UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

JULIANA RAUPP DOS REIS

Raízes Aproximadas Características de uma Curva Plana

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Raízes Aproximadas Características de uma Curva Plana

JULIANA RAUPP DOS REIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra.

Orientadora: Profª. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes.
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes.

Maringá-PR
2018

Ao meu amado Anderson e à minha família.
À vocês todo meu amor e minha gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Anderson Macedo Setti, meu companheiro, por ter acreditado em mim, quando eu mesma tinha dúvidas de que eu poderia fazer um mestrado. Você estava Certo!

À sua família, Nelson Setti, Maria Elizabete Macedo e Jefferson Setti por terem me acolhido, me apoiado e incentivado.

À minha família agradeço por me ensinar a enfrentar a vida, e mesmo não compreendendo direito o que é fazer um Mestrado sempre me apoiaram a buscar tudo o que eu sonhei. Obrigado Antonio Joaquim dos Reis e Marilda Raupp dos Reis meus amados pais, neste período estivemos muito distantes, mas tenho certeza que vocês me entendem, afinal foram vocês que me ensinaram que a educação é liberdade.

À minha companheira de estudos Priscila Friedemann Cardoso e aos demais colegas que compartilharam comigo seus conhecimentos.

À minha orientadora Maria Elenice Rodrigues Hernandes e ao meu coorientador Marcelo Escudeiro Hernandes, que aceitaram me orientar e com paciência e compreensão sempre estiveram à disposição para me ajudar. Neste curso aprendi muita Matemática que nem imaginava que poderia, aprendi sobre a ciência e sobre o ser matemático, gostei muito e desejo continuar aprendendo e vocês têm muita responsabilidade sobre isso. Agradeço também aos demais professores com quem eu tive a oportunidade de conviver, e que generosamente compartilharam comigo seus conhecimentos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar que a resolução mergulhada minimal de uma raiz aproximada característica de um ramo plano é determinada pela resolução mergulhada minimal deste ramo.

Para tanto estudamos as curvas algebroides planas, suas parametrizações de Newton-Puiseux, os expoentes característicos, o índice de interseção de duas curvas, o semigrupo de valores associado a uma curva algebroide plana e o processo de resolução canônica de singularidades de uma curva.

Concluímos com as relações entre um ramo e suas raízes aproximadas. Definimos raízes aproximadas características e semirraízes, mostrando que os expoentes característicos de uma semirraiz são determinados pelos expoentes característicos da curva. Finalizamos com o processo de resolução mergulhada minimal de uma curva e de suas raízes características.

Palavras-chave: curvas algebroides planas; raízes aproximadas características; semirraízes.

ABSTRACT

The purpose of this work is to show that the minimal embedded resolution of a characteristic approximate root of a plane branch is determined by the minimal embedded resolution of this branch.

For that we study algebroid plane curves with their Newton-Puiseux parametrizations, the characteristics exponents, the intersection multiplicity of two curves, the semigroup of values of an algebroid plane curve, and the canonical resolution process of singularities.

We conclude with the relations between a branch and its approximate roots. We define characteristic approximate roots and semiroots, and we show that the characteristic exponents of a semiroot of a curve can be determined by the characteristic exponents of the curve. We finish with the minimal embedded resolution process of a curve and its characteristic roots.

Keywords: algebroid plane curves; characteristic approximate roots; semiroots.

SUMÁRIO

Introdução **12**

1 Séries de Potências e o Teorema da Preparação de Weierstrass **13**

1.1 Anel das Séries de Potências 13

1.2 Homomorfismos e o Corpo de Laurent 16

1.3 O Teorema da Preparação de Weierstrass 20

2 Curvas Algebroides Planas **28**

2.1 Curvas Algebroides Planas 28

2.2 Teorema de Newton-Puiseux 33

2.3 Parametrização e Expoentes Característicos 40

2.4 O Anel Local de uma Curva Plana 44

2.5 Índice de Interseção 47

3 Semigrupo de Ramos Planos **51**

3.1 Semigrupo dos Naturais 51

3.2 Semigrupo de Valores 53

3.3 Contato entre Ramos 58

3.4 Fórmula da Inversão 62

4 Resolução de Singularidades de Curvas **66**

4.1 Explosão (ou blowing-up) 66

4.2 Resolução de Singularidades 75

5 Raízes Aproximadas de Curvas **81**

5.1 Raízes Aproximadas 81

5.2 Semirraiz 92

5.3 Raízes Características 99

5.4 Resolução de Semirraízes 102

Referências Bibliográficas **109**

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar as relações entre uma curva algebroide plana irredutível, chamada de ramo plano, e suas raízes aproximadas características, que também são curvas algebroides planas que mantêm uma estreita relação com a curva inicial. Num sentido que será explicado posteriormente, elas são uma aproximação da curva.

As raízes aproximadas características, ou simplesmente raízes características, são parte de um estudo mais geral de dois conceitos: o de raízes aproximadas e o de semirraízes. O conceito de raízes aproximadas foi introduzido em 1973 por Abhyankar e Moh em [1] como suporte para o artigo seguinte [2] de 1975 sobre o Teorema do Mergulho da Reta, que segundo Popescu em [14] ficou conhecido como Abhyankar-Moh-Suzuki theorem. O termo semirraiz aparece no trabalho de Abhyankar [3] de 1989 em que ele estabelece um critério de irredutibilidade para germes de funções analíticas complexas em duas variáveis. O conceito de semirraiz, como abordado por Popescu em [14], são polinômios mônicos em $\mathbb{C}[[X]][Y]$ que definem curvas que possuem as mesmas propriedades de interseção (com uma curva dada) como as raízes características. Estas nada mais são que raízes aproximadas especiais associadas a um ramo plano e que também são semirraízes. Em [9] González Pérez define semirraízes em termos de raízes aproximadas.

Vários trabalhos exploram o conceito de raízes aproximadas no estudo de curvas como por exemplo: [1], [3], [4], [9], [10], [14], entre outros. Em [4] A'Campo e Oka descrevem a resolução mergulhada de um ramo plano por uma sequência de modificações tóricas usando raízes aproximadas. Popescu em [14] comenta que o conceito de semirraiz está intimamente relacionado com o de uma curva que possui contato maximal com um ramo dado. Não vamos explorar esta ideia neste trabalho, mas é possível provar que dado uma curva plana irredutível (f) com $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$, as curvas com gênero k e contato maximal com (f) são exatamente as k-semirraízes em coordenadas genéricas. Para maiores detalhes sobre este tema e para o estudo de raízes aproximadas num contexto mais geral, como no caso meromorfo ou em corpos de característica positiva, sugerimos ver [14] que apresenta um contexto histórico e cita vários trabalhos nestas diferentes abordagens.

Para estudarmos as raízes aproximadas precisamos conhecer de uma maneira mais geral as curvas algebroides planas e suas propriedades. Os principais conceitos que serão explorados nos primeiros quatro capítulos deste trabalho são os expoentes característicos, o semigrupo de valores e o processo de resolução de singularidades de uma curva. Ferramentas de fundamental importância no estudo de curvas planas e que, em particular, descrevem completamente a topologia de ramos planos. No último capítulo passamos a trabalhar especificamente sobre as raízes aproximadas e semirraízes de uma curva algebroide plana.

No capítulo 1, introduzimos o anel das séries de potências formais e exploramos resultados sobre este anel e seus elementos. Alguns resultados sobre homomorfismos entre anéis de séries de potências formais e sobre o corpo de Laurent também são abordados neste capítulo de uma forma mais sucinta. O principal resultado deste capítulo é o Teorema da Preparação de Weierstrass, que nos permite associar uma série de potências formal a um polinômio, desde que satisfeitas algumas condições. Finalizamos estudando a decomposição de uma série de potências em seus fatores irredutíveis.

No capítulo 2, definimos curvas algebroides planas e exploramos algumas de suas propriedades. Em seguida demonstramos o Teorema de Newton-Puiseux e o Teorema da Função Implícita que nos garantem a existência de uma parametrização de um ramo plano, também chamada parametrização de Newton-Puiseux. A partir desta parametrização especial é possível definir os expoentes característicos que nos trazem importantes informações sobre os ramos planos. Em seguida definimos o anel local de uma curva e concluímos definindo o índice de interseção entre dois elementos do anel das séries de potências.

No capítulo 3, fazemos um breve estudo sobre semigrupo dos naturais para em sequência associar a cada ramo plano um semigrupo, chamado semigrupo de valores. É possível provar que os expoentes característicos de um ramo plano e os geradores minimais do semigrupo se determinam mutuamente. Uma vez dada uma parametrização de Newton-Puiseux para um ramo plano da forma $(T^n, \varphi(T))$ em que n é a multiplicidade da curva, estamos considerando um sistema de coordenadas fixado, que vai ser chamado de coordenadas genéricas, e neste sistema definimos, por exemplo, os expoentes característicos. Popescu em [14] define os expoentes característicos e o semigrupo de valores num sistema qualquer, em que n é a ordem de regularidade da série. A Fórmula da Inversão estabelece uma relação entre os expoentes característicos no sistema genérico e num sistema qualquer. Isto será importante ao estudarmos o processo de resolução de singularidades.

No capítulo 4, introduzimos brevemente o conceito de explosão ou blowing-up no caso de curvas. Conceito este necessário para o processo de resolução de singularidades de uma curva, que nada mais é do que um processo de aplicar uma série de transformações quadráticas a uma curva com o objetivo de obter uma nova curva sem singularidade, ou seja, numa curva regular.

No capítulo 5, definimos raízes aproximadas num contexto mais geral, em seguida definimos semirraízes e finalmente o conceito de raízes aproximadas características que são raízes aproximadas especiais de uma dada curva. Provamos que os expoentes característicos e o semigrupo das raízes características ficam completamente determinados pelos da curva. Concluímos este capítulo mostrando que a resolução mergulhada minimal de uma curva determina a resolução mergulhada minimal de suas raízes aproximadas.

CAPÍTULO 1

SÉRIES DE POTÊNCIAS E O TEOREMA DA PREPARAÇÃO DE WEIERSTRASS

Neste capítulo introduzimos o anel das séries de potências formais sobre o qual definimos as curvas algebroides planas, que é o objeto de estudo deste trabalho. O principal resultado deste capítulo é o Teorema da Preparação de Weierstrass que garante que sob certas condições todo elemento f do anel $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ pode ser considerado como um polinômio em uma determinada variável, digamos em $K[[X_1, \ldots, X_{r-1}]][X_r]$, ou seja, podemos supor f um polinômio na variável X_r com coeficientes em $K[[X_1, \ldots, X_{r-1}]]$. Finalizamos estudando a decomposição de uma série de potências em seus fatores irredutíveis.

1.1 Anel das Séries de Potências

Nesta seção vamos explorar algumas propriedades do anel das séries de potências formais.

Definição 1.1. *Sejam K um corpo e $X_1, \ldots, X_r$ indeterminadas sobre K. Denotaremos por $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ o conjunto de todas as somas formais do tipo $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i$ em que P_i é um polinômio homogêneo de grau i nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$, com coeficientes em K. Cada elemento de $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é chamado de **série de potências formal** nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$, com coeficientes em K.*

Se $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} F_i$ e $g = \sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i$ são séries de potências formais, definimos que $f = g$ se, e somente se, para todo $i \in \mathbb{N}$ temos que $F_i = G_i$.

Em $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ definimos as operações de soma e produto da seguinte forma:

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (F_i + G_i) \quad \text{e} \quad fg = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} F_j G_{i-j}.$$

Com estas operações $K[[X_1,\dots,X_r]]$ é um anel comutativo com identidade, chamado anel das séries de potências formais em r indeterminadas com coeficientes em K.

Os elementos de $K[[X_1,\dots,X_r]]$ podem ser representados mais explicitamente na forma

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i_1+\cdots+i_r=i}a_{i_1,i_2,\dots,i_r}X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r},$$

com $a_{i_1,i_2,\dots,i_r}\in K$.

Pode-se provar que um elemento $p\in K[[X_1,\dots,X_r]]$ dado por $p=\sum\limits_{i=0}^{\infty}P_i$, com $P_i\in K[X_1,\dots,X_r]$ um polinômio homogêneo de grau i, é inversível se, e somente se, $P_0\neq 0$ (ver [5], [12]).

Os elementos inversíveis de $K[[X_1,\dots,X_r]]$ são chamados de **unidades**.

Definição 1.2. *Dados dois elementos $f,g\in K[[X_1,\dots,X_r]]$ dizemos que f e g são associados se existe uma unidade $u\in K[[X_1,\dots,X_r]]$ tal que $f=ug$.*

O conceito de multiplicidade, que será apresentado a seguir, tem papel importante no estudo das propriedades das séries de potências formais. É interessante saber o que se pode dizer da multiplicidade quando operamos séries de potências formais.

Definição 1.3. *Seja $f\in K[[X_1,\dots,X_r]]\backslash\{0\}$. Suponha que $f=\sum\limits_{i=0}^{\infty}F_i$, onde F_i é um polinômio homogêneo de grau i e n é o menor inteiro tal que $F_n\neq 0$. O polinômio homogêneo F_n é chamado de forma inicial de f. O inteiro não negativo n é chamado de **multiplicidade de** f e denotado por $m(f)$. Se $f=0$ definimos que $m(f)=\infty$.*

Proposição 1.4. *Dados $f,g\in K[[X_1,\dots,X_r]]$ temos que:*

(i) $m(fg)=m(f)+m(g)$;

(ii) $m(f\pm g)\geq\min\{m(f),m(g)\}$. *A igualdade ocorre sempre que* $m(f)\neq m(g)$.

Demonstração. (i) Suponhamos $f=\sum\limits_{i=n}^{\infty}F_i$ e $g=\sum\limits_{i=k}^{\infty}G_i$, ou seja, F_n e G_k são as formas iniciais de f e g, respectivamente. Pela definição do produto de séries de potências formais temos que a forma inicial de fg é F_nG_k, que é um polinômio homogêneo não nulo de grau $n+k$. Logo $m(fg)=n+k=m(f)+m(g)$.

(ii) Primeiramente consideremos $m(g)\neq m(f):=n$ e suponhamos sem perda de generalidade que $m(f)<m(g)$. Neste caso

$$f+g=\sum_{i=0}^{\infty}(F_i+G_i)=\sum_{i=n}^{\infty}(F_i+G_i).$$

Portanto, a forma inicial de $f+g$ é F_n e assim $m(f+g)=m(f)=\min\{m(f),m(g)\}$.

Agora se $m(f)=m(g)=n$ então $m(f+g)\geq n$ satisfazendo que $m(f+g)>n$ se, e somente se $F_n=-G_n$. Analogamente para o caso $f-g$. □

Observe que um elemento $f \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é inversível se, e somente se, $m(f) = 0$, já que $f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$ é inversível se, e somente se, $F_0 \neq 0$.

Proposição 1.5. *O anel $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é um domínio.*

Demonstração. Sejam $f, g \in K[[X_1, \ldots, X_r]] \backslash \{0\}$ com $m(f) = n$ e $m(g) = k$. Pela Proposição 1.4, $m(fg) = m(f) + m(g) = n + k < \infty$. Portanto, $fg \neq 0$. □

Denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ o ideal de $\mathcal{R} = K[[X_1, \ldots, X_r]]$ gerado por $X_1, \ldots, X_r$, cuja notação usual é $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \langle X_1, \ldots, X_r \rangle$. O ideal $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^i$ denota a i-ésima potência de $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e convencionamos $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^0 = \mathcal{R}$. O anel $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é um anel local, ou seja, ele possui um único ideal maximal, a saber, $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. E mais, $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^i = \{0\}$. Para uma prova destas afirmações ver, por exemplo, Proposition 1.5 de [12].

O que faremos agora é mostrar algumas propriedades específicas do anel $K[[X]]$, que nos serão úteis no decorrer deste trabalho.

Proposição 1.6. *Seja $f \in K[[X]]$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) Se $f \in K[[X]] \setminus \{0\}$ então existem um inteiro $n \geq 0$ e uma unidade $u \in K[[X]]$ tais que $f = uX^n$;

(ii) O anel $K[[X]]$ é um domínio de ideais principais e todo ideal não nulo é gerado por X^n para algum $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $K[[X]]$ é um domínio de fatoração única.

Demonstração. (i) Se f é uma unidade nada temos que fazer, porém se $m(f) = n \geq 1$, então podemos escrever

$$f = c_n X^n + c_{n+1} X^{n+1} + \cdots = X^n (c_n + c_{n+1} X + \cdots) = X^n u,$$

onde $c_j \in K, \ c_n \neq 0$ e $u = c_n + c_{n+1} X + \cdots$ é uma unidade em $K[[X]]$.
(ii) Sejam J um ideal de $K[[X]]$ e $0 \neq f \in J$ com a menor multiplicidade possível. Vamos provar que J é gerado por $f = X^n u$, com $n = m(f)$ e u é uma unidade de $K[[X]]$.

De fato, se $m(f) = 0$ então f é uma unidade e neste caso $J = K[[X]]$, o qual é gerado por 1. Caso contrário, dado $g \in J$, se $g = 0$ então $g \in \langle f \rangle$. Se $g \neq 0$, pelo item (i) $g = X^k v$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e v uma unidade em $K[[X]]$. No entanto, pela escolha de f sabemos que $k \geq n$, então

$$g = X^n (X^{k-n} v) = (X^n u)(X^{k-n}) v u^{-1} = (X^{k-n} v u^{-1}) f \in \langle f \rangle.$$

Donde concluímos que $J \subset \langle f \rangle$, assim $J = \langle f \rangle$.
(iii) Todo anel comutativo com elemento identidade, que é domínio de ideais principais é domínio de fatoração única. O resultado segue de (ii). □

1.2 Homomorfismos e o Corpo de Laurent

Na seção anterior afirmamos que $\mathcal{R} = K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é um anel comutativo com identidade, com as operações de adição e multiplicação definidas anteriormente. Naturalmente com as operações do corpo K temos que $\mathcal{R}$ é uma K-álgebra. O que faremos nessa seção é explorar homomorfismos entre anéis de séries de potências.

O anel $\mathcal{R}$ pode ser visto também como um espaço topológico, munido da topologia induzida pela métrica

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathcal{R}\times\mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & d(f,g) = \rho^{-m(f-g)} \end{array} \tag{1.1}$$

em que $\rho > 1$ é um número real e $m(f-g)$ é a multiplicidade de $f-g$. Mais ainda, $\mathcal{R}$ é um espaço completo. Para as demonstrações destes resultados ver [12].

Sejam $\mathcal{R} = K[[X_1, \ldots, X_r]]$ e $\mathcal{S} = K[[Y_1, \ldots, Y_s]]$. Denotamos respectivamente por $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ seus ideais maximais. Temos os seguintes resultados:

Proposição 1.7. *Seja $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}$ um homomorfismo de K-álgebras. Então $T(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e além disso :*

(i) T é contínua;

(ii) Existem $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ tais que $T = S_{g_1,\ldots,g_s}$, em que

$$\begin{array}{rccl} S_{g_1,\ldots,g_s}: & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & f & \longmapsto & S_{g_1,\ldots,g_s}(f) = f(g_1, \ldots, g_s), \end{array}$$

chamada de aplicação de substituição.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [12]. □

A proposição acima garante que todo homomorfismo $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}$ é uma aplicação de substituição, isto é, existem $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ tais que $T = S_{g_1,\ldots,g_s}$. Na verdade $g_i = T(Y_i)$ para $i = 1, \ldots, s$. Vejamos quais condições devemos impor a $g_1, \ldots, g_s$ para garantir que T seja um K-isomorfismo.

Inicialmente observemos que um K-isomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{R}$ preserva multiplicidade. De fato, se $P_i \in K[Y_1, \ldots, Y_s]$ é um polinômio homogêneo de grau i podemos escrever

$$P_i = \sum_{i_1+\cdots+i_s=i} a_{i_1,\ldots,i_s} Y_1^{i_1} \cdots Y_s^{i_s}.$$

Então $T(P_i) = \sum\limits_{i_1+\cdots+i_s=i} a_{i_1,\ldots,i_s} g_1^{i_1} \cdots g_s^{i_s}$, ou seja, se $P_i \neq 0$ então $T(P_i) \neq 0$, e assim $m(T(f)) \geq m(f)$.

Como T é K-isomorfismo então existe o seu inverso T^{-1} donde segue que

$$m(f) = m(T^{-1}T(f)) \geq m(T(f)),$$

o que implica que $m(f) = m(T(f))$.

Nos levando a concluir que se $T = S_{g_1,\ldots,g_s}$ é um K-isomorfismo e $T(Y_i) = g_i$, então $m(g_i) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, s$.

Sejam $L_1, \ldots, L_s$ as formas iniciais respectivamente de $g_1, \ldots, g_s$. Já observamos que estes são polinômios homogêneos de grau 1, nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$. Suponhamos que exista uma relação de dependência K-linear não trivial, ou seja, que existam $a_1, \ldots, a_s \in K$ não todos nulos tais que

$$a_1L_1 + \cdots + a_sL_s = 0.$$

Então se tomarmos $f = a_1Y_1 + \cdots + a_sY_s$, como $T(Y_i) = L_i + \cdots$ para $i = 1, \ldots, s$, temos que $T(f) = a_1L_1 + \cdots + a_sL_s + \cdots$, assim

$$m(T(f)) = m(S_{g_1,\ldots,g_s}(f)) > m(f),$$

contrariando o fato de $S_{g_1,\ldots,g_s}$ ser um K-isomorfismo. Consequentemente, uma condição necessária para que $S_{g_1,\ldots,g_s}$ seja um K-isomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{R}$ é que as formas iniciais dos $g_i's$ sejam K-linearmente independentes. Isso mostra ainda que se T é um K-isomorfismo entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ então $s \leq r$. E considerando T^{-1} temos a condição de que $r \leq s$, de onde concluímos que $r = s$.

Tendo feito estas observações obtemos condições necessárias para que $S_{g_1,\ldots,g_s}$ seja um K-isomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{R}$. Nosso objetivo agora é provar que estas condições também são suficientes e para isso precisamos do seguinte lema.

Lema 1.8. *Um subanel A de $\mathcal{R}$ é denso em $\mathcal{R}$ se, e somente se, dado qualquer polinômio homogêneo $P \in K[X_1, \ldots, X_r]$, existe um elemento em A cuja forma inicial é P.*

Demonstração. Ver [12]. □

Proposição 1.9. *Sejam os elementos $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{R}$ cujas respectivas formas iniciais lineares $L_1, \ldots, L_r$ são K-linearmente independentes. Então $S_{g_1,\ldots,g_r} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um isomorfismo de K-álgebras.*

Demonstração. Começamos observando que se $L_1, \ldots, L_r$ são K-linearmente independentes então $T = S_{L_1,\ldots,L_r}$ é um K-isomorfismo. De fato, se $L_i = a_{i,1}X_1 + \cdots + a_{i,r}X_r$ com $a_i \in K$ para $i = 1, \ldots, r$, tome a matriz $(a_{i,j})$. Então a inversa de T é $S_{L'_1,\ldots,L'_r}$, em que $L'_i = b_{i,1}Y_1 + \cdots + b_{i,r}Y_r$ e $(b_{i,j})$ é a matriz inversa de $(a_{i,j})$. Agora mostraremos que $S_{g_1,\ldots,g_r} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}$ é injetiva, Note que se $0 \neq f = P_n + P_{n+1} + \cdots$, onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i e $P_n \neq 0$, então o termo inicial de $S_{g_1,\ldots,g_r}(f)$ é $S_{L_1,\ldots,L_r}(P_n)$. De fato, como $T = S_{L_1,\ldots,L_r}$ é um K-isomorfismo e $0 \neq P_n = T^{-1}(T(P_n))$ temos que $T(P_n) \neq 0$. E mais se

$$P_n = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} a_{i_1,\ldots,i_r} {X_1}^{i_1} \cdots {X_r}^{i_r},$$

ao menos um dos coeficientes $a_{i_1,\ldots,i_r}$ é não nulo, pois $P_n \neq 0$.

Mas $S_{g_1,\ldots,g_r}(P_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_r} {g_1}^{i_1} \cdots {g_r}^{i_r}$ e como $S_{g_1,\ldots,g_r}$ é homomorfismo e $L_1, \ldots, L_r$ são polinômios de grau um temos que

$$S_{g_1,\ldots,g_r}(P_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} a_{i_1,\ldots,i_r} g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r} = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} a_{i_1,\ldots,i_r} {L_1}^{i_1} \cdots {L_r}^{i_r} + \cdots .$$

Logo, o termo inicial de $S_{g_1,\ldots,g_r}(f)$ é $S_{L_1,\ldots,L_r}(P_n)$, pois o mesmo é não nulo.

Disso temos que $m(S_{g_1,\ldots,g_r}(f)) = m(S_{L_1,\ldots,L_r}(f)) = m(f) \neq \infty$, o que implica a injetividade de $S_{g_1,\ldots,g_r}$.

Para a sobrejetividade mostraremos que a imagem $A = K[[g_1, \ldots, g_r]]$ de $S_{g_1,\ldots,g_r}$ é fechado e denso em $\mathcal{R}$, pois dessa forma $\overline{A} = \mathcal{R}$, mas se A é fechado então $\overline{A} = A$.

Seja $P \in K[X_1, \ldots, X_r]$ um polinômio homogêneo. Considere $Q = S^{-1}_{L_1,\ldots,L_r}(P) \in \mathcal{S}$. Então $P = S_{L_1,\ldots,L_r}(Q)$ é a forma inicial de $S_{g_1,\ldots,g_r}(Q) \in A$. Pelo Lema 1.8, temos que A é denso em $\mathcal{R}$.

Resta provar que A é fechado em $\mathcal{R}$. Seja $h \in \mathcal{R}$ tal que $h = \lim_i f_i(g_1, \ldots, g_r)$, onde (f_i) é uma sequência com $f_i \in \mathcal{R}$. Devemos provar que $h \in A$.

Acabamos de mostrar que $m(S_{g_1,\ldots,g_r}(f)) = m(f)$, como $S_{g_1,\ldots,g_r}$ é um homomorfismo temos que

$$m(f_i - f_j) = m(S_{g_1,\ldots,g_r}(f_i - f_j)) = m(S_{g_1,\ldots,g_r}(f_i) - S_{g_1,\ldots,g_r}(f_j)),$$

donde segue que (f_i) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{R}$ (ver [12]). Portanto, existe $f \in \mathcal{R}$ tal que $f = \lim_i f_i$. Pela Proposição 1.7, $S_{g_1,\ldots,g_r}$ é contínua, implicando que

$$h = \lim_i f_i(g_1, \ldots, g_r) = \lim_i S_{g_1,\ldots,g_r}(f_i) = S_{g_1,\ldots,g_r}\left(\lim_i f_i\right) = S_{g_1,\ldots,g_r}(f) \in A.$$

$\square$

Se T é um homomorfismo de K-álgebras, então T é completamente determinado pelos elementos $T(Y_1), \ldots, T(Y_s)$, e para todo $f(Y_1, \ldots, Y_s) \in \mathcal{S}$ temos

$$T(f(Y_1, \ldots, Y_s)) = f(T(Y_1), \ldots, T(Y_s)).$$

É possível provar ainda que um K-endomorfismo de $\mathcal{R}$ é um automorfismo se, e somente se, preserva multiplicidade.

Exemplo 1.10. *Pela Proposição anterior,* $T : K[[X,Y]] \longrightarrow K[[X,Y]]$ *é um* K*-isomorfismo se, e somente se,* $T(X) = aX + bY + \cdots$ *e* $T(Y) = cX + dY + \cdots$ *satisfazem* $ad - bc \neq 0$.

Para o que segue vamos precisar analisar algumas propriedades do corpo de Laurent.

Denotaremos por $K((X))$ o corpo de frações do anel das séries de potências formais em uma indeterminada $K[[X]]$.

Dado um elemento $h = \frac{f}{g} \in K((X)) \setminus \{0\}$, podemos escrever $f = X^n u$ e $g = X^k v$ com u e v unidades em $K[[X]]$ e $n, k \in \mathbb{N}$. Assim temos

$$h = X^{n-k}(uv^{-1}) = X^r w,$$

onde $r = n - k \in \mathbb{Z}$ e w é uma unidade em $K[[X]]$.

Isto mostra que um elemento de $K((X))$ pode ser escrito na forma

$$a_{-r}X^{-r} + a_{-r+1}X^{-r+1} + \cdots + a_0 + a_1 X + \cdots ,$$

onde $r \in \mathbb{N}$ e $a_i \in K$ para todo $i \geq -r$. Os elementos de $K((X))$ são chamados séries de potências formais de Laurent.

Escrevendo $h = X^r w$, com $r \in \mathbb{Z}$ e $w \in K[[X]]$ uma unidade, definimos que a multiplicidade de h é $m(h) = r$ e se $h = 0$, então $m(h) = \infty$.

Proposição 1.11. *Se a aplicação* $T : K((X)) \longrightarrow K((X))$ *é um* K*-homomorfismo, então* $T(X) \in K[X]$, *com* $T(0) = 0$.

Demonstração. Como T é um homomorfismo de $K((X))$ segue que $T(X) = X^r u(X)$ para algum $r \in \mathbb{Z}$ e alguma unidade $u \in K[[X]]$. Note que $r > 0$, pois caso contrário

$$T(X^2 + X^3 + \cdots) = T(X)^2 + T(X)^3 + \cdots = X^{2r}u(X)^2 + X^{3r}u(X)^3 + \cdots$$

é um elemento com infinitos termos com potência negativa ou $r = 0$, e em ambos os casos $T(X^2 + X^3 + \cdots)$ não pertence à $K((X))$. Por outro lado, se $u(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ com $a_0 \neq 0$ então $T(X^{-1}) = (X^{-1})^r u(X^{-1}) = X^{-r} \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^{-i}$.

Como $T(X^{-1}) = (T(X))^{-1} \in K((X))$ devemos ter que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^{-i}$ é uma soma finita, logo $u(X) \in K[X]$. E $T(0) = 0$ pois $r > 0$. □

Corolário 1.12. *Se* $T : K((X)) \longrightarrow K((X))$ *é um automorfismo, então* $T(X) = aX$ *para algum* $a \in K \setminus \{0\}$.

Demonstração. Se T é um automorfismo, então $T(X) = P(X) \in K[X]$, com $P(0) = 0$. Por outro lado temos que $T^{-1}(X) = Q(X) \in K[X]$, assim $X = P(Q(X)) = Q(P(X))$.

Donde concluímos que P e Q são polinômios de grau 1, e da condição $P(0) = Q(0) = 0$, segue que $P(X) = aX$ para algum $a \in K \setminus \{0\}$. $\square$

1.3 O Teorema da Preparação de Weierstrass

Nesta seção, nosso foco é a demonstração do Teorema da Divisão e do Teorema da Preparação de Weierstrass. Este último resultado nos permite enxergar, a menos de um produto por uma unidade, uma série de potências como um polinômio em uma das variáveis, conceito essencial no estudo de curvas algebroides.

Definição 1.13. *Vamos denotar a r-upla $(0, \ldots, 0, X_j, 0, \ldots, 0)$ por $\overline{X_j}$. Dizemos que $f \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é X_j-regular de ordem k, se $f(\overline{X_j})$ é divisível por X_j^k mas não é por X_j^{k+1}.*

Dizemos que f é X_j-regular se é X_j-regular de ordem $m(f)$. Neste caso, $m\left(f\left(\overline{X_j}\right)\right) = m(f)$.

Se $f \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é X_j-regular de ordem k, podemos escrever

$$f(\overline{X_j}) = X_j^k u(X_j),$$

onde u é uma unidade em $K[[X_j]]$.

Lema 1.14. *Dados $f, g \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ temos que fg é X_j-regular de alguma ordem se, e somente se, f e g são X_j-regulares de alguma ordem.*

Demonstração. Suponha que fg é X_j-regular de ordem k, então $fg\left(\overline{X_j}\right) = X_j^k w(X_j) \neq 0$ para alguma unidade $w \in K[[X_j]]$. Como $fg\left(\overline{X_j}\right) = f\left(\overline{X_j}\right) g\left(\overline{X_j}\right)$ temos que $f(\overline{X_j}), g(\overline{X_j}) \neq 0$. Pela Proposição 1.6, podemos escrever $f\left(\overline{X_j}\right) = X_j^n u(X_j)$ e $g\left(\overline{X_j}\right) = X_j^l v(X_j)$, onde u e v são unidades em $K[[X_j]]$. Logo

$$X_j^k w(X_j) = X_j^{n+l} u(X_j) v(X_j).$$

Além disso, temos que $X_j^{n+1} \nmid f\left(\overline{X_j}\right)$, pois se $X_j^{n+1} \mid f\left(\overline{X_j}\right)$ como X_j^l divide $g\left(\overline{X_j}\right)$ temos que $X_j^{n+l+1} \mid fg(\overline{X_j})$, contrariando a hipótese. O mesmo argumento mostra que $X_j^{l+1} \nmid g\left(\overline{X_j}\right)$. Portanto f e g são X_j-regulares de ordens n e l, respectivamente.

Reciprocamente, se f e g são X_j-regulares de ordens n e l, respectivamente então

$$fg\left(\overline{X_j}\right) = f\left(\overline{X_j}\right) g\left(\overline{X_j}\right) = X_j^n u(X_j) X_j^l v(X_j) = X_j^{n+l} uv,$$

com u e v unidades em $K[[X_j]]$. Assim, X_j^{n+l} divide $fg\left(\overline{X_j}\right)$. Como X_j não divide uv segue que X_j^{n+l+1} não divide $fg\left(\overline{X_j}\right)$. Portanto fg é X_j-regular de ordem $n + l$. $\square$

Vamos denotar por $\mathcal{R} = K[[X_1, \dots, X_r]]$, $\mathcal{R}' = K[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$ e por $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$ o ideal maximal do anel $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, respectivamente.

A demonstração do teorema a seguir foi retirada de [13].

Teorema 1.15. *(**Teorema da Divisão**) Seja $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$, X_r-regular de ordem k. Dado qualquer $g \in \mathcal{R}$, existem $q \in \mathcal{R}$ e $p \in \mathcal{R}'[X_r]$ unicamente determinados por f e g, com $p = 0$ ou grau de p com relação a X_r menor que k, tais que*

$$g = fq + p.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre o número de indeterminadas.

Para $\mathcal{R} = K[[X]]$ temos o seguinte:

Dados $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e $g \in \mathcal{R}$ escrevemos $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} F_i X^i$ e $g = \sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i X^i$. Como f é X-regular de ordem k então $m(f) = k$, assim podemos reescrever $f = \sum\limits_{i=k}^{\infty} F_i X^i$, com $F_k \neq 0$.

Supondo $q = \sum\limits_{i \geq 0} Q_i X^i$ e $p = \sum\limits_{i \geq 0} P_i X^i$ satisfazendo $g = fq + p$ devemos ter

$$\begin{array}{rcl} G_0 & = & F_0 Q_0 + P_0 \\ G_1 & = & F_0 Q_1 + F_1 Q_0 + P_1 \\ & \vdots & \\ G_{k-1} & = & F_0 Q_{k-1} + F_1 Q_{k-2} + \cdots + F_{k-1} Q_0 + P_{k-1} \\ G_k & = & F_0 Q_k + F_1 Q_{k-1} + \cdots + F_k Q_0 + P_k \\ & \vdots & \end{array} \tag{1.2}$$

Como $F_0 = \cdots = F_{k-1} = 0$ temos que $P_i = G_i$ para $i = 0, \dots, k-1$. Assim, definimos $p = G_0 + G_1 X + \cdots + G_{k-1} X^{k-1}$, $P_j = 0$ para todo $j \geq k$ e para $i \geq 0$

$$Q_i = \frac{G_{k+i} - (F_{k+1} Q_{i-1} + \cdots + F_{k+i} Q_0)}{F_k}.$$

Resta provar que q e p são unicamente determinados por f e g. Suponha que existam $q' \in K[[X]]$ e $p' \in K[X]$ tais que $g = fq' + p'$. Então

$$fq' + p' = fq + p \;\Rightarrow\; f(q' - q) = p - p'.$$

Se $p \neq p'$ então devemos ter $q \neq q'$. Isso implica que $m(f(q' - q)) = m(p - p')$, ou seja, $k + m(q' - q) = m(p - p')$. No entanto, $k + m(q' - q) \geq k$ e $m(p - p') < k$, o que nos leva a uma contradição. Portanto, $p = p'$ e consequentemente $q = q'$.

Suponha que o resultado seja válido para $r - 1$ indeterminadas.

Primeiramente observamos que dado $f \in \mathcal{R}$, podemos rearranjar seus termos de forma a escrever

$$f = F_0(X_2, \dots, X_r) + F_1(X_2, \dots, X_r)X_1 + F_2(X_2, \dots, X_r){X_1}^2 + \dots.$$

Para simplificar a notação escrevemos $f = F_0 + F_1X_1 + F_2{X_1}^2 + \cdots$ e $g = G_0 + G_1X_1 + G_2{X_1}^2 + \cdots$, com $F_i,\ G_i \in K[[X_2, \dots, X_r]]$ para todo $i \geq 0$.

Assim, nosso problema é determinar uma série $q = Q_0 + Q_1X_1 + Q_2{X_1}^2 + \dots$ e um polinômio $p = P_0 + P_1X_1 + \cdots + P_{k-1}X_1^{k-1}$, com $P_i \in K[[X_2, \dots, X_{r-1}]]$ tais que $g = fq + p$, ou seja, precisamos resolver um sistema como em (1.2).

Como $0 \neq f(0, \dots, 0, X_r) = F_0(0, \dots, 0, X_r)$ e $m(f(0, \dots, 0, X_r)) = k$ temos que $m(F_0(0, \dots, 0, X_r)) = k$. Agora, $F_0(X_2, \dots, X_r)$ é uma série em $r-1$ indeterminadas e X_r-regular de ordem k, logo pela hipótese de indução, existem únicos $Q_0 \in K[[X_2, \dots, X_r]]$ e $P_0 \in K[[X_2, \dots, X_{r-1}]][X_r]$ tais que $G_0 = F_0Q_0 + P_0$, satisfazendo que $P_0 = 0$ ou grau de P_0 em relação a X_r é menor que k.

