

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ÂNDERSON DA SILVA VIEIRA

Ocorrência de Bifurcação Zip em um sistema de EDOs

Maringá

2009

ÂNDERSON DA SILVA VIEIRA

Ocorrência de Bifurcação Zip em um sistema de EDOs

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Doherty Andrade

Coorientadora: Profa. Dra. Luciene P. G. Arantes

Maringá

2009

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

V658o Vieira, Anderson da Silva
Ocorrência de Bifurcação Zip em um sistema de
EDOs / Anderson da Silva Vieira. -- Maringá :
[s.n.], 2009.
133 f. : il., figs., tab.

Bibliografia: f. [131]-133.
Orientador : Prof. Dr. Doherty Andrade.
Coorientadora : Profa. Dra. Luciene P. G.
Arantes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2009.

1. Bifurcação Zip. 2. Matemática pura - Análise.
3. Equações Diferenciais Ordinárias. I. Andrade,
Doherty, orient. II. Arantes, Luciene P. G.,
coorient. III. Universidade Estadual de Maringá,
Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Título.

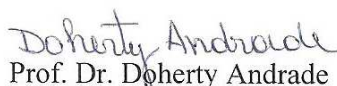
CDD 21.ed. 515.352

ÂNDERSON DA SILVA VIEIRA

Ocorrência de Bifurcação Zip em um sistema de EDOs

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA



Prof. Dr. Doherty Andrade
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera
Laboratório Nacional de Computação Científica



Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Aprovada em: 12 de fevereiro de 2009.

Local de defesa: Anfiteatro Adelbar Antonio Sampaio, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho aos meus pais Cícero e Adelina; aos meus irmãos André e Aline; às minhas avós Quitéria e Francisca e a minha namorada Marcela por se comporem distintamente enquanto pessoas, identicamente belas e surpreendíveis em essência, estímulos a buscar uma vida nova a cada dia, meus cordiais agradecimentos por aceitarem privar-se de minha companhia pelos estudos, oportunizando-me, com essa forma de amor, a realização profissional desse seu filho, irmão, neto e namorado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por dar a oportunidade de me aprofundar na ciência e ofertar muita saúde, força e paciência durante os meus estudos.

Ao Professor Dr. Doherty Andrade que sempre me instigou a entrar no mundo das pesquisas matemáticas conduzindo-me com sabedoria. Obrigado meu pai acadêmico!

À Professora Dra. Luciene P. G. Arantes pela grande dedicação dada a mim e empenho em me coorientar; e também pela força amiga. Obrigado minha mãe e irmã acadêmica!

Aos meus professores do Mestrado que planejaram para mim o conhecimento levando-me a alcançar a sabedoria; aos professores da Graduação pela motivação; e especialmente, a grande Professora Dra. Valéria N. D. Cavalcante, por ter sido um grande anjo protetor.

À secretária Lúcia pelo carisma e pela eficiência.

Quero deixar também a minha gratidão e respeito aos professores do Ensino Fundamental e Médio, pois devo a eles o alicerce que me trouxe até aqui; e carinhosamente à Professora e amiga Regina Marussi que desde que nos conhecemos deu muita força e motivação para eu engrenar na vida acadêmica.

Aos meus pais, grandes educadores e meus ídolos, pela força, afeto, amor, carinho, paciência, dedicação, cumplicidade, oração e preocupação que tiveram e têm por mim.

Aos meus irmãos que estiveram sempre apostando e intercedendo a Deus pelo meu progresso.

Às minhas avós pela riqueza de espiritualidade que através de seus testemunhos e fé

sempre intercederam para que o meu caminho fosse mais suave e a chegada regada de bênção.

À minha amada namorada, pelo amor, carinho, abraço e conforto; pela paciência, compreensão e dedicação dados a mim que contribuíram para o meu sucesso.

Aos meus familiares pelas apostas feitas no meu futuro.

Aos amigos que ajudaram tornar os momentos da vida mais felizes; em especial, à Cláudia e seus familiares que me ofertaram tanto afeto e amor desde a graduação e a Nayene o ombro acolhedor na hora da dificuldade.

Aos meus companheiros de moradia que fizeram com que os momentos longe da família fossem menos tristes; principalmente à Juliana e ao Juscelino por termos formado uma grande família em Deus.

É com grande enlevo que deixo o meu afeto às seguintes famílias: Consalter, Vieira Silva, Maciel Matos, Montagnini Mora Monteiro, Araújo, Araújo Vieira, Oliveira, Laureano Ferreira e Souza pelo carinho ofertado; e também aos meus irmãos em Cristo pelas preces feitas a meu favor.

Finalmente, agradeço à Capes pelo grande apoio financeiro neste estudo.

“A fé é o fundamento da esperança, é uma certeza a respeito do que não se vê. Foi ela que fez a glória dos nossos, antepassados. *Pela fé reconhecemos que o mundo foi formado pela palavra de Deus e que as coisas visíveis se originaram do invisível.*”

Hebreus 11,1-3.

In memoriam

À minha grande amiga, Daiana Montagnini Mora Monteiro, porque aprendemos juntos que a música bem tocada e sentida traz paz ao espírito.

À minha saudosa tia, Cícera Maria Vieira Grigoli Camilo, por sempre ter me motivado durante os meus estudos e pelo grande carinho e afeto.

Ao meu amigo, Gustavo Aparecido Vieira Silva, que inconscientemente deu-me forças durante as dificuldades.

Ocorrência de Bifurcação Zip em um sistema de EDOs

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é estudar a ocorrência de Bifurcação de Hopf e Bifurcação Zip em um modelo de competição. Nosso estudo é baseado no artigo de M. Farkas citado em [2]. Tratamos do seguinte sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} \\ \dot{x}_1 = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2, \end{cases}$$

onde x_1 , x_2 e S denotam o tamanho das populações de duas espécies de predadores e da única espécie de presas, respectivamente; e

- $\gamma > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca da presa;
- $K > 0$ é a capacidade ambiental de sustentação em relação a presa;
- $m_i > 0$ é a taxa de natalidade;
- $d_i > 0$ é a taxa de mortalidade; e
- $a_i > 0$ é a “constante de semissaturação”.

Posteriormente, estendemos os resultados para o caso com n espécies de predadores e uma espécie de presa. Tomamos como base o artigo de Ferreira e Oliveira em [24].

Occurrence of Zip bifurcation in a system of ODEs

ABSTRACT

The main subject of this work is to study the occurrence of Hopf bifurcation and Zip bifurcation in a model of competition. Our study is based in the M. Farkas paper quoted in [2]. We consider the following system of Ordinary Differential Equations

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} \\ \dot{x}_1 = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2, \end{cases}$$

where x_1 , x_2 and S are the population size of the two predator and the single prey species, respectively; and

- $\gamma > 0$ is the intrinsic rate of increase of the prey;
- $K > 0$ is the carrying capacity of the environment with respect to the prey;
- $m_i > 0$ is the maximum birth rate;
- $d_i > 0$ is the death rate; and
- $a_i > 0$ is the “half-saturation constant”.

We extend the results to the case with n predators species and one prey specie. We take based on Ferreira e Oliveira paper in [24].

CONTEÚDO

1	Introdução	13
2	Pré-Requisitos	16
2.1	Estabilidade	16
2.1.1	Sistemas Autônomos	16
2.1.2	Sistemas Autônomos Lineares - Estudo Qualitativo no Plano	19
2.1.3	Método de Lyapunov para Sistemas Não Lineares	25
2.2	Aplicações diferenciáveis	29
2.2.1	Derivadas Parciais e Direcionais	30
2.2.2	Imersões e submersões	34
2.3	Variedades Diferenciáveis	36
2.3.1	Vetores tangentes e diferenciais	37
2.3.2	Fibrado Tangente	40
2.3.3	Imersões e Subvariedades	41
2.3.4	Submersões e Transversalidade	41
2.3.5	Folheações	44

3	Bifurcação Zip	45
3.1	Introdução	45
3.2	Resultados no caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	48
3.3	Bifurcação de Andronov-Hopf	51
3.4	Bifurcação Zip	66
4	Generalização do caso tridimensional	76
4.1	Introdução	76
4.2	Pontos de Equilíbrio	77
4.3	Bifurcação de Hopf	80
4.4	Bifurcação Zip	94
A	Alguns Resultados	101
B	Método de Poincaré	105
C	Lema de Gronwall	109
D	Critério de Dulac	111
E	Bifurcação de Andronov-Hopf	113
E.1	Bifurcação de Hopf no plano	113
	Índice Remissivo	129
	Bibliografia	131

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a ocorrência da Bifurcação de Hopf e Bifurcação Zip em um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

No capítulo 2 apresentamos alguns requisitos que serão importantes para obtermos os resultados demonstrados neste trabalho. Dessa forma o dividiremos em três seções, a saber: seção 2.1 dedicada à estabilidade de um *ponto de equilíbrio*; seção 2.2 vamos relembrar os assuntos visto na disciplina de Análise no \mathbb{R}^n para nos alicerçar na seção 2.3 sobre variedades diferenciáveis. Dividiremos a seção 2.1 em três subseções, as quais seguem: na subseção 2.1.1 vamos definir o que é um ponto estável, assintoticamente estável e instável; na subseção 2.1.2 investigaremos a estabilidade deste ponto em um sistema autônomo linear no plano, pois embora o nosso objetivo seja trabalhar com um sistema não linear, faremos sua linearização, mais ainda, veremos o que nos diz o polinômio característico associado a matriz do sistema planar linearizado; e finalizamos com a subseção 2.1.3 descrevendo o Método de Lyapunov para sistemas não lineares.

No capítulo 3 estudaremos o sistema de competição para um caso tridimensional, onde há a ocorrência de de Bifurcação Zip, conceito introduzido por Miklós Farkas [2]. Observemos atentamente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} \\ \dot{x}_1 = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2, \end{cases}$$

onde x_1 , x_2 e S denotam o tamanho das populações de duas espécies de predadores e da única espécie de presas, respectivamente; $\gamma > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca da presa; $K > 0$ é a capacidade ambiental de sustentação em relação a presa; $m_i > 0$ é a taxa de natalidade; $d_i > 0$ é a taxa de mortalidade; e $a_i > 0$ é a “constante de semissaturação”. Vale destacar que esse sistema foi estudado por diversos autores, como por exemplo: Hsu, Hubbell e Waltman [5, 6]; Koch [7]; Smith [9]; e Wilken [11]. Dividiremos o capítulo 3 em duas partes, ou seja, Bifurcação de Hopf (seção 3.3) e Bifurcação Zip (seção 3.4). A Bifurcação de Hopf acontece, como veremos, quando as constantes de semissaturação são iguais, isto é, $a_1 = a_2$. O Teorema 3.3.1 é um dos principais resultados deste capítulo, para a sua demonstração, primeiramente, necessitaremos do Teorema da Bifurcação de Hopf (veja Teorema A.0.2) e, em seguida, precisaremos de definições e resultados vistos por Negrini e Salvadori [8]; porém para a utilização dos resultados de [8] mencionamos o Método de Poincaré, o qual será detalhado no Apêndice B, e irá nos auxiliar na prova de bifurcação supercrítica. Agora, na seção 3.4 o principal resultado é o Teorema 3.34, para sua demonstração não utilizaremos métodos como na seção de Bifurcação de Hopf, porém será necessário os seguintes Lemas: A.0.3 e A.0.4, que foram demonstrados por Hartman [1].

No capítulo 4 faremos uma generalização dos resultados apresentados no capítulo 3 baseada no artigo de Ferreira e Oliveira [24]. Nosso sistema predador-presa será

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) x_i \\ \dot{x}_i = (m_i f_i(S) - d_i) x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

onde S denota a quantidade de presas, x_i denota a quantidade de predadores i , $f_i(S) = \frac{S}{a_i + S}$ é a resposta funcional do predador i , γ é taxa de crescimento intrínseca da presa, K é capacidade de carga do meio ambiente, m_i é a taxa máxima de natalidade do predador i , d_i : taxa de mortalidade do predador i e a_i é constante de semissaturação do i -ésimo predador. Todos esses parâmetros são não negativos. Assim, como no capítulo anterior, o dividiremos em duas partes: Bifurcação de Hopf (seção 4.3) e Bifurcação Zip (seção 4.4). Na seção 4.3 o principal resultado é o Teorema 4.3.1, para a sua demonstração precisaremos do Critério de

Dulac exposto no Apêndice **D**, e posteriormente, vamos calcular o *Primeiro Coeficiente de Lyapunov*, apresentado no Apêndice **E**. Também, na seção **4.4**, usaremos os Lemas: **A.0.3** e **A.0.4**, que são demonstrados por Hartman [1].

Para finalizarmos, vale comentar que Hsu, Hubbel e Waltman [5, 6] mostraram que as soluções do sistema predador-presa correspondentes aos valores iniciais positivos são limitadas no caso tridimensional, porém Ferreira e Oliveira [24] provaram o mesmo resultado no caso $(n + 1)$ -dimensional que será visto no Capítulo **4**. Apresentaremos demonstração deste resultado na qual foi essencial o Lema de Gronwall para derivadas (veja Apêndice **C**).

Pré-Requisitos

Neste capítulo vamos abordar os assuntos que fizeram-se importantes durante o estudo deste trabalho, tais como: Estabilidade em sistemas autônomos, Método de Lyapunov, Imersão e Submersão, Variedades Diferenciáveis, Transversalidade e Folheação.

2.1 Estabilidade

Nesta seção, vamos investigar a estabilidade e instabilidade de um ponto de equilíbrio. Aqui discutiremos o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema linear através de seus autovalores. Porém, quanto ao sistema não linear, a estabilidade será determinada pela aproximação linear em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

2.1.1 Sistemas Autônomos

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

é denominado *sistema dinâmico* ou *autônomo*, pois as funções f_i não dependem explicitamente do tempo t . As variáveis x_1, x_2, \dots, x_n são ditas *variáveis de estado* do sistema. Resumidamente, podemos escrever (2.1) como

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.2)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Definição 2.1.1. Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é chamado ponto crítico ou ponto de equilíbrio do sistema autônomo (2.2) se $f(c) = 0$.

Consideremos agora o sistema de segunda ordem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde f e g são funções contínuas, com derivadas parciais contínuas; $(f(x, y), g(x, y))$ é um campo vetorial no plano xy , chamado de *plano de fase* do sistema; as *órbitas* ou *trajetórias* são as curvas integrais desse campo e, portanto, em cada ponto, são curvas tangentes ao campo. Como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)},$$

as órbitas das soluções de (2.3) são as curvas-soluções da equação

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Exemplo 2.1.1. Vamos encontrar a trajetória do seguinte sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Neste caso, temos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{y}{x}.$$

Como esta equação é separável, ela pode ser escrita da forma

$$y \, dy = x \, dx,$$

e suas soluções são dadas por

$$y^2 - x^2 = k, \quad (2.5)$$

onde k é arbitrário. Portanto, as trajetórias do sistema (2.4) são as hipérbolas dadas por (2.5).

Definição 2.1.2. *Seja c um ponto crítico do sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Dizemos que c é

- i) *estável, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \geq 0$, $\|x(t) - c\| < \varepsilon$, sempre que $\|x_0 - c\| < \delta$;*
- ii) *isolado, se existe $\varepsilon > 0$ tal que a região $R = \{\|x - c\| \leq \varepsilon \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ não possua outros pontos de equilíbrio diferentes de c ;*
- iii) *assintoticamente estável, se c é estável e existe $\eta > 0$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - c\| = 0,$$

sempre que $\|x_0 - c\| < \eta$;

- iv) *estritamente estável, se c é estável e assintoticamente estável; e*
- v) *instável, se c não é estável, isto é, existe $\zeta > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$, existe $t_* > 0$ tal que $\|x(t_*) - c\| \geq \zeta$, sempre que $\|x_0 - c\| < \delta$.*

O conjunto $\{c \in \mathbb{R}^n; (x(t) - c) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$ é chamado de *domínio de atração* do ponto de equilíbrio $x = c$ de (2.6). Também, se para (2.6) a segunda condição do item **iii)** da Definição 2.1.2 for verdadeira, então o ponto de equilíbrio $x = c$ é dito *atrator*.

2.1.2 Sistemas Autônomos Lineares - Estudo Qualitativo no Plano

Um sistema autônomo linear de segunda ordem é da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy,\end{aligned}\tag{2.7}$$

onde os coeficiente a , b , c e d são constantes e $ad - bc \neq 0$.

Notemos que a origem $(0, 0)$ é o ponto de equilíbrio de (2.7) e este ponto é *isolado*.

Podemos reduzir o sistema (2.7) a uma equação diferencial de segunda ordem. Suponhamos $b \neq 0$, de (2.7) temos

$$y = \frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x.$$

Agora, derivando ambos os membros desta equação e substituindo o valor de $\frac{dy}{dt}$ dado por (2.7), obtemos

$$cx + d \left(\frac{1}{b} \frac{dx}{dt} - \frac{a}{b} x \right) = \frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b} \frac{dx}{dt},$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + d) \frac{dx}{dt} + (ad - bc)x = 0.$$

O polinômio característico associado a esta equação é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{(a + d) + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{(a + d) - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral de (2.7) é

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\y(t) &= A\frac{\lambda_1 - a}{b}e^{\lambda_1 t} + B\frac{\lambda_2 - a}{b}e^{\lambda_2 t},\end{aligned}$$

onde A e B são constantes.

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral de (2.7) é

$$\begin{aligned}x(t) &= (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} \\y(t) &= (B_1 + B_2 t)e^{\lambda t},\end{aligned}$$

onde $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, e apenas duas das constantes A_1 , B_1 , A_2 e B_2 são independentes.

Agora, se $b = 0$, resolvemos diretamente a primeira equação e encontramos $x(t) = Ae^{at}$. Substituindo este valor na segunda equação, temos

$$y(t) = Be^{dt} + \frac{cA}{a-d}e^{at}, \quad \text{se } d \neq a$$

e

$$y(t) = Be^{dt} + cAte^{at}, \quad \text{se } d = a.$$

Logo a solução geral do sistema (2.7) é dada por

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.8)$$

onde entre cada duas das constantes, A_1 , B_1 e A_2 , B_2 , apenas uma é independente.

Desta forma, o comportamento do ponto crítico $(0, 0)$ fica restrito ao estudo dos valores de λ_1 e λ_2 . Assim, (2.7) será:

1. estável, se x e y permanecerem limitados, quando $t \rightarrow +\infty$;
2. assintoticamente estável, se $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$;

3. instável, se $x \rightarrow \infty$ ou $y \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow +\infty$.

Podemos simplificar as várias alternativas em relação ao comportamento das raízes λ_1 e λ_2 , colocando

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - cb)$$

$$p = (a + d) \text{ e } q = (ad - bc) \neq 0.$$

Uma variação dos sinais de Δ , p e q nos leva a diferentes estabilidades. Vejamos:

1. Raízes λ_1 e λ_2 reais e distintas ($\Delta > 0$).

(a) λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal ($q > 0$):

i. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty,$$

portanto, $(0, 0)$ é instável.

ii. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2}(A_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + A_2) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2}(B_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + B_2),$$

portanto, $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

O ponto de equilíbrio, em ambos os casos, é denominado *nó* ou *nódulo*.

(b) λ_1 e λ_2 têm sinais opostos; isto é,

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

Tomando a expressão geral (2.8) da solução do sistema (2.7), observamos que para alguns valores das constantes A_1 , B_1 e A_2 , B_2 , é possível que $x(t) \rightarrow 0$ e $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, enquanto que com outros valores destas constantes $x(t)$ ou $y(t)$ se tornam ilimitados. Neste caso, o ponto de equilíbrio é denominado *ponto de sela* (equilíbrio instável).

2. Raízes λ_1 e λ_2 reais e iguais ($\Delta = 0$).

Neste caso, a solução geral de (2.7) é dada por

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}, \quad y(t) = (B_1 + B_2 t)e^{\lambda t}.$$

Se $p > 0$, $\lambda = (a + d)/2 > 0$ e, portanto, a direção do movimento em todas as órbitas se afastará do ponto crítico $(0, 0)$, que será instável.

Se $p < 0$, $\lambda = (a + d)/2 < 0$. Neste caso, independentemente dos valores das constantes A_1 , A_2 , B_1 e B_2 , a direção do movimento se aproximará do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ que será assintoticamente estável.

3. Raízes λ_1 e λ_2 complexas conjugadas ($\Delta < 0$).

As raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ são

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

e a solução geral de (2.7) tem a forma

$$x(t) = e^{\alpha t}(A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)), \quad y(t) = e^{\alpha t}(B_1 \cos(\beta t) + B_2 \sin(\beta t)),$$

onde somente duas das constantes A_1 , A_2 , B_1 e B_2 são independentes. Como as partes trigonométricas de $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, a natureza do ponto crítico $(0, 0)$ é determinada pelo sinal da parte real das raízes

$$\alpha = \frac{(a + d)}{2} = \frac{p}{2}.$$

Se $\alpha < 0$, então o movimento de todas as trajetórias é em direção ao ponto crítico (estabilidade assintótica) e, se $\alpha > 0$, acontece o contrário (instabilidade).

Se $\alpha = 0$, $\lambda_1 = \beta i$ e $\lambda_2 = -\beta i$, então o movimento é periódico no tempo e as órbitas do sistema são curvas fechadas contendo em seu interior o ponto crítico estável $(0, 0)$ que, neste caso, é denominado *centro*.

Tabela 2.1: Estabilidade: Propriedade do Sistema Linear $\dot{x} = Ax$ com $\det(A - \lambda I) = 0$ e $\det(A) \neq 0$

Autovalores	Tipo do Ponto Crítico	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó Próprio ou Nó Impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó Próprio ou Nó Impróprio	Assintoticamente estável
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$		
$\alpha > 0$	Ponto Estável	Instável
$\alpha < 0$	Ponto Estável	Assintoticamente estável
$\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$	Centro	Estável

Proposição 2.1. *Sejam $\dot{x} = Ax$ um sistema de equações de ordem um, p o polinômio característico associado à matriz $A_{2 \times 2}$ e $r = \alpha + \beta i$ uma de suas raízes. O ponto de equilíbrio deste sistema é instável se, e somente se, o coeficiente da parte linear do polinômio p for menor que 0.*

Demonstração: Como $r = \alpha + \beta i$ e o grau de p é dois, então sua outra raiz é $\bar{r} = \alpha - \beta i$. Assim

$$(x - r)(x - \bar{r}) = 0 \Rightarrow x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

ou seja, $p(x) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)$. Logo, pela Tabela 2.1, o ponto de equilíbrio é instável se, e somente se,

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow -2\alpha < 0.$$

□

Vamos retornar ao sistema (2.3). Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico isolado. Considerando as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ contínuas com derivadas de primeira ordem também contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) , podemos expandi-las pela Fórmula de Taylor

e reescreveremos o sistema (2.3) na forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y),\end{aligned}\quad (2.9)$$

onde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\eta_i(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.10)$$

Notemos que se $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt}$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt}$. Isto nos sugere que o comportamento das órbitas numa vizinhança do ponto de equilíbrio (x_0, y_0) seja determinado pela parte linear do sistema linearizado

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

é a matriz Jacobiana. Notemos que a linearização transmite as características qualitativas do retrato de fase de um sistema não linear para um sistema linear em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

De maneira geral, dizemos que um sistema autônomo é *quase linear*, se for da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + \eta_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = c(x - x_0) + d(y - y_0) + \eta_2(x, y),\end{aligned}\quad (2.13)$$

onde η_1, η_2 satisfazem a propriedade (2.10).

Definição 2.1.3. Um ponto crítico é chamado hiperbólico se a parte real de todos os autovalores da matriz Jacobiana (2.12) são não nulos. Se a parte real de cada um dos autovalores

são iguais a zero, então o ponto crítico é chamado não-hiperbólico.

Definição 2.1.4. Se (x_0, y_0) é um ponto de equilíbrio de $\dot{z} = f(z)$, onde f é de classe \mathcal{C}^1 , então a equação diferencial linear

$$\dot{z} = Df(x_0, y_0)z$$

é chamada de equação variacional linear ou linearização do campo de vetor f no ponto de equilíbrio (x_0, y_0) , onde $Df(x_0, y_0)$ é a matriz Jacobiana calculada em (x_0, y_0) .

Teorema 2.1.1. Seja f uma função de classe \mathcal{C}^1 . Se todos os autovalores da matriz Jacobiana $Df(x_0, y_0)$ tem partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio (x_0, y_0) da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ é assintoticamente estável.

Demonstração: A demonstração encontra-se em [[28], Capítulo 9, Teorema 9.5]. □

Teorema 2.1.2. Seja f uma função de classe \mathcal{C}^1 . Se pelo menos um dos autovalores da matriz Jacobiana $Df(x_0, y_0)$ tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio (x_0, y_0) da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ é instável.

Demonstração: A demonstração encontra-se em [[28], Capítulo 9, Teorema 9.7]. □

2.1.3 Método de Lyapunov para Sistemas Não Lineares

O estudo da estabilidade de sistemas autônomos não lineares de equações diferenciais sem determinar a solução foi primeiro elaborado por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov¹, e é conhecido como *Método direto de Lyapunov* ou *Método segundo Lyapunov*.

Consideremos o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.14}$$

¹Aleksandr M. Lyapunov (1857 - 1918), um estudante de Chebyshev em São Petersburgo, lecionou na Universidade de Kharkov de 1885 a 1901, quando tornou-se membro da Academia de Ciências de São Petersburgo em Matemática Aplicada. Em 1917 mudou-se para Odessa por causa da saúde frágil de sua esposa. Suas pesquisas em estabilidade cercou-se em Análise Teórica e aplicações em diversos problemas físicos. Seu segundo método fez parte de seu trabalho mais influente, *General Problem of Stability of Motion*, publicado em 1892.

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe \mathcal{C}^1 e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

A seguir, apresentamos a definição formal de função de Lyapunov.

Definição 2.1.5. *Seja c um ponto de equilíbrio de (2.14). Uma função $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 é definida positiva em um aberto $\Omega \ni c$ se*

(i) $V(x) > 0$, para todo $x \neq c$ em Ω ;

(ii) $V(c) = 0$.

Definição 2.1.6. *Dizemos que V é uma Função de Lyapunov do sistema (2.14), se V é definida positiva e satisfaz*

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

onde ∇ é o operador $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

Observação 2.1.1. *Para sistemas autônomos (2.14), basta estudarmos a estabilidade das soluções de (2.14) com condição inicial $x(0) = x_0$. De fato:*

(i) se $x(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

em um intervalo aberto I , $0 \in I$, então $y(t) = x(t - t_0)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

num intervalo aberto $t_0 + I$, pois

$$y(t_0) = x(0) = x_0$$

e

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(y(t)) \text{ para } t \in t_0 + I.$$

(ii) se $y(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

num intervalo aberto J , $t_0 \in J$, então $x(t) = y(t + t_0)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

num intervalo aberto $-t_0 + J$, pois

$$x(0) = y(t_0) = x_0$$

e

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t + t_0) = f(y(t + t_0)) = f(x(t)), \quad \text{para } t \in -t_0 + J.$$

Isto que acabamos de observar garante que, fixado x_0 , a imagem de uma solução de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

não depende do dado particular t_0 em \mathbb{R} , desta forma, ficam bem definidas as trajetórias.

A seguir, através de funções de Lyapunov, vamos estudar a estabilidade da origem do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Teorema 2.1.3. *Se existe uma função de Lyapunov V em Ω , então a origem do sistema (2.17) é estável.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$B_\varepsilon[0] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon\} \subset \Omega.$$

Seja

$$m = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x) > 0$$

que existe, pois V é contínua e a esfera $S_\varepsilon(0) \subset \Omega$ é compacta. Mais ainda, $m > 0$ já que $V(x) > 0$, para todo $x \in \Omega - \{0\}$.

Como V é contínua em $x = 0$ e $V(0) = 0$, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$\|x_0\| < \delta \implies V(x_0) < m.$$

Por hipótese,

$$\dot{V}(x(t)) = \left(\frac{d}{ds} V(x(s)) \right) \Big|_{s=t} \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

daí segue que a função V é decrescente e, portanto, $V(x(t)) \leq V(x_0) < m$, $\forall t \geq 0$. Assim, $V(x(t)) \leq V(0) = 0$, $\forall t \geq 0$. Logo, $0 \leq V(x(t)) \leq 0$ e, portanto $V(x(t)) = 0$. Consequentemente, $x(t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Portanto, $x = 0$ é solução de (2.17).

Se para algum t_* , $x(t_*)$ tocasse na esfera $S_\varepsilon(0)$ teríamos $V(x(t_*)) \geq m$, o que contraria o fato de que $V(x(t))$ ser decrescente, pois

$$V(x(t_*)) \geq m > V(x_0).$$

Logo, $\|x(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$ e, portanto, $x_0 = 0$ é estável. □

Teorema 2.1.4. *Seja V uma função de Lyapunov tal que $-\dot{V}(x) = -\nabla V(x) \cdot f(x)$ é definida positiva em Ω . Então a origem do sistema (2.17) é assintoticamente estável.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que $x(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Como $V(0) = 0$ e V é contínua, é suficiente mostrar que $V(x(t)) \rightarrow V(0) = 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Pelo teorema anterior, temos que a origem é estável. Logo $V(x(t))$ decresce ao longo de uma trajetória do sistema (2.17) para V_0 quando $t \rightarrow \infty$. Agora provaremos que $V_0 = 0$.

