \in V$. Logo para todo $x, y \in V$ temos,

$$(L_{\varphi(x)} \circ \varphi)(y) = (\varphi \circ L_x)(y).$$

Então,

$$\begin{aligned} d\varphi(X)_{\varphi(x)} &= dL_{\varphi(x)} \circ d\varphi(X_e) \\ &= d(L_{\varphi(x)} \circ \varphi)(X_e) \\ &= d(\varphi \circ L_x)(X_e) \\ &= d\varphi \circ dL_x(X_e) \\ &= d\varphi(X_x), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$ e todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo X e $d\varphi(X)$ são φ-relacionados em U e portanto, da Proposição 2.7, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ temos

$$d\varphi([X, Y])_e = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]_{\varphi(e)}.$$

Isso conclui a demonstração. □

Corolário 2.12 *Grupos de Lie localmente isomorfos tem álgebras de Lie isomorfas.*

Finalmente, podemos mostrar o seguinte resultado:

Corolário 2.13 *Se (H, φ) é um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G, com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{h}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Nosso objetivo agora é estudar a recíproca desse corolário, ou seja: dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_1$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo G, existe um subgrupo de Lie (H, φ) de G tal que $\mathfrak{h}$ é isomorfo a $\mathfrak{g}_1$?

Apresentamos agora alguns conceitos novos que, posteriormente, nos permitem responder essa questão.

Definição 2.14 *Dados (H_1, φ_1) e (H_2, φ_2) subgrupos de Lie do grupo de Lie G, dizemos que (H_1, φ_1)* ***é equivalente a*** *(H_2, φ_2) se, e somente se, existe um isomorfismo de Lie $\varphi : H_1 \to H_2$, tal que $\varphi_2 \circ \varphi = \varphi_1$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} & G & \\ H_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\varphi"] & & H_2 \arrow[ul, "\varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

Cada classe de equivalência desta relação possui um representante em G, que chamaremos de (H, i), onde $i : H \to G$ é uma imersão e inclusão. Sempre que falarmos em unicidade de subgrupos de Lie, estaremos nos referindo à essas classes de equivalência.

Definimos uma distribuição numa variedade diferenciável, bem como, alguns conceitos referentes a essa distribuição.

Definição 2.15 *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma* ***distribuição k-dimensional em*** *M, é uma escolha que associa a cada $m \in M$, um subespaço k-dimensional de $T_m(M)$. Diremos que a distribuição é diferenciável, quando para cada m em M, existe uma vizinhança V de m, onde se definem k campos de vetores diferenciáveis que geram a distribuição. Se $\mathfrak{D}$ é uma distribuição e se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $x \in M$, tem-se que $X_x \in \mathfrak{D}(x)$, diremos que $X \in \mathfrak{D}$, onde $\mathfrak{D}(x)$ indica o subespaço de $T_x(M)$ determinado por $\mathfrak{D}$. Dizemos que uma distribuição é* ***involutiva*** *se e somente se, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{D}$ tivermos $[X, Y] \in \mathfrak{D}$. Uma* ***variedade integral*** *para $\mathfrak{D}$ é qualquer subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $T_x(N) \subset \mathfrak{D}(x)$, para todo $x \in N$. Diremos que $\mathfrak{D}$ é integrável se por cada $X \in M$ passa uma variedade integral de $\mathfrak{D}$.*

O próximo resultado, conhecido por Teorema de Frobenius, fornece uma condição suficiente para que uma distribuição diferenciável seja integrável. Este resultado é apenas enunciado e sua demonstração se encontra em [23], Teorema 1.6.

Teorema 2.16 (de Frobenius) *Seja $\mathfrak{D}$ uma distribuição k-dimensional, involutiva e $\mathcal{C}^\infty$ em M. Então existe uma variedade integral de $\mathfrak{D}$ passando por m, para todo $m \in M$. Ou seja, existe um sistema cúbico de coordenadas (U, φ) que está centrado em m, com funções coordenadas $x_1, ..., x_n$ tal que as fatias x_i , que são constantes, com $i = k+1, ..., n$,* *são variedades integrais de $\mathfrak{D}$. Se (N,ψ) é uma variedade integral conexa de $\mathfrak{D}$ tal que $\psi(N) \subset U$, então $\psi(N)$ está contida em uma dessas fatias.*

O Teorema de Frobenius possui caractér local, no sentido que a existência de variedades integrais para $\mathfrak{D}$ é garantida nas vizinhanças de qualquer ponto de M. A globalização das variedades integrais é feita através do conceito de variedade integral maximal, que é uma variedade integral de $\mathfrak{D}$ que não está contida propriamente em nenhuma outra. Dessa forma, tem-se o seguinte resultado sobre a unicidade de variedades integrais:

Teorema 2.17 (de Frobenius global) *Se $\mathfrak{D}$ é uma distribuição k-dimensional, involutiva e $\mathcal{C}^\infty$ em M, então por todo ponto $m \in M$ passa uma única variedade integral conexa maximal de $\mathfrak{D}$.*

A demonstração desse teorema também se encontra em [23], Teorema 1.64. Vale ressaltar que a unicidade das variedades integrais maximais garante que duas variedades maximais, ou são disjuntas, ou coincidentes.

Na demonstração do próximo resultado, usamos o teorema da forma local para imersões em variedades, o qual encontra-se demonstrado em [15].

Lema 2.18 *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis. Se $\psi : M \to N$ é $\mathcal{C}^\infty$ e $\varphi : P \to N$ é uma imersão bijetora $\mathcal{C}^\infty$, com $\psi(M) \subset \varphi(P)$, então a única aplicação $\xi : M \to P$, tal que $\varphi \circ \xi = \psi$, é $\mathcal{C}^\infty$ se, e somente se, ξ for contínua.*

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que, $P = \mathbb{R}^p$ e $N = \mathbb{R}^n$. Dado $m \subset M$, temos que $\xi(m) \subset P$. Mas φ é uma imersão, assim $\xi(m)$ é valor regular de $\varphi : P \to N$. Pelo teorema da forma local para imersões em variedades, existe um sistema de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^p$ em P com $\xi(m) \subset U$ e um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty$, $y : V \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ ($V \subset N$ aberto), tal que $\varphi(U) \subset V$ e $\varphi_{xy} = y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ é da forma $\varphi_{xy}(w) = (w, 0)$. Como ξ é contínua, podemos encontrar um sistema de coordenadas $z : Z \to \mathbb{R}^m$ em M, com $m \in Z$, tal que $\xi(Z) \subset U$. Portanto,

$$(\varphi \circ \xi)_{zy} = y \circ \varphi \circ \xi \circ z^{-1} : z(Z) \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

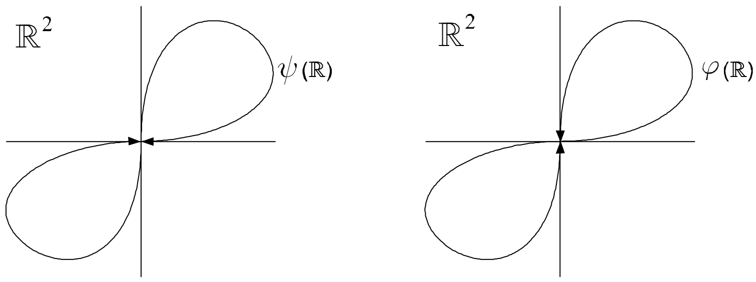
é da forma

$$(\varphi \circ \xi)_{zy} = \varphi_{xy}(\xi_{zx}) = (\xi_{zx}, 0).$$

Como $\varphi \circ \xi \in \mathcal{C}^\infty$, então $(\varphi \circ \xi)_{zy} \in \mathcal{C}^\infty$. Assim $\xi_{zx} \in \mathcal{C}^\infty$ e portanto, $\xi \in \mathcal{C}^\infty$. A recíproca desse resultado é imediata. $\square$

Apresentamos agora um exemplo onde não se aplica esse Lema.

Exemplo 2.4 *Consideremos $M = P = \mathbb{R}$ e $N = \mathbb{R}^2$. Sejam as aplicações $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas pelos gráficos abaixo. Note que quando $t \to \pm\infty$ tem-se que, $\psi(t) \to 0$ ao longo do eixo horizontal e $\varphi(t) \to 0$ ao longo do eixo vertical. Suponhamos que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.*



Observe que φ e ψ possuem exatamente a mesma imagem. Note também que ξ não é contínua, pois

$$\xi^{-1}(-1,1) = \psi^{-1} \circ \varphi(-1,1)$$

é composta da origem e de dois conjuntos abertos da forma (a, ∞) e $(-\infty, -a)$, ou seja, a imagem inversa de aberto não é aberto.

O resultado que segue, mostra que todo grupo de Lie é gerado por uma vizinhança da identidade.

Lema 2.19 *Se G é um grupo de Lie conexo e U é uma vizinhança de e, então $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$, onde U^n é formado por todos dos produtos de n fatores de U.*

Demonstração: Tomemos $V = U \cap U^{-1}$ que é também uma vizinhança de e e $V^{-1} = V$. Seja

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subset G,$$

onde $V^n = \bigcup\limits_{x \in V} xV^{n-1}$. É claro que H é subgrupo de G, pois dados $h_1, h_2 \in H$ tem-se que, $h_1 h_2 \in H$ e $h_1^{-1} \in H$. Como H é aberto, o conjunto gH, chamado de classe lateral à esquerda de H em G determinada por g, é aberto para todo $g \in G$. Por outro lado,

$$G = \bigcup_{g \in G} gH = H \cup (\bigcup_{g \notin G} gH).$$

Assim $H = G - \bigcup_{g \notin G} gH$ e portanto H é fechado em G. Mas G é conexo, logo $G = H$ e então $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. □

Agora podemos mostrar a recíproca do Corolário 2.13.

Teorema 2.20 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $\mathfrak{g}_1$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então, existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ com algebra de Lie $\mathfrak{h}$ de modo que $d\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_1$.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos a existência do subgrupo de Lie conexo H de G. Definamos a distribuição $\mathfrak{D}$ em G da seguinte forma

$$\mathfrak{D}(x) = \{X_x;\ X \in \mathfrak{g}_1\}.$$

Se mostrarmos que $\mathfrak{D}$ é involutiva, então a variedade integral conexa maximal, dada pelo Teorema 2.17, é a candidata natural a (H, φ) com φ sendo a aplicação inclusão.

Afirmamos que $\mathfrak{D}$ é involutiva. De fato, como $X, Y \in \mathfrak{D}$, então $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ e por $\mathfrak{g}_1$ ser fechado para o colchete, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}_1$. Pela definição de $\mathfrak{D}$, $[X, Y]_x \in \mathfrak{D}(x)$ para todo x e assim $[X, Y] \in \mathfrak{D}$. Observe também que a dimensão de $\mathfrak{D}$ é igual a dimensão de $\mathfrak{g}_1$.

Afirmamos que a variedade integral conexa maximal de $\mathfrak{D}$ passando por e, é um subgrupo de G. De fato, seja H tal variedade e seja $x \in H$. Então

$$L_{x^{-1}}(H) = \{x^{-1}h;\ h \in H\}$$

é também subvariedade integral de $\mathfrak{D}$ passando por e, já que $\mathfrak{D}$ é invariante por translações à esquerda. Como H é uma variedade integral conexa maximal temos que $x^{-1}H \subset H$ e dessa forma, segue que H é um subgrupo de G.

Diante disso, resta mostrar que a estrutura de grupo induzida por G em H, é compatível com a estrutura diferenciável de H como variedade integral de $\mathfrak{D}$. Denotemos por ω e ξ os produtos de G e H respectivamente, e por i e j as inclusões $H \subset G$ e $H \times H \subset G \times G$. Seja $\omega \circ j = \psi$. Temos que i é uma imersão injetora e que $i \circ \xi = \psi$ é $\mathcal{C}^\infty$. Queremos mostrar que ξ é $\mathcal{C}^\infty$. Pelas considerações acima e pelo Lema 2.18, devemos mostrar apenas que ξ é contínua. Em se tratando de um problema local, podemos supor que $G = \mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão de G. Seja $h \in H^k$, onde k é a dimensão de H e

$m \in \xi^{-1}(h)$. Consideremos em torno de h uma fatia V, também contida numa vizinhança U de $i(h)$ em G, dada pelo Teorema 2.16. Afirmamos que $i(H)$ intercepta U numa certa quantidade de componentes conexas abertas, cada uma numa fatia de U. Essa quantidade é enumerável, pois H possui base enumerável. Diante disso, mostraremos que ξ é contínua. Note que, como ψ é contínua, segue que existe um aberto $W \subset M$ tal que $m \in W$ e $\psi(W) \subset U$. Tomemos a componente conexa de m neste aberto, a qual é um aberto que chamamos de W. Afirmamos que $\xi(W) \subset V$. De fato, $\psi(W)$ é conexo e está contido numa quantidade enumerável de fatias. Tomemos a projeção

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^k & \rightarrow & \mathbb{R}^{n-k} \\ & (u,v) & \mapsto & u. \end{array}$$

Note que o conjunto $\pi \circ \psi(W)$ reduz-se a um ponto, pois este conjunto é conexo e enumerável. Dessa forma, $\psi(W)$ está contido em uma única fatia de U, a qual deve ser V, já que $h \in V$. Com isso concluímos que ξ é contínua.

Portanto, concluímos que o produto induzido em H por G é compatível com a estrutura de variedade de H, de modo que H é um grupo de Lie, melhor dizendo, subgrupo de Lie.

Para finalizar a demonstração, vamos mostrar a unicidade do subgrupo de Lie conexo H de G. Suponhamos que (K, α) seja outro subgrupo de Lie conexo de G, com $d\alpha(\mathfrak{k}) = \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{k}$ é a álgebra de Lie de K. Por definição, (K, α) é uma variedade integral de $\mathfrak{D}$ definida na demonstração da unicidade. Do fato de (H, i) ser um subgrupo máximo, segue que $\alpha(K) \subset i(H)$ e portanto existe uma única aplicação $\eta : K \rightarrow H$, tal que $i \circ \eta = \alpha$. Claramente, η é diferenciável e assim é um homomorfismo de Lie injetor. Além do mais, η não é singular, logo é um difeomorfismo numa vizinhança de e. Pelo Lema 2.19, concluímos que η é sobrejetora. Portanto, η é um isomorfismo entre grupos de Lie e isto prova a unicidade de H. □

Dessa forma, é natural termos o seguinte corolário.

Corolário 2.21 *Existe uma correspondência bijetora entre subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie e as subálgebras da sua álgebra de Lie.*

Proposição 2.22 *Sejam G e H grupos de Lie com as respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Se $\Gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo, então existe uma vizinhança V de e em G e uma aplicação diferenciável $\varphi : V \rightarrow H$, tal que $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$ sempre que $a, b, a.b \in V$*

e tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$ *tem-se que,* $d\varphi(X) = \Gamma(X)$*. Além disso, se existirem dois homomorfismos diferenciáveis* $\varphi, \psi : G \to H$ *com* $d\varphi = d\psi = \Gamma$ *e se* G *for conexo, então* φ *e* ψ *são isomorfas.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de $G \times H$ e

$$\mathfrak{k} = \{(X, \Gamma(X));\ X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

É imediato que $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. De fato, tome $(X, \Gamma(X))$ e $(Y, \Gamma(Y))$ em $\mathfrak{k}$. Temos que

$$[(X, \Gamma(X)), (Y, \Gamma(Y))] = ([X, Y], [\Gamma(X), \Gamma(Y)]) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

Pelo Teorema 2.20, existe um único subgrupo de Lie conexo $K \subset G \times H$ com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Seja

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & G \times H & \to & G \\ & (g, h) & \mapsto & g \end{array}$$

e definamos $\theta = \pi_1 |_K$. Assim, se $(X_e, \Gamma(X)_e) \in T_e(K)$ segue que

$$d\theta_{(e,e)}(X_e, \Gamma(X)_e) = X_e \in T_e(G).$$

Portanto $d\theta(X_e, \Gamma(X)_e) = X \in \mathfrak{g}$, onde $d\theta : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ é definido como no Lema 2.11. Assim, $d\theta_{(e,e)}$ é um isomorfismo e consequentemente existe uma vizinhança aberta W de (e, e) em K, tal que θ leva W difeomorficamente sobre V, com $e \in V \subset G$. Tomando

$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & G \times H & \to & H \\ & (g, h) & \mapsto & h, \end{array}$$

então a aplicação $\varphi : V \to H$ dada por $\varphi(x) = \pi_2 \circ \theta^{-1}(x)$ é diferenciável, $\theta^{-1}(x) = (x, \varphi(x))$ e $W = \{(x, \varphi(x));\ x \in V\}$. Assim, se $a, b, a.b \in V$, então

$$\begin{aligned} \varphi(a.b) &= \pi_2 \circ \theta^{-1}(a.b) \\ &= \pi_2((a, \varphi(a)).(b, \varphi(b))) \\ &= \pi_2(a.b, \varphi(a).\varphi(b)) \\ &= \varphi(a).\varphi(b). \end{aligned}$$

E mais ainda, definindo $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ por $d\varphi(X)_e = d\varphi_e(X_e)$ obtemos

$$d\varphi_e(X_e) = d\pi_2 \circ d\theta_e^{-1}(X_e) = d\pi_2(X_e, \Gamma(X)_e).$$

Então $\Gamma(X)_e = d\varphi(X)_e$ e da unicidade temos $\Gamma(X) = d\varphi(X)$. Portanto, demonstramos a existência de φ e nos resta agora demonstrar sua unicidade. Sejam $\varphi, \psi : G \to H$ satisfazendo as condições acima. Definimos as imersões injetoras, $\phi, \mu : G \to G \times H$ por

$$\phi(x) = (x, \varphi(x)) \qquad \text{e} \qquad \mu(x) = (x, \psi(x)).$$

É imediato que as imagens $\phi(G) = K$ e $\mu(G) = L$ são subgrupos de Lie conexos de $G \times H$ com álgebras de Lie $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{l}$ respectivamente. As aplicações

$$d\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k} \qquad \text{e} \qquad d\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$$

são isomorfismos e sabendo-se que $d\varphi = d\psi$, concluímos que $d\phi = d\mu$. Portanto $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}$. Já que K e L são grupos de Lie conexos associados à mesma álgebra de Lie, segue que $K = L$ e daí $(x, \varphi(x)) = (x, \psi(x))$ para todo $x \in G$. Portanto φ e ψ são isomorfos. $\square$

Corolário 2.23 *Se dois grupos de Lie possuem álgebras de Lie isomorfas, então eles são localmente isomorfos.*

Finalizamos essa seção enunciando um importante resultado conhecido como Teorema de Ado. Sua demonstração se encontra na bibliografia [2] no capítulo 1.

Teorema 2.24 *Toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*

Note que decorre diretamente do Teorema de Ado e do Corolário 2.23 que todo grupo de Lie é isomorfo a um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$.

2.2 Aplicação Exponencial

Nosso objetivo aqui é destacar a relação existente entre grupos de Lie e álgebras de Lie.

Afim de estabelecermos um vínculo entre os grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie, consideramos a aplicação exponencial, que é uma ferramenta muito importante, que nos permite transportar algumas propriedades das álgebras de Lie para os grupos de Lie e vice e versa.

Depois que definimos a aplicação exponencial, apresentamos algumas propriedades e resultados importantes que possibilitam a demonstração de um dos resultados mais importantes dessa seção, o Teorema de Cartan.

Finalizamos a seção, expondo algumas propriedades e resultados da representação adjunta, que abrangem esse estudo. A bibliografia utilizada se encontra em [5], [7], [11], [16], [22] e [23].