Novamente temos que $G_1 - F_1Q_0 \in K[[X_2, \dots, X_r]]$. Então por indução existem únicos $Q_1 \in K[[X_2, \dots, X_r]]$ e $P_1 \in K[[X_2, \dots, X_{r-1}]][X_r]$ tais que $G_1 - F_1Q_0 = F_0Q_1 + P_1$, com $P_1 = 0$ ou grau de P_1 em relação a X_r menor que k. Continuando esse processo obtemos

$$G_n - (F_1Q_{n-1} + \cdots + F_nQ_0) = F_0Q_n + P_n.$$

Definimos $q = Q_0 + Q_1X_1 + Q_2{X_1}^2 + \cdots$ e $p = P_0 + P_1X_1 + P_2{X_1}^2 + \cdots + P_{k-1}{X_1}^{k-1}$, com $P_i \in K[[X_2, \dots, X_{r-1}]][X_r]$ para $i = 0, \dots, k-1$ e $P_i = 0$ para $i \geq k$. Por construção, as séries p e q são únicas satisfazendo $p = 0$ ou o grau de p em relação a X_r é menor que k. Logo, $p \in \mathcal{R}'[X_r]$. $\square$

Exemplo 1.16. *Considere $f, g \in \mathbb{R}[[X, Y]]$, onde $f = XY + Y^3 + XY^3 + Y^5$ e $g = Y^3$. Primeiro observemos que f é Y-regular de ordem 3, pois $f(0, Y) = Y^3 + Y^5$ que é divisível por Y^3, mas não é por Y^4.*

Agora vamos determinar $q \in \mathbb{R}[[X, Y]]$ e $p \in \mathbb{R}[[X]][Y]$ de forma que $g = fq + p$. Sejam $f = F_0 + F_1 + XY + Y^3 + XY^3 + Y^5$ e $g = G_0 + G_1 + G_2 + Y^3$ com $F_0 = F_1 = 0$ e $G_0 = G_1 = G_2 = 0$. Temos que

$$G_0 = F_0Q_0 + P_0 \quad e \quad G_1 = F_0Q_1 + F_1Q_0 + P_1,$$

o que implica $P_0 = G_0 = 0$ e $P_1 = G_1 = 0$. De

$$G_2 = F_0Q_2 + F_1Q_1 + F_2Q_0 + P_2 = Q_0XY + P_2$$

temos que $P_2 = -XYQ_0$. Pela demonstração do Teorema da Divisão temos que $P_3 =$

$P_4 = \cdots = 0$. E ainda

$$Y^3 = G_3 = F_0Q_3 + F_1Q_2 + F_2Q_1 + F_3Q_0 + P_3 = XYQ_1 + Y^3Q_0.$$

Assim, $Q_0 = 1, Q_1 = 0$ e obtemos $P_2 = -XY$. Continuando o processo

$$0 = G_4 = F_0Q_4 + F_1Q_3 + F_2Q_2 + F_3Q_1 + F_4Q_0 = XYQ_2 + XY^3,$$

donde concluímos que $Q_2 = -Y^2$. Temos

$$0 = G_5 = F_0Q_5 + F_1Q_4 + F_2Q_3 + F_3Q_2 + F_4Q_1 + F_5Q_0 = XYQ_3 - Y^3(Y^2) + Y^5,$$

ou seja, $Q_3 = 0$. E

$$G_6 = F_0Q_6 + F_1Q_5 + F_2Q_4 + F_3Q_3 + F_4Q_2 + F_5Q_1 + F_6Q_0 = XYQ_4 + XY^3(-Y^2),$$

o que implica $Q_4 = Y^4$. Não prosseguiremos a determinação da série Q, pois ela pode ser infinita. Portanto $p = -XY$ e $q = 1 - Y^2 + Y^4 + \cdots$.

O próximo teorema permite que passemos a estudar uma série regular em uma indeterminada sob o ponto de vista do estudo de polinômios.

Teorema 1.17. ***(Teorema da Preparação de Weierstrass)*** *Seja $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ uma série X_r-regular de ordem n. Então existem uma unidade $u \in \mathcal{R}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$, unicamente determinados por f, tais que*

$$fu = X_r^n + A_1X_r^{n-1} + \cdots + A_{n-1}X_r + A_n.$$

Mais ainda, se f é regular em X_r então $m(A_i) \geq i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Seja $g = X_r^n$. Pelo teorema anterior existem $u \in \mathcal{R}$ e $p \in \mathcal{R}'[X_r]$ tais que $g = fu + p$, com $p = 0$ ou o grau de p em X_r é menor que n. Como p é um polinômio em X_r podemos escrever $-p = A_1X_r^{n-1} + \cdots + A_{n-1}X_r + A_n$, com $A_i \in \mathcal{R}'$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, $fu = g - p = X_r^n + A_1X_r^{n-1} + \cdots + A_{n-1}X_r + A_n$. Resta provar que u é inversível. De fato,

$$(fu)(0, \ldots, 0, X_r) \;=\; X_r^n + A_1(0, \ldots, 0)X_r^{n-1} + \cdots + A_n(0, \ldots, 0). \qquad (1.3)$$

Como f é X_r-regular de ordem n temos $f(0, \ldots, 0, X_r) = X_r^n v(X_r)$, com $v \in K[[X_r]]$ uma unidade.

Além disso, $A_i(0, \ldots, 0) = 0$ pois caso contrário teríamos

$$m(X_r^n + A_1(0, \ldots, 0)X_r^{n-1} + \cdots + A_n(0, \ldots, 0)) < n,$$

enquanto $m((fu)(0,\dots,0,X_r)) = n + m(u(0,\dots,0,X_r)) \geq n$, o que nos levaria a uma contradição. De (1.3) temos que $(fu)(0,\dots,0,X_r) = X_r^n$, ou seja,

$$X_r^n v(X_r) u(0,\dots,0,X_r) \quad = \quad X_r^n,$$

o que implica $v(X_r)u(0,\dots,0,X_r) = 1$ e portanto u é uma unidade.

E ainda se f é X_r-regular, ou seja, f é X_r-regular de ordem $n = m(f)$, então

$$\begin{aligned} n &= m(fu) = \min\{m(X_r^n), m(A_1X_r^{n-1}), \dots, m(A_{n-1}X_r), m(A_n)\} \\ &= \min\{n, m(A_1) + n - 1, \dots, m(A_n)\}. \end{aligned}$$

Portanto $m(A_i) + n - i \geq n$, logo $m(A_i) \geq i$ para $i = 1, \dots, n$. □

Corolário 1.18. ***(Teorema da Função Implícita)*** *Seja $f \in \mathcal{R}$ tal que $f(0,\dots,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial X_r}(0,\dots,0) \neq 0$. Então existe $\varphi(X_1,\dots,X_{r-1}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$ tal que*

$$f(X_1,\dots,X_{r-1},\varphi(X_1,\dots,X_{r-1})) = 0.$$

Demonstração. Por hipótese $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e a condição $\frac{\partial f}{\partial X_r}(0,\dots,0) \neq 0$ é equivalente a dizer que f é regular em X_r de ordem 1. Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass existem $u \in \mathcal{R}$ unidade e $A_1 \in \mathcal{R}'[X_r]$ tais que $fu = X_r + A_1$. Definindo $\varphi(X_1,\dots,X_{r-1}) = -A_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$ temos

$$fu(X_1,\dots,X_{r-1},\varphi(X_1,\dots,X_{r-1})) = \varphi(X_1,\dots,X_{r-1}) + A_1 = 0.$$

Como u é uma unidade, portanto não nula e $\mathcal{R}$ é um domínio de integridade temos que $f(X_1,\dots,X_{r-1},\varphi(X_1,\dots,X_{r-1})) = 0$. □

Os próximos resultados mostram que a condição de f ser regular em alguma indeterminada não é tão restritivo como pode parecer, pois mostraremos que no caso em que K é infinito podemos determinar um automorfismo linear de forma que f se torne regular em uma indeterminada escolhida. No caso em que K não é infinito não podemos garantir a existência de um automorfismo linear, embora seja possível determinar um automorfismo que torne f regular em uma de suas indeterminadas.

Lema 1.19. *Consideremos K um corpo infinito. Dada uma família finita $\mathcal{F} = \{P_1 \dots, P_s\}$ de polinômios homogêneos não nulos em $K[Y_1,\dots,Y_r]$, existe um isomorfismo linear $T : K[X_1,\dots,X_r] \longrightarrow K[Y_1,\dots,Y_r]$ tal que para cada $P_i \in \mathcal{F}$ de grau n, existe uma constante $c_{P_i} \in K \setminus \{0\}$ tal que*

$$P_i(T(X_1,\dots,X_r)) = c_{P_i}{X_r}^n + \text{ (termos de grau menor em } X_r).$$

Demonstração. Sendo $\mathcal{F}$ finita e K um corpo infinito, podemos determinar $(a_1, \ldots, a_r)$ um elemento de K^r tal que $P_i(a_1, \ldots, a_r) \neq 0, \ \forall i = 1, \ldots, s$. Para tanto, basta fixarmos $a_2, \ldots, a_r$ digamos com $a_r \neq 0$ e avaliando cada elemento de $\mathcal{F}$ em $a_2, \ldots, a_r$ obtemos uma família finita de polinômios de $K[X_1]$. Se algum dos polinômios for nulo mudamos a $(r-1)$-upla. Como K é infinito e cada polinômio em $K[X_1]$ tem um número finito de raízes, existe $a_1 \in K$ que não é raiz de nenhum desses polinômios. Desta forma $P_i(a_1, \ldots, a_r) \neq 0, \ \forall i = 1, \ldots, s$. Considere agora o isomorfismo linear T definido por:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{r-1} \\ Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{r-1} \\ X_r \end{pmatrix}.$$

Assim, se $P_i = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} c_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_r^{i_r}$ é um polinômio homogêneo de grau n, então

$$\begin{aligned} P_i(T(X_1, \ldots, X_r)) &= \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} c_{i_1,\ldots,i_r} (X_1 + a_1 X_r)^{i_1} (X_2 + a_2 X_r)^{i_2} \cdots (a_r X_r)^{i_r} \\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} c_{i_1,\ldots,i_r} {a_1}^{i_1} \cdots {a_r}^{i_r} X_r^n + (\text{termos de grau menor em } X_r) \\ &= P_i(a_1, \ldots, a_r) {X_r}^n + (\text{termos de grau menor em } X_r). \end{aligned}$$

O resultado segue tomando $c_{P_i} = P_i(a_1, \ldots, a_r)$. □

Corolário 1.20. *Sejam K um corpo infinito e $\mathcal{F}$ uma família finita de elementos não nulos de $K[[X_1, \ldots, X_r]]$. Então existe um automorfismo linear T de $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ tal que $f \circ T$ é X_r-regular para todo $f \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Esse resultado é consequência imediata do lema anterior. □

Corolário 1.21. *Seja $f \in \mathcal{R} \backslash \{0\}$ de multiplicidade n. Então existem um K-automorfismo T de $\mathcal{R}$, uma unidade $u \in \mathcal{R}$ e $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}' = K[[X_1, \ldots, X_{r-1}]]$ tais que $m(A_i) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e*

$$T(f)u = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Demonstração. Como f é não nula, pelo corolário anterior existe um K-automorfismo T de $\mathcal{R}$ tal que $T(f)$ é regular com respeito a X_r. Assim pelo Teorema de Preparação de Weierstrass temos que existem uma unidade $u \in \mathcal{R}$ e $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}'$ satisfazendo

$$T(f)u = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + A_2 X_2^{n-2} + \cdots + A_n,$$

com $m(A_i) \geq i$. □

Nas hipóteses do corolário acima dizemos que o elemento

$$X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + A_2 X_2^{n-2} + \cdots + A_n$$

é a preparação a Weierstrass da série f.

Exemplo 1.22. *A série $f = XYZ \in \mathbb{C}[[X,Y,Z]]$ não é regular em nenhuma das indeterminadas. Pelo Corolário 1.21 definindo a aplicação $T : \mathbb{C}[[X,Y,Z]] \longrightarrow \mathbb{C}[[X,Y,Z]]$ da seguinte forma $T(X) = X + Z,\ T(Y) = Y + Z$ e $T(Z) = Z$ temos que $f(T(X,Y,Z))$ é Z-regular de ordem 3. Claramente T é um automorfismo e mais*

$$f(T(X,Y,Z)) \quad = \quad (X+Z)(Y+Z)Z = Z^3 + (X+Y)Z^2 + XYZ.$$

Assim, $Z^3 + (X+Y)Z^2 + XYZ$ é a preparação a Weierstrass da série f.

Finalizamos esta seção introduzindo os conceitos de pseudo-polinômio e de polinômio de Weierstrass. Vamos verificar que tais propriedades de uma série se estendem aos seus fatores irredutíveis.

Definição 1.23. *Um elemento $P \in \mathcal{R}$ é dito um* **pseudo-polinômio** *em X_r se P é da forma*

$$P(X_1, \ldots, X_r) = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \cdots + A_n \in \mathcal{R}'[X_r]$$

tal que $m(A_i) \geq 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$, com $n \geq 1$.

Um pseudo-polinômio é chamado **polinômio de Weierstrass** *se $m(A_i) \geq i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Lema 1.24. *Sejam $F_1, \ldots, F_s$ polinômios mônicos em $\mathcal{R}'[X_r]$. Então $F_1 \cdots F_s$ é um pseudo-polinômio se, e somente se, F_i é um pseudo-polinômio para cada $i = 1, \ldots, s$.*

Demonstração. É suficiente provarmos o resultado para o caso $s = 2$.

Sejam $F_1 = X_r^l + A_1 X_r^{l-1} + \cdots + A_l$ e $F_2 = X_r^n + B_1 X_r^{n-1} + \cdots + B_n$ tais que $A_i,\ B_j \in \mathcal{R}'$ para todo $i = 1, \ldots, l$ e para todo $j = 1, \ldots, n$. Então

$$\begin{aligned} F_1 F_2 \quad = \quad & X_r^{l+n} + (A_1 + B_1) X_r^{l+n-1} + \cdots + \\ & (A_i + A_{i-1}B_1 + \cdots + A_1 B_{i-1} + B_i) X_r^{l+n-i} + \cdots + A_l B_n. \end{aligned}$$

Se F_1 e F_2 são pseudo-polinômios então para cada $i = 1, \ldots, l+n$,

$$m\left(\sum_{j=0}^{i} A_{i-j} B_j\right) \geq \min\{m(A_{i-j}) + m(B_j); j \in \{0, \ldots, i\}\} \geq 1,$$

em que $A_0 = B_0 = 1$. E neste caso $F_1 F_2$ é um pseudo-polinômio.

Reciprocamente, se F_1F_2 é um pseudo-polinômio, suponhamos sem perda de generalidade, que F_1 não seja um pseudo-polinômio. Então devemos ter $m(A_i) = 0$ para algum i com $1 \leq i \leq l$.

O que implica que $m\left(\sum_{j=0}^{i} A_{i-j}B_j\right) = 0$, contrariando o fato de que F_1F_2 é um pseudo-polinômio. Portanto, F_1 e F_2 são pseudo-polinômios. $\square$

Analogamente pode-se provar que $F_1 \cdots F_s$ é um polinômio de Weierstrass se, e somente se, cada F_i é um polinômio de Weierstrass para $i = 1, \ldots, s$.

Lema 1.25. *Seja $F \in \mathcal{R}'[X_r]$ um pseudo-polinômio. Então F é irredutível em $\mathcal{R}$ se, e somente se, F é irredutível em $\mathcal{R}'[X_r]$.*

Demonstração. Suponha que F é redutível em $\mathcal{R}$. Então existem não unidades F_1 e F_2 em $\mathcal{R}$ tais que $F = F_1F_2$. Pelo lema anterior temos que F_1 e F_2 são pseudo-polinômios.

Como F é um pseudo-polinômio então é X_r-regular de alguma ordem e portanto, F_1 e F_2 também são X_r-regulares de ordem maior ou igual a 1.

Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, existem unidades $U_1, U_2 \in \mathcal{R}$ tais que $U_1F_1 = H_1$ e $U_2F_2 = H_2$, com $H_1, H_2 \in \mathcal{R}'[X_r]$. Considerando $U = U_1U_2$ temos que

$$FU = (U_1F_1)(U_2F_2) = H_1H_2.$$

Entretanto H_1 e H_2 são pseudo-polinômios então FU é um pseudo-polinômio. E ainda como $F \cdot 1 = F = U^{-1}H_1H_2$, segue da unicidade do Teorema da Preparação de Weierstrass que $U = 1$ e portanto $F = H_1H_2$, ou seja, F é redutível em $\mathcal{R}'[X_r]$.

A recíproca é imediata. $\square$

Observamos que o resultado acima é válido se considerarmos F um polinômio de Weierstrass.

Teorema 1.26. *O anel $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é um domínio de fatoração única.*

Demonstração. Para uma prova deste resultado ver por exemplo [12].

$\square$

Corolário 1.27. *Suponha que $F \in \mathcal{R}'[X_r]$ é um pseudo-polinômio com respeito a indeterminada X_r. Seja $F = F_1 \cdots F_s$ a decomposição de F em fatores irredutíveis de $\mathcal{R}$. Então podemos escolher uma decomposição em que cada F_i seja um pseudo-polinômio.*

Demonstração. Se $F = F_1 \cdots F_s$ é a decomposição de F em irredutíveis de $\mathcal{R}$, então estes fatores também são irredutíveis em $\mathcal{R}'[X_r]$. Sendo F mônico, podemos supor que cada F_i também é, dessa forma cada F_i é um pseudo-polinômio. $\square$

CAPÍTULO 2

CURVAS ALGEBROIDES PLANAS

Neste capítulo introduzimos o objeto central deste trabalho, que são as curvas algebroides planas. No caso em que a curva é irredutível, chamada ramo plano, o Teorema de Newton-Puiseux garante que existe uma parametrização especial para a curva e a partir dela definimos os chamados expoentes característicos da curva. Estes são invariantes clássicos e fundamentais na caracterização da topologia de ramos planos (para mais detalhes ver [6]). Tratamos também do índice de interseção de curvas, que é uma maneira de "medir" a proximidade entre curvas.

2.1 Curvas Algebroides Planas

Nesta seção vamos trabalhar com o anel $K[[X,Y]]$, em que K é um corpo de característica zero.

Em $K[[X,Y]]\backslash\{0\}$ definimos a seguinte relação ($\sim$). Dados $f,g \in K[[X,Y]]\backslash\{0\}$ dizemos que f é associada a g, se existe uma unidade $u \in K[[X,Y]]$ tal que $f = ug$. E escrevemos $f \sim g$.

Definição 2.1. *Uma* ***curva algebroide plana*** *definida por $f \in K[[X,Y]]\backslash\{0\}$, denotada por (f), é uma classe de equivalência de um elemento não inversível f, segundo a relação de associado, isto é,*

$$(f) = \{uf \in K[[X,Y]];\ u \text{ é uma unidade em } K[[X,Y]]\}.$$

Temos que $(f) = (g)$ se, e somente se, $f \sim g$.

A definição dada de curva algebroide é motivada pelo conceito mais geométrico de curva algébrica (quando f é um polinômio), ou de curva analítica (quando f é uma série de potências convergente) em que a curva é vista como o conjunto de zeros de f.

Por exemplo no caso de uma curva plana complexa, denotamos por $\mathbb{C}\{X,Y\}$ o anel das séries de potências que convergem absolutamente numa vizinhança da origem.

Definição 2.2. *Uma* **curva analítica plana** C_f *(ou simplesmente* (f)*) com* $f \in \mathbf{C}\{X,Y\}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{C}^2$ *dado por*

$$C_f = \{(x,y) \in U;\ f(x,y) = 0\},$$

em que U *é um aberto de* $\mathbb{C}^2$ *contendo a origem.*

Veja que $C_f = C_g$ se, e somente se, $g = uf$ com u uma unidade de $\mathbb{C}\{X,Y\}$.

Todavia para o estudo das propriedades algébricas de uma dada curva é suficiente considerar f como um elemento de $K[[X,Y]]$.

Sendo a multiplicidade de uma série invariante pela multiplicação por uma unidade, faz sentido definirmos a multiplicidade de uma curva algebroide plana como sendo a multiplicidade de um dos seus representantes.

Definição 2.3. *A* **multiplicidade** *de uma curva algebroide plana* (f) *é definida como sendo a multiplicidade de* f.

Classicamente, no estudo de uma curva analítica plana $C_f \subset \mathbb{C}^2$, dizemos que um ponto $p \in C_f$ é um ponto singular se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$$

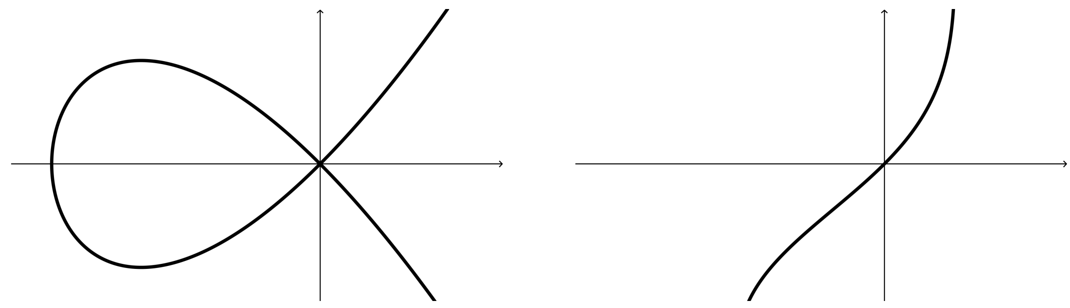
Caso contrário, dizemos que p é um ponto regular de C_f.

Para curvas algebroides temos um conceito similar.

Definição 2.4. *Diremos que uma curva algebroide plana é* ***regular*** *quando* $m(f) = 1$, *e que é* ***singular*** *quando* $m(f) > 1$.

Exemplo 2.5. *Considere as curvas* (f) *e* (g) *em que* $f(X,Y) = Y^2 - X^2 - X^3$ *e* $g(X,Y) = X - Y + XY + 2XY^2$ *pertencem a* $\mathbb{C}[[X,Y]]$. *Como* $m(f) = 2$ *e* $m(g) = 1$ *temos que* (f) *é uma curva singular e* (g) *regular.*

Analogamente no caso analítico, $(0,0)$ *é um ponto singular de* C_f *e é um ponto regular de* C_g. *O traço real destas curvas é apresentado abaixo.*



(a) Traço real da curva C_f. (b) Traço real da curva C_g.

Definição 2.6. *Uma curva algebroide plana* (f) *é dita irredutível, se a série* f *é irredutível em* $K[[X,Y]]$*. Neste caso chamaremos a curva de ramo.*

Novamente observamos que esta definição independe da escolha do representante.

Sejam (f) irredutível e $g \in (f)$. Supondo que g não é irredutível, podemos escrever $g = pq$, onde $p, q \in K[[X,Y]]$ com $m(p), m(q) \geqslant 1$. Além disso, existe uma unidade $u \in K[[X,Y]]$ tal que $g = uf$, o que implica que $f = gu^{-1} = pqu^{-1}$, com $m(p), m(q) \geq 1$. O que é uma contradição pois f é irredutível.

Seja (f) uma curva algebroide plana e considere a decomposição de f em fatores irredutíveis de $K[[X,Y]]$,

$$f = f_1 \cdots f_n.$$

As curvas algebroides planas (f_i) para $i = 1, \ldots, n$ são chamadas ramos da curva (f). E dizemos que (f) é uma curva reduzida se $(f_j) \neq (f_i)$ para $i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n$.

Algumas propriedades de curvas algebroides planas são preservadas por automorfismos de $K[[X,Y]]$. Isto motiva a definição de uma relação de equivalência entre curvas algebroides planas.

Definição 2.7. *Duas curvas algebroides planas* (f) *e* (g) *são ditas* ***equivalentes****, se existe um* K*-automorfismo* $T : K[[X,Y]] \longrightarrow K[[X,Y]]$ *tal que* $(T(f)) = (g)$*, ou equivalentemente se* $T(f) = ug$*. Neste caso escrevemos* $(f) \sim (g)$*.*

Pelo Corolário 1.21 qualquer curva (f) é equivalente a uma curva (p) em que p é um polinômio de Weierstrass. Neste sentido podemos supor que toda curva é dada por um polinômio de Weierstrass.

Proposição 2.8. *Se* (f) *e* (g) *são curvas regulares, então* $(f) \sim (g)$*.*

Demonstração. Por hipótese $m(f) = 1$ e portanto $f = aX + bY + \cdots$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Suponhamos sem perda de generalidade que $a \neq 0$ e definimos o seguinte K-automorfismo:

$$\begin{array}{rccl} \phi : & K[[X,Y]] & \longrightarrow & K[[X,Y]] \\ & X & \longmapsto & f \\ & Y & \longmapsto & Y. \end{array}$$

Este automorfismo mostra que $(f) \sim (X)$. De modo análogo escrevendo $g = cX + dY + \cdots$, podemos mostrar que $(g) \sim (X)$ ou $(g) \sim (Y)$ dependendo se $c \neq 0$ ou $d \neq 0$. Definindo o K-automorfismo $\varsigma : K[[X,Y]] \longrightarrow K[[X,Y]]$ em que $\varsigma(X) = Y$ e $\varsigma(Y) = X$ mostramos que $(X) \sim (Y)$, o que permite concluir que $(f) \sim (g)$. $\square$

Seja (f) uma curva algebroide plana de multiplicidade n, ou seja,

$$f = F_n + F_{n+1} + \cdots,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo em $K[X,Y]$ de grau i satisfazendo $F_n \neq 0$. Dizemos que a curva (F_n) é o cone tangente da curva (f).

Agora provaremos um resultado que vale para polinômios homogêneos em duas variáveis, que nos permitirá a definição de retas tangentes de uma curva algebroide plana. Antes porém vamos fazer algumas considerações.

Dado um polinômio homogêneo $Q(X,Y) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,n-i}X^iY^{n-i}$ considere

$$Q_* = Q(X,1) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n-i}X^i,$$

que é um polinômio em $K[X]$ com grau $k \leq n$.

E dado um polinômio $R(X) = \sum\limits_{i=0}^{l} c_iX^i$ definimos o polinômio homogêneo de grau l em $K[X,Y]$ por:

$$R^* = \sum_{i=0}^{l} c_iX^iY^{l-i}.$$

Agora provaremos que se Q_* é um polinômio de grau k, então $Y^{n-k}(Q_*)^* = Q(X,Y)$. De fato,

$$\begin{aligned} Y^{n-k}(Q_*)^* &= Y^{n-k}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{i,n-i}X^i\right)^* = Y^{n-k}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{i,n-i}X^iY^{k-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_{i,n-i}X^iY^{n-i} = Q(X,Y). \end{aligned}$$

Proposição 2.9. *Seja K um corpo algebricamente fechado e $P \in K[X,Y]$ um polinômio homogêneo de grau n. Então $P(X,Y)$ pode ser escrito como um produto de fatores lineares, isto é,*

$$P(X,Y) = \prod_{i=1}^{s}(a_iX + b_iY)^{r_i},$$

onde $\sum\limits_{i=1}^{s} r_i = n$, a_i, $b_j \in K$, $\forall i, j = 1, \ldots s$ e ainda $a_ib_j - a_jb_i \neq 0$ se $i \neq j$.

Demonstração. Dado $P(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} p_{i,n-i} X^i Y^{n-i}$ se $P(X,Y) = P_{0,n} Y^n$ nada há que fazer, caso contrário temos que $P_* = \sum_{i=0}^{k} p_{i,n-i} X^i$ é não constante. Como K é algebricamente fechado P_* possui k raízes em K, digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Assim podemos escrever $P_* = a \prod_{i=1}^{s'} (X - \alpha_i)^{r'_i}$.

Logo, $(P_*)^* = a \prod_{i=1}^{s'} (X - \alpha_i Y)^{r'_i}$ e portanto existem $a_i, b_i \in K,\ i = 1, \ldots, s$ tais que

$$P(X,Y) = Y^{n-k}(P_*)^* = aY^{n-k} \prod_{i=1}^{s'} (X - \alpha_i Y)^{r'_i} = \prod_{i=1}^{s} (a_i X - b_i Y)^{r_i}.$$

□

Este resultado motiva a seguinte definição.

Definição 2.10. *Seja (f) uma curva algebroide plana com cone tangente (F_n), dado por*

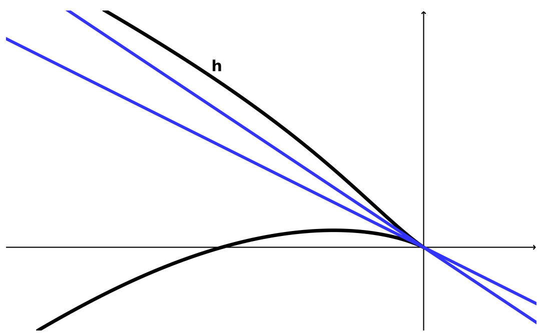
$$F_n = \prod_{i=1}^{s} (a_i X + b_i Y)^{r_i}.$$

Cada curva $(a_i X + b_i Y)$ é chamada de reta tangente de (f) com multiplicidade r_i.

Exemplo 2.11. *A curva (h) dada por $h = 2X^2 + 7XY + 6Y^2 + X^3 + Y^4$, possui cone tangente $(2X^2 + 7XY + 6Y^2)$. Veja que $2X^2 + 7XY + 6Y^2 = (2X + 3Y)(X + 2Y)$. Assim as retas tangentes de (h) são $(2X + 3Y)$ e $(X + 2Y)$.*

No caso analítico, as retas $Y = -\frac{2}{3}X$ e $Y = -\frac{1}{2}X$ são as retas tangentes a curva na origem, vindo de encontro ao que se espera quando analisamos o traço real desta curva.

A figura abaixo representa o traço real da curva (h) e suas retas tangentes.



A proposição a seguir nos dá uma condição para determinar quando duas curvas não são equivalentes.

Proposição 2.12. *Sejam $f, g \in K[[X,Y]]$ com formas iniciais F_n e G_m, respectivamente. Se (f) é equivalente a (g) então $n = m$ e (F_n) é equivalente a (G_n).*

Demonstração. Por hipótese $(f) \sim (g)$, isto é, existe um K-automorfismo ϕ satisfazendo que $\phi(f) = ug$, com u sendo uma unidade em $K[[X, Y]]$. Como automorfismo preserva multiplicidade devemos ter $m(f) = m(ug) = m(u) + m(g) = m(g)$, donde se conclui que $n = m$. E ainda, se $f = F_n + F_{n+1} + \cdots$, $g = G_n + G_{n+1} + \cdots$ e $u = u_0 + u_1 + \cdots$, então $\phi(f) = ug$ implica que

$$\begin{aligned} \phi(F_n) + \phi(F_{n+1}) + \cdots &= (u_0 + u_1 + \cdots)(G_n + G_{n+1} + \cdots) \\ &= u_0 G_n + u_0 G_{n+1} + u_1 G_n + \cdots, \end{aligned}$$

assim $\phi(F_n) = u_0 G_n$ e portanto $(F_n) \sim (G_n)$. $\square$

2.2 Teorema de Newton-Puiseux

Provamos nas seções anteriores que qualquer curva é equivalente a uma curva definida por um polinômio de Weierstrass em $K[[X]][Y]$. Nesta seção nos dedicaremos a determinar as raízes deste polinômio no fecho algébrico de $K((X))$, e assim poderemos continuar o estudo sobre curvas algebroides planas irredutíveis.

Denotaremos por $\overline{K((X))}$ o fecho algébrico de $K((X))$.

Vimos que $K((X))$ é o conjunto das séries formais de Laurent com coeficientes em K, isto é, $K((X))$ é o conjunto de todas as séries da forma,

$$b_{-m}X^{-m} + b_{-m+1}X^{-m+1} + \cdots + b_0 + b_1 X + \cdots .$$

Como $\overline{K((X))}$ é o fecho algébrico de $K((X))$ ele contém, em particular, todas as raízes da equação $Y^n - X = 0$, para todo inteiro positivo n. Assim ele contém os elementos da forma $X^{\frac{1}{n}}$ para os quais se verificam as seguintes relações:

(i) $X^{\frac{1}{1}} = X$;

(ii) $\left(X^{\frac{m}{rn}}\right)^r = X^{\frac{m}{n}}$, para todos $n, m, r \in \mathbb{Z}$, com $n, r > 0$.

Definição 2.13. *Seja $F : K$ uma extensão de corpos. Se o grupo*

$$G(F : K) = \{\sigma : F \longrightarrow F; \sigma \textit{ é um } K\textit{-automorfismo}\}$$

é finito e seu corpo fixo é K, ou seja, $\{a \in F; \sigma(a) = a,\ \forall \sigma \in G(F : K)\} = K$, dizemos que a extensão $F : K$ é Galoisiana e que $G(F : K)$ é o grupo de Galois dessa extensão.

Vamos denotar por U_n o conjunto das raízes n-ésimas da unidade em K.

Como $K((X^{\frac{1}{n}}))$ é K-isomorfo a $K\left((X)\right)$, se σ é um K-automorfismo de $K((X^{\frac{1}{n}}))$ então pelo Corolário 1.12 temos que $\sigma(X^{\frac{1}{n}}) = bX^{\frac{1}{n}}$, para algum $b \in K \setminus \{0\}$.

Lema 2.14. *A extensão de corpos $K((X^{\frac{1}{n}})) : K((X))$ é finita e Galoisiana com grupo de Galois isomorfo a U_n.*

Demonstração. Sejam $G = G(K((X^{\frac{1}{n}})) : K((X)))$ e $\varphi \in G$, então φ é um K-automorfismo de $K((X^{\frac{1}{n}}))$ e existe $b_\varphi \in K \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) = b_\varphi X^{\frac{1}{n}}$ e

$$b_\varphi^n X = \left(b_\varphi X^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)\right)^n = \varphi\left(\left(X^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = \varphi(X) = X,$$

ou seja, $b_\varphi^n X - X = 0$, o que implica $b_\varphi^n - 1 = 0$, isto é, $b_\varphi^n = 1$. Disto temos que $b_\varphi \in U_n$. Com isso defina a aplicação $\varsigma : G \longrightarrow U_n$ dada por $\varsigma(\varphi) = b_\varphi$, que é um isomorfismo de grupos. De fato, sejam $\sigma, \rho \in G$ então $\varsigma(\sigma \circ \rho) = b_{\sigma\circ\rho}$ e

$$b_{\sigma\circ\rho} X^{\frac{1}{n}} = \sigma \circ \rho\left(X^{\frac{1}{n}}\right) = \sigma\left(b_\rho X^{\frac{1}{n}}\right) = b_\rho \sigma\left(X^{\frac{1}{n}}\right) = b_\sigma b_\rho X^{\frac{1}{n}},$$

logo $b_{\sigma\circ\rho} = b_\sigma b_\rho$, portanto $\varsigma(\sigma \circ \rho) = \varsigma(\sigma) \cdot \varsigma(\rho)$.

Suponha $b_\sigma, b_\rho \in U_n$ tais que $b_\sigma = b_\rho$. Então para todo $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{n}}$ temos que

$$\sigma\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{n}}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_\sigma^i X^{\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_\rho^i X^{\frac{i}{n}} = \rho\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{n}}\right),$$

ou seja, $\sigma = \rho$ e portanto ς é injetor. Segue diretamente da definição que ς é sobrejetor.

Resta provar que o corpo fixo por G é $K((X))$. Suponha que $\sum\limits_{i\geq i_0} a_i X^{\frac{i}{n}} \in K((X^{\frac{1}{n}}))$ seja invariante pela ação dos elementos de G, isto é, se $\varphi \in G$ então,

$$\varphi\left(\sum_{i\geq i_0} a_i X^{\frac{i}{n}}\right) = \sum_{i\geq i_0} a_i X^{\frac{i}{n}},$$

isto é, $\sum_{i\geq i_0} b_\varphi^i a_i X^{\frac{i}{n}} = \sum_{i\geq i_0} a_i X^{\frac{i}{n}}$. Consequentemente $a_i b_\varphi^i = a_i$, $\forall i \geq i_0$, o que implica $a_i\left(b_\varphi^i - 1\right) = 0$ para todo $i \geq i_0$. Como $b_\varphi \in U_n$ devemos ter $a_i = 0$ para todo i que não é múltiplo de n, logo $\sum\limits_{i\geq i_0} a_i X^{\frac{i}{n}} \in K((X))$. $\square$

A partir deste lema temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ a extensão $K((X^{\frac{1}{n}})) : K((X))$ é finita. Como toda extensão finita é algébrica segue que todo elemento $\alpha \in K((X^{\frac{1}{n}}))$ é algébrico sobre $K((X))$, mas $\overline{K((X))}$ contém todos os elementos algébricos sobre $K((X))$ então $K((X^{\frac{1}{n}})) \subset \overline{K((X))}$.

Considere o seguinte conjunto

$$K((X))^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} K((X^{\frac{1}{n}})) \subset \overline{K((X))}.$$

Os elementos de $K((X))^*$ podem ser escritos na forma,

$$\alpha = b_1 X^{\frac{p_1}{q_1}} + b_2 X^{\frac{p_2}{q_2}} + \cdots, \tag{2.1}$$

com $b_i \in K$, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i > 0$ para todo i e $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots$, em que o conjunto $\left\{\frac{p_i}{q_i}; i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ admite um denominador comum.

A multiplicidade de α é definida por $m(\alpha) = \frac{p_i}{q_i}$, onde $i = \min\{j; b_j \neq 0\}$.

Definimos também o conjunto $K[[X]]^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Qualquer elemento deste conjunto é da forma (2.1) com multiplicidade maior ou igual a 1.

Lema 2.15. *$K((X))^*$ é um subcorpo de $\overline{K((X))}$.*

Demonstração. Dados $f, g \in K((X))^*$ existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $f \in K((X^{\frac{1}{r}}))$ e $g \in K((X^{\frac{1}{s}}))$. Veja que $f = \sum\limits_{i \geq i_0}^{\infty} b_i X^{\frac{1}{r}} = \sum\limits_{i \geq i_0}^{\infty} b_i \left(X^{\frac{1}{rs}}\right)^s \in K((X^{\frac{1}{sr}}))$. Analogamente $g \in K((X^{\frac{1}{rs}}))$. Sendo $K((X^{\frac{1}{sr}}))$ um corpo, os elementos $f+g$, fg e $\frac{f}{g}$ se $g \neq 0$ pertencem a $K((X^{\frac{1}{rs}}))$, o que permite concluir que $K((X))^*$ é um corpo. □

Lema 2.16. ***(Lema de Hensel)*** *Seja $f \in K[[X]][Y]$ mônico tal que $f(0,Y) = p(Y)q(Y)$, onde $p(Y), q(Y) \in K[Y]$ são relativamente primos e não constantes, de graus respectivamente r e s. Então existem polinômios $g, h \in K[[X]][Y]$, de graus r e s respectivamente, unicamente determinados, tais que $f = gh$, com $g(0,Y) = p(Y)$ e $h(0,Y) = q(Y)$.*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [12] □

Teorema 2.17. ***(Newton-Puiseux)*** $\overline{K((X))} = K((X))^*$.