Suponhamos, por contradição, que $V_0 > 0$. Pela continuidade de V , existe $0 < \alpha < \varepsilon$ tal que $V(x) < V_0$, para todo $x \in \Omega$, tal que $\|x\| \leq \alpha$.

Seja $-M = \max_{\alpha \leq \|x\| \leq \varepsilon} \dot{V}(x)$, o qual existe pois a função contínua $\dot{V}(x)$ atinge seu valor máximo sobre o conjunto compacto $\{\alpha \leq \|x\| \leq \varepsilon\}$. Como $-\dot{V} > 0$, temos $-M < 0$. Então,

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(x(s)) ds \leq -Mt.$$

Consequentemente, quando $t \rightarrow \infty$, $V(x(t)) \rightarrow -\infty$. Isto contradiz o fato de V ser definida positiva em Ω e ser igual a V_0 quando $t \rightarrow \infty$. Assim $V_0 = 0$, o que prova que a origem é assintoticamente estável. \square

Teorema 2.1.5. *Seja $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 com $V(0) = 0$, e seja $V(x) > 0$ para todo x , com $\|x\| < \delta$. Se $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$ é definida positiva em Ω , então a origem do sistema (2.17) é instável.*

Demonstração: Seja x_0 um ponto inicial em B_δ da trajetória do sistema (2.17). Então $V(x_0) > 0$. Como $\dot{V}(x) > 0$, para todo $x \in \Omega \setminus \{0\}$, temos

$$\dot{V}(x(t)) \geq m > 0, \forall t \geq 0,$$

onde $m = \min_{0 < \|x\| \leq \delta} \dot{V}(x)$. Então,

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial s}(x(s)) ds \geq mt.$$

Consequentemente, quando $t \rightarrow \infty$, $V(x(t)) \rightarrow +\infty$. Portanto, a origem de (2.17) é instável. \square

2.2 Aplicações diferenciáveis

Os espaços topológicos formam o domínio natural das funções contínuas. Da mesma forma, as variedades diferenciáveis são o domínio natural das aplicações diferenciáveis. Assim, para compreender melhor a definição de variedades diferenciáveis, começaremos recordando alguns conceitos do cálculo diferencial. Os resultados desta seção, poderão ser encontrados em [18, 19, 29, 30, 17, 20, 31, 32].

Nesta seção denotaremos A por um aberto contido em \mathbb{R}^n .

Definição 2.2.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é diferenciável segundo Fréchet ou Fréchet-diferenciável em $a \in A$ se existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \quad (2.18)$$

Neste caso, $T = Df(a)$ é chamada de derivada de f em $a \in A$.

Proposição 2.2. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em a , então existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo (2.18).*

Proposição 2.3. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então f é diferenciável em a se, e somente se, existe uma única $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear tal que*

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + r(h),$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \quad (2.19)$$

Teorema 2.2.1 (Regra da Cadeia). *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, U, V abertos e $f(U) \subset V$. Se f é diferenciável em $a \in U$ e g é diferenciável em $b = f(a) \in V$, então $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $a \in U$ e*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

Corolário 2.2.1.1. *Se f e g são ambas de classe C^r , então $g \circ f$ é de classe C^r .*

Corolário 2.2.1.2. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $p \in U$ e $\alpha : (-1, 1) \rightarrow U$ é uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então $f \circ \alpha$ é uma curva diferenciável em 0 e $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = Df(p)v$.*

2.2.1 Derivadas Parciais e Direcionais

Nesta seção, nos dedicaremos às derivadas parciais e direcionais de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e às suas principais propriedades, bem como suas relações com a derivada de

f . A princípio consideraremos $m = 1$.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $a \in U$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ consideremos a reta que passa por a e com v , isto é,

$$r := \{x \in \mathbb{R}^n; x = a + tv\}.$$

Seja

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \alpha(t) = a + tv, \end{aligned}$$

onde α é uma parametrização de r . Como U é aberto em \mathbb{R}^n , existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset U$.

Logo,

$$|t| < \frac{\delta}{\|v\|} \Rightarrow \|\alpha(t) - a\| = \|a + tv - a\| = |t|\|v\| < \frac{\delta}{\|v\|}\|v\| = \delta,$$

ou seja,

$$|t| < \varepsilon_0 := \frac{\delta}{\|v\|} \Rightarrow \alpha(t) \in B_\delta(a) \subset U.$$

Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} f \circ \alpha : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (f \circ \alpha)(t) = f(a + tv) \end{aligned}$$

está bem definida.

Definição 2.2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in U$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f em $a \in U$ na direção de v é definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0},$$

quando o limite acima existir.

Observação 2.2.1. *A existência das derivadas direcionais de f em $a \in U$ não implica em sua continuidade, e portanto, não implica na diferenciabilidade de f em $a \in U$. Por exemplo,*

basta considerar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Definição 2.2.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in U$, $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base de vetores do \mathbb{R}^n e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. A derivada parcial de f em a é definida como sendo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0},$$

quando o limite existir.

Observação 2.2.2. *A existência de todas as derivadas parciais de f em $a \in U$ não implica em sua continuidade, e portanto, não implica na diferenciabilidade de f em $a \in U$. Por exemplo, basta considerar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Definição 2.2.4. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in U$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é Gateaux-diferenciável em $a \in U$ se $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe, para todo $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in U$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é Fréchet-diferenciável em $a \in U$, então f é Gateaux-diferenciável em $a \in U$. Ainda mais,*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \cdot}(a) \in (\mathbb{R}^n)^{*2}.$$

Agora vamos considerar $m > 1$.

Definição 2.2.5. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in U$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. A*

² $(\mathbb{R}^n)^*$ é o espaço dual do \mathbb{R}^n

derivada direcional de f em $a \in U$ na direção de $v \in \mathbb{R}^n$ é o vetor

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + vt) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m,$$

quando o limite existir. Para $i = 1, 2, \dots, n$, se $v = e_i$ é o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n , então o vetor, quando existir,

$$D_i f(a) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

é denominado de i -ésima derivada parcial de f no ponto $a \in U$.

Teorema 2.2.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in U$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável em $a \in U$, então $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe, para todo vetor $v \in \mathbb{R}^n$, e*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a). \quad (2.20)$$

Ainda mais,

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$v \mapsto Df(a)v = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{n \times 1}.$$

Definição 2.2.6. *Dizemos que f é de classe \mathcal{C}^1 em U se todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são contínuas em $x \in U$. Procedendo intuitivamente em $r \in \mathbb{N}$, f é de classe \mathcal{C}^r quando todas as derivadas parciais de f são de classe \mathcal{C}^{r-1} em U . Quando f é de classe \mathcal{C}^r , para todo $r \in \mathbb{N}$, dizemos que f é de classe \mathcal{C}^∞ .*

Definição 2.2.7. *Dados os conjuntos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre U e V é uma bijeção $f : U \rightarrow V$, cuja inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também é contínua. Neste caso, dizemos que U e V são homeomorfos.*

Definição 2.2.8. *Uma aplicação de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, $f : U \rightarrow V = f(U)$ entre abertos U, V*

de \mathbb{R}^m é chamada de difeomorfismo de classe C^r se f possui inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ de classe C^r . Em particular, um difeomorfismo é um homeomorfismo.

Definição 2.2.9. *Seja $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dizemos que f é um difeomorfismo local de classe C^r quando, para todo $p \in W$, existe uma vizinhança $U \subset W$ de p , tal que $f|_U : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo de classe C^r .*

Teorema 2.2.4 (Função Inversa). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r , $r \geq 1$. Se $Df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então f é um difeomorfismo local de classe C^r em $p \in U$ e $(Df(p))^{-1} = Df^{-1}(f(p))$.*

Teorema 2.2.5 (Função Implícita). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^r , $r \geq 1$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Se $(a, b) \in U$ é tal que*

$$f(a, b) = 0$$

e

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{m \times m} \neq 0 \quad (D_2 f(a, b) \in \mathcal{L}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)),$$

então

(i) *existem abertos $U_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ tais que $(a, b) \in U$, $a \in V$ e para cada $x \in V$, existe um único $y = g(x) \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo*

$$(x, y) \in U_0 \quad e \quad f(x, y) = 0.$$

(ii) *A aplicação $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida no item anterior é uma aplicação de classe C^r no aberto V tal que*

$$\begin{aligned} g(a) &= b; \\ f(x, g(x)) &= 0, \quad \forall x \in V; \\ Dg(a) &= -(D_2 f(a, b))^{-1} D_1 f(a, b). \end{aligned}$$

2.2.2 Imersões e submersões

Definição 2.2.10. *Seja U um aberto de \mathbb{R}^{m+n} . Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de submersão se, para todo $x \in U$, a derivada $Df(x) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma*

transformação linear sobrejetora.

Exemplo 2.2.1. *A projeção*

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto \pi(x, y) = x\end{aligned}$$

é uma submersão.

Definição 2.2.11. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é chamada de imersão se, para todo $x \in U$, a derivada $Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetora.*

Teorema 2.2.6 (Forma local das submersões). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Suponhamos que, para algum $p \in U$, $Df(p) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetora. Dada qualquer decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$, (com $p = (p_1, p_2)$) tal que $\partial_2 f(p_1) = Df(p_1)|_F : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ é isomorfismo, então existe um difeomorfismo $h : V \times W \rightarrow Z$, de classe \mathcal{C}^k , tal que $f \circ h(x, w) = w$, para todo $(x, w) \in V \times W$, onde $V \ni p_1$ é aberto em E , $W \ni f(p)$ é aberto em \mathbb{R}^n e $Z \ni p$ é aberto \mathbb{R}^{m+n} ($Z \subset U$).*

Exemplo 2.2.2. *Podemos ver facilmente que a aplicação inclusão*

$$\begin{aligned}i : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \\ x &\mapsto i(x) = (x, 0)\end{aligned}$$

é uma imersão.

Definição 2.2.12. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma imersão de classe \mathcal{C}^k , $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita um mergulho de classe \mathcal{C}^k de U em \mathbb{R}^n , quando ψ é um homeomorfismo de U sobre $\psi(U)$.*

Teorema 2.2.7 (Forma local das imersões). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Suponhamos que exista $p \in U$ tal que $Df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva. Então existe um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k , $h : Z \rightarrow V \times W$, de uma vizinhança Z de $f(p)$ sobre um aberto $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ($p \in V$, $0 \in W$, $f(V) \subset Z$) tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$ para cada $x \in V$.*

2.3 Variedades Diferenciáveis

Definição 2.3.1. Um espaço localmente Euclidiano de dimensão m é um espaço topológico de Hausdorff M tal que em cada ponto existe uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^m . Se φ é um homeomorfismo de um conjunto aberto conexo $U \subset M$ sobre um subconjunto de \mathbb{R}^m , φ é chamada de aplicação coordenada, as funções $\varphi_i = \pi_i(\varphi)$ são chamadas de funções coordenadas, e o par (U, φ) é chamado de sistema de coordenadas ou carta local. A união de todas as cartas locais é chamada de atlas de M .

Definição 2.3.2. Uma estrutura diferenciável \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^k ($1 \leq k \leq \infty$) em um espaço localmente Euclidiano M é uma coleção de sistemas de coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$.
2. $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é \mathcal{C}^k , para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$.
3. A coleção \mathcal{F} é maximal com respeito a 2; isto é, se (U, φ) é um sistema de coordenadas tal que $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi$ são \mathcal{C}^k , para todo $\alpha \in \Lambda$, então $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Definição 2.3.3. Dizemos que um espaço topológico \mathcal{X} tem uma base enumerável em x , se existe uma coleção enumerável \mathcal{B} de vizinhanças de x , tal que cada vizinhança de x contém pelo menos um elemento de \mathcal{B} . Um espaço que tem uma base enumerável para cada um de seus pontos é dito satisfazer o primeiro axioma da enumerabilidade ou é dito primeiro enumerável.

Definição 2.3.4. Se um espaço topológico \mathcal{X} tem uma base enumerável para sua topologia, então dizemos que \mathcal{X} satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade ou é segundo enumerável.

Exemplo 2.3.1. A reta \mathbb{R} tem uma base enumerável - a coleção de todos os intervalos abertos (a, b) com $a, b \in \mathbb{Q}$ é base enumerável.

Definição 2.3.5. Uma variedade diferenciável de dimensão m e de classe \mathcal{C}^k é um par (M, \mathcal{F}) consistindo de um espaço localmente Euclidiano M , segundo enumerável de dimensão m com uma estrutura \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^k .

De agora em diante, M^m e N^n denotarão uma variedade diferenciável de dimensão m e n , respectivamente.

Definição 2.3.6. *Seja $U \subset M$ aberto. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^∞ em U (denotada por $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$) se $f \circ \varphi^{-1}$ é \mathcal{C}^∞ para cada aplicação coordenada φ em M . Uma aplicação contínua $\psi : M \rightarrow N$ é diferenciável de classe \mathcal{C}^∞ (denotada $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$) ou simplesmente $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ se $g \circ \psi$ é uma função \mathcal{C}^∞ em ψ^{-1} (domínio de g) para toda função g de classe \mathcal{C}^∞ definida em conjuntos abertos em N .*

Equivalentemente, uma aplicação contínua ψ é \mathcal{C}^∞ se, e somente se, $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ é \mathcal{C}^∞ , para cada aplicação coordenada τ em M e φ em N .

2.3.1 Vetores tangentes e diferenciais

O vetor $v = (v_1, \dots, v_m)$ em um ponto p no espaço Euclidiano \mathbb{R}^m pode ser pensado como um operador em funções diferenciáveis. Especificamente, se f é diferenciável em uma vizinhança de p , então v determina para f um número real $v(f)$ que é a derivada direcional de f em p na direção v . Isto é,

$$v(f) = v_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p + \dots + v_m \left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \right|_p = \nabla f(p) \cdot v. \quad (2.21)$$

Esta operação do vetor v em funções diferenciáveis satisfaz as seguintes propriedades importantes:

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g) \quad (2.22)$$

$$v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \quad (2.23)$$

onde f e g são funções diferenciáveis em uma vizinhança de p e $\lambda \in \mathbb{R}$. A primeira propriedade nos diz que v comporta-se linearmente em funções, e a segunda que v é uma *derivação*.

Definição 2.3.7. *Sejam $p \in M$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis com U e V abertos contendo p . Dizemos que f e g definem o mesmo germe em p , se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p , tal que $f|_W = g|_W$. Isto introduz uma relação de equivalência*

em funções C^∞ definidas nas vizinhanças de p , ou seja, duas funções serão equivalentes se, e somente se, definirem o mesmo germe em p . As classes de equivalência são chamadas germes, e denotaremos o conjunto dos germes em p por $\mathfrak{F}(p)$. Se f é uma função C^∞ em uma vizinhança de p , então \mathbf{f} denotará seu germe. A operação de adição, multiplicação por escalar e multiplicação de funções induz em $\mathfrak{F}(p)$ a estrutura de uma álgebra sobre \mathbb{R} .

Definição 2.3.8. Um vetor tangente v em um ponto $p \in M$ é dito uma derivação linear da álgebra $\mathfrak{F}(p)$. Isto é, para toda $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathfrak{F}(p)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$v(\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}) = v(\mathbf{f}) + \lambda v(\mathbf{g}) \quad (2.24)$$

$$v(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f}(p)v(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)v(\mathbf{f}). \quad (2.25)$$

$T_p(M)$ denota o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p e, é chamado espaço tangente a M em p . Observe que se definimos $(v + w)(\mathbf{f})$ e $(\lambda v)(\mathbf{f})$ por

$$(v + w)(\mathbf{f}) = v(\mathbf{f}) + w(\mathbf{f}) \quad (2.26)$$

$$(\lambda v)(\mathbf{f}) = \lambda(v(\mathbf{f})) \quad (2.27)$$

sempre que $v, w \in T_p(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $v + w$ e λv são ainda vetores tangentes em p . Consequentemente, $T_p(M)$ será um espaço vetorial real.

Observação 2.3.1. Se \mathbf{c} é um germe de uma função de valor constante c numa vizinhança de m e se v é um vetor tangente, então $v(\mathbf{c}) = 0$, pois $v(\mathbf{c}) = cv(\mathbf{1})$ e $v(\mathbf{1}) = v(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = 1v(\mathbf{1}) + v(\mathbf{c})1 = 2v(\mathbf{1})$, ou seja, $v(\mathbf{1}) = 0$.

Na prática, trataremos os vetores com a operação sobre funções ao invés de seus germes. Se f é uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p , e $v \in T_p(M)$, definimos

$$v(f) = v(\mathbf{f}). \quad (2.28)$$

Então $v(f) = v(g)$ sempre que f e g coincidirem em uma vizinhança de p e, claramente

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (2.29)$$

$$v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \quad (2.30)$$

onde $f + \lambda g$ e $f \cdot g$ estão definidas na intersecção dos domínios da definição de f e g .

Definição 2.3.9. *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Sejam (U, φ) um sistema de coordenadas com funções coordenadas x_1, \dots, x_m , e $p \in U$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, definimos o vetor tangente $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) \in T_p(M)$ como sendo*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}\Big|_{\varphi(p)} \quad (2.31)$$

para cada função f de classe C^∞ em uma vizinhança de p , onde $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = x_i$, ($i = 1, \dots, m$). Interpretamos (2.31) como a derivada direcional de f em p na direção coordenada x_i . Também usamos a notação

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f). \quad (2.32)$$

Definição 2.3.10. *Sejam $\psi : M \rightarrow N$ de classe C^∞ e $p \in M$. A diferencial de ψ em p é a aplicação linear*

$$\begin{aligned} d\psi : T_p(M) &\rightarrow T_{\psi(p)}(N) \\ v &\mapsto d\psi(v), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $d\psi(v)$ é o vetor tangente em $\psi(p)$.

A seguir, descrevemos como esta aplicação opera em funções. Seja g uma função C^∞ em uma vizinhança de $\psi(p)$. Definamos

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi). \quad (2.34)$$

É fácil ver que $d\psi : T_p(M) \rightarrow T_{\psi(p)}(N)$ é uma aplicação linear. A aplicação ψ é chamada

não-singular em p , se $d\psi_p$ é não singular, isto é, o núcleo de (2.33) consiste apenas de 0.

2.3.2 Fibrado Tangente

Seja M uma variedade \mathcal{C}^∞ com a estrutura diferenciável \mathcal{F} . Seja

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M). \quad (2.35)$$

Existe uma projeção natural, a saber,

$$\begin{aligned} \pi : T(M) &\rightarrow M \\ v &\mapsto \pi(v) = p; \quad v \in T_p(M). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Observação 2.3.2. *Podemos escrever os elementos de $T(M)$ como pares $(p, v) \in M \times T_p(M)$.*

Seja $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ com funções coordenadas x_1, \dots, x_m . Defina

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) &\rightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ v &\mapsto \tilde{\varphi}(v) = (x_1(\pi(v)), \dots, x_m(\pi(v)), dx_1(v), \dots, dx_m(v)), \end{aligned} \quad (2.37)$$

para todo $v \in \pi^{-1}(U)$. Notemos que $\tilde{\varphi}$ é uma aplicação injetora sobre subconjuntos abertos de \mathbb{R}^{2m} . O próximo passo é construir uma topologia e uma estrutura diferenciável em $T(M)$.

1. Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$, então $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ é \mathcal{C}^∞ .
2. A coleção $\{\tilde{\varphi}^{-1}(W) : W \text{ aberto em } \mathbb{R}^{2m}, (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ forma uma base para uma topologia em $T(M)$ que torna $T(M)$ um espaço localmente Euclidiano, segundo enumerável e $2m$ -dimensional.
3. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ uma coleção maximal, com respeito a 2, contendo

$$\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}.$$

Então $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma estrutura diferenciável em $T(M)$.

$T(M)$ com esta estrutura diferenciável $\tilde{\mathcal{F}}$ é chamado *fibrado tangente*.

2.3.3 Imersões e Subvariedades

Definição 2.3.11. *Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^∞ .*

- (a) ψ é uma imersão, se $d\psi_m$ é não-singular para cada $m \in M$.
- (b) O par (M, ψ) é uma subvariedade de N , se ψ é uma imersão injetora.
- (c) ψ é um mergulho, se ψ é uma imersão e um homeomorfismo; isto é, ψ é aberta como uma aplicação em $\psi(M)$ com a topologia relativa.
- (d) ψ é um difeomorfismo, se ψ é injetora e ψ^{-1} é \mathcal{C}^∞ .

Proposição 2.4 (Forma local das imersões em variedades). *Sejam $f : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$ e $p \in M$, tal que $Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetora. Então, existem um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$, e um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, onde $V \subset N$ aberto, tais que $f(U) \subset V$ e $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow x(U) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é a aplicação inclusão, isto é, $y \circ f \circ x^{-1}(w) = (w, 0)$. Em particular, o conjunto dos pontos $p \in M$ de f tais que $Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetora é aberto em M .*

2.3.4 Submersões e Transversalidade

Definição 2.3.12. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$. Um ponto $c = f(p) \in N$ é dito valor regular de f se, para cada $p \in f^{-1}(c)$, a derivada $Df(p) : T_pM \rightarrow T_cN$ é sobrejetora.*

Proposição 2.5. *Seja $c \in N$ um valor regular de uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$. Então, ou $f^{-1}(c)$ é vazio ou $f^{-1}(c)$ é uma variedade $(m - n)$ -dimensional de M de classe \mathcal{C}^k . O espaço tangente a $f^{-1}(c)$ em um ponto p é o núcleo de $Df(p) : T_pM \rightarrow T_cN$.*

Demonstração: Veja [18]. □

Proposição 2.6 (Forma local das submersões em variedades). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$. Suponhamos que no ponto $p \in M$ a derivada $Df(p) : T_pM \rightarrow$*

$T_{f(p)}N$ seja sobrejetora. Então existem um sistema de coordenadas locais $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $f(p) \in V$, e um mergulho de classe \mathcal{C}^k , $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ (x será um sistema de coordenadas locais em M se $M \in \mathcal{C}^k$) tais que $x(U) = W \times Z$, $f(U) \subset V$ e $y \circ f \circ x^{-1} : W \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma $y \circ f \circ x^{-1}(w, z) = w$. Em particular, o conjunto X dos pontos $p \in M$ em que a derivada de f é sobrejetora é aberto e $f|_X$ é uma aplicação aberta.

Demonstração: Veja [18]. □

Definição 2.3.13. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma submersão, se todo $c \in N$ for valor regular de f .

Observação 2.3.3. A definição acima é equivalente a dizer que, para todo ponto $p = f^{-1}(c) \in M$, a derivada $Df(p) : T_pM \rightarrow T_cN$ é sobrejetora.

Definição 2.3.14. Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^k e $S^s \subset N^n$ uma subvariedade de classe \mathcal{C}^k e dimensão $s < n$. Dizemos que f é transversal a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ quando

$$f'(p) \cdot T_pM + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N,$$

ou seja, quando a imagem de $f'(p)$ junto com o espaço tangente a S em $f(p) = c$, gerarem $T_{f(p)}N$.

Dizemos que f é transversal a S se, f é transversal a S em p , para todo $p \in f^{-1}(S)$.

Veja Figura 2.1.

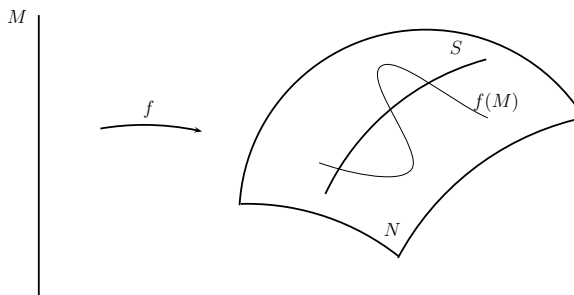


Figura 2.1: f transversal a S

Exemplo 2.3.2. Seja $S = \{c\}$, $f : M \rightarrow N$ é transversal a S se, e somente se, c é valor regular. De fato, se

$$S = \{c\} \Rightarrow T_c S = 0 \Rightarrow \text{Im} f'(p) = T_c N.$$

Desta forma, $f'(p)$ é sobrejetora e, portanto, c é valor regular. Reciprocamente, se c é um valor regular de f , então $p \in f^{-1}(c)$ e $Df(p)$ é sobrejetora. Logo, $\text{Im} Df(p) = T_c N$, ou seja, $\text{Im} Df(p) + 0 = T_c N$. Portanto, f é transversal a S .

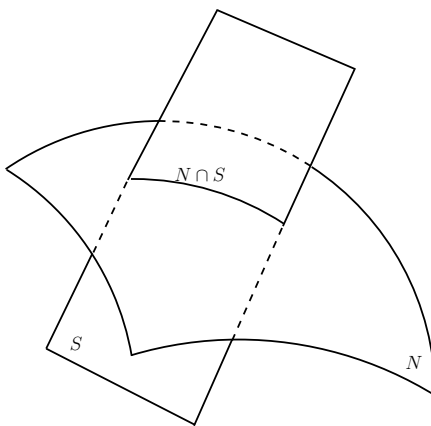


Figura 2.2:

Definição 2.3.15. Se duas subvariedades $N, S \subset M$ são tais que $T_p N + T_p S = T_p M$ em todo ponto $p \in N \cap S$, dizemos que N e S estão em posição geral, ou que se cortam transversalmente.

Em particular, se $M^2, N^2 \subset \mathbb{R}^3$ são superfícies de classe \mathcal{C}^k , tais que, em cada ponto $p \in M \cap N$ os planos tangentes $T_p M$ e $T_p N$ são distintos, então $M \cap N$ é uma curva de classe \mathcal{C}^k em \mathbb{R}^3 .

Outro caso especial ocorre quando $N^n, S^{m-n} \subset M^m$ são tais que $T_p N + T_p S = T_p M$, $\forall p \in N \cap S$. Então, $N \cap S$ é uma variedade de dimensão 0, ou seja, é um conjunto

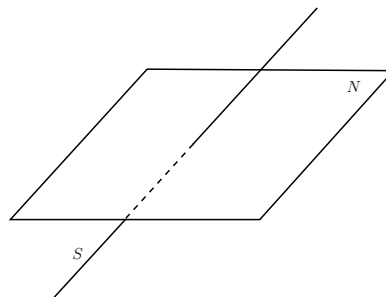


Figura 2.3:

discreto de pontos em M .

Exemplo 2.3.3. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (0, t)$ e S o eixo x em \mathbb{R}^2 . Neste caso temos uma transversalidade. Porém, considerando $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (t, t^2)$ e S o eixo x em \mathbb{R}^2 , vemos que isto não ocorre.

2.3.5 Folheações

Uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M^m ($m > n$) é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n chamadas de *folhas*, as quais se aglomeram localmente como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ com a segunda coordenada constante.

O exemplo mais elementar de folheação de dimensão n de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ é onde as folhas são os n -planos da forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$, com $c \in \mathbb{R}^{m-n}$.

Os difeomorfismos locais $h : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preservam as folhas desta folheação são aqueles que, para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ com $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \neq \emptyset$, satisfazem $h(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{c'\})$, $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$. Estes difeomorfismos têm a seguinte expressão:

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \quad (2.38)$$

Definição 2.3.16. Seja M uma variedade de dimensão m e classe \mathcal{C}^∞ . Uma folheação de classe \mathcal{C}^r e de dimensão n de M , é um atlas máximo \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^r em M com as seguintes propriedades:

- Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^{m-n} , respectivamente.
- Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$.

Dizemos também que M é folheada por \mathcal{F} , ou ainda, que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe \mathcal{C}^r sobre M .

Bifurcação Zip

3.1 Introdução

Neste capítulo, nos dedicaremos ao Princípio da Exclusão do Competidor no caso em que duas espécies de predadores competem por um único recurso de regeneração. Consideremos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} \\ \dot{x}_1 = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde x_1 , x_2 e S denotam o tamanho das populações de duas espécies de predadores e da única espécie de presas, respectivamente; o crescimento logístico da presa é assumido quando os predadores não estão presentes; a taxa com que o predador x_i captura a presa S é representada pelo termo $\frac{m_i S}{a_i + S}$; a resposta funcional de predadores está de acordo com a cinética de Michael-Mental; $\gamma > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca da presa; $K > 0$ é a capacidade ambiental de sustentação em relação a presa; $m_i > 0$, $d_i > 0$, $a_i > 0$ são a taxa máxima de natalidade, a taxa de mortalidade e a “constante de semissaturação”, respectivamente do i -ésimo predador ($i = 1, 2$); e o ponto “ $\dot{}$ ” significa diferenciação em relação ao tempo t . O termo “constante de semissaturação” significa que para $S = a_i$ o valor da resposta funcional do i -ésimo predador é igual a $m_i/2$, ou seja, a metade da taxa máxima de natalidade.

O modelo (3.1) originou-se a partir de modelos do tipo chemostat, aparelho usado em laboratório para a produção de microorganismos. No modelo (3.1), a presa será um nutriente proporcionado aos dois predadores a uma taxa constante, e tais nutrientes estão se regenerando de acordo com a equação diferencial logística na ausência da predação.

As constantes

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

são introduzidas tendo o seguinte significado: x_i é crescente se, e somente se, $S > \lambda_i$, desde que x_i é positivo (o lado direito da segunda ou terceira equação de (3.1) torna-se zero em $S = \lambda_i$). De fato, x_i é crescente se, e somente se,

$$\frac{dx_i}{dt} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m_i S}{a_i + S} - d_i \right) \underbrace{x_i}_{>0} > 0 \Leftrightarrow \frac{m_i S}{a_i + S} - d_i > 0 \Leftrightarrow (m_i - d_i)S > a_i d_i \Leftrightarrow S > \lambda_i,$$

desde que $m_i > d_i$; o que já esperado.