Sejam $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G e $X \in \mathfrak{g}$. Pela teoria das equações diferenciáveis ordinárias, sabemos que dado $x \in G$, existem abertos $U \subset G$ e $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ com $x \in U$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ tal que para todo y em U temos que

$$\varphi(y, 0) = y \qquad \text{e} \qquad \frac{d\varphi}{dt}(y, t) = X_{\varphi(y,t)}.$$

φ é chamado **fluxo local** do campo X. Agora, tomando $x = e$ adotamos a notação $\varphi(e, t) = \varphi(t) = \varphi_t$ para uma trajetória única de X em e. Temos a seguinte proposição:

Proposição 2.25 *Num grupo de Lie G, φ_t é definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to G$ assim definida é um subgrupo de Lie.*

Demonstração: Devemos mostrar que $(\varphi(\mathbb{R}), i)$ é um subgrupo de Lie de G. É fácil ver que $i : \varphi(\mathbb{R}) \to G$ é uma imersão injetora e é um homomorfismo. Resta mostrar que $\varphi(\mathbb{R})$ é grupo de Lie, ou seja, dados φ_t, $\varphi_s \in \varphi(\mathbb{R})$ tem-se que $\varphi_t.\varphi_s$ e φ_t^{-1} são diferenciáveis em $\varphi(\mathbb{R})$. Tome $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fazendo $\varphi_{t_0} = z$ e definindo $\overline{\varphi}_t = z^{-1} \circ \varphi_t$ temos $\overline{\varphi}_{t_0} = e$. Como $X \in \mathfrak{g}$, então

$$X_{\overline{\varphi_t}} = X_{z^{-1} \circ \varphi_t} = dL_{z^{-1}} \circ X_{\varphi_t} = dL_{z^{-1}} \circ d\varphi_t = \frac{d\overline{\varphi}_t}{dt}.$$

Logo $\overline{\varphi}_t$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = \quad X_x \\ x(t_0) & = \quad e. \end{cases} \tag{2.2}$$

Suponhamos que $t_0 > 0$ e tomemos agora $\psi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to G$ dada por $\psi(t) = \varphi_{t-t_0}$. É claro que ψ também é solução de 2.2 definida em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Logo, como o sistema possui solução única, segue que $\overline{\varphi}_t = \varphi_{t-t_0}$ pode ser estendida a $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Consequentemente $\varphi_t = \varphi_{t_0} \circ \overline{\varphi}_t$ pode ser estendida a $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e então a todo t em $\mathbb{R}$. Além disso, como para todo t temos $(\varphi_{t_0})^{-1}\varphi_t = \varphi_{t-t_0}$, então $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ e $\varphi_{t+s} = \varphi_t.\varphi_s$. Como o fluxo

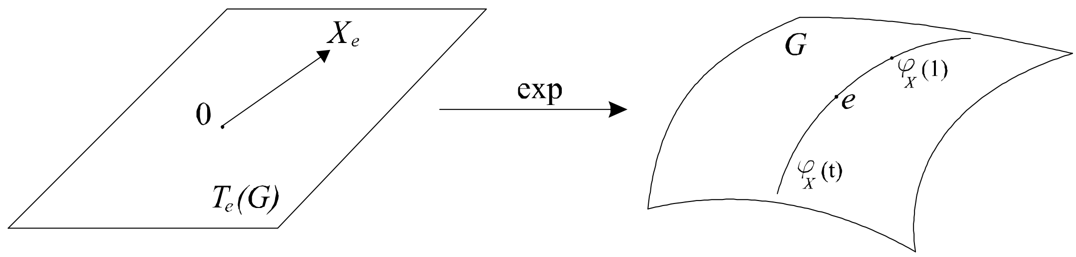
φ é diferenciável, segue o desejado. $\square$

Definimos agora a aplicação exponencial e em seguida apresentamos algumas de suas propriedades.

Definição 2.26 *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $X \in \mathfrak{g}$. Se indicarmos por φ_X a trajetória de X pela origem e, então definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rlcl} \exp: & \mathfrak{g} \approx T_eG & \to & G \\ & X & \mapsto & \varphi_X(1), \end{array}$$

*chamada **aplicação exponencial** de G.*



Primeiramente note que $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(st)$ para quaisquer que sejam s e t em $\mathbb{R}$. De fato, se $\psi(t) = \varphi_X(st)$, teremos que

$$\psi(0) = \varphi_X(0) = e \quad \text{ e } \quad \frac{d\psi}{dt}(t) = s\frac{d\varphi_X}{dt}(st) = sX_{\varphi_X(st)} = sX_{\psi(t)}.$$

Então, ψ é solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} x(0) &= e \\ \dfrac{dx}{dt} &= sX_{X(t)}. \end{cases}$$

Assim $\psi = \varphi_{sX}$, já que φ_{sX} também é solução do sistema.

Proposição 2.27 *A aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1X)(\exp t_2X)$

(ii) $\exp(-sX) = (\exp sX)^{-1}$

(iii) $\exp$ *é diferenciável.*

(iv) $\exp$ *é um difeomorfismo numa vizinhança de e.*

Para quaisquer que sejam $s, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $X \in G$.

Demonstração: (i) Note que

$$\begin{array}{rcl} \exp(t_1+t_2)X & = & \varphi_{(t_1+t_2)X}(1,e) = \varphi_X(t_1+t_2,e) = \varphi_X(t_1,\varphi_X(t_2,e)) \quad \text{e} \\ (\exp t_1X)(\exp t_2X) & = & \varphi_{t_1X}(1,e)\varphi_{t_2X}(1,e) = \varphi_X(t_1,e)\varphi_X(t_2,e). \end{array}$$

Definimos as curvas

$$\psi_1(t) = \varphi_X(t_1,e)\varphi_X(t,e) \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = \varphi_X(t_1,\varphi_X(t,e)).$$

Como X é invariante à esquerda, temos que ψ_1 e ψ_2 são soluções de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & e \\ \dfrac{dx}{dt} & = & X_{X(t)} \end{array} \right.$$

e portanto segue o desejado.

(ii) Esse resultado é imediato, pois

$$e = \exp 0 = \exp(s-s)X = (\exp sX)(\exp(-sX)).$$

(iii) Considere o campo vetorial

$$\begin{array}{rrcl} V: & G\times\mathfrak{g} & \to & TG \\ & (y,X) & \mapsto & (X_y,0), \end{array}$$

onde TG é o fibrado tangente a G. A trajetória ψ de V por $(e,X)\in G\times\mathfrak{g}$, é dada por

$$\psi(t,X) = (\varphi_X(t),X) = (\exp tX, X),$$

pois $\psi'(t) = (X_{\varphi_X(t)},0) = V(\varphi_X(t),X)$. Tomando agora

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1: & G\times\mathfrak{g} & \to & G \\ & (x,X) & \mapsto & x, \end{array}$$

a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} Exp: & \mathbb{R}\times\mathfrak{g} & \to & G \\ & (t,X) & \mapsto & \exp tX \end{array}$$

pode ser expressa como a composta de aplicações $\psi\circ\pi_1$. Como o fluxo ψ e π_1 são diferenciáveis, segue que Exp é diferenciável e portanto exp é diferenciável em $\mathfrak{g}$.

(iv) Seja $X\in\mathfrak{g}$ e $\gamma(t)=tX$, temos que $\gamma(0)=0$ e $\dfrac{d\gamma}{dt}(0)=X$. Assim

$$(d\exp)_0X = (d\exp)_0\frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{d(\exp tX)}{dt}\mid_{t=0} = \frac{d\varphi_X(t)}{dt}\mid_{t=0} = X_{\varphi_X(0)} = X_e.$$

Então $(d\exp)_0 X = X$, ou seja, $(d\exp)_0$ é não singular. Logo, pelo teorema da função inversa, exp é um difeomorfismo local. $\square$

Sabemos que todo homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável. Nosso objetivo agora, é mostrar que todo homomorfismo contínuo entre grupos de Lie é diferenciável, para tanto precisamos dos próximos resultados:

Lema 2.28 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\{X_1, ..., X_n\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, então a aplicação*

$$\begin{array}{rlcl} \psi : & \mathbb{R}^n & \to & G \\ & (t_1, ..., t_n) & \mapsto & (\exp t_1 X_1). \cdots .(\exp t_n X_n). \end{array}$$

é diferenciável e é não singular em $0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Já que exp é diferenciável, é claro que ψ é diferenciável. Note agora que se $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\psi(t) = R_{a_i} \circ L_{b_i} \circ \exp(t_i X_i),$$

onde $a_i = \exp(t_{i+1} X_{i+1}) ... (\exp t_n X_n)$ e $b_i = (\exp t_1 X_1) ... \exp(t_{i-1} X_{i-1})$ para todo $i = 1, ..., n$. Temos que,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t) = dR_{a_i} \circ dL_{b_i} \circ \frac{d(\exp t_i X_i)}{dt_i}.$$

Logo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t) \mid_{t=0} = dR_e \circ dL_e \circ X_i \mid_e = X_i \mid_e$$

e portanto, $d\psi_0 : \mathbb{R}^n \to T_e G$ tem por matriz jacobiana $(X_1 \mid_e ....X_n \mid_e)$, onde os $X_i \mid_e$ denotam os vetores colunas da matriz. Disso segue que, $d\psi_0$ é não singular. $\square$

Teorema 2.29 *Seja G um grupo de Lie. Se $\varphi : \mathbb{R} \to G$ é um homomorfismo contínuo, então φ é diferenciável.*

Demonstração: Devemos mostrar que φ é diferenciável numa vizinhança de zero em $\mathbb{R}$. Seja $V \subset G$ uma vizinhança de $e \in G$, a qual é difeomorfa a uma vizinhança de zero $U \subset \mathfrak{g}$ através da aplicação exponencial. Suponhamos que, se $X \in U$, então $tX \in U$ para todo $t \in [0,1]$. Seja agora $U' = \{\frac{1}{2}X;\ X \in U\} \subset U$ e escolhemos $t_0 \geq 0$ suficientemente pequeno para que $\mid t \mid \leq t_0$ implique que $\varphi(t) \in \exp U'$. Assim, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $\varphi(\frac{t_0}{n}) \in \exp U'$. Assim, determinamos X e Y em U' tais que

$$\exp X = \varphi(\frac{t_0}{n}) \quad \text{e} \quad \exp Y = \varphi(t_0)$$

e temos que

$$\exp(X)^n = \exp X \ ... \exp X = \exp(nX).$$

Como $\exp(X)^n = \varphi(t_0)$, então $\exp(nX) = \varphi(t_0) = \exp(Y)$. Vamos provar que $nX = Y$ e para isso é suficiente mostrarmos que $nX \in U'$. Faremos isso por indução. Suponha que $jX \in U'$ para todo $j = 1, ..., n-1$, então para $j = 1$ o resultado é imediato. Para $j > 1$, temos que $2jX \in U$. Assim, $(1+j)X = \left(\frac{j+1}{2j}\right) 2jX \in U$. Porém, $\exp(j+1)X = \varphi((j+1)\frac{t_0}{n})$ e como $\frac{j+1}{n} t_0 \leq t_0$, temos $\exp(j+1)X \in \exp U'$ e assim pela hipótese de indução $nX \in U'$. Portanto $nX = Y$. Seja agora $m \in \mathbb{Z}$, com $0 <\mid m \mid< n$. Se $m > 0$ tem-se que

$$\varphi(\frac{m}{n}t_0) = (\varphi(\frac{t_0}{n}))^m = (\exp X)^m = \exp(\frac{Y}{n})^m = \exp(\frac{m}{n}Y).$$

Se $m < 0$ tem-se que

$$\varphi(\frac{m}{n}t_0) = (\varphi(-\frac{m}{n}t_0))^{-1} = \left(\exp(-\frac{m}{n}Y)\right)^{-1} = \exp(\frac{m}{n}Y).$$

Da continuidade de φ, segue que para todo $r \in \mathbb{R}$ com $0 <\mid r \mid \leq 1$, temos

$$\varphi(rt_0) = \exp(rt_0\frac{Y}{t_0}) = \exp rY.$$

Mas para todo $t \in \mathbb{R}$ com $0 <\mid t \mid \leq t_0$, existe $r \in \mathbb{R}$ com $0 <\mid r \mid \leq 1$, tal que $t = rt_0$ e então

$$\varphi(t) = \exp(rt_0\frac{Y}{t_0}) = \exp rY = \exp(\frac{t}{t_0}Y).$$

Portanto φ é diferenciável. $\square$

Finalmente, segue o esperado.

Teorema 2.30 *Todo homomorfismo contínuo $\varphi : H \to G$ entre grupos de Lie é diferenciável.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de H tal que $\dim(H) = n$. Tome uma base $\{X_1, ..., X_n\}$ de $\mathfrak{h}$ e a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to H$ como no Lema 2.28. Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança de zero e $U \subset H$ vizinhança de e tais que $\psi : V \to U$ seja um difeomorfismo. Pelo teorema anterior, as aplicações $\varphi_i : \mathbb{R} \to G$ dadas por $\varphi_i(t) = \varphi(\exp tX_i)$ são contínuas e portanto diferenciáveis. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(t_1, ..., t_n) &= \varphi((\exp t_1X_1). \cdots .(\exp t_nX_n)) \\ &= \varphi(\exp t_1X_1). \cdots .\varphi(\exp t_nX_n) \\ &= \varphi_1(t_1). \cdots .\varphi_n(t_n) \end{aligned}$$

é diferenciável para todo $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $x \in U$, $x = \psi\circ\psi^{-1}(x)$ e $\varphi(x) = \varphi(\psi\circ\psi^{-1}(x))$, ou seja, $\varphi\mid_U = (\varphi\circ\psi)\circ\psi^{-1}\mid_U$ é diferenciável. Para o caso em que x é um elemento qualquer de H não necessariamente em U, tem-se que

$$x \in x.U = \{x.u \ ; \ u \in U\},$$

que é difeomorfo a U em L_x. Assim, para todo $x.y \in x.U$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi(x.y) &= \varphi(x).\varphi(y) \\ &= L_{\varphi(x)} \circ \varphi(y) \\ &= L_{\varphi(x)} \circ \varphi(L_{x^{-1}}(x.y)) \\ &= L_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ L_{x^{-1}}(x.y), \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi\mid_{x.U} = L_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ L_{x^{-1}}\mid_{x.U}$que é diferenciável. □

No lema seguinte e em sua demonstração, o fato de uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to T_eG$ ter a propriedade de que $\dfrac{\varphi(t)}{t^3}$ é limitado para todo t em $\mathbb{R}$ suficientemente pequeno, é denotado por $O(t^3)$. Além disso, se $X \in T_eG$, então $\widetilde{X}$ denota o campo de $\mathfrak{g}$ tal que $\widetilde{X}_e = X$.

Lema 2.31 *Se G é um grupo de Lie e se $X, Y \in T_eG$, então*

(*a*) $(\exp tX)(\exp tY) = \exp(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3))$.

(*b*) $(\exp -tX)(\exp -tY)(\exp tX)(\exp tY) = \exp(t^2[X, Y] + O(t^3))$.

(*c*) $(\exp tX)(\exp tY)(\exp -tX) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$.

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ e $a \in G$, temos que

$$\widetilde{X}f(a) = \widetilde{X_a}(f) = dL_a \circ X(f) = X(f \circ L_a) = \frac{d(f \circ L_a \circ \alpha)}{du}\mid_{u=0},$$

onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ é uma curva tal que $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = X$. Portanto,

$$\widetilde{X} f(a) = \frac{d(f \circ L_a \circ \exp uX)}{du} \mid_{u=0} = \frac{d}{du} f(a \exp uX) \mid_{u=0} .$$

Analogamente, tem-se que

$$\widetilde{Y} f(a) = \frac{d}{du} f(a \exp uY) \mid_{u=0} .$$

Fixando s em $\mathbb{R}$, seja $\varphi(t) = f(\exp sX \cdot \exp tY)$. Logo

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} f(\exp sX \cdot \exp tY) = \frac{d}{dt}(f \circ L_{\exp sX} \circ \exp tY) = d(f \circ L_{\exp sX})_{\exp tY} \circ (d \exp)_{tY} \circ Y.$$

Por outro lado, temos que

$$\widetilde{Y}(f)(\exp sX \cdot \exp tY) = \frac{d}{du} f(\exp sX \cdot \exp tY \cdot \exp uY) \mid_{u=0} = d(f \circ L_{\exp sX})_{\exp tY} \circ (d \exp)_{tY} \circ Y.$$

Assim, $\varphi'(t) = \widetilde{Y(f)}(\exp sX \cdot \exp tY)$. Usando o mesmo raciocínio para $\widetilde{Y} f$ no lugar de f, tem-se que

$$\varphi''(t) = [\widetilde{Y}(\widetilde{Y} f)](\exp sX \cdot \exp tY).$$

Aplicando o teorema de Taylor a φ segue que

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!} t^2 + O(t^3),$$

ou seja,

$$f(\exp sX \cdot \exp tY) = f(\exp sX) + \widetilde{Y(f)}(\exp sX)t + \frac{t^2}{2}[\widetilde{Y}(\widetilde{Y} f)](\exp sX) + O(t^3). \quad (2.3)$$

Analogamente, para qualquer $F \in \mathcal{C}^\infty(G)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(\exp sX) &= (\widetilde{X} F)(\exp sX) \\ \frac{d^2}{ds^2} F(\exp sX) &= [\widetilde{X}(\widetilde{X} F)](\exp sX) \end{aligned}$$

$$F(\exp sX) = F(e) + s(\widetilde{X} F)(e) + \frac{s^2}{2}[\widetilde{X}(\widetilde{X} F)](e) + O(s^3). \quad (2.4)$$

Suponha que $f(e) = 0$. Aplicando a última expressão em 2.3 para $F = f$, $F = \widetilde{Y} f$ e $F = \widetilde{Y}(\widetilde{Y} f)$, temos que

$$\begin{aligned} f(\exp sX \cdot \exp tY) &= s(\widetilde{X} f)(e) + t(\widetilde{Y} f)(e) + \frac{s^2}{2}[\widetilde{X}(\widetilde{X} f)](e) + \frac{t^2}{2}[\widetilde{Y}(\widetilde{Y} f)](e) + \\ &\quad + st[\widetilde{X}(\widetilde{Y} f)](e) + O(s^3) + O(s^2 t) + O(s t^2). \end{aligned}$$

Fazendo $s = t$, tem-se que

$$f(\exp sX \cdot \exp tY) = t[(\widetilde{X + Y})f)](e) + t^2[(\frac{\widetilde{X}\widetilde{X}}{2} + \widetilde{X}\widetilde{Y} + \frac{\widetilde{Y}\widetilde{Y}}{2})f](e) + O(t^3). \quad (2.5)$$

Como a exponencial é um difeomorfismo numa vizinhança de $0 \in T_eG$ e o produto em G é contínuo, podemos escrever para t pequeno

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp Z(t),$$

para alguma função diferenciável $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_eG$. Aplicando a fórmula de Taylor a Z obtemos,

$$Z(t) = tZ_1 + t^2 Z_2 + O(t^3),$$

para quaisquer que sejam Z_1, Z_2 em T_eG. Seja $A : \mathbb{R} \to T_eG$ uma aplicação diferenciável tal que $A(0) = 0$. Pela fórmula de Taylor temos que,

$$\begin{aligned}
(f \circ \exp)(A(t) + O(t^3)) &= (f \circ \exp)(A(t)) + \int_0^1 \frac{d}{ds}(f \circ \exp)(A(t) + sO(t^3)).O(t^3)ds \\
&= (f \circ \exp)(A(t)) + (\int_0^1 \frac{d}{ds}(f \circ \exp)(A(t) + sO(t^3))ds)O(t^3).
\end{aligned}$$

Chamando de $g(t)$ essa última parcela, decorre que $\lim_{t\to 0} \dfrac{g(t)}{t^3} = 0$. Assim podemos escrever

$$(f \circ \exp)(A(t) + O(t^3)) = (f \circ \exp)(A(t)) + O(t^3).$$

Suponha que $f(e) = 0$. Diante disso e usando a equação 2.4 obtemos,

$$\begin{aligned}
f(\exp Z(t)) &= f(\exp t(Z_1 + tZ_2)) + O(t^3) \\
&= f(e) + t[(\widetilde{Z_1} + t\widetilde{Z_2})(f)](e) + \frac{t^2}{2}[(\widetilde{Z_1} + t\widetilde{Z_2})(\widetilde{Z_1} + t\widetilde{Z_2})(f)](e) + O(t^3) \\
&= t(\widetilde{Z_1}f)(e) + t^2(\widetilde{Z_2}f)(e) + \frac{t^2}{2}[(\widetilde{Z_1}(\widetilde{Z_1}f)](e) + \frac{t^3}{2}[(\widetilde{Z_1}(\widetilde{Z_2}f)](e) + \\
&\quad + \frac{t^3}{2}[(\widetilde{Z_2}(\widetilde{Z_1}f)](e) + \frac{t^4}{2}[(\widetilde{Z_2}(\widetilde{Z_2}f)](e) + O(t^3) \\
&= t(\widetilde{Z_1}f)(e) + t^2(\widetilde{Z_2}f)(e) + \frac{t^2}{2}[(\widetilde{Z_1}(\widetilde{Z_1}f)](e) + O(t^3).
\end{aligned}$$

Como podemos tomar as $f's$ como funções coordenadas de uma parametrização ψ em torno de e tal que $\psi(e) = 0$, então, comparando a equação acima com a equação 2.5 tem-se que,

$$\widetilde{X} + \widetilde{Y} = \widetilde{Z_1}$$

$$\frac{\widetilde{Z_1}\widetilde{Z_1}}{2} + \widetilde{Z_2} = \frac{\widetilde{X}\widetilde{X}}{2} + \widetilde{X}\widetilde{Y} + \frac{\widetilde{Y}\widetilde{Y}}{2}$$

e daí que $Z_1 = X + Y$, $Z_2 = \frac{1}{2}[X, Y]$, o que prova (a). Para provar (b), basta aplicar (a) :

$$\begin{aligned}(\exp -tX)(\exp -tY)(\exp tX)(\exp tY) &= \exp(-t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}[X,Y] \\ &\quad +O(t^3)).\exp(t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)) \\ &= \exp(t^2[X,Y] + O(t^3)),\end{aligned}$$

pois os demais termos que aparecem na igualdade acima, são de ordem no mínimo três e isso implica (b). A demonstração de (c) também segue da aplicação de (a), ou seja

$$\begin{aligned}(\exp tX)(\exp tY)(\exp -tX) &= \exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)).(\exp -tX) \\ &= \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3)).\end{aligned}$$

□

Como aplicação desse lema, apresentamos o seguinte resultado:

Corolário 2.32 *Sejam G um grupo de Lie, $X, Y \in T_eG \approx \mathfrak{g}$ e $x, y, \gamma : \mathbb{R} \to G$ curvas dadas por*

$$\begin{aligned}x(t) &= \exp tX \\ y(t) &= \exp tY \\ \gamma(t) &= x(\sqrt{t}).y(\sqrt{t}).x(\sqrt{t})^{-1}.y(\sqrt{t})^{-1}.\end{aligned}$$

Então, $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = [X, Y]$.