Demonstração. Observe que todo elemento $K((X))^*$ é algébrico sobre $K((X))$, já que dado $\lambda \in K((X))^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \in K((X^{\frac{1}{n}}))$. E vimos que a extensão $K((X^{\frac{1}{n}})) : K((X))$ é finita e portanto algébrica.

Como $K((X)) \subset K((X))^*$ segue do Lema 2.15 que $\overline{K((X))} \subset \overline{K((X))^*} \subset \overline{K((X))}$, isto é, $\overline{K((X))} = \overline{K((X))^*}$.

Agora vamos provar que todo polinômio de grau maior ou igual a dois é redutível em $K((X))^*[Y]$.

Seja $P(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in K((X))^*[Y]$ com $n \geq 2$, o qual podemos supor sem perda de generalidade que $a_0(X) = 1$.

Vamos aplicar uma mudança de variável para eliminar o termo de grau $n-1$ em $P(X,Y)$. Para isso considere a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & K((X))^*[Y] & \longrightarrow & K((X))^*[Z] \\ & Y & \longmapsto & Z - n^{-1}a_1. \end{array}$$

Esta aplicação é um $K\left((X)\right)^*$-isomorfismo de anéis, portanto mostrar que $P(X,Y)$ é redutível é equivalente a mostrar que $\Phi(P(X,Y))$ é redutível.

Aplicando Φ a $P(X,Y)$ obtemos,

$$\begin{aligned}\Phi(P(X,Y)) &= P(X, Z-n^{-1}a_1)\\ &= (Z-n^{-1}a_1)^n + a_1(Z-n^{-1}a_1)^{n-1} + \cdots + a_n\\ &\overset{(*)}{=} Z^n + b_2(X)Z^{n-2} + \cdots + b_n(X) := Q(X,Z),\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue da expansão pelo binômio de Newton aplicado a cada um dos termos $a_i(Z-n^{-1}a_1)^{n-i}$ e reagrupando-os, com $b_i(X) \in K\left((X)\right)^*$ para $i = 2, \ldots, n$.

Agora analisaremos as seguintes situações:

(i) Se $b_i = 0$ para todo $i = 2, \ldots n$ então $Q(X,Z) = Z^n$ que é redutível e portanto $P(X,Y)$ também o é.

(ii) Suponha que exista $i \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $b_i(X) \neq 0$. Denotemos por u_i a multiplicidade de $b_i(X)$ e seja

$$u = \min\left\{\frac{u_i}{i};\ 2 \leq i \leq n\right\}.$$

Seja r tal que $u = \frac{u_r}{r}$ e considere a aplicação,

$$\begin{aligned}\Psi :\ K\left((X)\right)^*[Z] &\longrightarrow K((W))^*[Z]\\ f(X,Z) &\longmapsto f(W^r, ZW^{u_r}).\end{aligned}$$

Note que Ψ é um isomorfismo de K-álgebras e que preserva o grau como polinômio em Z. Vamos provar que $\Psi(Q(X,Z))$ é redutível, e isso garante que $P(X,Y)$ é redutível.

Dado $H(W,Z) = W^{-nu_r}\Psi(Q(X,Z))$ temos que

$$\begin{aligned}H(W,Z) &= W^{-nu_r}\Psi(Q(X,Z)) = W^{-nu_r}Q(W^r, ZW^{u_r})\\ &= W^{-nu_r}((ZW^{u_r})^n + b_2(W^r)(ZW^{u_r})^{n-2} + \cdots + b_n(W^r))\\ &= Z^n + \sum_{i=2}^{n} b_i(W^r)W^{-iu_r}Z^{n-i} = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(W)Z^{n-i},\end{aligned}$$

com $c_i(W) = b_i(W^r)W^{-iu_r}$.

Observemos que pela minimalidade de u_r temos $m(c_i) = ru_i - iu_r \geq 0$ com igualdade quando $i = r$. Portanto $c_r(0) \neq 0$ e $c_i(W) \in K[[W]]^*$ para todo $i = 2, \ldots, n$. Logo, existe k tal que $H\left(W^k, Z\right) \in K[[W]][Z]$.

Como $c_r(0) \neq 0$ e a característica de K é zero, então $H(0,Z)$ tem ao menos duas raízes distintas, pois caso contrário teríamos

$$H(0,Z) = (Z-\alpha)^n = Z^n + \binom{n}{1}Z^{n-1}(-\alpha) + \binom{n}{2}Z^{n-2}(-\alpha)^2 + \cdots + (-\alpha)^n$$

daí como $H\left(W^k, Z\right)$ não tem termo de ordem $n-1$, então $-n\alpha = 0$ o que implicaria em $\alpha = 0$. Consequentemente teríamos $H(0,Z) = Z^n$ e $c_r(0) = 0$, o que seria uma contradição.

Pelo Lema de Hensel (Lema 2.16), existem $H_1(W,Z), H_2(W,Z) \in K[[X]][Z]$ de grau maior ou igual a 1 tais que

$$H\left(W^k, Z\right) = H_1(W,Z)H_2(W,Z),$$

o que implica que $Q(X,Z)$ é redutível.

Em ambos os casos concluímos que $P(X,Y)$ é redutível, o que completa a demonstração de que $K\left((X)\right)^*$ é algebricamente fechado. $\square$

No que segue vamos enunciar alguns resultados que serão importantes para garantir que podemos parametrizar um ramo plano. Uma prova para estes resultados podem ser encontradas em [12].

Sabemos que o grupo de Galois da extensão $K((X^{\frac{1}{n}})) : K\left((X)\right)$ é isomorfo ao grupo das raízes n-ésimas da unidade U_n, e que um elemento $\rho \in U_n$ age em um elemento $\alpha = \sum\limits_{i \geq i_0} b_i \left(X^{\frac{1}{n}}\right)^i = \sum\limits_{i \geq i_0} b_i \left(X^{\frac{i}{n}}\right)$ da seguinte forma:

$$\rho * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i \left(\rho X^{\frac{1}{n}}\right)^i = \sum_{i \geq i_0} b_i \left(\rho^i X^{\frac{i}{n}}\right).$$

Lema 2.18. *Sejam $\alpha \in K\left((X)\right)^* \setminus K\left((X)\right)$ e $n = \min\left\{q \in \mathbb{N};\ \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\right\}$. Considerando α um elemento de $K((X^{\frac{1}{n}}))$ temos que $\xi * \alpha \neq \rho * \alpha$, para todos $\xi, \rho \in U_n$, com $\rho \neq \xi$.*

Teorema 2.19. *Sejam $\alpha \in K\left((X)\right)^* \setminus K\left((X)\right)$ e $n = \min\left\{q \in \mathbb{N};\ \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\right\}$, escrevemos $\alpha = \varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)$. Então,*

(i) $K\left((X)\right)[\alpha] = K((X^{\frac{1}{n}}))$;

(ii) O polinômio minimal de α sobre $K\left((X)\right)$ é dado por $g(X,Y) = \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i)$, em que $\alpha_i = \varphi\left(\xi^i X^{\frac{1}{n}}\right)$, para algum gerador ξ fixado de U_n;

(iii) $g(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in K\left((X)\right)[Y]$ *satisfaz que*

$$m(a_i(X)) \geq i \cdot m(\alpha) = i\frac{m(a_n(X))}{n},$$

valendo a igualdade quando $i = n$. Em particular, se $m(\alpha) \geq 1$ então g é um polinômio de Weierstrass e se $m(\alpha) > 0$ então g é um pseudo-polinômio.

Corolário 2.20. *Sejam $f \in K\left((X)\right)[Y]$ um polinômio mônico irredutível de grau $n \geq 1$, e $\alpha \in K\left((X)\right)^*$ uma raiz de f. Então* *(i)* $n = \min\left\{q \in \mathbb{N};\ \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\right\}$;

(ii) *Seja* $\alpha_i = \varphi\left(\xi^i X^{\frac{1}{n}}\right)$, *com* ξ *um gerador de* U_n, *então* $f(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i)$;

(iii) *Se* $f \in K[[X]][Y]$ *é um polinômio de Weierstrass, então* $m(\alpha) \geq 1$. *Se* f *é um pseudo-polinômio então* $m(\alpha) > 0$. *Em particular,* $\alpha \in K[[X]]^*$.

Corolário 2.21. ***(Teorema da Função Implícita de Newton).*** *Seja* $f(X,Y)$ *um elemento de* $K[[X,Y]]$ *irredutível de multiplicidade* n *e suponha que* $\frac{\partial^n f}{\partial Y^n}(0,0) \neq 0$. *Então existe* $\varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{i \geq 1} b_i X^{\frac{i}{n}} \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ *tal que*

$$f\left(X, \varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)\right) = 0.$$

Mais ainda, qualquer $\alpha \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ *satisfazendo* $f(X,\alpha) = 0$ *é tal que* $\alpha = \varphi\left(\xi X^{\frac{1}{n}}\right)$ *para algum* $\xi \in U_n$.

Demonstração. Como a multiplicidade de f é n e a n-ésima derivada parcial de f com relação à Y em $(0,0)$ não se anula, temos que f é regular com respeito à Y de ordem n. Pelo teorema de preparação de Weierstrass, segue que f é associada a um polinômio de Weierstrass em $K[[X]][Y]$ de grau n. O resultado agora segue imediatamente do Corolário 2.20. □

Lema 2.22. ***(Lema da Unitangente)*** *Seja* $f \in K[[X,Y]]$ *com* $f(0,0) = 0$ *irredutível de multiplicidade* n. *Então a forma inicial de* f *é dada por* $F_n = (aX + bY)^n$, *com* $a, b \in K$ *e* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

Agora podemos começar o estudo sobre a parametrização de um ramo plano.

Seja $f = F_n + F_{n+1} + \cdots \in K[[X,Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n.

Pelo Lema da Unitangente temos que $F_n = (aX + bY)^n$ com $a, b \in K$ não simultaneamente nulos. Se $b \neq 0$ então f é Y-regular e se $a \neq 0$ então f é X-regular.

Se f é Y-regular, então podemos escrever f da forma

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) + Y^{n+1}h(X,Y), \tag{2.2}$$

com $a_i(X) \in K[[X]]$, $m(a_i(X)) \geq i$ para $i = 1, \ldots, n$, $m(a_0(X)) = 0$ e $h(X,Y)$ um elemento de $K[[X,Y]]$.

Lema 2.23. *Seja* $f \in K[[X,Y]]$ *uma série de potências irredutível de multiplicidade* n, Y*-regular. Considerando* f *na forma* (2.2) *temos que* $m(a_i(X)) \geq i\frac{m(a_n(X))}{n}$ $\forall i = 0, \ldots, n$.

Demonstração. Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass (Teorema 1.17), existem uma unidade $u \in K[[X,Y]]$ e $A_1(X), \ldots, A_n(X) \in K[[X]]$ tais que

$$uf = Y^n + A_1(X)Y^{n-1} + \cdots + A_n(X) := P(X,Y) \tag{2.3}$$

com $m(A_i(X)) \geq i$ para $i = 1, \ldots, n$. Como P é irredutível em $K[[X,Y]]$ segue do Corolário 2.20 *item(ii)* e do Teorema 2.19 *item(iii)* que

$$m(A_i(X)) \geq i\frac{m(A_n(X))}{n}. \tag{2.4}$$

Escrevendo $u = u_0 + u_1Y + u_2Y^2 + \cdots$, com $u_i \in K[[X]]$ e $u_0(0) \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} uf &= (u_0 + u_1Y + u_2Y^2 + \cdots)(a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_n + Y^{n+1}h) \\ &= Y^n(a_0u_0 + a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) + Y^{n-1}(a_1u_0 + a_2u_1 + \cdots + a_nu_{n-1}) \\ &\quad + \cdots + Y^{n-i}(a_iu_0 + a_{i+1}u_1 + \cdots + a_nu_{n-i}) + \cdots + Y(a_{n-1}u_0 + a_nu_1) + Y^{n+1}hu. \end{aligned}$$

Pela Equação (2.3) temos que

$$a_iu_0 + a_{i+1}u_1 + \cdots + a_nu_{n-i} = A_i,$$

em que $A_0(X) = 1,\ i = 1, \ldots, n$. Em particular, temos que $m(a_n) = m(a_nu_0) = m(A_n)$.

Vamos provar por indução que $m(a_i(X)) \geq i\frac{m(a_n(X))}{n}$ $\forall i = 0, \ldots, n$. Claramente o resultado é válido para $i = n$. Suponhamos que a desigualdade seja verdadeira para $j > i$. Então

$$\begin{aligned} m(a_i) &= m(A_i - (u_1a_{i+1} + \cdots + u_{n-i}a_n)) \\ &\geq \min\{m(A_i), m(u_1a_{i+1}), \ldots, m(u_{n-i}a_n)\}. \end{aligned}$$

Observe que $m(u_la_{i+l}) = m(u_l) + m(a_{i+l})$ para todo $l = 1, \ldots, n+1$. Por hipótese de indução temos que $m(a_{i+l}) \geq \frac{(i+l)}{n}m(a_n)$, assim $m(u_la_{i+l}) \geq \frac{(i+l)}{n}m(a_n)$.

Por (2.4) $m(A_i) \geq i\frac{m(A_n)}{n} = i\frac{m(a_n)}{n}$, logo

$$m(a_i) \geq \min\{m(A_i), m(u_1a_{i+1}), \ldots, m(u_{n-i}a_n)\} \geq \frac{i}{n}m(a_n).$$

□

Proposição 2.24. *i Seja $f \in K[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n, Y-regular e dado como em* (2.2)*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) O cone tangente de (f) é (Y^n);

(ii) para todo $i \geq 1,\ m(a_i(X)) > i$;

(iii) para algum $i \geq 1$, $m(a_i(X)) > i$.

Demonstração. Mostraremos que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Por hipótese $m(a_j(X)) > j$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$ e sabemos que $a_0(X) \neq 0$. Supondo $a_i(X) = \sum\limits_{k=i}^{\infty} a_{i,k}X^k$ para $i = 1, \ldots, n$ temos que a forma inicial de f é

$$F_n = a_{0,0}Y^n + a_{1,1}XY^{n-1} + a_{2,2}X^2Y^{n-2} + \cdots + a_{i,i}X^iY^{n-i} + \cdots + a_{n,n}X^n. \qquad (2.5)$$

Por outro lado, o Lema da Unitangente garante que $F_n = (aX + bY)^n$ com $a, b \in K$ não simultaneamente nulos. Assim

$$F_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k} X^k Y^{n-k}. \qquad (2.6)$$

Comparando as Equações (2.5) e (2.6) temos $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} a^j b^{n-j} = a_{j,j} = 0$, pois $m(a_j) > j$.

Logo $a = 0$ ou $b = 0$, mas como f é Y-regular concluímos que $a = 0$. Portanto o cone tangente de f é (Y^n).

As demais implicações são imediatas. □

Iremos agora definir a parametrização de Newton-Puiseux e os expoentes característicos de um ramo.

2.3 Parametrização e Expoentes Característicos

Nesta seção vamos determinar parametrizações de ramos planos, e a partir destas poder estudar importantes propriedades das curvas, como por exemplo os expoentes característicos. Antes porém precisamos enunciar alguns resultados que não apresentaremos as demonstrações, mas que podem ser encontradas em [12].

Seja (f) uma curva algebroide plana com $f \in K[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n, Y-regular, associada a um pseudo-polinômio $P(X,Y) \in K[[X]][Y]$, isto é, $f = P(X,Y)u(X)$, com $u(X) \in K[[X]]$ uma unidade e $\alpha = \varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)$, onde $n = \min\{q \in \mathbb{N};\ \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$ tal que $P(X, \alpha) = 0$, que existe pelo Teorema da Função Implícita de Newton. Definindo $T = X^{\frac{1}{n}}$ temos que $\varphi(T) \in K[[T]]$ e

$$f(T^n, \varphi(T)) = 0.$$

Nestas condições

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum\limits_{i \geq m} b_i T^i, \end{cases} \qquad (2.7)$$

com $b_i \in K, i \geq m,\ b_m \neq 0$ é dita uma **parametrização de Newton-Puiseux** do ramo (f).

Se $\gamma = \psi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)$ é outra raiz de $P(X,Y)$ então $(T^n, \psi(T))$ é uma outra parametrização de Newton-Puiseux de (f). Entretanto todas as raízes de $P(X,Y)$ são da forma $\varphi\left(\xi X^{\frac{1}{n}}\right)$ com $\xi \in U_n$. Portanto temos n parametrizações de Newton-Puiseux de (f) dadas da forma

$$(T^n, \varphi(\xi T)),\ \text{com } \xi \in U_n.$$

Como $n = \min\left\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\right\}$ e $f(X,\alpha) = 0$ então em (2.7) devemos ter que n e os índices i tais que $b_i \neq 0$ são relativamente primos. De fato, suponha que d seja um divisor de n e dos índices $i's$ tais que $b_i \neq 0$. Então $\alpha \in K((X^{\frac{1}{n'}}))$ onde $n' = \frac{n}{d} < n$ contrariando a minimalidade de n.

Como $T = X^{\frac{1}{n}}$ e $\alpha = \varphi(T)$, segue do Teorema 2.19 e da demonstração do Lema 2.23 que

$$m_T(\varphi(T)) = n \cdot m_X(\alpha) = m_X(A_n) = m_X(a_n) \geq n.$$

Em particular, se o cone tangente de (f) é (Y^n) então pela Proposição (2.24) temos que $m_T(\varphi(T)) = m_X(a_n) > n$.

É possível obtermos muitas outras parametrização de um ramo (f) dadas como séries em $K[[T]]$. Sejam $\psi_1(T), \psi_2(T) \in K[[T]]$ não nulas e não inversíveis. Dizemos que $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ é uma parametrização de (f) se $f(\psi_1(T), \psi_2(T)) = 0$.

Definição 2.25. *Uma parametrização $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ de (f) é chamada primitiva se existe um automorfismo ρ de $K[[T]]$ tal que $(\rho(\psi_1(T)), \rho(\psi_2(T))) = (T^n, \varphi(T))$, onde $(T^n, \varphi(T))$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de (f).*

Exemplo 2.26. *A curva (f) com $f = Y^2 - X^3$ admite (u^{2k}, u^{3k}) para $k \in \mathbb{N}$ como parametrização, mas essa não é primitiva para $k > 1$. Considerando $T = u^k$ podemos reparametrizar a curva obtendo que (T^2, T^3) é uma parametrização primitiva para (f).*

Determinar uma parametrização para um ramo pode não ser muito fácil de se conseguir. Num corpo de característica zero, Newton exibe um algoritmo que permite determinar uma parametrização para uma curva algebroide plana (ver [6] e [16]). Este algoritmo pode ser implementado em programas computacionais como, por exemplo, o *Maple.* Apresentamos abaixo dois exemplos de curvas planas cujas parametrizações foram calculadas utilizando o programa *Maple.*

Exemplo 2.27. *(1) Considere*

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= -Y^6 - 6X^3Y^4 - 2X^4Y^3 - X^8 - 6X^7Y + 2X^5Y^3 - 9X^6Y^2 + 6X^8Y + 2X^9 \\ &\quad -X^{10} + 441X^9Y^2 + 294X^8Y^3 + 294X^{12} + 147X^{13} - 14406X^{14}Y \\ &\quad -7203X^{16} + 117649X^{19}. \end{aligned}$$

Veja que (f) é uma curva de multiplicidade 6, com cone tangente $F_6 = -Y^6$. Uma parametrização de Newton-Puiseux é dada por

$$\begin{cases} X = T^6 \\ Y = -T^8 + T^{10} + 7T^{19}. \end{cases}$$

Todas as demais 5 parametrizações de Newton-Puiseux de (f) são da forma

$$\begin{cases} X = T^6 \\ Y = -(\xi T)^8 + (\xi T)^{10} + 7(\xi T)^{19}, \end{cases}$$

onde $\xi \in U_6,\ \xi \neq 1$.
(2) Agora seja a curva dada por $g(X,Y) = Y^4 + 2XY^3 + X^5 - X^5Y$ de multiplicidade 4, a qual possui ao menos dois ramos, já que a forma inicial de g é $G_4 = Y^4 + 2XY^3 = Y^3(Y + 2X)$. Na verdade (g) possui dois ramos. O primeiro ramo possui parametrização

$$\begin{cases} X = -2T^3 \\ Y = -2T^4 + \frac{1}{3}T^5 + \frac{35}{324}T^7 - \frac{1373}{972}T^8 + \frac{35}{48}T^9 - \frac{29933}{52488}T^{10} + \frac{625153}{1259712}T^{11} + \cdots. \end{cases}$$

E o segundo ramo possui parametrização

$$\begin{cases} X = T \\ Y = -2T + \frac{1}{8}T^2 + \frac{35}{128}T^3 + \frac{3291}{32768}T^5 + \frac{9609}{131072}T^6 + \frac{647845}{8388608}T^7 + \frac{4909069}{67108864}T^8 + \cdots. \end{cases}$$

Essas curvas mostram como a relação entre a curva e sua parametrização não é trivial.

Definiremos a seguir os expoentes característicos de uma curva a partir dos quais podemos extrair importantes propriedades sobre a curva.

Seja (f) um ramo plano de multiplicidade n com parametrização de Newton-Puiseux dada por

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum\limits_{i \geq m} b_i T^i, \end{cases}$$

com $b_i \in K$ e $b_m \neq 0$ para $m \geq n$.

Definimos duas sequências (ε_i) e (β_i) de números naturais da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \beta_0 = n, \\
\beta_j &= \min\{i;\ i \not\equiv 0 \ mod\ \varepsilon_{j-1} \text{ e } b_i \neq 0\} \text{ se } \varepsilon_{j-1} \neq 1, \\
\varepsilon_j &= \text{mdc}(\varepsilon_{j-1}, \beta_j) = \text{mdc}(\beta_0, \ldots, \beta_j).
\end{aligned}$$

Observemos que se $\varepsilon_{j-1} \neq 1$, então o conjunto $\{i;\ i \not\equiv 0\ mod\ \varepsilon_{j-1} \text{ e } b_i \neq 0\}$ não é vazio, pois vimos que n e os expoentes $i's$ tais que $b_i \neq 0$ são relativamente primos. Assim se $\varepsilon_{j-1} \neq 1$, existe $b_i \neq 0$ tal que $i \not\equiv 0\ mod\ \varepsilon_{j-1}$. Assim os números β_j estão bem definidos e β_1 é o menor expoente de T em $\varphi(T)$ que não é múltiplo de n. Além disso, como a parametrização é primitiva existe uma quantidade finita de β's, digamos $\beta_0, \ldots, \beta_\delta$.

Note que ε_j divide ε_{j-1} para todo $j \geq 1$ e $n = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_\delta = 1$.

Definição 2.28. *Os números naturais $\beta_0, \ldots, \beta_\delta$ são chamados **expoentes característicos** do ramo (f).*

A partir da definição de β_j, podemos escrever uma parametrização para (f) da forma:

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = P(T^n) + \sum\limits_{\beta_1}^{\beta_2 - 1} b_i T^i + \cdots + \sum\limits_{\beta_{\delta-1}}^{\beta_\delta - 1} b_i T^i + \sum\limits_{i \geq \beta_\delta} b_i T^i, \end{cases}$$

onde $P(T) \in K[[T]], b_{\beta_1}, \ldots, b_{\beta_\delta} \neq 0$ e se i e j são inteiros tais que $\beta_{j-1} \leq i < \beta_j$, e se $b_i \neq 0$ então ε_{j-1} divide i. Se ε_{j-1} não divide i então $b_i = 0$.

Reciprocamente, dada qualquer sequência crescente de números naturais relativamente primos $\beta_0, \ldots, \beta_\delta$ tais que os inteiros $\varepsilon_j = \text{mdc}(\beta_0, \ldots, \beta_j)$ definem uma sequência estritamente decrescente, então essa sequência corresponde aos expoentes característicos de algum ramo (f).

Definição 2.29. *Com relação aos expoentes característicos de um ramo (f) definimos os chamados pares de Puiseux (η_j, μ_j), para $j = 1, \cdots, \delta$ da forma:*

$$\eta_j = \tfrac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} \qquad e \qquad \mu_j = \tfrac{\beta_j}{\varepsilon_j}.$$

Como $\varepsilon_j = mdc(\varepsilon_{j-1}, \beta_j)$ temos que $mdc(\eta_j, \mu_j) = 1$, para $j = 1, \ldots, \delta$.

Usualmente nos referimos aos inteiros ε_i's e η_i's como inteiros característicos de (f), e sobre eles temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.30. *Para todo $i, j = 1, \ldots, g$, com $i < j$ temos que $\eta_j > 1$ e*

(a) $n = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_j \varepsilon_j = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\delta$;

(b) $\varepsilon_j = \eta_{j+1} \cdots \eta_\delta$;

(c) $\eta_i \eta_{i+1} \cdots \eta_j = \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_j}$.

Demonstração. Essas propriedades seguem diretamente da definição. $\square$

Exemplo 2.31. *Consideremos $f \in K[[X]][Y]$ cuja parametrização de Newton-Puiseux é dada por:*

$$\begin{cases} X = T^8 \\ Y = 2T^8 + 5T^{12} + T^{16} + 4T^{18} + T^{36} + T^{45}. \end{cases}$$

Sobre esta curva temos:

$\beta_0 = 8$	$\varepsilon_0 = 8$	$\eta_0 = 1$
$\beta_1 = 12$	$\varepsilon_1 = 4$	$\eta_1 = 2$
$\beta_2 = 18$	$\varepsilon_2 = 2$	$\eta_2 = 2$
$\beta_3 = 45$	$\varepsilon_3 = 1$	$\eta_2 = 2$

2.4 O Anel Local de uma Curva Plana

Nesta seção vamos introduzir e explorar o anel local e a valoração associada a uma curva plana. Estes dois conceitos serão importantes para o estudo do índice de interseção entre curvas e do semigrupo de valores de uma curva.

Vamos denotar por $\mathcal{R} = K[[X,Y]]$ com K um corpo algebricamente fechado e de característica zero e $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \langle X, Y \rangle$ seu ideal maximal.

Definição 2.32. *Dado $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ definimos o anel de coordenadas de uma curva (f) como sendo a K-álgebra*

$$\mathcal{O}_f = \frac{K[[X,Y]]}{\langle f \rangle}.$$

Se $h \in \mathcal{R}$ e $B \subset K[[X,Y]]$, vamos denotar por $\overline{h}$ a classe residual de h em $\mathcal{O}_f$ e por $\overline{B}$ a classe residual dos elementos de B em $\mathcal{O}_f$.

Proposição 2.33. *O anel $\mathcal{O}_f$ é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_f$. Mais ainda denotando $\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle = \overline{\mathcal{M}}$, temos que $\mathcal{M}_f = \overline{\mathcal{M}}$.*

Demonstração. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [12]. $\square$

O resultado que segue nos levará a obter um importante invariante na classe de curvas algebroides planas.

Quando duas K-álgebras locais $\mathcal{O}_f$ e $\mathcal{O}_g$ são isomorfas, denotamos por $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.

Teorema 2.34. *Sejam (f) e (g) duas curvas algebroides planas. Então $(f) \sim (g)$ se, e somente se, $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.*

Demonstração. Ver [12].

□

O corolário abaixo garante que a multiplicidade de uma curva é um invariante pela relação que definimos de equivalência entre curvas.

Corolário 2.35. *Se $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$, então $m(f) = m(g)$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que $(f) \sim (g)$, ou seja, existe um automorfismo φ de $\mathcal{R}$ tal que $\varphi(f) = ug$, onde u é uma unidade em $\mathcal{R}$. Disto temos

$$m(f) = m(\varphi(f)) = m(ug) = m(u) + m(g) = m(g).$$

□

Vamos usar a notação x e y para $\overline{X} = X + \langle f \rangle$ e $\overline{Y} = Y + \langle f \rangle$, respectivamente.

Proposição 2.36. *Seja $f \in \mathcal{R}$ regular em Y de ordem n. Então $\mathcal{O}_f$ é um $K[[x]]$-módulo livre de posto n gerado pelas classes residuais y^i de Y^i em $\mathcal{O}_f$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Isto é,*

$$\mathcal{O}_f \cong K[[x]] \oplus K[[x]]y \oplus \cdots \oplus K[[x]]y^{n-1}.$$

Demonstração. O Teorema da Divisão (Teorema 1.15) garante que dado qualquer $g \in \mathcal{R}$ existem $q \in \mathcal{R}$ e $r = a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_{n-1}(X)Y^{n-1} \in K[[X]][Y]$ tais que $g = fq + r$.

Assim, em $\mathcal{O}_f$ temos

$$\begin{aligned} \overline{g} &= \overline{fq} + \overline{a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_{n-1}(X)Y^{n-1}} \\ &= a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{n-1}(x)y^{n-1}. \end{aligned}$$

Com isso o homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{rccl} \varsigma: & \mathcal{R} & \longrightarrow & K[[x]] \oplus K[[x]]y \oplus \cdots \oplus K[[x]]y^{n-1} \\ & g & \longmapsto & \overline{g} = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{n-1}(x)y^{n-1}, \end{array}$$

possui núcleo $\langle f \rangle$. Donde concluímos que

$$\frac{\mathcal{R}}{\langle f \rangle} \cong K[[x]] \oplus K[[x]]y \oplus \cdots \oplus K[[x]]y^{n-1},$$

e assim $\mathcal{O}_f$ tem uma estrutura de $K[[x]]$-módulo, gerado por $\{1, y, \ldots, y^{n-1}\}$.

Vamos mostrar que o conjunto $\{1, y, \ldots, y^{n-1}\}$ é livre sobre $K[[X]]$, ou seja, linearmente independente sobre $K[[x]]$. Suponha que existam $b_0(x), \ldots, b_{n-1}(x) \in K[[x]]$ tais que em $\mathcal{O}_f$

$$b_0(x) + b_1(x)y + \cdots + b_{n-1}(x)y^{n-1} = \overline{0}.$$

Então existe $q \in \mathcal{R}$ tal que $b_0(X) + b_1(X)Y + \cdots + b_{n-1}(X)Y^{n-1} = fq$. E disto segue que

$$0 = fq - \left(b_0(X) + b_1(X)Y + \cdots + b_{n-1}(X)Y^{n-1}\right).$$

Como $0 = 0f + 0$, pela unicidade garantida no Teorema da Divisão segue que

$$-\left(b_0(X) + b_1(X)Y + \cdots + b_{n-1}(X)Y^{n-1}\right) = 0.$$

O que implica que $b_0(X) = b_1(X) = \cdots = b_{n-1}(X) = 0$, consequentemente $b_0(x) = b_1(x) = \cdots = b_{n-1}(x) = 0$. $\square$

Proposição 2.37. *Sejam $f \in K[[X, Y]]$ uma série irredutível, Y-regular de ordem n e $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Newton-Puiseux para a curva (f). A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} H_\varphi : & \mathcal{R} & \longrightarrow & K[[T]] \\ & g & \longmapsto & g(T^n, \varphi(T)) \end{array}$$

é um homomorfismo de K-álgebras cujo núcleo é $\langle f \rangle$.

Demonstração. A verificação de que H_φ é um homomorfismo K-álgebras é imediata. Verifiquemos que o núcleo de H_φ é $\langle f \rangle$. De fato, se $h \in \langle f \rangle$, então existe $v \in \mathcal{R}$ tal que $h = fv$. Daí $H_\varphi(h) = H_\varphi(fv) = H_\varphi(f)H_\varphi(v) = 0H_\varphi(v) = 0$, logo $\langle f \rangle \subset Nuc(H_\varphi)$.

Por outro lado, dado $g \in Nuc(H_\varphi)$ o Teorema da Divisão garante que podemos escrever $g = fq + r$, onde $q \in \mathcal{R}$ e $r \in K[[X]][Y]$, com $r = 0$ ou grau de r em relação a Y é menor que n.

Como $g(T^n, \varphi(T)) = 0$, então

$$0 = f(T^n, \varphi(T))q(T^n, \varphi(T)) + r(T^n, \varphi(T)) = r(T^n, \varphi(T)).$$

Isto implica que r é divisível pelo polinômio minimal de $\varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)$ o qual possui grau n. Consequentemente $r = 0$ e portanto $g = qf \in \langle f \rangle$. $\square$

Observação 2.38. *Esta proposição nos leva a deduzir uma importante propriedade de curvas representadas por séries irredutíveis, Y-regulares de ordem n. Dado uma parametrização de Newton-Puiseux $(T^n, \varphi(T))$, o homomorfismo H_φ induz um homomorfismo injetor de K-álgebras que vamos ainda denotar por H_φ*

$$H_\varphi : \mathcal{O}_f \longrightarrow K[[T]],$$

que nos permite identificar $\mathcal{O}_f$ com a subálgebra de $K[[T]]$

$$A_\varphi := H_\varphi(\mathcal{O}_f) = K[[T^n, \varphi(T)]].$$

Se $\psi(T) = \varphi(\zeta T)$, onde ζ é uma raiz n-ésima da unidade, então $A_\psi \simeq A_\varphi$ através do automorfismo $h_\zeta : K[[T]] \longrightarrow K[[T]]$ dado por $h_\zeta(P(T)) = P(\zeta T)$. E pela Proposição 2.36, $A_\varphi = K[[T^n]] \oplus K[[T^n]]\varphi(T) \oplus \cdots \oplus K[[T^n]]\varphi(T)^{n-1}$.

Definição 2.39. *Definimos a valoração associada a (f) como sendo a função*

$$\begin{array}{rccl} v_f: & \mathcal{O}_f \backslash \{\overline{0}\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \overline{g} & \longmapsto & m_T(H_\varphi(\overline{g})) = m_T(\overline{g}(T^n, \varphi(T))), \end{array}$$

em que m_T denota a multiplicidade em T da série $\overline{g}(T^n, \varphi(T)) \in K[[T]]$. E denotamos $v_f(\overline{0}) = \infty$.

Podemos calcular v_f por meio de qualquer parametrização primitiva $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ de (f), uma vez que existe um automorfismo ρ de $K[[T]]$ tal que $(\rho(\psi_1(T)), \rho(\psi_2(T))) = (T^n, \varphi(T))$ temos

$$v_f(g) = m_T(g(T^n, \varphi(T))) = m_T(\rho^{-1}(g(T^n, \varphi(T))) = m_T(g(\psi_1(T), \psi_2(T))). \tag{2.8}$$

Do fato de H_φ ser homomorfismo e das propriedades de multiplicidade para a soma e produto de séries segue que a função valoração associada a f possui as propriedades:

Proposição 2.40. *Para todos $\overline{g}, \overline{h} \in \mathcal{O}_f$ são válidas as seguintes propriedades:*

(i) $v_f(\overline{g}\overline{h}) = v_f(\overline{g}) + v_f(\overline{h})$;

(ii) $v_f(\overline{1}) = 0$;

(iii) $v_f(\overline{g \pm h}) \geqslant \min\left\{v_f(\overline{g}), v_f(\overline{h})\right\}$, *com igualdade válida quando $v_f(g) \neq v_f(h)$.*

Demonstração. Essas propriedades seguem diretamente das propriedades de multiplicidade. □

Exemplo 2.41. *Considerando $f = Y^3 - X^5$ e $g = Y^3X^3 + Y^5X^2 - X^8$, vamos calcular $v_f(\overline{g})$. Observe que (T^3, T^5) é uma parametrização de Newton-Puiseux para (f). Agora*

$$v_f(\overline{g}) = m_T\left(g\left(T^3, T^5\right)\right) = m_T\left(T^{24} + T^{31} - T^{24}\right) = m_T\left(T^{31}\right) = 31.$$

2.5 Índice de Interseção

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de índice de interseção, que é uma maneira de expressar numericamente a “proximidade” de duas curvas algebroides planas na origem.

Omitiremos algumas demonstrações para que possamos focar nos resultados que consideramos mais pertinentes a este trabalho. Uma prova destes resultados podem ser encontradas em [8] e [12].

Novamente $\mathcal{R} = K[[X,Y]]$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é seu ideal maximal.

Proposição 2.42. *Sejam $f, g \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) f e g são relativamente primos;

(ii) a dimensão de $\frac{K[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle}$, como K-espaço vetorial, é finita.

Definição 2.43. *Sejam $f, g \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. O* **índice de interseção** *de f e g é*

$$I(f,g) = dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle}.$$

Podendo ocorrer $I(f,g) = \infty$.

Segue da definição que $I(f,g) = dim_K \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g\rangle}$.

Definição 2.44. *Dizemos que curvas algebroides planas (f) e (g) são transversais, se (f) e (g) são regulares e suas retas tangentes são distintas.*

Teorema 2.45. *Sejam $f, g, h \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$, φ um automorfismo de $\mathcal{R}$, u e v unidades em $\mathcal{R}$. O índice de interseção satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $I(f,g) < \infty$ se, e somente se, f e g são relativamente primos em $\mathcal{R}$;

(ii) $I(f,g) = I(g,f)$;

(iii) $I(\varphi(f), \varphi(g)) = I(uf, vg) = I(f,g)$;

(iv) $I(f, gh) = I(f,g) + I(f,h)$;

(v) $I(f,g) = 1$ se, e somente se, (f) e (g) são transversais;

(vi) $I(f, g - hf) = I(f,g)$.

Demonstração. Essas propriedades ou seguem diretamente da definição, como por exemplo os itens (ii), (iii) e (vi) ou são obtidas de resultados algébricos que não exploraremos aqui, mas que podem ser encontradas em [8] ou [12]. □

Exemplo 2.46. *Vamos determinar o índice de interseção entre as curvas (f) e (g) em que $f(X,Y) = Y^7 - X^2$ e $g(X,Y) = Y^5 - X^3$.*

$$\begin{aligned}
I(Y^7 - X^2, Y^5 - X^3) &\overset{vi}{=} I(Y^7 - X^2 - Y^2(Y^5 - X^3), Y^5 - X^3) \\
&= I(-X^2 + Y^2X^3, Y^5 - X^3) = I(X^2(Y^2X - 1), Y^5 - X^3) \\
&\overset{(iii)}{=} I(X^2, Y^5 - X^3) \overset{iv}{=} 2I(X, Y^5 - X^3) \\
&\overset{vi}{=} 2I(X, Y^5) \overset{iv}{=} 2 \cdot 5 I(X,Y) = 10.
\end{aligned}$$

Teorema 2.47. *Sejam f e g pseudo-polinômios em $K[[X]][Y]$. Considere $f = f_1 \cdots f_r$ a decomposição de f em fatores irredutíveis, os quais podemos assumir que são pseudo-polinômios. Então, $I(f,g) = \sum_{i=1}^{r} v_{f_i}(g)$.*

Demonstração. Se f e g possuem componentes em comum, isto é, se $g = f_k h$, para algum $k \in \{1, \ldots, r\}$, o item (i) do Teorema 2.45 nos garante que $I(f,g) = \infty$. Neste caso, temos ainda que $g \in \langle f_k \rangle$, portanto $v_{f_k}(g) = v_{f_k}(0) = \infty$. Assim, $\sum_{i=1}^{r} v_{f_i}(g) = \infty = I(f,g)$.