Hsu, Hubbel e Waltman [5, 6] mostraram que as soluções de (3.1) correspondentes aos valores iniciais positivos são limitadas e permanecem no octante positivo (Lema A.0.1), e que a i -ésima espécie de predador pode sobreviver se, e somente se, $0 < \lambda_i < K$ (Lema A.0.2), esta última condição implica que $m_i > d_i$. Eles estudaram o caso genérico $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Experiências computacionais publicadas por Koch [7] e Hsu, Hubbel e Waltman [6] mostraram que para alguns valores dos parâmetros, as soluções periódicas podem estar no octante positivo significando que a coexistência é possível. Smith [9] provou (usando teoria de bifurcação) que no caso $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ existem soluções periódicas estáveis no octante positivo para $|\lambda_1 - \lambda_2|$ e $K - (a_1 + 2\lambda_1)$ positivos e suficientemente pequenos.

Wilken [11] tratou o caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Ele afirma que, no caso $a_1 = a_2 = a$: se $K \leq a + 2\lambda$, os pontos de equilíbrio sobre um segmento de reta são estáveis; e se $K > a + 2\lambda$ então “todas as três espécies sobrevivem em permanente ciclo”. Ele também demonstrou que, no caso $a_1 > a_2$: se $K > a_1 + 2\lambda$, x_2 vai para zero, e S e x_1 sobrevivem em permanente ciclo; se $K = a_1 + a\lambda$, x_2 vai para zero, e S e x_1 tendem para um ponto de equilíbrio; e se $K < a_1 + 2\lambda$ então todas as três espécies sobrevivem e a solução tende a algum ponto do

segmento de reta do equilíbrio. Ele deixa em aberto o caso em que todos os pontos neste segmento de reta são pontos do conjunto ω -limite de alguma solução ou não.

Primeiramente, notemos que o sistema (3.1) é “bem comportado” no sentido de que o modelo nunca produzirá valores negativos de S , x_1 ou x_2 , desde que os valores iniciais de S , x_1 e x_2 sejam não negativos. Esta é a primeira exigência de um modelo realista.

Em segundo lugar, estabeleceremos uma taxa mínima da população de presa que pode suportar um dado predador, até na ausência de competição. Para o i -ésimo predador, seja $\lambda_i = \frac{a_i d_i}{r_i}$, onde $r_i = m_i - d_i$, a taxa de crescimento intrínseca do predador. Notaremos também que os predadores desaparecerão se $m_i \leq d_i$. Obviamente, se a taxa de máxima de natalidade do predador é menor ou igual que sua taxa de mortalidade, a quantidade de presas não sustentará o predador. Assim, como esperamos, se $\lambda \geq K$ e/ou se $m \leq d$ ambos predadores, x_1 e x_2 desaparecerão e S aproximar-se-á de K .

O parâmetro λ_i também é importante para outras análises, pois seu valor relativo para as duas espécies de predadores determina qual espécie sobreviverá e qual não sobreviverá. Notemos que λ_i tem unidades de densidade de presas (as unidades da constante de semissaturação a_i) pois a unidade de d_i e r_i se cancelam. Ainda, $b_i = m_i/d_i > 1$, a razão das taxas de natalidade máxima e de mortalidade do i -ésimo predador, também é importante.

Neste trabalho, trataremos o caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Pretendemos estudar as propriedades qualitativas do problema (3.1). Ainda que este caso não seja estruturalmente estável, os fenômenos são interessantes e nos ajudam a compreender a dependência dos resultados de competição nos parâmetros. Na Seção 3.3, apresentaremos os resultados para o caso $a_1 = a_2 = a$. Na Seção 3.4, estudaremos o caso $a_1 > a_2$ e no Apêndice A exibimos as demonstrações dos resultados utilizados durante o decorrer do nosso trabalho.

3.2 Resultados no caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Denotaremos por

$$\beta_i = m_i - d_i, \quad b_i = \frac{m_i}{d_i}, \quad (i = 1, 2),$$

onde β_i é a taxa máxima de crescimento do i -ésimo predador. De posse destas constantes, escrevemos

$$\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i} = \frac{a_i d_i}{\beta_i} = \frac{a_i}{b_i - 1}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.3)$$

Notemos que para a sobrevivência de um i -ésimo predador basta que $\lambda_i > 0$ seja pequeno. Isto significa que estas espécies já começam a crescer para uma quantidade $S = \lambda_i$ pequena de presas. A constante λ_i é pequena se a constante de semissaturação a_i e a taxa de morte d_i são pequenas e b_i grande. Nesse trabalho, assumiremos que

$$0 < \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < K. \quad (3.4)$$

Isto implica que $\beta_i > 0$ e $b_i > 1$, ($i = 1, 2$). Observemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{m_i x_i S}{a_i + S} - d_i x_i = \left(\frac{(m_i - d_i)S - d_i a_i}{a_i + S} \right) x_i = \beta_i \left(\frac{S - a_i d_i / \beta_i}{a_i + S} \right) x_i \\ &= \beta_i x_i \frac{S - \lambda}{a_i + S}. \end{aligned}$$

Em vista de (3.4), o sistema (3.1) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S}, \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a_1 + S}, \\ \dot{x}_2 = \beta_2 x_2 \frac{S - \lambda}{a_2 + S}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Os pontos de equilíbrio de (3.5) são $(0, 0, 0)$, $(K, 0, 0)$ e os pontos que estão sobre o

segmento de reta no octante positivo do espaço S , x_1 , x_2

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : S = \lambda, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \frac{m_1 x_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a_2 + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Os pontos satisfazendo (3.6) serão denotados por $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ (Fig. 3.1). Os pontos finais de L , isto é, o equilíbrio em $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, respectivamente, são

$$\begin{aligned} P_1 &= (\lambda, \xi_1, 0) = \left(\lambda, \frac{\gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}, 0 \right) \\ P_2 &= (\lambda, 0, \xi_2) = \left(\lambda, 0, \frac{\gamma(a_2 + \lambda)(K - \lambda)}{m_2 K} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

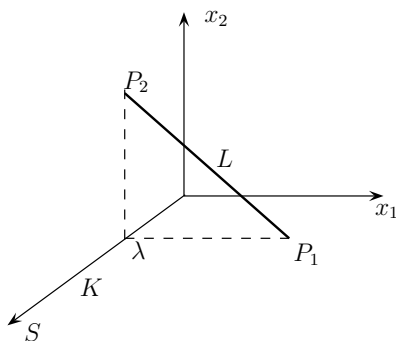


Figura 3.1: Equilíbrio de (3.5).

Os pontos de equilíbrio $(0, 0, 0)$ e $(K, 0, 0)$ são instáveis. De fato, sejam

$$\begin{cases} P(S, x_1, x_2) = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} \\ Q(S, x_1, x_2) = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a_1 + S} \\ T(S, x_1, x_2) = \beta_2 x_2 \frac{S - \lambda}{a_2 + S} \end{cases}. \quad (3.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial S} &= \gamma(1 - 2S/K) - \frac{m_1 x_1 a_1}{(a_1 + S)^2} - \frac{m_2 x_2 a_2}{(a_2 + S)^2} & \frac{\partial P}{\partial x_1} &= -\frac{m_1 S}{a_1 + S} & \frac{\partial P}{\partial x_2} &= -\frac{m_2 S}{a_2 + S} \\ \frac{\partial Q}{\partial S} &= \beta_1 x_1 \frac{a_1 + \lambda}{(a_1 + S)^2} & \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= \beta_1 \frac{S - \lambda}{a_1 + S} & \frac{\partial Q}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial S} &= \beta_2 x_2 \frac{a_2 + \lambda}{(a_2 + S)^2} & \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= \beta_2 \frac{S - \lambda}{a_2 + S}, \end{aligned}$$

logo,

$$J_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \lambda}{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_2 \lambda}{a_2} \end{pmatrix}.$$

Observemos que os autovalores da matriz $J_{(0,0,0)}$ são $\alpha_1 = \gamma > 0$, $\alpha_2 = -\frac{\beta_1 \lambda}{a_1} < 0$ e $\alpha_3 = -\frac{\beta_2 \lambda}{a_2} < 0$. Portanto $(0, 0, 0)$ é instável. Vemos que

$$J_{(K,0,0)} = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1(K - \lambda)}{a_1 + K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2(K - \lambda)}{a_2 + K} \end{pmatrix},$$

então seus autovalores são $\alpha_1 = -\gamma < 0$, $\alpha_2 = \frac{\beta_1(K - \lambda)}{a_1 + K} > 0$ e $\alpha_3 = \frac{\beta_2(K - \lambda)}{a_2 + K} > 0$ e, portanto $(K, 0, 0)$ é instável.

Agora iremos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do conjunto L . Para isto dividiremos o nosso estudo em dois casos, a saber, no primeiro caso trataremos as constantes de semissaturação a_i 's iguais e neste caso ocorrerá um fenômeno conhecido como Bifurcação de Andronov-Hopf e no segundo caso as constantes de semissaturação serão diferentes, a saber, assumiremos que $a_1 > a_2$, e neste caso constataremos a Bifurcação Zip.

3.3 Bifurcação de Andronov-Hopf

Nesta seção, assumiremos

$$a_1 = a_2 = a, \quad (3.9)$$

ou seja, as duas espécies de predadores têm a mesma constante de semissaturação. De (3.4), temos $b_1 = b_2 = b$, isto é, $b = \frac{m_1}{d_1} = \frac{m_2}{d_2}$. Seja $\rho = \frac{d_2}{d_1} = \frac{m_2}{m_1}$. Então $\rho = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, onde $\beta_i = d_i(m_i/d_i - 1) = (b - 1)d_i$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\rho \geq 1$.

De (3.9) e usando a notação introduzida acima, o sistema (3.5) torna-se

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{(x_1 + \rho x_2)m_1 S}{a + S} \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a + S} \\ \dot{x}_2 = \rho \beta_1 x_2 \frac{S - \lambda}{a + S}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dividindo a terceira equação pela segunda, concluímos que a equação da trajetória satisfaz $\frac{dx_2}{dx_1} = \rho \frac{x_2}{x_1}$. Vemos facilmente, que $\frac{x_2}{x_1^\rho}$ é a solução integral das duas últimas equações do sistema (3.10). Como consequência, os cilindros parabólicos

$$\frac{x_2}{x_1^\rho} = c, \quad c > 0 \quad (3.11)$$

são superfícies invariantes do sistema (3.10). É fácil ver que estas superfícies folheam completamente o octante positivo, $S \geq 0$, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, isto é, através de cada ponto neste octante passa uma única superfície da família (3.11). Vamos fixar o valor de c e restringir o sistema (3.10) à variedade invariante (3.11) parametrizada por S e x_1 :

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{(x_1 + \rho c x_1^\rho)m_1 S}{a + S} \\ \dot{x}_1 = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a + S}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Os pontos de equilíbrio de (3.12) são $(0, 0)$, $(K, 0)$ e os únicos pontos de interseção

do segmento de reta L e (3.11). No entanto, de (3.9), a equação de L é

$$S = \lambda, \quad x_1 + \rho x_2 = \frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (3.13)$$

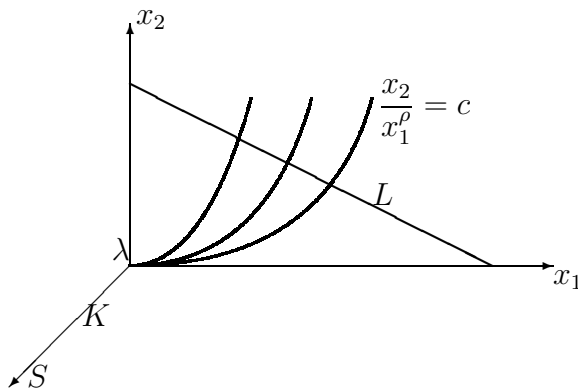


Figura 3.2: Equilíbrio e superfícies invariantes de (3.10)

Seja (λ, ξ_1, ξ_2) o ponto de intersecção de L e (3.11), então ξ_1 é a única solução positiva de

$$\xi_1 + \rho c \xi_1^\rho = \frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} \quad (3.14)$$

pois $\xi_2 = c \xi_1^\rho$, veja Fig. 3.2.

Os pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(K, 0)$ são instáveis. De fato, consideremos

$$\begin{cases} V(S, x_1) = \gamma S(1 - S/K) - \frac{(x_1 + \rho c x_1^\rho) m_1 S}{a + S} \\ U(S, x_1) = \beta_1 x_1 \frac{S - \lambda}{a + S}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Assim, calculando suas derivadas parciais,

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \gamma(1 - 2S/K) - \frac{(x_1 + \rho c x_1^\rho) m_1 a}{(a + S)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{(1 + \rho^2 c x_1^{\rho-1}) m_1 S}{a + S}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \beta_1 x_1 \frac{a + \lambda}{(a + S)^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S}.$$

Logo,

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \lambda}{a} \end{pmatrix}.$$

Observemos que os autovalores de $J_{(0,0)}$ são $\nu_1 = \gamma > 0$ e $\nu_2 = -\frac{\beta_1 \lambda}{a} < 0$. Portanto, $(0, 0)$ é instável. Agora,

$$J_{(K,0)} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\frac{m_1 K}{a + K} \\ 0 & \frac{\beta_1 (K - \lambda)}{a + K} \end{pmatrix}$$

e seus autovalores são $\nu_1 = -\gamma < 0$ e $\nu_2 = \frac{\beta_1 (K - \lambda)}{a + K} > 0$. Portanto, $(K, 0)$ é instável.

Estudando a estabilidade do ponto de equilíbrio (λ, ξ_1) de (3.12), onde ξ_1 é a única solução positiva de (3.14), a capacidade natural de sustentação K será considerada como um parâmetro de bifurcação. Quando $K > \lambda$, a reta (3.13) está movendo-se em um caminho paralelo e está cortando a superfície (3.11), em diferentes pontos $(\xi_1(c, K), \xi_2(c, K))$, onde $c > 0$, como mostra a Fig. 3.3. Para não existir confusão, também denotaremos $\xi_1 = \xi_1(c, K)$.

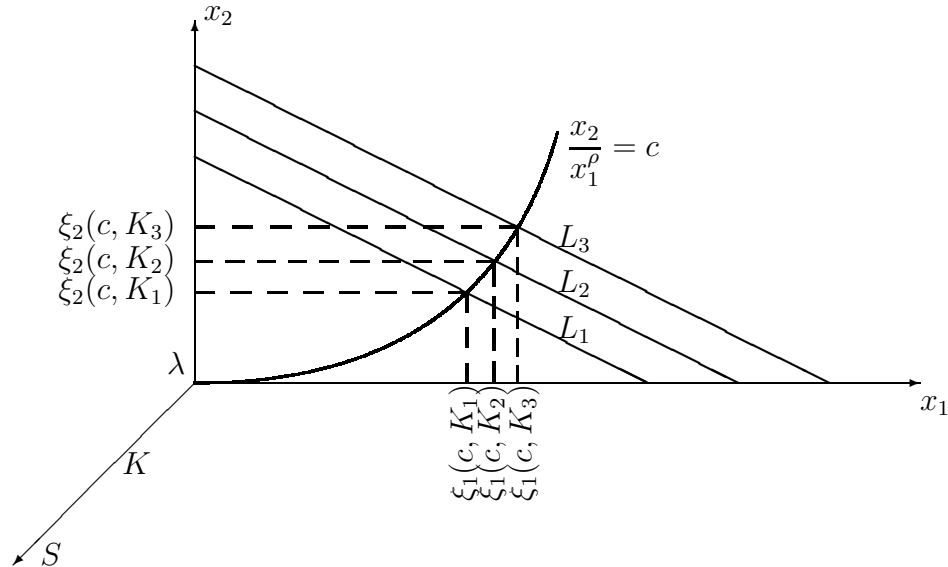


Figura 3.3: Deslocamento do equilíbrio em superfícies invariantes devido ao crescimento de K .

O seguinte resultado, Teorema 3.3.1, concentra-se no sistema (3.12) sobre a variedade

definida por (3.11). Antes de fazer sua demonstração, necessitamos de algumas definições.

Definição 3.3.1. *Um polinômio é dito ser **homogêneo** de grau d em $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, ou ser uma **forma**, se ele é escrito*

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n = d} r_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \quad (3.16)$$

para algum $d \in \mathbb{N}$ e $r_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3.1. *Qualquer termo não nulo que aparece no polinômio (3.16) tem grau d . O polinômio nulo é considerado homogêneo.*

Consideremos agora, a família a um parâmetro de equações diferenciais

$$\dot{z} = f(\mu, z), \quad (3.17)$$

onde $f \in \mathcal{C}^{k+1}[(-\bar{\mu}, \bar{\mu}) \times D_a, \mathbb{R}^2]$ e $f(\mu, 0) \equiv 0$. Aqui $\bar{\mu}, a > 0$, $D_a = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| < a\}$, e $k \geq 3$. Denotamos os autovalores de $D_z f(\mu, 0)$ por $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, onde $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, e $\beta(0) > 0$.

Seja $\psi : (-\bar{\mu}, \bar{\mu}) \times D_a \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $(\mu, x, y) \mapsto \psi(\mu, x, y)$. Diremos que ψ é de classe \mathcal{C}_s^r , $s \leq r$, se $\psi \in \mathcal{C}^r$ e a expansão de MacLaurin em (x, y) de ψ começar com termos de grau maiores que s . Uma transformação linear adequada $\tau(\mu) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser encontrada de forma que (3.17) torne-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + p(\mu, x, y) \\ \dot{y} &= \alpha(\mu)x + \beta(\mu)y + q(\mu, x, y), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{k+1}[(-\bar{\mu}, \bar{\mu}), \mathbb{R}]$ e $p, q \in \mathcal{C}_2^{k+1}[(-\bar{\mu}, \bar{\mu}) \times D_a, \mathbb{R}]$.

Fazendo $\lambda = \beta(0)$, $X(x, y) = p(0, x, y)$, e $Y(x, y) = q(0, x, y)$, consideremos o sistema (3.18) para $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda y + Y(x, y). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Denotaremos por X_i, Y_i , os polinômios homogêneos de grau $i \in \{2, \dots, k+1\}$ na expansão de

MacLaurin de X, Y .

Consideraremos o sistema (3.20) no caso geral, isto é, $X, Y \in \mathcal{C}^{k+1}$.

Definição 3.3.2. *Seja $h \in \{2, \dots, k\}$. A solução $x \equiv y \equiv 0$ de (3.20) é dita ser h -assintoticamente estável (h -completamente instável) se*

(i) *para todo $\xi, \tau \in \mathcal{C}[D_a, \mathbb{R}]$ de ordem maior que h a solução $x \equiv y \equiv 0$ de*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X_2(x, y) + \dots + X_h(x, y) + \xi(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda y + Y_2(x, y) + \dots + Y_h(x, y) + \tau(x, y) \end{aligned} \quad (3.20)$$

é assintoticamente estável (completamente instável);

(ii) *a propriedade (i) não é satisfeita quando h é substituído por qualquer $m \in \{2, \dots, h-1\}$.*

Agora, dado qualquer ímpar $h \in \{3, \dots, k\}$, queremos considerar o caso de bifurcação de órbitas periódicas em que essa estrutura é preservada sobre a modificação do lado direito de (3.18) sem trocar as funções α, β e aqueles termos de X, Y com grau menor ou igual a h . Com isto em mente, denotemos por $S_h = S(X_2, \dots, Y_h)$ o conjunto de pares (P, Q) de funções em $C_2^{k+1}[(-\bar{\mu}, \bar{\mu}) \times D_a, \mathbb{R}]$ tal que $[P(0, x, y)]_i = X_i(x, y)$ e $[Q(0, x, y)]_i = Y_i(x, y)$, $i \in \{2, \dots, h\}$. Para $(P, Q) \in S_h$, sejam $V_{P, Q}$ e $\mu_{P, Q}$ as funções deslocamento e bifurcação, respectivamente, para a família a um parâmetro de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + p(\mu, x, y) \\ \dot{y} &= \alpha(\mu)x + \beta(\mu)y + q(\mu, x, y). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Definição 3.3.3. *Seja $h \in \{3, \dots, k\}$ ímpar. A bifurcação das órbitas periódicas de (3.18) é dita h -atratora (h -repulsora) se:*

- (a) *para qualquer $(P, Q) \in S_h$, as órbitas periódicas de (3.21) são atratoras (repulsoras);*
- (b) *a condição (a) não é satisfeita quando h é substituído por qualquer $m \in \{3, \dots, h-2\}$ ímpar.*

Teorema 3.3.1. *Se $\lambda < K < a + 2\lambda$, então o ponto de equilíbrio $(\lambda, \xi_1(c, K))$ de (3.12) é assintoticamente estável com região de atratividade $\{(S, x_1) : S > 0, x_1 > 0\}$. Quando $K = a + 2\lambda$ o sistema sofre uma bifurcação de Hopf supercrítica, isto é, existe $\delta > 0$ tal que para $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$, o sistema (3.12) tem um caminho simples fechado em uma vizinhança de $(\lambda, \xi_1(c, K))$, e este caminho fechado é orbitalmente assintoticamente estável.*

Demonstração: Movendo a origem para o ponto de equilíbrio $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ do sistema (3.12), onde ξ_1 é determinado por (3.14), pela transformação $y_1 = S - \lambda$, $y_2 = x_1 - \xi_1$, obtemos

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \gamma(y_1 + \lambda) \left(1 - \frac{y_1 + \lambda}{K}\right) - \frac{m_1(y_1 + \lambda)(y_2 + \xi_1)}{a + \lambda + y_1} \\ \quad - \frac{m_1(y_1 + \lambda)}{a + \lambda + y_1} \left[\frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1\xi_1}{m_1\xi_1^\rho} (y_2 + \xi_1)^\rho \right] \\ \dot{y}_2 = \beta_1(y_2 + \xi_1) \frac{y_1}{(a + \lambda + y_1)}, \end{cases} \quad (3.22)$$

onde c é dado por (3.14), ou seja, $\rho c = \frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1\xi_1}{m_1\xi_1^\rho}$. O sistema (3.22) tem $(0, 0)$ como um ponto de equilíbrio, para qualquer $\xi_1 \geq 0$ e $K > \lambda$. Consideremos

$$\begin{cases} \varphi(y_1, y_2) = \gamma(y_1 + \lambda) \left(1 - \frac{y_1 + \lambda}{K}\right) - \frac{m_1(y_1 + \lambda)(y_2 + \xi_1)}{a + \lambda + y_1} \\ \quad - \frac{m_1(y_1 + \lambda)}{a + \lambda + y_1} \left[\frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1\xi_1}{m_1\xi_1^\rho} (y_2 + \xi_1)^\rho \right] \\ \psi(y_1, y_2) = \beta_1(y_2 + \xi_1) \frac{y_1}{(a + \lambda + y_1)}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_1} &= \gamma \left(1 - \frac{2(y_1 + \lambda)}{K}\right) - \left(\frac{m_1 a (y_2 + \xi_1)}{(a + \lambda + y_1)^2}\right) \\ &\quad - \frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1\xi_1}{m_1\xi_1^\rho} (y_2 + \xi_1)^\rho \left(\frac{m_1 a}{(a + \lambda + y_1)^2}\right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2} = -\frac{m_1(y_1 + \lambda)}{a + \lambda + y_1} \left(1 + \frac{\rho \gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - \rho m_1\xi_1}{m_1\xi_1^\rho} (y_2 + \xi_1)^{\rho-1}\right), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial\psi(y_1, y_2)}{\partial y_1} = \beta_1(y_2 + \xi_1) \frac{a + \lambda}{(a + \lambda + y_1)^2}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial\psi(y_1, y_2)}{\partial y_2} = \beta_1 \frac{y_1}{(a + \lambda + y_1)}, \quad (3.27)$$

e daí

$$B = J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K}\right) - \frac{\gamma a(1 - \lambda/K)}{a + \lambda} & -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left(1 + \frac{\rho \gamma (a + \lambda)(1 - \lambda/K)}{m_1 \xi_1} - \rho\right) \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Linearizando (3.22) em torno da origem, o polinômio característico do sistema linearizado é

$$\begin{aligned} D(\mu, K) &= \det(B - \mu I) \\ &= \begin{vmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K}\right) - \frac{\gamma a(1 - \lambda/K)}{a + \lambda} - \mu & -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left(1 + \frac{\rho \gamma (a + \lambda)(1 - \lambda/K)}{m_1 \xi_1} - \rho\right) \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} & -\mu \end{vmatrix} \\ &= \mu^2 + \mu \left(\frac{\gamma \lambda (a + 2\lambda - K)}{K(a + \lambda)}\right) + \frac{\lambda m_1 \beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2} \left(1 - \rho + \frac{\rho \gamma (a + \lambda)(1 - \lambda/K)}{m_1 \xi_1}\right). \end{aligned}$$

Aqui o termo constante é positivo como uma consequência de (3.14). O coeficiente de μ ($a + 2\lambda - K > 0$) é positivo se, e somente se, $K < a + 2\lambda$ por (3.4). Então, a origem é assintoticamente estável para $\lambda < K < a + 2\lambda$ e instável se $K > a + 2\lambda$. A atratividade global segue dos resultados em [5, 11], mas a Proposição 4.1, que veremos no próximo capítulo também nos garante a atratividade.

Para $K = a + 2\lambda$ as raízes de D são imaginárias puras $\mu_{1,2}(a + 2\lambda) = \pm i\omega$, onde

$$\begin{aligned} \omega = \omega(\xi_1) &= \frac{1}{a + \lambda} \sqrt{\lambda m_1 \beta_1 \xi_1 \left(1 - \rho + \frac{\rho \gamma (a + \lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)}\right)} \\ &= \frac{1}{a + \lambda} \sqrt{\lambda \beta_1 \left(m_1 \xi_1 + \rho \left[\frac{\gamma (a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - m_1 \xi_1\right]\right)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu(K)) &= -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{\gamma\lambda(a+2\lambda-K)}{2K(a+\lambda)}\right) \\ \Rightarrow \frac{d\operatorname{Re}(\mu(K))}{dK} &= \frac{\gamma\lambda}{2K(a+\lambda)} + \frac{\gamma\lambda(a+2\lambda-K)}{2K^2(a+\lambda)}, \end{aligned}$$

daí, para $K = a + 2\lambda$, temos

$$\frac{d}{dK}\operatorname{Re}(\mu(a+2\lambda)) = \gamma\lambda/2(a+\lambda)(a+2\lambda) > 0.$$

Logo, as condições do Teorema da Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf (Teorema A.0.2) estão satisfeitas. Nesta ordem, para provarmos que a bifurcação é supercrítica, usaremos o método de Negrini e Salvadori [8]. Para isto, são necessárias as definições que vimos anteriormente, o Método de Poincaré, descrito no Apêndice B, e os resultados presentes em [8].