Demonstração: Sabendo que $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$, pela parte (b) do lema anterior, temos que

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\exp\sqrt{t}X)(\exp\sqrt{t}Y)(\exp -\sqrt{t}X)(\exp -\sqrt{t}Y) \\ &= \exp(t[X,Y] + O(t^3)).\end{aligned}$$

Logo,

$$\gamma(0) = e \qquad \text{e} \qquad \frac{d\gamma}{dt}(0) = (d\exp)_0([X,Y] + \frac{d}{dt}O(t^3)\ |_{t=0}) = I([X,Y]) = [X,Y].$$

□

Como outra aplicação do Lema 2.31 e o principal resultado dessa seção, apresentamos:

Teorema 2.33 (de Cartan) *Todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie.*

A fim de demonstrarmos esse teorema, precisamos encontrar uma vizinhança $V \subset \mathfrak{g}$ do zero, tal que

$$\exp(V \cap \mathcal{H}) = H \cap \exp V,$$

onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G e $\mathcal{H} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp tX \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$. Mas, para demonstrarmos esse fato, precisamos dos lemas que seguem.

Lema 2.34 *$\mathcal{H}$ é subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Observe que se $X, Y \in \mathcal{H}$, então $\exp \frac{t}{n}X, \exp \frac{t}{n}Y \in H$ para todo número n inteiro. Logo $[(\exp \frac{t}{n}X)(\exp \frac{t}{n}X)]^n \in H$, pois H é subgrupo. Pela parte (a) do Lema 2.31 tem-se que

$$\begin{aligned}\left((\exp \frac{t}{n}X)(\exp \frac{t}{n}X)\right)^n &= (\exp(\frac{t}{n}X + \frac{t}{n}Y + \frac{2}{2n^2}[X,Y] + O(\frac{t^3}{n^3}))^n \\ &= \exp(tX + tY + \frac{2}{2n}[X,Y] + O(\frac{t^3}{n^2})) \in H.\end{aligned}$$

Como H é fechado, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \exp(tX + tY + \frac{2}{2n}[X,Y] + O(\frac{t^3}{n^2})) = \exp t(X+Y) \in H$$

e então $X + Y \in \mathcal{H}$. □

Lema 2.35 *Seja $(t_iX_i)_i$ uma sequência em $\mathfrak{g}$, tal que $X_i \to X \in \mathfrak{g}$, $t_i \to 0$ e $t_i \neq 0$. Se $\exp\, t_iX_i \in H$ para todo i, então $\exp tX \in H$ para todo t.*

Demonstração: Como $\exp(-t_iX_i) = (\exp t_iX_i)^{-1} \in H$, então podemos supor que $t_i > 0$. Assim, para $t > 0$ definimos para cada $i \in \mathbb{N}$ a função

$$k_i(t) = [\frac{t}{t_i}] = \text{maior inteiro} \leq \frac{t}{t_i}.$$

Logo, $\frac{t}{t_i} - 1 \leq k_i(t) \leq \frac{t}{t_i}$. Como $t_i \to 0$, temos $t_ik_i(t) \to t$, e como $\exp t_iX_i \in H$ segue que

$$\exp t_ik_i(t)X_i = (\exp t_iX_i)^{k_i(t)} \in H.$$

Sendo H fechado e $\lim t_ik_i(t)X_i = tX$, temos que

$$\exp tX = \exp(\lim_{i\to\infty} t_ik_i(t)X_i) = \lim_{i\to\infty} \exp t_ik_i(t)X_i \in H.$$

□

Lema 2.36 *Seja $\mathcal{H}' \subset \mathfrak{g}$ um subespaço complementar de $\mathcal{H}$, então existe uma vizinhança V' de $0 \in \mathcal{H}'$ tal que, para todo $X' \in V'$, com $X' \neq 0$, tem-se que $\exp X' \notin H$.*

Demonstração: Primeiramente, seja $\langle\ ,\rangle$ um produto interno em $\mathcal{H}'$. Suponhamos por absurdo que para toda vizinhança V' de $0 \in \mathcal{H}'$, exista $X' \neq 0$ em V' tal que $\exp X' \in H$. Então, existe uma sequência $(X_i)_i$ com $X_i \in \mathcal{H}'$ e $0 < |X_i| \leq 1$, tal que $X_i \to 0$ e $\exp X_i \in H$. Tomamos o compacto

$$K = \{X' \in \mathcal{H}';\ 1 \leq |X'| \leq 2\}.$$

Observe que podemos ter $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $n_i X_i = Y_i \in K$ e é claro que $n_i \to \infty$. Como K é compacto, existe uma subsequência que indicaremos ainda por Y_i, tal que $Y_i \to Y \in K \subset \mathcal{H}'$. Sendo $X_i = \dfrac{1}{n_i} Y_i$, temos

$$\frac{1}{n_i} \to 0, \text{ pois } n_i \to \infty,$$

$$Y_i \to Y \text{ e } \exp \frac{1}{n_i} Y_i = \exp X_i \in H \text{ para todo } i.$$

Logo, pelo lema anterior, $Y \in \mathcal{H}'$ e portanto temos uma contradição. □

Lema 2.37 *A aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \to G$ dada dor $\varphi(X + X') = (\exp X)(\exp X')$ com $X \in \mathcal{H}$ e $X' \in \mathcal{H}'$, é um difeomorfismo em uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Tomemos X e X' numa vizinhança do $0 \in \mathfrak{g}$. Então, $\exp X$ e $\exp X'$ estão contidas em uma vizinhança de e. Em vista disso, podemos escrever

$$\exp X = (x_1, ..., x_n)$$

$$\exp X' = (x'_1, ..., x'_n).$$

Logo

$$\begin{aligned} \varphi(X + X') &= f(\exp X, \exp X') \\ &= (f_1(x_1, ..., x_n, x'_1, ..., x'_n) + \cdots + f_n(x_1, ..., x_n, x'_1, ..., x'_n)), \end{aligned}$$

onde $f : G \times G \to G$ é definida por $f(x, y) = xy$. Tomemos agora a curva $\alpha(t) = t(X + X')$, então $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = X + X'$. Temos que

$$d\varphi_e(X + X') = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t) \mid_{t=0} .$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi_e(X+X')^i &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)^i(t)\mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp tX \cdot \exp tX')^i \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f^{\,i}(tx_1, ..., tx_n, tx'_1, ..., tx'_n)\mid_{t=0} \\ &= x_i + x'_i \\ &= (X+X')^i \end{aligned}$$

e então, $d\varphi_e(X+X') = 0$ se, e somente se, $X+X'=0$, ou seja, $d\varphi_e$ é injetora. Pelo teorema da função inversa segue o desejado. □

Agora sim estamos aptos a demonstrar o Teorema de Cartan.

Demonstração: Tomemos $V = W \times W'$ vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ com $W \subset \mathcal{H}$ e $W' \subset \mathcal{H}'$, tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) exp é um difeormorfismo em V.

(ii) W' satisfaz as condições do Lema 2.36.

(iii) A aplicação φ do Lema 2.37 é um difeomorfismo em V.

Mostremos que $\exp(V \cap \mathcal{H}) = H \cap \exp V$. É claro que $\exp(V \cap \mathcal{H}) \subset H \cap \exp V$. Tome agora $x \in H \cap \exp V$. Temos que $x = (\exp X)(\exp X')$, onde $X \in W$ e $X' \in W'$. Como x e $\exp X$ estão em H, segue que $\exp X' \in H$ e então $X' \in \mathcal{H}$. Logo $X' = 0$ e assim $x = \exp X$, onde $X \in V \cap \mathcal{H}$. Portanto, $x \in \exp(V \cap \mathcal{H})$ e então $H \cap \exp V \subset \exp(V \cap \mathcal{H})$. Como V é uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}$, onde exp é um difeormorfismo, segue que $H \cap \exp V$ é uma subvariedade de G e portanto H é localmente uma subvariedade de G. Por translações à esquerda, o resultado estende-se para todo H e isso conclui a demonstração. □

Vejamos agora algumas propriedades da representação adjunta, que passamos a definir.

Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Para todo $y \in G$ defina-se

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_y : \ G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto yxy^{-1}. \end{aligned}$$

Temos que C_y é um difeomorfismo e deixa fixa a identidade $e \in G$. Logo a diferencial de C_y em e é a aplicação linear invertível de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$,

$$d(\mathrm{C}_y)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que será indicada por $\mathrm{Ad}_y = d(\mathrm{ad}(y))_e$. Logo temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}"] & G
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)(X)).$$

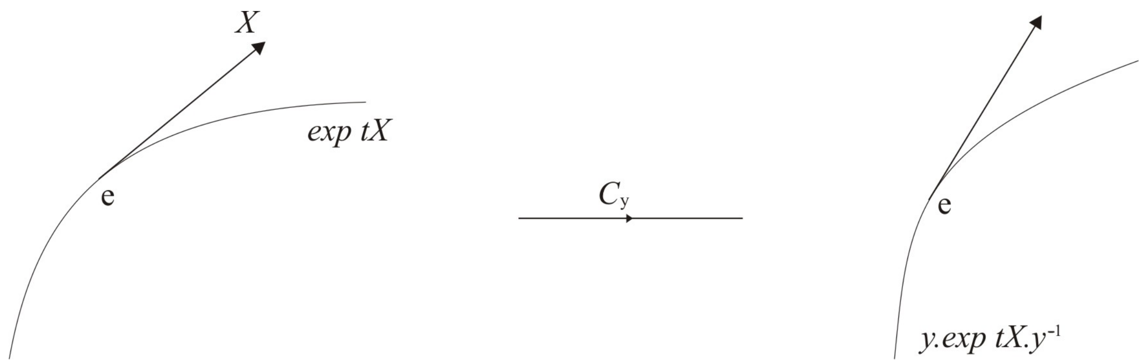
Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccll} \mathrm{Ad}: & G & \longrightarrow & GL(\mathfrak{g}) & \\ & y & \longmapsto & \mathrm{Ad}(y) & = \mathrm{Ad}_y, \end{array}$$

onde $GL(\mathfrak{g})$ é o grupo das aplicações lineares inversíveis do espaço vetorial $\mathfrak{g}$. Como C_y é diferenciável, pois é um difeomorfismo, a aplicação Ad é diferenciável. Verifica-se facilmente que Ad é um homomorfismo de Lie de G em $GL(\mathfrak{g})$ e a chamamos de representação adjunta do grupo G. O subgrupo de Lie, $\mathrm{Ad}(G) \subset GL(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie de transformações lineares chamado de grupo adjunto de G.

Veremos agora como obter geometricamente $\mathrm{Ad}(y)(X)$, para um vetor $X \in \mathfrak{g}$. Seja $X \in \mathfrak{g}$. Note que X pode ser considerado como vetor tangente a e da curva $t \mapsto \exp tX$ em G. A aplicação C_y leva esta curva na curva $t \mapsto y.\exp tX.y^{-1}$. Logo

$$\mathrm{Ad}(y)(X) = d((\mathrm{C}_y)_e)X = \frac{d}{dt}(y.\exp tX.y^{-1}) \mid_{t=0} .$$



A aplicação Ad é uma transformação linear, assim podemos tomar a sua diferencial em e, que é chamada representação adjunta de $\mathfrak{g}$ e indicada por

$$\mathrm{ad} = d(\mathrm{Ad})_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

onde $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie do grupo $GL(\mathfrak{g})$, ou seja, o conjunto das transformações lineares de $\mathfrak{g}$. Podemos descrever esta situação pelo diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d(\mathrm{Ad})_e = \mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & GL(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Vejamos agora que este diagrama é comutativo.

Proposição 2.38 *O diagrama acima é comutativo.*

Demonstração: Devemos provar que para todo $Y \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}(\exp Y) = \exp(\mathrm{ad}(Y))$. Podemos pensar em Y, como sendo o vetor tangente em e da curva $s \mapsto \mathrm{ad}(\exp sY)$ em $GL(\mathfrak{g})$. Denotando $\phi(s) =\mathrm{Ad}(\exp sY)$ e R_x a translação à direita por x, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= d(\mathrm{Ad})_{\exp sY} Y(\exp sY) \\ &= d(\mathrm{Ad})_{\exp sY}\ d(\mathrm{R}_{\exp sY})_e(Y) \\ &= d(\mathrm{Ad} \circ \mathrm{R}_{\exp sY})_e(Y) \\ &= d(\mathrm{R}_{\mathrm{Ad}(\exp sY)} \circ \mathrm{Ad})_e(Y) \\ &= d(\mathrm{R}_{\mathrm{Ad}(\exp sY)})_1\ d(\mathrm{Ad})_e(Y) \\ &= d(\mathrm{Ad})_e(Y)\ (\mathrm{Ad}(\exp sY)) \\ &= \mathrm{ad}(Y)(\phi(s)). \end{aligned}$$

Portanto $\phi(s)$ é curva integral do campo $\mathrm{ad}(Y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ e $\phi(0) = 1$ em $GL(\mathfrak{g})$. Por unicidade de solução, $\phi(s) = \exp(s\ \mathrm{ad}(Y))$. Em particular, para $s = 1$, tem-se

$$\exp(\mathrm{ad}(Y)) = \mathrm{Ad}(\exp Y).$$

Portanto o diagrama acima comuta. □

Proposição 2.39 *Se* $X, Y \in \mathfrak{g}$, *então* $\mathrm{ad}(Y)X = [Y, X]$.

Demonstração: Usando a notação da proposição acima obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(Y)(X) &= \frac{d}{ds}((\mathrm{Ad}(\exp sY)) \mid_{s=0})X \\ &= \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}((\exp sY)(\ \exp tX\ )(\exp sY)^{-1}) \mid_{\substack{s=0 \\ t=0}}. \end{aligned}$$

Como X é o vetor tangente em e à curva $t \mapsto \exp tX$, fazendo $s = t$ e usando a parte (c) do Lema 2.31, obtemos $\mathrm{ad}(Y)X = [Y, X]$. $\square$

2.3 Variedades Homogêneas

Inicialmente, apresentamos nesta seção um estudo dos espaço homogêneos, que são espaços quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados. Posteriormente, vimos as ações diferenciáveis de grupos de Lie.

O primeiro estágio nesse estudo, consiste em mostrar que um espaço homogêneo é uma variedade diferenciável.

Teorema 2.40 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G e seja*

$$G/H = \{xH;\ x \in G\}.$$

Seja ainda

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G & \longrightarrow & G/H \\ & x & \longmapsto & xH \end{array}$$

a aplicação quociente. Existe uma única estrutura de variedade diferenciável em G/H satisfazendo:
(a) π é diferenciável;
(b) Para todo xH em G/H, existe uma vizinhança de xH em G/H e uma aplicação diferenciável $\tau : W \to G$ tal que $\pi \circ \tau = id_w$. A aplicação τ é chamada uma seção local da aplicação π.

Demonstração: Suponhamos que $\dim G = n$ e $\dim H = k$. Vamos mostrar a unicidade. Seja $(G/H)_1$ o mesmo conjunto G/H, com outra estrutura diferenciável que também satisfaça (a) e (b) e seja $id : G/H \to (G/H)_1$. Dado $xH \in G/H$ tomamos o par (W, τ) dado pela condição (b). Portanto $id_W = \pi \circ \tau$ é diferenciável e assim id é diferenciável em xH. Repetimos o raciocínio para $id : (G/H)_1 \to G/H$ e concluímos que $id : G/H \to (G/H)_1$ é um difeomorfismo. Como duas estruturas diferenciáveis são equivalentes se a identidade for um difeomorfismo, fica provada a unicidade da estrutura diferenciável em G/H que satisfaz (a) e (b).

Para provar a existência, vamos considerar em G/H a topologia co-induzida pela aplicação π, ou seja, é aberto de G/H o conjunto cuja imagem inversa é um aberto de G. Como G tem base enumerável, temos que G/H tem base enumerável. Além disso sendo G de Hausdorff e $H \subset G$ fechado, temos que G/H é de Hausdorff.

Vamos resolver agora o problema para uma vizinhança de $H \in G/H$. Como anteriormente, tomamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$, onde $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ são as álgebras de Lie de H e G e $\mathfrak{h}'$ é um subespaço complementar de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. Agora notemos que vale o mesmo resultado do Lema 2.37 para a aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \to G$, dada por $\varphi(X + X') = (\exp X').(\exp X)$. Sejam então $V = V_1 \times V_1' \subset \mathfrak{g}$, tal que $V_1 \subset \mathfrak{h}$, $V_1' \subset \mathfrak{h}'$ e $U = \varphi(V)$, onde $\varphi\mid_V$ é um difeomorfismo. Tomando $W = \pi(U)$, temos que

$$\pi^{-1}(W) = \bigcup_{xH \in W} \pi^{-1}(xH) = \bigcup_{u \in U} u.H = \bigcup_{h \in H} U.h$$

é um conjunto aberto em G, pois $U.h$ é aberto. Logo, pela definição de topologia co-induzida, W é aberto em G/H. Definamos agora

$$\begin{array}{rccccc} \sigma: & W & \longrightarrow & \mathfrak{h}' & \approx & \mathbb{R}^{n-k} \\ & xH & \longmapsto & X', & & \end{array}$$

onde $x = (\exp X')(\exp X) \in U$, $X' \in \mathfrak{h}'$ e $X \in \mathfrak{h}$.

(i) Verifiquemos que σ está bem definida. Para isto basta mostrar que, se $x \in U \subset G$ e $y \in H \cap \exp V$, então $\sigma(xyH) = \sigma(xH)$. Sejam $x = (\exp X')(\exp X) \in U$ e $y = \exp Y$ em $H \cap \exp V$. Segue-se daí que

$$xy = (\exp X')(\exp X)(\exp Y) = (\exp X')(\exp Z)$$

para algum $Z \in \mathfrak{h} \cap V$, pois $\varphi\mid_V$ é um difeomorfismo. Logo $\sigma(xyH) = \sigma(xH)$ como afirmado.

(ii) Vamos mostrar agora que σ é injetora. Sejam $x = (\exp X').(\exp X)$ e $y = (\exp Y').(\exp Y)$, tais que $\varphi(xH) = \varphi(yH)$, ou seja, $X' = Y'$. Então,

$$\begin{aligned} y^{-1}x &= (\exp Y)^{-1}(\exp Y')^{-1}(\exp X')(\exp X) \\ &= (\exp Y)^{-1}(\exp X) \in H. \end{aligned}$$

Logo $xH = yH$, o que mostra que σ é injetora.

Tomamos agora em W a estrutura diferenciável que torna σ um difeomorfismo, ou seja, fazemos (σ, W) uma carta local. Mostraremos que esta estrutura diferenciável em W

satisfaz (a) e (b).

