UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Tiago Alves Pacifico

Sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis.

Maringá - PR
21 de Fevereiro de 2017

Tiago Alves Pacifico

Sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.

Maringá - PR
2017

Sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis.

Tiago Alves Pacifico

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.
Universidade Estadual de Maringá.

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto.
Universidade de São Paulo.

Prof^{a} Dr^{a} Patrícia Hernandes Baptistelli.
Universidade Estadual de Maringá.

Maringá
Fevereiro de 2017

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus pela vida que tenho e tudo que nela conquistei.

Agradeço aos meus pais Sonia Regina Alves Pacifico e Jorge Roberto Pacifico, por me darem todo suporte, apoio e incentivo na luta pelos meus objetivos. Agradeço ainda aos meus irmãos Paulo Henrique Alves Pacifico e Gabriel Alves Pacifico pelos conselhos e incentivos que sempre me deram.

Agradeço a minha linda princesa, amiga e companheira Izabella Durante Temporini Furtado por todo apoio, incentivo e companheirismo ao longo desses anos, que venham muitos outros.

Aos meus amigos André, Daniel, Marcelo, Marco, Sidney e Victor que fizeram da graduação e mestrado uma jornada incrível de se vivenciar.

Agradeço a todos os meus professores na minha vida acadêmica pelos conselhos e incentivos que me deram e me ajudaram a crescer pessoa e profissionalmente.

Ao meu orientador Josiney Alves de Souza pela dedicação, paciência e todos ensinamentos que me forneceu ao longo deste trabalho. Suas contribuições para minha vida acadêmica foram muito importante. Muito obrigado!

À profª. Drª. Patrícia Hernandes Baptistelli pela correção deste trabalho, bem como seus puxões de orelha que me ajudaram a crescer profissionalmente.

Ao prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto pelas correções e ideias que foram valiosas para deixar esse trabalho lustroso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar a equivalência entre sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis. Veremos que um sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, admite uma secção com aplicação contínua. Com isso, em um espaço métrico localmente compacto e separável, construiremos uma secção com aplicação contínua para um sistema dinâmico dispersivo e, portanto, mostraremos que o mesmo é equivalente a um sistema dinâmico paralelizável. Por fim, estudaremos a relação entre fibrados e sistemas dinâmicos para provarmos que, em um espaço de Hausdorff paracompacto e localmente compacto, um sistema dinâmico é dispersivo se, e somente se, é paralelizável.

Palavras chave: Sistemas Dinâmicos, Dispersivo, Paralelizável, Completamente Instável, Secção, Fibrados.

Abstract

The main purpose of this work is study the equivalence between dispersive and parallelizable dynamical systems. We will see that a dynamical systems is parallelizable if only if has section with a continous aplication. With that, in a locally compact separable metric space it would be built a section with continous aplication for a dispersive dynamical systems, and therefore it will be proved that is equivalent for parallelizable dynamical systems. Finally, we will study the relation beetween fiber bundles and dynamical systems to shown that in a paracompact locally compact Hausdorff space a dynamical systems is dispersive if only if is parallelizable.

Key Words: Dynamical Systems, Dispersive, Parallelizable, Completely Unstable, Section, Fiber Bundles.

Sumário

Introdução

Os sistemas dinâmicos surgiram com a abordagem qualitativa da teoria de equações diferenciais feitas primeiramente por H. J. Poincaré. Os sistemas dinâmicos paralelizáveis aparecem nos artigos [17–20] de H. Whitney, enquanto o conceito de dispersividade é mais clássico e aparace nos mesmos trabalhos de Whitney e também no artigo [12] de V. V. Nemytskii. A equivalência entre um sistema dinâmico dispersivo e paralelizável feita em um espaço de fase métrico localmente compacto e separável foi devido a J. Dugundji e A. H. Antosiewicz em [5], publicado no ano de 1961, depois foi estendida para um espaço Hausdorff localmente compacto e paracompacto por O. Hájek no seu trabalho [7] em 1971.

O principal objetivo deste trabalho é estudar a equivalência entre os conceitos de dispersividade e paralelismo. Veremos que um sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, admite secção com função contínua. Com isso definiremos os tubos, um conjunto que se comporta localmente como uma secção, e construiremos uma secção para os sistemas dinâmicos dispersivos em um espaço de fase métrico, localmente compacto e separável. Depois estudaremos a teoria de fibrados e mostraremos que o fibrado associado ao sistema dinâmico é trivial se, e somente se, o sistema dinâmico é paralelizável. Além disso provaremos que um sistema dinâmico é completamente instável se, e somente se, a projeção sobre o espaço das órbitas é um fibrado com fibra $\mathbb{R}$. Com esse resultado mostraremos algumas equivalências entre o sistema dinâmico completamente instável e dispersivo. Concluiremos provando que, em um espaço Hausdorff localmente compacto e paracompacto, um sistema dinâmico é dispersivo se, e somente se, é paralelizável.