Primeiramente, desenvolvendo o lado direito de (3.22), para $K = a + 2\lambda$, $(y_1, y_2) = (0, 0)$, em série de potências truncando no termo de terceira ordem de (3.23), obtemos:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \varphi(0, 0) + \frac{\partial\varphi(0, 0)}{\partial y_1}y_1 + \frac{\partial\varphi(0, 0)}{\partial y_2}y_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(0, 0)}{\partial y_1^2}y_1^2 + y_1\frac{\partial^2\varphi(0, 0)}{\partial y_1\partial y_2}y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(0, 0)}{\partial y_2^2}y_2^2 + \frac{1}{6}y_1^3\frac{\partial^3\varphi(0, 0)}{\partial y_1^3} + \frac{1}{2}y_1^2y_2\frac{\partial^3\varphi(0, 0)}{\partial y_1^2\partial y_2} \\ &\quad + \frac{1}{2}y_1y_2^2\frac{\partial^3\varphi(0, 0)}{\partial y_1\partial y_2^2} + \frac{1}{6}y_2^3\frac{\partial^3\varphi(0, 0)}{\partial y_2^3} + \dots \\ \dot{y}_2 &= \psi(0, 0) + \frac{\partial\psi(0, 0)}{\partial y_1}y_1 + \frac{\partial\psi(0, 0)}{\partial y_2}y_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(0, 0)}{\partial y_1^2}y_1^2 + y_1\frac{\partial^2\psi(0, 0)}{\partial y_1\partial y_2}y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(0, 0)}{\partial y_2^2}y_2^2 + \frac{1}{6}y_1^3\frac{\partial^3\psi(0, 0)}{\partial y_1^3} + \frac{1}{2}y_1^2y_2\frac{\partial^3\psi(0, 0)}{\partial y_1^2\partial y_2} \\ &\quad + \frac{1}{2}y_1y_2^2\frac{\partial^3\psi(0, 0)}{\partial y_1\partial y_2^2} + \frac{1}{6}y_2^3\frac{\partial^3\psi(0, 0)}{\partial y_2^3} + \dots \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

Algumas derivadas já foram calculadas, que são as seguintes: (3.24), (3.25), (3.26) e (3.27),

as demais são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} &= -\frac{2\gamma}{K} + \left(y_2 + \xi_1 + \frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^\rho}{m_1 \xi_1^\rho} \right) \frac{2m_1 a}{(a + \lambda + y_1)^3}, \\
\frac{\partial^2 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a + \lambda + y_1)^2} \left(1 + \frac{\rho\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - \rho m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^{\rho-1}}{m_1 \xi_1^\rho} \right), \\
\frac{\partial^2 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} &= -\frac{m_1(y_1 + \lambda)\rho(\rho - 1)}{a + \lambda + y_1} \left(\frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^{\rho-2}}{\xi_1^\rho} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_1^3} &= -\frac{6m_1 a}{(a + \lambda + y_1)^4} \left(y_2 + \xi_1 + \frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^\rho}{m_1 \xi_1^\rho} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= \left(1 + \rho \frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^{\rho-1}}{m_1 \xi_1^\rho} \right) \frac{2m_1 a}{(a + \lambda + y_1)^3}, \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a + \lambda + y_1)^2} \left(\rho(\rho - 1) \frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^{\rho-2}}{m_1 \xi_1^\rho} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2^3} &= -\frac{(y_1 + \lambda)\rho(\rho - 1)(\rho - 2)}{a + \lambda + y_1} \left(\frac{\gamma(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1 \xi_1 (y_2 + \xi_1)^{\rho-3}}{\xi_1^\rho} \right), \\
\frac{\partial^2 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} &= -2\beta_1 (y_2 + \xi_1) \frac{a + \lambda}{(a + \lambda + y_1)^3}, \\
\frac{\partial^2 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1} &= \beta_1 \frac{a + \lambda}{(a + \lambda + y_1)^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} &= 0 = \frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2 \partial y_1} = \frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2^3}, \\
\frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_1^3} &= 6\beta_1 (y_2 + \xi_1) \frac{a + \lambda}{(a + \lambda + y_1)^4}, \\
\frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= -2\beta_1 \frac{a + \lambda}{(a + \lambda + y_1)^3}.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $(y_1, y_2) = (0, 0)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(0, 0)}{\partial y_1} &= 0 & \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial y_1} &= \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} \\
\frac{\partial \varphi(0, 0)}{\partial y_2} &= -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a + \lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)} \right), & \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial y_2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varphi(0, 0)}{\partial y_1^2} &= -\frac{2\gamma\lambda}{(a + \lambda)(a + 2\lambda)}, & \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial y_1^2} &= \frac{-2\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2}, \\
\frac{\partial^2 \varphi(0, 0)}{\partial y_2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a + \lambda)^2} \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a + \lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)} \right), & \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial y_2 \partial y_1} &= \frac{\beta_1}{a + \lambda}, \\
\frac{\partial^2 \varphi(0, 0)}{\partial y_2^2} &= -\frac{m_1 \lambda \rho(\rho - 1)}{(a + \lambda)\xi_1^2} \left(\frac{\gamma(a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - m_1 \xi_1 \right), & \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial y_2^2} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_1^3} &= -\frac{6a}{(a+\lambda)^2} \left(\frac{\gamma}{a+2\lambda} \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_1^3} &= \frac{6\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^3}, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= \frac{2m_1 a}{(a+\lambda)^3} \left(1 - \rho + \frac{\rho \gamma (a+\lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= -\frac{2\beta_1}{(a+\lambda)^2}, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_2^2 \partial y_1} &= -\frac{a\rho(\rho-1)}{(a+\lambda)^2 \xi_1^2} \left(\frac{\gamma(a+\lambda)^2}{a+2\lambda} - m_1 \xi_1 \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_2^2 \partial y_1} &= 0, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_2^3} &= -\frac{\lambda\rho(\rho-1)(\rho-2)}{(a+\lambda)\xi_1^3} \left(\frac{\gamma(a+\lambda)^2}{a+2\lambda} - m_1 \xi_1 \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_2^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\varphi(0,0) = 0 = \psi(0,0)$ e usando os cálculos acima em (3.29), obtemos:

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\frac{\lambda m_1}{a+\lambda} \left(1 - \rho + \frac{\rho \gamma (a+\lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right) y_2 - y_1^2 \frac{\gamma \lambda}{(a+\lambda)(a+2\lambda)} \\
&\quad - y_1 y_2 \frac{a m_1}{(a+\lambda)^2} \left(1 - \rho + \frac{\rho \gamma (a+\lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right) \\
&\quad - y_2^2 \frac{\lambda \rho (\rho-1)}{(a+\lambda) 2 \xi_1^2} \left(\frac{\gamma (a+\lambda)^2}{a+2\lambda} - m_1 \xi_1 \right) - y_1^3 \frac{a \gamma}{(a+\lambda)^2 (a+2\lambda)} \\
&\quad + y_1^2 y_2 \frac{a m_1}{(a+\lambda)^3} \left(1 - \rho + \frac{\rho \gamma (a+\lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right) \\
&\quad - y_1 y_2^2 \frac{a \rho (\rho-1)}{(a+\lambda)^2 2 \xi_1^2} \left(\frac{\gamma (a+\lambda)^2}{a+2\lambda} - m_1 \xi_1 \right) \\
&\quad - y_2^3 \frac{\lambda \rho (\rho-1)(\rho-2)}{6 \xi_1^3} \left(\frac{\gamma (a+\lambda)^2}{a+2\lambda} - m_1 \xi_1 \right) + \dots \\
\dot{y}_2 &= \frac{\beta_1 \xi_1}{a+\lambda} y_1 - y_1^2 \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2} + y_1 y_2 \frac{\beta_1}{a+\lambda} + y_1^3 \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^3} - y_1^2 y_2 \frac{\beta_1}{(a+\lambda)^2} + \dots
\end{aligned} \right. \quad (3.30)$$

O sistema (3.30) não está exatamente na forma canônica, já que os coeficientes de y_2 na primeira equação e y_1 na segunda equação não são iguais a $\pm\omega$ - definido em (3.28), mesmo assim, ele será útil para o objetivo desejado.

Usaremos a seguinte função de Lyapunov

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + B y_2^2 + p_3(y_1, y_2) + p_4(y_1, y_2),$$

onde B é uma constante,

$$\begin{aligned} p_3(y_1, y_2) &= b_{03}y_2^3 + b_{12}y_1y_2^2 + b_{21}y_1^2y_2 + b_{30}y_1^3 \quad e \\ p_4(y_1, y_2) &= c_{04}y_2^4 + c_{13}y_1y_2^3 + c_{22}y_1^2y_2^2 + c_{31}y_1^3y_2 + c_{40}y_1^4, \end{aligned}$$

ou seja, p_3 e p_4 são polinômios homogêneos de graus 3 e 4, respectivamente.

Para determinarmos B , p_3 e p_4 , basta utilizarmos a fórmula

$$\dot{V}(y_1, y_2) = y_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} = G(y_1^2 + y_2^2)^2 + \dots$$

Calculando a derivada acima e observando apenas o coeficiente que acompanha o termo y_1y_2 , podemos ver que

$$B = \lambda m_1 \frac{1 - \rho + \rho\gamma(a + \lambda)^2 / m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)}{\beta_1 \xi_1} > 0.$$

Para encontrarmos p_3 e p_4 serão necessários vários cálculos. Contudo, vamos utilizar o Método de Poincaré, já que nosso principal objetivo é determinar G . Vamos fazer algumas considerações

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= -\frac{\lambda m_1}{a + \lambda} \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a + \lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)} \right); & \mathbf{a}_1 &= -\frac{\gamma\lambda}{(a + \lambda)(a + 2\lambda)}; \\ \mathbf{a}_2 &= -\frac{am_1}{(a + \lambda)^2} \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a + \lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)} \right); & \mathbf{a}_3 &= -\frac{\lambda\rho(\rho - 1)}{(a + \lambda)2\xi_1^2} \left(\frac{\gamma(a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - m_1 \xi_1 \right); \\ \mathbf{a}_4 &= -\frac{a\gamma}{(a + \lambda)^2(a + 2\lambda)}; & \mathbf{a}_5 &= \frac{am_1}{(a + \lambda)^3} \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a + \lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a + 2\lambda)} \right); \\ \mathbf{a}_6 &= -\frac{a\rho(\rho - 1)}{(a + \lambda)^2 2\xi_1^2} \left(\frac{\gamma(a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - m_1 \xi_1 \right); & \mathbf{a}_7 &= -\frac{\lambda\rho(\rho - 1)(\rho - 2)}{6\xi_1^3} \left(\frac{\gamma(a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - m_1 \xi_1 \right); \\ \mathbf{b}_0 &= \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda}; & \mathbf{b}_1 &= -\frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2}; \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{\beta_1}{a + \lambda}; & \mathbf{b}_3 &= \frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^3}; \\ \mathbf{b}_4 &= -\frac{\beta_1}{(a + \lambda)^2}; & & \\ X_2(y_1, y_2) &= \mathbf{a}_1 y_1^2 + \mathbf{a}_2 y_1 y_2 + \mathbf{a}_3 y_2^2; & X_3(y_1, y_2) &= \mathbf{a}_4 y_1^3 + \mathbf{a}_5 y_1^2 y_2 + \mathbf{a}_6 y_1 y_2^2 + \mathbf{a}_7 y_2^3; \\ Y_2(y_1, y_2) &= \mathbf{b}_1 y_1^2 + \mathbf{b}_2 y_1 y_2; & Y_3(y_1, y_2) &= \mathbf{b}_3 y_1^3 + \mathbf{b}_4 y_1^2 y_2. \end{aligned}$$

Depois destas considerações, podemos ver também que

$$B = -\frac{\mathbf{a}_0}{\mathbf{b}_0}.$$

Usando o Método de Poincaré, temos

$$\mathbf{a}_0 y_2 \frac{\partial p_3}{\partial y_1} + \mathbf{b}_0 y_1 \frac{\partial p_3}{\partial y_2} = -2y_1 X_2 - 2B y_2 Y_2 \quad (3.31)$$

$$\mathbf{a}_0 y_2 \frac{\partial p_4}{\partial y_1} + \mathbf{b}_0 y_1 \frac{\partial p_4}{\partial y_2} = -2y_1 X_3 - 2B y_2 Y_3 - X_2 \frac{\partial p_3}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial p_3}{\partial y_2} + G(y_1^2 + y_2^2)^2. \quad (3.32)$$

Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 y_2 \frac{\partial p_3}{\partial y_1} + \mathbf{b}_0 y_1 \frac{\partial p_3}{\partial y_2} &= \mathbf{a}_0 b_{12} y_2^3 + (2\mathbf{a}_0 b_{21} + 3\mathbf{b}_0 b_{03}) y_1 y_2^2 + (3\mathbf{a}_0 b_{30} + 2\mathbf{b}_0 b_{12}) y_1^2 y_2 + \mathbf{b}_0 b_{21} y_1^3 \\ -2y_1 X_2 - 2B y_2 Y_2 &= -2\mathbf{a}_1 y_1^3 - (2\mathbf{a}_2 + 2B \mathbf{b}_1) y_1^2 y_2 - (2\mathbf{a}_3 + 2B \mathbf{b}_2) y_1 y_2^2. \end{aligned}$$

Por (3.31), encontramos

- $b_{12} = 0$
- $2\mathbf{a}_0 b_{21} + 3\mathbf{b}_0 b_{03} = -2\mathbf{a}_3 - 2B \mathbf{b}_2 \Rightarrow b_{03} = \frac{-2\mathbf{b}_0 \mathbf{a}_3 - 2B \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2 + 4\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1}{3\mathbf{b}_0^2}$
- $3\mathbf{a}_0 b_{30} + 2\mathbf{b}_0 b_{12} = -2\mathbf{a}_2 - 2B \mathbf{b}_1 \Rightarrow b_{30} = \frac{-2\mathbf{a}_2 - 2B \mathbf{b}_1}{3\mathbf{a}_0}$
- $\mathbf{b}_0 b_{21} = -2\mathbf{a}_1 \Rightarrow b_{21} = \frac{-2\mathbf{a}_1}{\mathbf{b}_0}.$

Notemos que $G(y_1^2 + y_2^2)^2 = G y_1^4 + 2G y_1^2 y_2^2 + G y_2^4$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 y_2 \frac{\partial p_4}{\partial y_1} + \mathbf{b}_0 y_1 \frac{\partial p_4}{\partial y_2} &= \mathbf{b}_0 c_{31} y_1^4 + (4\mathbf{a}_0 c_{40} + 2\mathbf{b}_0 c_{22}) y_1^3 y_2 + (3\mathbf{a}_0 c_{31} + 3\mathbf{b}_0 c_{13}) y_1^2 y_2^2 \\ &\quad + (2\mathbf{a}_0 c_{22} + 4\mathbf{b}_0 c_{04}) y_1 y_2^3 + \mathbf{a}_0 c_{13} y_2^4 \\ -2y_1 X_3 - 2y_2 B Y_3 &= -2\mathbf{a}_4 y_1^4 - (2\mathbf{a}_5 + 2B \mathbf{b}_3) y_1^3 y_2 - (2\mathbf{a}_6 + 2B \mathbf{b}_4) y_1^2 y_2^2 - 2\mathbf{a}_7 y_1 y_2^3 \\ -X_2 \frac{\partial p_3}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial p_3}{\partial y_2} &= -(3\mathbf{a}_1 b_{30} + \mathbf{b}_1 b_{21}) y_1^4 - (2\mathbf{a}_1 b_{21} + 3\mathbf{a}_2 b_{30} + 2\mathbf{b}_1 b_{12} + \mathbf{b}_2 b_{21}) y_1^3 y_2 \\ &\quad - (\mathbf{a}_1 b_{12} + 2\mathbf{a}_2 b_{21} + 3\mathbf{a}_3 b_{30} + 3\mathbf{b}_1 b_{03} + 2\mathbf{b}_2 b_{12}) y_1^2 y_2^2 \\ &\quad - (\mathbf{a}_2 b_{12} + 2\mathbf{a}_3 b_{21} + 3\mathbf{b}_2 b_{03}) y_1 y_2^3 - \mathbf{a}_3 b_{12} y_2^4 \end{aligned}$$

desta forma, por (3.32), encontramos

- $\mathbf{b}_0 c_{31} = -2\mathbf{a}_4 - 3\mathbf{a}_1 b_{30} - \mathbf{b}_1 b_{21} + G$
- $4\mathbf{a}_0 c_{40} + 2\mathbf{b}_0 c_{22} = -2\mathbf{a}_5 - 2B\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{a}_1 b_{21} - 3\mathbf{a}_2 b_{30} - 2\mathbf{b}_1 b_{12} - \mathbf{b}_2 b_{21}$
- $3\mathbf{a}_0 c_{31} + 3\mathbf{b}_0 c_{13} = -2\mathbf{a}_6 - 2B\mathbf{b}_4 - \mathbf{a}_1 b_{12} - 2\mathbf{a}_2 b_{21} - 3\mathbf{a}_3 b_{30} - 3\mathbf{b}_1 b_{03} - 2\mathbf{b}_2 b_{12} + 2G$
- $2\mathbf{a}_0 c_{22} + 4\mathbf{b}_0 c_{04} = -2\mathbf{a}_7 - \mathbf{a}_2 b_{12} - 2\mathbf{a}_3 b_{21} - 3\mathbf{b}_2 b_{03}$
- $\mathbf{a}_0 c_{13} = -\mathbf{a}_3 b_{12} + G$

Como $b_{12} = 0$, teremos $c_{13} = G$. Substituindo-a junto com a primeira igualdade na terceira igualdade acima, obtemos

$$3 \frac{\mathbf{a}_0}{\mathbf{b}_0} (-2\mathbf{a}_4 - 3\mathbf{a}_1 b_{30} - \mathbf{b}_1 b_{21} + G) + 3 \frac{\mathbf{b}_0 G}{\mathbf{a}_0} = -2\mathbf{a}_6 - 2B\mathbf{b}_4 - 2B\mathbf{a}_2 b_{21} - 3\mathbf{a}_3 b_{30} - 3\mathbf{b}_1 b_{03} + 2G,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} G \left(-3B - \frac{3}{B} - 2 \right) &= -6B\mathbf{a}_4 - 9B\mathbf{a}_1 b_{30} - 3B\mathbf{b}_1 b_{21} - 2\mathbf{a}_6 - 2B\mathbf{b}_4 - 2B\mathbf{a}_2 b_{21} \\ &\quad - 3\mathbf{a}_3 b_{30} - 3\mathbf{b}_1 b_{03} \\ &= -6B\mathbf{a}_4 + \frac{6B\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_0} + \frac{6B^2 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_0} + \frac{6B\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_0} - 2\mathbf{a}_6 - 2B\mathbf{b}_4 \\ &\quad + \frac{4B\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_0} + \frac{2\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_0} + \frac{2B\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_0} + \frac{2\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_0} + \frac{2B\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_0} - \frac{4\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_0^2}. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição dos \mathbf{a}_i , ($i = 0, 1, \dots, 7$) e \mathbf{b}_j , ($j = 0, 1, \dots, 4$), concluímos

$$\begin{aligned} &G \left(2 + \frac{3\lambda m_1}{\beta_1 \xi_1} \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a+\lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right) + \frac{3\beta_1 \xi_1}{m_1 (1 - \rho + \rho\gamma(a+\lambda)^2 / m_1 \xi_1 (a+2\lambda))} \right) \\ &= - \frac{4m_1 \lambda^2 \gamma \left(1 - \rho + \frac{\rho\gamma(a+\lambda)^2}{m_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right)}{\beta_1 \xi_1 (a+\lambda)^2 (a+2\lambda)} \left(1 + \frac{a\gamma}{\beta_1 \xi_1 (a+2\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Usando (3.14), com $K = a + 2\lambda$, obtemos $G < 0$. Este resultado significa que a origem é um “tri-atrator” do sistema (3.22) para $K = a + 2\lambda$. Pelos resultados em [8] completamos a demonstração do teorema. \square

Notemos que o ponto de bifurcação $K = a + 2\lambda$ é independente de c , isto é, a bifurcação ocorre para o mesmo valor do parâmetro K em cada superfície da família (3.11). Notemos também que a família (3.11) contém os planos Sx_1 ($c = 0$) mas não contém os planos Sx_2 que é também uma variedade invariante do sistema (3.10). Contudo, o ponto final do segmento L no plano Sx_2 se comporta da mesma maneira que o resto dos pontos em L . Para $\lambda < K \leq a + 2\lambda$ tal ponto é assintoticamente estável e para $K = a + 2\lambda$ ele sofre uma bifurcação Hopf supercrítica. Isto segue do fato de que a restrição de (3.10) ao plano $x_1 = 0$ é análoga a (3.12) com $c = 0$; apenas m_1 e β_1 devem ser substituídos por m_2 e β_2 , respectivamente.

Os seguintes corolários decorrem imediatamente do Teorema 3.3.1 e do fato de que o octante positivo é a união dos membros da família (3.11).

Corolário 3.3.1.1. *Os pontos do segmento de reta L , dados por (3.13), são pontos de equilíbrio estáveis do sistema (3.10) no sentido de Lyapunov, para $\lambda < K \leq a + 2\lambda$, e são instáveis para $K > a + 2\lambda$.*

A seguir, nos referiremos por “vizinhança” do conjunto A a intersecção de um conjunto aberto contendo A com o octante positivo $\{(S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Corolário 3.3.1.2. *Para qualquer K satisfazendo $\lambda < K \leq a + 2\lambda$ o segmento L dado por (3.13) é um atrator global de (3.10) com relação ao interior do octante positivo, isto é, L tem uma “vizinhança” tal que a trajetória com a condição inicial nesta “vizinhança” tende para L quando $t \rightarrow \infty$. Em $K = a + 2\lambda$, L bifurca em um cilindro topológico, isto é, existe $\delta > 0$ tal que para $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$, o sistema (3.10) possui um cilindro topológico invariante C , o qual é a união de caminhos fechados e é um atrator de (3.10) isto é, tem uma “vizinhança” tal que todas as trajetórias com a condição inicial nesta “vizinhança” tendem a C quando $t \rightarrow \infty$. (Veja Fig. 3.4).*

Nesta seção, trataremos de duas espécies de predadores que diferem-se somente na taxa máxima de crescimento, a saber, $\beta_1 \leq \beta_2$. Os cálculos dos resultados acima mostram que não existe uma diferença significativa na resposta das duas espécies com relação ao crescimento da capacidade natural de sustentação. Quando K é relativamente pequeno, cada

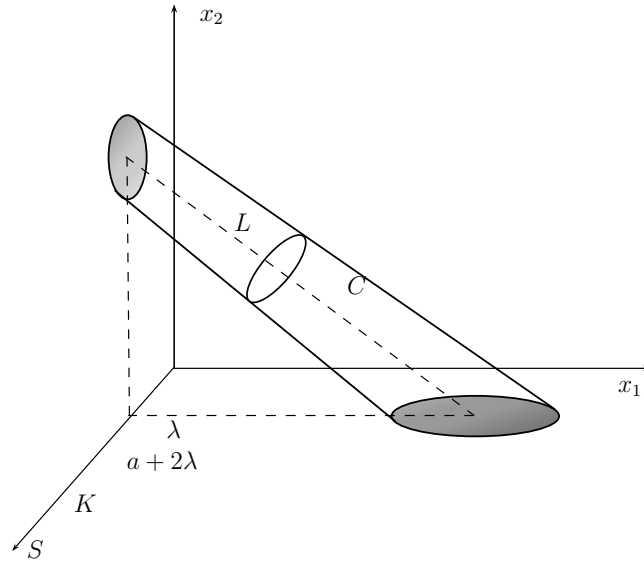


Figura 3.4: Bifurcação do segmento de reta de equilíbrio em um cilindro de trajetórias fechadas

ponto de equilíbrio em L é provavelmente igual, incluindo representantes na ausência de um dos predadores. Para $K = a + 2\lambda$, o sistema (3.13) começa a oscilar. Este fenômeno é chamado “paradoxo de enriquecimento”. Novamente, cada caminho fechado limitado no cilindro C é provavelmente igual. A única diferença, mostrada pelos nossos cálculos, é que a frequência da oscilação do sistema é decrescente quando ξ_1 é crescente (ξ_2 decrescente).

Proposição 3.1. *O período da oscilação é aproximadamente $\frac{2\pi\sqrt{a+2\lambda}}{\sqrt{\lambda\beta_2\gamma}}$ no plano $x_1 = 0$ e $\frac{2\pi\sqrt{a+2\lambda}}{\sqrt{\lambda\beta_1\gamma}}$ no plano $x_2 = 0$.*

Demonstração: Por definição, sabemos que o período da oscilação é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.33)$$

onde ω é a frequência angular. Por (3.28), temos

$$\omega(\xi_1) = \frac{1}{a + \lambda} \sqrt{\lambda\beta_1 \left(m_1\xi_1 + \rho \left[\frac{\gamma(a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - m_1\xi_1 \right] \right)};$$

mais ainda, por (3.28), (3.13) e $K = a + 2\lambda$, obtemos

$$\omega(\xi_2) = \frac{1}{a + \lambda} \sqrt{\lambda\beta_1 \left(\frac{\gamma(a + \lambda)^2}{a + 2\lambda} - \rho m_1 \xi_2 + \rho^2 \xi_2 \right)}.$$

Assim, sabendo que $\rho = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, teremos

$$\begin{aligned} \omega_{\xi_1=0} &= \frac{\sqrt{\lambda\beta_2\gamma}}{\sqrt{a + 2\lambda}} \quad \text{e} \\ \omega_{\xi_2=0} &= \frac{\sqrt{\lambda\beta_1\gamma}}{\sqrt{a + 2\lambda}}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (3.33), temos o desejado. \square

3.4 Bifurcação Zip

Retornaremos ao sistema (3.5). Assumiremos que $a_1 > a_2$. Disto e de (3.4), segue que $b_2 < b_1$. Como consequência podemos chamar as espécies x_1 e x_2 de “ r -estrategista” e “ K -estrategista”, respectivamente. Uma espécie r -estrategista tem uma taxa alta de natalidade comparada com sua taxa de mortalidade (b) e uma alta constante de semissaturação (a), isto é, as espécies precisam de muito alimento para sobreviverem. Uma espécie K -estrategista tem uma taxa de natalidade e constante de semissaturação relativamente baixas, isto é, a espécie pode viver em uma densidade relativamente baixa de presas. Também, neste caso a capacidade de sustentação K será considerada como um parâmetro de bifurcação. Veja [6, 7]. Nosso interesse está voltado às dinâmicas do sistema (3.5) sujeito às variações de K .

Começamos linearizando o sistema (3.5), em torno de um ponto arbitrário (λ, ξ_1, ξ_2) de L , isto é, (λ, ξ_1, ξ_2) satisfaz

$$\frac{m_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right), \quad \text{quando } \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0. \quad (3.34)$$

Anteriormente, vimos que

$$\frac{\partial P(S, x_1, x_2)}{\partial S} = \gamma(1 - 2S/K) - \frac{m_1 x_1 a_1}{(a_1 + S)^2} - \frac{m_2 x_2 a_2}{(a_2 + S)^2}.$$

Assim,

$$\frac{\partial P(\lambda, \xi_1, \xi_2)}{\partial S} = \gamma \left(1 - \frac{2\lambda}{K} \right) - \frac{m_1 \xi_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \xi_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2}.$$

Utilizando (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\lambda, \xi_1, \xi_2)}{\partial S} &= -\frac{\gamma\lambda}{K} + \frac{m_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} - \frac{m_1 \xi_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \xi_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2} \\ &= -\frac{\gamma\lambda}{K} + \frac{m_1 \xi_1 (a_1 + \lambda) - m_1 \xi_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2 (a_2 + \lambda) - m_2 \xi_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2} \\ &= -\frac{\gamma\lambda}{K} + \lambda \left(\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right). \end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes do sistema linearizado (3.5) é

$$A = J_{(\lambda, \xi_1, \xi_2)} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma\lambda}{K} + \lambda \left(\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) & -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico associado a esta matriz é

$$\begin{aligned} D(\mu) &= \det(A - \mu I) \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{\gamma\lambda}{K} + \lambda \left(\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) - \mu & -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & -\mu & 0 \\ \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & -\mu \end{vmatrix} \\ &= \mu^2 \left(-\frac{\gamma\lambda}{K} + \lambda \left(\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) - \mu \right) + \mu \frac{-m_1 \lambda \beta_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \mu \frac{-m_2 \lambda \beta_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$D(\mu) = \mu \left[\mu^2 + \mu\lambda \left(\frac{\gamma}{K} - \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) + \lambda \left(\frac{\beta_1 m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{\beta_2 m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) \right]. \quad (3.35)$$

Analisando o polinômio quadrático entre colchetes, usando a Proposição 2.1, concluímos que

- se $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} &\leq \frac{1}{a_2 + \lambda} \left(\frac{m_1\xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2\xi_2}{a_2 + \lambda} \right) \\ &= \frac{\gamma}{a_2 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) < \frac{\gamma}{a_2 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{a_2 + 2\lambda} \right) < \frac{\gamma}{K}. \end{aligned}$$

Logo, o ponto de equilíbrio (λ, ξ_1, ξ_2) será estável.

- se $K > a_1 + 2\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} &\geq \frac{1}{a_1 + \lambda} \left(\frac{m_1\xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2\xi_2}{a_2 + \lambda} \right) \\ &= \frac{\gamma}{a_1 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) > \frac{\gamma}{a_1 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{a_1 + 2\lambda} \right) > \frac{\gamma}{K}. \end{aligned}$$

Logo, o ponto de equilíbrio (λ, ξ_1, ξ_2) será instável.

Assim, para $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$, cada ponto de equilíbrio (λ, ξ_1, ξ_2) em L tem um autovalor nulo e dois autovalores com partes reais negativas. Em vista do Teorema A.0.3 e de [10], através de cada ponto de equilíbrio (λ, ξ_1, ξ_2) em L passa uma variedade diferenciável bidimensional localmente invariante e todas as trajetórias nesta superfície tendem a (λ, ξ_1, ξ_2) quando $t \rightarrow \infty$; por outro lado, se $K > a_1 + 2\lambda$, então todos os pontos de equilíbrio (λ, ξ_1, ξ_2) em L são instáveis.