(a) A aplicação

$$\begin{array}{rcl} p: \ \mathfrak{g} = & \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}' & \longrightarrow & \mathfrak{h}' \\ & X + X' & \longmapsto & X' \end{array}$$

é claramente diferenciável, assim como a aplicação $\varphi^{-1} : U \to V$. Assim, $\rho : U \to V_1'$ dada por

$$\rho(\exp X'.\exp X) = X' \in V_1'$$

é diferenciável, pois ρ é a composição de aplicações diferenciáveis $\rho = p \circ \varphi^{-1}$. Temos assim que, $\sigma^{-1} \circ \rho : U \to W$ é diferenciável e além disso,

$$\sigma^{-1} \circ \rho(x) = \sigma^{-1} \circ \rho((\exp X')(\exp X)) = \sigma^{-1}(X') = X.$$

Portanto,

$$\sigma^{-1} \circ \rho(x) = \pi(x)$$

e assim $\pi \mid_U$ é diferenciável, o que demonstra (a).

Para mostrar (b), tome $\tau : W \to G$ dado por $\tau = \exp \circ \sigma$, e note que τ definida dessa maneira, é claramente diferenciável. Além disso,

$$\begin{aligned} \pi \circ \tau(xH) &= \pi \circ \exp \circ \sigma(xH) = \pi(\exp X') = (\exp X')H \\ &= (\exp X')(\exp X)H = xH, \end{aligned}$$

e portanto $\pi \circ \tau = id_W$ o que mostra (b).

O que foi feito até agora foi a demonstração do teorema para uma vizinhança coordenada em volta de $H \subset G/H$. Mas podemos obter vizinhanças coordenadas em volta de outros pontos de G/H através de translações à esquerda. Com efeito, se $x \in G$, definimos $\widetilde{L}_x$ como sendo o homeomorfismo de G/H, induzido pela translação à esquerda L_x em G, ou seja,,

$$\sigma_{xH} = \sigma \circ \widetilde{L}_{x^{-1}} \mid_{\widetilde{L}_x(W)} .$$

Então $(\sigma_{xH},\ \widetilde{L}_x(W))$ é uma vizinhança coordenada em torno de xH. Observe que nesta notação, σ_H é justamente a aplicação σ. Obtem-se agora, uma estrutura diferenciável em G/H pela maximização das vizinhanças coordenadas,

$$\{(\sigma_{xH},\ \widetilde{L}_x(W));\ x \in G\}.$$

Finalmente, resta provar que a mudança de coordenadas é diferenciável. Para isto, basta observar que , pela unicidade, na intersecção de duas cartas locais existe uma única estrutura diferenciável satisfazendo (a) e (b). E assim, essas cartas induzem na intersecção a mesma estrutura diferenciável. $\square$

O caso particular em que H é subgrupo normal, dá origem aos grupos quocientes, que são também grupos de Lie.

Variedades da forma G/H, onde G é um grupo de Lie, $H \subset G$ é um subgrupo fechado e a estrutura diferenciável é a dada pelo teorema anterior, são chamadas de **variedades homogêneas**. Agora definimos a ação de um grupo de Lie sobre uma variedade e posteriormente a órbita de um ponto dessa variedade e o grupo de isotropia desse ponto.

Definição 2.41 *Dizemos que um grupo de Lie* ***age*** *em uma variedade M, se existe uma aplicação diferenciável $\eta : G \times M \to M$ indicada por $\eta(x, p) = xp$ tal que*
(a) $ep = p$;
(b) $(xy)p = x(yp)$.
Neste caso, η é chamada ***ação*** de *G em M.*

Definição 2.42 *Dada uma ação η de G em M, definimos a* ***órbita*** *de um ponto p em M como sendo o conjunto*

$$Gp = \{xp;\ x \in G\}.$$

Em outras palavras, a órbita de um ponto $p \in M$ é a imagem da aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times \{p\} & \longrightarrow & M \\ (x, p) & \longmapsto & \eta(x, p) \end{array}.$$

Definição 2.43 *Dizemos que a ação η é* ***transitiva*** *ou que G age transitivamente em M através de η, se $Gp = M$ para todo $p \in M$. Ou seja, para todo $p, q \in M$, existe $x \in G$ tal que $xp = q$. Para todo $p_0 \in M$, definimos o* ***grupo de isotropia*** *do ponto p_0*

$$G_{p_0} = \{x \in G;\ xp_0 = p_0\}.$$

Facilmente mostra-se que G_{p_0} é um subgrupo fechado de G. Uma variedade que admite uma ação transitiva de um grupo de Lie é chamada **espaço homogêneo** deste grupo de Lie. Temos agora a seguinte proposição:

Proposição 2.44 *Se $\eta : G \times M \to M$ é uma ação transitiva, então G_p é isomorfo a G_q, para todo $p, q \in M$.*

Demonstração: Se η é transitiva, existe $a \in G$ tal que $ap = q$. Então

$$p = ep = (a^{-1}a)p = a^{-1}(ap) = a^{-1}q.$$

Definimos agora as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G_p & \longrightarrow & G_q \\ & x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \psi : & G_q & \longrightarrow & G_p \\ & y & \longmapsto & a^{-1}ya \end{array}.$$

É fácil verificar que, tanto φ quanto ψ estão bem definidas, ou seja, que $axa^{-1} \in G_q$ se, $x \in G_p$ e $a^{-1}ya \in G_p$, se, $y \in G_q$. É imediato verificar também que φ e ψ são homomorfismos e que $\varphi = \psi^{-1}$. Para verificar que são diferenciáveis, basta notar que

$$\varphi = L_a \circ R_{a^{-1}} |_{G_p} \qquad \text{e} \qquad \psi = L_{a^{-1}} \circ R_a |_{G_q} .$$

□

Vejamos um importante teorema envolvendo os conceitos acima.

Teorema 2.45 *Seja $\eta : G \times M \to M$ uma ação transitiva de um grupo de Lie G na variedade M. Sejam $p_0 \in M$ e H o subgrupo de isotropia do ponto p_0. Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G/H & \longrightarrow & M \\ & xH & \longmapsto & \eta(x, p_0) = xp_0. \end{array}$$

Então α é um difeomorfismo.

Demonstração: Primeiramente note que α está bem definida. De fato, se $xH = yH$, então $y^{-1}x \in H$. Logo $(y^{-1}x)p_0 = p_0$, já que $H = G_{p_0}$. Segue então que $y^{-1}(xp_0) = p_0$, ou seja, $xp_0 = yp_0$. Mostraremos agora que α é um difeomorfismo. Da transitividade de η segue que α é sobrejetora. A injetividade de α também é imediata, já que, se $xp_0 = yp_0$, então $y^{-1}x \in H$ e portanto $xH = yH$. Para mostrar que α é diferenciável notemos primeiramente que $f : G/H \to M$ é diferenciável se, e somente se, $f \circ \pi : G \to M$ é diferenciável, onde $\pi : G \to G/H$ é a aplicação quociente. De fato, suponhamos que $f \circ \pi$

é diferenciável e seja $xH \in G/H$. Seja ainda o par (W, τ) dado pelo Teorema 2.40 (b). Em W temos que,

$$f = f \circ id_W = f \circ (\pi \circ \tau) = (f \circ \pi) \circ \tau,$$

que é diferenciável, já que $(f \circ \pi) \circ \tau$ é diferenciável. O que demonstra a afirmação feita. Observe agora que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \xi : & G & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & xp_0 \end{array}$$

é diferenciável, pois equivale a restrição de η a $G \times \{p_0\} \approx G$. Mas $\xi = \alpha \circ \pi$, logo α é diferenciável. Para completarmos a demonstração, resta provarmos que $d\alpha_{xH}$ é não singular para todo $x \in G$. Consideremos as derivações

$$\begin{aligned} d\pi_x &: T_x(G) \to T_{xH}(G/H) \\ d\alpha_{xH} &: T_{xH}(G/H) \to T_{xp_0}(M) \\ d\overline{\alpha}_x &: T_x(G) \to T_{xp_0}(M), \end{aligned}$$

onde $\overline{\alpha} = \alpha \circ \pi$. Note que, $\ker d\pi_x = T_x(xH)$ e que $d\pi_x$ é sobrejetora. Suponhamos que $\ker d\overline{\alpha}_x = T_x(xH)$, ou seja, $d\overline{\alpha}_x(Y) = 0$ se, e somente se, $Y \in T_x(xH)$. Seja $X \in T_{xH}(G/H)$, então $X = d\pi_x(Y)$ para algum $Y \in T_x(G)$. Temos que

$$d\alpha_{xH}(X) = d\alpha_{xH}(d\pi_x(Y)) = d(\alpha \circ \pi)_x(Y) = d\overline{\alpha}_x(Y).$$

Assim, se $d\alpha_{xH}(X) = 0$, então $d\overline{\alpha}_x(Y) = 0$, ou seja, $Y \in T_x(xH)$, onde $d\pi_x(Y) = 0$. Portanto $X = 0$, ou seja, $d\alpha_{xH}$ é não singular. Logo, devemos mostrar apenas que $\ker d\overline{\alpha}_x = T_x(xH)$. Para $x \in G$ definamos

$$\begin{array}{rccc} \eta_x : & M & \to & M, \\ & m & \mapsto & xm. \end{array}$$

Então temos que

$$\eta_x \circ \overline{\alpha} \circ L_{x^{-1}}(y) = \eta_x \circ \overline{\alpha}(x^{-1}y) = \eta_x(x^{-1}yp_0) = yp_0 = \overline{\alpha}(y),$$

para todo $y \in G$. Logo $\overline{\alpha} = \eta_x \circ \overline{\alpha} \circ L_{x^{-1}}$. Agora, é suficiente mostrar que $\ker d\overline{\alpha}_e = T_e(H)$, ou seja, basta mostrar que se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são as álgebras de Lie de G e H respectivamente, então $d\overline{\alpha}(x) = 0$ se, e somente se, $X \in \mathfrak{h}$. Se $X \in \mathfrak{h}$, temos $d\pi(X) = 0$, isto é, $d\overline{\alpha}(X) =$

$d\alpha \circ d\pi(X) = 0$ e demonstramos uma das implicações. Para demonstrar a outra implicação, tome $X \in \mathfrak{g}$ com $d\overline{\alpha}(x) = 0$ e seja $\lambda : \mathbb{R} \to M$ dada por

$$\lambda(t) = \overline{\alpha}(\exp tX) = \overline{\alpha} \circ \varphi_X(t).$$

Daí temos que,

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt}(t) &= d\overline{\alpha} \circ \frac{d\varphi_X}{dt}(t) = d\overline{\alpha}(X_{\varphi_X(t)}) = d\overline{\alpha}.(X_{\exp tX}) \\ &= d(\eta_{\exp tX} \circ \overline{\alpha} \circ L_{\exp -tX}).(X_{\exp tX}) \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\overline{\alpha} \circ dL_{\exp -tX}(X_{\exp tX}) \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\overline{\alpha}(X) = 0. \end{aligned}$$

Logo o caminho $\lambda(t) = (\exp tX).p_0$ é constante. Como $\lambda(0) = p_0$, temos $(\exp tX).p_0 = p_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue daí que, $\exp tX \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $X \in \mathfrak{h}$, como queríamos. $\square$

Vejamos dois exemplos que ilustram o teorema anterior.

Exemplo 2.5 *Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & SO(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & (A, v) & \longmapsto & A.v \end{array}.$$

Claramente vemos que η é uma ação. Mostremos que η é transitiva. Dado $u_1 \in S^{n-1}$, escolhemos $u_2, \ldots, u_n \in S^{n-1}$ tais que

$$\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

seja uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$ com a mesma orientação de

$$\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Definimos $u_i = (u_{1i}, \ldots, u_{ni}) = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\, e_j$, $u_{ji} \in \mathbb{R}$. Assim a matriz

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

é ortogonal e $\det A = 1$*. Logo* $A \in SO(n)$ *e ainda* $A(e_i) = u_i$*, para todo* i *e em particular* $A(e_1) = u_1$*. Agora, se* $u, v \in S^{n-1}$*, basta tomar* $A, B \in SO(n)$*, tais que* $A(e_1) = u$ *e* $B(e_1) = v$*. Logo temos que,* $AB^{-1} \in SO(n)$ *e* $AB^{-1}v = u$*, o que mostra que* η *é transitiva. Provaremos agora que o conjunto*

$$SO(n-1) = \{A \in SO(n);\ A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \widetilde{A} \in SO(n-1)\}$$

é o grupo de isotropia da ação η *no ponto* e_n*, ou seja,* $SO(n-1) = SO(n)_{e_n}$*. Evidentemente,* $SO(n-1) \subset SO(n)_{e_n}$*. Seja agora* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in SO(n)$ *tal que* $A.e_n = e_n$*. Temos então que,* $\sum_{i=1}^n a_{in}\ .e_n = a_{1n}.0 + a_{2n}.0 + \cdots + a_{nn}.1 = 1$ *e isso implica que* $a_{in} = 0$ *para* $i = 1, \ldots, n-1$ *e* $a_{nn} = 1$*. Como* $AA^t = 1$*, segue que* $\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 = 1$*, e como* $a_{nn}^2 = 1$*, temos que* $a_{ni} = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n-1$*. Portanto,*

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in SO(n)$*, pois* $\det \widetilde{A} = 1$*. Pelo teorema anterior,* $SO(n)/SO(n-1)$ *é difeomorfo a* S^{n-1}*. Podemos usar este mesmo argumento para mostrar que* $O(n)/O(n-1)$ *é difeomorfo a* S^{n-1}*, sendo nesse caso, desnecessário tomar* β *na mesma direção de* ε*.*

Exemplo 2.6 *Primeiramente vamos indentificar os pontos de uma mesma reta que passa pela origem do* $\mathbb{R}^n$*, exceto a própria origem, através da seguinte relação: se* $a, b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$*, então* $a \sim b$ *se, e somente se,* $a = \lambda b$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$*. Consideremos a aplicação quociente* $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$*, e em* $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$ *a topologia co-induzida por* π*. Desta forma,* π *é uma aplicação contínua. A restrição de* π *à esfera* S^{n-1}*, é um recobrimento de duas folhas de* $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$*. Como* S^{n-1} *é um subgrupo fechado de* $\mathbb{R}^n - \{0\}$*, pelo Teorema 2.40, existe uma única estrutura diferenciável em* $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$ *tal que* π *é um difeomorfismo local. Assim podemos escrever* $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$ *como sendo o espaço*

$$\mathbb{P}^{n-1} = \left\{\bar{x} = \{x, -x\} : x \in S^{n-1}\right\}$$

chamado espaço projetivo real. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \eta: & SO(n)\times\mathbb{P}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ & (A,\bar{x}) & \longmapsto & \overline{Ax}=\{Ax,-Ax\} \end{array}$$

está bem definida, pois se, $(A,\bar{x})=(A,\bar{y})$, *então* $\overline{Ax}=\overline{Ay}$, *ou seja,* $Ax=Ay$ *ou* $Ax=-Ay$. *Mas se isto ocorre, temos* $x=y$ *ou* $x=-y$, *ou seja* $\bar{x}=\bar{y}$. *Além disso,* η *é uma ação transitiva, ou seja, dados* $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{P}^{n-1}$, *existe* $A\in SO(n)$, *tal que* $A\bar{x}=\bar{y}$. *Para provarmos este resultado, tomemos* $X,Y\in SO(n)$, *tais que* $Xe_1=x$ *ou* $Xe_1=-x$, *e* $Ye_1=y$ *ou* $Ye_1=-y$. *Daí* $X^{-1}x=e_1$ *ou* $X^{-1}(x)=e_1$. *Então,*

$$y=Ye_1=Y(X^{-1}x)=(YX^{-1})x \text{ ou } y=Ye_1=Y(X^{-1}(-x)=(YX^{-1})(-x).$$

Logo, existe $A=YX^{-1}\in SO(n)$ *tal que* $Ax=y$ *ou* $A(-x)=y$, *ou seja,* $A\bar{x}=\bar{y}$. *Isso prova que a ação* η *é transitiva. O grupo de isotropia de* $\bar{e}_n\in\mathbb{P}^{n-1}$ *é o conjunto*

$$O(n-1)=\{A\in SO(n):\ A=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & \widetilde{A} & & \vdots\\ & & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \det\widetilde{A}\end{pmatrix} \text{ e } \widetilde{A}\in O(n-1)\}.$$

De fato, se $A\in O(n-1)$, *é fácil ver que* $\overline{Ae_n}=\bar{e}_n$, *pois neste caso* $\det\widetilde{A}=\pm1$. *Por outro lado, se* $A\in SO(n)$ *é tal que* $\overline{Ae_n}=\bar{e}_n$, *então* $Ae_n=e_n$ *ou* $Ae_n=-e_n$. *Logo* A *é do tipo acima e demonstramos a afirmação feita acima. Portanto pelo teorema anterior temos que* $\mathbb{P}^{n-1}$ *é difeomorfo a* $SO(n)/O(n-1)$.

Capítulo 3

Girogrupos

A maioria das propriedades características dos girogrupos, são propriedades de laços homogêneos com a propriedade inversa do automorfismo. Do ponto de vista matemático, essa teoria ainda é nova e dessa forma, faltam subsídeos para a elaboração de um texto mais completo e recheado de exemplos. As principais referências utilizadas nesse trabalho se encontram em [19] e [21].

O conceito de girogrupo generaliza as noções de grupo, logo ambos compartilham algumas analogias, tais como:

1) O girogrupos são classificados como girocomutativos e não girocomutativos;

2) Alguns girogrupos girocomutativos admitem multiplicação por escalar, tornando-se assim um espaço girovetorial;

3) O espaços girovetoriais por sua vez, fornecem um suporte para a geometria hiperbólica, da mesma forma que os espaços vetoriais fornecem um suporte para a geometria euclideana. Isso nos possibilita unificar essas duas geometrias.

Apresentamos uma série de resultados, que nos possibilitam expor um dos objetivos desse trabalho.

Para um grupo arbitrário G e um subgrupo normal $H \subset G$, o espaço G/H herda a estrutura do grupo G. Vamos descobrir a construção relevante nos termos de uma seção da projeção canônica de G no conjunto G/H, das classes laterias à esquerda.

Uma seção $\sigma : G/H \to G$ da projeção canônica $\pi : G \to G/H$, é uma aplicação com $\pi\sigma = Id_{G/H}$ e $\sigma(H) = 1_G$. No caso em que $H \subset G$ é um subgrupo normal, uma seção arbitrária permite que a operação do grupo G, seja levada na operação do grupo G/H,

$$\begin{array}{rcl} G/H \times G/H & \to & G/H \\ (g_1H)(g_2H) & \mapsto & \pi(\sigma(g_1H)\sigma(g_2H)) = \sigma(g_1H)\sigma(g_2H)H. \end{array}$$

Vamos mostrar que $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$. Se $\sigma_i = \sigma(g_iH)$, então $\sigma_iH = g_iH$, ou seja,

$\sigma_i = g_i h_i$ para algum $h_i \in H$ com $i = 1, 2$. Então,

$$(g_1H)(g_2H) = \sigma_1\sigma_2 H = g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2H = g_1g_2H,$$

desde que, $g_2^{-1}h_1g_2 \in H$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} (gH)H &= gH = H(gH) \\ (gH)(g^{-1}H) &= H = (g^{-1}H)(gH) \\ [(g_1H)(g_2H)](g_3H) &= (g_1H)[(g_2H)(g_3H)]. \end{aligned}$$

Nesse caso G/H possui uma estrutura de grupo independente de σ e $\pi : G \to G/H$ é um homomorfismo de grupos.

Para o caso em que H não é normal em G, G/H não herda a estrutura do grupo G. Porém, podemos introduzir uma estrutura de girogrupo em G/H. Faremos agora essa construção. Geralmente, se $H \subset G$ não é normal, uma seção arbitrária $\sigma : G/H \to G$, induz a operação

$$\begin{aligned} \oplus_\sigma : G/H \times G/H &\to G/H \\ (g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) &\mapsto \pi(\sigma(g_1H)\sigma(g_2H)) = \sigma(g_1H)\sigma(g_2H)H. \end{aligned}$$

Note que,

$$H \oplus_\sigma (gH) = (gH) \oplus_\sigma H = gH$$

para todo $gH \in G/H$ e H é o único com esta propriedade. Como $\sigma(gH)H = \pi\sigma(gH) = gH$, podemos representar $\sigma(gH) = gh$ para algum $h \in H$. Então,

$$(g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) = \sigma(g_1H)g_2H$$

para quaisquer $g_1H, g_2H \in G/H$.