Suponhamos que f e g não possuem componentes em comum. Pela propriedade (iv) do Teorema 2.45 temos

$$I(f,g) = \sum_{i=1}^{r} I(f_i, g).$$

Será suficiente provar que no caso em que f é irredutível $I(f,g) = v_f(g)$. Para isto considere a transformação linear $L : K[[T]] \longrightarrow K[[T]]$ dada por $L(h(T)) = h(T)g(T^n, \varphi(T))$, onde n é o grau de f em relação à Y e $(T^n, \varphi(T))$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de (f). Como por hipótese f e g não têm componentes em comum, então $g \notin \langle f \rangle$. Neste caso da Proposição 2.37 segue que $g(T^n, \varphi(T)) \neq 0$, o que garante que $L(h) = 0$ se, e somente se, $h(T) = 0$, o que ocorre se, e somente se, $h = 0$, ou seja, L é injetiva.

Seja $W = A_\varphi = K[[T^n, \varphi(T)]] \simeq \mathcal{O}_f$ um K-subespaço vetorial de $V = K[[T]]$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{cccc} H'_\varphi : & \mathcal{O}_f & \longrightarrow & \frac{A_\varphi}{g(T^n,\varphi(T))A_\varphi} \\ & \overline{h} & \longmapsto & \overline{\overline{h(T^n, \varphi(T))}}, \end{array}$$

em que $\overline{\overline{h}}$ indica a classe de $\overline{h}$ em $\frac{A_\varphi}{g(T^n,\varphi(T))A_\varphi}$. Note que,

$$\overline{h} \in Nuc(H'_\varphi) \Leftrightarrow \overline{h(T^n, \varphi(T))} = \overline{p(T^n, \varphi(T))g(T^n, \varphi(T))} \Leftrightarrow \overline{\overline{h}} \in \langle \overline{g} \rangle,$$

para algum $p(T^n, \varphi(T)) \in A_\varphi$. Consequentemente, pelo Teorema do Isomorfismo temos

$$\frac{\mathcal{O}_f}{\langle \overline{g} \rangle} \simeq \frac{A_\varphi}{g(T^n, \varphi(T))A_\varphi} = \frac{W}{L(W)}.$$

Seja $k = m_T(g(T^n, \varphi(T))) < \infty$ pois $g(T^n, \varphi(T)) \neq 0$, então

$$\langle g(T^n, \varphi(T)) \rangle = \langle a_k T^k + a_{k+1} T^{k+1} + \cdots \rangle = \langle T^k (a_k + a_{k+1} T + \cdots) \rangle = \langle T^k \rangle,$$

com $a_k \neq 0$ e assim $\frac{V}{L(V)} = \frac{K[[T]]}{\langle T^k \rangle}$ possui dimensão finita k.

Pelo corolário do Theorem 4.2 de [12] temos que $dim_K \frac{V}{W}$ é finita. Vamos utilizar o seguinte resultado de Álgebra Linear que pode ser encontrado em [12] (Theorem 4.3):

Seja V um espaço vetorial e $L : V \longrightarrow V$ uma transformação linear injetiva. Seja W

um subespaço de V tal que $L(W) \subset W$. Então $\frac{V}{W} \simeq \frac{L(V)}{L(W)}$.

Portanto,

$$I(f,g) = dim_K \frac{\mathcal{O}_f}{\langle \overline{g} \rangle} = dim_K \frac{W}{L(W)} = dim_K \frac{V}{L(V)} = v_f(g).$$

□

Teorema 2.48. *Dados $f, g \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ temos que $I(f,g) \geq m(f)m(g)$. Com igualdade se, e somente se, (f) e (g) não têm tangentes em comum.*

Demonstração. Sejam $f = f_1 \cdots f_r$ e $g = g_1 \cdots g_s$ as decomposições em fatores irredutíveis de f e g, respectivamente. Pelo Teorema 2.45 itens (ii) e (iv) $I(f,g) = \sum\limits_{i,j} I(f_i, g_j)$. E da Proposição 1.4, $m(f)m(g) = \sum\limits_{i,j} m(f_i)m(g_j)$. Portanto é suficiente provar o resultado no caso em que f e g são irredutíveis.

Como mudança de coordenadas não altera o índice de interseção, pelo Corolário 1.21 podemos considerar f associado a um pseudo-polinômio em $K[[X]][Y]$, assuma que (Y^n) seja o cone tangente de (f) por uma mudança conveniente de coordenadas e seja $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Newton-Puiseux para esta curva. Como (Y^n) é cone tangente de (f), por (2.8) $m(\varphi(T)) > n$.

Suponhamos que $g(X,Y) = (aX + bY)^m + g_{m+1}(X,Y) + \cdots$, com $g_{m+i} \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{m+i}$, $\forall i \geq 1$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Então

$$I(f,g) = m((aT^n + b\varphi(T))^m + g_{m+1}(T^n, \varphi(T)) + \cdots) \geq nm = m(f)m(g),$$

com igualdade se, e somente se, $a \neq 0$, isto é, se Y não é reta tangente de (g), ou equivalentemente se (f) e (g) têm retas tangentes distintas. □

O índice de interseção de duas curvas pode ser calculado pelo Teorema 2.45 quando ambas as curvas são dadas na forma cartesiana, ou por meio do Teorema 2.47 quando uma delas é dada na forma cartesiana e a outra na forma paramétrica. O caso em que ambas são apresentadas na forma paramétrica será tratado mais adiante na Seção Contato entre Ramos.

CAPÍTULO 3

SEMIGRUPO DE RAMOS PLANOS

Neste capítulo introduzimos o conceito de semigrupo dos naturais e mostramos algumas de suas propriedades. Em seguida associamos a cada ramo plano um semigrupo chamado semigrupo de valores. Mostramos que os geradores do semigrupo de valores e os expoentes característicos de uma curva se determinam mutuamente. Finalizamos definindo a ordem de contato entre ramos, que mede a ordem de coincidência entre eles. Utilizando este conceito obtemos uma maneira de calcular o índice de interseção entre ramos quando ambos são dados na forma paramétrica.

3.1 Semigrupo dos Naturais

Seja G um subconjunto dos naturais contendo o zero, com $G \neq \{0\}$. Se G é fechado para a adição, dizemos que G é um **semigrupo dos naturais**. O menor elemento não nulo de G é chamado multiplicidade de G e denotado por $m(G)$.

Dados $x_0, \ldots, x_r \in \mathbb{N}$ o conjunto $\langle x_0, \ldots, x_r \rangle = \{a_0x_0 + \cdots + a_rx_r; a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo dos naturais, chamado semigrupo gerado por $x_0, \ldots, x_r$ e estes elementos são chamados de geradores do semigrupo.

Proposição 3.1. *Dado G um semigrupo dos naturais, existe um único conjunto de elementos $v_0, \ldots, v_g$ em G, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $v_0 < \cdots < v_g$ *e* $v_i \not\equiv v_j$ *mod* v_0 *se* $i \neq j$;

(ii) $G = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$;

(iii) $\{v_0, \ldots, v_g\}$ *está contido em qualquer conjunto de geradores de G.*

Demonstração. Vamos definir recursivamente os elementos $v_0, \ldots, v_g$ da seguinte forma: $v_0 = m(G)$ e $v_1 = \min\{G \setminus \langle v_0 \rangle\}$. Temos que $v_0 \not\equiv v_1$ *mod* v_0, pois caso contrário teríamos $v_1 - v_0 = \lambda v_0$, para algum $\lambda \in \mathbb{N}$, o que contraria o fato de $v_1 \notin \langle v_0 \rangle$.

Prosseguimos definindo para $i \geq 2$, $v_i = \min\{G \setminus \langle v_0, \ldots, v_{i-1}\rangle\}$. Vamos verificar que $v_i \not\equiv v_j \ mod \ v_0$ se $i \neq j$. Suponha que $v_i \equiv v_j \ mod \ v_0$ para algum $i < j$, assim $v_j - v_i = \lambda v_0$ para algum $\lambda \in \mathbb{N}$, daí $v_j = \lambda v_0 + v_i$. Dessa forma $v_j \in \langle v_0, \ldots, v_i\rangle$, o que é uma contradição.

Do fato de $v_i \not\equiv v_j \ mod \ v_0$ para $i \neq j$, existe $g \in \mathbb{N}$ com $g < v_0$ tal que $G = \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$.

Por construção, $v_0 < \cdots < v_g$.

Seja $\{w_0, \ldots, w_r\}$ um outro conjunto de geradores de G. Assim $v_0 = a_0w_0 + \cdots + a_rw_r$, com $a_i \in \mathbb{N}$ e como v_0 é o menor elemento não nulo de G temos que $v_0 \leq w_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, r$. Logo temos necessariamente que $v_0 = w_j$ para algum $j \in \{0, \ldots, r\}$, que podemos identificar $v_0 = w_0$.

Como $v_1 = \min\{G \setminus \langle v_0\rangle\}$ devemos ter $v_1 = b_1w_1 + \cdots + b_rw_r$, com $b_i \in \mathbb{N}$ e novamente pela minimalidade de v_1 em $G \setminus \langle v_0\rangle$ devemos ter que $v_1 = w_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, r\}$. Este mesmo argumento mostra que $\{v_0, \ldots, v_g\} \subset \{w_0, \ldots, w_r\}$. □

O conjunto $\{v_0, \ldots, v_g\}$ da proposição acima é chamado conjunto de geradores minimal do semigrupo G, o inteiro g é chamado gênero do semigrupo e os elementos de $\mathbb{N} \setminus G$ são chamados lacunas do semigrupo. Note que $g \leq m(G) - 1$.

O número de lacunas de um semigrupo pode ser finito ou infinito, se o número de lacunas for finito definimos o condutor do semigrupo.

Definição 3.2. *Se o número de lacunas do semigrupo G é finito, então existe um único elemento $c \in G$, chamado* ***condutor*** *de G satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $c - 1 \notin G$;

(b) Se $z \in \mathbb{N}$ e $z \geq c$, então $z \in G$.

Sobre o condutor do semigrupo temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3. *Seja G um semigrupo dos naturais. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G tem um condutor;

(ii) Os elementos de G têm mdc igual a 1;

(iii) Existem dois inteiros consecutivos em G.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Queremos mostrar que é possível obter um subconjunto de G cujo mdc de seus elementos é 1. Seja c o condutor de G. Por definição, $c, c+1 \in G$ como $\text{mdc}(c, c+1) = 1$, segue o resultado.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Para isso consideremos $\{v_0, \ldots, v_g\}$ o conjunto de geradores minimal de G. Por hipótese $\text{mdc}(v_0, \ldots, v_g) = 1$, assim pelo Teorema de Bézout existem $\lambda_0, \ldots, \lambda_g \in \mathbb{Z}$ tais que,

$$\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_g v_g = 1. \tag{3.1}$$

Enviando para o segundo membro os termos com λ_i negativo, obtemos em G dois elementos consecutivos.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Omitiremos a prova deste item, sua demonstração pode ser encontrada em [12] e assegura que se $a, a+1 \in G$, então podemos estimar o condutor c de G por $c < (a-1)(a+1)$.

$\square$

Definição 3.4. *Sejam $G = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$. Vamos definir duas sequências de números naturais (e_i) e (n_i) associadas a esses geradores da seguinte forma: para $i = 0, \ldots, r$,*

(i) $e_0 = v_0$ *e* $e_i = mdc(v_0, \ldots, v_i)$;

(ii) $n_0 = 1$ *e* $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ *para* $i>0$.

Sobre as sequências definidas acima temos os seguintes resultados:

Proposição 3.5. *Sejam $G = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$. As sequências acima satisfazem:*

(i) $e_i \mid e_{i-1}$, *para* $i = 1, \ldots, r$ *e* $e_r = 1$;

(ii) $v_0 = n_1 \cdots n_i e_i$;

(iii) $e_i = n_{i+1} \cdots n_r$.

Demonstração. O item (i) é imediato.
Para o item (ii) veja que $n_1 \cdots n_i e_i = \frac{e_0}{e_1}\frac{e_1}{e_2} \cdots \frac{e_{i-1}}{e_i} e_i = e_0 = v_0$.
E para (iii) temos $n_{i+1} \ldots n_r = \frac{e_i}{e_{i+1}}\frac{e_{i+1}}{e_{i+2}} \cdots \frac{e_{r-1}}{e_r} = \frac{e_i}{e_r} = e_i$. $\square$

3.2 Semigrupo de Valores

Agora que já estamos familiarizados com a definição de semigrupo e conhecemos algumas de suas propriedades, vamos associar a um ramo plano um semigrupo dos naturais.

Consideremos $f \in \langle X, Y \rangle \subset K[[X,Y]]$ irredutível, assim $\mathcal{O}_f = \frac{K[[X,Y]]}{\langle f \rangle}$ é um domínio de integridade.

Seja $v_f = v$ a valoração associada a (f) (Definição 2.39). Para simplificar a notação vamos denotar por $x = \overline{X}$ e $y = \overline{Y}$ em $\mathcal{O}_f$, sempre que não houver risco de confusão.

Definição 3.6. *Dado $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \langle X, Y \rangle$ irredutível, o semigrupo de valores associado à curva (f) é o conjunto*

$$S(f) = \{I(f,g);\ g \in K[[X,Y]] \setminus \langle f \rangle\} \subset \mathbb{N}.$$

Verifiquemos que $S(f)$ é de fato um semigrupo. Suponha f regular em Y, $m(f) = n$ e $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Newton-Puiseux para (f).

Iniciamos observando que $0 \in S(f)$, pois tomando uma unidade $u \in K[[X,Y]]$ temos $I(f,u) = m\left(u\left(T^n, \varphi(T)\right)\right) = 0$.

Para concluir que existe um elemento não nulo em $S(f)$, observe que $m(f)$ é o menor inteiro não nulo do semigrupo $S(f)$. De fato, já provamos no Teorema 2.48 que $I(f,g) \geq m(f)m(g)$, assim para todo $g \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ temos $I(f,g) \geq m(f)$.

Tomando $L = aX + bY$ com $a, b \in K$ tal que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, uma reta que não pertence ao cone tangente de (f), então $v_T(\overline{L}) = m(f)$, isto é, $m(f) \in S(f)$.

Temos que $S(f)$ é fechado para a adição, pois se $r, s \in S(f)$ existem $h, g \in K[[X,Y]] \setminus \langle f \rangle$ tais que $I(f,g) = r$ e $I(f,h) = s$. Pelas propriedades de índice de interseção sabemos que $I(f,gh) = I(f,g) + I(f,h) = r + s$, isso mostra que $r + s \in S(f)$.

Podemos definir o semigrupo $S(f)$ sob outro ponto de vista. Consideremos f uma série irredutível em $K[[X,Y]]$, com $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Newton-Puiseux para (f) e H_φ o homomorfismo definido na Observação 2.38. Então

$$\begin{aligned} S(f) &= \{I(f,g); g \in K[[X,Y]] \setminus \langle f \rangle\} \\ &= \{v_f(\overline{g}); \overline{g} \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}\} \\ &= \{m_T\left(H_\varphi(\overline{g})\right); \overline{g} \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}\} \\ &= \{m_T\left(\overline{g}\left(T^n, \varphi(T)\right)\right); \overline{g} \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 2.45 item (iii) que se duas curvas são equivalentes então os semigrupos $S(f)$ e $S(g)$ coincidem, ou seja, o semigrupo de valores também é um invariante por essa relação. Vimos anteriormente que a multiplicidade da curva é um invariante.

O primeiro resultado que obtemos sobre semigrupo de valores é que ele possui um condutor.

Proposição 3.7. *O semigrupo de valores de uma curva irredutível (f) possui condutor.*

Demonstração. Da Observação 2.38, o corpo de frações de $A_\varphi = K[[T^n, \varphi(T)]]$ é $K((T))$, isso significa que existem $h_1(T)$ e $h_2(T)$ em A_φ tais que $\frac{h_1(T)}{h_2(T)} = T$. Disto temos $m_T(h_1(T)) = m_T(h_2(T)T) = m_T(h_2(T)) + 1$. Como $m_T(h_1(T))$ e $m_T(h_2(T)$ pertencem a $S(f)$ segue da Proposição 3.3 que $S(f)$ possui condutor. □

Exemplo 3.8. *Seja $f(X,Y) = Y^4 - X^7$. Veja que $I(f, X^i) = 4i$, $I(f, Y^j) = 7j$ e $I(f, X^iY^j) = 4i + 7j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Logo, estes elementos pertencem a $S(f)$. Na verdade é possível mostrar que*

$$S(f) = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, \ldots\} = \langle 4, 7 \rangle,$$

com condutor $c = 18$.

No que segue buscaremos uma melhor compreensão da determinação do semigrupo de valores de uma curva. Para tanto consideremos K um corpo de característica zero.

Seja (f) uma curva irredutível, Y-regular e que o cone tangente de (f) seja (Y^n). Assim f é da forma

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) + Y^{n+1}h(X,Y),$$

com $a_0(0) \neq 0$ e $m(a_i) > i$. Em particular $a_n(X) = c_k X^k + \cdots$, com $k > n$. Podemos ainda considerar uma mudança de coordenadas de modo que $n \nmid k$. Seja uma parametrização de Newton-Puiseux para (f) dada por

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i T^i, \end{cases}$$

com $b_k \neq 0$ e $k > n$. Observemos que $k = \min(S(f) \setminus \langle n \rangle)$. De fato, se $g = \sum\limits_{i,j} g_{i,j} X^i Y^j$, então

$$g(T^n, \varphi(T)) = \sum_{i,j} g_{i,j} T^{ni} (\varphi(T))^j$$

assim, $m(g(T^n, \varphi(T))) \geq \min\{m(g_{i,j} T^{ni} \varphi(T)^j);\ i,j \geq 0\} = \min\{ni + kj;\ i,j \geq 0\}$. Se $m(g(T^n, \varphi(T))) \notin \langle n \rangle$ então $m(g(T^n, \varphi(T))) \geq k$ e como por hipótese $I(f,Y) = v_f(Y) = m_T(\varphi(T)) = k$ segue que $k = \min(S(f) \setminus \langle n \rangle)$.

Dessa forma, se $\{v_0, v_1, \ldots, v_g\}$ é o conjunto de geradores minimal de $S(f)$ temos que $v_0 = n$ e $v_1 = k$. Com relação aos expoentes característicos da parametrização de Newton-Puiseux dada, temos que $\beta_0 = n$ e $\beta_1 = k$. Veremos a seguir que o conjunto de geradores minimais do semigrupo de valores de uma curva e seus expoentes característicos se determinam mutuamente.

Consideremos $\beta_0, \ldots, \beta_\delta$ os expoentes característicos de (f). Vamos denotar por η_j e ε_j os inteiros correspondentes aos expoentes característicos (Definição 2.29).

Definição 3.9. *Para $k = 0, \ldots, n$, definimos*

$$M_k = K[[x]] + K[[x]]y + \cdots + K[[x]]y^k \subset \mathcal{O}_f,$$

onde $n = m(f)$ e y é a classe residual de Y em $\mathcal{O}_f$.

Segue do Teorema da divisão que $M_{n-1} = \mathcal{O}_f$.

O próximo teorema devido à Zariski [18] nos fornece a relação entre os geradores minimais do semigrupo de valores associado a (f) e os expoentes característicos da curva (f).

Teorema 3.10. *Sejam (f) uma curva e $S(f)$ o semigrupo de valores associado a (f). As seguintes afirmações são válidas:*

(i) *Para $j = 2, \ldots, \delta$ temos que* $v_j = \sum\limits_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}} \beta_k + \beta_j$;

(ii) *Se $h \in M_k$ com $k < \eta_1 \ldots \eta_j$, então* $v(h) \in \sum\limits_{i=0}^{j} v_i \mathbb{N}$. *Em particular,* $S(f) = \langle v_0, \ldots, v_\delta \rangle$;

(iii) *mdc* $(\varepsilon_{j-1}, v_j) = \varepsilon_j$, *para $j = 1, \ldots, \delta$. Mais ainda, v_j é o menor elemento não nulo em $S(f)$ que não é divisível por ε_{j-1};*

(iv) *O genêro de $S(f)$ é δ e os inteiros $v_0, \ldots, v_\delta$ são um sistema minimal de geradores de $S(f)$.*

Demonstração. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrado em [12] e em [18].

□

Decorre do Teorema anterior que $\delta = g$.

Sejam (e_i) e (n_i) (Definição 3.4) as sequências relacionadas ao semigrupo $S(f)$ de uma curva irredutível (f) e (ε_i) e (η_i) definidas em Definição 2.29 relacionadas aos expoentes característicos de (f). O corolário a seguir estabelece uma relação entre eles.

Corolário 3.11. *Seja (f) um ramo plano com semigrupo $S(f) = \langle v_1, \ldots, v_g \rangle$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações: para todo $i = 1, \ldots, g$*

(i) $e_i = \varepsilon_i$;

(ii) $n_i = \eta_i$;

(iii) $v_i = n_{i-1} v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i$;

(iv) $v_i > n_{i-1} v_{i-1}$.

Demonstração. Por definição $e_i = \mathrm{mdc}(v_0, \ldots, v_i) = \mathrm{mdc}(e_{i-1}, v_i)$. Entretanto aplicando recursivamente o Teorema 3.10 item (iii) obtemos,

$$e_i = \mathrm{mdc}(v_0, \ldots, v_{i-1}) = \mathrm{mdc}(\varepsilon_{i-1}, v_i) = \varepsilon_i.$$

E assim $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i} = \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} = \eta_i$.

Em particular, como $\eta_i > 1, \forall i = 1, \ldots, g$, temos que $n_i > 1, \forall i = 1, \ldots, g$. Usando a relação $\varepsilon_i = \eta_{i+1} \cdots \eta_g = n_{i+1} \cdots n_g$ que foi obtida na Proposição 2.30 e o item (i) do teorema anterior obtemos

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}}\beta_k + \beta_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(n_k\cdots n_g)-(n_{k+1}\cdots n_g)}{n_j\cdots n_g}\beta_k + \beta_j \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(n_{k+1}\cdots n_g)(n_k-1)}{n_j\cdots n_g}\beta_k + \beta_j = \sum_{k=1}^{j-1}(n_{k+1}\cdots n_{j-1})(n_k-1)\beta_k + \beta_j. \end{aligned}$$

Agora vamos provar que $v_i = n_{i-1}v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i$. De fato,

$$\begin{aligned} n_{i-1}v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i &= n_{i-1}\left(\sum_{k=1}^{i-2}(n_{k+1}\cdots n_{i-2})(n_k-1)\beta_k + \beta_{i-1}\right) - \beta_{i-1} + \beta_i \\ &= \sum_{k=1}^{i-2}(n_{k+1}\cdots n_{i-2}n_{i-1})(n_k-1)\beta_k + n_{i-1}\beta_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i \\ &= \sum_{k=1}^{i-1}(n_{k+1}\cdots n_{i-2}n_{i-1})(n_k-1)\beta_k + \beta_i = v_i. \end{aligned}$$

Como $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_g$ e $n_i > 1$ temos que $-\beta_{j-1} + \beta_j > 0$, portanto

$$v_i > n_{i-1}v_{i-1}. \tag{3.2}$$

□

Definição 3.12. *Um semigrupo com um sistema de geradores minimal $v_0, \ldots, v_g$ que satisfaz a condição $v_i > n_{i-1}v_{i-1}$ é chamado* **semigrupo fortemente crescente**.

Segue do Corolário 3.11 que um semigrupo de valores associado a uma curva (f) é um semigrupo fortemente crescente.

Teorema 3.13. *Seja (f) uma curva plana irredutível com uma parametrização de Newton-Puiseux. Então o semigrupo $S(f)$ e os expoentes característicos de (f) se determinam mutuamente.*

Demonstração. Sejam (f) uma curva com expoentes característicos $\beta_0, \ldots, \beta_g$. Então determinamos os inteiros $v_0, \ldots, v_g$ pela relação dada no item (i) do Teorema 3.10 e $S(f) = \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$ pelo item (ii) desse mesmo teorema.

Reciprocamente, dado um semigrupo S e $\{v_0, \ldots, v_g\}$ um conjunto de geradores minimal para S, definimos $n_0 = v_0$ e indutivamente $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$, $\forall i = 1, \ldots, g$ em que $e_i = \mathrm{mdc}(e_{i-1}, v_i)$ com $e_0 = n$.

Os inteiros $\beta_0, \ldots, \beta_g$ podem ser determinados recursivamente pela relação dada no Corolário 3.11 item (iii). □

Mostraremos que as condições para que $\langle v_0, \ldots, v_g\rangle$ seja um semigrupo fortemente crescente, juntamente com a condição $n_i > 1$, para todo $i = 1, \ldots, g$ são suficientes para garantir que existe uma curva (f) tal que $\{v_0, \ldots, v_g\}$ seja um sistema de geradores minimal para $S(f)$.

Teorema 3.14. *Seja S um semigrupo com condutor e com um sistema de geradores minimal $v_0, \ldots, v_g$ tal que $n_i > 1$ e $v_i > n_{i-1}v_{i-1}$ para todo $i = 1, \ldots, g$. Então existe uma curva algebroide plana irredutível (f) tal que $S(f) = S$.*

Demonstração. Colocamos $n = \beta_0 = v_0$, $\beta_1 = v_1$ e $\beta_2, \ldots, \beta_g$ são determinados pela fórmula do Corolário 3.11 item (iii). Veja que pela condição $v_i > n_{i-1}v_{i-1}$, temos que $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_g$. E como $n_i > 1$ para todo $i = 1, \ldots, g$ temos que $\mathrm{mdc}(\beta_0, \ldots, \beta_{i-1}) \neq \mathrm{mdc}(\beta_0, \ldots, \beta_i)$.

Seja $\varphi(T) = T^{\beta_1} + T^{\beta_2} + \cdots + T^{\beta_g}$ e $f(X,Y) = \prod_{i=1}^{n} \left(Y - \varphi\left(\xi^i X^{\frac{1}{n}}\right)\right)$, onde ξ é uma raiz primitiva da unidade. Temos que $f(X,Y) \in K[[X]][Y]$ e determina uma curva algebroide irredutível (f), com expoentes característicos $\beta_0, \ldots, \beta_g$ e portanto com semigrupo S. $\square$

3.3 Contato entre Ramos

Nesta seção vamos estudar a ordem de contato entre dois ramos, que mede num certo sentido, o grau de coincidência entre eles. Este conceito também nos fornece uma maneira de calcular o índice de interseção entre dois ramos quando ambos são dados na forma paramétrica. Apresentamos aqui algumas definições e resultados, porém não os exploraremos em detalhes.

Sejam (f) e (h) dois ramos definidos por duas séries regulares em Y, ambas com reta tangente (Y) e parametrizações de Newton-Puiseux dadas por:

$$(f): \begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq \beta_1} b_i T^i \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (h): \begin{cases} X' = T^{n'} \\ Y' = \psi(T) = \sum_{j \geq \beta'_1} b'_j T^j, \end{cases} \tag{3.3}$$

com expoentes característicos $(\beta_0, \ldots, \beta_g)$ e $(\beta'_0, \ldots, \beta'_{g'})$, respectivamente.

Definição 3.15. *Sejam ζ uma raiz n-ésima e ξ uma raiz n'-ésima da unidade. Dizemos que os ramos (f) e (h) têm* ***ordem de contato*** *$\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, se*

$$\alpha = \frac{max_{\zeta,\xi} m(\varphi(\zeta T^{n'}) - \psi(\xi T^n))}{nn'}.$$

Denotamos a ordem de contato α de (f) e (h) por $O(f,h)$.

Pela definição acima segue que se (f) e (h) possuem ordem de contato α, então as séries $\varphi(T^{n'})$ e $\psi(T^n)$ coincidem até a ordem $\alpha nn' - 1$.

Exemplo 3.16. *Sejam (f) e (g) curvas com parametrizações de Newton-Puiseux dadas por*

$$(f): \begin{cases} X = T^4 \\ Y = \varphi(T) = T^6 + T^7 + T^9 \end{cases} \qquad e \qquad (h): \begin{cases} X' = T^2 \\ Y' = \psi(T) = T^3 + T^4 + T^5. \end{cases}$$

Desta forma, tomando $\zeta \in \{1, -1, i, -i\} = U_4$ e $\xi \in \{1, -1\} = U_2$ temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(T^2) - \psi(T^4) &= T^{14} - T^{16} + T^{18} - T^{20}; \\
\varphi(T^2) - \psi(-T^4) &= 2T^{12} + T^{14} - T^{16} + T^{18} + T^{20}; \\
\varphi(-T^2) - \psi(T^4) &= -T^{14} - T^{16} - T^{18} - T^{20}; \\
\varphi(-T^2) - \psi(-T^4) &= 2T^{12} - T^{14} - T^{16} - T^{18} + T^{20}; \\
\varphi(iT^2) - \psi(T^4) &= -2T^{12} - iT^{14} - T^{16} + iT^{18} - T^{20}; \\
\varphi(iT^2) - \psi(-T^4) &= -iT^{14} - T^{16} + iT^{18} + T^{20}; \\
\varphi(-iT^2) - \psi(T^4) &= -2T^{12} + iT^{14} - T^{16} - iT^{18} - T^{20}; \\
\varphi(-iT^2) - \psi(-T^4) &= iT^{14} - T^{16} - iT^{18} + T^{20}.
\end{aligned}$$

Portanto $O(f,h) = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$, ou seja, as séries $\varphi(T^2)$ e $\psi(T^4)$ coincidem até a ordem $\alpha nn' - 1 = \frac{7}{4} \cdot 4 \cdot 2 - 1 = 13$. Isso significa que se reparametrizássemos (f) tomando $u = T^2$ e (h) tomando $u = T^4$ teríamos

$$(f): \begin{cases} X = u^8 \\ Y = u^{12} + u^{14} + u^{18} \end{cases} \qquad e \qquad (h): \begin{cases} X' = u^8 \\ Y' = u^{12} + u^{16} + u^{20}. \end{cases}$$

Se necessário fazemos uma mudança de coordenadas nas parametrizações de (f) e (h) para supormos que $\alpha = \frac{m(\varphi(T^{n'}) - \psi(T^n))}{nn'}$.

Note que da maneira que definimos a ordem de contato, se (f) e (h) não possuem retas tangentes em comum, o contato entre elas não está definido. Se elas possuem retas tangentes em comum, mas ela é distinta de (Y), fazemos uma mudança de coordenadas de forma que (Y) seja a reta tangente de (f) e (h).

Sejam $S(f) = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$ e $S(h) = \langle v'_0, \ldots, v'_{g'} \rangle$ os semigrupos de valores associados às curvas (f) e (h), respectivamente. Denotemos por n_i, e_i, n'_i e e'_i os inteiros associados aos semigrupos de (f) e (h), respectivamente (ver Definição 3.4).

Observação 3.17. *Observemos que se $m(\varphi(T^{n'}) - \psi(T^n))$ é realizada por uma potência de um termo de $\varphi(T^{n'})$ (analogamente por uma potência de um termo de $\psi(T^n)$) então $nn'\alpha = jn'$, para um $j \in \mathbb{Z}$ (analogamente $nn'\alpha = jn$, para algum $j \in \mathbb{Z}$). Ou seja, $n\alpha$ ou $n'\alpha$ é um inteiro. Digamos que $n\alpha$ seja inteiro com $\beta_q \leq j = n\alpha < \beta_{q+1}$ para algum q, em que $\beta_{g+1} = \infty$, então $e_q = mdc(v_0, \ldots, v_q) = mdc(\beta_0, \ldots, \beta_q)$ divide $n\alpha$. O mesmo resultado é válido para o caso em que $n'\alpha$ é um inteiro.*

Proposição 3.18. *Sejam* (f) *e* (h) *dois ramos com* $O(f,h) = \alpha$ *tal que* $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$, *para algum* $q \geq 1$. *Então,*

$$\frac{n}{n'} = \frac{e_k}{e'_k} = \frac{\beta_k}{\beta'_k} \quad \textit{para} \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq q-1, \ \textit{se } \alpha = \frac{\beta_q}{n}, \\ 0 \leq k \leq q, \ \textit{se } \alpha > \frac{\beta_q}{n}. \end{cases}$$

Demonstração. Se $\alpha = \frac{\beta_1}{n}$ como $e_0 = n = \beta_0$ e $e'_0 = n' = \beta'_0$ então as igualdades $\frac{n}{n'} = \frac{e_0}{e'_0} = \frac{\beta_0}{\beta'_0}$ seguem imediatamente. Suponhamos agora que $\alpha > \frac{\beta_1}{n}$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \varphi(T^{n'}) &= b_{i_0}T^{n'i_0} + b_{i_1}T^{n'i_1} + \cdots + b_{i_r}T^{n'i_r} + b_{i_{r+1}}T^{n'i_{r+1}} + \cdots, \\ \psi(T^n) &= b'_{j_0}T^{nj_0} + b'_{j_1}T^{nj_1} + \cdots + b'_{j_s}T^{nj_s} + b'_{j_{s+1}}T^{nj_{s+1}} + \cdots \end{aligned}$$

com $b_{i_0}, \ldots, b_{i_{r+1}} \neq 0$ e $b'_{j_0}, \ldots, b'_{j_{s+1}} \neq 0$ e $n'i_r < \alpha nn' \leq n'i_{r+1}$.

Suponha que $\alpha nn' = \min\{n'i_{r+1}, nj_{s+1}\}$, então $r = s$ e

$$n'i_l = nj_l, \ b_{i_l} = b'_{j_l}, \ l = 0, \ldots, r. \tag{3.4}$$

Além disso, $b_{i_{r+1}} \neq b'_{j_{r+1}}$ se $n'i_{r+1} = nj_{r+1}$. Por hipótese, $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$ assim $\beta_q n' \leq \alpha nn' < \beta_{q+1}n'$ e de (3.4) temos $\mathrm{mdc}(n'n, n'i_0, \ldots, n'i_l) = \mathrm{mdc}(n'n, nj_0, \ldots, nj_l)$, ou seja,

$$\mathrm{mdc}(n'n, n'i_0, \ldots, n'i_l) = n' \cdot \mathrm{mdc}(n, i_0, \ldots, i_l) = n \cdot \mathrm{mdc}(n', j_0, \ldots, j_l). \tag{3.5}$$

Se $\alpha = \frac{\beta_q}{n}$ temos que $\alpha nn' = n'\beta_q$. Como para cada k fixado com $0 \leq k \leq q-1$, existe $l_k \in \{0, \ldots, r\}$ tal que $\mathrm{mdc}(\beta_0, \ldots, \beta_k) = \mathrm{mdc}(i_0, \ldots, i_{l_k}) = \mathrm{mdc}(j_0, \ldots, j_{l_k})$ segue de (3.5) que

$$\frac{n}{n'} = \frac{\mathrm{mdc}(n, i_0, \ldots, i_{l_k})}{\mathrm{mdc}(n', j_0, \ldots, j_{l_k})} = \frac{\mathrm{mdc}(\beta_0, \ldots, \beta_k)}{\mathrm{mdc}(\beta'_0, \ldots, \beta'_k)} = \frac{e_k}{e'_k}.$$

Analogamente no caso $\alpha > \frac{\beta_q}{n}$.

Observe que de (3.4) temos, em particular, que $n'\beta_k = n\beta'_k$, ou ainda, $\frac{n}{n'} = \frac{\beta_k}{\beta'_k}$. □

Corolário 3.19. *Sejam* (f) *e* (h) *ramos planos com expoentes característicos* $(\beta_0, \ldots, \beta_g)$ *e* $(\beta'_0, \ldots, \beta'_{g'})$ *respectivamente. Suponha que* $S(f) = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$, $S(h) = \langle v'_0, \ldots, v'_{g'} \rangle$ *e que* (f) *e* (h) *possuam ordem de contato* α *com* $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$, *onde* $q \geq 1$. *Então,*

$$\frac{n}{n'} = \frac{e_k}{e'_k} = \frac{\beta_k}{\beta'_k} = \frac{v_k}{v'_k} \quad \textit{para} \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq q-1, \ \textit{se } \alpha = \frac{\beta_q}{n}, \\ 0 \leq k \leq q, \ \textit{se } \alpha > \frac{\beta_q}{n}. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo teorema anterior temos $\frac{\beta_k}{\beta'_k} = \frac{e_k}{e'_k} = \frac{n}{n'}$ e pelo Corolário 3.11 item (iii)

$$v_k = n_{k-1}v_{k-1} - \beta_{k-1} + \beta_k, \quad k = 1, \ldots, g.$$

Faremos a demonstração por indução sobre k. Para $k = 0$ as igualdades $\frac{n}{n'} = \frac{\beta_0}{\beta'_0} = \frac{v_0}{v'_0}$ são imediatas. Suponhamos que $\frac{n}{n'} = \frac{e_j}{e'_j} = \frac{\beta_j}{\beta'_j} = \frac{v_j}{v'_j}$ para todo $j = 0, \ldots, k-1$.

Pela definição de n_k e pela hipótese de indução temos

$$n_{k-1} = \frac{e_{k-2}}{e_{k-1}} = \frac{e_{k-2}}{e_{k-1}}\frac{n'}{n'} = \frac{e'_{k-2}n}{e'_{k-1}n} = n'_{k-1};\ v_{k-1} = \frac{n}{n'}v'_{k-1};\ \beta_{k-1} = \frac{n}{n'}\beta'_{k-1} \text{ e } \beta_k = \frac{n}{n'}\beta'_k.$$

Disto segue que

$$\frac{v_k}{v'_k} = \frac{n_{k-1}v_{k-1} - \beta_{k-1} + \beta_k}{n'_{k-1}v'_{k-1} - \beta'_{k-1} + \beta'_k} = \frac{n}{n'}\left(\frac{n'_{k-1}v'_{k-1} - \beta'_{k-1} + \beta'_k}{n'_{k-1}v'_{k-1} - \beta'_{k-1} + \beta'_k}\right) = \frac{n}{n'}.$$

□

Observe que se $n'e_i = ne'_i$ para $i = 0, \ldots, r$, então $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i} = \frac{e'_{i-1}}{e'_i} = n'_i$.