Consideremos a seguinte desigualdade

$$\frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} < \frac{\gamma}{K}. \quad (3.36)$$

Agora passaremos ao caso em que $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$. Como o ponto (ξ_1, ξ_2)

está movendo-se ao longo do segmento de reta (3.34) de $(0, \gamma(a_2 + \lambda)(K - \lambda)/m_2K)$ para $(\gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)/m_1K, 0)$ o lado esquerdo de (3.36) é decrescente. Seja K fixo no intervalo $(a_1 + 2\lambda, a_2 + 2\lambda)$, então existe um ponto $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$ em L no qual a desigualdade (3.36) converte-se numa igualdade. De fato, consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{m_1\xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2\xi_2}{a_2 + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \\ \frac{m_1\xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2\xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} = \frac{\gamma}{K}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.37) por $-\frac{1}{a_2 + \lambda}$ e somando com a segunda, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{m_1\xi_1(K)}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_1\xi_1(K)}{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)} = \frac{\gamma}{K} - \frac{\gamma}{a_2 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \\ \Rightarrow & m_1\xi_1(K) \left[\frac{1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{1}{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)} \right] = \frac{\gamma a_2 + \gamma\lambda - \gamma K + \gamma\lambda}{K(a_2 + \lambda)} \\ \Rightarrow & m_1\xi_1(K) \left[\frac{a_2 - a_1}{(a_1 + \lambda)^2} \right] = \frac{\gamma(a_2 + 2\lambda - K)}{K} \\ \Rightarrow & m_1\xi_1(K) = \frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(a_2 + 2\lambda - K)}{K(a_2 - a_1)} \\ \Rightarrow & \xi_1(K) \stackrel{a_1 \geq a_2}{=} \frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{Km_1(a_1 - a_2)}. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (3.37) por $-\frac{1}{a_1 + \lambda}$ e somando com a segunda encontramos

$$\frac{m_2\xi_2(K)}{(a_2 + \lambda)^2} - \frac{m_2\xi_2(K)}{(a_2 + \lambda)(a_1 + \lambda)} = \frac{\gamma}{K} - \frac{\gamma}{a_1 + \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \Rightarrow \xi_2(K) = \frac{\gamma(a_2 + \lambda)^2(a_1 + 2\lambda - K)}{Km_2(a_1 - a_2)}.$$

Desta forma, obtemos

$$(\xi_1(K), \xi_2(K)) = \left(\frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{Km_1(a_1 - a_2)}, \frac{\gamma(a_2 + \lambda)^2(a_1 + 2\lambda - K)}{Km_2(a_1 - a_2)} \right). \quad (3.38)$$

Para os pontos de L que estão a esquerda de $(\xi_1(K), \xi_2(K))$, o sistema (3.5) tem um autovalor nulo e dois autovalores com partes reais negativas. Para $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$ um

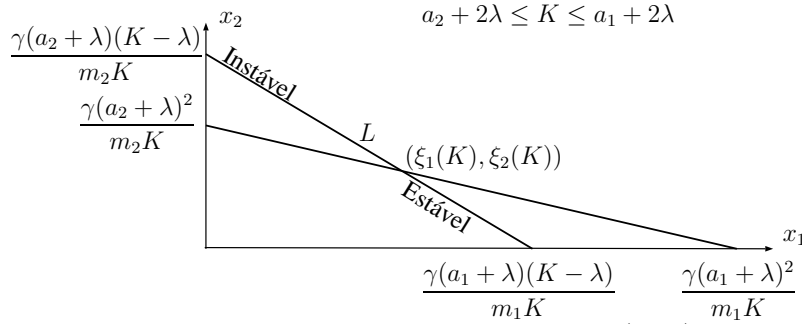


Figura 3.5: Intersecção dos segmentos de retas (3.37), ponto de bifurcação

autovalor é nulo e os outros dois autovalores têm partes reais iguais a zero. O Teorema A.0.3 garante que em cada ponto de L à esquerda do ponto (3.38) passa uma variedade diferenciável invariante bidimensional “instável” e por cada ponto à direita do ponto (3.38) passa uma variedade invariante bidimensional “estável” (Veja Fig. 3.5). É isto o que nos diz o seguinte teorema.

Teorema 3.4.1. *Para qualquer K satisfazendo $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, o ponto $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$ divide L em duas partes; os pontos de equilíbrio do sistema (3.5) no conjunto*

$$L_U = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 < \xi_1(K)\}$$

são instáveis e os pontos de equilíbrio no conjunto

$$L_S = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 > \xi_1(K)\}$$

são estáveis no sentido de Lyapunov (L_U denota a “parte instável de L ” e L_S denota a “parte estável de L ”).

Demonstração: A primeira parte do teorema segue da posição dos autovalores do sistema linearizado no ponto $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$, $\xi_1 < \xi_1(K)$. Vamos provar que cada ponto de L_S $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$ com $\xi_1 > \xi_1(K)$ é estável no sentido de Lyapunov. Sabemos que através de cada ponto de L_S passa uma variedade bidimensional localmente invariante tal que todas as trajetórias nesta variedade tendem exponencialmente para (λ, ξ_1, ξ_2) quando t tende para infinito. Claramente, (λ, ξ_1, ξ_2) é assintoticamente estável com respeito à restrição de (3.5) a esta variedade. Iremos provar que, para cada ξ_1 , satisfazendo (3.43), as

variedades invariantes correspondentes aos pontos de \bar{L}_S em (3.44) cobrem uma vizinhança de $\bar{L}_S = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 \geq \xi_1(K)\}$. Isto concluirá a prova do teorema.

Parametrizamos L_S da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S &= \lambda \\ x_1 = \xi_{1s} &= \frac{\gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} + s \left(\frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{K m_1(a_1 - a_2)} - \frac{\gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} \right) \\ x_2 = \xi_{2s} &= s \frac{\gamma(a_2 + \lambda)^2(a_1 + 2\lambda - K)}{K m_2(a_1 - a_2)}, \quad 0 \leq s < 1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Se $s = 0$, temos o ponto final de L no plano Sx_1 ; se $s = 1$, o ponto $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$ é dado por (3.38) (veja Fig. 3.5). Seja ξ_1 fixado, para $0 < s_0 < 1$, temos

$$\xi_1 = \xi_{1s_0} = \frac{\gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} + s_0 \left(\frac{\gamma(a_1 + \lambda)^2(K - a_2 - 2\lambda)}{K m_1(a_1 - a_2)} - \frac{\gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} \right).$$

Então, L_S dado por (3.44) corresponde ao intervalo fechado $[0, s_0]$. Para cada $s \in (0, s_0]$, um sistema de coordenadas será introduzido da seguinte maneira. A origem será em $(\lambda, \xi_{1s}, \xi_{2s})$, os dois vetores da base serão fixados no autossobespaço bidimensional correspondendo aos dois autovalores com partes reais negativas de (3.5) linearizado em $(\lambda, \xi_{1s}, \xi_{2s})$ e o terceiro vetor da base será o vetor diretor da reta L dado por (3.39) que é o autovetor correspondente ao autovalor zero. Por (3.39), ξ_{1s} e ξ_{2s} dependem continuamente de s e, conseqüentemente, as raízes do polinômio característico (3.35) também dependem continuamente de s . Claramente, os dois vetores bases no autossobespaço correspondentes as raízes com partes reais negativas podem ser escolhidos como funções contínuas de s no intervalo $[0, s_0]$, pois a direção deste plano varia continuamente. A família de parâmetros da transformação de coordenadas dependendo de $s \in [0, s_0]$, descrita acima, pode ser dada na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z \end{bmatrix} = R(s) \begin{bmatrix} S - \lambda \\ x_1 - \xi_{1s} \\ x_2 - \xi_{2s} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

onde $y = (y_1, y_2)$ denota as coordenadas no autossobespaço bidimensional, z é a coordenada

na reta L , e $R(s)$ é uma matriz regular 3×3 , com $R \in C[0, s_0]$. Sob a transformação de coordenadas (3.40), o sistema (3.5) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{y} &= P(s)y + F(y, z, s) \\ \dot{z} &= G(y, z, s),\end{aligned}\tag{3.41}$$

onde P é uma matriz 2×2 estável, F um vetor bidimensional, G um escalar, $P, F, F'_y, F'_z, G'_y, G'_z \in C^0$ em uma vizinhança da origem $(y_1, y_2, z) = (0, 0, 0)$ e, para todo $s \in [0, s_0]$, $F(0, 0, s) = G(0, 0, s) \equiv 0, \partial_{(y,z)}F(0, 0, s) = \partial_{(y,z)}G(0, 0, s) \equiv 0$. O sistema dinâmico gerado por (3.41) é da forma (A.9) com $Q(s) = 0$ e satisfaz todas as condições do Lema A.0.4. Assim, pelo Lema A.0.3, a função $g : W \times [0, s_0] \mapsto \mathbb{R}$ existe, onde W é uma vizinhança de $(y_1, y_2) = (0, 0)$, $g \in C^0$ e, para cada $s \in [0, s_0]$ fixado, a superfície

$$\{(y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(y_1, y_2, s), (y_1, y_2) \in W\}$$

é uma variedade localmente invariante de (3.41). Apresentando-se a transformação inversa de (3.40) e substituindo a função g em z , seja

$$\begin{bmatrix} S \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1s} \\ \xi_{2s} \end{bmatrix} + R^{-1}(s) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ g(y_1, y_2, s) \end{bmatrix}.\tag{3.42}$$

Para $s \in [0, s_0]$ fixado, (3.42) é a equação paramétrica da variedade invariante estável e do sistema (3.5) passando pelo ponto de equilíbrio $(\lambda, \xi_{1s}, \xi_{2s}) \in L_S$. A aplicação $(y_1, y_2, s) \mapsto (S, x_1, x_2)$ do cilindro sólido $W \times [0, s_0]$ no espaço S, x_1, x_2 , definido por (3.42) é contínua e bijetora sobre sua imagem (isto segue da unicidade de solução e da regularidade da matriz $R^{-1}(s)$). Portanto, por um resultado de topologia (veja, por exemplo, [4], Teorema 2-103) esta aplicação é um homeomorfismo e, isto prova nossa afirmação. \square

Observação 3.4.1. *O Teorema 2-103 de [4] citado acima é um teorema clássico de topologia, que afirma: “Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua e bijetora e X compacto. Se Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.”*

Observação 3.4.2. Quando K varia de $a_2+2\lambda$ até $a_1+2\lambda$, o ponto $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$ move-se continuamente ao longo de L de $(\lambda, 0, \gamma(a_2+\lambda)^2/m_2(a_2+2\lambda))$ até $(\lambda, \gamma(a_1+\lambda)^2/m_1(a_1+2\lambda), 0)$ (Veja Fig. 3.5). Assim, os pontos de L deixados para trás tornam-se instáveis. Este fenômeno é chamado de *Bifurcação Zip*.

Quando K varia, a reta L sofre um deslocamento paralelo, no entanto, isto não influencia qualitativamente na Fig. 3.7.

Observação 3.4.3. Seja $\bar{\xi}_1$

$$\xi_1(K) < \bar{\xi}_1 < \gamma(a_1 + \lambda)(K - \lambda)/m_1K \quad (3.43)$$

dado. Consideremos o subconjunto próprio fechado de L_S dado por

$$\bar{L}_S = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 \geq \bar{\xi}_1\}. \quad (3.44)$$

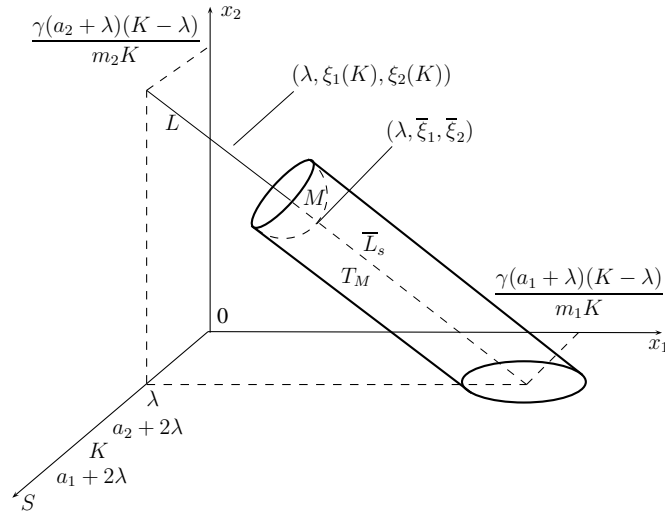
Seja M a superfície diferenciável interceptando transversalmente L em $(\lambda, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in L$. Denotamos por T_M e chamamos de vizinhança tubular de \bar{L}_S , o conjunto compacto limitado pela parte de M dentro da superfície

$$\{(S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : d((S, x_1, x_2), \bar{L}_S) = \rho\}, \quad (3.45)$$

onde $\rho > 0$ e d é a distância Euclidiana, e pela parte da superfície (3.45) entre M e plano Sx_1 e a parte do plano Sx_1 dentro da superfície (3.45). Claramente, se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno, a intersecção de M com a superfície (3.45) é uma curva de Jordan simples, $L_S \subset T_M$ e o interior do segmento de reta L_S está no interior de T_M (veja Fig. 3.6).

Corolário 3.4.1.1. Para quaisquer K satisfazendo $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$ e $\bar{\xi}_1$ satisfazendo (3.43), o segmento de reta \bar{L}_S dado por (3.44) é um atrator de (3.5) no seguinte sentido: \bar{L}_S tem uma vizinhança tubular T_M tal que as trajetórias com condição inicial em T_M tendem para \bar{L}_S quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Segue facilmente do Teorema 3.34. □

Figura 3.6: Base T_M do atrator L_S .

Observação 3.4.4. Podemos colocar o resultado anterior em outro contexto. Quando $a_2 + 2\lambda \leq K_0 \leq a_1 + 2\lambda$ e $(\lambda, \xi_1(K_0), \xi_2(K_0))$ são fixados, isto determina a razão entre os tamanhos das populações de duas espécies de predadores $\frac{\xi_2(K_0)}{\xi_1(K_0)}$. Dado um $0 \leq c \leq \infty$, dizemos que a razão c das duas espécies de predadores é estável para um certo K se $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_K$ é estável no sentido de Lyapunov, onde $\frac{\xi_2}{\xi_1} = c$, L_K é dado por (3.6), onde a dependência do segmento de reta L em K é denotado pelo índice. Claramente, a razão $\frac{\xi_2(K_0)}{\xi_1(K_0)}$ é estável para $K < K_0$ e instável para $K > K_0$. A Figura 3.7 mostra o segmento de reta L_K quando K varia de $a_2 + 2\lambda$ para $a_1 + 2\lambda$ e a reta B ao longo do qual o ponto de bifurcação $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$ se move. Quando K cresce, a mesma razão é realizada em um nível maior, entretanto, para $K = K_0$ fica instável. Podemos ver da Fig. 3.7 que para razões menores, isto é, equilíbrios nos quais o tamanho da K -estrategista x_2 é pequeno relativamente ao tamanho da r -estrategista x_1 , permanecem estáveis para valores maiores de K .

Podemos caracterizar a bifurcação para os valores extremos $K_0 = a_2 + 2\lambda$ e $K_0 = a_1 + 2\lambda$. É claro que os planos $x_i = 0$, $i = 1, 2$, são variedades invariantes do sistema (3.5).

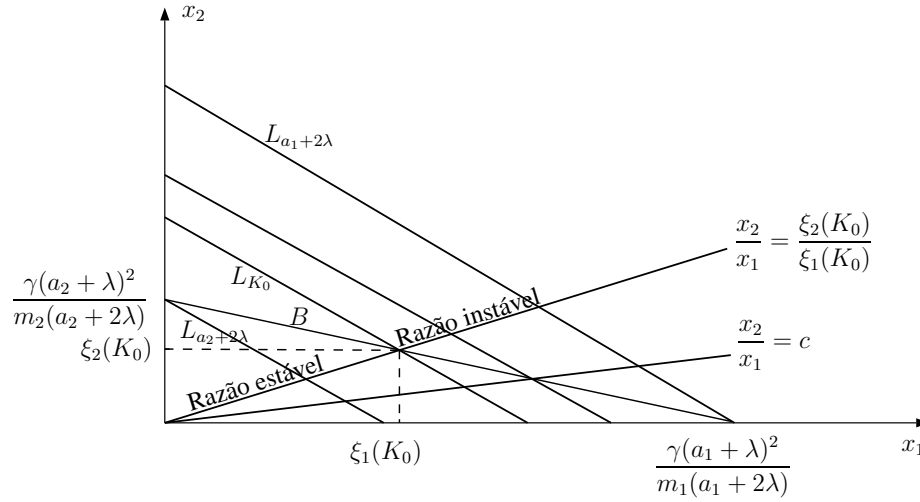


Figura 3.7: A cada K corresponde a um ponto na reta $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\xi_1(K_0)}{\xi_2(K_0)}$. Se este ponto está à esquerda de $(\xi_1(K_0), \xi_2(K_0))$ ele é estável, caso contrário, ele é instável.

O ponto P_i dado por (3.7) é um ponto de equilíbrio da restrição de (3.5) ao plano $x_{3-i} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_i x_i S}{a_i + S} \\ \dot{x}_i = \beta_i x_i \frac{S - \lambda}{a_i + S}, \quad (i = 1, 2). \end{cases} \quad (3.46)$$

Segue claramente dos resultados anteriores que P_i dado em (3.7) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema bidimensional (3.46) para $K < a_i + 2\lambda$, $i = 1, 2$ e é instável para $K > a_i + 2\lambda$, $i = 1, 2$. O seguinte teorema de bifurcação foi provado por Smith [9] para o caso $i = 1$; no entanto, faremos outra demonstração.

Teorema 3.4.2. *O ponto de equilíbrio P_i de (3.46) sofre uma bifurcação de Hopf supercrítica para $K = a_i + 2\lambda$, isto é, existe $\delta_i > 0$ tal que, para $K \in (a_i + 2\lambda, a_i + 2\lambda + \delta_i)$, o sistema (3.46) tem um caminho fechado localmente único em uma vizinhança de P_i e este caminho fechado é orbitalmente assintoticamente estável, $i = 1, 2$.*

Demonstração: O Teorema 3.3.1 implica no Teorema 3.4.2, pois o sistema (3.46), para $i = 1$ é um caso particular de (3.12), a saber, o caso $c = 0$. Obviamente, o caso $i = 2$ é análogo ao caso $i = 1$. \square

Generalização do caso tridimensional

Neste capítulo, estudaremos a ocorrência da *bifurcação de Andronov-Hopf* e também da *bifurcação Zip* em um modelo presa-predador concreto de dimensão $(n + 1)$, modelando a competição entre n espécies de predadores por uma espécie de presa. Os resultados apresentados serão generalizações dos resultados obtidos no capítulo 3. Este capítulo é baseado no artigo de Ferreira e Oliveira em [24]

4.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a ocorrência de órbita periódica em um sistema de EDOs que modela a competição entre n espécies de predadores por uma espécie de presa e também estudaremos a ocorrência de bifurcação Zip. Embora o sistema não seja assintoticamente estável, o modelo (4.1) ilustrará o fato de que, para pequenos valores de capacidade de carga K , todos os predadores podem sobreviver, enquanto que, quando K assume valores grandes, apenas um deles sobrevive.

Consideraremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S(1 - S/K) - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S)x_i \\ \dot{x}_i = (m_i f_i(S) - d_i)x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde denotamos por S a quantidade de presas, x_i a quantidade do predadores i e $f_i(S) =$

$\frac{S}{a_i + S}$ é a resposta funcional do predador i . Todos os parâmetros em (4.1) são não negativos e representam

- γ : taxa de crescimento intrínseca da presa
- K : capacidade de carga do meio ambiente
- m_i : taxa máxima de natalidade do predador i
- d_i : taxa de mortalidade do predador i
- a_i : constante de semissaturação de predador i .

Na próxima seção estudaremos os pontos de equilíbrios para este sistema e provaremos sua dissipatividade.

4.2 Pontos de Equilíbrio

Primeiramente mostraremos que para toda solução de (4.1) com condições iniciais $S^0 > 0$, $x_i^0 > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ é limitada em $[0, \infty)$ e permanece no octante positivo, isto é, o sistema (4.1) é dissipativo. Em seguida, estudaremos seus pontos de equilíbrio.

Proposição 4.1. *Qualquer solução de (4.1) com condições iniciais $S^0 > 0$, $x_i^0 > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ é limitada em $[0, \infty)$ e permanece no octante positivo.*

Demonstração: Observemos que qualquer solução de (4.1) cuja condição inicial tem componentes positivas permanece com componentes positivas para t em seu intervalo maximal de existência. Mostraremos que as soluções de (4.1) existem para todo $t \geq 0$ e que existe um conjunto limitado $J \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ que atrai soluções com condições iniciais em \mathbb{R}_+^{n+1} . Sejam $d_0 = \min\{d_1, \dots, d_n\}$ e $V(S, x_1, \dots, x_n) = S + x_1 + \dots + x_n$. Se $z(t) = (S(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ é uma solução de (4.1), para t no intervalo maximal de existência, temos

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) = \gamma \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t) - \sum_{i=1}^n d_i x_i(t).$$

Seja $g(S) = S \left(1 - \frac{S}{K}\right) + d_0 S$, assim o ponto máximo de g é $S_{\max} = \frac{K}{2}(1 + d_0)$. Logo $g(S) \leq g(S_{\max})$, ou seja,

$$S \left(1 - \frac{S}{K}\right) \leq \frac{K}{4}(1 + d_0)^2 - d_0 S, \quad \forall S \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) \leq -\gamma d_0 S(t) - \sum_{i=1}^n d_i x_i(t) + \frac{\gamma K}{4}(1 + d_0)^2.$$

Tomando $\alpha = \min\{d_0, \gamma d_0\}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) \leq -\alpha V(z(t)) + \frac{\gamma K}{4}(1 + d_0)^2 = -\alpha \left(V(z(t)) - \frac{\gamma K}{4\alpha}(1 + d_0)^2 \right).$$

Pela Desigualdade de Gronwall em (C.0.6), temos

$$\begin{aligned} V(z(t)) - \frac{\gamma K}{4}(1 + d_0)^2 &\leq \left(V(z(0)) - \frac{\gamma K}{4\alpha}(1 + d_0)^2 \right) e^{\int_0^t -\alpha ds} \\ \Rightarrow V(z(t)) &\leq V(z(0))e^{-\alpha t} - \frac{\gamma K}{4\alpha}(1 + d_0)^2 e^{-\alpha t} + \frac{\gamma K}{4}(1 + d_0)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$V(z(t)) \leq V(z(0))e^{-\alpha t} + \frac{\gamma K}{4\alpha}(1 + d_0)^2,$$

para t pertencente ao intervalo máximo de existência. Se B é um conjunto limitado contido em \mathbb{R}^{n+1} , então existe $R > 0$ tal que $V(z(0)) \leq R$. Seja $t_0 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{4\alpha R}{\gamma K(1 + d_0)^2}$ e $z(0) \in B$.

Para $t \geq t_0$ temos

$$V(z(t)) \leq R \frac{\gamma K(1 + d_0)^2}{4\alpha R} + \frac{\gamma K}{4\alpha}(1 + d_0)^2 \leq \frac{\gamma K}{2\alpha}(1 + d_0)^2.$$

Isto implica que qualquer solução está definida para $t \geq 0$ e o conjunto compacto

$$J = \left\{ (S, x_1, \dots, x_n) : S \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ e } S + x_1 + \dots + x_n \leq \frac{\gamma K}{2\alpha}(1 + d_0)^2 \right\}$$

atrai todo conjunto limitado B . Portanto, o sistema é dissipativo e seu atrator global está contido em J . \square

Agora, estudaremos os pontos de equilíbrio do sistema (4.1), que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) x_i = 0 \\ (m_i f_i(S) - d_i) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2)$$

As soluções de (4.2) são $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ e $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$. O sistema (4.2) tem soluções não triviais biologicamente interessantes se, e somente se, $m_i > d_i$ e as soluções das equações $f_i(S) = \frac{d_i}{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ coincidem, isto é,

$$\frac{a_1 d_1}{m_1 - d_1} = \frac{a_2 d_2}{m_2 - d_2} = \dots = \frac{a_n d_n}{m_n - d_n}.$$

Indicaremos o valor comum das grandezas $\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}$ por λ . De agora em diante, vamos admitir $m_i > d_i$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$. Com as notações e as hipóteses acima, o sistema (4.1) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) x_i \\ \dot{x}_i = \beta_i g_i(S) x_i, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $g_i(S) = \frac{S - \lambda}{a_i + S}$, $\beta_i = m_i - d_i$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

Os pontos de equilíbrio de (4.3) são $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$ e os pontos do hiperplano de dimensão $(n - 1)$

$$H = \left\{ (S, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : S = \lambda, \frac{m_1}{a_1 + \lambda} x_1 + \dots + \frac{m_n}{a_n + \lambda} x_n = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \right\}. \quad (4.4)$$

Para estudarmos a estabilidade destes pontos de equilíbrio, notemos que a matriz

Jacobiana $J(S, x_1, \dots, x_n)$ de (4.3) é

$$\begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2S}{K}\right) - \sum_{i=1}^n m_i f'_i(S) x_i & -m_1 f_1(S) & -m_2 f_2(S) & \dots & -m_{n-1} f_{n-1}(S) & -m_n f_n(S) \\ \beta_1 g'_1(S) x_1 & \beta_1 g_1(S) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_2 g'_2(S) x_2 & 0 & \beta_2 g_2(S) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} g'_{n-1}(S) x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} g_{n-1}(S) & 0 \\ \beta_n g'_n(S) x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n g_n(S) \end{pmatrix},$$

onde $f'_i(S) = \frac{a_i}{(a_i + S)^2}$ e $g'_i(S) = \frac{a_i + \lambda}{(a_i + S)^2}$. Assim, é fácil ver que $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ é instável, com variedade estável de dimensão n e instável de dimensão um. Ainda, $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$ é assintoticamente estável se $K < \lambda$ e instável se $K > \lambda$ com variedade estável de dimensão um e variedade instável de dimensão n . Notemos que se $K < \lambda$, então H é vazio; se $K = \lambda$ então $H = \{0\}$. É um resultado conhecido que

$$K > \lambda \tag{4.5}$$

é uma condição necessária para a sobrevivência de cada predador. Na próxima seção estudaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio pertencentes a H .

4.3 Bifurcação de Hopf

Nesta seção, estudaremos a estabilidade dos pontos em H . Em tal estudo será considerado $a = a_1 = \dots = a_n$, isto é, todos os predadores tem a mesma resposta funcional.

No que segue, consideraremos o caso $a = a_1 = \dots = a_n$. Então, o sistema (4.3) torna-se

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{m_i f_i(S)}{a + S} x_i \\ \dot{x}_i = \beta_i \frac{S - \lambda}{a + S} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{4.6}$$

Como $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$, temos $\frac{m_1}{d_1} = \dots = \frac{m_n}{d_n}$. Introduzindo o parâmetro $\rho_i = \frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{m_{i+1}}{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, obtemos

$$m_{i+1} = m_i \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.7)$$

Também, temos $\rho_i = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}$. Consequentemente, podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} \Rightarrow \beta_2 = \rho_1 \beta_1 \\ \rho_2 = \frac{\beta_3}{\beta_2} \Rightarrow \beta_3 = \rho_2 \beta_2 \Rightarrow \beta_3 = \rho_1 \rho_2 \beta_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \Rightarrow \beta_n = \rho_{n-1} \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} \beta_1. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Similarmente, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 = m_1 \rho_1 \\ m_3 = m_2 \rho_2 \Rightarrow m_3 = \rho_2 \rho_1 m_1 \\ \vdots \\ m_n = m_{n-1} \rho_{n-1} \Rightarrow m_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} m_1. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Considerando as expressões em (4.8) e (4.9), o sistema (4.6) torna-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \frac{m_1 S}{a + S} \left[x_1 + \sum_{j=2}^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1} x_j \right] \\ \dot{x}_1 = \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_1 \\ \dot{x}_2 = \rho_1 \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_2 \\ \dot{x}_3 = \rho_1 \rho_2 \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_n. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Dividindo a terceira equação em (4.10) pela segunda, a quarta pela terceira e assim sucessivamente, até dividir a n -ésima equação pela $(n-1)$ -ésima, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_2}{dx_1} = \rho_1 \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{dx_3}{dx_2} = \rho_2 \frac{x_3}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dx_{n-1}} = \rho_{n-1} \frac{x_n}{x_{n-1}}. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Integrando cada equação em (4.11), obtemos as seguintes soluções integrais

$$V_1(S, x_1, \dots, x_n) = \frac{x_2}{x_1^{\rho_1}}, \quad V_2(S, x_1, \dots, x_n) = \frac{x_3}{x_2^{\rho_2}}, \quad \dots, \quad V_{n-1}(S, x_1, \dots, x_n) = \frac{x_n}{x_{n-1}^{\rho_{n-1}}}.$$

Consequentemente, para cada valor de $c_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\frac{x_2}{x_1^{\rho_1}} = c_1, \quad \frac{x_3}{x_2^{\rho_2}} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_{n-1}^{\rho_{n-1}}} = c_{n-1}.$$

são variedades invariantes de dimensão $(n-1)$ em \mathbb{R}_+^n com coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Para qualquer $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, com $c_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$, a intersecção destas variedades é uma curva C em \mathbb{R}^n , a qual é invariante para o sistema (4.10). Um cálculo direto fornece as seguintes equações paramétricas de C ,

$$\begin{aligned} x_2 &= c_1 x_1^{\rho_1} \\ x_3 &= c_2 x_2^{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad x_3 = c_2 c_1^{\rho_2} x_1^{\rho_1 \rho_2} \\ x_4 &= c_3 x_3^{\rho_3} \quad \Rightarrow \quad x_4 = c_3 c_2^{\rho_3} c_1^{\rho_3 \rho_2} x_1^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n-1} x_{n-1}^{\rho_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad x_n = c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} c_{n-3}^{\rho_{n-1} \rho_{n-2}} \dots c_1^{\rho_{n-1} \rho_{n-2} \dots \rho_2 \rho_1} x_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para qualquer $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, denotamos por M_c a variedade invariante

$$M_c = \{(S, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : S \geq 0 \text{ e } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ satisfaz (4.12)}\}.$$

Então, a família $\{M_c : c \in \mathbb{R}_+^{n-1}\}$ é uma folheação bidimensional do primeiro octante de \mathbb{R}^{n+1} e cada folha é a imagem de um mergulho $h_c : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$h_c(S, x_1) = (S, x_1, x_2(x_1), x_3(x_1), \dots, x_n(x_1)). \quad (4.13)$$

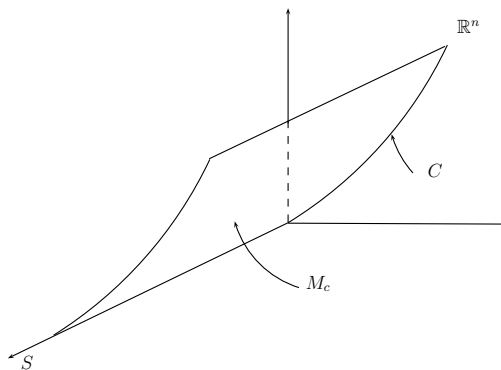


Figura 4.1: A Variedade M_c

Para $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ fixado, com $c_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, estudaremos a restrição de (4.10) à variedade M_c , parametrizada por S e x_1 . Levando em conta (4.12), esta restrição é dada por

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 S}{a + S} \left[x_1 + \sum_{j=2}^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1} c_{j-1} c_{j-2}^{\rho_{j-1}} c_{j-3}^{\rho_{j-1} \rho_{j-2}} \dots c_1^{\rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_2 \rho_1} x_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1}} \right] \\ \dot{x}_1 = \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_1. \end{cases}$$

A introdução dos novos parâmetros $\alpha_{j-1} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1} c_{j-1} c_{j-2}^{\rho_{j-1}} c_{j-3}^{\rho_{j-1} \rho_{j-2}} \dots c_1^{\rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_2 \rho_1}$ e $\eta_{j-1} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1}$, $j = 2, 3, \dots, n$, transforma o sistema anterior em

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 S}{a + S} \left[x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{j-1} x_1^{\eta_{j-1}} \right] \\ \dot{x}_1 = \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Os pontos de equilíbrio de (4.14) são $(S, x_1) = (0, 0)$, $(S, x_1) = (K, 0)$ e (λ, ξ_1) , onde

$x_1 = \xi_1$ é a única solução positiva da equação

$$x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{j-1} x_1^{\eta_{j-1}} = \frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}. \quad (4.15)$$

Geometricamente, o ponto de equilíbrio (λ, ξ_1) é descrito como segue: ξ_1 é a segunda componente do ponto $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ obtido como a interseção transversal das variedades H e M_c . As outras componentes são dadas por

$$\xi_j = c_{j-1} c_{j-2}^{\rho_{j-1}} c_{j-3}^{\rho_{j-1} \rho_{j-2}} \dots c_1^{\rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_2 \rho_1} \xi_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (4.16)$$

A matriz Jacobiana de (4.14) é

$$J_1(S, x_1) = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2S}{K}\right) - \frac{m_1 a \left[x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_1^{\eta_i} \right]}{(a + S)^2} & - \frac{m_1 S \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i x_1^{\eta_i - 1} \right]}{a + S} \\ \beta_1 \frac{a + \lambda}{(a + S)^2} x_1 & \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$J_1(0, 0) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \lambda}{a} \end{pmatrix} \text{ e } J_1(K, 0) = \begin{pmatrix} -\gamma & -\frac{m_1 K}{a + K} \\ 0 & \beta_1 \frac{K - \lambda}{a + K} \end{pmatrix}.$$

Logo, se $K > \lambda$, $(S, x_1) = (0, 0)$ e $(S, x_1) = (K, 0)$ são pontos de sela de (4.14).