A equação, $(g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) = g_3H$ possui uma única solução para $g_1H, g_2H \in G/H$ arbitrários. De fato,

$$(g_1H) \oplus_\sigma \{[\sigma(g_1H)]^{-1}g_3H\} = \sigma(g_1H)[\sigma(g_1H)]^{-1}g_3H = g_3H$$

tal que $[\sigma(g_1H)]^{-1}g_3H$ é a solução da equação. Suponhamos que,

$$\sigma(g_1H)x_1H = (g_1H) \oplus_\sigma (x_1H) = (g_1H) \oplus_\sigma (x_2H) = \sigma(g_1H)x_2H.$$

Multiplicando à esquerda, ambos os lados da igualdade por $[\sigma(g_1H)]^{-1} \in G$ tem-se que $x_1H = x_2H$. Portanto, para quaisquer $g_1H, g_2H \in G/H$, a equação $(g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) = g_3H$

possui como solução única $[\sigma(g_1H)]^{-1}g_3H$. Note que, se supormos que $[\sigma(g_1H)]^{-1}$ está em $\sigma(G/H)$ e definirmos $\ominus_\sigma(g_1H) = [\sigma(g_1H)]^{-1}H$ como única solução de $(g_1H)\oplus_\sigma(tH) = H$, então a única solução de $(g_1H)\oplus_\sigma(xH) = g_3H$, pode ser expressa como $\ominus_\sigma(g_1H)\oplus_\sigma(g_3H)$.

Definição 3.1 *Uma operação binária $+$ em um conjunto G é uma função $+ : G\times G \to G$. Usamos a notação $a+b$ para denotar $+(a,b)$ para todo $a, b \in G$. Um* ***grupóide*** *$(G,+)$ é um conjunto G com a operação binária $+$. Um automorfismo ϕ de um grupóide $(G,+)$, é uma bijeção de G em G que preserva a operação binária do grupóide.*

As bijeções $G \to G$, formam o grupo $B = B(G)$ com respeito a composição. O grupo $Aut(G,\oplus)$, é formado por todas as bijeções $\varphi \in B(G)$ que preservam a operação $\oplus$, ou seja,

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

para quaisquer que sejam a, $b \in G$.

Definição 3.2 *Um* ***laço à esquerda*** *$(\mathcal{L},\oplus)$ é um grupóide que possui duas propriedades:*
$i)$ Existe um único elemento neutro $e \in \mathcal{L}$, tal que $e \oplus x = x \oplus e = x$ para todo $x \in \mathcal{L}$.
$ii)$ Dados $a, b \in \mathcal{L}$, a equação $a \oplus x = b$ tem como única solução $x = (\ominus a) \oplus b$, onde $\ominus a$ é solução única de $a \oplus t = e$.

Diante disso, podemos considerar o seguinte resultado:

Lema 3.3 *Sejam G um grupo, $H \subset G$ um subgrupo e $\sigma : G/H \to G$ uma seção de $\pi : G \to G/H$. Se $\sigma(G/H)$ é um subgrupo de G, então a operação binária*

$$\begin{array}{rcl} \oplus_\sigma : G/H \times G/H & \to & G/H \\ (g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) & \mapsto & \sigma(g_1H)\sigma(g_2H)H = \sigma(g_1H)g_2H, \end{array} \tag{3.1}$$

introduz uma estrutura de laço à esquerda em G/H.

Dado um laço à esquerda $(\mathcal{L},\oplus)$, considere a translação à esquerda

$$\begin{array}{rccc} L_a : & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & x & \mapsto & a \oplus x, \end{array}$$

com $a \in \mathcal{L}$. De acordo com a propriedade $ii)$ da definição de laço, todas L_a são invertíveis e $L_a^{-1}(b) = L_{\ominus a}(b)$ para todo $b \in \mathcal{L}$. Consequentemente,

$$a \oplus \{(\ominus a) \oplus x\} = L_a L_{\ominus a}(x) = L_a L_a^{-1}(x) = x$$

para todo $x \in \mathcal{L}$.

Agora definimos o girador de Thomas.

Definição 3.4 *Seja* $(\mathcal{L}, \oplus)$ *um laço à esquerda. Para quaisquer que sejam* $a, b \in (\mathcal{L}, \oplus)$, *o girador de Thomas, denotado por* $gyr[a, b]$, *é uma aplicação bijetora*

$$gyr[a, b] = L_{\ominus(a \oplus b)} L_a L_b : \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

Kiechle demonstra em [13] que um laço à esquerda $(\mathcal{L}, \oplus)$, é um grupo se, e somente se, os giradores $gyr[a, b] = Id_{\mathcal{L}}$ para quaisquer que sejam $a, b \in \mathcal{L}$. Posteriormente usamos esse fato.

O lema que segue é útil na demonstração de outros resultados, pois ele estabelece a giroassociatividade à esquerda num laço qualquer e ainda mostra que um girador, age como uma conjugação.

Lema 3.5 *a) Seja* $(\mathcal{L}, \oplus)$ *um laço à esquerda com girador* $gyr[a, b] = L_{\ominus(a \oplus b)} L_a L_b$ *para quaisquer* $a, b \in \mathcal{L}$. *Então,*

i) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a, b]c$ *para quaisquer que sejam* $a, b \in \mathcal{L}$.

ii) $gyr[a, \ominus a] = Id_{\mathcal{L}}$ *para todo* $a \in \mathcal{L}$.

iii) O único inverso à direita $\ominus a$ *de* $a \in \mathcal{L}$ *é o único inverso à esquerda de* a.

b) Sejam G *um grupo,* $H \subset G$ *um subgrupo e* $\sigma : G/H \to G$ *a seção da projeção canônica* $\pi : G \to G/H$ *com* $\sigma(G/H)$ *subgrupo de* G. *Então dados* $a = \sigma(aH)$ *e* $b = \sigma(bH)$, *tem-se que o girador*

$$gyr[aH, bH](xH) = (\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x))H,$$

age como uma conjugação por

$$h(ab) = [\sigma(abH)]^{-1}ab \in H.$$

Demonstração: *a) i)* $(a \oplus b) \oplus gyr[a, b]c = L_{(a \oplus b)} L_{\ominus(a \oplus b)} L_a L_b(c) = L_a L_b(c) = a \oplus (b \oplus c)$.

ii) $gyr[a, \ominus a] = L_{\ominus(a \oplus (\ominus a))} L_a L_{\ominus a} = L_{\ominus e} L_a L_a^{-1} = Id_{\mathcal{L}}$.

iii) Seja a_1 o único inverso à direita de $\ominus a$. Então por *i)* e *ii)* temos que,

$$a = a \oplus \{(\ominus a) \oplus a_1\} = \{a \oplus (\ominus a)\} \oplus gyr[a, \ominus a]a_1 = a_1.$$

Logo $(\ominus a) \oplus a = e$ e $\ominus a$ é um elemento inverso à esquerda de a. Seja $a_2 \in \mathcal{L}$ um outro elemento inverso à esquerda de a. Note que $a_2 \oplus x = e$, onde $x = \ominus a_2 = a$. Então de *i)* e

$ii)$ segue que,

$$a_2 = a_2 \oplus \{a \oplus (\ominus a)\} = (a_2 \oplus a) \oplus gyr[a_2, \ominus a_2](\ominus a) = \ominus a.$$

Portanto, $\ominus a$ é o único elemento inverso à esquerda de a.

$b)$ Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} \{(aH) \oplus_\sigma (bH)\} \oplus_\sigma \{[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H\} &= (abH) \oplus_\sigma \{[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H\} \\ &= \sigma(abH)[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} (aH) \oplus_\sigma \{(bH) \oplus_\sigma (xH)\} &= (aH) \oplus_\sigma (bxH) \\ &= a(bx)H \\ &= (ab)xH \\ &= \sigma(abH)h(ab)xH \\ &= \sigma(abH)h(ab)x[h(ab)]^{-1}H \\ &= \sigma(abH)[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H. \end{aligned}$$

Então,

$$\{(aH) \oplus_\sigma (bH)\} \oplus_\sigma \{[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H\} = (aH) \oplus_\sigma \{(bH) \oplus_\sigma (xH)\}.$$

Como

$$(aH) \oplus_\sigma \{(bH) \oplus_\sigma (xH)\} = \{(aH) \oplus_\sigma (bH)\} \oplus_\sigma \{gyr[aH, bH](xH)\},$$

segue o desejado. □

A partir de agora, nosso objetivo é definir um espaço girovetorial $(V, \oplus, \otimes)$. Para isso mostramos que num espaço girovetorial quase à esquerda $(V, \oplus, \otimes)$, o laço à esquerda $(V, \oplus)$ com a propriedade do giroautomorfismo, implica que $(V, \oplus)$ é um girogrupo à esquerda e com isso $(V, \oplus, \otimes)$ é chamado de espaço girovetorial à esquerda. Mais ainda, sabendo que um girogrupo é um girogrupo à esquerda que satisfaz a propriedade do laço à esquerda, e que é girocomutativo se satisfaz a lei da girocomutatividade, para finalizar, mostramos que no espaço girovetorial à esquerda, tem-se que $(V, \oplus)$ é um girogrupo girocomutativo.

O que fizemos aqui, foi dar uma idéia do que é feito no restante desse capítulo. Nesse entremeio, definimos girogrupos e isso é essencial para verificarmos que quando H não é normal em G, G/H herda a estrutura de girogrupo.

Definição 3.6 *Um **espaço girovetorial quase à esquerda** $(V, \oplus, \otimes)$, é um laço à esquerda $(V, \oplus)$ com uma multiplicação escalar*

$$\otimes : \mathbb{R}\times V \to V$$

que satisfaz:

i) $1 \otimes v = v$

ii) $(rs) \otimes v = r \otimes (s \otimes v) = s \otimes (r \otimes v)$

iii) $(r \oplus s) \otimes v = (r \otimes v) \oplus (s \otimes v)$

iv) $gyr[r \otimes v, r \otimes v] = Id_V$

v) $gyr[a, b](r \otimes v) = r \otimes (gyr[a, b]v)$

para quaisquer que sejam $a, b, v \in V$ *e* $r, s \in \mathbb{R}$.

Ressaltemos que, se $(V, \oplus)$ é um laço de Lie à esquerda e a multiplicação por escalar é uma aplicação diferenciável, então $(V, \oplus, \otimes)$ é chamado espaço girovetorial de Lie quase à esquerda. Uma abordagem maior sobre esse assunto é feita no próximo capítulo, pois naquele, associamos os conceitos das teorias de Lie e de girogrupos.

Definição 3.7 *Um laço à esquerda* $(\mathcal{L},\oplus)$ *sujeito a propriedade do giroautomorfismo,*

$$gyr[a, b](x \oplus y) = (gyr[a, b]x) \oplus (gyr[a, b]y)$$

para quaisquer que sejam $a, b, x, y \in \mathcal{L}$*, é chamado **girogrupo à esquerda.***

Apresentamos agora um exemplo, onde para duas seções τ, σ distintas num mesmo espaço G_0/H_0 tem-se que $(G_0/H_0, \oplus_\tau)$ é um grupo e $(G_0/H_0, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda, mas não é um grupo.

Seja $G_0 = S_3$, o grupo simétrico atuando no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Denotamos por $(i_1, ..., i_k)$ o ciclo que transforma i_1 em i_2, i_2 em $i_3, ..., i_{k-1}$ em i_k e i_k em i_1. Fixemos o subgrupo cíclico $H_0 = \langle(1, 2)\rangle \subset S_3$ de ordem 2. Para

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (1, 2, 3) \qquad & \tau_2 = (1, 3, 2) = (1, 2, 3)^2 \\ \sigma_1 &= (2, 3) \qquad & \sigma_2 = (1, 3) \end{aligned}$$

podemos representar G_0 como a união disjunta

$$G_0 = H_0 \cup \tau_1 H_0 \cup \tau_2 H_0 = H_0 \cup \sigma_1 H_0 \cup \sigma_2 H_0,$$

com $\sigma_i H_0 = \tau_i H_0$ para $i = 1, 2$. Seja $\tau_0 = \sigma_0 = Id_{\{1,2,3\}}$, definimos as seções

$$\begin{array}{rrcl} \tau: & G_0/H_0 & \rightarrow & G_0 \\ & \tau_i H_0 & \mapsto & \tau_i \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \sigma: & G_0/H_0 & \rightarrow & G_0 \\ & \sigma_i H_0 & \mapsto & \sigma_i \end{array}$$

para $i = 0, 1, 2$, onde $\sigma_i H_0 \rightarrow \tau_i$ e $\tau_i H_0 \rightarrow \tau_i$. Observe que a imagem $\tau(G_0/H_0) = \{\tau_1^i; i = 0, 1, 2\}$ é o grupo alternado A_3 e a operação $\oplus_\tau : G_0/H_0 \times G_0/H_0 \rightarrow G_0/H_0$ definida por $(\tau_i H_0) \oplus_\tau (\tau_j H_0) = \tau_i \tau_j H_0 = \tau_1^{i+j} H_0$, transforma G_0/H_0 num grupo cíclico de ordem 3.

Temos também que a imagem $\sigma(G_0/H_0) = \{Id_{\{1,2,3\}}, (2, 3), (1, 3)\}$ de σ, é fechada sobre a inversão, ou seja, $(i, j) = (i, j)^{-1}$ para toda transposição (i, j). Consequentemente,

$$\begin{array}{rrcl} \oplus_\sigma : & G_0/H_0 \times G_0/H_0 & \rightarrow & G_0/H_0 \\ & (\sigma_i H_0)(\sigma_j H_0) & \mapsto & (\sigma_i H_0) \oplus_\sigma (\sigma_j H_0) = \sigma_i \sigma_j H_0 \end{array}$$

é a operação que torna G_0/H_0 um laço à esquerda. Note que $(G_0/H_0, \oplus_\sigma)$ não é grupo, pois $gyr[H_0, \sigma_i H_0] = \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}} \neq Id_{G_0/H_0} = H_0$. Afim de mostrarmos que $(G_0/H_0, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda, notemos que

$$\begin{array}{rcl} gyr[H_0, \sigma_i H_0] & = & gyr[\sigma_i H_0, H_0] = \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}} \qquad \text{e} \\ gyr[\sigma_i H_0, \sigma_i H_0] & = & \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}}. \end{array}$$

Analisaremos $gyr[\sigma_1 H_0, \sigma_2 H_0] = \mathrm{Ad}_{h(\sigma_1\sigma_2)}$ e $gyr[\sigma_2 H_0, \sigma_1 H_0] = \mathrm{Ad}_{h(\sigma_2\sigma_1)}$. Como $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2(1, 2)$ e $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1(1, 2)$, obtemos que

$$\begin{array}{rcl} h\,(\sigma_1\sigma_2) & = & [\sigma(\sigma_1\sigma_2 H_0)]^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_2(1, 2) = (1, 2) \\ h(\sigma_2\sigma_1) & = & [\sigma(\sigma_2\sigma_1 H_0)]^{-1}\sigma_2\sigma_1 = (1, 2). \end{array}$$

Sabendo que $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_0 = \sigma_0$, $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_1 = \sigma_2$ e $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_2 = \sigma_1$, podemos escrever $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_{\bar{i}} = \sigma_{-\bar{i}}$. Note que, se $\sigma(\sigma_{\overline{k}}\sigma_{\overline{l}} H_0) = \sigma_{\overline{m}}$, então $\sigma(\sigma_{-\overline{k}}\sigma_{-\overline{l}} H_0) = \sigma_{-\overline{m}}$. Isso é claro quando $k = 0$ ou $l = 0$, assim como no caso $\overline{k} = \overline{l}$. Para $(\overline{k}, \overline{l}) = (\overline{1}, \overline{2})$ ou $(\overline{k}, \overline{l}) = (\overline{2}, \overline{1})$, temos que $\sigma(\sigma_{\overline{k}}\sigma_{\overline{l}} H_0) = \sigma_{\overline{l}}$ e $\sigma(\sigma_{-\overline{k}}\sigma_{-\overline{l}} H_0) = \sigma(\sigma_{\overline{l}}\sigma_{\overline{k}} H_0) = \sigma_{\overline{k}} = \sigma_{-\overline{l}}$. Assim, se

$$\sigma((\sigma_{\overline{k}} H_0) \oplus_\sigma (\sigma_{\overline{l}} H_0)) = (\sigma_{\overline{m}} H_0),$$

então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{(1,2)}\{(\sigma_{\overline{k}}H_0)\oplus_\sigma(\sigma_{\overline{l}}H_0)\} &= \mathrm{Ad}_{(1,2)}(\sigma_{\overline{m}})H_0\\
&= \sigma_{-\overline{m}}H_0\\
&= \sigma_{-\overline{k}}\sigma_{-\overline{l}}H_0\\
&= (\sigma_{-\overline{k}}H_0)\oplus_\sigma(\sigma_{-\overline{l}}H_0)\\
&= \{\mathrm{Ad}_{(1,2)}(\sigma_{\overline{k}})H_0\}\oplus_\sigma\{\mathrm{Ad}_{(1,2)}(\sigma_{\overline{l}})H_0\}
\end{aligned}$$

para todo $\overline{k},\overline{l}\in\{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$. Portanto $(G_0/H_0,\oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda.

Note que um girogrupo à esquerda $(\mathcal{L},\oplus)$ é um laço à esquerda e os giradores $gyr[a,b]$ são $\oplus$-automorfismos para todo $a,b\in\mathcal{L}$.

Lema 3.8 *Sejam G um grupo, $H\subset G$ um subgrupo e $\sigma: G/H\to G$ uma seção de $\pi: G\to G/H$. Suponha que $\sigma(G/H)$ é um subgrupo de G e a discrepância*

$$d^h(x)=\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\{[\sigma(\mathrm{Ad}_h(x)H]^{-1}\mathrm{Ad}_h(x)\} \tag{3.2}$$

pertence a $\cap_{g\in G}(gHg^{-1})=\cap_{y\in G}(yHy^{-1})$, para todo $x\in S$ e todo $h\in H$. Então $(G/H,\oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda com respeito a operação 3.1.

Demonstração: Pelo Lema 3.3, temos que $(G/H,\oplus_\sigma)$ é um laço à esquerda. Tomando arbitrariamente $a=\sigma(aH)$, $b=\sigma(bH)$, $x=\sigma(xH)$ e y em G temos que

$$\begin{aligned}
gyr[aH,bH]\{(xH)\oplus_\sigma(yH)\} &= gyr[aH,bH](xyH)\\
&= [\mathrm{Ad}_{h(ab)}(xy)]H\\
&= \mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H,
\end{aligned}$$

onde $h(ab)=[\sigma(abH)]^{-1}ab\in H$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\{gyr[aH,bH](xH)\}\oplus_\sigma\{gyr[aH,bH](yH)\} &= \{\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)H\}\oplus_\sigma\{\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H\}\\
&= \sigma(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)H)\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H.
\end{aligned}$$

Note que a propriedade do giroautomorfismo é satisfeita se, e somente se,

$$[\sigma(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)H)]^{-1}\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)$$

pertence ao grupo de isotropia ou estabilizador do girador $gyr[aH,bH](xH)$, dado por

$$Stab(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H)=\{g\in G;\ g\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H=\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H\}.$$

Desde que

$$Stab(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H) = \mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)]^{-1} = \mathrm{Ad}_{h(ab)}\mathrm{Ad}_y H,$$

pois $\sigma(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x))H = \mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)$, já que

$$[\sigma(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)H)]^{-1}\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)\mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H = \mathrm{Ad}_{h(ab)}(y)H.$$

Equivalentemente, temos que $d^{h(ab)}(x) \in \mathrm{Ad}_y H$, pois

$$[\sigma(\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)H)]^{-1}\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x) \in \mathrm{Ad}_{h(ab)}\mathrm{Ad}_y H$$

para todo $y \in G$. Assim $d^{h(ab)}(x) \in \cap_{y\in G}(yHy^{-1})$. Desde que $y \in G$, podemos escrever $y = \sigma(yH)h_y$ para algum $h_y \in H$ e $yHy^{-1} = \sigma(yH)H[\sigma(yH)]^{-1}$. Portanto $\cap_{g\in G}(gHg^{-1}) = \cap_{y\in G}(yHy^{-1})$. □

Da definição de grupóides isomorfos, mostremos quando um girogrupo à esquerda arbitrário, é isomorfo a $(G/H, \oplus_\sigma)$, já definido acima.

Definição 3.9 *Os grupóides $(\mathcal{L}_1, \oplus_1)$ e $(\mathcal{L}_2, \oplus_2)$ são* ***isomorfos*** *se existe uma bijeção $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ tal que*

$$\varphi(x \oplus_1 y) = \varphi(x) \oplus_2 \varphi(y)$$

para quaisquer que sejam x e y em $\mathcal{L}_1$.