O teorema a seguir é o que nos permite calcular o índice de interseção entre dois ramos planos quando ambos são dados na forma paramétrica.

Teorema 3.20. *Sejam (f) e (h) ramos definidos por séries regulares em Y, com reta tangente (Y) e parametrizadas como em (3.3). Suponha que (f) e (h) possuem ordem de contato α e considere $S(f) = \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$. Se $\alpha < \frac{\beta_1}{n}$, então $I(f,h) = \alpha nn'$. Mais ainda, as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) $\dfrac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \dfrac{\beta_{q+1}}{n}$, *para algum $q = 1, \ldots, g$;*

(ii) $\dfrac{I(f,h)}{m(h)} = \dfrac{v_q}{n_0\cdots n_{q-1}} + \dfrac{n\alpha - \beta_q}{n_0\cdots n_q}$, *onde $n_{-1} = n_0 = 1$.*

Além disso, se existe $\frac{\beta_{q'}}{n} \leq \alpha' < \frac{\beta_{q'+1}}{n}$ tal que $\frac{I(f;h)}{m(h)} = \frac{v_{q'}}{n_0\cdots n_{q'-1}} + \frac{n\alpha' - \beta'_q}{n_0\cdots n_{q'-1}}$ para algum $q' = 0, \ldots g$, então $\alpha' = \alpha$ e $q = q'$.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [12] e [14]. □

Corolário 3.21. *Nas hipóteses do teorema anterior, sejam $q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ e $m(h) = d(h)$ o grau de h em relação a Y. Então,*

$$O(f,h) \leq \frac{\beta_q}{n} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \frac{I(f,h)}{m(h)} \leq \varepsilon_q \frac{v_q}{n}.$$

Além disso,

$$O(f,h) = \frac{\beta_q}{n} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \frac{I(f,h)}{m(h)} = \varepsilon_{q-1} \frac{v_q}{n}.$$

Demonstração. A demonstração desse corolário é imediata do resultado anterior. □

Exemplo 3.22. *No Exemplo 3.16 as curvas (f) e (h) são dadas na forma paramétrica. Vamos determinar $I(f,h)$ utilizando a ordem de contato. Os expoentes característicos de*

(f) são $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 6$ e $\beta_2 = 7$ e pelos itens (i) e (ii) do Teorema 3.10 temos que $S(f) = \langle 4, 6, 13\rangle$.

Como $O(f,h) = \frac{7}{4} = \frac{\beta_2}{4}$, pelo Teorema 3.20 item (ii) temos que $q = 2, m(h) = 2, n_0 = 1, n_1 = 2 = n_2$ e

$$I(f,h) \quad = \quad m(h)\left(\frac{v_2}{n_0n_1} - \frac{n\alpha - \beta_2}{n_0n_1n_2}\right) = 2\left(\frac{13}{2} - \frac{4\frac{7}{4} - 7}{4}\right) = 13.$$

3.4 Fórmula da Inversão

Nos capítulos anteriores escolhemos trabalhar de forma que sempre considerávamos uma série irredutível f como um polinômio em $K[[X]][Y]$ em que o grau deste polinômio coincidia com a multiplicidade n da série, ou seja, f era Y-regular de ordem n. E esta não é uma propriedade restritiva uma vez que a menos de uma mudança de coordenadas (Corolário 1.21) sempre podemos assumir f desta forma. Todavia no processo de resolução de singularidades de uma curva, que será explorado no próximo capítulo, quando explodimos uma série f regular em Y de ordem n, obtemos uma nova série que pode não ter mais essa propriedade. Como definir, por exemplo, os expoentes característicos neste novo contexto? Isto é o que vamos explorar nesta seção.

Consideremos $f \in K[[X]][Y]$ e (f) uma curva plana irredutível, Y-regular de ordem $N > n$ em que n é a multiplicidade de f, dada por

$$f(X,Y) = Y^N + a_1(X)Y^{N-1} + \cdots + a_N(X), \tag{3.6}$$

de forma que $a_i(0) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, N$.

Quando a curva é transversal ao eixo Y (que significa que o cone tangente da curva e o eixo Y não possuem componentes em comum) temos que $d(f) = N = n$.

Queremos garantir que existe uma parametrização de Newton-Puiseux para (f). O Teorema da Função Implícita de Newton (Corolário 2.21) garante a existência de tal parametrização. Apesar de nas hipóteses deste último resultado supor que f seja irredutível de multiplicidade n e $\frac{\partial^n f}{\partial Y^n}(0,0) \neq 0$, o que é de fato necessário na prova do mesmo é que f seja Y-regular de ordem n, hipótese esta que estamos assumindo.

Deste modo, a curva (f) pode ser parametrizada da forma:

$$\begin{cases} X = T^N \\ Y = \sum\limits_{j\geq 1} a_jT^j, \end{cases} \tag{3.7}$$

com $\operatorname{mdc}(\{N\} \cup \{j,\ a_j \neq 0\}) = 1$, ou seja, estamos assumindo uma parametrização primitiva para (f). Uma parametrização com em 3.7 é dita uma **parametrização de Newton-Puiseux com respeito à** (X,Y) do ramo (f).

Definição 3.23. *Dada uma parametrização de Newton-Puiseux com em (3.7) do ramo* (f)*, definimos indutivamente os expoentes* B_j *para* $j = 1, \dots, G$ *da forma:*

$$B_i \quad = \quad \begin{cases} N, \ \textit{para } i = 0 \\ \min\{j;\ a_j \neq 0 \ \textit{e } N \nmid j\}, \ \textit{para } i = 1 \\ \min\{j;\ a_j \neq 0 \ \textit{e } mdc(N, B_1, \dots, B_{i-1}) \nmid j\}, \ \textit{para } i \geq 2. \end{cases}$$

O número G *é o menor inteiro para o qual* $mdc(N, B_1, \dots, B_G) = 1$*. Chamamos* $B_0, \dots, B_G$ *de* ***expoentes característicos de*** (f) ***no sistema de coordenadas*** (X, Y)*.*

Definição 3.24. *Os inteiros característicos associados aos expoentes característicos no sistema de coordenadas (X,Y) são definidos por:* $E_0 = N$*,* $E_i = mdc(B_0, \dots, B_i)$ *para* $i = 1, \dots, G$ *e* $E_G = 1$*.*

Definimos ainda $N_i = \frac{E_{i-1}}{E_i} > 1$*, para* $1 \leq i \leq G$*.*

Como no caso em que que o cone tangente da curva é (Y^n), temos $E_i = N_{i+1}N_{i+2}\cdots N_G$ para $0 \leq i \leq G-1$.

Estas definições são semelhantes às definições dos expoentes característicos feitas na Definição 2.29, a diferença entre elas está na possibilidade de $m(f)$ ser diferente do grau de f em Y.

A partir de agora haverá a necessidade de se esclarecer em qual sistema de coordenadas estamos considerando os expoentes característicos de uma curva. Assim quando estivermos considerando um sistema em que o grau da curva (f) em Y coincidir com a multiplicidade da curva diremos que o *sistema de coordenadas é genérico*, e atribuímos o adjetivo genérico aos seus expoentes e inteiros característicos. Quando houver a necessidade indicaremos por $d_Y(f)$ o grau de f em Y.

Como antes se $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{O}_f = \frac{K[[X,Y]]}{\langle f \rangle}$ é seu anel de coordenadas podemos definir o semigrupo de valores associado a (f) como sendo

$$\begin{aligned} S(f) \quad &= \quad \{v_f(g); g \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}\ \} \\ &= \quad \{m_T(g(\psi_1(T), \psi_2(T))); g \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ é qualquer parametrização primitiva de (f).

Seja $g \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}$ e considere a curva (g). Observe que o índice de interseção entre (f) e (g) depende apenas das curvas, não das coordenadas ou das equações que a definem. Portanto, temos

$$v_f(g) = m_T(g(\psi_1(T), \psi_2(T))) = I(f, g).$$

Dada f na forma (3.6) com uma parametrização de Newton-Puiseux como em (3.7) observe que o grau N de f pertence ao semigrupo $S(f)$. Denotemos indutivamente $V_0 = N$ e

$$V_i := \min\{j \in S(f), j \notin \langle V_0, \dots, V_{j-1}\rangle\}.$$

Proposição 3.25. *Sejam $V_0, \dots, V_G \in S(f)$ definidos como acima e denotamos $V_{G+1} = \infty$. Então para $0 \leq i \leq G$ temos as seguintes propriedades:*

(i) $V_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} \frac{E_{k-1}-E_k}{E_{i-1}} B_k + B_i$;

(ii) $mdc(V_0, \dots, V_i) = E_i$;

(iii) $V_{i+1} > N_i V_i$, *para* $i = 1, \dots, G$.

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [12] no caso genérico e no caso geral em [14]. □

A Fórmula da Inversão, que será apresentada a seguir, mostra a relação dos expoentes característicos $\beta_0, \dots, \beta_g$ de uma curva (f) em coordenadas genéricas com seus expoentes característicos $B_0, \dots, B_G$ em um sistema de coordenadas (X, Y) qualquer.

Teorema 3.26. ***(Fórmula da Inversão)*** *Seja $f \in K[[X]][Y]$ de grau B_0 e multiplicidade β_0. Então $B_0 \in \left\{l\beta_0;\ 1 \leq l \leq \left[\frac{\beta_1}{\beta_0}\right]\right\} \cup \left\{\beta_1\right\}$. Os demais expoentes característicos no sistema (X, Y) estão completamente determinados em termos dos expoentes característicos genéricos, pelo conhecimento do valor de B_0 da seguinte maneira:*

(i) $B_0 = \beta_0$ *implica* $G = g$ *e* $(B_0, B_1, \dots, B_G) = (\beta_0, \dots, \beta_g)$.

(ii) $B_0 = l\beta_0$ *com* $2 \leq l \leq \left[\frac{\beta_1}{\beta_0}\right]$ *implica* $G = g + 1$ *e*

$$(B_0, B_1, B_2, \dots, B_G) = (l\beta_0, \beta_0, \beta_1 + (1 - l)\beta_0, \dots, \beta_g + (1 - l)\beta_0).$$

(iii) $B_0 = \beta_1$ *implica* $G = g$ *e*

$$(B_0, B_1, B_2, \dots, B_G) = (\beta_1, \beta_0, \beta_2 + \beta_0 - \beta_1, \dots, \beta_g + \beta_0 - \beta_1).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14]. □

Embora não apresentemos a demonstração desse resultado o exemplo a seguir ilustra sua utilização e ele será importante no processo de resolução canônica de uma curva, como veremos a diante.

Exemplo 3.27. *Consideremos a curva definida pela série $h = Y^4 - 2XY^2 + X^2 - 4X^2Y - X^3 \in \mathbb{C}[[X]][Y]$. Uma parametrização de Newton-Puiseux com respeito à (X, Y) é dada* *por:*

$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^2 + t^3. \end{cases}$$

Observe que este sistema de coordenadas não é genérico. Calculemos os expoentes característicos pela definição. O polinômio h é regular em Y de grau 4 e possui multiplicidade 2. Assim, $B_0 = 4 = E_0$, $B_1 = 2$ e como $E_1 = mdc(4,2) = 2$ e $E_1 \nmid 3$ segue que $B_2 = 3$. Então $G = 2$ pois $E_2 = mdc(B_0, B_1, B_2) = 1$.

Vamos calcular os geradores do semigrupo $S(h)$. Por definição $V_0 = 4$ e $V_1 = B_1 = 2$ e $V_2 = \frac{E_0 - E_1}{E_1} B_1 + B_2 = B_1 + B_2 = 5$. Ou seja, $\{V_0, V_1, V_2\} = \{4, 2, 5\}$ é um conjunto de geradores para o semigrupo, todavia ele não é minimal.

Agora queremos determinar os expoentes característicos de (h) em coordenadas genéricas, sem ter que reparametrizar h, ou seja, utilizando a Fórmula da Inversão. Sabemos que $\beta_0 = 2$ pois é a multiplicidade da curva. Pelo item (ii) do Teorema 3.26, $l = 2, G = g+1$, ou seja, $g = 1$ e

$$(B_0, B_1, B_2) = (l\beta_0, \beta_0, \beta_1 + (1-l)\beta_0),$$

o que implica $\beta_1 = B_2 - (1-l)\beta_0 = 3 + 2 = 5$. Logo, os expoentes característicos genéricos de (h) são $\beta_0 = 2$ e $\beta_1 = 5$.

CAPÍTULO 4

RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE CURVAS

Neste capítulo vamos apresentar sucintamente o conceito de explosões de curvas planas, que para uma interpretação geométrica deste conceito, vamos considerar curvas analíticas em $\mathbb{C}^2$. Introduzimos a noção de resolução canônica e mergulhada de singularidades já que será explorado no próximo capítulo.

4.1 Explosão (ou blowing-up)

Para descrevermos o processo de resolução de singularidades precisamos introduzir o conceito de explosão (ou blowing-up). Tal conceito pode ser descrito num contexto mais geral, todavia para nossos propósitos vamos considerar apenas explosões de curvas.

As principais referências para esta seção são: [6], [7], [11], [12] e [17].

A ideia do conceito de explosão é a seguinte:

Considere P um ponto de uma superfície suave S. Queremos construir uma nova superfície T e uma aplicação $\phi : T \longrightarrow S$ de modo que $\phi^{-1}(P)$ é uma curva C e que

$$\phi|_{T\setminus C} : T \setminus C \longrightarrow S \setminus \{P\}$$

é um isomorfismo e os pontos de C correspondem diferentes "direções" de S passando por P.

Vamos começar considerando $S = \mathbb{C}^2$ com coordenadas (x, y), $P = (0, 0)$ a origem de $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{P}^1$ a reta projetiva complexa com coordenadas homogêneas $(z_0 : z_1)$.

Seja T o subespaço de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ definido por

$$T \;=\; \{((x, y), (z_0 : z_1)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1;\ xz_1 = yz_0\}.$$

Considere a projeção natural $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}^2$:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d] \\ & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

A aplicação ϕ neste caso é a aplicação $\pi : T \to \mathbb{C}^2$ que $((x,y),(z_0 : z_1)) \in T$ projeta em (x,y).

Observe que qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ com $(x,y) \neq (0,0)$ determina um único ponto $((x,y),(z_0 : z_1)) \in T$, a saber, $(z_0 : z_1) = (x : y)$, já que $xz_1 = yz_0$ e $(x,y) \neq (0,0)$ temos que $z_0 = \frac{z_1}{y}x$ e assim $(z_0, z_1) = \frac{z_1}{y}(x,y)$. Portanto, $\pi^{-1}(x,y) = \{((x,y),(x:y))\}$ se $(x,y) \neq (0,0)$. No entanto, $\pi^{-1}(0,0) = \{((0,0),(z_0 : z_1)); (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}^1\}$ é uma curva E isomorfa à $\mathbb{P}^1$.

Sabemos que $\mathbb{P}^1$ é a união dos abertos $V_0 = \{(z_0 : z_1); z_0 \neq 0\} = \left\{\left(1 : \frac{z_1}{z_0}\right); z_0 \neq 0\right\}$ e $V_1 = \{(z_0 : z_1); z_1 \neq 0\} = \left\{\left(\frac{z_0}{z_1} : 1\right); z_1 \neq 0\right\}$.

Vamos construir abertos U_0 e U_1 de T, isomorfos a $\mathbb{C}^2$ de modo que $T = U_0 \cup U_1$. Sejam $U_0 = \left\{\left((x,y), \left(1 : \frac{z_1}{z_0}\right)\right) \in T; z_0 \neq 0\right\}$ e $U_1 = \left\{\left((x,y), \left(\frac{z_0}{z_1} : 1\right)\right) \in T; z_1 \neq 0\right\}$.

Denotando por $Y = \frac{z_1}{z_0}$, podemos escrever a equação $xz_1 = yz_0$ simplesmente por $y = Yx$ e assim

$$U_0 = \left\{((x, Yx), (1 : Y));\ Y = \frac{z_1}{z_0}, z_0 \neq 0\right\} \tag{4.1}$$

é um aberto de T isomorfo à $\mathbb{C}^2$ pela aplicação $\varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ que $\varphi((x,Yx),(1:Y)) = (x, Y)$.

Similarmente denotando por $X = \frac{z_0}{z_1}$ temos o aberto

$$U_1 = \left\{((yX, y), (X : 1));\ X = \frac{z_0}{z_1}, z_1 \neq 0\right\}, \tag{4.2}$$

o qual é isomorfo a $\mathbb{C}^2$ pela aplicação $\psi : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $\psi((yX,y),(X:1)) = (X,y)$.

Note que, em particular, a pré-imagem $E = \pi^{-1}(0,0)$ é isomorfo à $\mathbb{P}^1$, a qual na primeira carta é dada pelos pontos $(0,Y)$ e na segunda por $(X,0)$.

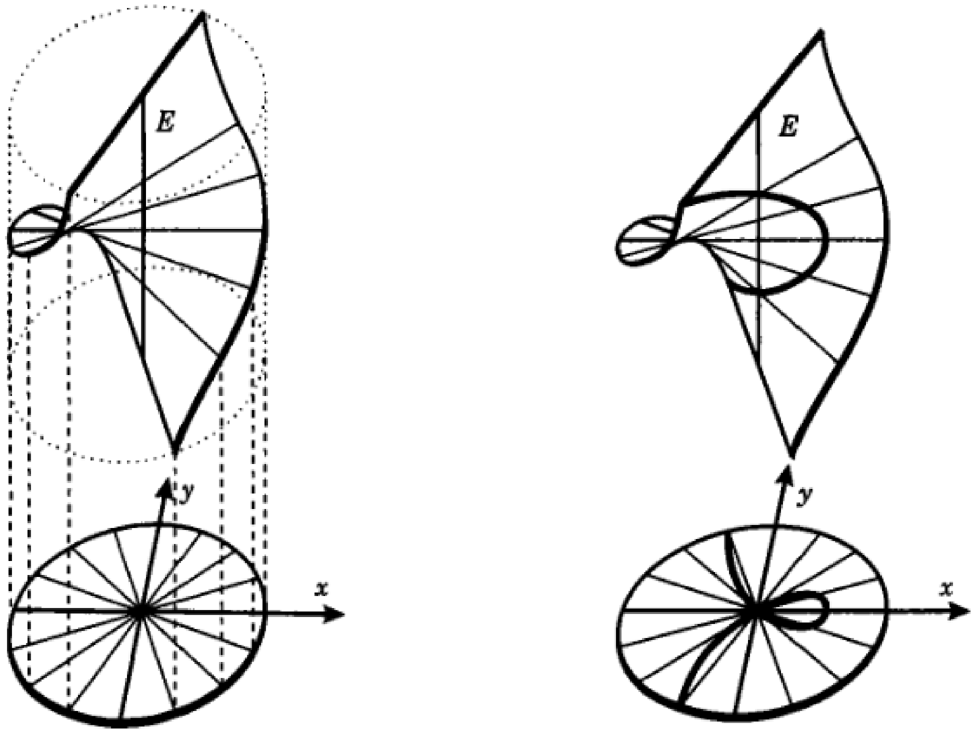
Definição 4.1. *A aplicação $\pi : T \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é chamada de* **explosão** *(ou* **blowing-up***) de $\mathbb{C}^2$ com centro na origem. E a curva $E = \pi^{-1}(0,0) \approx \mathbb{P}^1$ é chamada de curva excepcional de π (ou divisor excepcional).*

De uma maneira informal, o espaço T foi obtido de $\mathbb{C}^2$ substituindo a origem por um espaço $\mathbb{P}^1$. A ideia é considerar a curva num espaço suficientemente grande de modo que ela não tenha mais singularidades.

Além disso, os pontos de $\pi^{-1}(0)$ estão em correspondência biunívoca com o conjunto de retas passando pela origem de $\mathbb{C}^2$ (ver [17]).

Definição 4.2. *Se Y é uma subvariedade de $\mathbb{C}^2$ passando pela origem $O = (0,0)$, definimos a explosão de Y com centro em O, por $\widetilde{Y} = \overline{(\pi^{-1}(Y \setminus \{0\}))}$, em que $\pi : T \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ é a explosão de $\mathbb{C}^2$ em O descrita acima.*

Vamos continuar denotando por $\pi : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ o morfismo obtido pela restrição de $\pi : T \longrightarrow \mathbb{C}^2$ a $\widetilde{Y}$. A projeção π induz um isomorfismo entre $\widetilde{Y} \setminus \pi^{-1}(0)$ e $Y \setminus \{0\}$ e esta definição não depende do mergulho de Y em $\mathbb{C}^2$.



(a) (b)

Fonte: Casas-Alvero [7]

Se $\pi : T \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{O\}$ é a explosão de $\mathbb{C}^2$ em O, vimos que se C é uma curva em $\mathbb{C}^2$ que não passa por O, então a esta corresponde uma única curva $\pi^{-1}(C)$ em T. Agora se C é uma curva em $\mathbb{C}^2$ que passa por O, denominamos $\pi^{-1}(C)$ de **transformada total de C**. Esta curva contém o divisor excepcional E. E denominamos $\overline{\pi^{-1}(C) \setminus E}$ de a **transformada estrita** de C.

No que segue vamos considerar (f) um germe de curva analítica plana em $\mathbb{C}^2$ (ver Definição 2.2). Considerar (f) uma curva analítica neste contexto nos permite compreender melhor o conceito de explosão.

Assim seja $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ e $(f) = \{(x,y) \in U; f(x,y) = 0\}$ uma curva analítica plana irredutível, sendo U um aberto de $\mathbb{C}^2$ contendo a origem $(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ou seja, $(0,0)$ é uma singularidade de (f).

Quando anteriormente caracterizamos a parte de T que intersecta os abertos U_0 e U_1 de $\mathbb{P}^1$ em (4.1) e (4.2), essencialmente estávamos descrevendo o processo de explosão através das seguintes transformações quadráticas, conforme explorado em [12].

Definição 4.3. *Uma transformação quadrática do anel $\mathbb{C}[[X,Y]]$ no anel $\mathbb{C}[[X_1,Y_1]]$ é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras definido por*

$$\begin{array}{rcccl} \sigma: & \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X_1,Y_1]] \\ & X & \longmapsto & X_1 \\ & Y & \longmapsto & X_1Y_1 \end{array} \quad ou \quad \begin{array}{rcccl} \tau: & \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X_1,Y_1]] \\ & X & \longmapsto & X_1Y_1 \\ & Y & \longmapsto & Y_1. \end{array}$$

Observação 4.4. *Estas transformações não são inversíveis, mas são birracionais, isto é, elas definem um isomorfismo entre $\mathbb{C}((X,Y))$ e $\mathbb{C}((X_1,Y_1))$ que são os corpos de frações de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ e $\mathbb{C}[[X_1,Y_1]]$, respectivamente. Temos ainda que o homomorfismo σ transforma o ideal $\langle X,Y\rangle$ no ideal $\langle X_1,Y_1\rangle = \langle X_1\rangle$.*

Seja $f(X,Y) = F_n(X,Y) + F_{n+1}(X,Y) + \cdots \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, em que F_i é um polinômio homogêneo de grau $i,\ i \geq n$. Assim

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= f(X_1, X_1Y_1) = F_n(X_1, X_1Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1Y_1) + \cdots \\ &= X_1^n(F_n(1,Y_1) + X_1F_{n+1}(1,Y_1) + \cdots). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Conforme definimos anteriormente, a transformada total da curva (f), denotada por $\pi^{-1}((f))$, na vizinhança coordenada U_0 é a curva $(\sigma(f))$, o divisor excepcional é a curva $E = (X_1)$ e a transformada estrita da curva (f) é a curva denotada por $(\sigma^*(f))$ ou $\left(f^{(1)}\right)$, dada pela série

$$f^{(1)} = \sigma^*(f) = \frac{1}{X_1^n} f\left(X_1, X_1Y_1\right) = F_n(1,Y_1) + X_1F_{n+1}(1,Y_1) + \cdots, \tag{4.4}$$

ou seja, a transformada total de (f) satisfaz:

$$\pi^{-1}((f)) = E \cup \left(f^{(1)}\right).$$

Analogamente, na carta U_1,

$$\tau(f) = f(X_1Y_1, Y_1) = Y_1^n \cdot (F_n(X_1,1) + Y_1F_{n+1}(X_1,1) + \cdots)$$

em que o divisor excepcional, neste caso, é $E = (Y_1)$, a transformada estrita denotada por $(\tau^*(f))$ ou $\left(f^{(1)}\right)$ é a curva dada por

$$\tau^*(f) = \frac{1}{Y_1^n}\tau(f) = F_n(X_1,1) + Y_1F_{n+1}(X_1,1) + \cdots.$$

Nos resultados abaixo vamos considerar, por conveniência, a transformação quadrática σ. O caso da transformação τ é análoga.

Proposição 4.5. *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$. São verdadeiras as seguintes propriedades:*

(i) *$\sigma^*(f)$ é inversível se, e somente se, f é X-regular, isto é, a forma inicial de f é dada por $F_n = cX^n + \cdots$, onde $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$;*

(ii) *$\sigma^*(fg) = \sigma^*(f)\sigma^*(g)$;*

(iii) *$m(\sigma^*(f)) \leq m(f)$;*

(iv) *se f é um polinômio de Weierstrass em $\mathbb{C}[[X]][Y]$ de grau n em Y com cone tangente (Y^n), então $\sigma^*(f)$ é um pseudo-polinômio de grau n em Y_1;*

(v) *se f é irredutível, então $\sigma^*(f)$ é irredutível ou uma unidade.*

Demonstração. (i) Suponha $F_n(X,Y) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i Y^{n-i} \neq 0$. Observe que

$$\sigma^*(f) = F_n(1,Y_1) + X_1F_{n+1}(1,Y_1) + \cdots = a_0Y_1^n + \cdots + a_{n-1}Y_1 + a_n + X_1F_{n+1}(1,Y_1) + \cdots$$

é inversível se, e somente se, $a_n = F_n(1,0) \neq 0$. O que é equivalente a termos $F_n(X,Y) = a_nX^n + \cdots$ com $a_n \neq 0$, ou seja, f é X-regular.
(ii) Sejam $f = \sum\limits_{i=n}^{\infty} F_i$ e $g = \sum\limits_{i=k}^{\infty} G_i$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma^*(fg) &= \frac{1}{X_1^{n+k}} f.g(X_1, X_1Y_1) = \frac{1}{X_1^{n+k}} f(X_1,X_1Y_1)g(X_1,X_1Y_1) \\
&= \frac{1}{X_1^{n+k}} \left(X_1^n \sum_{i=n}^{\infty} X_1^{i-n} F_i(1,Y_1) \right) \left(X_1^k \sum_{i=k}^{\infty} X_1^{i-k} G_i(1,Y_1) \right) \\
&= \left(\sum_{i=n}^{\infty} X_1^{i-n} F_i(1,Y_1) \right) \left(\sum_{i=k}^{\infty} X_1^{i-k} G_i(1,Y_1) \right) = \sigma^*(f)\sigma^*(g).
\end{aligned}$$

(iii) Supondo $m(f) = n$ e $F_n(X,Y) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_iX^iY^{n-i}$ segue de (4.3) $m(\sigma^*(f)) \leq n$.
(iv) Se f é um polinômio de Weierstrass em $\mathbb{C}[[X]][Y]$ com cone tangente (Y^n), então

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + a_2(X)Y^{n-2} + \cdots + a_n(X),$$

com $m(a_i(X)) > i$, com $i = 1, \ldots, n$. Logo

$$\begin{aligned}
\sigma^*(f) &= \frac{1}{X_1^n} \big((X_1Y_1)^n + a_1(X_1)(X_1Y_1)^{n-1} + a_2(X_1)(X_1Y_1)^{n-2} + \cdots + a_n(X_1) \big) \\
&= Y_1^n + \frac{a_1(X_1)}{X_1} Y_1^{n-1} + \frac{a_2(X_1)}{X_1^2} Y_1^{n-2} + \cdots + \frac{a_n(X_1)}{X_1^n},
\end{aligned}$$

com $m\left(\frac{a_i(X_1)}{X_1^i}\right) \geq 1$, ou seja, $\sigma^*(f)$ é um pseudo-polinômio.
(v) Se f é irredutível, o Lema da Unitangente (Lema 2.22) garante que o cone tangente de f é $(aX + bY)^n$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, ou seja, f é X-regular ou Y-regular.

Se f é X-regular então pelo item (i) desta proposição $\sigma^*(f)$ é uma unidade. Se f é Y-regular, mas não é X-regular, então o cone tangente de f é (Y^n). Suponhamos que $\sigma^*(f)$ seja redutível. Observe que se f e g são associados então os itens (ii) e (iii) garantem que $\sigma^*(f)$ e $\sigma^*(g)$ são associados. Assim podemos supor que f seja um polinômio de Weierstrass em Y. Logo pelo item (iv), $\sigma^*(f)$ é um pseudo-polinômio de grau n. Sendo $\sigma^*(f)$ redutível o Corolário 1.27 nos permite escrevê-la como produto de pseudo-polinômios irredutíveis.

Seja $h(X_1, Y_1)$ um pseudo polinômio irredutível de grau r, com $0 < r < n$, que divide $\sigma^*(f)$. Então $\sigma^*(f) = h(X_1, Y_1)p(X_1, Y_1)$ para algum $p \in \mathbb{C}[[X_1, Y_1]]$. Mas $\sigma^*(f) = \frac{1}{X_1^n} f(X_1, X_1Y_1)$ assim

$$h(X_1, Y_1)p(X_1, Y_1) = \frac{1}{X_1^n} f(X_1, X_1Y_1).$$

Logo $f(X_1, X_1Y_1) = X_1^n h(X_1, Y_1)p(X_1, Y_1)$. Trocando X_1 por X e X_1Y_1 por Y obtemos $f(X, Y) = X^n h\left(X, \frac{Y}{X}\right) p\left(X, \frac{Y}{X}\right)$, portanto $X^n h\left(X, \frac{Y}{X}\right)$ é um fator de f, contrariando o fato de f ser irredutível. $\square$

A partir desta proposição temos que se $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ é irredutível e tal que $\sigma^*(f)$ não é uma unidade, então f é Y-regular com cone tangente (Y^n), ou seja, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) + Y^{n+1}h(X, Y), \tag{4.5}$$

com $a_i(X) \in \mathbb{C}[[X]],\ a_0(0) \neq 0\ m(a_i) > i$ e $h \in \mathbb{C}[[X, Y]]$.

Os próximos resultados serão importantes no processo de resolução de singularidades que será explorado mais a diante. Ao final da Proposição 4.8 vamos fazer um exemplo para ilustrar tais resultados.

Proposição 4.6. *Seja $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ uma série de potências irredutível com cone tangente (Y^n). Suponha que $I(f, Y) = s$. Então*

(i) $I(\sigma^*(f), Y_1) = I(f, Y) - m(f) = s - n$ *e* $I(\sigma^*(f), X_1) = n$;

(ii) *se $s - n \geq n$, então $m(\sigma^*(f)) = m(f) = n$. Mais ainda, se $s - n > n$, então $(\sigma^*(f))$ tem cone tangente $({Y_1}^n)$ e se $s - n = n$, então nem (X_1) e nem (Y_1) são retas tangentes de $\sigma^*(f)$;*

(iii) *se $s - n < n$, então $m(\sigma^*(f)) = s - n < m(f)$ e $\sigma^*(f)$ tem cone tangente $({X_1}^{s-n})$.*

Demonstração. Por hipótese, f é Y-regular de ordem n, assim de (4.5) e do Teorema 2.45 item (vi) temos que

$$s = I(f,Y) = I\left(\sum_{i=0}^{n} a_i(X)Y^{n-i} + Y^{n+1}h(X,Y), Y\right) = I(a_n(X),Y).$$

Portanto, $s = m(a_n(X)) > n$ já que o cone tangente de (f) é (Y^n). Além disso, do Teorema 2.19 item (iii) temos que $m(a_i(X)) \geq i\frac{m(a_n(X))}{n} = \frac{is}{n}$.

E ainda

$$\sigma^*(f) = a_0(X_1)Y_1^n + \frac{a_1(X_1)}{X_1}Y_1^{n-1} + \cdots + \frac{a_n(X_1)}{X_1^n} + X_1Y_1^{n+1}h(X_1, X_1Y_1),$$

com $m\left(\frac{a_i(X_1)}{X_1^i}\right) = m(a_i(X_1)) - i \geq i\frac{s}{n} - i = i\frac{s-n}{n}$. Vamos denotar $\frac{a_i(X_1)}{X_1^i}$ por $b_i(X)$.

(i) Temos que $b_0(X_1) = a_0(X_1)$ e de (4.5) $a_0(0) \neq 0$, logo $b_0(X_1)$ é uma unidade de $\mathbb{C}[[X_1]]$. E $i\frac{s-n}{n} > 0$, pois $s > n$ para $i = 1, \ldots, n$. Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} I(\sigma^*(f), Y_1) &= I(b_n(X_1), Y_1) = m(b_n(X_1)) = m(a_n) - n = s - n \quad \text{e} \\ I(\sigma^*(f), X_1) &= I(b_0(X_1)Y_1^n, X_1) = I(b_0(X_1), X_1) + I(Y_1^n, X_1) = nI(X_1, Y_1) = n, \end{aligned}$$

já que $b_0(X_1)$ é uma unidade.

(ii) Se $s - n \geq n$, então $m(b_i(X_1)) \geq i$, e como $b_0(0) \neq 0$ então

$$\begin{aligned} m(\sigma^*(f)) &= m\left(\sum_{i=0}^{n} b_i(X_1)Y_1^{n-i} + X_1Y_1^{n+1}h(X_1, X_1Y_1)\right) \\ &\geq \min\{m(b_i(X_1)Y_1^{n-i}),\ n + 2 + m(h(X_1, X_1Y_1)); 0 \leq i \leq n\} = n. \end{aligned}$$

Mas pela Proposição 4.5(iii), $m(\sigma^*(f)) \leq m(f) = n$, donde concluímos que $m(\sigma^*(f)) = m(f) = n$.

Se $s-n > n$, então $m(b_i(X_1)) > i$ para $i > 0$, o que mostra que (Y_1^n) é o cone tangente de $\sigma^*(f)$. Por outro lado, se $s - n = n$ então $m(b_n(X_1)) = m(a_n(X_1)) - n = s - n = n$, assim o cone tangente de $\sigma^*(f)$ é da forma $(aX_1 + bY_1)^n$, ou seja, nem (X_1) nem (Y_1) são retas tangentes de $\sigma^*(f)$.

(iii) Por hipótese $n < s < 2n$, assim $s - 2n < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ temos

$$m(b_i(X_1)Y_1^{n-i}) \geq i\frac{s-n}{n} + n - i = i\frac{s-2n}{n} + n \geq n\frac{s-2n}{n} + n = s - n,$$

ou seja, $m(\sigma^*(f)) = s - n$ e (X_1^{s-n}) é o cone tangente de $(\sigma^*(f))$. □

Lema 4.7. *Seja $f \in K[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n e Y-regular. Então existe* *um automorfismo φ de $K[[X,Y]]$ tal que $\varphi(f)$ é irredutível de multiplicidade n, Y-regular e tal que $I(\varphi(f),Y)$ não é múltiplo de n.*

Demonstração. Por hipótese, f é irredutível e Y-regular, assim podemos escrever f como em (4.5), com $a_0(0) \neq 0$. Todavia se não conhecemos seu cone tangente podemos apenas afirmar que $m(a_i(X)) \geq i$. E ainda $m(a_i(X)) \geq i\frac{m(a_n(X))}{n}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. (Lema 2.23).

Da demonstração da Proposição 4.6 segue que $I(f,Y) = m(a_n(X))$ e $m(a_i) \geq i\frac{I(f,Y)}{n}$.

Se $I(f,Y)$ não é múltiplo de n então o automorfismo identidade satisfaz o desejado. Caso contrário, se $I(f,Y) = nr$ para algum inteiro $r > 0$, definimos o automorfismo $\phi_1' : K[[X,Y]] \longrightarrow K[[X,Y]]$ dado por $\phi_1'(X,Y) = (X, Y + cX^r)$, onde $c \in K$. Assim

$$\phi_1'(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i(X)(Y + cX^r)^{n-i} + (Y + cX^r)^{n+1}h(X, Y + cX^r), \tag{4.6}$$

desenvolvendo os produtos e reordenando obtemos

$$\phi_1'(f) = Y^n b_0(c,X) + Y^{n-1}b_1(c,X) + \cdots + b_n(c,X) + X^{nr}P(c) + Y^{n+1}h^{'}(c,X,Y),$$

com $P(c)$ um polinômio em c de grau n. Como $m(a_i(X)) \geq i\frac{I(f,Y)}{n} = ir$, segue que $m(b_i(c,X)) \geq ir$ para $i = 0, \ldots, n-1$ e $m(b_n(c,X)) > nr$. Seja $0 \neq c_0 \in K$ tal que $P(c_0) = 0$, então definimos $\phi_1 : K[[X,Y]] \longrightarrow K[[X,Y]]$ por $\phi_1(X,Y) = (X, Y + c_0X^r)$, assim

$$\phi_1(f) = Y^n b_0(X) + Y^{n-1}b_1(X) + \cdots + Yb_{n-1}(X) + b_n(X) + Y^{n+1}h^{''}(X,Y),$$

onde $b_i(X) = b_i(c_0, X)$ e $h^{''}(X,Y) = h^{'}(c_0, X, Y)$. Assim $\phi_1(f)$ é irredutível, regular em Y e $I(\phi_1(f), Y) = m(b_n(X)) > rn = m(a_n(X))$. Se $m(b_n(X))$ não é múltiplo de n temos que ϕ_1 é o automorfismo desejado, caso contrário definimos um automorfismo ϕ_2 de $K[[X,Y]]$, como no caso anterior, tal que

$$\phi_2(f) \;=\; Y^n d_0(X) + \cdots + Y^{n-i}d_i(X) + \cdots + Yc_{n-1}(X) + d_n(X) + Y^{n+1}h^{'''}(X,Y),$$

com $d_0(0) \neq 0$ e tal que $m(d_n(X)) > m(b_n(X))$. Esse processo é finito pois, caso contrário, a multiplicidade do termo que independe de Y tenderia ao infinito e portanto, tal termo tenderia ao elemento nulo de $K[[X]]$, o que nos permitiria definir um automorfismo ϕ tal que

$$\phi(f) \;=\; Y^n a_0'(X) + \cdots + Y^{n-i}a_i'(X) + \cdots + Ya_{n-1}'(X) + Y^{n+1}h^*(X,Y),$$

o que contraria o fato de f ser irredutível. $\square$

Proposição 4.8. *Seja (f) irredutível com cone tangente (Y^n). Denotemos $f^{(1)} = \sigma^*(f)$ e $f^{(i)} = \sigma^*\left(f^{(i-1)}\right)$. Se n não divide $s = I(f, Y)$ então*

$$\left[\frac{s}{n}\right] = \min\{i; m\left(f^{(i)}\right) < m(f)\}.$$

Demonstração. Primeiramente pelo Teorema 2.48, $s = I(f, Y) \geq m(f)m(Y) = m(f)$. Assim existem inteiros positivos q e r tais que $s = nq + r$ com $0 < r < n$, pois n não divide s. Da Proposição 4.6 (i) temos que $I\left(f^{(1)}, Y_1\right) = s - n = n(q-1) + r$. Dos itens (ii) e (iii) da Proposição 4.6 concluímos que se $q = 1$ então $I\left(f^{(1)}, Y_1\right) = r < n$ e neste caso, $m(f^{(1)}) < m(f)$. Logo, $\left[\frac{s}{n}\right] = q = 1 = \min\{i;\ m(f^{(i)}) < m(f)\}$.