O próximo teorema refere-se a estabilidade do ponto $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$, onde ξ_1 é a única solução positiva da equação (4.15) e K é considerado como um parâmetro de bifurcação. Ainda, o teorema diz que (4.14) admite uma bifurcação de Andronov-Hopf no ponto $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$.

Teorema 4.3.1. *Se $\lambda < K < a + 2\lambda$, então o ponto de equilíbrio $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ de (4.14) é globalmente assintoticamente estável dentro do primeiro quadrante. Além disso, para $\lambda < K < a + 2\lambda$, (4.14) não possui órbitas fechadas dentro do quadrante positivo.*

Finalmente, se $K = a + 2\lambda$, o sistema (4.14) admite uma bifurcação de Andronov-Hopf supercrítica, isto é, existe $\delta > 0$ tal que para $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$, (4.14) possui um ciclo limite orbitalmente assintoticamente estável em torno de (λ, ξ_1) .

Demonstração: Primeiramente, vamos transladar (λ, ξ_1) para a origem através da mudança

$$y_1 = S - \lambda \quad y_2 = x_1 - \xi_1, \quad (4.17)$$

onde ξ_1 satisfaz (4.15). Deste modo, o sistema (4.14) se torna

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \gamma(y_1 + \lambda) \left(1 - \frac{y_1 + \lambda}{K}\right) \\ \quad - \frac{m_1(y_1 + \lambda)}{a + y_1 + \lambda} \left[y_2 + \xi_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{j-1} (y_2 + \xi_1)^{\eta_{j-1}} \right] \\ \dot{y}_2 = \beta_1 \frac{y_1}{a + y_1 + \lambda} (y_2 + \xi_1). \end{cases} \quad (4.18)$$

A matriz Jacobiana do sistema anterior é

$$J_2(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2(y_1 + \lambda)}{K}\right) - \frac{m_1 a \left[y_2 + \xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (y_2 + \xi_1)^{\eta_i} \right]}{(a + y_1 + \lambda)^2} & \beta_1 \frac{(a + \lambda)(y_2 + \xi_1)}{(a + y_1 + \lambda)^2} \\ - \frac{m_1 (y_1 + \lambda) \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (y_2 + \xi_1)^{\eta_i - 1} \right]}{a + y_1 + \lambda} & \beta_1 \frac{y_1}{a + y_1 + \lambda} \end{pmatrix}^T.$$

Como ξ_1 satisfaz (4.15), obtemos

$$J_2(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma \lambda (K - 2\lambda - a)}{K(a + \lambda)} & - \frac{m_1 \lambda \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right]}{a + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, o polinômio característico associado a $J_2(0, 0)$ é

$$P(\mu) = \mu^2 + \frac{\gamma\lambda(a + 2\lambda - K)}{K(a + \lambda)}\mu + \frac{\beta_1\xi_1 m_1 \lambda \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right]}{(a + \lambda)^2},$$

donde concluímos que $(y_1, y_2) = (0, 0)$ é assintoticamente estável se $\lambda < K < a + 2\lambda$ e instável se $K > a + 2\lambda$.

Para mostrarmos que o sistema (4.18), e consequentemente (4.14), não possui órbitas fechadas no quadrante positivo para $\lambda < K < a + 2\lambda$, aplicaremos o Critério de Dulac (veja seção D). Consideremos a função $h(S, x_1) = \frac{x_1^q(a + S)}{S}$, onde q será uma constante apropriada, e $F(S, x_1) = (f(S, x_1), g(S, x_1))$, onde $f(S, x_1) = \gamma \left(1 - \frac{S}{K} \right) S - \frac{m_1 S}{a + S} \left[x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{j-1} x_1^{\eta_{j-1}} \right]$ e $g(S, x_1) = \beta_1 \frac{S - \lambda}{a + S} x_1$, logo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(hF) &= \operatorname{div} \left(x_1^q \gamma \left(1 - \frac{S}{K} \right) (a + S) - x_1^q m_1 \left[x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{j-1} x_1^{\eta_{j-1}} \right], \frac{x_1^{q+1} \beta_1 (S - \lambda)}{S} \right) \\ &= x_1^q \gamma \left(-\frac{a + S}{K} + 1 - \frac{S}{K} \right) + \frac{(q + 1) x_1^q \beta_1 (S - \lambda)}{S} \\ &= \frac{\gamma K - 2\gamma S - \gamma a + \frac{\beta_1 K (q + 1) (S - \lambda)}{S}}{K} x_1^q. \end{aligned}$$

Tomando q tal que $2\gamma\lambda = \beta_1 K (q + 1)$ obtemos $\operatorname{div}(hF) < 0$.

Consequentemente, se $K < a + 2\lambda$, pelo Critério de Dulac, o sistema (4.18) não admite órbitas periódicas no interior do primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 . Assim, se $K < a + 2\lambda$, o equilíbrio $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ será globalmente assintoticamente estável para soluções com condições iniciais no interior do quadrante positivo.

Para completarmos a prova, precisamos verificar as hipóteses do Teorema de Andronov-Hopf (Teorema A.0.2) afim de mostrar que se $K = K_0 = a + 2\lambda$, então o sistema (4.18), e consequentemente (4.14), admite uma bifurcação de Hopf. Primeiramente, com $K = K_0$, temos $\mu_{1,2} = \pm i\omega_0$, onde

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\beta_1 m_1 \lambda \left[\xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i} \right]}}{a + \lambda} > 0. \quad (4.19)$$

Portanto, existe $\delta > 0$ tal que os autovalores de $\mu_{1,2}(K)$ são complexos conjugados. Além disso,

$$\frac{d}{dK} \operatorname{Re} \mu(K_0) = \frac{\gamma \lambda}{2(a + 2\lambda)(a + \lambda)} > 0, \quad (4.20)$$

onde $\operatorname{Re} \mu(K) = \frac{\gamma \lambda (K - 2\lambda - a)}{2K(a + \lambda)}$.

A seguir, calcularemos o primeiro coeficiente de Lyapunov para determinar a supercriticidade da órbita periódica gerada pela bifurcação de Hopf. Para isto, vamos usar a técnica dada por [22], contida no Apêndice E.

Tomando $K = K_0 = a + 2\lambda$, temos

$$J_2(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right] \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Um cálculo simples mostra que os autovalores de $J_2(0, 0)$ associados a $\mu_{1,2}(K_0) = \pm i\omega_0$ são $q_{1,2} = (\pm i\Delta, 1)$, onde $\Delta = \frac{\omega_0(a + \lambda)}{\beta_1 \xi_1}$; e o autovalore de $J_2(0, 0)^T$ associados a $\mu_1(K_0)$ é $p_1 = \left(-\frac{i}{\Delta}, 1\right)$ e a $\mu_2(K_0)$ é $p_2 = \left(\frac{i}{\Delta}, 1\right)$.

Sejam $q = (i\Delta, 1)$ o autovetor complexo de $J_2(0, 0)$ associado ao autovalor $\mu_1 = i\omega_0$, isto é, $J_2(0, 0)q = i\omega_0 q$, e $p = \left(-\frac{i}{\Delta}, 1\right)$, tal que $J_2(0, 0)^T p = -i\omega_0 \bar{p}$. Para concluir a necessária normalização $\langle p, q \rangle = 1$, podemos assumir $q = (i\Delta, 1)$ e $p = \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\Delta}, 1\right)$.

Expandindo o lado direito do sistema (4.18) em série de potências, ao redor de $(y_1, y_2) = (0, 0)$ em $K = K_0$, obtemos (3.29), onde $\varphi(y_1, y_2) = \gamma(y_1 + \lambda) \left(1 - \frac{y_1 + \lambda}{K}\right) - \frac{m_1(y_1 + \lambda)}{a + y_1 + \lambda} \left[y_2 + \xi_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{j-1} (y_2 + \xi_1)^{\eta_{j-1}} \right]$ e $\psi(y_1, y_2) = \beta_1 \frac{y_1}{a + y_1 + S} (y_2 - \xi_1)$. Algumas

derivadas já foram calculadas, que são da matriz (4.21), as demais são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} &= -\frac{2\gamma}{a+2\lambda} + \frac{2m_1 a}{(a+y_1+\lambda)^3} \left(y_2 + \xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (y_2 + \xi_1)^{\eta_i} \right), \\
\frac{\partial^2 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a+\lambda+y_1)^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (y_2 + \xi_1)^{\eta_i-1} \right), \\
\frac{\partial^2 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} &= -\frac{m_1(y_1+\lambda)}{a+y_1+\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (y_2 + \xi_1)^{\eta_i-2} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_1^3} &= -\frac{6m_1 a}{(a+y_1+\lambda)^4} \left(y_2 + \xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (y_2 + \xi_1)^{\eta_i} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= \frac{2am_1}{(a+\lambda+y_1)^3} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (y_2 + \xi_1)^{\eta_i-1} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a+y_1+\lambda)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (y_2 + \xi_1)^{\eta_i-2} \right), \\
\frac{\partial^3 \varphi(y_1, y_2)}{\partial y_2^3} &= -\frac{m_1(y_1+\lambda)}{a+y_1+\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (\eta_i - 2) (y_2 + \xi_1)^{\eta_i-3} \right), \\
\frac{\partial^2 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} &= -2\beta_1 (y_2 + \xi_1) \frac{a+\lambda}{(a+\lambda+y_1)^3}, \\
\frac{\partial^2 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1} &= \beta_1 \frac{a+\lambda}{(a+\lambda+y_1)^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} &= \frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2 \partial y_1} = \frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2^3} = 0, \\
\frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_1^3} &= 6\beta_1 (y_2 + \xi_1) \frac{a+\lambda}{(a+\lambda+y_1)^4}, \\
\frac{\partial^3 \psi(y_1, y_2)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= -2\beta_1 \frac{a+\lambda}{(a+\lambda+y_1)^3}.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $(y_1, y_2) = (0, 0)$, temos $\frac{\partial \varphi(0, 0)}{\partial y_1} = \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial y_2} = 0$ e também

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(0, 0)}{\partial y_2} &= -\frac{m_1 \lambda}{a+\lambda} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1} \right], & \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial y_1} &= \frac{\beta_1 \xi_1}{a+\lambda} \\
\frac{\partial^2 \varphi(0, 0)}{\partial y_1^2} &= -\frac{2\gamma \lambda}{(a+2\lambda)(a+\lambda)}, & \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial y_1^2} &= \frac{-2\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2}, \\
\frac{\partial^2 \varphi(0, 0)}{\partial y_2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a+\lambda)^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1} \right), & \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial y_2 \partial y_1} &= \frac{\beta_1}{a+\lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi(0,0)}{\partial y_2^2} &= -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 2} \right), & \frac{\partial^2 \psi(0,0)}{\partial y_2^2} &= 0, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_1^3} &= -\frac{6a\gamma}{(a + \lambda)^2 (a + 2\lambda)}, & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_1^3} &= \frac{6\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^3}, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= \frac{2am_1}{(a + \lambda)^3} \left(1 + \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_2 \partial y_1^2} &= -\frac{2\beta_1}{(a + \lambda)^2}, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_2^2 \partial y_1} &= -\frac{am_1}{(a + \lambda)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 2} \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_2^2 \partial y_1} &= 0, \\
\frac{\partial^3 \varphi(0,0)}{\partial y_2^3} &= -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (\eta_i - 2) \xi_1^{\eta_i - 3} \right), & \frac{\partial^3 \psi(0,0)}{\partial y_2^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\varphi(0,0) = 0 = \psi(0,0)$ e substituindo os cálculos acima em (3.29), obtemos

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\frac{m_1 \lambda}{a + \lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right) y_2 - \frac{\gamma \lambda}{(a + 2\lambda)(a + \lambda)} y_1^2 \\
&\quad + \frac{am_1}{(a + \lambda)^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right) y_1 y_2 \\
&\quad - \frac{m_1 \lambda}{2(a + \lambda)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 2} \right) y_2^2 - \frac{a\gamma}{(a + \lambda)^2 (a + 2\lambda)} y_1^3 \\
&\quad + \frac{am_1}{(a + \lambda)^3} \left(1 + \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right) y_1^2 y_2 \\
&\quad - \frac{am_1}{2(a + \lambda)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 2} \right) y_1 y_2^2 \\
&\quad - \frac{m_1 \lambda}{6(a + \lambda)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (\eta_i - 2) \xi_1^{\eta_i - 3} \right) y_2^3 + O(|y|^4) \\
\dot{y}_2 &= \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} y_1 - \frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2} y_1^2 + \frac{\beta_1}{a + \lambda} y_1 y_2 \\
&\quad + \frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^3} y_1^3 - \frac{\beta_1}{(a + \lambda)^2} y_1^2 y_2 + O(|x|^4).
\end{aligned} \right. \tag{4.22}$$

Denotemos os coeficientes do campo vetorial associados a y_1 por

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 & a_1 &= 0 \\
a_2 &= -\frac{m_1\lambda}{a+\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1} \right) & a_3 &= -\frac{\gamma\lambda}{(a+2\lambda)(a+\lambda)} \\
a_4 &= \frac{am_1}{(a+\lambda)^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1} \right) & a_5 &= -\frac{m_1\lambda}{2(a+\lambda)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i-2} \right) \\
a_6 &= -\frac{a\gamma}{(a+\lambda)^2(a+2\lambda)} & a_7 &= \frac{am_1}{(a+\lambda)^3} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1} \right) \\
a_8 &= \frac{am_1}{2(a+\lambda)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i-2} \right) & a_9 &= -\frac{m_1\lambda}{6(a+\lambda)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (\eta_i - 2) \xi_1^{\eta_i-3} \right)
\end{aligned}$$

e os coeficientes do campo vetorial a y_2 por

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0; & b_1 &= \frac{\beta_1 \xi_1}{a+\lambda}; & b_2 &= 0; \\
b_3 &= -\frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2}; & b_4 &= \frac{\beta_1}{a+\lambda}; & b_5 &= 0; \\
b_6 &= \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^3}; & b_7 &= -\frac{\beta_1}{(a+\lambda)^2} & b_8 &= 0; \text{ e } & b_9 &= 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $Y = (y_1, y_2)$ e $F(Y, 0) = (F_1(Y, 0), F_2(Y, 0))$, podemos escrever o sistema (4.22) como $\dot{Y} = J_3(0, 0)Y + F(Y, 0)$, onde

$$\begin{aligned}
F_1(Y, 0) &= a_3 y_1^2 + a_4 y_1 y_2 + a_5 y_2^2 + a_6 y_1^3 + a_7 y_1^2 y_2 + a_8 y_1 y_2^2 + a_9 y_2^3 + O(|Y|^4), \\
F_2(Y, 0) &= b_3 y_1^2 + b_4 y_1 y_2 + b_5 y_2^2 + b_6 y_1^3 + b_7 y_1^2 y_2 + b_8 y_1 y_2^2 + b_9 y_2^3 + O(|Y|^4) \text{ e}
\end{aligned}$$

$$J_3(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou, equivalentemente, $F(Y, 0) = \frac{1}{2}B(Y, Y) + \frac{1}{6}C(Y, Y, Y) + O(|Y|^4)$, onde

$$\begin{aligned}
B(Y, Y) &= (2a_3 y_1^2 + 2a_4 y_1 y_2 + 2a_5 y_2^2, 2b_3 y_1^2 + 2b_4 y_1 y_2) \text{ e} \\
C(Y, Y, Y) &= (6a_6 y_1^3 + 6a_7 y_1^2 y_2 + 6a_8 y_1 y_2^2 + 6a_9 y_2^3, 6b_6 y_1^3 + 6b_7 y_1^2 y_2).
\end{aligned}$$

B e C foram determinadas pela seguinte fórmula

$$B_i((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2$$

e

$$C_i((x_1, x_2), (y_1, y_2), (u_1, u_2)) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2,$$

logo

$$\begin{aligned} B_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= 2a_3 x_1 y_1 + a_4 x_1 y_2 + a_4 x_2 y_1 + 2a_5 x_2 y_2 \\ B_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= 2b_3 x_1 y_1 + b_4 x_1 y_2 + b_4 x_2 y_1 + 2b_5 x_2 y_2 \\ C_1((x_1, x_2), (y_1, y_2), (u_1, u_2)) &= 6a_6 x_1 y_1 u_1 + 2a_7 x_1 y_1 u_2 + 2a_7 x_1 y_2 u_1 + 2a_8 x_1 y_2 u_2 \\ &\quad + 2a_7 x_2 y_1 u_1 + 2a_8 x_2 y_1 u_2 + 2a_8 x_2 y_2 u_1 + 6a_9 x_2 y_2 u_2 \\ C_2((x_1, x_2), (y_1, y_2), (u_1, u_2)) &= 6b_6 x_1 y_1 u_1 + 2b_7 x_1 y_1 u_2 + 2b_7 x_1 y_2 u_1 + 2b_8 x_1 y_2 u_2 \\ &\quad + 2b_7 x_2 y_1 u_1 + 2b_8 x_2 y_1 u_2 + 2b_8 x_2 y_2 u_1 + 6b_9 x_2 y_2 u_2. \end{aligned}$$

Por um resultado bem conhecido (veja Apêndice E) temos que o *o primeiro coeficiente de Lyapunov* $l_1(0)$ de (4.22) é dado por

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}),$$

onde $q = (i\Delta, 1)$, $\bar{q} = (-i\Delta, 1)$, $p = \frac{1}{2}(i/\Delta, 1)$, $g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle$, $g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle$, $g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em \mathbb{C} .

Um cálculo simples mostra que

- $B(q, q) = (-2a_3\Delta^2 + 2ia_4\Delta + 2a_5, -2b_3\Delta^2 + 2ib_4\Delta)$
- $B(q, \bar{q}) = (2a_3\Delta^2 + 2a_5, 2b_3\Delta^2)$
- $C(q, q, \bar{q}) = (6a_6i\Delta^3 + 2a_7\Delta^2 + 2a_8i\Delta + 6a_9, 6b_6i\Delta^3 + 2b_7\Delta^2)$.

Consequentemente,

$$\Leftrightarrow g_{20}(0) = a_3 i \Delta + a_4 - \frac{i}{\Delta} a_5 - b_3 \Delta^2 + i b_4 \Delta$$

$$\Leftrightarrow i g_{20}(0) = -a_3 \Delta + i a_4 + \frac{a_5}{\Delta} - i b_3 \Delta^2 - b_4 \Delta$$

$$\Leftrightarrow g_{11}(0) = -i a_3 \Delta - \frac{i}{\Delta} a_5 + b_3 \Delta^2$$

$$\Leftrightarrow i g_{20}(0) g_{11}(0) = i a_3^2 \Delta^2 + a_3 a_4 \Delta - i a_3 a_5 - a_3 b_3 \Delta^3 + i a_3 b_4 \Delta^2 + i a_3 a_5 + \frac{a_4 a_5}{\Delta} - i \frac{a_5^2}{\Delta^2} - a_5 b_3 \Delta + i a_5 b_4 - a_3 b_3 \Delta^3 + i a_4 b_3 \Delta^2 + b_3 a_5 \Delta - i b_3^2 \Delta^4 - b_3 b_4 \Delta^3$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 g_{21}(0) = 3\omega_0 a_6 \Delta^2 - \omega_0 i a_7 \Delta + \omega_0 a_8 - 3\omega_0 i \frac{a_9}{\Delta} + 3\omega_0 b_6 i \Delta^3 + \omega_0 b_7 \Delta^2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0^2} (a_3 a_4 \Delta - 2a_3 b_3 \Delta^3 + \frac{a_4 a_5}{\Delta} - b_3 b_4 \Delta^3) \\ &\quad + \frac{1}{2\omega_0^2} (3\omega_0 a_6 \Delta^2 + \omega_0 a_8 + \omega_0 b_7 \Delta^2) \\ &= \frac{a_3 a_4 \Delta - 2a_3 b_3 \Delta^3 + \frac{a_4 a_5}{\Delta} - b_3 b_4 \Delta^3 + 3\omega_0 a_6 \Delta^2 + \omega_0 a_8 + \omega_0 b_7 \Delta^2}{2\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Levando em conta as expressões de a_i , b_i , e Δ ($i = 1, 2, \dots, 9$), temos

$$\begin{aligned} -2\Delta^3 a_3 b_3 &= -2 \frac{\omega_0 (a + \lambda)^3}{\beta_1^3 \xi_1^3} \frac{\gamma \lambda}{K(a + \lambda)} \frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2} = -2 \frac{\omega_0^3 \gamma \lambda}{K \beta_1^2 \xi_1^2} \\ \omega_0 b_7 \Delta^2 - b_3 b_4 \Delta^3 &= -\frac{\omega_0^3 (a + \lambda)^2}{\beta_1^2 \xi_1^2} \frac{\beta_1}{(a + \lambda)^2} + \frac{\omega_0^3 (a + \lambda)^3}{\beta_1^3 \xi_1^3} \frac{\beta_1}{a + \lambda} \frac{\beta_1 \xi_1}{(a + \lambda)^2} = 0. \end{aligned}$$

De (4.19), encontramos

$$\frac{\omega_0^2 (a + \lambda)^2}{\beta_1} = m_1 \lambda \left[\xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i} \right]$$

e isto nos conduz a

$$\begin{aligned} \frac{a_4 a_5}{\Delta} &= \frac{\beta_1}{\omega_0 (a + \lambda)} \frac{m_1 a \left[\xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i} \right]}{(a + \lambda)^2} \frac{m_1 \lambda \left[\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 2} \right]}{2(a + \lambda)} \\ &= \frac{m_1 a \omega_0 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 2} \right]}{2(a + \lambda)^2} \end{aligned}$$

e portanto, $\frac{a_4 a_5}{\Delta} + \omega_0 a_8 = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta a_3 a_4 &= \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta \xi_1 (a + \lambda)^2} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right] m_1 \lambda = \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta \xi_1^2 (a + \lambda)^2} \left[\xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i} \right] m_1 \lambda \\ &= \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta \xi_1^2 (a + \lambda)^2} \frac{\omega_0^2 (a + \lambda)^2}{K \beta_1} = \frac{\omega_0^3 \lambda a}{K \beta_1^2 \xi_1^2}. \end{aligned}$$

Da equação anterior, $\Delta a_3 a_4 + 3\omega_0 \Delta^2 a_6 = -2 \frac{\omega_0^3 \lambda a}{K \beta_1^2 \xi_1^2}$. Logo,

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \left(-2 \frac{\omega_0^3 \lambda a}{K \beta_1^2 \xi_1^2} - 2 \frac{\omega_0^3 \gamma \lambda}{K \beta_1^2 \xi_1^2} \right) = -2 \frac{\omega_0 \gamma \lambda}{K \beta_1^2 \xi_1^2} < 0.$$

Portanto, o sistema (4.18), e consequentemente de (4.14), admite uma bifurcação supercrítica e a órbita gerada pela bifurcação existe para $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$ ($\delta > 0$) e é orbitalmente assintoticamente estável. Isto completa a prova. \square

4.4 Bifurcação Zip

Nesta seção, estudaremos a estabilidade dos pontos em H . Em tal estudo será considerado $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, isto é, os predadores possuem respostas funcionais diferentes.

Nesta seção, consideraremos o caso $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$. Denotemos por $J = J(S, x_1, \dots, x_n)$ a matriz jacobiana do sistema (4.3), isto é,

$$J = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2S}{K}\right) - \sum_{i=1}^n m_i f'_i(S) x_i & -m_1 f_1(S) & -m_2 f_2(S) & \dots & -m_{n-1} f_{n-1}(S) & -m_n f_n(S) \\ \beta_1 g'_1(S) x_1 & \beta_1 g_1(S) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_2 g'_2(S) x_2 & 0 & \beta_2 g_2(S) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} g'_{n-1}(S) x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} g_{n-1}(S) & 0 \\ \beta_n g'_n(S) x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n g_n(S) \end{pmatrix},$$

onde $f_i(S) = \frac{S}{a_i + S}$, $g_i(S) = \frac{S - \lambda}{a_i + S}$, $f'_i(S) = \frac{a_i}{(a_i + S)^2}$ e $g'_i(S) = \frac{a_i + \lambda}{(a_i + S)^2}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Calculando $J(S, x_1, \dots, x_n)$ em $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H$, obtemos

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma\lambda}{K} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i & -\frac{m_1\lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2\lambda}{a_2 + \lambda} & \dots & -\frac{m_{n-1}\lambda}{a_{n-1} + \lambda} & -\frac{m_n\lambda}{a_n + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_{n-1} \xi_{n-1}}{a_{n-1} + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_n \xi_n}{a_n + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

já que $\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{a_i + \lambda} \xi_i$ em H .

O polinômio característico de $J(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é dado por

$$P(\mu) = \mu^{n-1} \left[\mu^2 + \mu \left(\frac{\lambda\gamma}{K} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i \beta_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i \right]. \quad (4.25)$$

De fato, temos

$$\det(\mu - J) = \left(\mu - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i + \frac{\gamma\lambda}{K} \right) \mu^n + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{m_{j-1}}{a_{j-1} + \lambda} \Delta_{1j}, \quad (4.26)$$

onde $\Delta_{1j} = (-1)^{j+1} \det(\mu - J)_{1j}$ e $\det(\mu - J)_{1j}$ é o determinante da submatriz $(\mu - J)_{1j}$ obtido a partir de $\mu - J$ eliminando a primeira linha e a coluna j , $j = 2, 3, \dots, n+1$, isto é,

$$J = (-1)^{j+1} \begin{pmatrix} & & & & & & \overset{(j-1)}{\downarrow} & \overset{(j+1)}{\downarrow} & & & \\ -\frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ -\frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ -\frac{\beta_3 \xi_3}{a_3 + \lambda} & 0 & 0 & \mu & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ -\frac{\beta_{n-1} \xi_{n-1}}{a_{n-1} + \lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu & 0 & \\ -\frac{\beta_n \xi_n}{a_n + \lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Logo, $\Delta_{1j} = (-1)^{j+1} \left[(-1)^j \left(-\frac{\beta_{j-1} \xi_{j-1}}{a_{j-1} + \lambda} \right) \mu^{n-1} \right] = \frac{\beta_{j-1} \xi_{j-1}}{a_{j-1} + \lambda} \mu^{n-1}$; $j = 2, 3, \dots, n+1$.