Proposição 3.10 *Para todo girogrupo à esquerda $(\mathcal{L},\oplus)$, existe um grupo G, um subgrupo $H \subset G$ e uma seção $\sigma : G/H \to G$ de $\pi : G \to G/H$ com $\sigma(G/H)$ subgrupo de G e $h\sigma(G/H)h^{-1} \subseteq \sigma(G/H)$ para todo $h \in H$, tal que $(\mathcal{L},\oplus)$ é isomorfo à $(G/H, \oplus_\sigma)$.*

Demonstração: Seja $(\mathcal{L},\oplus)$ um laço à esquerda e H_0 subgrupo do grupo $Aut\,(\mathcal{L},\oplus)$ de $\oplus$-automorfismo de $\mathcal{L}$ que contém todos os giradores $gyr[a,b]$ com $a, b \in \mathcal{L}$. Tome o conjunto $G = \mathcal{L} \times H_0$ e consideremos a operação

$$(x,\alpha) \circ (y,\beta) = (x \oplus \alpha\,(y)\,, gyr[x, \alpha(y)]\alpha\beta). \tag{3.3}$$

Mostremos que $(G, \circ)$ é um grupo. É claro que $1_G = (e, Id_{\mathcal{L}})$ é um elemento neutro de G, pois

$$\begin{aligned}
(x,\alpha) \circ (e, Id_{\mathcal{L}}) &= (x \oplus \alpha(e), gyr[x,\alpha(e)]\alpha) = (x \oplus e, gyr[x,e]\alpha) = (x,\alpha) \text{ e} \\
(e, Id_{\mathcal{L}}) \circ (x,\alpha) &= (e \oplus x, gyr[e,x]\alpha) = (x,\alpha),
\end{aligned}$$

onde $\alpha(e) = e$ para todo $\alpha \in H_0 \subset Aut\,(\mathcal{L},\oplus)$ e $gyr[e,x] = gyr[x,e] = Id_{\mathcal{L}}$. Como $gyr[x,\ominus x] = Id_{\mathcal{L}}$ para todo x em $\mathcal{L}$, verificamos que

$$\begin{aligned}
(x,\alpha)\circ\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right) &= (x\oplus(\ominus x), gyr[x,\ominus x]Id_{\mathcal{L}}) = (e, Id_{\mathcal{L}}) \text{ e} \\
\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)\circ(x,\alpha) &= \left((\ominus\alpha^{-1}(x))\oplus\alpha^{-1}(x), gyr[\ominus\alpha^{-1}(x),\alpha^{-1}(x)]Id_{\mathcal{L}}\right) = (e, Id_{\mathcal{L}}).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(x,\alpha)^{-1} = \left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right) \tag{3.4}$$

para todo (x,α) em G. A associatividade de $\circ$, seguirá construindo um homomorfismo injetor $\varphi : (G,\circ) \to (B,\cdot)$ no grupo $(B,\cdot)$ das bijeções de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{L}$. Para todo $(x,\alpha) \in G$ definimos

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\alpha) : \ \mathcal{L} &\to \mathcal{L} \\
y &\mapsto x\oplus\alpha(y).
\end{aligned}$$

De acordo com

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)\varphi(x,\alpha)(y) &= \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)(x\oplus\alpha(y)) \\
&= \ominus\alpha^{-1}(x)\oplus\{\ominus\alpha^{-1}(x)\oplus y\} \\
&= y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\alpha)\varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)(y) &= \varphi(x,\alpha)(\ominus\alpha^{-1}(x)\oplus\alpha^{-1}(y)) \\
&= x\oplus(\ominus x\oplus y) \\
&= y
\end{aligned}$$

toda $\varphi(x,\alpha)$ são inversíveis e $[\varphi(x,\alpha)]^{-1} = \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)$. Logo $\varphi(x,\alpha) \in B$. Vamos verificar agora que φ é injetora. Para isso, suponha que $\varphi(x,\alpha) = \varphi(x,\beta)$ para algum (x,α),$(y,\beta) \in G$ e então

$$\begin{aligned}
e &= Id_{\mathcal{L}}(e) \\
&= [\varphi(x,\alpha)]^{-1}\varphi(y,\beta)(e) \\
&= \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)(y\oplus\beta(e)) \\
&= \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x),\alpha^{-1}\right)(y) \\
&= \alpha^{-1}(\ominus x)\oplus\alpha^{-1}(y) \\
&= \alpha^{-1}(\ominus x\oplus y).
\end{aligned}$$

Isso implica que $(\ominus x \oplus y) = \alpha(e) = e$, ou seja, $x = y$. Mais ainda, para todo $z \in \mathcal{L}$, a identidade

$$\begin{aligned} z &= Id_{\mathcal{L}}(z) \\ &= [\varphi(x,\alpha)]^{-1}\varphi(y,\beta)(z) \\ &\quad \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x), \alpha^{-1}\right)(x \oplus \beta(z)) \\ &= \alpha^{-1}(\ominus x) \oplus \alpha^{-1}(x \oplus \beta(z)) \\ &= \alpha^{-1}[\ominus x \oplus (x \oplus \beta(z))] \\ &= \alpha^{-1}\beta(z), \end{aligned}$$

ou seja, $\alpha^{-1}\beta = Id_{\mathcal{L}}$. Logo $\alpha = \beta$ e portanto φ é injetora. Para qualquer z em $\mathcal{L}$ observe que

$$\begin{aligned} \varphi((x,\alpha)\circ(y,\beta))(z) &= \varphi\left(x \oplus \alpha\left(y\right), gyr[x,\alpha(y)]\alpha\beta\right)(z) \\ &= (x \oplus \alpha\left(y\right)) \oplus (gyr[x,\alpha(y)]\alpha\beta(z)). \end{aligned}$$

Pela lei da giroassociatividade, temos que

$$(x \oplus \alpha(y)) \oplus (gyr[x,\alpha(y)]\alpha\beta(z)) = x \oplus [\alpha(y) \oplus \alpha\beta(z)].$$

Consequentemente,

$$\varphi((x,\alpha)\circ(y,\beta))(z) = x \oplus \alpha\{y \oplus \beta(z)\} = \varphi(x,\alpha)(y \oplus \beta(z)) = \varphi(x,\alpha)\cdot\varphi(y,\beta)(z).$$

Usando esse fato e a lei associativa para multiplicação do grupo B, segue que

$$\begin{aligned} \varphi((g_1 \circ g_2)\circ g_3) &= \{\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)\}\cdot\varphi(g_3) \\ &= \varphi(g_1)\cdot\{\varphi(g_2)\cdot\varphi(g_3)\} \\ &= \varphi(g_1 \circ (g_2 \circ g_3)), \end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $g_1, g_2, g_3 \in G$. Como φ é injetora, então $(g_1 \circ g_2)\circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ e portanto $(G, \circ)$ é um grupo.

Considere $H = \{(e,\alpha); \alpha \in H_0\} \subset G$. Observemos que de $[\varphi(x,\alpha)]^{-1} = \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x), \alpha^{-1}\right)$ tem-se que $[\varphi(x,\alpha)^{-1}] = \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus x), \alpha^{-1}\right)$. Dessa forma

$$(e,\alpha)^{-1} = \varphi\left(\alpha^{-1}(\ominus e), \alpha^{-1}\right) = (e, \alpha^{-1}) \in H$$

e

$$(e,\alpha)\circ(e,\beta)=(e\oplus\alpha(e),gyr[e,\alpha(e)]\alpha\beta)=(e,\alpha\beta)\in H.$$

Consequentemente, H é subgrupo de G. Assim $(x,\alpha)\circ H=(x,Id_{\mathcal{L}})\circ H$ para todo $(x,\alpha)\in G$ e podemos representar

$$G/H=\{(x,Id_{\mathcal{L}})\circ H;\ x\in\mathcal{L}\}.$$

Mais ainda, se $(x,Id_{\mathcal{L}})\circ H=(y,Id_{\mathcal{L}})\circ H$, então

$$(x,Id_{\mathcal{L}})\circ(e,\alpha)=(x,gyr[x,e]\alpha)=(x,\alpha)=(y,Id_{\mathcal{L}}),$$

para algum $\alpha\in H_0$. Ou seja, $(x,Id_{\mathcal{L}})\circ H\neq(y,Id_{\mathcal{L}})\circ H$ sempre que $x\neq y$. A aplicação injetora

$$\begin{array}{rccc}\sigma: & G/H & \to & G\\ & (x,Id_{\mathcal{L}})\circ H & \mapsto & (x,Id_{\mathcal{L}})\end{array}$$

é a seção da projeção canônica

$$\begin{array}{rccc}\pi: & G & \to & G/H\\ & (x,\alpha) & \mapsto & (x,Id_{\mathcal{L}})\circ H,\end{array}$$

onde $\sigma(H)=1_G$ e $\pi\sigma\left((x,Id_{\mathcal{L}})\circ H\right)=\pi\left(x,Id_{\mathcal{L}}\right)=(x,Id_{\mathcal{L}})\circ H$ para todo $(x,Id_{\mathcal{L}})\circ H$ em G/H. Note que $(x,Id_{\mathcal{L}})^{-1}=(\ominus x,Id_{\mathcal{L}})\in\sigma\left(G/H\right)$, assim $\sigma(G/H)$ é subgrupo de G. Logo,

$$(e,\alpha)\circ(x,Id_{\mathcal{L}})\circ(e,\alpha)^{-1}=(\alpha(x),Id_{\mathcal{L}})$$

para todo $x\in\mathcal{L}$ e todo $\alpha\in H_0$. Consequentemente, $\sigma\left(\mathrm{Ad}_h(s)H\right)=\mathrm{Ad}_h(s)$ e a discrepância $d^h(s)$ é 1_G para todo $h\in H$ e todo $s\in\sigma\left(G/H\right)$. De acordo com o Lema 3.8, a operação $\oplus_\sigma: G/H\times G/H\to G/H$ definida por $((a,Id_{\mathcal{L}})\circ H)\oplus_\sigma((b,Id_{\mathcal{L}})\circ H)=(a\oplus b,Id_{\mathcal{L}})\circ H$ torna G/H um girogrupo à esquerda. A aplicação bijetora

$$\begin{array}{rccc}\psi: & \mathcal{L} & \to & G/H\\ & a & \mapsto & (a,Id_{\mathcal{L}})\circ H\end{array}$$

é um isomorfismo de $(\mathcal{L},\oplus)$ em $(G/H,\oplus_\sigma)$, pois $\psi\left(a\oplus b\right)=\psi(a)\oplus_\sigma\psi(b)$ para todo a e b em $\mathcal{L}$. □

Passamos a apresentar as últimas definições. O lema que segue, é utilizado no próximo capítulo. Observe que G é um grupo qualquer, logo estes resultados valem quando G for um grupo de Lie.

Definição 3.11 *Se* $(V,\oplus,\otimes)$ *é um espaço girovetorial quase à esquerda e* $(V,\oplus)$ *é um girogrupo à esquerda, então* $(V,\oplus,\otimes)$ *é chamado* ***espaço girovetorial à esquerda****.*

Definição 3.12 *Um* ***girogrupo*** $(\mathcal{L},\oplus)$ *é um girogrupo à esquerda que possui a propriedade do laço à esquerda*

$$gyr[a,b] = gyr[a \oplus b, b]$$

para quaisquer que sejam $a,b \in \mathcal{L}$*.*

Note que o girogrupo à esquerda $\left(\frac{S_3}{\langle(1,2)\rangle},\oplus_\sigma\right)$ já discutido, não é um girogrupo. De fato, por um lado, para $\sigma_1 = (2,3)$, $\sigma_2 = (1,3)$ tem-se $gyr[\sigma_1 H_1, \sigma_2 H_2] = \mathrm{Ad}_{(1,2)}$. Por outro, $(\sigma_1 H_0) \oplus_\sigma (\sigma_2 H_0) = \sigma_1\sigma_2 H_0 = \sigma_2 H_0$. Logo,

$$gyr[(\sigma_1 H_0) \oplus_\sigma (\sigma_2 H_0), \sigma_2 H_0] = \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}}$$

e consequentemente $gyr[\sigma_1 H_0, \sigma_2 H_0] \neq gyr[(\sigma_1 H_0) \oplus_\sigma (\sigma_2 H_0), \sigma_2 H_0]$.

Dizemos que um girogrupo $(\mathcal{L},\oplus)$ é **girocomutativo**, se satisfaz a lei da girocomutatividade

$$a \oplus b = gyr[a,b](b \oplus a)$$

para quaisquer que sejam a e $b \in \mathcal{L}$.

A seguir, apresentamos quais condições são satisfeitas para que $(G/H,\oplus_\sigma)$ seja um girogrupo girocomutativo.

Lema 3.13 *Sejam* G *um grupo,* $H \subset G$ *um subgrupo e* $\sigma : G/H \to G$ *uma seção de* $\pi : G \to G/H$ *com* $S = \sigma(G/H)$*. Suponha que*
i) S *é subgrupo de* G*.*
ii) A discrepância 3.2 pertence a $\cap_{g\in G}(gHg^{-1})$*.*
iii) $\sigma(x^{-1}y^{-1}H) = [\sigma(xyH)]^{-1}$ *para quaisquer que sejam* $x,y \in S$*.*
iv) $xyx \in S$ *para quaisquer que sejam* $x,y \in S$*.*
Então $(G/H,\oplus_\sigma)$ *é um girogrupo girocomutativo.*

Demonstração: Pelo Lema 3.8, *i)* e *ii)* implicam que $(G/H,\oplus_\sigma)$ é um girogupo à esquerda. Vamos mostrar que $(G/H,\oplus_\sigma)$ satisfaz a propriedade do laço à esquerda e também a lei da girocomutatividade.
Note que *i)* e *iii)* implicam a propriedade inversa do automorfismo,

$$\ominus_\sigma\{(xH) \oplus_\sigma (yH)\} = \{\ominus_\sigma(xH)\} \oplus_\sigma \{\ominus_\sigma(yH)\} \tag{3.5}$$

para $x = \sigma(xH)$ e $y = \sigma(yH)$ arbitrários. De fato, como S é subgrupo de G, tem-se que

$$\ominus_\sigma(\sigma(gH)H) = [\sigma(gH)]^{-1}H$$

para $gH \in G/H$. Assim

$$\ominus_\sigma\{(xH) \oplus_\sigma (yH)\} = [\sigma(xyH)]^{-1}H$$

é igual a

$$\{\ominus_\sigma(xH)\} \oplus_\sigma \{\ominus_\sigma(yH)\} = \sigma(x^{-1}y^{-1}H)H,$$

pela condição iii).

Seja $G_0 = \mathcal{L} \times Aut(\mathcal{L}, \oplus)$, o produto giro-semidireto do girogrupo à esquerda $\mathcal{L}$ com o giroautomorfismo $Aut(\mathcal{L}, \oplus)$. A igualdade

$$[(x, \alpha) \circ (y, \beta)]^{-1} = (y, \beta)^{-1} \circ (x, \alpha)^{-1}$$

implica em,

$$\begin{aligned}
& (\ominus\beta^{-1}\alpha^{-1}(gyr[x, \alpha(y)])^{-1}(x \oplus \alpha(y)), \beta^{-1}\alpha^{-1}(gyr[x, \alpha(y)])^{-1} \\
= \; & (\ominus\beta^{-1}(y), \beta^{-1}) \circ (\ominus\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}) \\
= \; & (\ominus\beta^{-1}\alpha^{-1}(\alpha(y) \oplus x), gyr[\ominus\beta^{-1}(y), \ominus\beta^{-1}\alpha^{-1}(x)]\beta^{-1}\alpha^{-1}).
\end{aligned}$$

Daí, para $z = \alpha(y)$ obtemos

$$(gyr[x, z])^{-1}(x \oplus z) = z \oplus x \tag{3.6}$$

e

$$\beta^{-1}\alpha^{-1}(gyr[x, z])^{-1} = gyr[\ominus\beta^{-1}\alpha^{-1}(z), \ominus\beta^{-1}\alpha^{-1}(x)]\beta^{-1}\alpha^{-1}. \tag{3.7}$$

Essa última igualdade implica que

$$(gyr[x, z])^{-1} = gyr[\ominus z, \ominus x] \tag{3.8}$$

para quaisquer que sejam $x, z \in \mathcal{L}$. Além disso, a propriedade inversa do automorfismo e o Lema 3.5 nos fornece

$$\begin{aligned}
\{\ominus(a \oplus b)\} \oplus gyr[a, b](\ominus c) &= \{\ominus(a \oplus b)\} \oplus \{\ominus gyr[a, b]c\} \\
&= \ominus\{(a \oplus b) \oplus gyr[a, b]c\} \\
&= \ominus\{a \oplus (b \oplus c)\} \\
&= (\ominus a) \oplus \{(\ominus b) \oplus (\ominus c)\} \\
&= \{(\ominus a) \oplus (\ominus b)\} \oplus gyr[\ominus a, \ominus b](\ominus c) \\
&= \{\ominus(a \oplus b)\} \oplus gyr[\ominus a, \ominus b](\ominus c).
\end{aligned}$$

Logo,

$$gyr[a,b] = gyr[\ominus a, \ominus b] \tag{3.9}$$

para quaisquer que sejam $a, b \in \mathcal{L}$.

De 3.6 , 3.8 e 3.9, temos que a lei da girocomutatividade vale para qualquer girogrupo à esquerda $(\mathcal{L}, \oplus)$ e em particular vale para $(G/H, \oplus_\sigma)$. Resta mostrar que $(G/H, \oplus_\sigma)$ satisfaz a propriedade do laço à esquerda. Para x e y arbitrários em S, sabemos que $h(yx) = [\sigma(yxH)]^{-1}yx \in H$. Então,

$$x(yx) = x(\sigma(yxH)h(yx)) = \sigma(x\sigma(yxH))h(x\sigma(yxH))h(yx) \in S.$$

De onde segue que, $h(x\sigma(yxH)) = [h(yx)]^{-1}$. Observe que, de 3.8 e 3.9, tem-se

$$(gyr[yH, xH])^{-1} = (gyr[xH, yH]).$$

Dessa forma, sabendo que $gyr[aH, bH] = \mathrm{Ad}_{h(ab)}$ para quaisquer $a, b \in S$ temos

$$\begin{aligned} gyr[xH, (yH) \oplus_\sigma (xH)] &= gyr[xH, \sigma(yxH)H] \\ &= \mathrm{Ad}_{h(x\sigma(yxH))} \\ &= \mathrm{Ad}_{[h(yx)]^{-1}} \\ &= [\mathrm{Ad}_{h(yx)}]^{-1} \\ &= (gyr[yH, xH])^{-1} \\ &= gyr[xH, yH]. \end{aligned}$$

Enquanto que,

$$\begin{aligned} gyr[(yH) \oplus_\sigma (xH), xH] &= gyr[xH, (yH) \oplus_\sigma (xH)])^{-1} \\ &= (gyr[xH, yH])^{-1} \\ &= gyr[yH, xH]. \end{aligned}$$

Ou seja, $(G/H, \oplus_\sigma)$ satisfaz a propriedade do laço à esquerda. Portanto, $(G/H, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo e é girocomutativo. $\square$

Finalmente definimos um espaço girovetorial.

Definição 3.14 *Se $(V, \oplus, \otimes)$ é um espaço girovetorial à esquerda e $(V, \oplus)$ é um girogrupo girocomutativo, então $(V, \oplus, \otimes)$ é chamado* ***espaço girovetorial****.*

Ressaltemos que, dado um espaço girovetorial $(G, \oplus, \otimes)$, a expressão $a \oplus b \otimes t$, com $a, b \in G$ e $t \in \mathbb{R}$, é chamada **giro-reta**. Essa expressão é usada posteriormente em nosso trabalho.

Capítulo 4

Espaços Girovetoriais de Lie

Este capítulo dá mais sentido ao trabalho. Aqui atingimos um de nossos objetivos, que é introduzir uma estrutura de espaço girovetorial de Lie em um espaço homogêneo. A referência utilizada se encontra em [21], e esta é a única que trata este assunto.

Definição 4.1 *Se G um grupo de Lie conexo, $H \subset G$ é um subgrupo fechado conexo de G e $\sigma : G/H \to G$ é uma seção de $\pi : G \to G/H$ tal que $\sigma(G/H)$ é subgrupo de G. Então $(G/H, \oplus_\sigma)$ é chamado de* ***laço de Lie à esquerda.***

Sejam G um grupo de Lie conexo, $H \subset G$ um subgrupo fechado conexo de G e $\sigma : G/H \to G$ a seção da projeção canônica. Suponhamos que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ se restringe ao difeomorfismo

$$\exp : T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H) \to \sigma(G/H). \tag{4.1}$$

Como $(d\sigma)_H : T^{\mathbb{R}}_H(G/H) \to T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ é um isomorfismo linear e a restrição $\pi|_{\sigma(G/H)}: \sigma(G/H) \to G/H$ é um difeomorfismo, segue que

$$\pi \exp (d\sigma)_H : T^{\mathbb{R}}_H(G/H) \to G/H \tag{4.2}$$

é um difeomorfismo. Para todo x em $\sigma(G/H)$ temos que,

$$x^{-1} = \exp(-\exp^{-1}(x)) \in \sigma(G/H)$$

Portanto $(G/H, \oplus_\sigma)$ é um laço de Lie à esquerda.