Se $q \geq 2$ então $s - n = n(q-1) + r > n$ então $m\left(f^{(1)}\right) = m(f)$, $f^{(1)}$ é irredutível com cone tangente (Y_1^n) e

$$I\left(f^{(2)}, Y_2\right) = I\left(\sigma^*\left(f^{(1)}\right), Y_2\right) = I\left(f^{(1)}, Y_1\right) - m\left(f^{(1)}\right) = n(q-2) + r.$$

Se $q = 2$ temos $I\left(f^{(2)}, Y_2\right) = r < n$, assim $m(f^{(2)}) < m(f^{(1)}) = m(f)$ e $q = 2 = \min\left\langle i;\ m\left(^{(i)}\right) < m(f)\right\{$. Se $q > 2$ prosseguimos aplicando a Proposição 4.6 e concluímos que $I(f^{(q)}, Y_q) = r < n$, portanto $q = \min\{i; m(f^{(i)}) < m(f)\}$. $\square$

Vamos escolher coordenadas (X_i, Y_i) para cada passo do processo de explosão.

Exemplo 4.9. *Considere $f(X,Y) = Y^3 - X^{11} \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ e $(f) = \{(x, y) \in U;\ y^3 - x^{11} = 0\}$ com U em aberto de $\mathbb{C}^2$ contendo o ponto singular $(0,0)$ de f. A curva (f) é irredutível, Y-regular de ordem $n = 3 = m(f)$ e com (Y^3) sendo o cone tangente da curva. Veja que $s = I(f, Y) = 11$. Como a multiplicidade de f não divide s, segue da Proposição 4.8 que $\left[\frac{11}{3}\right] = \min\{i;\ m\left(f^{(i)}\right) < m(f)\}$, ou seja, temos que explodir 3 vezes para que $m\left(f^{(3)}\right) < m(f)$. Com efeito, vamos começar fazendo uma explosão da curva (f) na origem da primeira carta*

$$\sigma(f) = X_1^3 Y_1^3 - X_1^{11} = X_1^3\left(Y_1^3 - X_1^8\right).$$

Logo, o divisor excepcional é $E_1 = (X_1)$ e a transformada estrita é a curva $(Y_1^3 - X_1^8)$. Da Proposição 4.6 (ii) podemos observar que de fato, o cone tangente de $\left(f^{(1)}\right)$ continua sendo (Y_1^3) já que $s - n = 11 - 3 = 8 > n$ e $m\left(f^{(1)}\right) = 3 = m(f)$.

Agora vamos explodir $\left(f^{(1)}\right)$ na origem. Como $s_1 = I\left(f^{(1)}, Y_1\right) = 8$ e $s_1 - n = 5 > n$ sabemos que $m\left(f^{(2)}\right) = m\left(f\right)$ e o cone tangente é mantido. De fato,

$$\sigma\left(f^{(1)}\right) = X_2^3 Y_2^3 - X_2^8 = X_2^3\left(Y_2^3 - X_2^5\right).$$

Neste caso, o divisor excepcional da curva é $E_2 = (X_2)$ e a transformada estrita de $\left(f^{(1)}\right)$ é a curva dada por $f^{(2)} = Y_2^3 - X_2^5$. No próximo passo, $s_2 = I\left(f^{(2)}, Y_2\right) = 5$ e

$s_2 - n = 2 < n$, ou seja,

$$\sigma\left(f^{(2)}\right) = X_3^3Y_3^3 - X_3^5 = X_3^3\left(Y_3^3 - X_3^2\right),$$

com $E_3 = (X_3)$ e $f^{(3)} = Y_3^3 - X_3^2$ que satisfaz $m\left(f^{(3)}\right) = 2 < m(f)$ e $(X_3^2) = \left(X_3^{s_2-n}\right)$ é seu cone tangente.

Abaixo listamos as curvas $(f), \left(f^{(1)}\right), \left(f^{(2)}\right)$ e $\left(f^{(3)}\right)$ com suas parametrizações de Newton-Puiseux:

$$f = Y^3 - X^{11} \qquad f^{(1)} = Y_1^3 - X_1^8 \qquad f^{(2)} = Y_2^3 - X_2^5 \qquad f^{(3)} = Y_3^3 - X_3^2$$

$$\begin{cases} X = T^3 \\ T = T^{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = T^3 \\ T = T^8 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = T^3 \\ T = T^5 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = T^3 \\ T = T^2 \end{cases}$$

Voltando ao primeiro passo da explosão de (f), veja que se tivéssemos considerado a transformação τ aplicado a f obteríamos :

$$\tau(f) = Y_1^3 - X_1^{11}Y_1^{11} = Y_1^3(1 - X_1^{11}Y_1^8)$$

cuja transformada estrita $f^{(1)} = 1 - X_1^{11}Y_1^8$ não passa pela origem.

As Proposições 4.6 e 4.8 nos permitem concluir as seguintes informações sobre as transformadas estritas $f^{(1)}, \ldots, f^{(q)}$, em que $q = \left[\frac{s}{n}\right]$ com $s = I(f, Y)$ e $n \nmid s$.

Para $1 \leq i \leq q-1$ temos que $m\left(f^{(i)}\right) = m(f)$, $I\left(f^{(i)}, Y_i\right) = I(f, Y) - i \cdot m(f)$ e $I\left(f^{(i)}, X_i\right) = n$.

Além disso, para $i = q$ temos $m\left(f^{(q)}\right) = I\left(f^{(q)}, Y_q\right) = I(f, Y) - q \cdot m(f)$, $I\left(f^{(q)}, X_q\right) = n$ e o cone tangente de $f^{(q)}$ é $\left({X_q}^{I(f,Y)-qn}\right)$.

4.2 Resolução de Singularidades

No contexto de germes de curvas analíticas planas, o processo de resolução de singularidades consiste em transformar uma curva com singularidade isolada, digamos na origem, em uma curva regular, por meio de uma sequência finita de explosões num dado ponto, ou ainda, através de um número finito de transformações quadráticas.

O processo de resolução de curvas em característica zero foi obtido no final do século XIX por volta de 1890, com contribuições de L. Kronecker, M. Noether, A. Brill, entre outros. A resolução de superfícies (sobre $\mathbb{C}$) foi obtida no caso local por H. W. Jung (1908), no caso global por R. J. Walker (1935). Numa abordagem mais algébrica O. Zariski em 1939 deu uma prova puramente algébrica da resolução de superfícies (característica zero), e em 1944 para a resolução mergulhada de superfícies e 3-folds. Em 1956, S. S. Abhyankar provou a resolução de superfícies em característica $p > 0$. E em 1964, H. Hironaka provou a resolução (e a resolução mergulhada) para uma variedade algébrica qualquer sobre um corpo de característica zero.

Considere $C = (f)$ um germe de curva analítica plana irredutível definida na origem $O_0 = O$ de $T_0 = \mathbb{C}^2$. Fazendo a explosão de $\mathbb{C}^2$ em O_0 obtemos uma superfície T_1, um divisor excepcional $E_1 \subset T_1$ e uma transformada estrita $C^{(1)}$ que encontra E_1 num único ponto O_1. Agora fazemos a explosão de T_1 com centro em O_1. Suponha indutivamente que tenhamos construído uma superfície T_i contendo curvas E_j para $0 \leq j \leq i-1$ e uma curva $C^{(i)}$ que encontra E_{i-1} em um único ponto O_i. Então a explosão de T_i com centro em O_i nos fornece uma nova superfície T_{i+1} e uma aplicação $\pi_i : T_{i+1} \longrightarrow T_i$. Denotamos por $E_j^{(i)}$ a transformada estrita de $E_j^{(i-1)}$ se $j < i$, por E_i a curva excepcional de π_i e por $C^{(i+1)}$ a transformada estrita do ramo $C^{(i)}$. Como antes $C^{(i+1)}$ encontra E_i em um único ponto O_{i+1}.

É possível provar que após um número finito de passos chegamos a uma curva regular. Este processo é conhecido como resolução de singularidades por explosões. Se $C^{(N)}$ é regular, a projeção $\pi : T_N \longrightarrow T_0$ é uma resolução de C.

Para uma demonstração dos Teoremas de Resolução Canônica de Curvas e de Resolução Mergulhada de Curvas, que enunciamos abaixo, sugerimos por exemplo: [11] (Capítulo V, Proposition 3.8 e Theorem 3.9) e [17] (Theorem 3.3.1 e Theorem 3.4.4).

Teorema 4.10. *(Resolução canônica de curvas) Seja C uma curva irredutível em $\mathbb{C}^2$. Então existe uma sequência finita de transformações quadráticas (com centros convenientes)*

$$\mathbb{C}^2 = T_0 \longleftarrow T_1 \longleftarrow T_2 \longleftarrow \ldots \longleftarrow T_N$$

tais que a transformada estrita $C^{(N)}$ de C em T_N é regular.

O processo descrito anteriormente, embora sem interpretação geométrica, se aplica para o caso formal. O processo de resolução canônica de um ramo (f) pode ser descrito de uma maneira algorítmica, através dos seguintes passos:

Suponhamos $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ irredutível de multiplicidade n, Y-regular e tal que n não divide $s = I(f,Y)$. Vamos utilizar a notação $f^{(i)} = \sigma^*(f^{(i-1)})$, para $i = 1, \ldots, q = \left[\frac{s}{n}\right]$ e por $n' = m\left(f^{(q)}\right)$. Pela Proposição 4.6, $n' < n$.

Se $n' = 1$ encerramos o processo. Caso contrário, se $n' > 1$, sendo f irredutível, pela Proposição 4.5 temos que $\sigma^*(f)$ é irredutível. Agora aplicando a Proposição 4.6 $(f^{(q)})$ é uma curva de multiplicidade n' com cone tangente $({X_q}^{n'})$. Denotemos $s' = I\left(f^{(q)}, X_q\right)$ e por $q' = \left[\frac{s'}{n'}\right]$. Se s' for um múltiplo de n' então do Lema 4.7 existe um automorfismo ϕ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que $I(\phi(f^{(q)}), X_q)$ não é múltiplo de n'. Vamos ainda denotar por $\phi\left(f^{(q)}\right)$ por $f^{(q)}$ e $I(\phi(f^{(q)}), X_q) = s'$. Definimos $f^{(q+1)} = \tau^*(f^{(q)})$ e $f^{(q+j)} = \tau^*(f^{(q+j-1)})$ para $j = 1, \ldots, q'$.

Se $n'' = m(f^{(q+q')}) = 1$, paramos o processo. Caso contrário, a Proposição 4.6 item (iii) nos diz que $f^{(q+q')}$ é uma série $Y_{q+q'}$-regular de ordem $s'' - n''$, e prosseguimos aplicando

σ^*. Note que este processo estaciona, uma vez que as multiplicidades são decrescentes e do fato de que σ^* ou τ^* aplicadas nas séries, com as condições acima, resulta em curvas irredutíveis. Este processo nos levará a uma curva $\left(f^{(N)}\right)$ regular.

Definição 4.11. *A resolução canônica de uma curva algebroide plana irredutível (f), determina a seguinte sequência numérica chamada* ***sequência de multiplicidades de*** f

$$m(f) \geq m\left(f^{(1)}\right) \geq \cdots \geq m\left(f^{(N)}\right) = 1,$$

que denotaremos $\left(m\left(f\right), m\left(f^{(1)}\right), \ldots, m\left(f^{(N)}\right)\right)$.

Exemplo 4.12. *Vamos determinar a resolução canônica e a sequência de multiplicidades da curva em $\mathbb{C}[[X,Y]]$ definida por $f(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7$. Temos que (f) é uma curva singular irredutível, Y-regular de multiplicidade 4, cone tangente (Y^4) e $s = I(f,Y) = 6$. Como $4 = m(f) \nmid 6$ explodindo $\left[\frac{6}{4}\right] = 1$ vez na primeira carta a multiplicidade de $f^{(1)}$ será menor que $m(f)$. De fato,*

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= f(X_1, X_1Y_1) = X_1^4Y_1^4 - 2X_1^5Y_1^2 - 4X_1^6Y_1 + X_1^6 - X_1^7 \\ &= X_1^4(Y_1^4 - 2X_1Y_1^2 - 4X_1^2Y_1 + X_1^2 - X_1^3).\end{aligned}$$

Temos $E_1 = (X_1)$ e $f^{(1)} = Y_1^4 - 2X_1Y_1^2 - 4X_1^2Y_1 + X_1^2 - X_1^3$. Veja que $m\left(f^{(1)}\right) = 2 < m(f)$ e o cone tangente de $f^{(1)}$ é (X_1^2). Entretanto, $s_1 - m\left(f^{(1)}\right) = I\left(f^{(1)}, X_1\right) - m\left(f^{(1)}\right) = 4 - 2 = 2 = m\left(f^{(1)}\right)$, logo pela Proposição 4.6 (ii) nem (X_2) nem (Y_2) são retas tangentes de $f^{(2)}$, na verdade considerando $\tau(X_2,Y_2) = (X_2Y_2, Y_2)$ temos:

$$\begin{aligned}\tau\left(f^{(1)}\right) &= X_2^2Y_2^2 - X_2^3Y_2^3 - 2X_2Y_2^3 - 4X_2^2Y_2^3 + Y_2^4 \\ &= Y_2^2\left(X_2^2 - X_2^3Y_2 - 2X_2Y_2 - 4X_2^2Y_2 + Y_2^2\right).\end{aligned}$$

em que $f^{(2)} = X_2^2 - 2X_2Y_2 + Y_2^2 - X_2^3Y_2 - 4X_2^2Y_2 = (X_2 - Y_2)^2 - X_2^3Y_2 - 4X_2^2Y_2$, ou seja, $(X_2 - Y_2)$ é a reta tangente à curva $f^{(2)}$.

Com o propósito de utilizar a Proposição 4.8 que nos dá o número de passos necessários na explosão para que a multiplicidade da curva diminua, vamos utilizar o Lema 4.7, determinando um automorfismo $\phi : \mathbb{C}[[X,Y]] \longrightarrow \mathbb{C}[[X,Y]]$ de modo que $I\left(\phi\left(f^{(1)}\right), X_1\right)$ não seja múltiplo de $m\left(f^{(1)}\right) = 2$. Veja que $\phi\left(f^{(1)}\right)$ permanece na mesma classe de equivalência da curva $\left(f^{(1)}\right)$. Da prova do Lema 4.7, basta tomarmos $\phi(X_1,Y_1) = (X_1 + Y_1^2, Y_1)$. Assim,

$$f^{(1)}(X_1 + Y_1^2, Y_1) = X_1^2 - X_1^3 - 4X_1^2Y_1 - 3X_1^2Y_1^2 - 8X_1Y_1^3 - 3X_1Y_1^4 - 4Y_1^5 - Y_1^6.$$

Com um certo abuso de notação passamos a denotar $f^{(1)}(X_1 + Y_1^2, Y_1)$ por $f^{(1)}(X_1, Y_1)$. Vamos explodir a transformada total $\pi_1^{-1}(f) = E_1 \cup \left(f^{(1)}\right)$.

Aplicando a transformação τ duas vezes pois $I\left(f^{(1)}, X_1\right) = 5$ e $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \tau(E_1) &= X_2Y_2, \\ \tau\left(f^{(1)}\right) &= Y_2^2\left(X_2^2 - 4X_2^2Y_2 - 8X_2Y_2^2 - X_2^3Y_2 - 4Y_2^3 - 3X_2^2Y_2^2 - 3X_2Y_2^3 - Y_2^4\right). \end{aligned}$$

Logo, o divisor excepcional $E_2 = (Y_2)$ e as transformadas estritas de E_1 e $\left(f^{(1)}\right)$ são respectivamente: $E_1^{(1)} = (X_2)$ e

$$f^{(2)} = X_2^2 - 4X_2^2Y_2 - 8X_2Y_2^2 - X_2^3Y_2 - 4Y_2^3 - 3X_2^2Y_2^2 - 3X_2Y_2^3 - Y_2^4.$$

Finalmente, $\tau\left(E_1^{(1)}\right) = X_3Y_3$, $\tau(E_2) = Y_3 = Y_3 \cdot 1$ e

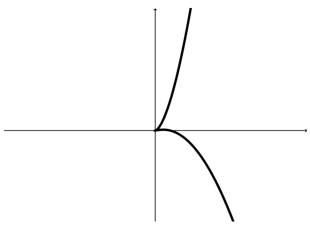
$$\tau\left(f^{(2)}\right) = Y_3^2\left(X_3^2 - 4X_3^2Y_3 - 8X_3Y_3 - X_3^3Y_3^2 - 4Y_3 - 3X_3^2Y_3^2 - 3X_3Y_3^2 - Y_3^2\right).$$

Assim $E_3 = (Y_3)$, $E_2^{(1)} = (1)$, $E_1^{(2)} = (X_3)$ e

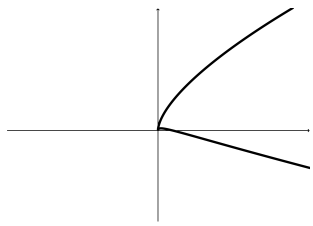
$$f^{(3)} = -4Y_3 - Y_3^2 + X_3^2 - 8X_3Y_3 - 4X_3^2Y_3 - 3X_3Y_3^2 - 3X_3^2Y_3^2 - X_3^3Y_3^2.$$

A curva definida por $f^{(3)}$ é uma curva regular e portanto a sequência de multiplicidades de (f) é $(4, 2, 2, 1)$.

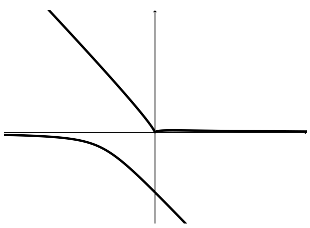
As figuras abaixo representam o traço real das curvas $\left(f^{(i)}\right)$ obtidas em cada etapa desse processo.



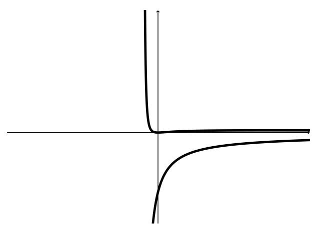
(c) Traço real de (f).



(d) Traço real de $\left(f^{(1)}\right)$.



(e) Traço real de $\left(f^{(2)}\right)$.



(f) Traço real de $\left(f^{(3)}\right)$.

Vamos agora definir o que se entende por resolução mergulhada de uma curva.

Definição 4.13. *Dizemos que uma coleção de curvas em uma superfície regular S tem* **cruzamentos normais***, se cada curva da coleção é regular, quaisquer duas curvas são transversais e não existem três curvas se interceptando num mesmo ponto.*

Definição 4.14. *Seja C uma curva contida em uma superfície regular S e P um ponto singular de C. Uma* **resolução mergulhada de** *C é uma resolução $\pi : T \longrightarrow S$ tal que se $E = \pi^{-1}(P)$ então π induz um isomorfismo, também denotado por π, de $T\backslash E \longrightarrow S\backslash\{P\}$ satisfazendo que a coleção $\pi^{-1}(C)$ das curvas possuem cruzamentos normais. As curvas desta coleção são as curvas excepcionais de π e as componentes da transformada estrita de C.*

Qualquer curva plana admite uma resolução mergulhada.

Teorema 4.15. *(***Resolução Mergulhada de Curvas***) Seja C uma curva plana irredutível em $T_0 = \mathbb{C}^2$. Então existe uma sequência finita de transformações quadráticas $\mathbb{C}^2 = T_0 \longleftarrow T_1 \longleftarrow T_2 \longleftarrow \ldots \longleftarrow T_N$ tais que se $\pi : T_N \longrightarrow T_0$ é sua composição, então a imagem inversa total $\pi^{-1}(C)$ possui cruzamentos normais.*

Definição 4.16. *Uma resolução mergulhada π é dita minimal se a resolução com cruzamentos normais foi obtida no menor número de explosões, ou seja, é "minimal" com respeito às resoluções com esta propriedade.*

Uma maneira combinatória de apresentar o processo de resolução de singularidades de uma curva é através do seu grafo dual. Um grafo Γ consiste num conjunto de pontos V_i chamados vértices e um conjunto de arestas ligando um par de vértices. Considere $\pi_N : T_N \longrightarrow T_0$ uma resolução mergulhada de C que sempre vamos considerar minimal. Considere os divisores excepcionais E_i para $0 \leq i < N$ e as transformadas estritas $C_j^{(N)}$ em T_N.

Definição 4.17. *Com a notação introduzida acima, definimos o* **grafo dual** *$\Gamma(C)$ da resolução mergulhada minimal π_N como sendo um grafo abstrato em que:*

(a) cada vértice de $\Gamma(C)$ representa uma curva E_i;

(b) dois vértices são conectados por uma aresta se, e somente se, as curvas representadas por eles se intersectam.

No grafo dual $\Gamma(C)$ vamos representar a transformada estrita de C em T_N por uma flecha no vértice de $\Gamma(C)$ que representa a única componente do divisor excepcional de T_N que ela intersecta.

Exemplo 4.18. *Vamos determinar o grafo dual associado á resolução mergulhada minimal da curva (f) em que $f = Y^4 - X^3$ cujo cone tangente é (X^3). Para simplificar a* *notação vamos utilizar para todas as explosões, coordenadas* (X,Y)*. Como* $I(f,X)=4$ *e* $3 \nmid 4$ *então vamos explodir* $\left[\frac{4}{3}\right]=1$ *vez na segunda carta*

$$\tau(f)=f(XY,Y)=Y^3(Y-X^3).$$

Assim, $E_1=(Y)$ *e* $f^{(1)}=Y-X^3$*. Observe que* $f^{(1)}$ *é uma curva regular, entretanto* $f^{(1)}$ *e* E_1 *possuem a mesma reta tangente (não são transversais), ou ainda,* $I\left(f^{(1)},E_1\right)=3$*. Continuamos o processo explodindo* $\left[\frac{3}{1}\right]=3$ *vezes na primeira carta:*

$$\sigma(E_1)=XY \quad e \quad \sigma\left(f^{(1)}\right)=X\left(Y-X^2\right).$$

Logo, $E_1^{(1)}=(Y),\ E_2=(X)$ *e* $f^{(2)}=Y-X^2$*. Novamente,*

$$\sigma\left(E_1^{(1)}\right)=XY,\ \sigma\left(E_2\right)=X\cdot 1 \quad e \quad \sigma\left(f^{(2)}\right)=X(Y-X).$$

Ou seja, $E_1^{(2)}=(Y),\ E_2^{(1)}=(1),\ E_3=(X)$ *e* $f^{(2)}=Y-X$*. E finalmente*

$$\sigma\left(E_1^{(2)}\right)=XY,\ \sigma(E_3)=X\cdot 1 \quad e \quad \sigma\left(f^{(3)}\right)=X(Y-1).$$

Portanto, $E_1^{(3)}=(Y),\ E_3^{(1)}=(1),\ E_4=(X)$ *e* $f^{(4)}=Y-1$*.*

Deste modo todas as curvas da imagem inversa total $\pi^{-1}(f)$ *possuem cruzamentos normais.*

O grafo dual da resolução mergulhada minimal de (f) *é*

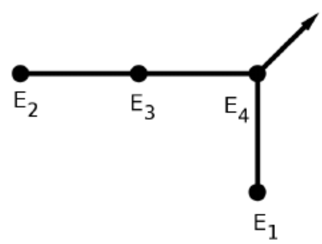


Figura 4.1: Grafo dual da resolução de (f).

CAPÍTULO 5

RAÍZES APROXIMADAS DE CURVAS

Todos os conceitos e resultados apresentados anteriormente vão servir de suporte para o objetivo deste trabalho que é o estudo de raízes aproximadas especiais de uma dada curva plana, chamadas raízes aproximadas características. Estas raízes são, num certo sentido, aproximações da curva e têm sido foco de interesse de vários pesquisadores que em especial destacamos: [1], [3], [4], [9], [10], [14], entre outros. As principais referências para este capítulo são [10], [14] e [15]. Iniciamos introduzindo os conceitos de raízes aproximadas e semirraízes. Em seguida definimos as raízes características de uma curva e analisamos o processo de resolução mergulhada da curva e de quaisquer semirraízes dela, que em particular incluem as raízes características.

5.1 Raízes Aproximadas

Num contexto mais geral vamos estudar as raízes aproximadas de um polinômio e demonstrar algumas de suas propriedades.

Seja A um anel comutativo com unidade, sem divisores de zero. Denotaremos por $A[Y]$ o anel dos polinômios com coeficientes em A na indeterminada Y. Se $P \in A[Y]$, denotaremos por $d(P)$ o seu grau.

Dado um polinômio $P \in A[Y]$ mônico de grau n e r um divisor de n, podemos perguntar se é possível obter $Q \in A[Y]$ tal que $P = Q^r$? ou seja, existe uma "raiz exata" de ordem r do polinômio P? Em geral esta pergunta não tem solução. Uma outra abordagem seria buscar uma melhor aproximação $Q \in A[Y]$ para a igualdade $P = Q^r$, no sentido de que $P - Q^r$ seja um polinômio com o menor grau possível. Nem sempre tal polinômio Q vai existir, todavia vamos dar algumas condições que garantem a existência e unicidade de tal polinômio.

Proposição 5.1. *Sejam $P \in A[Y]$ mônico e $r \in \mathbb{N}^*$ um divisor de $d(P) = n$, com r inversível em A. Então existe um único polinômio mônico $Q \in A[Y]$ tal que*

$$d(P - Q^r) < d(P) - \frac{d(P)}{r}.$$

Demonstração. Considere $P = Y^n + \alpha_1 Y^{n-1} + \cdots + \alpha_n$, com $\alpha_i \in A$. Observe que se um tal polinômio Q existir satisfazendo a condição desejada então $d(Q) = \frac{n}{r}$. De fato, sabemos que $d(P - Q^r) \leq \max\{d(P), d(Q^r)\}$. Se $d(P - Q^r) < d(P) - \frac{d(P)}{r} < d(P)$ então $d(P) = d(Q^r)$, caso contrário se $d(P) < d(Q^r)$ então $d(P - Q^r) = d(Q^r)$ o que contradiz o fato de $d(P - Q^r) < d(P)$. Analogamente no outro caso. Logo, $d(Q) = \frac{n}{r}$.

Considere

$$Q = Y^{\frac{n}{r}} + a_1 Y^{\frac{n}{r}-1} + \cdots + a_{\frac{n}{r}}. \tag{5.1}$$

Supondo que Q satisfaz a condição $d(P - Q^r) < d(P) - \frac{d(P)}{r}$ então os coeficientes de $Y^n, Y^{n-1}, \ldots, Y^{n-\frac{n}{r}}$ do polinômio Q^r são todos nulos. Isto nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= ra_1 \\
\alpha_2 &= ra_2 + \binom{r}{2} {a_1}^2 \\
&\vdots \\
\alpha_k &= ra_k + \sum_{i_1+2i_2+\cdots+(k-1)i_{k-1}=k} c_{i_1,\ldots,i_{k-1}} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}, \ 1 \leq k \leq \frac{n}{r},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde $c_{i_1,\ldots i_{k-1}}$ são obtidos a partir do desenvolvimento do binômio de Newton e são apresentados a seguir:

$$c_{i_1,\ldots,i_{k-1}} = \binom{r}{i_1 + \cdots + i_{k-1}} \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_{k-1})!}{i_1! \cdots i_{k-1}!}.$$

Sendo r inversível em A podemos determinar sucessivamente $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n}{r}}$ e assim obter uma única solução para o sistema acima. Da existência e unicidade dos coeficientes $a_1, \ldots, a_{\frac{n}{r}}$, que dependem apenas dos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{n}{r}}$, temos a existência e unicidade do polinômio Q. □

Definição 5.2. *Sejam A um anel, $P \in A[Y]$ mônico de grau n e $r \in \mathbb{N}^*$ um divisor de n com r inversível em A. O único polinômio Q obtido na proposição anterior é dita a* r***-raiz aproximada de*** *P, denotado por $\sqrt[r]{P}$.*

Exemplo 5.3. *(a) Seja $P = Y^n + \alpha_1 Y^{n-1} + \cdots + \alpha_n \in A[Y]$ mônico de grau n. Se n é inversível em A então da demonstração da Proposição 5.1 temos que a n-raiz aproximada* *de P é*

$$\sqrt[n]{P} = Y + a_1 = Y + \frac{\alpha_1}{n}.$$

E de (5.1) segue que $\sqrt{P} = P$, ou seja, a 1-raiz aproximada de P é ele mesmo.

(b) Considere $P = Y^4 + X^2Y^3 - (X+1)Y + X^4 - 1 \in \mathbb{C}[[X]][Y]$. Vamos determinar a 4-raiz e a 2-raiz aproximada deste polinômio. Por (a) temos que a 4-raiz aproximada de P é $\sqrt[4]{P} = Y + \frac{X^2}{4}$. Determinar a 2-raiz aproximada de P pela Proposição 5.1 é equivalente a determinar um polinômio $Q = Y^2 + a_1Y + a_2 \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ cujos coeficientes satisfazem (5.2). Como $\alpha_1 = X^2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -X - 1$ e $\alpha_4 = X^4 - 1$ temos que $2a_1 = X^2$ e $2a_2 + a_1^2 = 0$. Logo $a_1 = \frac{X^2}{2}$ e $a_2 = -\frac{X^4}{8}$ e portanto

$$\sqrt[2]{P} = Q = Y^2 + \frac{X^2}{2}Y - \frac{X^4}{8}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} P - Q^2 &= Y^4 + X^2Y^3 - (X+1)Y + X^4 - 1 - \left(Y^2 + \frac{X^2}{2}Y - \frac{X^4}{8}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{X^6}{8} - X - 1\right)Y + X^4 - 1 - \frac{X^8}{64} \end{aligned}$$

que satisfaz $d(P - Q^2) = 1 < d(P) - \frac{d(P)}{2}$.

Na proposição a seguir provamos uma propriedade que justifica a escolha da notação de raiz.

Proposição 5.4. *Sejam $P \in A[Y]$ mônico de grau n e $r, s \in \mathbb{N}^*$ inversíveis em A tais que r e s sejam divisores de n. Então $\sqrt[s]{\sqrt[r]{P}} = \sqrt[rs]{P}$.*

Demonstração. Denotemos $Q = \sqrt[r]{P}$ e $R = \sqrt[s]{Q}$. Por definição $d(R) = \frac{d(Q)}{s} = \frac{d(P)}{rs}$. Considerando $S = Q - R^s$ segue da definição de R que

$$d(S) = d(Q - R^s) < d(Q) - \frac{d(Q)}{s} = \frac{d(P)}{r} - \frac{d(P)}{rs}. \tag{5.3}$$

Temos ainda, $P - Q^r = P - (R^s + S)^r = P - R^{rs} - \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} S^k R^{s(r-k)}$, donde segue que

$$P - R^{rs} = P - Q^r + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} S^k R^{s(r-k)}. \tag{5.4}$$

Além disso, de (5.3) obtemos:

$$\begin{aligned} d\left(S^k R^{s(r-k)}\right) &= kd(S) + s(r-k)d(R) < k\left(\frac{d(P)}{r} - \frac{d(P)}{rs}\right) + s(r-k)\frac{d(P)}{rs} \\ &= d(P) - k\frac{d(P)}{rs} \leq d(P) - \frac{d(P)}{rs}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

pois $k \geq 1$.

Assim temos de (5.4) e (5.5) que

$$\begin{aligned} d(P - R^{rs}) &\leq \max\{d(P-Q^r), d(S^k R^{r-k}), \quad \text{com } 1 \leq k \leq r\} \\ &< \max\left\{d(P) - \frac{d(P)}{r}, d(P) - \frac{d(P)}{rs}\right\} = d(P) - \frac{d(P)}{rs}. \end{aligned}$$

Portanto, $R = \sqrt[s]{Q} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{P}} = \sqrt[rs]{P}$. □

No resultado a seguir vamos considerar $P, Q \in A[Y]$ mônicos e portanto $d(P), d(Q) \geq 1$. Assim podemos aplicar recursivamente o algoritmo da divisão de modo a obter uma decomposição de P em termos de Q.

Proposição 5.5. *Dados P e Q em $A[Y]$ mônicos com $Q \neq 0$, existe uma única expansão do tipo:*

$$P = a_0 Q^s + a_1 Q^{s-1} + \cdots + a_s,$$

onde $a_0, \ldots, a_s \in A[Y]$, com $a_i = 0$ ou $d(a_i) < d(Q)$ para todo $i \in \{0, \ldots, s\}$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão, se $d(P) < d(Q)$ então $P = 0 \cdot Q + P$, ou seja, $a_0 = 0, s = 1$ e $a_1 = P$. Se $d(P) \geq d(Q)$ então

$$P = S_0 Q + R_0, \tag{5.6}$$

em que $R_0 = 0$ ou $d(R_0) < d(Q)$. Se $d(S_0) < d(Q)$ o processo para. Caso contrário, efetuamos a divisão de S_0 por Q, obtendo $S_0 = S_1 Q + R_1$ com $R_1 = 0$ ou $d(R_1) < d(Q)$. Prosseguimos assim até obtermos para um índice $s-2$ que $S_{s-2} = S_{s-1}Q + R_{s-1}$ com $d(S_{s-1}) < d(Q)$ e $R_{s-1} = 0$ ou $d(R_{s-1}) < d(Q)$. Substituindo recursivamente as expressões de $S_0, \ldots, S_{s-2}$ na Equação (5.6) obtemos

$$\begin{aligned} P &= (S_1 Q + R_1)Q + R_0 = S_1 Q^2 + R_1 Q + R_0 \\ &= (S_2 Q + R_2)Q^2 + R_1 Q + R_0 = S_2 Q^3 + R_2 Q^2 + R_1 Q + R_0 \\ &\vdots \\ &= S_{s-1}Q^s + R_{s-1}Q^{s-1} + R_{s-2}Q^{s-2} + \cdots + R_2 Q^2 + R_1 Q + R_0, \end{aligned}$$

onde $R_0, R_1, \ldots, R_{s-1}, R_s := S_{s-1} \in A[Y]$, com $R_i = 0$ ou $d(R_i) < d(Q)$ para $i = 0, \ldots, s$. A unicidade segue do processo de divisão. □

Definição 5.6. *Dados $P, Q \in A[Y]$ mônicos com $Q \neq 0$, definimos a Q-expansão de P pela única expansão de P na forma:*

$$P = a_0 Q^s + a_1 Q^{s-1} + \cdots + a_s, \tag{5.7}$$

onde $a_0, \ldots, a_s \in A[Y]$ e $a_i = 0$ ou $d(a_i) < d(Q)$ para todo $i \in \{0, \ldots, s\}$.

Proposição 5.7. *Dados $P, Q \in A[Y]$ mônicos, consideremos a Q-expansão de P como em (5.7). São válidas as seguintes afirmações:*

(i) $d\left(a_i Q^{s-i}\right) > d\left(a_j Q^{s-j}\right)$ *se* $i < j$, *com* $a_i, a_j \neq 0$;

(ii) $s = \left[\frac{d(P)}{d(Q)}\right]$;

(iii) $a_0 = 1$ *se, e somente se,* $d(Q) \mid d(P)$. *Mais ainda, se s for inversível em A,* $a_1 = 0$ *se, e somente se,* $Q = \sqrt[s]{P}$.

Demonstração. (i) Como $a_i, a_j \neq 0$ e $d(Q) \geq 1$ pois Q é mônico temos que

$$\begin{aligned} d(a_i Q^{s-i}) - d(a_j Q^{s-j}) &= d(a_i) + (s-i)d(Q) - d(a_j) - (s-j)d(Q) \\ &= d(a_i) - d(a_j) + (j-i)d(Q) > 0, \end{aligned}$$

pois $j > i$ e $d(a_j) < d(Q) \leq (j-i)d(Q)$.
(ii) Seja $P = a_0 Q^s + a_1 Q^{s-1} + \cdots + a_s$. Pelo item (i) temos que

$$d(P) = d(a_0 Q^s) = d(a_0) + sd(Q),$$

com $d(a_0) < d(Q)$. Portanto $s = \left[\frac{d(P)}{d(Q)}\right]$.
(iii) Supondo $a_0 = 1$, por (ii) temos $d(P) = sd(Q)$. Portanto $d(Q) \mid d(P)$.

Reciprocamente suponha que $d(Q) \mid d(P)$. Vamos mostrar primeiramente que a_0 é mônico. Suponha $a_0 = c_0 Y^r + c_1 Y^{r-1} + \cdots + c_r$; $c_i \in A$, $i = 0, \ldots, r$, com $c_0 \neq 0$. Dessa forma $a_0 Q^s = c_0 Y^{r+sd(Q)} + \cdots$. Como c_0 é o coeficiente líder da Q-expansão de P, segue de (5.7) e do fato de P ser mônico que $c_0 = 1$. Pelo item (ii) temos que $d(P) = d(a_0) + sd(Q)$ com $d(a_0) < d(Q)$, isto é, $d(a_0)$ é o resto da divisão de $d(P)$ por $d(Q)$. Como por hipótese $d(Q) \mid d(P)$, concluímos que $d(a_0) = 0$ portanto $a_0 = 1$.