Desta forma, o polinômio característico de $J(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é dado por (4.25). Portanto, cada ponto de equilíbrio em H tem 0 como autovalor de multiplicidade $n-1$. Os outros dois autovalores são as raízes do polinômio entre colchetes. Agora, observemos que se $\lambda < K < a_1 + 2\lambda$, então

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i \leq \frac{1}{a_1 + \lambda} \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) < \frac{1}{a_1 + \lambda} \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{a_1 + 2\lambda} \right) < \frac{\gamma}{K},$$

já que $a_i + 2\lambda < a_{i+1} + 2\lambda$, $i = 1, 2, \dots, n$. Similarmente, se $K > a_n + 2\lambda$, então

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i > \frac{\gamma}{K}.$$

Portanto, analisando o polinômio entre colchetes em (4.25), pela Proposição 2.1, concluímos que o ponto de equilíbrio é estável se, e somente se,

$$\lambda < K < a_1 + 2\lambda, \quad \text{pois} \quad \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i < \frac{\gamma}{K}. \quad (4.27)$$

Isto significa (em vista de [22] e [1], Capítulo IX, Teorema 6.1) que através de cada ponto de equilíbrio em H passa uma variedade diferenciável estável bidimensional e localmente invariante; além disso, todas as trajetórias nesta variedade tende a $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ quando t tende a infinito. Por outro lado, o ponto de equilíbrio é instável se

$$K > a_n + 2\lambda, \quad \text{pois} \quad \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i > \frac{\gamma}{K}. \quad (4.28)$$

Isto significa que todos os pontos de equilíbrio em $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H$ são instáveis, se $K > a_n + 2\lambda$.

Agora estudaremos a situação quando $a_1 + 2\lambda < K < a_n + 2\lambda$. Consideremos o seguinte hiperplano

$$H_1 = \left\{ (\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i = \frac{\gamma}{K} \right\}. \quad (4.29)$$

Com os comentários anteriores podemos enunciar o seguinte o resultado:

Teorema 4.4.1. *Suponhamos que $0 < \lambda < K$, $\lambda, \beta_i, m_i, a_i$ sejam positivos e $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Se variarmos K a partir de um extremo do intervalo $(a_1 + 2\lambda, a_n + 2\lambda)$ ao outro extremo, então H_1 dado por (4.29) intercepta H e o hiperplano resultante da interseção entre H_1 e H , se desloca através de H a partir do vértice no eixo x_n ao vértice x_1 e os equilíbrios que são deixados para trás perdem sua estabilidade; quando $a_1 + 2\lambda < K < a_n + 2\lambda$ este hiperplano*

de interseção divide H em duas partes, “uma superior” cujos pontos são repulsores e uma “inferior” cujos pontos são atratores, isto é, o sistema admite uma bifurcação Zip.

Demonstração: Mostraremos que quando $a_1 + 2\lambda \leq K \leq a_n + 2\lambda$, o hiperplano de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}^{n+1} dado por (4.29) intercepta H , e os pontos de equilíbrio em H perdem sua estabilidade. Denotemos as coordenadas de interseção de H com os eixos coordenados por $(x_H^1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, x_H^2, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, 0, \dots, x_H^n)$ e de H_1 por $(x_{H_1}^1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, x_{H_1}^2, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, 0, \dots, x_{H_1}^n)$. Observemos que $x_H^i = \frac{\gamma(a_i + \lambda)(K - \lambda)}{m_i K}$ é uma função crescente em K ; por outro lado, $x_{H_1}^i = \frac{\gamma(a_i + \lambda)^2}{m_i K}$ é uma função decrescente em K ; além disso, como a função $K(a) = a + 2\lambda$ é crescente em $a \in [0, a_n + 2\lambda)$ temos $\lambda < K_1 < K_2 < \dots < K_n$. Um cálculo simples mostra que se $\lambda < K < K_i$, então $x_H^i < x_{H_1}^i$ e $x_H^i = x_{H_1}^i$ em $K = K_1$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Consequentemente, para $\lambda < K < K_1$ o hiperplano H está abaixo de H_1 e alcança H_1 em $K = K_1$. Neste caso, a desigualdade em (4.27) é válida para todos os pontos em H . Quando aumentamos $K > K_1$, o hiperplano H corta H_1 e alcança $x_H^2 = x_{H_1}^2$ em $K = K_2$; alcança $x_H^3 = x_{H_1}^3$ em $K = K_3$ e, assim sucessivamente, até alcançar $x_H^n = x_{H_1}^n$ em $K = K_n$, o hiperplano H_1 corta o hiperplano H fora do octante positivo, de modo que agora H_1 se encontra abaixo de H (veja Fig. 4.2). Neste processo, para pontos na parte de H que já se encontram acima do hiperplano H_1 a condição (4.28) é válida. Isto significa que os equilíbrios nesta parte do hiperplano têm variedade instável de dimensão $n - 1$, implicando que os pontos nesta parte de H são instáveis.

Provaremos que cada ponto na parte inferior de H são estáveis no sentido de Lyapunov. Para este propósito, utilizaremos alguns resultados, do Apêndice A, segundo Hartman (ver [1]). Sabemos que através de cada ponto na parte inferior de H , o qual trataremos de trajetória nesta variedade, tende a $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Obviamente, $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é assintoticamente estável com respeito à restrição do sistema (4.3) a esta variedade. Vamos provar que em cada $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H_s$ as variedades que correspondem a esses pontos, preenchem uma vizinhança de H_s , o que provará que estes pontos são estáveis no sentido de Lyapunov.

Vamos parametrizar H_s da seguinte maneira: Seja $X_I = (x_I^1, x_I^2, \dots, x_I^n) \in H \cap H_1$,

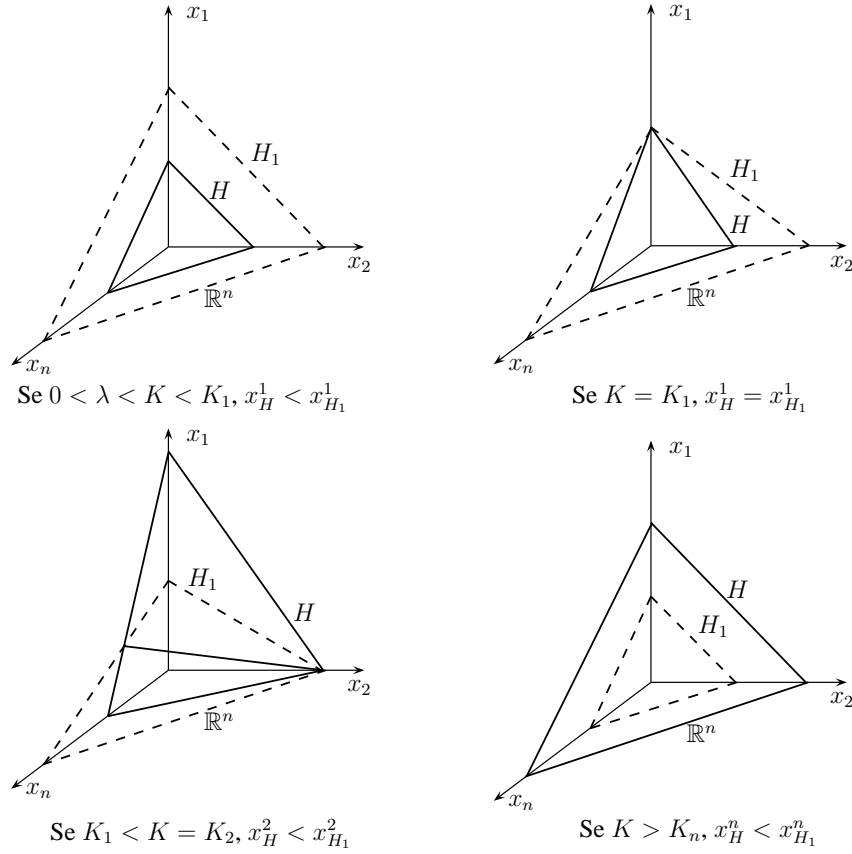


Figura 4.2: Interseção dos Hiperplanos

então

$$\begin{aligned}
 S &= \lambda \\
 x_1 &= \xi_{1s} = x_H^1 + s(x_I^1 - x_H^1) \\
 x_2 &= \xi_{2s} = x_H^2 + s(x_I^2 - x_H^2) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= \xi_{n-1s} = x_H^{n-1} + s(x_I^{n-1} - x_H^{n-1}) \\
 x_n &= \xi_{ns} = sx_I^n, \quad 0 \leq s \leq 1.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Se $s = 0$, então obtemos as coordenadas de interseção de H com os eixos coordenados S , x_1, \dots, x_{n-1} . Se $s = 1$ obtemos $X_I = (x_I^1, x_I^2, \dots, x_I^n)$. Seja ξ_1 fixo correspondendo ao valor $0 < s_0 < 1$, isto é,

$$\xi_1 = \xi_{1s_0} = X_H^1 + s_0(x_I^1 - x_H^1).$$

Desta forma, H_s corresponde ao intervalo fechado $[0, s_0]$. Para cada $s \in (0, s_0]$, o seguinte sistema de coordenadas será introduzido: a origem será em $(\lambda, \xi_{1s}, \dots, \xi_{ns})$, dois vetores da

base serão fixados no autoespaço bidimensional correspondendo aos dois autovetores com parte real negativa da linearização do sistema (4.3) em $(\lambda, \xi_{1s}, \dots, \xi_{1n})$ e $n - 1$ vetores da base serão fixados em H , os quais são autovetores correspondendo aos autovalores nulos. Por (4.30), $\xi_{1s}, \xi_{2s}, \dots, \xi_{ns}$ dependem continuamente de s e, como consequência, as raízes do polinômio característico (4.25), também dependem continuamente de s . Os dois vetores da base no autoespaço bidimensional correspondendo às raízes com parte real negativa podem ser escolhidos como funções contínuas de s no intervalo $[0, s_0]$, já que a direção deste plano varia continuamente. A família a um parâmetro de transformações de coordenadas dependentes de $s \in [0, s_0]$ descrita acima, pode ser dada na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = R(s) \begin{bmatrix} S - \lambda \\ x_1 - \xi_{1s} \\ x_2 - \xi_{2s} \\ x_3 - \xi_{3s} \\ \vdots \\ x_{n-1} - \xi_{n-1s} \\ x_n - \xi_{ns} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

onde denotamos por y_1, y_2 as coordenadas no autoespaço bidimensional, z_1, z_2, \dots, z_{n-1} denotam as coordenadas em H e $R(s)$ é a matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ invertível, $R \in \mathcal{C}[0, s_0]$. Sob a transformação de coordenadas (4.31), o sistema (4.3) assume a forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P(s)y + F(y, z, s) \\ \dot{z} &= G(y, z, s), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde P é uma matriz estável 2×2 , F é um vetor bidimensional e G um vetor de dimensão $(n - 1)$, $P, F, F'_y, F'_z, G'_y, G'_z \in \mathcal{C}$ em uma vizinhança da origem $(y_1, y_2, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$ e, para todo $s \in [0, s_0]$, $F(0, 0, \dots, 0, s) = G(0, 0, \dots, 0, s) \equiv 0$, $\partial_{y,z} F(0, 0, \dots, 0, s) = \partial_{y,z} G(0, 0, \dots, 0, s) \equiv 0$. Como podemos apreciar no Apêndice A, o sistema dinâmico gerado por (4.32) é da forma (A.9) com $Q(s) = 0$, satisfazendo todas as condições do Lema A.0.4. Assim, pelo Lema A.0.3 a função $g : W \times [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ existe, onde W é uma vizinhança de

$(y_1, y_2) = (0, 0)$, $g \in \mathcal{C}$ e, para $s \in [0, s_0]$ fixado, a superfície

$$\{((y_1, y_2, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : g(y_1, y_2, s), (y_1, y_2) \in W\}$$

é uma variedade localmente invariante de (4.32). Realizando a transformação de coordenadas (4.31) e substituindo a função g por z , obtemos

$$\begin{bmatrix} S \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1s} \\ \xi_{2s} \\ \vdots \\ \xi_{n-1s} \\ \xi_{ns} \end{bmatrix} + R(s)^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ g(y_1, y_2, s) \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Para $s \in [0, s_0]$ fixo, (4.33) é a equação paramétrica da variedade invariante estável do sistema (4.3) passando através de cada ponto de equilíbrio $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H_s$. A aplicação $(y_1, y_2, s) \rightarrow (S, x_1, \dots, x_n)$ do cilindro sólido $W \times [0, s_0]$ sobre o espaço s, x_1, \dots, x_n definida por (4.33) é contínua e bijetora sobre sua imagem (devido à unicidade de soluções e regularidade da matriz $R(s)^{-1}$). Portanto, pela Observação 3.4.1 esta aplicação é um homeomorfismo sobre a sua imagem. \square

Alguns Resultados

Lema A.0.1. *As soluções de (3.1) são limitadas e permanecem no octante positivo.*

Demonstração: Segue da Proposição 4.1, onde é demonstrado o caso $(n + 1)$ -dimensional.

□

Lema A.0.2. *Uma condição necessária para que alguma espécie de predador sobreviva é $0 < \lambda_i < K$.*

Demonstração: Se $b_i \leq 1$, temos, de (3.3), que $\lambda_i \leq 0$. De

$$x_i(t) = x_{i0} e^{\int_0^t \left(\frac{(m_i - d_i)S(\xi) - a_i d_i}{a_i + S(\xi)} \right) d\xi},$$

segue que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$; enquanto que, se $\lambda_i > K$, então

$$x_i(t) = x_{i0} e^{\int_0^t \left(\frac{m_i - d_i}{a_i + S(\xi)} \right) \left(S(\xi) - \frac{a_i}{b_i - 1} \right) d\xi}.$$

Usando o fato de que $S(t)$ é limitada, também concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$. É fácil ver que quando $\lambda_i = K$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$. □

Teorema A.0.2 (Bifurcação Poincaré-Andronov-Hopf). *Sejam $\dot{x} = A(\lambda)x + F(\lambda, x)$ campo vetorial planar dependendo do parâmetro escalar λ e F de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 3$, tal que $F(\lambda, 0) = 0$ e $D_x(F(\lambda, 0)) = 0$, para todo $|\lambda|$ suficientemente pequeno. Assumamos que a*

parte linear $A(\lambda)$ na origem tenha autovalores $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ com $\alpha(0) = 0$ e $\beta(0) \neq 0$. Mais ainda, suponhamos que os autovalores cruzam o eixo imaginário com velocidade não nula, isto é,

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0. \quad (\text{A.1})$$

Então, em qualquer vizinhança U da origem em \mathbb{R}^2 e qualquer $\lambda_0 > 0$ existe um $\bar{\lambda}$ com $|\bar{\lambda}| < \lambda_0$ tal que a equação diferencial $\dot{x} = A(\bar{\lambda})x + F(\bar{\lambda}, x)$ tem uma órbita periódica não trivial em U .

Demonstração: A demonstração encontra-se em [3]. □

Teorema A.0.3. Consideremos a equação diferencial

$$\xi' = E\xi + F(\xi), \quad (\text{A.2})$$

onde $F(\xi)$ de classe \mathcal{C}^1 e $F(0) = 0$, $\partial_\xi F(0) = 0$. Seja E a matriz constante que possui $d > 0$ autovalores tendo partes reais negativas, digamos d_i autovalores com partes reais iguais α_i , onde $\alpha_1 < \dots < \alpha_r < 0$ e $d_1 + \dots + d_r = d$ enquanto que os outros autovalores, se houver, tenha partes reais não negativas. Se $0 < \varepsilon < -\alpha_r$, então (A.2) tem soluções $\xi = \xi(t) \neq 0$ satisfazendo

$$\|\xi(t)\|e^{\varepsilon t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty \quad (\text{A.3})$$

e

$$\lim t^{-1} \log \|\xi(t)\| = \alpha_i \quad \text{para algum } i. \quad (\text{A.4})$$

Mais ainda, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o ponto $\xi = 0$ e o conjunto de pontos ξ em soluções $\xi(t)$ satisfazendo $\lim t^{-1} \log \|\xi(t)\| \leq \alpha_i$, para i fixado [ou $\limsup t^{-1} \log \|\xi(t)\| < 0$] quanto $t \rightarrow \infty$, é uma variedade \mathcal{C}^1 localmente invariante S_i [ou S_r] de dimensão $d_1 + \dots + d_i$ [ou $d_1 + \dots + d_r = d$].

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [[1], Capítulo IX, Teorema 6.1].

□

Para provarmos o Teorema 3.4.1, precisamos da generalização de alguns teoremas

segundo Hartman. Veja [[1], Capítulo IX, Lema 5.1, Corolário 5.2].

Lema A.0.3. Para $s \in [0, s_0]$, $s_0 > 0$, seja $P(s)$ um matriz estável $p \times p$ e $Q(s)$ uma matriz $q \times q$ cujos autovalores têm partes reais não negativas, para todo $s \in [0, s_0]$, suponhamos ainda que $P, Q \in C^0[0, s_0]$, e seja $T^1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0, s_0] \mapsto \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ definida por

$$T^1 : y_1 = e^{P(s)}y + Y(y, z, s), \quad z_1 = e^{Q(s)}z + Z(y, z, s), \quad (\text{A.5})$$

para $(y, z, s) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0, s_0]$, onde $Y, Z, Y'_y, Y'_z, Z'_y, Z'_z \in C^0$, $Y(0, 0, s) = Z(0, 0, s) \equiv 0$ e matrizes Jacobianas $\partial_{(y,z)}Y(0, 0, s) = \partial_{(y,z)}Z(0, 0, s) \equiv 0$; então existe uma vizinhança da origem $W_p \subset \mathbb{R}^p$ e uma função $g : W_p \times [0, s_0] \mapsto W_q$ (W_q uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^q) tais que $g, g'_y \in C^0$, $g(0, s) \equiv 0$, $\partial_y g(0, s) \equiv 0$, e a mudança de coordenadas

$$u = y, v = z - g(y, s) \quad (\text{A.6})$$

transforma (A.5) em

$$u_1 = e^{P(s)}u + U(u, v, s), v_1 = e^{Q(s)}v + V(u, v, s), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$U(0, 0, s) = V(0, 0, s) \equiv 0, \quad \partial_{(u,v)}U(0, 0, s) = \partial_{(u,v)}V(0, 0, s) \equiv 0, \quad e \quad V(u, 0, s) \equiv 0. \quad (\text{A.8})$$

Observação A.0.1. Chamamos a atenção para o fato de que (A.8) significa que se $(u, v) = (u, 0)$, então sua imagem pela aplicação (A.7) é $(u_1, v_1) = (u_1, 0)$. Isto é, se nas coordenadas originais $z = g(y, s)$, então por (A.5) vale $z_1 = g(y_1, s)$, ou seja, o conjunto $\{(y, z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : z = g(y, s)\}$ é uma variedade invariante de T^1 , para cada $s \in [0, s_0]$ fixo. A demonstração coincide passo a passo com a demonstração de [[1], Capítulo IX, Lema 5.1].

Lema A.0.4. Para $s \in [0, s_0]$, $s_0 > 0$, sejam $P(s)$ e $Q(s)$ matrizes como no Lema A.0.3, e consideremos a família de sistemas dinâmicos $T : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0, s_0] \mapsto \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

dependente do parâmetro s definida por

$$\begin{aligned} T : y(t, y_0, z_0, s) &= e^{P(s)t} y_0 + Y(t, y_0, z_0, s) \\ z(t, y_0, z_0, s) &= e^{Q(s)t} z_0 + Z(t, y_0, z_0, s), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

para $t \in [0, \infty)$, $y_0 \in \mathbb{R}^p$, $z_0 \in \mathbb{R}^q$, $s \in [0, s_0)$ onde $Y, Z, \dot{Y}, Y'_{y_0}, Y'_{z_0}, \dot{Z}, Z'_{y_0}, Z'_{z_0} \in C^0$, $Y(t, 0, 0, s) = Z(t, 0, 0, s) \equiv 0$, $\partial_{(y_0, z_0)} Y(t, 0, 0, s) = \partial_{(y_0, z_0)} Z(t, 0, 0, s) \equiv 0$, e seja

$$\begin{aligned} T^{-1} : y(1, y_0, z_0, s) &= e^{P(s)} y_0 + Y(1, y_0, z_0, s) \\ z(1, y_0, z_0, s) &= e^{Q(s)} z_0 + Z(1, y_0, z_0, s); \end{aligned}$$

se g é a função fornecida pelo Lema A.0.3, para esta T^{-1} , então (A.6) transforma (A.9) em

$$\begin{aligned} u(t, u_0, v_0, s) &= e^{P(s)t} u_0 + U(t, u_0, v_0, s) \\ v(t, u_0, v_0, s) &= e^{Q(s)t} v_0 + V(t, u_0, v_0, s), \end{aligned}$$

onde $U(t, 0, 0, s) = V(t, 0, 0, s) \equiv 0$, $\partial_{(y_0, z_0)} U(t, 0, 0, s) = \partial_{(y_0, z_0)} V(t, 0, 0, s) \equiv 0$ e

$$V(t, u_0, 0, s) \equiv 0,$$

e se $y_0 \neq 0$, $|y_0|$ é suficientemente pequeno e $z_0 = g(y_0, s)$, então $z(t, y_0, z_0, s) = g(y(t, y_0, z_0, s), s)$, para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\frac{|z(t, y_0, z_0, s)|}{|y(t, y_0, z_0, s)|} \rightarrow 0$$

e

$$\limsup [t^{-1} \log |y(t, y_0, z_0, s)|] \leq \alpha, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

onde $\alpha < 0$.

Demonstração: Este lema é uma consequência do Lema (A.0.3), visto que, [[1], Capítulo IX, Corolário 5.2] é uma consequência de [[1], Capítulo IX, Lema 5.1]. \square

Método de Poincaré

Nesta seção, iremos apresentar o Método de Poincaré para o caso $m = 1$. Este caso nos dará uma condição necessária para que a origem seja um centro.

Consideremos a classe de sistemas

$$\dot{x} = X_m(x, y), \quad \dot{y} = Y_m(x, y) \tag{B.1}$$

com $X_m(x, y)$, $Y_m(x, y)$ funções reais definidas em \mathbb{R}^2 , anulando-se simultaneamente somente em $(x, y) = (0, 0)$ e homogêneas de ordem m , $m \geq 1$, ou tais que

$$X_m(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m X_m(x, y), \quad Y_m(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Y_m(x, y), \tag{B.2}$$

para qualquer constante real λ .

Se introduzirmos um sistema de coordenadas polares ϱ , θ com polo $(0, 0)$, por $x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$, o sistema (B.1) torna-se

$$\dot{\varrho} = \varrho^m Z(\theta), \quad \dot{\theta} = \varrho^{m-1} N(\theta), \tag{B.3}$$

onde

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= Y_m(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta + X_m(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta, \\ N(\theta) &= Y_m(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - X_m(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Assumiremos que $N(\theta) \neq 0$, e que o sistema (B.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\begin{aligned} X &= y + X_2 + \dots + X_m + \dots, \\ Y &= -x + Y_2 + \dots + Y_m + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

e X_n, Y_n denotam polinômios de grau n em x e y .

Do sistema (B.5) podemos associar ao polinômio linear a seguinte equação diferencial parcial

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.7})$$

e podemos verificar imediatamente, que se $\varphi(x, y) = \text{const.}$ é solução geral da equação

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \quad (\text{B.8})$$

então a função $F[\varphi(x, y)]$, onde F denota uma função arbitrária diferenciável, é uma solução da equação (B.7), e reciprocamente, se $F(x, y)$ é uma solução da equação (B.7), então $F(x, y) = \text{const.}$ é uma solução da equação (B.8).

Agora pretendemos descobrir se (B.7) tem uma solução da forma

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_N, \quad (N \leq +\infty), \quad (\text{B.9})$$

onde F_1, F_2, \dots são polinômios homogêneos em x, y , de graus 1, 2, ..., respectivamente. Substituindo (B.9) em (B.7), encontramos $F_1 \equiv 0, F_2 = x^2 + y^2$. Portanto,

$$F = x^2 + y^2 + \sum_{i \geq 3} F_i \quad (\text{B.10})$$

e (B.7) pode ser escrito como

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{k \geq 3} \left(y \frac{\partial F_k}{\partial x} - x \frac{\partial F_k}{\partial y} - H_k \right), \quad (\text{B.11})$$

onde

$$-H_3 = 2xX_2 + 2yY_2 \quad (\text{B.12})$$

$$-H_k = 2xX_{k-1} + 2yY_{k-1} + \sum_{l=2}^{k-2} \left[X_l \frac{\partial F_{k-l+1}}{\partial x} + Y_l \frac{\partial F_{k-l+1}}{\partial y} \right] \quad (k = 4, 5, \dots), \quad (\text{B.13})$$

e agora estudaremos as equações

$$y \frac{\partial F_k}{\partial x} + x \frac{\partial F_k}{\partial y} = H_k. \quad (\text{B.14})$$

Notemos que se fizermos uma mudança para coordenadas polares ($x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$), então

$$\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial \theta} = -\varrho \frac{\partial F_k}{\partial x} \sin \theta + \varrho \frac{\partial F_k}{\partial y} \cos \theta = - \left[\frac{\partial F_k}{\partial x} y + \frac{\partial F_k}{\partial y} x \right].$$

Portanto, em termos das coordenadas ϱ , θ

$$F_k = \varrho^k \varphi_k(\theta), \quad (\text{B.15})$$

$$H_k = \varrho^k \psi_k(\theta), \quad (\text{B.16})$$

$$\varphi_k(\theta) = \sum_{l=0}^k [A_l \cos l\theta + B_l \sin l\theta], \quad (\text{B.17})$$

$$\psi_k(\theta) = \sum_{l=0}^k [C_l \cos l\theta + D_l \sin l\theta], \quad (\text{B.18})$$

(A_l, B_l, C_l, D_l) , então a equação (B.14) torna-se $-\frac{d\varphi_k}{d\theta} = \psi_k(\theta)$, ou

$$\sum_{l=1}^k l [A_l \sin l\theta - B_l \cos l\theta] = \sum_{l=0}^k [C_l \cos l\theta + D_l \sin l\theta],$$

e, conseqüentemente, podemos ter

$$C_0 = 0, \quad A_l = -\frac{D_l}{l}, \quad B_l = -\frac{C_l}{l} \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (\text{B.19})$$

Se k é ímpar, $\psi_k(\theta)$ é uma função ímpar de θ , então a condição $C_0 = 0$ é satisfeita, e (B.19) determina os coeficientes A_l , B_l e, conseqüentemente $\psi(\theta)$ e F_k .

Se k é par e C_0 não é zero, então é impossível satisfazer (B.14) com um polinômio homogêneo em x , y de grau k . Entretanto, podemos satisfazer a equação

$$y \frac{\partial F_k}{\partial x} + x \frac{\partial F_k}{\partial y} = H_k - C_0(x^2 + y^2)^{k/2}, \quad (\text{B.20})$$

com o polinômio homogêneo de grau k em x , y , e F_k será determinada por uma constante arbitrária A_0 .

Estabelecido isto, calculamos F_3 com o método descrito acima. Passando para F_4 , pode ser que não seja possível calculá-lo a partir da equação

$$y \frac{\partial F_4}{\partial x} + x \frac{\partial F_4}{\partial y} = H_4$$

porque encontramos $C_0 \neq 0$, e supomos geralmente que $F_{2i}(i > 1)$ é o primeiro polinômio correspondendo a uma contante $C_0 \neq 0$, calculada por (B.20), e determinamos arbitrariamente as constantes em que F_4 , F_6 , ..., F_{2i} dependem.

Consideraremos a função

$$F = x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + \dots + F_{2i} \quad (\text{B.21})$$

e notemos que por (B.11), (B.17), (B.18) e (B.20), temos

$$X \frac{\partial F}{\partial y} + Y \frac{\partial F}{\partial x} = -C_0(x^2 + y^2)i + \Omega(x, y),$$

onde $\Omega(x, y)$ é uma série de potência em (x, y) com todos os termos de grau maiores que $2i$.

Lema de Gronwall

Em matemática, o lema de Gronwall estabelece uma importante estimativa aplicável às desigualdades envolvendo derivadas ou integrais. Além disto, é uma ferramenta usada para obter variadas estimativas em equações diferenciais ordinárias. Em particular, é usado para provar a unicidade de uma solução para um problema de valor inicial (como o conhecido Teorema de Picard-Lindelöf).

O Lema de Gronwall foi nomeado a partir de Thomas Hakon Gronwall (1877-1932). A forma diferencial foi provada por Gronwall em 1919, enquanto que, a forma integral por Richard Bellman em 1943.

Lema C.0.5 (Lema de Gronwall para integrais). *Sejam $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funções reais contínuas no intervalo em $[a, b]$ com $\beta(t) \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds,$$

para $a \leq t < b$, então

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(w)dw} ds,$$

para $a \leq t < b$.

Demonstração: Veja [21].