Definimos uma multiplicação escalar por números reais

$$\begin{array}{rccl} \otimes_\sigma : & \mathbb{R}\times (G/H) & \to & G/H \\ & (t, \exp(u)H) & \mapsto & t \otimes_\sigma (\exp(u)H) = \exp(tu)\, H, \end{array} \tag{4.3}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $u \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$. É imediato que

$$\begin{aligned} 1 \otimes_\sigma (\exp(u)H) &= \exp(u)H \\ (rs) \otimes_\sigma (\exp(u)H) &= \exp(rsu)H = r \otimes_\sigma (s \otimes_\sigma \exp(u)H) = s \otimes_\sigma (r \otimes_\sigma \exp(u)H), \end{aligned}$$

para quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$ e todo $u \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$. Como $\exp(v)\exp(w) = \exp(v+w)$ sempre que $v, w \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ comutam, então

$$\begin{aligned} [r \otimes_\sigma (\exp(u)H)] \oplus_\sigma [s \otimes_\sigma (\exp(u)H)] &= (\exp(ru)H) \oplus_\sigma (\exp(su)H) \\ &= \sigma\left(\exp(ru)H\right)\exp(su)H \\ &= \pi\sigma\left(\exp(ru)H\right)\exp(su)H \\ &= \exp(ru)H\exp(su)H \\ &= \exp(ru)\exp(su)H \\ &= \exp(ru+su)H \\ &= \exp((r+s)u)H \\ &= (r+s) \otimes_\sigma (\exp(u)H), \end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $r, s \in \mathbb{R}$ e todo $u \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$. Pelo Lema 3.5,

$$gyr[\exp(u)H, \exp(v)H](\exp(w)H) = \mathrm{Ad}_{h(\exp(u)\exp(v))}(\exp(w))H,$$

onde

$$h\left(\exp(u)\exp(v)\right) = [\sigma(\exp(u)\exp(v)H)]^{-1}\exp(u)\exp(v) \in H$$

para quaisquer que sejam $u, v, w \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$. Em particular, para r, s em $\mathbb{R}$, u em $T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ e comutando ru e su, temos

$$\exp(ru)\exp(su) = \exp((r+s)u) \in \sigma(G/H) \subset G,$$

onde $\sigma\left(\exp(ru)\exp(su)H\right) = \exp(ru)\exp(su)$ e $h\left(\exp(ru)\exp(su)\right) = 1$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} gyr\left[r \otimes_\sigma (\exp(u)H), s \otimes_\sigma (\exp(u)H)\right](\exp(y)H) &= gyr\left[\exp(ru)H, \exp(su)H\right](\exp(y)H) \\ &= \mathrm{Ad}_{h(\exp(ru)\exp(su))}(\exp(y)H) \\ &= \mathrm{Ad}_{1_G}(\exp(y)H) \\ &= \exp(y)H. \end{aligned}$$

Ou seja, $gyr\left[r\otimes_\sigma(\exp(u)H), s\otimes_\sigma(\exp(u)H)\right] = Id_{G/H}$. Para $u,v,w\in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$, $t\in\mathbb{R}$, $h\in H$ e usando $h\exp(u)h^{-1}=\exp(huh^{-1})$ demonstrado em [11], temos que

$$\begin{aligned} gyr\left[\exp(u)H,\exp(v)H\right]\{t\otimes_\sigma\exp(w)H\} &= \left[\mathrm{Ad}_{h(\exp(u)\exp(v))}(\exp(tw))\right]H \\ &= \exp\left(t\mathrm{Ad}_{h(\exp(u)\exp(v))}(w)\right)H \\ &= t\otimes_\sigma\left(\exp\left(\mathrm{Ad}_{h(\exp(u)\exp(v))}(w)\right)H\right) \\ &= t\otimes_\sigma\{\mathrm{Ad}_{h(\exp(u)\exp(v))}(\exp(w))H\} \\ &= t\otimes_\sigma\{gyr\left[\exp(u)H,\exp(v)H\right](\exp(w)H)\}. \end{aligned}$$

Diante disso, segue a seguinte proposição:

Proposição 4.2 *Seja G um grupo de Lie conexo. Considere a aplicação* $\exp:\mathfrak{g}\to G$, *$H\subset G$ um subgrupo fechado conexo e $\sigma:G/H\to G$ a seção de $\pi:G\to G/H$ tal que*

$$\pi\exp(d\sigma)_H : T^{\mathbb{R}}_H(G/H)\to G/H \tag{4.4}$$

é um difeomorfismo global. Então

$$(\exp(u)H)\oplus_\sigma(\exp(v)H)=\exp(u)\exp(v)H \tag{4.5}$$

para quaisquer que sejam $u,v\in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ e 4.3 define um espaço girovetorial de Lie quase à esquerda $(G/H,\oplus_\sigma,\otimes_\sigma)$.

Observe que a lei distributiva é omitida na definição 3.6. Vemos na próxima proposição, que em espaços girovetoriais de Lie quase à esquerda, esta propriedade é característica específica das curvas integrais de campos de vetores comutativos.

Proposição 4.3 *Seja G um grupo de Lie com aplicação exponencial* $\exp:\mathfrak{g}\to G$ *e representação fiel $\rho:G\to GL(n,\mathbb{R})$. Considere $H\subset G$ um subgrupo fechado conexo e $\sigma:G/H\to G$ uma seção de $\pi:G\to G/H$. Suponha que 4.2 é um difeomorfismo global e considere as operações 4.3 e 4.5. Então,*

$$t\otimes_\sigma[\exp(u)H\oplus_\sigma\exp(v)H]=[t\otimes_\sigma\exp(u)H]\oplus_\sigma[t\otimes_\sigma\exp(v)H] \tag{4.6}$$

para todo $t\in\mathbb{R}$, se e só se, $u,v\in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ comutam, ou seja, $[u,v]=0$.

Demonstração: De início note que o homomorfismo injetor $\rho:G\to GL(n,\mathbb{R})$ de grupos induz o homomorfismo de álgebras de Lie $(d\rho)_{1_G}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Suponhamos que $u, v \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ comutam. Note que u e v são transformados nas matrizes $U = (d\rho)_{1_G}u$, $V = (d\rho)_{1_G}v$ respectivamente, ambas comutativas e pertencentes a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Consequentemente, para todo t em $\mathbb{R}$ tem-se que,

$$\begin{aligned}
\exp(tu)\exp(tv) &= \rho^{-1}\left(\exp((d\rho)_{1_G}tu)\right)\rho^{-1}\left(\exp((d\rho)_{1_G}tv)\right)\\
&= \rho^{-1}[(\exp((d\rho)_{1_G}tu))\,(\exp((d\rho)_{1_G}tu))]\\
&= \rho^{-1}[\exp(tU)\exp(tV)]\\
&= \rho^{-1}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}U^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}V^l\right)\right)\\
&= \rho^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}U^iV^{k-i}\right)\right)\\
&= \rho^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(U+V)^k\right)\\
&= \rho^{-1}\left(\exp(t(U+V))\right)\\
&= \rho^{-1}\left(\exp(d\rho)_{1_G}\,[t(u+v)]\right)\\
&= \exp\left(t\,(u+v)\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[t\otimes_\sigma \exp(u)H]\oplus_\sigma [t\otimes_\sigma \exp(v)H] &= \exp(tu)\exp(tv)H\\
&= \exp\left(t\,(u+v)\right)H\\
&= t\otimes_\sigma\left(\exp(u+v)H\right)\\
&= t\otimes_\sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right)\\
&= t\otimes_\sigma\left[(\exp(u)H)\oplus_\sigma(\exp(v)H)\right].
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que 4.6 aconteça. Se $w = \exp^{-1}\sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right)$, então

$$\begin{aligned}
\exp(w)H &= \exp\left(\exp^{-1}\sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right)\right)H\\
&= \sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right)H\\
&= \pi\sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right)\\
&= \exp(u)\exp(v)H.
\end{aligned}$$

Denotando $U = (d\rho)_{1_G}u$, $V = (d\rho)_{1_G}v$ e $W = (d\rho)_{1_G}w$ tem-se que,

$$\begin{aligned} \exp(tW)I_n &= \exp\left((d\rho)_{1_G}w\right)\rho(e) \\ &= \rho\left(\exp(tw)\right)\rho(e) \\ &= \rho\left(\exp(tw)e\right) \\ &= \rho\left(\exp(tu)\exp(tv)\right) \\ &= \exp(tU)\exp(tV), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e para algum $e \in H$ fixo, tal que $I_n = \rho(e) \in GL(n, \mathbb{R})$. Como a aplicação exponencial de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é dada pela série exponencial, concluímos que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} W^k\right) I_n = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os lados dessa igualdade em $t = 0$ segue que

$$\begin{aligned} W &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} W^k\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right)|_{t=0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)|_{t=0} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right)|_{t=0} \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)|_{t=0} \\ &= U + V. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (U+V)^k\right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que

$$\begin{aligned} U^2 + UV + VU + V^2 &= (U+V)^2 \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (U+V)^k\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right)|_{t=0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)|_{t=0} \\ +2\frac{d}{dt}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right) &|_{t=0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)|_{t=0} \\ +\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} U^l\right) &|_{t=0} \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} V^m\right)|_{t=0} \\ &= U^2 + 2UV + V^2. \end{aligned}$$

Portanto, $VU = UV$. Como,

$$[U,V] = [(d\rho)_{1_G}u,(d\rho)_{1_G}v] = (d\rho)_{1_G}[u,v] = 0,$$

da injetividade de $(d\rho)_{1_G} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, tem-se que $[u,v] = 0$. $\square$

Nosso objetivo agora é estudar métricas em G/H para as quais G age por isometrias. Essas métricas são chamadas invariantes. As próximas definições, servem de suporte na demonstração do lema que as segue.

Definição 4.4 *Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável da variedade M na variedade N, e g é uma métrica riemaniana em N, então a métrica f^*g dada por*

$$(f^*g)(u_p, v_p) = g_{f(p)}\left((df)_p u_p, (df)_p v_p\right)$$

para quaisquer que sejam $u_p, v_p \in T_pM$ e para todo $p \in M$, é chamada ***pull-back de*** *g* ***por*** *f.*

Definição 4.5 1) *Uma métrica riemaniana g em uma variedade M é invariante sobre um difeomorfismo $f : M \to M$, se o pull-back f^*g coincide com g.*
2) *Uma métrica riemaniana g é invariante ou G-invariante com respeito ao grupo $G = \{\varphi : M \to M;\ \varphi$ difeormorfismo$\}$, se g é invariante sobre qualquer elemento de G.*
3) *Uma métrica riemaniana g sobre laço de Lie à esquerda $(G/H, \oplus_\sigma)$, se diz $\oplus_\sigma$-invariante à esquerda, se g é invariante sobre as translações à esquerda $L_{aH} : G/H \to G/H$, dadas por $L_{aH}(xH) = (aH) \oplus_\sigma (xH)$, para todo $aH \in G/H$.*

Lema 4.6 *Seja $(G/H, \oplus_\sigma)$ um laço de Lie à esquerda associado com a seção $\sigma : G/H \to G$ de $\pi : G \to G/H$ tal que, $\sigma(G/H)$ é subgrupo de G e g é uma métrica riemaniana em G/H. Então, g é G-invariante à esquerda, se e só se, g é $\oplus_\sigma$-invariante à esquerda e* $\mathrm{Ad}(H)$*-invariante.*

Demonstração: Se g é invariante por G-multiplicações à esquerda em G/H, então, g é $\oplus_\sigma$-invariante à esquerda e $\mathrm{Ad}(H)$-invariante. De fato,

$$L_{aH}(xH) = (aH) \oplus_\sigma (xH) = \sigma(aH)xH$$

atua como uma multiplicação à esquerda por $\sigma(aH) \in G$, e

$$\mathrm{Ad}_h(xH) = \mathrm{Ad}_h(x)H = hxh^{-1}H = hxH$$

atua como uma multiplicação à esquerda por $h \in G$. A recíproca é análoga. □

O próximo resultado, que está embutido em várias demonstrações, tem mais sentido quando definimos uma seção curvada não positivamente.

Proposição 4.7 *Sejam G um grupo de Lie conexo com* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *e* $M \subset G$ *uma subvariedade completa e simplesmente conexa. Então são equivalentes:*
i) $\exp : T^{\mathbb{R}}_{1_G} M \to M$ *é um difeomorfismo global.*
ii) M possui curvatura seccional não positiva com respeito a toda métrica g em G que é G-invariante à esquerda.
iii) M possui curvatura seccional não positiva com respeito a alguma métrica g em G que é G-invariante à esquerda.

Demonstração: Ver Proposição 1.2 em [20]. □

Definição 4.8 *Sejam G um grupo de Lie conexo e $H \subset G$ subgrupo fechado conexo. A seção $\sigma : G/H \to G$ de $\pi : G \to G/H$ se diz **curvada não positivamente** se a imagem $\sigma(G/H) \subset G$ é uma subvariedade completa e simplesmente conexa com uma curvatura seccional não positiva, com respeito a alguma métrica G-invariante em G.*

Vale ressaltar que, as seções curvadas não positivamente em um grupo de Lie, permitem uma multiplicação escalar, obtendo-se assim um espaço girovetorial de Lie quase à esquerda. Neste contexto, o corolário seguinte, mostra ainda que, as métricas G-invariantes à esquerda no espaço homogêneo G/H, faz com que as geodésicas sejam giro-retas e os giradores de Thomas, isometrias.

Corolário 4.9 *Seja $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ um espaço girovetorial de Lie quase à esquerda associado com a seção $\sigma : G/H \to G$ curvada não positivamente, e seja g métrica em G/H, G-invariante à esquerda. Então*
i) A g-geodésica $\gamma_{a,b}(t)$ que passa por $\gamma_{a,b}(0) = a$ e $\gamma_{a,b}(1) = b$, coincide com a giro-reta

$$\gamma_{a,b}(t) = a \oplus_\sigma \{t \otimes_\sigma (\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b)\}, \tag{4.7}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

ii) Os giradores de Thomas $gyr[a,b]$ são isometrias de g para quaisquer que sejam a, b em G/H.

Demonstração: *i)* De acordo com o Teorema $IV.3.3(iii)$ de [11], para todo $u \in \mathfrak{g}$, a g-geodésica em $e = H \in G/H$ tangente a $(d\pi)_{1_G}(u) \in T_H^{\mathbb{R}}(G/H)$ é $\exp(tu)H$, onde $t \in \mathbb{R}$. Em particular, para quaisquer $a, b \in G/H$ e $u = \exp^{-1}\sigma(\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b) \in T_{1_G}^{\mathbb{R}}\sigma(G/H)$, as curvas $t \otimes_\sigma (\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b) = t \otimes_\sigma (\exp(u)H) = \exp(tu)H$ são g-geodésicas para todo t em $\mathbb{R}$. Do Lema 4.6 tem-se que g é uma métrica $\oplus_\sigma$-invariante à esquerda. Dessa forma, as translações à esquerda $L_a : G/H \to G/H$ dadas por $L_a(x) = a \oplus_\sigma x$ são isometrias e transformam as geodésicas $t \otimes_\sigma (\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b)$ na geodésica 4.7 com $\gamma_{a,b}(0) = a \oplus_\sigma H = a$ e $\gamma_{a,b}(1) = a \oplus_\sigma (\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b) = b$. Reciprocamente, se $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \to G/H$ é uma g-geodésica que passa por $\gamma_{a,b}(0) = a$ e $\gamma_{a,b}(1) = b$, então $\mu(t) = L_{\ominus_\sigma a}(\gamma_{a,b}(t))$ é uma g-geodésica passando por $\mu(0) = H$ e $\mu(1) = \ominus_\sigma a \oplus_\sigma b$. Desde que a métrica g em G/H é completa e curvada não positivamente, a geodésica μ é única, então

$$\mu(t) = \ominus_\sigma a \otimes_\sigma \gamma_{a,b}(t) = \exp\left(t \exp^{-1}\sigma(\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b)\right) H = t \otimes_\sigma (\ominus_\sigma a \oplus_\sigma b)$$

e segue o desejado.

ii) No Lema 3.5 *b)* temos que para quaisquer que sejam $a, b \in G/H$, os giradores atuam como conjugações por $h(ab) = [\sigma(a \oplus_\sigma b)]^{-1}\sigma(a)\sigma(b) \in H$. Por um lado, pelo Lema 4.6, a métrica g em G/H é $\mathrm{Ad}(H)$-invariante. Dessa forma, as conjugações por H, e em particular os giradores $gyr[a,b]$ são isometrias de g. $\square$

Corolário 4.10 *Suponha que G/H é um espaço homogêneo com métrica g G-invariante à esquerda e $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ é um espaço girovetorial de Lie quase à esquerda, associado com a seção $\sigma : G/H \to G$ curvada não positivamente de $\pi : G \to G/H$. Seja*

$$\|x\| = \left[g_e\left((d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x), (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

para todo $x \in G/H$. Então, para quaisquer que sejam $x, y \in G/H$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se que:

i) $d(x,y) = \|\ominus_\sigma x \oplus_\sigma y\|$.

ii) $\|x\| \geq 0$ com $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = e = H$.

iii) $\|t \otimes_\sigma x\| = |t| \, \|x\|$.

iv) $\|x \oplus_\sigma y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

v) $\|\exp(\exp^{-1}\sigma(x) + \exp^{-1}\sigma(y))\, H\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demonstração: *i)* De acordo com o Lema 4.6, as translações à esquerda $L_{\ominus_\sigma x} : G/H \to G/H$ dadas por $L_{\ominus_\sigma x}(y) = \ominus_\sigma x \oplus_\sigma y$ são isometrias da métrica g G-invariante à esquerda. Portanto,

$$d(x, y) = d(e, \ominus_\sigma x \oplus_\sigma y)$$

para quaisquer que sejam x,$y \in G/H$. Dessa forma, se mostrarmos que

$$d(e, x) = \|x\|$$

para todo $x \in G/H$, teremos o desejado. Pelo Corolário 4.9 *i)* temos que

$$\gamma(t) = t \otimes_\sigma x = \exp\left(t \exp^{-1}\sigma(x)\right) H$$

é a única geodésica que passa por $\gamma(0) = e = H$ e $\gamma(1) = x$. Pela definição de geodésica, o campo de vetores tangentes $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ é paralelo ao longo de si mesmo, de modo que os comprimentos

$$\begin{aligned} g_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\right) &= g_e\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\mid_{t=0}, \frac{d}{dt}\gamma(t)\mid_{t=0}\right) \\ &= g_e\left((d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x), (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x)\right) \end{aligned}$$

são constantes para todo $t \in [0, 1]$. Conseqüentemente, sabendo que distância $d(e, x)$ é igual ao comprimento do segmento da geodésica $\gamma(t)$ em $t \in [0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned} d(e, x) &= \int_0^1 \left[g_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[g_e\left((d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x), (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^1 dt \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

ii) Pela definição de métrica riemaniana, a restrição de g_e ao espaço tangente na origem, é uma forma bilinear positiva definida

$$g_e : T_e^{\mathbb{R}}(G/H) \times T_e^{\mathbb{R}}(G/H) \to \mathbb{R}.$$

Portanto $g_e(\xi, \xi) \geq 0$ para todo $\xi \in T_e^{\mathbb{R}}(G/H)$ e $g_e(\xi, \xi) = 0$, somente quando $\xi = 0$. Tomando $\xi = (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x)$ para $x \in G/H$ arbitrário, temos $\|x\| \geq 0$ com $\|x\| = 0$, se e somente se, $x = \sigma^{-1}\exp(d\sigma)_e\xi = \sigma^{-1}\exp(d\sigma)_e 0 = \sigma^{-1}\exp(0) = \sigma^{-1}(1_G) = e = H$.

$iii)$ Dados $t \in \mathbb{R}$ e $x \in G/H$ temos que $t \otimes_\sigma x = \exp\left(t\exp^{-1}\sigma(x)\right)H$. Como $g_e(\ ,\ )$ é bilinear, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|t \otimes_\sigma x\| &= \left[g_e\left(t(d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x), t(d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[t^2 g_e\left((d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x), (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= |t|\,\|x\|\,.
\end{aligned}$$

$iv)$ A desigualdade triangular para distância, nos fornece

$$d(\ominus_\sigma x, y) \leq d(\ominus_\sigma x, e) + d(e, y),$$

para quaisquer que sejam x,$y \in G/H$. Dessa forma, por $i)$ e $\ominus_\sigma x = (-1) \otimes_\sigma x$, podemos escrever $d(\ominus_\sigma x, y) = \|x \oplus_\sigma y\|$, $d(\ominus_\sigma x, e) = \|x\|$ e $d(e, y) = \|y\|$. Portanto, segue o desejado.