Suponhamos agora que $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. Vamos provar que $Q = \sqrt[s]{P}$. Por hipótese $d(P) = sd(Q)$ então

$$\begin{aligned} d(a_2 Q^{s-2}) &= d(a_2) + (s-2)d(Q) < d(Q) + (s-2)d(Q) \\ &= (s-1)d(Q) = d(P) - d(Q) = d(P) - \frac{d(P)}{s}. \end{aligned}$$

Logo, $P - Q^s = a_2 Q^{s-2} + \cdots + a_s$ e $d(P - Q^s) = d(a_2 Q^{s-2}) < d(P) - \frac{d(P)}{s}$. Portanto $Q = \sqrt[s]{P}$.

Reciprocamente, suponha $Q = \sqrt[s]{P}$, ou seja, $d(P - Q^s) < d(P) - \frac{d(P)}{s}$.

Como $P - Q^s = a_1 Q^{s-1} + a_2 Q^{s-2} + \cdots + a_s$ e por (i) temos $d(a_i Q^{s-i}) > d(a_j Q^{s-j})$ para $i < j$, então se $a_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} d(P - Q^s) &= d(a_1 Q^{s-1}) = d(a_1) + (s-1)d(Q) \\ &= d(a_1) + d(P) - d(Q) = d(a_1) + d(P) - \frac{d(P)}{s} \geq d(P) - \frac{d(P)}{s}, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto $a_1 = 0$. □

Exemplo 5.8. *Retornemos ao Exemplo 5.3 item (b) e consideremos $Q = Y^2 - 1$. Temos que a Q-expansão de P é*

$$P = Q^2 + \left(X^2Y + 2\right) Q + (X^2 - X - 1)Y + X^4.$$

Se considerarmos o polinômio $R = Y^3$ temos que a R-expansão de P é

$$P = \left(Y + X^2\right) R + (-X - 1)Y + X^4 - 1.$$

Note que é possível determinar a Q-expansão do polinômio P qualquer que seja Q, entretanto para garantir a propriedade (iii) da proposição anterior é essencial que o grau de Q seja um divisor do grau de P.

O próximo resultado nos permitirá obter um algoritmo para determinar uma raiz aproximada.

Definição 5.9. *Sejam $P, Q \in A[Y]$ mônicos com $d(Q) \mid d(P)$ e considere a Q-expansão de P dada por $P = Q^s + a_1 Q^{s-1} + \cdots + a_s$ com $s = \frac{d(P)}{d(Q)}$ e $d(a_i) < d(Q)$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Vamos supor que s seja inversível em A. Definimos o* ***operador de Tschirnhausen*** *τ_P de P pela expressão:*

$$\tau_P(Q) := Q + \frac{1}{s} a_1.$$

Denotaremos por $\tau_P^j(Q)$ a iterada de τ_P, j-vezes aplicada a Q.

Lema 5.10. *Temos que $d(\tau_P^j(Q)) = d(Q)$.*

Demonstração. Como estamos assumindo $P, Q \in A[Y]$ mônicos e $s = \frac{d(P)}{d(Q)}$ inversível em A então a Q-expansão de P pode ser dada da forma:

$$P = Q^s + a_1 Q^{s-1} + \cdots + a_s$$

com $d(a_k) < d(Q)$ para $k = 1, \ldots, s$. Assim $\tau_P(Q) = Q + \frac{a_1}{s}$ satisfaz $d(\tau_p(Q)) = d(Q)$. Agora a $\tau_P(Q)$-expansão de P também é da forma:

$$P = (\tau_P(Q))^s + a_{1,1}(\tau_P(Q))^{s-1} + \cdots + a_{1,s},$$

com $d(a_{1,k}) < d(\tau_p(Q)) = d(Q)$ para $k = 1, \ldots, s$, pois $s = \frac{d(P)}{d(Q)} = \frac{d(P)}{d(\tau_p(Q))}$. Logo, $\tau_P^2(Q) = \tau_P(Q) + \frac{a_{1,1}}{s} = Q + \frac{a_1 + a_{1,1}}{s}$ e portanto $d(\tau_P^2(Q)) = d(Q)$. E assim sucessivamente, a $\tau_P^{j-1}(Q)$-expansão de P,

$$P = \left(\tau_P^{j-1}(Q)\right)^s + a_{j-1,1}\left(\tau_P^{j-1}(Q)\right)^{s-1} + \cdots + a_{j-1,s},$$

com $d(a_{j-1,k}) < d(Q)$ para $k = 1, \ldots, s$ e assim

$$\tau_P^j(Q) = \tau_P^{j-1}(Q) + \frac{a_{j-1,1}}{s} = Q + \frac{a_1 + a_{1,1} + \cdots + a_{j-1,1}}{s}.$$

Por construção, $d(\tau_P^j(Q)) = d(Q)$ já que $d(a_{l,1}) < d(Q)$ para todo $l = 1, \ldots, j-1$. $\square$

Exemplo 5.11. *Seja $P = Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_n \in A[Y]$ com n inversível em A. Veja que essa é a Y-expansão de P. Assim $\tau_P(Y) = Y + \frac{1}{n}a_1 = \sqrt[n]{P}$. Essa última igualdade foi mostrada no Exemplo 5.3.*

A próxima proposição generaliza o resultado apresentado neste exemplo.

Proposição 5.12. *Sejam $P \in A[Y]$ mônico e r um número natural inversível em A tal que $r \mid d(P)$. Então, para todo $Q \in A[Y]$ mônico com $d(Q) = \frac{d(P)}{r}$ temos que*

$$\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q) = \sqrt[r]{P}.$$

Demonstração. Sejam $Q \in A[Y]$ mônico com $d(Q) = \frac{d(P)}{r}$. Pela Proposição 5.7 item (iii) segue que a Q-expansão de P é da forma:

$$P = Q^r + a_1 Q^{r-1} + \cdots + a_r,$$

ou seja, $a_0 = 1$ com $d(a_i) < d(Q)$ para $i = 1, \ldots, r$. Sendo assim temos dois casos a considerar:

(i) Se $a_1 = 0$ temos que $\tau_P(Q) = Q$. E claramente pela Proposição 5.7 (iii) $\tau_P(Q)$ é a r-raiz aproximada de P. Assim $\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q) = Q = \sqrt[r]{P}$.

(ii) Se $a_1 \neq 0$ considere para k fixado a $\tau_P^k(Q)$-expansão de P dada por:

$$P = \left(\tau_p^k(Q)\right)^r + a_{k,1}\left(\tau_p^k(Q)\right)^{r-1} + \cdots + a_{k,r}, \tag{5.8}$$

em que $d(a_{k,i}) < d\left(\tau_p^k(Q)\right) = d(Q)$ para $i = 1, \ldots, r$. Vamos mostrar que se $a_{1,1} \neq 0$ então $d(a_{1,1}) < d(a_1)$.

(1) Como $a_0 = 1$ temos

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{l=0}^{r} a_l Q^{r-l} = Q^r + a_1 Q^{r-1} + \sum_{l=2}^{r} a_l Q^{r-l} + \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{{a_1}^l}{r^l} Q^{r-l} - \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{{a_1}^l}{r^l} Q^{r-l} \\
&= \left(Q^r + a_1 Q^{r-1} + \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{{a_1}^l}{r^l} Q^{r-l} \right) + \sum_{l=2}^{r} a_l Q^{r-l} - \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{{a_1}^l}{r^l} Q^{r-l} \\
&= \left(Q + \frac{a_1}{r} \right)^r + \sum_{l=2}^{r} a_l Q^{r-l} - \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{{a_1}^l}{r^l} Q^{r-l}. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Logo,

$$P - \tau_P(Q)^r = \sum_{l=2}^{r} a_l Q^{r-l} - \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{{a_1}^l}{r^l} Q^{r-l}. \qquad (5.10)$$

(2) Temos $d\left(a_l Q^{r-l}\right) < (r-1)d(Q)$ para $l \geq 2$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
d\left(a_l Q^{r-l}\right) &= d(a_l) + (r-l)d(Q) < d(Q) + (r-l)d(Q) \\
&\leq d(Q) + (r-2)d(Q) = (r-1)d(Q).
\end{aligned}$$

(3) Segue que $d\left({a_1}^l Q^{r-l}\right) = l \cdot d(a_1) + (r-l)d(Q) < l \cdot d(Q) + (r-l)d(Q) = r \cdot (Q)$.

(4) Sejam as $\tau_P(Q)$-expansões de $a_l Q^{r-l}$ e de ${a_1}^l Q^{r-l}$ dadas por:

$$a_l Q^{r-l} = \sum_{j=0}^{s_l} e_{l,j} (\tau_P(Q))^{s_l - j} \qquad \text{e} \qquad a_1^l Q^{r-l} = \sum_{h=0}^{t_l} c_{l,h} (\tau_P(Q))^{t_l - h}, \qquad (5.11)$$

onde $l = 2, \ldots, r$, $s_l = \left[\frac{d(a_l Q^{r-l})}{d(\tau_P(Q))}\right]$, $t_l = \left[\frac{d({a_1}^l Q^{r-l})}{d(\tau_P(Q))}\right]$, $d(e_{l,j}) < \frac{d(P)}{r}$ para todos para todo $j = 0, \ldots, s_l$ e $h = 0, \ldots, t_l$ e $d(c_{l,h}) < \frac{d(P)}{r}$, pois $d(\tau_P(Q)) = d(Q) = \frac{d(P)}{r}$. Por (2) e (3) temos que $s_l \leq r-2$ e $t_l \leq r-1$, já que $s_l = \left[\frac{d(a_l Q^{r-l})}{d(\tau_P(Q))}\right] \leq \frac{d(a_l Q^{r-l})}{d(Q)} < r-1$. Analogamente no outro caso.

(5) Substituindo as Equações (5.11) na Equação (5.10) obtemos:

$$P - \tau_P(Q)^r = \sum_{l=2}^{r} \sum_{j=0}^{s_l} e_{l,j} (\tau_P(Q))^{s_l - j} - \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{1}{r^l} \sum_{h=0}^{t_l} c_{l,h} (\tau_P(Q))^{t_l - h}. \qquad (5.12)$$

Como a $\tau_P(Q)$-expansão de P é dada por $P = \sum_{h=0}^{r} a_{1,h} (\tau_P(Q))^{r-h}$ em que $a_{1,0} = 1$, então igualando a expressão de $P - \tau_P(Q)^r$ (na $\tau_P(Q)$-expansão de P) e a Expressão (5.12) obtemos:

$$\sum_{l=2}^{r} \sum_{j=0}^{s_l} e_{l,j} (\tau_P(Q))^{s_l - j} - \sum_{l=2}^{r} \binom{r}{l} \frac{1}{r^l} \sum_{h=0}^{t_l} c_{l,h} (\tau_P(Q))^{t_l - h} = \sum_{h=1}^{r} a_{1,h} (\tau_P(Q))^{r-h}.$$

Como $s_l \leq r-2,\ t_l \leq r-1$ e segue de (5.11) que para todo l tal que $t_l = r-1$ então da expressão acima o coeficiente $a_{1,1}$ de $\tau_P(Q)^{r-1}$ é dado por:

$$a_{1,1} = -\sum_{t_l=r-1}^{r} \binom{r}{l} \frac{c_{l,0}}{r^l}. \tag{5.13}$$

Agora vamos mostrar que para todo $l \in \{2, \dots, r\}$ tal que $t_l = r-1$ temos que $d(c_{l,0}) < d(a_1)$.

Da Equação (5.11) temos que $d({a_1}^l Q^{r-l}) = d(c_{l,0}\tau_P(Q)^{t_l})$. Desta forma, para $t_l = r-1$

$$d(c_{l,0}) = l \cdot d(a_1) + (r-l)d(Q) - d(\tau_P(Q)^{t_l}) = l \cdot d(a_1) + (1-l)d(Q).$$

Como $l \geq 2$ temos $(l-2)d(a_1) < (l-2)d(Q)$, ou seja,

$$d(c_{l,0}) = ld(a_1) - ld(Q) + d(Q) < 2d(a_1) - d(Q) = d(a_1) + (d(a_1) - d(Q)) < d(a_1).$$

Concluímos assim de (5.13) que $d(a_{1,1}) < d(a_1)$.

Observe que se $a_{1,1} = 0$ então $\tau_P^2(Q) = \tau_P(Q)$, em particular $\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q) = \tau_P(Q) = \sqrt[r]{P}$ pela Proposição 5.7.

Se $a_{1,1} \neq 0$ como $d(a_1) > d(a_{1,1})$ temos que a cada iterada obtemos $d(a_1) > d(a_{1,1}) > d(a_{2,1}) > \cdots$ e portanto, existe j com $1 \leq j \leq d(a_1)$ tal que $d(a_{j,1}) = 0$. Assim necessariamente para $j = d(a_1) + 1$ temos que o coeficiente $a_{d(a_1)+1,1} = 0$. Mas $d(a_1) + 1 < d(Q) + 1 = \frac{d(P)}{r} + 1$, ou seja, no máximo em $\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q)$-expansão de P temos $a_{\frac{d(P)}{r},1} = 0$. Logo,

$$P - \left(\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q)\right)^r = a_{\frac{d(P)}{r},2}\left(\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q)\right)^{r-2} + \cdots + a_{\frac{d(P)}{r},r}$$

o que implica $d\left(P - \left(\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q)\right)^r\right) < (r-1)d\left(\tau_P^{\frac{d(P)}{r}}(Q)\right) = (r-1)d(Q) = d(P) - \frac{d(P)}{r}$. □

Exemplo 5.13. *(a) Como no Exemplo 5.8, se* $P = Y^4 + X^2Y^3 - (X+1)Y + X^4 - 1$ *e* $Q = Y^2 - 1$ *temos que a* Q*-expansão de* P *é*

$$P = Q^2 + (X^2Y + 2)Q + (X^2 - X - 1)Y + X^4.$$

Logo, $\tau_P(Q) = Q + \frac{X^2Y+2}{2} = Y^2 + \frac{X^2}{2}Y$. *Pela Proposição 5.12,* $\sqrt[2]{P} = \tau_P^2(Q)$.

Para calcularmos $\tau_P^2(Q)$ *temos que obter a* $\tau_P(Q)$*-expansão de* P*, a qual é dada por:*

$$P = \tau_P(Q)^2 - \frac{X^4}{4}\tau_P(Q) + \left(\frac{X^6}{8} - X - 1\right)Y + X^4 - 1.$$

Assim, $\tau_P^2(Q) = \tau_P(Q) - \frac{X^4}{8} = Y^2 + \frac{X^2}{2}Y - \frac{X^4}{8} = \sqrt[2]{P}$, *verificando o resultado já obtido no Exemplo 5.3 (b).*

(b) Consideremos $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ *dada por*

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= Y^8 + (-4X^3)Y^6 + (-8X^5)Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (16X^8 - 24X^9)Y^3 \\ &\quad +(36X^{10} - 20X^{11} - 4X^9)Y^2 + (-8X^{11} - 8X^{13} + 16X^{12})Y \\ &\quad +(X^{12} - X^{15} + 21X^{14} + 6X^{13}). \end{aligned}$$

Vamos determinar todas as raízes aproximadas de f.

A 1-raiz aproximada de f *é ela própria e* $\sqrt[8]{f} = Y$.

Escolhendo o polinômio $Q = Y^2$ *temos pela Proposição 5.12 que* $\sqrt[4]{f} = \tau_f^2\left(Y^2\right)$. *Assim a* Q*-expansão de* f *é dada por:*

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= Q^4 + \left(-4X^3\right)Q^3 + \left(-8X^5Y + 6X^6 - 26X^7\right)Q^2 \\ &\quad +(16X^8Y - 24X^9Y + 36X^{10} - 20X^{11} - 4X^9)Q \\ &\quad +(-8X^{11} - 8X^{13} + 16X^{12})Y + X^{12} - X^{15} + 21X^{14} + 6X^{13}. \end{aligned}$$

Então, $\tau_f(Q) = Q + \frac{-4X^3}{4} = Y^2 - X^3$. *A* $\tau_f(Q)$*-expansão de* f *é dada por:*

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= \tau_f(Q)^4 + \left(-8X^5Y - 26X^7\right)\tau_f(Q)^2 + \left(-24X^9Y - 16X^{10} - 20X^{11}\right)\tau_f(Q) \\ &\quad + \left(-8X^{13} - 8X^{12}\right)Y + 16X^{13} + X^{14} - X^{15}. \end{aligned}$$

Como o coeficiente de $\tau_f(Q)^3$ *é zero temos que*

$$\sqrt[4]{f} = \tau_f^2(Q) = \tau_f(Q) = Y^2 - X^3.$$

Para determinar $\sqrt[2]{f}$ *escolhemos o polinômio* $R = Y^4$. *Pela Proposição 5.12,* $\sqrt[2]{f} = \tau_f^4(R)$. *A* R*-expansão de* f *é*

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= R^2 + \left(-4X^3Y^2 - 8X^5Y + 6X^6 - 26X^7\right)R + \left(16X^8 - 24X^9\right)Y^3 \\ &\quad + \left(36X^{10} - 20X^{11} - 4X^9\right)Y^2 + (-8X^{11} - 8X^{13} + 16X^{12})Y \\ &\quad +X^{12} - X^{15} + 21X^{14} + 6X^{13}. \end{aligned}$$

Então,

$$\tau_f(R) = Y^4 + \frac{-4X^3Y^2 - 8X^5Y + 6X^6 - 26X^7}{2} = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + 3X^6 - 13X^7.$$

E a $\tau_f(R)$-expansão de f é

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= \tau_f(R)^2 - 4X^6\tau_f(R) + \left(-24X^9\right)Y^3 + \left(-32X^{10} - 20X^{11}\right)Y^2 \\ &\quad - \left(88X^{12} + 8X^{13}\right)Y + 4X^{12} + 32X^{13} - 148X^{14} - X^{15}. \end{aligned}$$

Assim, $\tau_f^2(R) = \tau_f(R) + \frac{-4X^6}{2} = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - 13X^7$. A $\tau_f^2(R)$-expansão de f é dada por:

$$f = \left(\tau_f^2(R)\right)^2 - 24X^9Y^3 - 32X^{10}Y^2 - \left(88X^{12} + 8X^{13}\right)Y + 32X^{13} - 148X^{14} - X^{15}.$$

Como o coeficiente de $\tau_f^2(R)$ é zero, segue da Proposição 5.7 (iii) que

$$\sqrt[2]{f} = \tau_f^2(R) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - 13X^7.$$

Proposição 5.14. *Sejam $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y^{n-i} \in A[X_1, \ldots, X_m][Y]$ mônico de grau total n e r um divisor de n inversível em A. Então o grau total da r-raiz aproximada de P é $\frac{n}{r}$.*

Demonstração. Como na Equação (5.1) escrevemos a r-raiz aproximada de P por

$$Q = Y^{\frac{n}{r}} + a_1Y^{\frac{n}{r}-1} + \cdots + a_{\frac{n}{r}},$$

onde $\alpha_k = ra_k + \sum_{i_1+2i_2+\cdots+(k-1)i_{k-1}=k} c_{i_1,\ldots i_{k-1}} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}$ com $a_k \in A[X_1, \ldots, X_m]$ para $k = 1, \ldots, \frac{n}{r}$.

Mostraremos por indução que $d(a_k) \leq k$ para todo k.

Comecemos observando que como o grau total de P é n devemos ter $d(\alpha_iY^{n-i}) \leq n$. Assim $d(\alpha_i) \leq i$. Para $k = 1$ segue de (5.2) que $\alpha_1 = ra_1$, logo $d(a_1) = d(\alpha_1) \leq 1$. Suponhamos que o resultado seja válido para $k-1$, isto é, $d(a_{k-1}) \leq k-1$. Veja que

$$\begin{aligned} d(a_k) &= d\left(\frac{\alpha_k}{r} - \sum_{i_1+2i_2+\cdots+(k-1)i_{k-1}=k} c_{i_1,\ldots i_{k-1}} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}\right) \\ &\leq \max\{d(\alpha_k), i_1d(a_1) + i_2d(a_2) + \cdots + i_{k-1}d(a_{k-1})\} \\ &\leq \max\{d(\alpha_k), i_1 + 2i_2 + \cdots + (k-1)i_{k-1}\} = \max\{d(\alpha_k), k\} \leq k. \end{aligned}$$

□

Corolário 5.15. *Sejam $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y^{n-i} \in A[X_1, \ldots, X_m][Y]$ mônico com α_i homogêneo de grau i, $\forall i = 1, \ldots, n$ e r um divisor de n, inversível em A. Então se $Q = Y^{\frac{n}{r}} + a_1Y^{\frac{n}{r}-1} + \cdots + a_{\frac{n}{r}}$ é a r-raiz aproximada de P, tem-se que a_i é homogêneo de grau i para todo $i = 1, \ldots, \frac{n}{r}$.*

Proposição 5.16. *Sejam $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y^{n-i} \in A[[X_1, \ldots, X_m]][Y]$ mônico com $m(\alpha_i) \geq i$*

para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ e r um divisor de n, inversível em A. Então, se $Q = Y^{\frac{n}{r}} + a_1Y^{\frac{n}{r}-1} + \cdots + a_{\frac{n}{r}}$ é a r-raiz aproximada de P, com $a_k \in A[[X_1,\dots,X_m]]$ tem-se que $m(a_k) \geq k$ para todo $k = 1,\dots,\frac{n}{r}$.

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução. Para $k = 1$ temos $m(a_1) = m(\alpha_1) \geq 1$. Suponhamos que o resultado é válido para $k-1 \in \{2,\dots,\frac{n}{r}\}$. Observe que

$$\begin{aligned} m(a_k) &= m\left(\frac{\alpha_k}{r} - \sum_{i_1+2i_2+\cdots+(k-1)i_{k-1}=k} c_{i_1,\dots i_{k-1}} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}\right) \\ &\geq \max\{m(\alpha_k), i_1m(a_1) + i_2m(a_2) + \cdots + i_{k-1}m(a_{k-1})\} \\ &\geq \max\{m(\alpha_k), i_1 + 2i_2 + \cdots + i_{k-1}(k-1)\} = \max\{m(\alpha_k), k\} \ \geq \ k. \end{aligned}$$

□

Segue deste resultado que se P é um polinômio de Weierstrass então $\sqrt[r]{P}$ também o é.

5.2 Semirraiz

O objetivo deste trabalho é o estudo de semirraízes de uma dada curva plana, em particular as que fazem parte de uma classe de raízes aproximadas, chamadas raízes características.

Essas raízes satisfazem propriedades interessantes. Popescu-Pampu em [14] define semirraiz justamente como polinômios em $\mathbb{C}[[X]][Y]$ que satisfazem uma destas propriedades das raízes características, obtendo assim resultados num contexto mais geral. Vamos apresentar os resultados em $K[[X]][Y]$ e quando abordarmos resolução de singularidades vamos nos restringir às curvas analíticas.

Considere K um corpo algebricamente fechado de característica zero e

$$f = Y^N + \alpha_1(X)Y^{N-1} + \cdots + \alpha_N(X) \in K[[X]][Y] \tag{5.14}$$

irredutível, $\alpha_i(0) = 0$ e $m(\alpha_i) \geq i$, para $i = 1,\dots,N$. Veja que f é regular em Y de ordem N e vamos supor que a multiplicidade de f é n. Observe que não estamos necessariamente em coordenadas genéricas, ou seja, $N = n$ (ver Seção 3.4).

O semigrupo do ramo (f) será denotado por $S(f) = \langle V_0,\dots,V_G\rangle$, onde G é o gênero de $S(f)$ e sejam $E_0,\dots,E_G$ os inteiros característicos (Definição 3.24).

Definição 5.17. *Um polinômio $q_k \in K[[X]][Y]$ é uma k-**semirraiz** de f se q_k é mônico, $d(q_k) = \frac{N}{E_k}$ e $I(f,q_k) = V_{k+1}$.*

Vamos provar um lema técnico que será útil posteriormente.

Lema 5.18. *Sejam q_k uma k-semirraiz de f e $l, h \in K[[X]][Y]$ com $d(l), d(h) < \frac{N}{E_k}$. Então $I(f, lq_k^i) \neq I(f, hq_k^j)$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, N_{k+1}\}$, com $i \neq j$ em que $N_{k+1} = \frac{E_k}{E_{k+1}}$.*

Demonstração. Analogamente ao resultado da Proposição 3.5 (ii) temos $N_1 N_2 \cdots N_k = \frac{E_0}{E_k} = \frac{N}{E_k}$ e assim $d(l), d(h) < \frac{N}{E_k} = N_1 N_2 \cdots N_k$. Logo, do Teorema 3.10 item (ii) aplicado neste caso, temos que $v_f(l) = I(f, l)$ e $v_f(h) = I(f, h)$ pertencem a $\langle V_0, \ldots, V_k \rangle$. Logo, $I(f, l)$ e $I(f, h)$ são divisíveis por $E_k = \text{mdc}(V_0, \ldots, V_k)$ (Proposição 3.25).

Suponha que existam $0 \leq i < j \leq N_{k+1}$ tais que $I(f, lq_k^i) = I(f, hq_k^j)$. Então, $I(f, q_k^i) - I(f, q_k^j) = I(f, h) - I(f, l)$. Ou seja, $(i - j)I(f, q_k) = I(f, h) - I(f, l)$. Assim, por definição de semirraiz,

$$(i - j)V_{k+1} = I(f, h) - I(f, l)$$

e como $E_k \mid (I(f, h) - I(f, l))$ segue que existe λ tal que $(i - j)V_{k+1} = \lambda E_k$. Portanto $(i - j)\frac{V_{k+1}}{E_{k+1}} = \lambda \frac{E_k}{E_{k+1}} = \lambda N_{k+1}$.

Como $E_{k+1} = \text{mdc}(V_{k+1}, E_k)$ e $\frac{V_{k+1}}{E_{k+1}}$ e N_{k+1} são relativamente primos, devemos ter que $N_{k+1} \mid (i - j)$. O que é uma contradição, pois $0 < i - j < N_{k+1}$. □

Proposição 5.19. *Seja $l \in K[[X]][Y]$ mônico com $d(l) = \frac{N}{E_k}$ e $I(f, l) > N_k V_k$. Se h é uma $(k-1)$-semirraiz de f então $\tau_l(h)$ é uma $(k-1)$-semirraiz de f.*

Demonstração. Por hipótese h é uma $(k-1)$-semirraiz de f. Logo $d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$ e pelo Lema 5.10, $d(\tau_l(h)) = d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$.

Agora observemos que $\frac{d(l)}{d(h)} = \frac{E_{k-1}}{E_k} = N_k$ logo $d(h) \mid d(l)$, assim podemos escrever a h-expansão de l da seguinte forma:

$$l = h^{N_k} + a_1 h^{N_k - 1} + \cdots + a_{N_k},$$

com $d(a_i) < d(h),\ \forall i = 1, \ldots, N_k$. Além disso, $\tau_l(h) = h + \frac{a_1}{N_k}$ o qual também é mônico.

Resta provar que $I(f, \tau_l(h)) = V_k$. Para tanto vamos mostrar que $I(f, h) < I(f, a_1)$.

Pelo Lema 5.18, $I(f, a_j h^{N_k - j}) \neq I(f, a_i h^{N_k - i}),\ \forall i, j = 1, \ldots, N_k$ com $i \neq j$ já que $d(a_i), d(a_j) < d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$. Assim,

$$I(f, l - h^{N_k}) = I\left(f, \sum_{i=1}^{N_k} a_i h^{N_k - i}\right) = \min_{1 \leq i \leq N_k} \left\{ I\left(f, a_i h^{N_k - i}\right) \right\} \leq I\left(f, a_1 h^{N_k - 1}\right).$$

Por hipótese, $I(f, l) > N_k V_k = I\left(f, h^{N_k}\right)$ uma vez que h é $(k-1)$-semirraiz, assim

$$I(f, l - h^{N_k}) = \min\left\{ I(f, l), I(f, h^{N_k}) \right\} = N_k V_k.$$

Logo, $N_k V_k = I\left(f, l - h^{N_k}\right) \leq I\left(f, a_1 h^{N_k - 1}\right) = I(f, a_1) + (N_k - 1)I(f, h)$, ou seja,

$$I(f, h) = V_k = N_k V_k - (N_k - 1)I(f, h) \quad \leq \quad I(f, a_1).$$

O que implica $I(f,h) \leq I(f,a_1)$. Para concluir que $I(f,\tau_l(h)) = I(f,h)$ precisamos mostrar que $I(f,h) \neq I(f,a_1)$. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Lema 5.18 temos que $I(f,a_1) \in \langle V_0,\dots,V_{k-1}\rangle$ pois $d(a_1) < d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$. Mas $I(f,h) = V_k \notin \langle V_0,\dots,V_{k-1}\rangle$.

Como $I(f,h) < I(f,a_1)$ temos $I(f,\tau_l(h)) = I(f,h+\frac{a_1}{k}) = \min\{I(f,h), I(f,a_1)\} = I(f,h) = V_k$, o que conclui a demonstração. □

Recordemos que pela Proposição 3.25 (*iii*), $S(f)$ é fortemente crescente, ou seja, $V_{k+1} > N_k V_k$ para todo $k = 1,\dots,G$.

Corolário 5.20. *Se l é uma k-semirraiz de f e h uma $(k-1)$-semirraiz de f então $\tau_l(h)$ é uma $(k-1)$-semirraiz de f.*

Demonstração. Para garantir que estamos nas hipóteses da Proposição 5.19, basta observar que sendo l uma k-semirraiz de f temos $I(f,l) = V_{k+1}$ e como o semigrupo $S(f)$ é fortemente crescente então $V_{k+1} > N_k V_k$. □

Proposição 5.21. *Seja $l \in K[[X]][Y]$ mônico com $d(l) = \frac{N}{E_k}$. Suponha que $I(f,l) > N_k V_k$. Então,*

$$I\left(f, \sqrt[N_k]{l}\right) = V_k.$$

Demonstração. Considere $h \in K[[X]][Y]$ uma $(k-1)$-semirraiz de f. Então pela Proposição 5.19, $\tau_l(h)$ é uma $(k-1)$-semirraiz de f. Aplicando esse mesmo resultado a $\tau_l(h)$ obtemos que $\tau_l^2(h) = \tau_l(\tau_l(h))$ é uma $(k-1)$-semirraiz de f. E assim sucessivamente ${\tau_l}^i(h)$ é uma $(k-1)$-semirraiz de f, para todo i. Então $I(f, {\tau_l}^i(h)) = V_k$ para todo i. Pela Proposição 5.12, como $d(h) = \frac{d(l)}{N_k}$ temos que $\tau_l^{d(h)}(h) = \sqrt[N_k]{l}$. Portanto

$$I\left(f, \sqrt[N_k]{l}\right) = I\left(f, \tau_l^{d(h)}(h)\right) = V_k.$$

□

Os próximos resultados mostram como a curva (f) e as curvas definidas por suas semirraízes estão relacionadas. Veremos que tanto os expoentes característicos como os geradores do semigrupo associado a uma semirraiz, podem ser determinados pelos expoentes característicos e geradores do semigrupo de (f). Novamente f é regular em Y de ordem N e denotemos por $B_0,\dots,B_G$ os expoentes característicos de (f) e $S(f) = \langle V_0,\dots,V_G\rangle$.

Lema 5.22. *Seja $h \in K[[X]][Y]$ mônico e irredutível. Se $\frac{I(f,h)}{d(h)} > \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N}$, com $1 < k \leq G+1$, então $d(h) \equiv 0 \mod \frac{N}{E_{k-1}}$. Além disso, se $d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$ então*

$$S(h) = \left\langle \frac{V_0}{E_{k-1}},\dots,\frac{V_{k-1}}{E_{k-1}}\right\rangle$$

e os expoentes característicos de (h) são $\frac{B_0}{E_{k-1}},\dots,\frac{B_{k-1}}{E_{k-1}}$.

Demonstração. Sejam $B'_0, \ldots, B'_{G'}$ os expoentes característicos de (h) com $B'_0 = d(h) := N'$. Como

$$\frac{I(f,h)}{d(h)} > \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N} > \frac{E_{k-1}V_{k-1}}{N}$$

então pelo Corolário 3.21 temos que a ordem de contato de (f) e (h) satisfaz $O(f,h) > \frac{B_{k-1}}{N}$. Pelo Corolário 3.18 para todo $i = 0, \ldots, k-1$

$$\frac{B_i}{N} = \frac{B'_i}{N'} \quad \text{e} \quad k-1 < G'.$$

Como $E_{k-1} = \text{mdc}(B_0, \ldots, B_{k-1})$ existem $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tais que $E_{k-1} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i B_i$. Portanto, $N'E_{k-1} = N' \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i B_i = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i N B'_i$ concluindo que $N' = \frac{N}{E_{k-1}} \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i B'_i$, ou seja, $N' \equiv 0 \; mod \; \frac{N}{E_{k-1}}$.

Agora consideremos o caso em que $N' = d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$. Pelo Corolário 3.19, para $0 \leq i \leq k-1$ temos $\frac{V_i}{V'_i} = \frac{E_i}{E'_i} = \frac{N}{N'} = \frac{B_i}{B'_i}$. Daí

$$V'_i = \frac{N'V_i}{N} = \left(\frac{N}{E_{k-1}} V_i\right) \frac{1}{N} = \frac{V_i}{E_{k-1}}. \tag{5.15}$$

Como $\text{mdc}\,(V_0, \ldots, V_{k-1}) = E_{k-1}$ segue de (5.15) que

$$\text{mdc}\left(V'_0, \ldots, V'_{k-1}\right) = \text{mdc}\left(\frac{V_0}{E_{k-1}}, \ldots, \frac{V_{k-1}}{E_{k-1}}\right) = 1.$$

Assim $G' = k-1$ e $S(h) = \left\langle \frac{V_0}{E_{k-1}}, \ldots, \frac{V_{k-1}}{E_{k-1}} \right\rangle$. □

O teorema abaixo é um dos mais importantes deste trabalho, pois é uma generalização, devido a J. Gwoździewicz e A. Ploski [10], de um resultado que caracteriza a topologia de quaisquer semirraízes e algumas raízes aproximadas de curvas.

Teorema 5.23. *Seja $h \in K[[X]][Y]$ mônico tal que $d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$. Então, $I(f,h) \leq V_k$. Se $I(f,h) > N_{k-1}V_{k-1}$, então h é irredutível,*

$$S(h) = \left\langle \frac{V_0}{E_{k-1}}, \ldots, \frac{V_{k-1}}{E_{k-1}} \right\rangle$$

e os expoentes característicos de (h) são $\frac{B_0}{E_{k-1}}, \ldots, \frac{B_{k-1}}{E_{k-1}}$.

Demonstração. Consideremos a decomposição de h em fatores irredutíveis de $K[[X]][Y]$ dada por $h = h_1 \cdots h_s$. Se $k = G+1$ então $V_k = \infty$ logo $I(f,h) \leq V_k$.

Se $k \leq G$ vamos mostrar que para todo $i = 1, \ldots, s$,

$$\frac{I(f,h_i)}{d(h_i)} \leq \frac{E_{k-1}V_k}{N}. \tag{5.16}$$

Suponha que $\frac{I(f,h_i)}{d(h_i)} > \frac{E_{k-1}V_k}{N}$ para algum $i = 1, \ldots, s$. Então pelo lema anterior, $d(h_i) \equiv 0 \ mod \frac{N}{E_k}$, ou seja, $d(h_i) = \lambda \frac{N}{E_k}$ para algum $\lambda \geq 0$. Como h é mônico e h_i é irredutível temos que $d(h_i) \neq 0$. Assim, $d(h_i) \geq \frac{N}{E_k} > \frac{N}{E_{k-1}}$, o que é um absurdo, pois $d(h_i) \leq d(h) = \frac{N}{E_{k-1}}$. Agora por (5.16)

$$\begin{aligned} I(f,h) &= \sum_{i=1}^{s} I(f,h_i) \leq \sum_{i=1}^{s} \frac{E_{k-1}V_k}{N} d(h_i) = \frac{E_{k-1}V_k}{N} \sum_{i=1}^{s} d(h_i) \\ &= \frac{E_{k-1}V_k}{N} d(h) = \frac{E_{k-1}V_k}{N} \frac{N}{E_{k-1}} = V_k. \end{aligned}$$

Se $I(f,h) > N_{k-1}V_{k-1}$ mostraremos que existe $j \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\frac{I(f,h_j)}{d(h_j)} > \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N}$. De fato, suponhamos por absurdo que $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$, $\frac{I(f,h_j)}{d(h_j)} \leq \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N}$. Então,

$$I(f,h) = \sum_{i=1}^{s} I(f,h_i) \leq \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N} d(h) = \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N} \frac{N}{E_{k-1}} = N_{k-1}V_{k-1},$$

o que contraria a hipótese.

Tome $j \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\frac{I(f,h_j)}{d(h_j)} > \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N}$. Então, pelo Lema 5.22 devemos ter $d(h_j) = \lambda \frac{N}{E_{k-1}}$ para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 0$. Como $d(h_j) \leq d(h) = \frac{N}{E_{k-1}} \neq 0$, então $\lambda = 1$ e $d(h_j) = d(h)$. Isso implica que $h = h_j u$, onde u é inversível em $K[[X]][Y]$, ou seja, h é irredutível.

Além disso, para todo $q \in K[[X]][Y] \setminus \langle h \rangle$ temos $I(q,h) = I(q,h_j u) = I(q,h_j)$, isto é, $S(h) = S(h_j)$. Como $d(h) = d(h_j) = \frac{N}{E_{k-1}}$ e $\frac{I(f,h)}{d(h)} = \frac{I(f,h_j)}{d(h_j)} > \frac{E_{k-2}V_{k-1}}{N}$, segue do lema anterior que $S(h) = S(h_j) = \left\langle \frac{V_0}{E_{k-1}}, \ldots, \frac{V_{k-1}}{E_{k-1}} \right\rangle$ e aplicando recursivamente a Proposição 3.25 (i) temos que os expoentes característicos de (h) são os mesmos de (h_j) : $\frac{B_0}{E_{k-1}}, \ldots, \frac{B_{k-1}}{E_{k-1}}$. □

Em particular, toda k-semirraiz q_k de uma curva (f) satisfaz as hipóteses do teorema acima. Portanto conhecemos seu semigrupo e os expoentes característicos.