□

Lema C.0.6 (Lema de Gronwall para derivadas). *Denotemos por I um intervalo da reta da*

forma $[a, +\infty)$ ou $[a, b]$ ou $[a, b)$ com $a < b$. Sejam β e u funções contínuas reais definidas em I . Se u é diferenciável no interior de I (I°) e satisfaz

$$u'(t) \leq \beta(t)u(t), \quad \forall t \in I^\circ,$$

então

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds},$$

para todo $t \in I$

Demonstração: Se

$$v(t) = e^{\int_a^t \beta(s)ds}$$

é a solução de $v'(t) = \beta(t)v(t)$, com $v(a) = 1$, então $v(t) > 0$, para todo t . Logo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \leq \frac{\beta uv - \beta vu}{v^2} = 0,$$

para $t > a$, assim

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(a)}{v(a)} = u(a),$$

provando o lema. □

Critério de Dulac

O Teorema da Divergência fornece um caminho para provarmos a não-existência de órbitas periódicas em algumas regiões do espaço fase. Recordemos que, se Γ é uma curva fechada simples com vetor normal n envolvendo uma região R e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores continuamente diferenciáveis e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, então o Teorema da Divergência estabelece que

$$\int_{\Gamma} g(n \cdot f) dl = \int \int_R \operatorname{div}(gf) dx dy,$$

onde gf é um vetor, e não a composição $g \circ f$.

Teorema D.0.4 (Critério de Dulac). *Se existe um função continuamente diferenciável $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{div}(gf)$ é contínua, de sinal constante e não identicamente nula em um domínio simplesmente conexo D , então $\dot{x} = f(x)$ não tem órbitas periódicas inteiramente contidas em D .*

Demonstração: Suponhamos que exista uma órbita periódica inteiramente contida em D . Então,

$$\int \int_A \operatorname{div}(gf) dx dy \neq 0,$$

onde A é a região delimitada por Γ . Assim, $\operatorname{div}(gf)$ é estritamente maior ou estritamente menor que zero em todo A . Mas uma órbita periódica é uma trajetória, e portanto, tangencia o campo de vetor f . Então $n \cdot f = 0$, onde n é o vetor normal à órbita periódica. Desta forma

$$\int_{\Gamma} g(n \cdot f) dl = 0,$$

o que contradiz o Teorema da Divergência. □

Exemplo D.0.1. *Consideremos o modelo de Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - a_1x + b_1y) \\ \dot{y} = y(B - a_2y + b_2x), \end{cases}$$

onde $a_i > 0$, $i = 1, 2$.

Consideremos a função $g(x, y) = (xy)^{-1}$. Então

$$gf = (y^{-1}(A - a_1x + b_1y), x^{-1}(B - a_2y + b_2x))$$

e, assim,

$$\operatorname{div}(gf) = -a_1y^{-1} - a_2x^{-1} \quad e \quad \operatorname{div}(gf) < 0,$$

para números positivos x e y .

Desta forma, pelo critério de Dulac, não existe órbitas periódicas contidas no quadrante positivo.

O que vimos neste apêndice pode ser encontrado em [33].

Bifurcação de Andronov-Hopf

E.1 Bifurcação de Hopf no plano

O propósito desta seção é justificar o surgimento da Bifurcação de Hopf para valores do parâmetro α em uma vizinhança de 0 e de -1 , e $\varepsilon > 0$. Pela simetria do problema vamos analisar apenas em uma vizinhança de 0. O que descrevemos neste apêndice pode ser visto com detalhes em [22].

Consideremos o sistema genérico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \tag{E.1}$$

onde $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$.

Denotaremos por $x = (x_1, x_2)^T$ e consideramos a seguinte família a um parâmetro

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{E.2}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Notemos que $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ é o ponto de equilíbrio deste sistema com a matriz Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

tendo autovalores $\lambda_1 = \alpha + i$ e $\lambda_2 = \alpha - i$.

Trabalharemos no plano complexo, assim

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad |z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2.$$

Estas variáveis satisfazem a equação diferencial

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) \pm (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

e podemos, entretanto, re-escrever (E.2) na forma complexa

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = (\alpha + i)z \pm z|z|^2. \quad (\text{E.3})$$

Usando a representação $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, obtemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta},$$

ou

$$\dot{\rho}e^{i\theta} + i\rho\dot{\theta}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}(\alpha + i \pm \rho^2),$$

o que nos dá a forma polar do sistema (E.2):

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha \pm \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Considerando o sistema (E.4) com o sinal “-”, vemos que

- (1) para $\alpha < 0$, ρ é decrescente, pois $\dot{\rho} < 0$;
- (2) para $\alpha = 0$, ρ é decrescente, pois $\dot{\rho} < 0$;
- (3) para $\alpha > 0$, ρ é decrescente se for maior que $\sqrt{\alpha}$ e é crescente se for menor que $\sqrt{\alpha}$. Não há variação quando $\rho = \sqrt{\alpha}$ ou $\rho = 0$. Na Figura E.1, temos a representação para estes três casos.

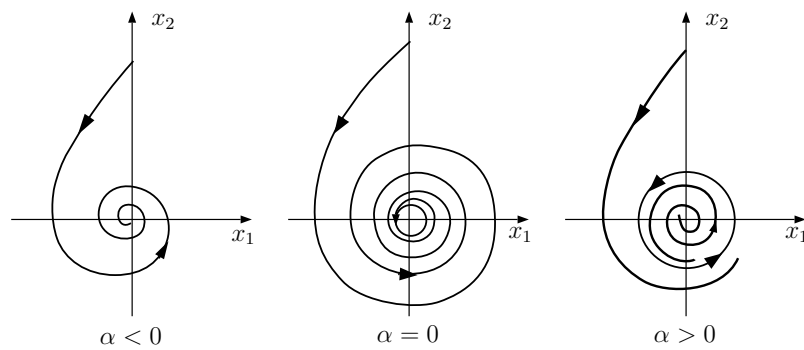


Figura E.1: Bifurcação de Hopf Supercrítica

Agora, considerando o sistema (E.4) com o sinal “+”, obtemos

- (1) para $\alpha < 0$, ρ é crescente se for maior que $\sqrt{-\alpha}$ e é decrescente se for menor que $\sqrt{-\alpha}$. Não há variação quando $\rho = \sqrt{-\alpha}$ ou $\rho = 0$.
- (2) para $\alpha = 0$, ρ é crescente, pois $\dot{\rho} > 0$;
- (3) para $\alpha > 0$, ρ é crescente, pois $\dot{\rho} > 0$. Na Figura E.2, temos a representação para estes três casos.

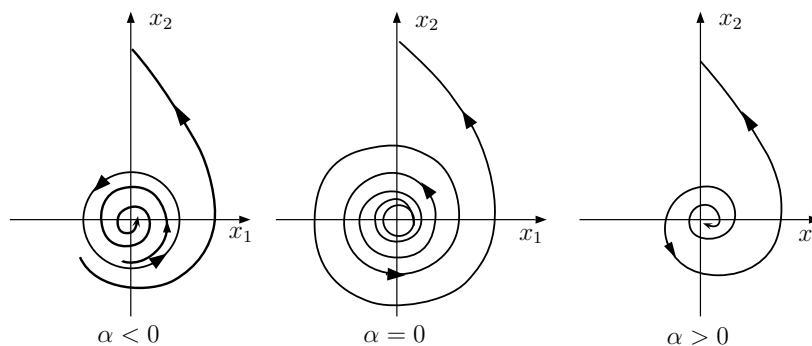


Figura E.2: Bifurcação de Hopf Subcrítica

O fenômeno acima é chamado de *Bifurcação de Hopf* e pode ser representado no espaço (x_1, x_2, α) . A família de ciclos-limite forma um parabolóide. Veja Figura E.3.

Na Figura E.3 à esquerda, a bifurcação recebe o nome de *supercrítica*, enquanto que, à direita é chamada *subcrítica*.

Definição E.1.1. O sistema (E.2), ou equivalentemente (E.3) e (E.4) serão denominados *Forma Normal da Bifurcação de Hopf*.

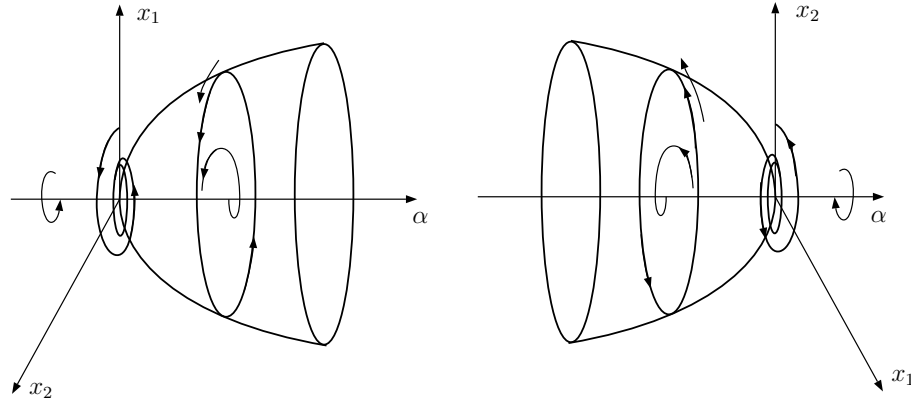


Figura E.3: Bifurcação de Hopf no espaço fase-parâmetro

Consideremos os sistemas dinâmicos

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{E.5})$$

$$\dot{y} = f(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{E.6})$$

com lado direito diferenciável e com o mesmo número de variáveis e parâmetros.

Definição E.1.2. O sistema dinâmico (E.5) é chamado topologicamente equivalente ao sistema dinâmico (E.6) se

- (i) existe um homeomorfismo do espaço de parâmetro $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta = p(\alpha)$;
- (ii) existe um homeomorfismo parâmetro-dependente do espaço fase $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y = h_\alpha(x)$ aplicando órbitas do sistema (E.5) para o parâmetro α sobre órbitas do sistema (E.6) para o parâmetro $\beta = p(\alpha)$, preservando a direção de tempo.

Exemplo E.1.1. O sistema dinâmico $\dot{x} = x$ é topologicamente equivalente ao sistema dinâmico $\dot{y} = 2y$.

Definição E.1.3. Os sistemas (E.5) e (E.6) são chamados localmente topologicamente equivalentes em torno da origem, se existe uma aplicação $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$, definida em uma pequena vizinhança de $(x, \alpha) = (0, 0)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e tal que

- (i) $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo definido em uma pequena vizinhança de $\alpha = 0$, $p(0) = 0$;
- (ii) $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo parâmetro-dependente definido em uma pequena vizinhança U_α de $x = 0$, $h_0(0) = 0$ e leva órbitas do sistema (E.5) em U_α sobre órbitas do sistema (E.6) em $h_\alpha(U_\alpha)$ preservando a direção de tempo.

Enunciaremos a seguir um lema importante que diz que em torno da singularidade, em nosso caso a origem, o retrato de fase de um sistema com termos de ordem 4 tem o mesmo comportamento se desprezarmos estes termos.

Lema E.1.1. *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (\text{E.7})$$

onde $x = (x_1, x_2)^T$ e $O(\|x\|^4)$ representa os termos de ordem 4 e dependem suavemente de α , é localmente topologicamente equivalente em torno da origem ao sistema (E.2).

Demonstração: Veja [22]. □

Consideremos a família $\dot{x} = f(x, \alpha)$ tal que $\alpha = 0$, $f(0, 0) = 0$ e a matriz jacobiana $Jf(0, 0)$ possui os autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. Assim, o sistema (E.7) pode ser escrito como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (\text{E.8})$$

onde $A(\alpha) = Jf(0, \alpha)$, $F(x, \alpha) = (F_1(x, \alpha), F_2(x, \alpha))$ é de classe \mathcal{C}^n , $F_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$, e F tem expansão de Taylor iniciando com termos de $O(\|x\|^2)$.

A matriz $A(\alpha)$ tem autovalores $\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha)$ e $\lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}$, onde $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$. Queremos mostrar que $\lambda(0) = \gamma(0) + i\omega(0) = 0 + i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$.

Lema E.1.2. *O sistema (E.8) pode ser escrito, para α suficientemente pequeno, na forma*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha) \quad (\text{E.9})$$

onde $g = O(|z|^2)$ é uma função \mathbb{C}^n dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle.$$

Demonstração: Seja $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de $A(\alpha)$ associado a $\lambda(\alpha)$, isto é,

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

e seja $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$, de forma que

$$A(\alpha)^T p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)} \overline{p(\alpha)}.$$

É sempre possível normalizarmos p em relação a q :

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ significa o produto interno em \mathbb{C}^2 : $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$.

Dado qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\overline{q(\alpha)},$$

para algum $z \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), x \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \bar{z}\overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), \bar{z}\overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= z\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= z + \bar{z}\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle. \end{aligned} \tag{E.10}$$

Agora, sendo $q(\alpha)$ um autovalor complexo de $A(\alpha)$ associado a $\lambda(\alpha)$

$$\overline{q(\alpha)} = \frac{1}{\overline{\lambda(\alpha)}} A(\alpha) \overline{q(\alpha)},$$

então

$$\begin{aligned}\langle p(\alpha), x \rangle &= z + \bar{z} \left\langle p(\alpha), \frac{1}{\lambda(\alpha)} A(\alpha) \overline{q(\alpha)} \right\rangle \\ &= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \lambda(\alpha) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle.\end{aligned}\tag{E.11}$$

Consequentemente, de (E.10) e de (E.11), temos

$$\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha)} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle,$$

pois $\lambda(\alpha) \neq \overline{\lambda(\alpha)}$.

Portanto, $\langle p(\alpha), x \rangle = z$. Desta forma, por (E.8),

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \langle p(\alpha), \dot{x} \rangle = \langle p(\alpha), A(\alpha)x + F(x, \alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle,\end{aligned}$$

fazendo uma comparação com (E.9), concluímos que

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle.$$

□

A expansão em Taylor de $g(z, \bar{z}, \alpha)$ em torno de α é dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

onde $g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle \Big|_{z=0}$, para $k+l \geq 2$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$

Suponhamos que, para $\alpha = 0$, $F(x, \alpha)$ seja representada por

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

onde $B(x, x)$ e $C(x, y, u)$ são multilineares simétricas, com $x, y, u \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2$$

e

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

Desta maneira, sendo $B(q, \bar{q}) = B(\bar{q}, q)$

$$\begin{aligned} B(x, x) &= B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) \\ &= z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Denotaremos por $q = q(0)$ e $p = p(0)$. Sendo assim, os termos quadráticos em

$$g(z, \bar{q}, 0) = g_{11}(0)z\bar{z} + \frac{1}{2!}[g_{20}(0)z^2 + g_{02}(0)\bar{z}^2] + \frac{1}{2!}[g_{21}(0)z^2\bar{z} + g_{12}(0)z\bar{z}^2] + \dots$$

podem ser expressos por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \\ g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle \\ g_{02} &= \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, com $C(x, x, x) = C(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q})$, obtemos os coeficientes de ordem 3 e

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

Lema E.1.3. *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

onde $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada,

pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2, \quad (\text{E.13})$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3).$$

Demonstração: Considerando a mudança de coordenadas inversas dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + O(|z|^3) \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + O(|z|^3) \\ &= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{20} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + O(|w|^3). \end{aligned}$$

Para eliminarmos os termos de ordem 2, fazemos $g_{20} - \lambda h_{20} = 0$, $g_{11} - \bar{\lambda}h_{11} = 0$ e $g_{20} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02} = 0$ que, respectivamente, nos dá

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}} \quad \text{e} \quad h_{02} = \frac{g_{20}}{2\bar{\lambda} - \lambda}.$$

Isto é sempre possível, pois para $|\alpha|$ suficientemente pequeno, $\lambda(\alpha) \neq 0$ e $\lambda(\alpha) \neq \overline{\lambda(\alpha)}$, já que $\lambda(0) = i\omega_0 \neq 0$. Isso conclui a prova. \square

Lema E.1.4. *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

onde $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada,

pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{3}\bar{w}^3, \quad (\text{E.14})$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na equação com somente um termo cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

onde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demonstração: Considerando a transformação inversa

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2}(\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + O(|z|^4) \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2}\right)z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda}h_{21}}{2}\right)z^2\bar{z} \\ &\quad + \left(\frac{g_{21}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda}h_{12}\right)z\bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\lambda h_{03}}{2}\right)\bar{z}^3 + O(|z|^4) \\ &= \lambda w + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})w^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21})w^2\bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12})w\bar{w}^2 + \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}h_{03}))\bar{w}^3 + O(|w|^4). \end{aligned}$$

Então, tomando

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\lambda} \quad \text{e} \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

podemos anular todos os termos cúbicos na equação resultante exceto o termo $w^2\bar{w}$, que será tratado separadamente. As substituições são válidas desde que todos os denominadores envolvidos sejam não nulos, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno.

Podemos eliminar também $w^2\bar{w}$ tomando, formalmente,

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isto é possível para todo $\alpha \neq 0$, mas o denominador se anula quando $\alpha = 0$: $\lambda(0) + \overline{\lambda(0)} = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Então escolhemos $h_{21} = 0$ e denota-se $c_1 = \frac{g_{21}}{2}$. \square

Definição E.1.4. *O termo $w^2\bar{w}$ é chamado termo ressonante.*

O coeficiente do termo ressonante é igual ao coeficiente do termo cúbico $z^2\bar{z}$ na equação (E.14).

Lema E.1.5 (Forma normal de Poincaré para a Bifurcação de Hopf). *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4), \quad (\text{E.15})$$

onde $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{3} \bar{w}^3$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na equação com somente o termo cúbico ressonante

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4), \quad (\text{E.16})$$

onde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demonstração: Obviamente, uma composição das transformações definidas no Lema E.1.3 e Lema E.1.4 é favorável. Primeiramente, fazemos a transformação

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \quad (\text{E.17})$$

com

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda} \quad \text{e} \quad h_{02} = \frac{g_{20}}{2\lambda - \lambda},$$

definidas no Lema E.1.3. Isto anulará todos os termos quadráticos, mas também alterará os coeficientes de termos cúbicos. Representaremos o coeficiente de $w\bar{w}^2$ por $\frac{1}{2}g_{21}^*$. Quando aplicamos o Lema E.1.4 eliminaremos os termos de ordem 3, exceto o termo $\frac{1}{2}g_{21}^*$, que é o termo ressonante. \square

Lema E.1.6. *O coeficiente $c_1(\alpha)$ da equação (E.16), para $\alpha = 0$, é dado por*

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (\text{E.18})$$

Demonstração: Diferenciando $z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2$, obtemos $\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(\dot{w}\bar{w} + z\dot{\bar{w}}) + h_{02}\bar{w}\dot{\bar{w}}$. Substituindo \dot{w} e $\dot{\bar{w}}$ e levando em conta (E.16), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda z + \left(\frac{\lambda h_{20} + g_{20}}{2} \right) w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11})w\bar{w} + \left(\bar{\lambda} h_{02} + \frac{g_{20}}{2} \right) \bar{w}^2 \\ &+ \left[g_{20}h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \right] w^2\bar{w} + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Comparando os coeficientes do termo cúbico $w^2\bar{w}$ nas duas equações obtidas acima, e utilizando $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$ e $h_{02} = \frac{g_{20}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$ temos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= g_{20}h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda + \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Para $\alpha = 0$ temos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \frac{g_{20}g_{11}(2i\omega_0\lambda - i\bar{\omega}_0)}{2|\omega_0|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega_0 + i\bar{\omega}_0)} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} + 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

\square

Agora queremos transformar a Forma Normal de Poincaré na Forma Normal da

Bifurcação de Hopf.

Lema E.1.7. *Consideremos a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4), \quad (\text{E.22})$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponhamos que $\gamma'(0) \neq 0$ e que $\text{Re } c_1(0) \neq 0$, onde $\text{Re } c_1(0)$ significa a parte real de $c_1(0)$. Então (E.22) pode ser transformada, por mudança de coordenada, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \quad (\text{E.23})$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são os novos tempos e parâmetros, respectivamente, e $s = \text{sign}[\text{Re } c_1(0)] = \pm 1$.

Demonstração: Seja $\tau = \omega(\alpha)t$. Então τ preserva a direção, pois $\omega(\alpha) > 0$, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [(\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{\omega\alpha} \\ &= \frac{\gamma(\alpha) + i\omega_\alpha}{\omega_\alpha} w + \frac{c_1(\alpha)}{\omega_\alpha} w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4), \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

onde $\chi = \chi(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\omega(\alpha)}$ e $d_1(\chi) = \frac{c_1(\alpha(\chi))}{\omega(\alpha(\chi))}$.

Podemos considerar χ como nosso parâmetro já que $\chi(0) = 0$, $\chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0$, e, portanto, o Teorema da Função Inversa garante a existência local e suave de α como função de χ .

Vamos, novamente reparametrizar o tempo com a nova mudança $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde $d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau$, com $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$, sendo $\text{Im } d_1(\chi)$ a parte imaginária de $d_1(\chi)$.

Assim, considerando a expansão de

$$\frac{1}{(1 + e_1(\chi)|w|^2)}$$

para w próximo de 0, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\theta} \\ &= [(\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|u|^4)] \frac{1}{(1 + e_1(\chi)|w|^2)} \\ &= [(\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|u|^4)] [1 - e_1(\chi)|w|^2 - e_1^2(\chi)|w|^4 + \dots]. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Sabendo que $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 - (\chi + i)e_1(\chi)w|w|^2 + O(|u|^4) \\ &= (\chi + i)w + [\text{Re } d_1(\chi) - \chi e_1(\chi)]w|w|^2 + O(|u|^4). \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Portanto

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + O(|u|^4),$$

onde

$$l_1(\chi) = \text{Re } d_1(\chi) - \chi e_1(\chi). \quad (\text{E.27})$$

Vejamos que $l_1(\chi) \in \mathbb{R}$, com $l_1(0) = \text{Re } d_1(0)$, o que nos dá

$$l_1(0) = \text{Re} \left(\frac{c_1(\alpha(0))}{\omega(\alpha(0))} \right) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (\text{E.28})$$

Introduzindo a nova variável complexa u , dada pela expressão

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}},$$

que é possível, pois $\text{Re } c_1(0) \neq 0$, e, portanto, $l_1(0) \neq 0$, finalmente escreveremos a equação

como

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{du} \frac{du}{d\theta} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \frac{du}{d\theta} \\
&= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} + l_1(\chi) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \right|^2 + \dots, \tag{E.29}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{l_1(\chi)}{|l_1(\chi)|} u |u|^2 + O(|u|^4) \\
&= (\chi + i)u + su |u|^2 + O(|u|^4), \tag{E.30}
\end{aligned}$$

onde $s = \text{sign}[l_1(0)] = \text{sign}[\text{Re } c_1(0)] = \pm 1$. □

Definição E.1.5. A função $l_1(\chi)$ é chamada de primeiro coeficiente de Lyapunov.

De (E.28) temos que

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}). \tag{E.31}$$

Observação E.1.1. Notemos que se a equação (E.23), com $s = -1$, for escrita na sua forma real, então a equação coincidirá com o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - (x^2 + y^2)x + O(\|x\|^4) \\ \dot{y} = x + \alpha y - (x^2 + y^2)y + O(\|x\|^4). \end{cases} \tag{E.32}$$

Reunindo os resultados anteriores, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema E.1.1. Suponhamos que o sistema bidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{E.33}$$

com $f \in C^n(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tendo a singularidade $x = 0$, para todo $|\alpha|$ suficientemente

pequeno, com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha),$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, satisfazendo as condições

(1) $l_1(0) \neq 0$ (não degenerência);

(2) $\gamma'(0) \neq 0$ (transversalidade).

Então, existem coordenadas inversíveis, mudanças de parâmetros e uma reparametrização do tempo transformando (E.33) em

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \quad (\text{E.34})$$

Finalmente, chegamos ao resultado mais geral.

Teorema E.1.2 (Forma Normal da Bifurcação de Hopf). *Qualquer sistema bidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (\text{E.35})$$

tendo a singularidade $x = 0$, $\alpha = 0$, com autovalores

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

é localmente topologicamente equivalente em torno da origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \beta y_1 - y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2)y_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 + \beta y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2)y_2. \end{cases} \quad (\text{E.36})$$

Demonstração: Veja demonstração em [[22], Capítulo 3, Teorema 3.4]. □

ÍNDICE REMISSIVO

- Álgebra, 38
- Órbitas, 17
- Atrator, 18
- Bifurcação
 - h-atrator, 55
 - h-repulsor, 55
 - Zip, 50
- Campo Vetorial, 17
- Chemostat, 46
- Constante semissaturação, 45
- Difeomorfismo, 34
 - local, 34
- Domínio de atração, 18
- Equação
 - variacional linear, *ver* Linearização
- Espaço Tangente, 38
- Estrutura diferenciável, 36
- Fibrado tangente, 41
- Folheação, 44
- Fréchet-Diferenciável, 30
- Função
 - de Lyapunov, 26
- Gateaux-diferenciável, 32
- Germe, 37
- Homeomorfismo, 33
- Imersão, 35, 41
- Lema de Gronwall
 - para derivadas, 109
 - para integrais, 109
- Linearização, 24, 25
- Localmente Topologicamente Equivalente, 116
- Método de Poincaré, 58, 61, 105
- Matriz
 - Jacobiana, 24
- Mergulho, 41
- mergulho, 35
- Período
 - da oscilação, 65
- Plano de fase, 17
- Polinômio
 - homogêneo, 54
- Ponto

- crítico, 17
 - assintoticamente estável, 18, 20–22, 25
 - estável, 18, 20
 - estritamente estável, 18
 - hiperbólico, 24
 - instável, 18, 21–23, 25
 - isolado, 19, 23
 - não-hiperbólico, 25
 - isolado, 18
 - de equilíbrio, 17
- Primeiro Coeficiente de Lyapunov, 91
- Primeiro coeficiente de Lyapunov, 127
- Sistema dinâmico, 16
- Solução
 - h-assintoticamente estável, 55
 - h-completamente estável, 55
- Submersão, 34, 42
- Subvariedade, 41
- Teorema
 - da Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf, 58, 101
 - da forma local das imersões, 35
 - da forma local das imersões em variedades, 41
 - da forma local das submersões, 35
 - da forma local das submersões em variedades, 41
 - da Forma Normal da Bifurcação de Hopf, 128
 - da Forma normal de Poincaré para a Bifurcação de Hopf, 123
 - da Função Implícita, 34
 - da Função Inversa, 34
 - da Regra da Cadeia, 30
- Termo ressonante, 123
- Topologicamente Equivalente, 116
- Trajetórias, 17
- Transversal, 42
- Valor regular, 41
- Variedade Diferenciável, 36
- Vetor tangente, 38
- Vizinhança, 64

BIBLIOGRAFIA

- [1] Hartman P.H., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
- [2] Farkas M., *Zip Bifurcation in a Competition Model*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 8, No. 11, pp. 1295-1309, 1984.
- [3] Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y-H., *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [4] Hocking J. G., Young G. S., *Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1961.
- [5] Hsu S. B., Hubbell S. P., Waltman P., *Competing predators*, *SIAM J. appl. Math.* 35, 617-625, 1978.
- [6] Hsu S. B., Hubbell S. P., Waltman P., *A contribution of the theory of competing predators*, *Ecological Monogr.* 48, 337-349, 1978.
- [7] Koch A. L., *Coexistence resulting from an alteration of density dependent and density independent growth*, *J. theoret. Biol.* 44, 373-386, 1974.
- [8] Negrini P., Salvadori L., *Attractivity and Hopf bifurcation*, *Nonlinear Analysis* 3, 87-99, 1979.
- [9] Smith H. L., *The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two predator-one prey competition model*, *SIAM J. appl. Math.* 42, 2733, 1982.
- [10] Sternberg S., *Local contractions and a theorem of Poincaré*, *Am. J. Math.* 79, 809-824, 1957.

-
- [11] Wilken D. R., *Some remarks on a competing predators problem*, SIAM J. appl. Math. 42, 895-901, 1982.
- [12] Rota G.-C., Birkhoff G., *Ordinary Differential Equations*, 4th Edition, Wiley, New York.
- [13] Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides)
- [14] Auslander L., MacKenzie R. E., *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, New York.
- [15] Lyncey S., *Dynamical Systems with Applications using MAPLE*, Birkhäuser, Boston.
- [16] Tyn M., *Ordinary Differential Equations Algebra*, North-Holland, New York, 1978.
- [17] Warner F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1971
- [18] Lima E., *Variedades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática do IMPA, 15, 1973.
- [19] Lima E., *Curso de Análise*, Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [20] Pollack A., Guillemin V., *Differential Topology*, PRENTICE-HALL.
- [21] Markley N. G., *Principles of Differential Equations*, Wiley-IEEE, 2004.
- [22] Kuznetsov Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, 2004.
- [23] Sansone G., Conti R., *Non-linear Differential Equations*, Pergamon Press, 1964.
- [24] Ferreira J. D., Oliveira L. A. F., *Hopf and zip bifurcation in a specific $(n+1)$ -dimensional competitive system*, Vol. XV No 1, Junho (2007), Matemáticas: 33-50.
- [25] Boyce W. E., DiPrima R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, Sétima Edição.
- [26] Müller F., *Hopf bifurcation in Landau-Lifshitz-Gilbert dynamics with a spin torque*, Berlin, 2007.

-
- [27] Bassanezi R. C., Ferreira Jr. W. C., *Equações diferenciais com aplicações*, HARBRA, São Paulo, 1988.
- [28] Hale J. K., Koçak H., *Dynamics and Bifurcations*, 3rd Edition, Springer, 1991.
- [29] Spivak M., *O Cálculo em variedades*, Editora Ciência Moderna Ltada., Rio de Janeiro, 2003.
- [30] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [31] Palis Jr. Jacob, Melo W. de, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [32] Camacho C., Lins Neto A., *Teoria Geométrica da Folheações*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [33] Glendinning P., *Stability, Instability, and Chaos: An Introduction to the Theory of Non-linear Differential Equations*, Cambridge University Press, 1994.