$v)$ No espaço vetorial com produto interno $(T_e^{\mathbb{R}}(G/H), g_e)$, temos a desigualdade triangular,

$$[g_e(\xi + \eta, \xi + \eta)]^{\frac{1}{2}} \leq [g_e(\xi, \xi)]^{\frac{1}{2}} + [g_e(\eta, \eta)]^{\frac{1}{2}}$$

para ξ e η tomados arbitrariamente em $T_e^{\mathbb{R}}(G/H)$. Se

$$\xi = (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(x) \qquad \text{e} \qquad \eta = (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma(y),$$

então

$$\left[g_e\left((d\pi)_{1_G}(\exp^{-1}\sigma(x) + \exp^{-1}\sigma(y)), (d\pi)_{1_G}(\exp^{-1}\sigma(x) + \exp^{-1}\sigma(y))\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Aplicando $\sigma\pi\exp(\zeta) = \sigma\pi\sigma(\exp(\zeta)H) = \sigma(\exp(\zeta)H) = \exp(\zeta)$ ao vetor tangente ζ igual a $\exp^{-1}\sigma(x) + \exp^{-1}\sigma(y)$, temos

$$(d\pi)_{1_G}(\exp^{-1}\sigma(x) + \exp^{-1}\sigma(y)) = (d\pi)_{1_G}\exp^{-1}\sigma\left[\exp\left(\exp^{-1}\sigma(x) + \exp^{-1}\sigma(y)\right)H\right].$$

Usando 4.8, obtemos o desejado. $\square$

Este resultado mostrou principalmente, que a distância associada à origem é uma norma e que esta norma, satisfaz a desigualdade triangular, que aqui chamamos de desigualdade girotriangular.

Na sequência, definimos girogrupo de Lie à esquerda e posteriormente, mostramos que $(G/H, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo de Lie à esquerda e é isomorfo a qualquer outro girogrupo de Lie à esquerda.

Definição 4.11 *Um girogrupo à esquerda $(\mathcal{L}, \oplus)$ é dito um **girogrupo de Lie à esquerda**, se o conjunto $\mathcal{L}$ é uma variedade diferenciável e as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathcal{L}\times\mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & (a,b) & \mapsto & a\oplus b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \ominus: & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & a & \mapsto & \ominus a \end{array}$$

são diferenciáveis.

Corolário 4.12 *Se G é um grupo de Lie conexo, $H \subset G$ um subgrupo fechado conexo e $\sigma : G/H \to G$ é uma seção da projeção canônica, então*
i) $(G/H, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo de Lie à esquerda.
ii) Todo girogrupo de Lie à esquerda $(\mathcal{L}, \oplus)$ é isomorfo ao girogrupo de Lie à esquerda $(G/H, \oplus_\sigma)$.

Demonstração: *i)* É imediato, pois G/H é uma variedade diferenciável e $\oplus_\sigma$ e $\ominus_\sigma$ são aplicações diferenciáveis.
ii) Seja $(\mathcal{L}, \oplus)$ um girogrupo de Lie à esquerda arbitrário. Afirmamos que o grupo $Aut(\mathcal{L}, \oplus)$ é um subgrupo fechado do grupo de Lie de difeomorfismos $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$. De fato, é claro que, $Aut(\mathcal{L}, \oplus)$ é subgrupo do grupo de difeomorfismos $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Seja $f_n \in Aut(\mathcal{L}, \oplus)$. Como $f(a\oplus b) = \lim f_n(a\oplus b) = \lim(f_n(a)\oplus f_n(b)) = \lim f_n(a) \oplus \lim f_n(b) = f(a)\oplus f(b)$, segue o desejado. Portanto, do Teorema de Cartan segue que $Aut(\mathcal{L}, \oplus)$ é um grupo de Lie. Note que, as translações à esquerda $L_a : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ com $a \in \mathcal{L}$ são difeomorfismos tal que os giradores $gyr[a,b] \in Aut(\mathcal{L}, \oplus)$ para quaisquer que sejam a,$b \in \mathcal{L}$. Repetindo a demonstração da Proposição 3.10, construímos o grupo $G = \mathcal{L} \times H_0$, com $H_0 \in Aut(\mathcal{L}, \oplus)$ contendo todas os giradores $gyr[a,b]$. As operações 3.3 e 3.4 são diferenciáveis em todos os argumentos. Assim, G é um grupo de Lie e $H = \{(e,\alpha);\ \alpha \in H_0\}$ é subgrupo de G. Então $\sigma : G/H \to G$ dada por $\sigma((x,\alpha)\circ H) = (x, Id_{\mathcal{L}})$ é uma seção de $\pi : G \to G/H$ e

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{L} & \to & G/H \\ & x & \mapsto & (x, Id_{\mathcal{L}})\circ H \end{array}$$

mostra que, $(\mathcal{L}, \oplus)$ é isomorfo ao girogrupo de Lie à esquerda $(G/H, \oplus_\sigma)$. $\square$

Estabelecemos agora condições para que, $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$, seja um espaço girovetorial de Lie à esquerda com respeito as operações 4.3 e 4.5.

Corolário 4.13 *Sejam G um grupo de Lie conexo, $H \subset G$ um subgrupo fechado conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e $\sigma : G/H \to G$ uma seção curvada não positivamente de $\pi : G \to G/H$ com*

$$\left[\mathfrak{h}, T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)\right] \subseteq T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H).$$

Então $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ é um espaço girovetorial de Lie à esquerda com respeito as operações 4.3 e 4.5.

Demonstração: De acordo com a Proposição 4.2, $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ é um espaço girovetorial de Lie quase à esquerda. Note que, todo $h \in H$ é da forma $h = \exp(\xi)$ para algum (não necessariamente o único) $\xi \in \mathfrak{h}$. Como σ é curvada não positivamente, para algum $x \in S = \sigma(G/H)$ existe um único $u = \exp^{-1}(x) \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ com $x = \exp(u)$. Por hipótese, $T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ é $\mathrm{ad}(\xi)$-invariante para todo $\xi \in \mathfrak{h}$ e em particular, $\mathrm{ad}(\xi)(u)$ está em $T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$ para todo número k natural e todo u em $T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_h(x) &= \mathrm{Ad}_h\left(\exp(u)\right) \\
&= \exp\left(\mathrm{Ad}_h(u)\right) \\
&= \exp\left(\mathrm{Ad}_{\exp(\xi)}(u)\right) \\
&= \exp\left(\exp\left(\mathrm{ad}(\xi)(u)\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}(\xi)^k(u)}{k!}\right) \in \exp\left(T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/H)\right) = \sigma(G/H).
\end{aligned}$$

Em outras palavras, $\sigma\left(\mathrm{Ad}_h(x)H\right) = \mathrm{Ad}_h(x)$ e a discrepância definida em 3.2 é igual a 1_G para todo $h \in H$ e todo $x \in \sigma(G/H)$. Aplicando o Lema 3.8, concluímos que $(G/H, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo de Lie à esquerda. Portanto $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ é um espaço girovetorial de Lie à esquerda. □

Antes de verificarmos quando $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ é um espaço girovetorial de Lie com as operações 4.3 e 4.5, precisamos da definição seguinte:

Definição 4.14 *Uma **anti-involução** é uma bijeção $\tau : G \to G$ com*

$$\tau^2 = Id_G \qquad e \qquad \tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$$

para quaisquer que sejam a,b $\in G$.

Corolário 4.15 *Sejam G um grupo de Lie conexo, $H \subset G$ um subgrupo fechado conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e $\sigma : G/H \to G$ uma seção curvada não positivamente de $\pi : G \to G/H$. Suponha que $S = \sigma(G/H)$ e que valem*

a) $\left[\mathfrak{h}, T^{\mathbb{R}}_{1_G}S\right] \subseteq T^{\mathbb{R}}_{1_G}S$

b) $\left[T^{\mathbb{R}}_{1_G}S, T^{\mathbb{R}}_{1_G}S\right] \subseteq \mathfrak{h}$

c) Existe uma anti-involução $\tau : G \to G$, cujo o conjunto dos pontos fixos de τ, é dado por $Fix(\tau) = S$.

Então, as operações 4.3 e 4.5 tornam G/H um espaço girovetorial de Lie.

Demonstração: Pelo Corolário 4.13, a seção $\sigma : G/H \to G$ curvada não positivamente sujeita a condição $a)$ determina o espaço girovetorial de Lie à esquerda $(G/H, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$. Resta mostrar que $(G/H, \oplus_\sigma)$ é girocomutativo. Isso é possível mostrando-se que as hipóteses implicam nas condições $iii)$ e $iv)$ do Lema 3.13.

Primeiramente, observe que $a)$ e $b)$ implicam $iii)$. De fato, para quaisquer que sejam u,$v \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}S$ existe um único $w \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}S$, tal que $\sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right) = \exp(w)$. Assim, $\exp(-w)\exp(u)\exp(v) \in H$. Recordemos que a aplicação de Campbell-Hausdorff $\mathcal{F} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definida por $\exp(x)\exp(y) = \exp(\mathcal{F}(x,y))$ para x,$y \in \mathfrak{g}$, é dada pela série

$$\mathcal{F}(x,y) = \sum_{m,k_i,l_i} \frac{(-1)^{m+k_1+l_1+\cdots+k_m+l_m}\mathrm{ad}_y^{l_m}\mathrm{ad}_x^{k_m}\cdots\mathrm{ad}_y^{l_1}\mathrm{ad}_x^{k_1-1}(x)}{m\left(k_1+l_1+\cdots+k_m+l_m\right)l_m!k_m!\cdots l_1!k_1!}, \tag{4.9}$$

onde m é um número natural e k_i e l_i são inteiros positivos com $k_i + l_i > 0$. Cada um dos termos $\mathrm{ad}_y^{l_m}\mathrm{ad}_x^{k_m}\cdots\mathrm{ad}_y^{l_1}\mathrm{ad}_x^{k_1-1}(x)$ tem grau total $k_1 + l_1 + \cdots + k_m + l_m$ com respeito a x e y. Vamos denotar por $\left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_0$ a soma dos termos de $\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))$ com grau par e similarmente $\left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_1$ denotará a soma dos termos de grau ímpar. As condições $a)$ e $b)$ implicam que $\left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_0 \in \mathfrak{h}$ e $\left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_1 \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}S$ para quaisquer que sejam u, v e w em $T^{\mathbb{R}}_{1_G}S$. Dessa forma,

$$\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v)) = \left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_0 + \left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_1 \in \mathfrak{h},$$

se, e somente se, $\left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_1 = 0$. Se isso acontecer, então os sinais de u, v e w mudariam simultaneamente, ou seja

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{F}(w,\mathcal{F}(-u,-v))\right]_0 &= \left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_0 \qquad \text{e} \\ \left[\mathcal{F}(w,\mathcal{F}(-u,-v))\right]_1 &= -\left[\mathcal{F}(-w,\mathcal{F}(u,v))\right]_1 = 0. \end{aligned}$$

Então, se $\mathcal{F}(-w, \mathcal{F}(u,v)) \in \mathfrak{h}$ segue que $\mathcal{F}(w, \mathcal{F}(-u,-v)) \in \mathfrak{h}$. Equivalentemente, $\exp(-w)\exp(u)\exp(v) \in H$ é suficiente para que $\exp(w)\exp(-u)\exp(-v) \in H$. Assim

$$[\sigma\left(\exp(u)\exp(v)H\right)]^{-1} = [\exp(w)]^{-1} = \exp(-w)$$

para quaisquer que sejam $u, v \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}S$. Como $\sigma\left(\exp(-u)\exp(-v)H\right) = \exp(-w)$, então o item $iii)$ segue do Lema 3.13.

Afirmamos agora que $c)$ implica em $iv)$ do Lema 3.13. De fato, se $Fix(\tau) = S$, então quaisquer $x, y \in S$ satisfaz

$$\tau(xyx) = \tau(x)\tau(y)\tau(x) = xyx \in S.$$

□

Sejam G é um grupo de Lie semisimples não compacto e $K \subset G$ um subgrupo compacto maximal com à álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Pela representação adjunta fiel

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ & X & \mapsto & \mathrm{ad}(X): \begin{array}[t]{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ Y & \mapsto & \mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y], \end{array} \end{array}$$

introduzimos a forma bilinear não-degenerada

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ & (X,Y) & \mapsto & B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \end{array}$$

e consideremos o complemento ortogonal

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}: \ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(\mathfrak{k}) = 0\}$$

de $\mathfrak{k}$. Uma álgebra de Lie de G pode ser decomposta na soma direta,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k},$$

chamada **decomposição de Cartan**, associada com a involução de Cartan

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k} & \to & \mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k} \\ & (U+A) & \mapsto & \theta(U+A) = -U + A \end{array}$$

para todo $U \in \mathfrak{p}$ e todo $A \in \mathfrak{k}$. Pelo Lema VI.1.2. em [11], a forma bilinear

$$\begin{array}{rccc} B_\theta: & \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta(Y)) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(\theta(Y))) \end{array}$$

é simétrica e positiva definida. A métrica G-invariante à esquerda em G, restrita a $T^{\mathbb{R}}_{1_G}G = \mathfrak{g}$ coincide com B_θ, e é chamada de Forma de Killing de G. O espaço homogêneo G/K é um espaço simétrico riemaniano do tipo não compacto associado a G. A estrutura riemaniana em G/K é dada pela métrica g, G-invariante à esquerda, com $\pi^* g_e = B_\theta$.

Afim de justificarmos a presença de uma estrutura de espaço girovetorial de Lie no espaço simétrico riemaniano do tipo não compacto, introduzimos o seguinte corolário:

Corolário 4.16 *Seja G um grupo de Lie semisimples não compacto, com aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *e decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}$. Então, o espaço simétrico riemaniano G/K do tipo não compacto, admite uma seção curvada não positivamente*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & G/K & \to & G \\ & \exp(U)K & \mapsto & \exp(U), \end{array}$$

para todo $U \in \mathfrak{p} = T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/K)$ e quando associado as operações 4.3 e 4.5 determinam um espaço girovetorial de Lie $(G/K, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$.

Demonstração: De acordo com o Lema IV.1.1 *iii*) em [11], a composição

$$\pi \exp : \mathfrak{p} \to G/K$$

da aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{p} \to S = \exp(\mathfrak{p}) \subset G$ e a projeção canônica

$$\pi : S \to SK/K = G/K,$$

é um difeomorfismo global. Consequentemente,

$$G/K = \{\pi \exp(U) = \exp(U)K; U \in \mathfrak{p}\}.$$

É claro que σ está bem definida. De fato, se $\exp(U)K = \exp(V)K$ para quaisquer que sejam $U, V \in T^{\mathbb{R}}_{1_G}\sigma(G/K)$, então $\exp(U)K = \pi \exp(U) = \pi \exp(V) = \exp(V)K$. Assim,

$$\begin{aligned} \exp(U) &= \sigma\left(\exp(U)K\right) \\ &= \sigma\left(\pi \exp(U)\right) \\ &= \sigma\left(\pi \exp(V)\right) \\ &= \sigma\left(\exp(V)K\right) \\ &= \exp(V), \end{aligned}$$

ou seja, $\sigma\left(\exp(U)K\right) = \sigma\left(\exp(V)K\right)$. As restrições $\exp|_p$, $\pi|_S$ são difeomorfismos, então $\sigma = \exp(\pi \exp)^{-1}$ é um difeomorfismo global de G/K em $\sigma(G/K) = \exp(\mathfrak{p}) = S$, com $\pi\sigma = (\pi\exp)(\pi\exp)^{-1} = Id_{G/K}$ e $\sigma(K) = \exp(0) = 1_G$. Em outras palavras, $\sigma : G/K \to G$ é a seção de $\pi : G \to G/K$. Além disso, a aplicação exponencial de G se restringe ao difeomorfismo global

$$\exp : \mathfrak{p} = T^{\mathbb{R}}_{1_G}S \to S.$$

Logo σ é curvada não positivamente.

Sabendo que as inclusões

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \qquad \text{e} \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$

são propriedades conhecidas da decomposição de Cartan, note que, pelo Corolário 4.15, estas inclusões implicam no item (iii) do Lema 3.13. Dessa forma, devemos mostrar o item (iv) do Lema 3.13, justificando assim que $(G/K, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo girocomutativo. A involução de Cartan $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por $\theta(U + A) = -U + A$, com $U \in \mathfrak{p}$ e $A \in \mathfrak{k}$, é um homomorfismo de álgebras de Lie, que dá origem ao homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & G = \exp(\mathfrak{p})K & \to & G \\ & (\exp(U)k) & \mapsto & \exp(-U)k \end{array}$$

para todo $U \in \mathfrak{p}$ e todo $k \in K$. Mostremos que, se g é o único elemento de G com $\Theta(g) = g^{-1}$, então $g \in S = \exp(\mathfrak{p})$. Disso seguirá que, para quaisquer que sejam $x, y \in S$, teremos

$$\Theta(xyx) = \Theta(x)\Theta(y)\Theta(x) = x^{-1}y^{-1}x^{-1} = (xyx)^{-1},$$

ou seja, $xyx \in S$. De fato, se $g = \exp(U)k$ é sujeito a

$$\exp(-U)k = \Theta(g) = g^{-1} = k^{-1}\exp(-U),$$

então, $k = \exp(U)k^{-1}\exp(-U) \in K \cap \mathrm{Ad}_{\exp(U)}(K)$. E isso implica que $k = 1_G$. Assim, $g = \exp(U) \in S$. Portanto, $(G/K, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo girocomutativo e consequentemente $(G/K, \oplus_\sigma, \otimes_\sigma)$ é um espaço girovetorial de Lie. $\square$

Espera-se que a teoria apresentada aqui ainda possa ser desenvolvida de modo a contribuir em outros trabalhos.

Referências Bibliográficas

[1] Barthold, L., Ceccherini-Silberstein, T., Smirnova-Nagnibeda, T. e Zuk, A. *Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects*, ed. Birkhäuser, 2000, 270-296.

[2] Bourbaki,N. *Groupes et Algèbras de Lie*, Chapitre I 7.3: Algèbras de Lie, Hermann, Paris, 1960.

[3] Braga, C. B. e Santana A. *Estruturas Algébricas com ênfase em elementos da Teoria de Lie*, a aparecer em editora da Universidade Estadual de Maringá.

[4] Carmo M. P. *Geometria Riemaniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2005.

[5] Carmo M. P. *Notas de um Curso de Grupos de Lie*. IMPA, Rio de Janeiro, 1974.

[6] Cheeger J. Ebin D. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry,* North Holland Publ. Company, 1975.

[7] Chevalley, C. *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[8] Foguel T. e Ungar A. *Involutary decomposition of Groups into Twisted Subgroups and Subgroups,* Journal of Group Theory 3 (2000) 27-46.

[9] Friedman Y. e Ungar A. *Gyrosemidirect Product Structure of Bounded Symetric Domains*, Results in Mathematics 26 (1994) 28-38.

[10] Hausner, M. e Schwartz J.T. *Lie Groups Lie Algebras*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. 1968.

[11] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[12] Jacobson, N. *Lie Algebras*, Jonh Wiley & Sons, INC. 1962.

[13] Kiechle H. *Theory of K-Loops,* Lecture Notes in Mathematics 1778, Springer, 2002.

[14] Kobayashi, S. e Nomizu, K. *Foundations of differential geometry.* Jonh Wiley & Sons, New York, 1963.

[15] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis.* IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[16] Nomizu, K. *Lie Groups and Differential Geometry*, The Mathematical Society of Japan, 1956.

[17] Sabinin L. *Smooth Quasigroups and Loops,* Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[18] San Martin, L. A. B. *Álgebras de Lie.* Editora da Unicamp, Campinas, 1999.

[19] Ungar A. *Analytic Hyperbolic Geometry - Mathematical Foundations and Applications.* World Scientific, 2005.

[20] Ungar A. *Beyond the Einstein addition Law and Its Gyroscopic Thomas Precession - The Theory od Gyrogroups and Gyrovector Spaces,* Fundamental Theories in Physics - Volume 117, Kluwer Academic Plublishers, 2001.

[21] Ungar A. e Kasparian A. *Lie Gyrovector Spaces,* Journal of Geometry and Symmetry in Physics 1(2004) 3-53.

[22] Varadarajan, V.S. *Lie groups, Lie algebras, and their representations.* Prentice-Hall, New Jersey, (1974).

[23] Warner, F.W. *Foundations of diferentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.