Seja $f \in K[[X]][Y]$ mônico, irredutível, Y-regular de ordem N e $m(f) = n$. Consideremos uma parametrização de Newton-Puiseux para (f) dada por

$$\begin{cases} X = T^N \\ Y = \sum\limits_{j \geq 1} a_j T^j = P(T^N) + \sum\limits_{j=B_1}^{B_2-1} a_j T^j + \cdots + \sum\limits_{j=B_{G-1}}^{B_G-1} a_j T^j + \cdots \end{cases} \tag{5.17}$$

com mdc$(\{N\} \cup \{j;\ a_j \neq 0\}) = 1$ e expoentes característicos $B_0, \ldots, B_G$ e $B_{G+1} = \infty$. Denominamos as séries

$$\eta\left(X^{\frac{1}{N}}\right) = \sum_{j \geq 1} a_j X^{\frac{j}{N}} \quad \text{e} \quad \eta_k\left(X^{\frac{1}{N}}\right) = \sum_{j=1}^{B_{k+1}-1} a_j X^{\frac{j}{N}} \tag{5.18}$$

como sendo a **série de Newton-Puiseux** e o **k-truncamento da série de Newton-Puiseux** da curva (f) com respeito a (X,Y), respectivamente.

Recordemos que pelo Corolário 2.21 (Teorema da Função Implícita de Newton),

$$f\left(X,\eta\left(X^{\frac{1}{N}}\right)\right)=0,$$

ou seja, f é o polinômio minimal da raiz $\alpha=\eta\left(X^{\frac{1}{N}}\right)\in K[[X^{\frac{1}{N}}]]$.

Por definição dos B_i's, ao truncarmos a série de Newton-Puiseux na ordem $B_{k+1}-1$, ou correspondentemente na parametrização dada em (5.17), todos os expoentes são divisíveis por $E_k=\text{mdc}(B_0,\dots,B_k)$. O exemplo abaixo vai nos ajudar a compreender melhor a demonstração do resultado a seguir:

Exemplo 5.24. *Considere a curva (f) como no Exemplo 5.13 (b), cuja parametrização de Newton-Puiseux era dada por:*

$$\begin{cases} X=T^8\\ Y=T^{12}+T^{14}+T^{15}.\end{cases}$$

Neste caso, os expoentes característicos são $\beta_0=8$, $\beta_1=12$, $\beta_2=14$ e $\beta_3=15$ e $\varepsilon_0=8$, $\varepsilon_1=4$, $\varepsilon_2=2$ e $\varepsilon_3=1$. E pelo Corolário 3.11, $S(f)=\langle 8,12,26,53\rangle$.

A série de Newton-Puiseux de (f) é:

$$\eta\left(X^{\frac{1}{8}}\right)=X^{\frac{12}{8}}+X^{\frac{14}{8}}+X^{\frac{15}{8}}$$

e seus $k-$truncamentos são:

$$\eta_0\left(X^{\frac{1}{8}}\right)=0,\ \eta_1\left(X^{\frac{1}{8}}\right)=X^{\frac{12}{8}}=X^{\frac{3}{2}},\ \eta_2\left(X^{\frac{1}{8}}\right)=X^{\frac{12}{8}}+X^{\frac{14}{8}}=X^{\frac{6}{4}}+X^{\frac{7}{4}}\ \text{e}\ \eta_3=\eta.$$

Observe que podemos escrever $\eta_1\left(X^{\frac{1}{8}}\right)=\left(X^{\frac{4}{8}}\right)^3=h_1\left(X^{\frac{\varepsilon_1}{8}}\right)$ com $h_1(X)=X^3$ e $\eta_2\left(X^{\frac{1}{8}}\right)=\left(X^{\frac{2}{8}}\right)^6+\left(X^{\frac{2}{8}}\right)^7=h_2\left(X^{\frac{\varepsilon_2}{8}}\right)$ em que $h_2(X)=X^6+X^7$, já que as potências de η_1 são divisíveis por $\varepsilon_1=4$ e de η_2 por $\varepsilon_2=2$.

Para o próximo resultado vamos fazer um pequeno comentário sobre a ordem de contato entre ramos. Na Seção 3.3 definimos a ordem de contato entre dois ramos por suas parametrizações de Newton-Puiseux, conforme [12]. De modo análogo poderíamos ter definido a ordem de contato pelas séries de Newton-Puiseux como em [14]. Dados ramos (f) e (g) definimos a ordem de contato $O(f,g)$ de f e g por:

$$O(f,g)=\max\{v_X(\eta(X)-\varphi(X));\eta(X)\text{ e }\varphi(X)\text{ são séries de Newton-Puiseux de }(f)\text{ e }(g)\}.$$

E como no Teorema 3.20 temos o resultado:

Teorema 5.25. *Sejam (f) e (g) ramos em $K[[X]][Y]$, $S(f) = \langle V_0, \ldots, V_G \rangle$ e $B_0, \ldots, B_G$ expoentes característicos de (f). Então*

$$\frac{I(f,g)}{d(g)} = \frac{V_k}{N_1 \cdots N_{k-1}} + \frac{N \cdot O(f,g) - B_k}{N_1 \cdots N_k},$$

onde $k \in \{0, \ldots, G\}$ é o menor inteiro positivo tal que $O(f,g) < \frac{B_{k+1}}{N}$.

Proposição 5.26. *Para cada $k \in \{0, \ldots, G\}$ o polinômio minimal ϕ_k de uma série de Newton-Puiseux $\eta_k\left(X^{\frac{1}{N}}\right)$ de (f) truncada na ordem k é uma k-semirraiz.*

Demonstração. Seja $\eta_k\left(X^{\frac{1}{N}}\right) = h_k\left(X^{\frac{E_k}{N}}\right)$. Chamando $X^{\frac{E_k}{N}} = T$ temos que $h_k(T) \in K[[T]]$. Veja que

$$\begin{cases} X = T^{\frac{N}{E_k}} \\ Y = h_k(T) \end{cases}$$

é uma parametrização primitiva de Newton-Puiseux para (ϕ_k), já que $\phi_k\left(X, \eta_k(X)\right) = 0$. Portanto, $d(\phi_k) = \frac{N}{E_k}$.

Por definição, as séries $\eta\left(X^{\frac{1}{N}}\right)$ e $\eta_k\left(X^{\frac{1}{N}}\right)$ são idênticas até a ordem $\frac{B_{k+1}-1}{N}$. Portanto, a ordem de contato entre (f) e (ϕ_k) é $O(f, \phi_k) = \frac{B_{k+1}}{N} < \frac{B_{k+2}}{N}$. Deste modo pelo Teorema 5.25 temos que

$$\frac{I(f,\phi_k)}{d(\phi_k)} = \frac{V_{k+1}}{N_1 \cdots N_k} + \frac{N \cdot \frac{B_{k+1}}{N} - B_{k+1}}{N_1 \cdots N_{k+1}},$$

o que implica $I(f, \phi_k) = \frac{V_{k+1}}{N_1 \cdots N_k} \frac{N}{E_k} = V_{k+1}$, em que a última igualdade segue da Proposição 3.25 (iii). Portanto ϕ_k é uma k-semirraiz de f. $\square$

Exemplo 5.27. *Como no Exemplo 5.24 sejam ϕ_0, ϕ_1 e ϕ_2 os polinômios minimais das raízes η_0, η_1 e η_2, respectivamente. Uma parametrização primitiva de Newton-Puiseux para ϕ_0, ϕ_1 e ϕ_2 é dada respectivamente por:*

$$\begin{cases} X_0 = T \\ Y_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = T^2 \\ Y_1 = T^3 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} X_2 = T^4 \\ Y_2 = T^6 + T^7. \end{cases}$$

Assim $\phi_0(X,Y) = Y$, $\phi_1(X,Y) = Y^2 - X^3$, $\phi_2(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7$, e $\phi_3 = f$ são as semirraízes de f.

Pelo Teorema 5.23 temos que $S(\phi_0) = \left\langle \frac{V_0}{E_k} \right\rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{N}$, $S(\phi_1) = \left\langle \frac{V_0}{E_1}, \frac{V_1}{E_1} \right\rangle = \langle 2, 3 \rangle$ $S(\phi_2) = \left\langle \frac{V_0}{E_2}, \frac{V_1}{E_2}, \frac{V_2}{E_2} \right\rangle = \langle 4, 6, 13 \rangle$.

5.3 Raízes Características

O foco deste trabalho é o estudo de certas raízes aproximadas de curvas que também vão ter a propriedade de serem semirraízes.

Definição 5.28. *Sejam $E_0, \ldots, E_G$ os inteiros característicos de (f). Uma* ***raiz aproximada característica*** *de (f) é uma curva (f_k), onde*

$$f_k := \sqrt[E_k]{f}.$$

Vamos denominá-la simplesmente por raiz característica de (f).

O teorema abaixo garante que as raízes características de (f) são semirraízes.

Teorema 5.29. *Seja $f \in K[[X]][Y]$ como em (5.14), com semigrupo de valores $S(f) = \langle V_0, \ldots, V_G \rangle$ e $V_{G+1} = \infty$. As raízes características (f_k) para $0 \leq k \leq G$ satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $d(f_k) = \frac{N}{E_k}$ *e* $I(f, f_k) = V_{k+1}$.

(ii) f_k *é irredutível,* $S(f_k) = \left\langle \frac{V_0}{E_k}, \ldots, \frac{V_k}{E_k} \right\rangle$ *e os expoentes característicos de (f_k) são* $\frac{B_0}{E_k}, \ldots, \frac{B_k}{E_k}$.

Demonstração. (i) Por definição de raiz aproximada, segue que $d(f_k) = \frac{d(f)}{E_k} = \frac{N}{E_k}$.

Vamos provar que $I(f, f_k) = V_{k+1}$ utilizando indução por descida em k.

Se $k = G$ temos que $E_G = 1$ e $f_G = \sqrt[1]{f} = f$. Portanto $I(f, f_G) = \infty = V_{G+1}$. Suponha que para todo $j \in \{k, k+1, \ldots, G\}$ seja válido que $I(f, f_j) = V_{j+1}$. Mostraremos que o resultado vale para $k - 1$.

Por hipótese de indução, $I(f, f_k) = V_{k+1}$ e pelo fato de $S(f)$ ser fortemente crescente temos que $V_{k+1} > N_k V_k$. Desta forma pela Proposição 5.21, $I(f, \sqrt[N_k]{f_k}) = V_k$. Entretanto da Proposição 5.4

$$f_{k-1} = \sqrt[E_{k-1}]{f} = \sqrt[N_k E_k]{f} = \sqrt[N_k]{\sqrt[E_k]{f}} = \sqrt[N_k]{f_k},$$

pois $N_k = \frac{E_{k-1}}{E_k}$. Portanto $I(f, f_{k-1}) = I(f, \sqrt[N_k]{f}) = V_k$.

(ii) Pelo item (i) f_k é uma semirraiz, assim do Teorema 5.23 segue o resultado. □

Exemplo 5.30. *Considerando (f) como no Exemplo 5.13 (b) sabemos que $\varepsilon_0 = 8, \varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 2$ e $\varepsilon_3 = 1$. E suas raízes aproximadas são: $f_0 = \sqrt[8]{f} = Y$, $f_1 = \sqrt[4]{f} = Y^2 - X^3$, $f_2 = \sqrt[2]{f} = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - 13X^7$ e $f_3 = \sqrt[1]{f} = f$. Estas são todas as raízes características de (f).*

Corolário 5.31. *Para todo $k \in \{0, \ldots, G\}$ a ordem de contato entre f e f_k é $O(f, f_k) = \frac{B_{k+1}}{N}$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, $d(f_k) = \frac{N}{E_k}$ e $I(f, f_k) = V_{k+1}$. Como $N_1 \cdots N_k E_k = N$ temos que

$$\frac{I(f, f_k)}{d(f_k)} = \frac{V_{k+1}}{\frac{N}{E_k}} = \frac{V_{k+1}}{N_1 \cdots N_k} = \frac{V_{k+1}}{N_1 \cdots N_k} + \frac{N\frac{B_{k+1}}{N} - B_{k+1}}{N_1 \cdots N_{k+1}}$$

e portanto pelo Teorema 5.25 temos que $O(f, f_k) = \frac{B_{k+1}}{N}$. □

Corolário 5.32. *Para $0 \leq k \leq G$, os polinômios $f, f_k \in K[[X]][Y]$ têm o mesmo conjunto de j-truncamentos de suas séries de Newton-Puiseux para $0 \leq j \leq \frac{B_{k+1}}{N}$.*

Demonstração. Como $O(f, f_k) = \frac{B_{k+1}}{N}$ segue que as séries de Newton-Puiseux de f e f_k coincidem até a ordem $\frac{B_{k+1}-1}{N}$, e disto temos a igualdade dos j-truncamentos. □

Abaixo vamos apresentar uma formulação mais geral de um resultado que garante que qualquer $f \in K[[X]][Y]$ admite uma única decomposição em termos de suas raízes características.

Proposição 5.33. *Sejam $q_0, \ldots, q_G \in K[[X]][Y]$ polinômios mônicos tais que para todo i, $d(q_i) = \frac{N}{E_i}$. Então todo $h \in K[[X]][Y]$ pode ser escrito de forma única como uma soma finita*

$$h = \sum_{i_0, \ldots, i_G} \alpha_{i_0, \ldots, i_G} q_0^{i_0} q_1^{i_1} \cdots q_G^{i_G},$$

onde $0 \leq i_G \leq \left[\frac{d(h)}{d(q_G)}\right]$, $0 \leq i_k < N_{k+1}$ para todo $0 \leq k \leq G-1$ e os coeficientes $\alpha_{i_0, \ldots, i_G} \in K[[X]]$. Além disso,

(i) Os graus em Y de quaisquer dois elementos distintos desta soma são distintos.

(ii) Se $q_0, \ldots, q_G \in K[[X]][Y]$ são semirraízes de f, então as ordens em T dos termos

$$\alpha_{i_0, \ldots, i_G}\left(T^N\right) q_0\left(T^N, \varphi(T)\right)^{i_0} \cdots q_{G-1}\left(T^N, \varphi(T)\right)^{i_{G-1}}$$

são distintos dois a dois, onde $\left(T^N, \varphi(T)\right)$ é uma parametrização de Newton-Puiseux para (f).

Demonstração. Comecemos considerando a q_G-expansão de h dada por:

$$h = \sum_{0 \leq i_G \leq s_G} \alpha_{i_G} q_G^{i_G}, \tag{5.19}$$

onde $\alpha_{i_G} \in K[[X]][Y], d(\alpha_{i_G}) < d(q_G) = \frac{N}{E_G} = N$ e $s_G := \left[\frac{d(h)}{d(q_G)}\right]$.

Agora consideramos a q_{G-1}-expansão de α_{i_G}, ou seja,

$$\alpha_{i_G} = \sum_{0 \leq i_{G-1} \leq s_{G-1}} \alpha_{i_{G-1}} q_{G-1}^{i_{G-1}},$$

onde $\alpha_{i_{G-1}} \in K[[X]][Y]$, $d(\alpha_{i_{G-1}}) < d(q_{G-1}) = \frac{N}{E_{k-1}}$ e $s_{G-1} := \left[\frac{d(\alpha_{i_G})}{d(q_{G-1})}\right]$.

Como $d(\alpha_{i_G}) < \frac{N}{E_G}$ e $d(q_{G-1}) = \frac{N}{E_{G-1}}$ temos que

$$s_{G-1} = \left[\frac{d(\alpha_{i_G})}{d(q_{G-1})}\right] < \frac{N}{E_G}\frac{E_{G-1}}{N} = N_G.$$

Assim, $h = \sum_{i_G, i_{G-1}} \alpha_{i_G, i_{G-1}} q_{G-1}^{i_{G-1}} q_G^{i_G}$, com $0 \leq i_G \leq s_G$ e $0 \leq i_{G-1} < N_G$.

Continuando obtemos

$$h = \sum_{i_0,\ldots,i_G} \alpha_{i_0,\ldots,i_G} {q_0}^{i_0} \cdots {q_G}^{i_G},$$

com $\alpha_{i_0,\ldots,i_G} \in K[[X]],\ 0 \leq i_k < N_{k+1}$ para todo $k \in \{0,\ldots,G-1\}$ e $0 \leq i_G \leq \left[\frac{d(h)}{d(q_G)}\right]$.

Antes de provar a unicidade vamos provar o item (i) da proposição.

(i) Suponhamos que existam $(i_0,\ldots,i_G) \neq (j_0,\ldots,j_G)$ tais que $d(\alpha_{i_0,\ldots,i_G} q_0^{i_0} \cdots q_G^{i_G}) = d(\alpha_{j_0,\ldots,j_G} q_0^{i_0} \cdots q_G^{i_G}) < \infty$, em que o grau ocorre em Y. Assim

$$\sum_{l=0}^{G} i_l \frac{N}{E_l} = \sum_{l=0}^{G} j_l \frac{N}{E_l}. \tag{5.20}$$

Defina $D = \{k \in \{0,\ldots,G\}; i_k \neq j_k\}$ e tome $p = \max\{k \in D\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $i_p < j_p$ e $i_k = j_k$ para $k \geq p+1$. Pela Equação (5.20) segue que

$$\sum_{k=0}^{p-1} (i_k - j_k)\frac{N}{E_k} = (j_p - i_p)\frac{N}{E_p} \geq \frac{N}{E_p},$$

pois $j_p - i_p \geq 1$. Como $i_k, j_k < N_{k+1},\ \forall k = 0,\ldots,p-1$ temos que $0 \leq\mid i_k - j_k \mid\leq N_{k+1} - 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{N}{E_p} &\leq \sum_{k=0}^{p-1}(i_k - j_k)\frac{N}{E_k} \leq \sum_{k=0}^{p-1} \mid i_k - j_k \mid \frac{N}{E_k} \leq \sum_{k=0}^{p-1}(N_{k+1}-1)\frac{N}{E_k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{E_k}{E_{k+1}} - 1\right)\frac{N}{E_k} = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{N}{E_{k+1}} - \frac{N}{E_k}\right) = \frac{N}{E_p} - \frac{N}{E_0} = \frac{N}{E_p} - 1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Provaremos a unicidade da decomposição de h. Suponha que h admita outra decomposição. Então reagrupando os termos obtemos uma decomposição da forma:

$$\sum_{i_0,\ldots,i_G} \gamma_{i_0,\ldots,i_G} {q_0}^{i_0} \cdots {q_G}^{i_G} = 0.$$

Pelo item (i) o grau em Y dos termos do somatório são dois a dois distintos. Logo a única solução é $\gamma_{i_0,\ldots,i_G} = 0$, já que $q_0, \ldots, q_G$ são não nulos.
(ii) Para cada $k = 0, \ldots, G$ temos $v_T\left(q_k\left(T^N, \varphi(T)\right)\right) = I(f, q_k) = V_{k+1}$, pois q_k é semirraiz de (f). Logo como $q_G = f$ temos:

$$\begin{aligned}
& v_T\left(\alpha_{i_0,\ldots,i_G}\left(T^N\right) q_0\left(T^N, \varphi(T)\right)^{i_0} \cdots q_G\left(T^N, \varphi(T)\right)^{i_G}\right) \\
= \;& v_T\left(\alpha_{i_0,\ldots,i_G}\left(T^N\right)\right) + \sum_{k=0}^{G-1} i_k v_T\left(q_k\left(T^N, \varphi(T)\right)\right) \\
= \;& N \cdot v_X\left(\alpha_{i_0,\ldots,i_G}\right) + \sum_{k=0}^{G-1} i_k V_{k+1}.
\end{aligned}$$

Suponha que existam $(i_0, \ldots, i_{G-1}) \neq (j_0, \ldots, j_{G-1})$ tais que

$$N \cdot v_X(\alpha_{i_0,\ldots,i_G}) + \sum_{k=0}^{G-1} i_k V_{k+1} = N \cdot v_X(\alpha_{j_0,\ldots,j_G}) + \sum_{k=0}^{G-1} j_k V_{k+1}. \tag{5.21}$$

Definimos $D = \{k \in \{0, \ldots, G-1\}; i_k \neq j_k\}$ e tome $p = max\{k \in D\}$. Como antes sem perda de generalidade podemos supor $i_p < j_p$ e $i_k = j_k$ para $k \geq p+1$. De (5.21) temos

$$N \cdot \left(v_X(\alpha_{i_0,\ldots,i_G}) - v_X(\alpha_{j_0,\ldots,j_G})\right) + \sum_{k=0}^{p} (i_k - j_k) V_{k+1} = 0,$$

ou seja, $V_0(v_X(\alpha_{i_0,\ldots,i_G}) - v_X(\alpha_{j_0,\ldots,j_G})) + \sum\limits_{k=0}^{p-1} (i_k - j_k) V_{k+1} = (j_p - i_p) V_{p+1}$.

Como $E_p = \mathrm{mdc}(V_0, \ldots, V_p)$ pela igualdade acima $E_p \mid (j_p - i_p)V_{p+1}$. Disto temos que $(j_p - i_p)V_{p+1} = \lambda E_p$ para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$. Mas $E_{p+1} = \mathrm{mdc}(E_p, V_{p+1})$ e $(j_p - i_p)\frac{V_{p+1}}{E_{p+1}} = \lambda \frac{E_p}{E_{p+1}} = \lambda N_{p+1}$, ou seja, $N_{p+1} \mid (j_p - i_p)\frac{V_{p+1}}{E_{p+1}}$. Mas N_{p+1} e $\frac{V_{p+1}}{E_{p+1}}$ são relativamente primos, desta forma concluímos que $N_{p+1} \mid (j_p - i_p)$ o que é um absurdo pois $0 < j_p - i_p < N_{p+1}$. $\square$

5.4 Resolução de Semirraízes

Nesta seção vamos descrever o processo de resolução mergulhada de quaisquer semirraízes $q_0, q_1, \ldots, q_{g-1}$ de uma curva irredutível (f), em particular, das raízes características. Vamos verificar que este processo acompanha o processo de resolução de (f). Neste contexto vamos considerar (f) uma curva analítica em $\mathbb{C}^2$.

Seja (f) uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^2$, de multiplicidade n e $\beta_0, \ldots, \beta_g$ seus expoentes característicos num sistema de coordenadas genérico.

Considere $(T^n, \varphi(T))$, ou ainda,

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum\limits_{j \geq n} a_j T^j \end{cases} \tag{5.22}$$

uma parametrização primitiva de Newton-Puiseux para (f).

Note que $\left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right)$ é uma parametrização de Newton-Puiseux para a transformada estrita $f^{(1)}$ de f, pois $f^{(1)}(X_1, Y_1) = \frac{1}{X_1^n} f(X_1, X_1 Y_1)$ e assim

$$f^{(1)}\left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right) = \frac{1}{T^{n^2}} f\left(T^n, T^n \frac{\varphi(T)}{T^n}\right) = \frac{1}{T^{n^2}} f\left(T^n, \varphi(T)\right) = 0.$$

Se (f) possui cone tangente (Y^n) e $n \nmid s$ com $s = I(f, Y) = ord_T(\varphi(T))$ então $s = \beta_1$ e pela Proposição 4.8 sabemos que $s_1 = \left[\frac{\beta_1}{\beta_0}\right] = \min\{i; m(f^{(i)}) < m(f)\}$ em que $\beta_0 = n$.

Do comentário anterior à Seção 4.2 temos que $\left(f^{(s_1)}\right)$ admite uma parametrização da forma

$$\begin{cases} X_{s_1} = T^n \\ Y_{s_1} = \sum\limits_{j \geq \beta_1} a_j T^{j - s_1 n} \end{cases} \tag{5.23}$$

cujo cone tangente é $\left(X_{s_1}^{\beta_1 - s_1 n}\right)$. Veja que se $\beta_1 = \beta_0 s_1 + r_1$ temos que $f^{(s_1)}$ tem multiplicidade $r_1 = \beta_1 - s_1 \beta_0 < n$. Todavia $f^{(s_1)}$ não está mais num sistema de coordenadas genérico.

É sabido que o processo de explosões acompanha o processo de divisões sucessivas:

$$\begin{array}{rcll} \beta_1 & = & \beta_0 s_1 + r_1; & 0 < r_1 < \beta_0 \\ \beta_0 & = & r_1 s_2 + r_2; & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 & = & r_2 s_3 + r_3; & 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & & & \\ r_{i_1 - 1} & = & r_{i_1} s_{i_1 + 1}. & \end{array}$$

A cada etapa no processo acima, isto é, a cada s_i-explosões mudamos o cone tangente da curva, que a menos de uma mudança de coordenadas, podemos supor (X^{r_i}) ou (Y^{r_i}). Acompanhando o processo de divisão sucessiva de β_1 por β_0 obteremos no final uma nova curva com gênero $g - 1$, ou seja, um expoente característico a menos (para mais detalhes ver [6]).

Com estes comentários vamos apresentar um importante teorema que caracteriza o processo de resolução de quaisquer semirraízes de (f). Popescu-Pampu em [14] apresenta três demonstrações para este resultado.

Teorema 5.34. *Sejam π_m a resolução mergulhada minimal de (f) e as curvas (q_k) com $0 \leq k \leq g$ semirraízes de (f) com respeito às coordenadas genéricas. Se $\left(q_k^{(m)}\right)$ denota a transformada estrita de (q_k) por π_m, então as curvas $\left(q_k^{(m)}\right)$ para $k = 0, \ldots, g$ são regulares e transversais a uma única componente do divisor excepcional de π_m. Em particular, o grafo dual da transformada total de $q_0 q_1 \cdots q_g$ é dada como na figura a seguir:*

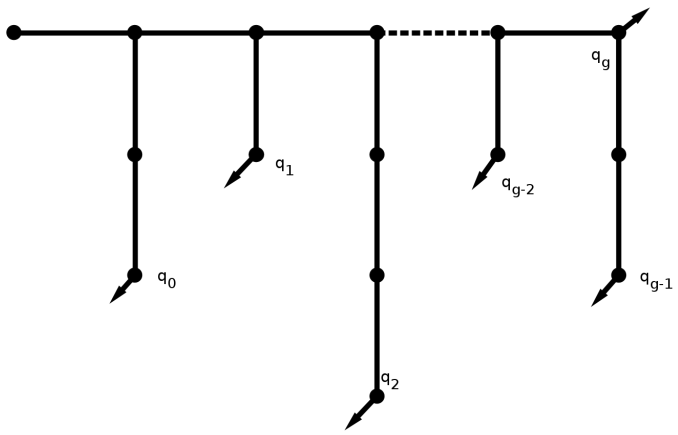


Figura 5.1: Grafo dual da resolução mergulhada minimal de $q_0 q_1 \cdots q_g$.

Demonstração. Vamos considerar coordenadas genéricas (X, Y) e denotamos por $\varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)$ e $\varphi_k\left(X^{\frac{1}{n}}\right)$ as séries de Newton-Puiseux para f e q_k, respectivamente. Assim, como em (5.22) temos que

$$\varphi(X) = \sum_{j \geq n} a_j X^{\frac{j}{n}}.$$

Analisemos a primeira semirraiz q_0. Como $O(f, q_0) = \frac{\beta_1}{n}$ temos que a série de Newton-Puiseux de q_0 é tal que

$$\varphi_0(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{j \geq 1} a'_j X^{\frac{j}{n}}$$

com $a'_j = a_j$ para $j < \beta_1$ e $n \mid j$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$.

Realizando s_0 explosões nas coordenadas (X_1, Y_1) com

$$\begin{cases} X = X_1 \\ Y = X_1(a_i + Y_1), \end{cases}$$

obtemos que $(T, 0)$ é uma parametrização primitiva para $\left(q_0^{(s_0)}\right)$ cuja reta tangente é $Y = 0$. Por abuso de linguagem vamos denotar $\left(q_0^{(s_0)}\right)$ pela curva (q_0).

Nos primeiros s_1-passos do processo de explosões em que $s_1 = \left[\frac{\beta_1}{\beta_0}\right]$ temos que $\left(q_0^{(s_1)}\right)$ é regular (pois já o era) e o divisor excepcional E_{s_1} é (X_{s_1}) temos que $\left(q_0^{(s_1)}\right)$ é transversal à E_{s_1}. Assim, na próxima explosão obtemos as transformadas estritas de (q_0) e de (f) se separam e a curva $\left(q_0^{(s_1+1)}\right)$ passa por um ponto regular do novo divisor excepcional criado.

Agora voltamos nossa atenção ao processo de explosões de $\left(f^{(s_1)}\right)$, cuja parametrização dada em (5.23) não está em coordenadas genéricas. Neste passo ao invés de tomar as coordenadas (X_{s_1}, Y_{s_1}) consideramos a curva nas coordenadas (Y_{s_1}, X_{s_1}). Com isso a curva $\left(f^{(s_1)}\right)$ passa a ser Y_{s_1}-regular de ordem igual a sua multiplicidade (ou seja, coordenadas genéricas). Pela Fórmula da Inversão (Teorema 3.26) podemos calcular os expoentes característicos no sistema (Y_{s_1}, X_{s_1}) em termos dos expoentes característicos no sistema (X_{s_1}, Y_{s_1}) e assim determinar o número de explosões para uma nova mudança do cone tangente.

Recordemos que se ocorre o item (ii) da Fórmula da Inversão, a curva em coordenadas genéricas tem gênero um a menos que a do sistema não genérico.

Como a ordem de contato de f e q_k é $\frac{\beta_{k+1}}{n}$, ou seja, as suas séries de Newton-Puiseux coincidem até a ordem $\frac{\beta_{k+1}}{n} - 1$, podemos iterar o processo repetindo o mesmo argumento utilizado para q_0, para q_k.

É importante notar que mudanças de coordenadas da forma $(X_i, Y_i) \longleftrightarrow (Y_i, X_i)$ aplicadas simultaneamente em $f, q_0, \ldots, q_{g-1}$ mantêm a mesma ordem de contato entre f e suas semirraízes. $\square$

Exemplo 5.35. *Finalizamos esse trabalho ilustrando o teorema anterior considerando a mesma curva (f) dada no Exemplo 5.3:*

$$
\begin{aligned}
f(X,Y) \;=\; & Y^8 + (-4X^3)Y^6 + (-8X^5)Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (16X^8 - 24X^9)Y^3 \\
& +(36X^{10} - 20X^{11} - 4X^9)Y^2 + (-8X^{11} - 8X^{13} + 16X^{12})Y \\
& +(X^{12} - X^{15} + 21X^{14} + 6X^{13}).
\end{aligned}
$$

Nesse exemplo vamos ilustrar o quanto o processo de resolução é trabalhoso, mesmo numa curva de gênero baixo, como esta de gênero 3.

A tabela a seguir apresenta os semigrupos e as parametrizações das raízes características de f.

Raízes	Semigrupo	Parametrização
$f_0 = \sqrt[8]{f}$	$\langle 1 \rangle = \mathbb{N}$	$\begin{cases} X = T \\ Y = 0 \end{cases}$
$f_1 = \sqrt[4]{f}$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\begin{cases} X = T^3 \\ Y = T^2 \end{cases}$
$f_2 = \sqrt[2]{f}$	$\langle 4, 6, 13 \rangle$	$\begin{cases} X = T^4 \\ Y = T^6 + T^7 + \frac{3}{2}T^9 - \frac{3}{2}T^{10} - \frac{3}{8}T^{11} \\ \quad +\frac{75}{16}T^{13} - \frac{21}{4}T^{14} - \frac{429}{128}T^{15} \cdots \end{cases}$
$f_3 = \sqrt[1]{f} = f$	$\langle 8, 12, 26, 53 \rangle$	$\begin{cases} X = T^8 \\ Y = T^{12} + T^{14} + T^{15} \end{cases}$

Vamos determinar agora a resolução mergulhada minimal de (f).

Como $\left[\frac{\beta_1}{\beta_0}\right] = 1 = s_1$ e o cone tangente de (f) é (Y^8) aplicamos uma vez a transformação quadrática σ e obtemos $E_1 = (X_1)$ como divisor excepcional e

$$\begin{aligned} f^{(1)} \;=\;& Y^8 - 4XY^6 - 8X^2Y^5 + \left(6X^2 - 26X^3\right)Y^4 + (16X^3 - 24X^4)Y^3 \\ & + \left(36X^4 - 20X^5 - 4X^3\right)Y^2 + \left(-8X^4 - 8X^6 + 16X^5\right)Y \\ & + X^4 - X^7 + 21X^6 + 6X^5. \end{aligned}$$

Com uma parametrização de Newton-Puiseux dada por:

$$\begin{cases} X = T^8 \\ Y = T^4 + T^6 + T^7 \end{cases}$$

e expoentes característicos $B_0 = 8, B_1 = 4, B_2 = 6$ e $B_3 = 7$. Pela Fórmula da Inversão (Teorema 3.26) os expoentes característicos de $f^{(1)}$ em coordenadas genéricas são: $\beta_0^1 = 4$, $\beta_1^1 = 10$ e $\beta_2^1 = 11$, ou seja, já perdemos um expoente característico. E sabemos que no próximo passo obtemos a resolução mergulhada da raiz f_0.

Não é necessário, mas escolhemos fazer a explosão neste primeiro passo conforme a demonstração do teorema anterior. Fazendo a mudança de coordenadas $(X, Y) \leftrightarrow (Y, X)$, mantendo ainda a notação $f^{(1)}(X, Y)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f^{(1)} \;=\;& Y^4 - 4X^2Y^3 + 6Y^5 - 8XY^4 + 21Y^6 + 16XY^5 + 36X^2Y^4 + 16X^3Y^3 + 6X^4Y^2 \\ & - Y^7 - 8XY^6 - 20X^2Y^5 - 24X^3Y^4 - 26X^4Y^3 - 8X^5Y^2 - 4X^6Y + X^8. \end{aligned}$$

Note que esta curva é Y-regular de ordem 4, com cone tangente (Y^4) e $I\left(f^{(1)}, Y\right) = 8 = 2 \cdot m\left(f^{(1)}\right)$, ou seja, estamos em coordenadas genéricas. Como $\left[\frac{10}{4}\right] = 2$ sabemos que explodindo 3 vezes obtemos a resolução da raiz f_1. Quando perdermos mais um expoente *característico resolvemos f_2. Explodindo $\left(f^{(1)}\right)$ na primeira carta obtemos:*

$$\begin{aligned}
f^{(2)} &= Y^4-4XY^3+6X^2Y^2-4X^3Y+X^4-8XY^4+16X^2Y^3-8X^3Y^2\\
&\quad +6XY^5+36X^2Y^4-26X^3Y^3+16X^2Y^5-24X^3Y^4+21X^2Y^6\\
&\quad -20X^3Y^5-8X^3Y^6-X^3Y^7\\
&= (Y-X)^4-8XY^4+16X^2Y^3-8X^3Y^2+6XY^5+36X^2Y^4-26X^3Y^3\\
&\quad +16X^2Y^5-24X^3Y^4+21X^2Y^6-20X^3Y^5-8X^3Y^6-X^3Y^7.
\end{aligned}$$

A curva $f^{(2)}(X,Y)$ é uma curva de multiplicidade 4 e cone tangente $(Y-X)^4$ assim explodimos a curva utilizando a mudança $X=X$ e $Y=X(1+Y)$ obtemos a curva: $f^{(3)}(X,Y)$ dada por

$$\begin{aligned}
f^{(3)} &= Y^4-8X\left((1+Y)^2-2(1+Y)^3+(1+Y)^4\right)\\
&\quad +X^2\left(-26(1+Y)^3+36(1+Y)^4+6(1+Y)^5\right)+X^3\left(-24(1+Y)^4+16(1+Y)^5\right)\\
&\quad +X^4\left(-20(1+Y)^5+21(1+Y)^6\right)-8X^5(1+Y)^6-X^6(1+Y)^7\\
&= Y^4-8X\left(Y^2+2Y^3+Y^4\right)-26X^2\left(3Y+3Y^2+Y^3\right)\\
&\quad +36X^2\left(4Y+6Y^2+4Y^3+Y^4\right)+6X^2\left(5Y+10Y^2+10Y^3+5Y^4+Y^5\right)\\
&\quad +X^3\left(16(1+Y)^5-24(1+Y)^4\right)+X^4\left(21(1+Y)^6-20(1+Y)^5\right)\\
&\quad -8X^5(1+Y)^6-X^6(1+Y)^7+16X^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $f^{(3)}(X,Y)$ é uma curva de multiplicidade 2, com cone tangente (X^2). Vamos explodir agora na segunda carta. Assim

$$f^{(4)} = (Y-4X)^2-8X\left(2Y^2+Y^3\right)+6X^2\left(5Y+10Y^2+10Y^3+5Y^4+Y^5\right)+\cdots.$$

Fazendo mais uma mudança para que o cone tangente seja (Y^2) e explodindo duas vezes mais obtemos a resolução mergulhada de (f).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abhyankar, S.S. and Moh, T., *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 260, 1973, 47-83; 261, 1973, 29-54.

[2] Abhyankar, S.S. and Moh, T., *Embeddings of the line in the plane.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 276, 1975, 148-166.

[3] Abhyankar, S.S., *Irreducibility criterion for germs of analytic functions of two complex variables.* Advances in Mathematics 74, 1989, 190-257.

[4] A'Campo, N. and Oka, M., *Geometry of plane curves via Tschirnhausen resolution* tower. Osaka J. Math. 33, 1996, 1003-1033.

[5] Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G., *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[6] Brieskorn, E. and Knörrer, H., *Plane Algebraic Curves.* Birkhäuser Verlag, 1986.

[7] Casas-Alvero, E., *Singularities of Plane Curves.* London Mathematical Society. Lecture Note Series 276. Cambridge Univ. Press, 2000.

[8] Fulton, W., *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry.* Addison-Wesley, 1989.

[9] González Pérez, P.D., *Approximate roots, toric resolutions and deformations of a plane branch.* Journal Math. Soc. Japan 62 (3), 2010, 975 - 1004.

[10] Gwoździewicz, J. and Ploski, A., *On the approximate roots of polynomials.* Annales Polonici Mathematici LX3, 1995, 199-210.

[11] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52. Springer, 1997.

[12] Hefez, A., *Irreducible plane curve singularities*. Real and Complex Singularities. The sixth workshop at São Carlos, edited by D. Mond and M. J. Saia. Marcel Dekker, 1-120, 2003.

[13] Hirschfeld, J.W. P., Korchmáros, G. and Torres, F., *Algebraic curves over a finite field*. Princeton Series in Applied Mathematics, 2008.

[14] Popescu-Pampu, P., *Approximate roots*. Valuation Theory and its Applications. F. V. Kuhlman et al eds. Fields Institute Communications, v. 33, AMS, 2003, 285-321.

[15] Salomão, R., *O teorema do mergulho da reta*. Dissertação de mestrado, UFF, 2004.

[16] Walker, R., *Algebraic Curves*. Springer-Verlag, 1978.

[17] Wall, C.T.C., *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge Univ. Press, 2004.

[18] Zariski, O., *Le Problème des Modules pour les Branches Planes*. Hermann, Paris, 1986.