No Capítulo 1 definiremos os sistemas dinâmicos e os conceitos elementares que estudaremos no restante do trabalho. Na Secção 1.1 apresentaremos a definição de sistemas dinâmicos e veremos que as transições de um sistema dinâmico são homeomorfismos. Esse fato é importante, pois mostra que os abertos do espaço de fase serão abertos quando avaliamos seu comportamento ao longo do tempo. Na Secção 1.2 e 1.3 definiremos os objetos que exercem um papel central na teoria de sistemas dinâmicos que são as trajetórias, pontos críticos e conjuntos invariantes. Na Secção 1.4 estudaremos o conjunto limite e conjunto limite prolongacional, este último exercerá um papel central no estudo dos sistemas dinâmicos completamente instáveis e dispersivos. Veremos ainda que o conjunto limite prolongacional de um dado ponto é descrito pela intersecção do comportamento assintótico das vizinhanças deste ponto.

Na Secção 2.1 do Capítulo 2 veremos os conceitos de recursividade, mais precisamente, estudaremos os pontos que pertencem ao seu conjunto limite e conjunto limite prolongacional. Os resultados obtidos nesta secção exercerão um papel importante para determinarmos se um sistema dinâmico não é completamente instável ou dispersivo. Na Secção 2.2, estudaremos os conjuntos minimais e trajetórias recorrentes, mostraremos que em uma trajetória compacta o conjunto é minimal se, e somente se, a trajetória é recorrente. Finalizaremos o capítulo estudando a estabilidade de Lagrange e provaremos a existência de conjuntos minimais em espaços compactos.

No Capítulo 3 definiremos sistemas dinâmicos Poisson instáveis, Lagrange instáveis, completamente instáveis e dispersivos, entretanto daremos mais enfoque a este último por ser o conceito central deste trabalho. Na Secção 3.1 definiremos sistemas dinâmicos paralelizáveis e secção de um sistema dinâmico, veremos que ambos os conceitos são equivalentes quando a aplicação dada pela secção for contínua. Este fato nos motiva a definição de tubo, um conjunto que se comporta localmente como uma secção, e assim construiremos, em um sistema dinâmico dispersivo com espaço de fase métrico localmente compacto e separável, uma secção com aplicação contínua e finalizaremos mostrando a primeira equivalência entre sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis.

No Capítulo 4 estudaremos o espaço das órbitas de um sistema dinâmico sobre espaços topológicos arbitrários e veremos como esse conceito se relaciona com a teoria de fibrados. Provaremos que um sistema dinâmico completamente instável com secção transversal admite uma secção com aplicação contínua. Esse teorema nos conduzirá a provarmos que um sistema dinâmico em um espaço de Tychonoff é paralelizável se, e somente se, é completamente instável e o espaço das órbitas é paracompacto. Finalizaremos essa dissertação provando que um sistema dinâmico em um espaço de fase Hausdorff localmente compacto e paracompacto é paralelizável se, e somente se, é dispersivo.

Lista de Figuras

Capítulo 1

Definições e Conceitos Elementares

Neste capítulo introduziremos a definição de sistemas dinâmicos. Um sistema dinâmico é uma estrutura em um espaço topológico que associa a cada ponto x no espaço topológico e um tempo t, um elemento xt do espaço topológico. Essa estrutura nos dá uma noção de tempo no espaço topológico no seguinte sentido: dizemos que o ponto x andou um tempo t e associamos a esse deslocamento o ponto xt. Na Secção 1.1 definiremos o conceito de sistemas dinâmicos, mostraremos que a aplicação de transição é um homeomorfismo no espaço topológico e finalizaremos a secção dando alguns exemplos de sistemas dinâmicos. Na Secção 1.2 estudaremos os conjuntos invariantes e as trajetórias de um sistema dinâmico. Uma trajetória descreve como o ponto se comporta ao longo do tempo no sistema dinâmico. Na Secção 1.3 estudaremos trajetórias periódicas e pontos críticos, além de obter alguns resultados para determinar quando um ponto é crítico ou periódico. Na Secção 1.4 estudaremos o fecho de uma trajetória e o conjunto limite, que descreve o comportamento assintótico de um dado ponto ao longo do tempo. Por fim, na Secção 1.5, veremos as noções de prolongamento e o conjunto limite prolongacional, que além de levar em conta o comportamento da trajetória ao longo do tempo considera também o comportamento das vizinhanças do ponto. O leitor interessado pode encontrar os detalhes apresentados neste capítulo e no Capítulo 2 em [3, 4]

1.1 Sistemas Dinâmicos

Começaremos definindo sistema dinâmico.

Definição 1.1. *Um* ***sistema dinâmico*** *em um espaço topológico X é uma tripla $(X, \mathbb{R}, \pi)$, onde π é uma aplicação do produto cartesiano $X \times \mathbb{R}$ em X satisfazendo os seguintes axiomas:*

1. $\pi(x, 0) = x, \quad \forall\, x \in X.$
2. $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2), \;\; \forall\, x \in X \;\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$
3. *π é contínua.*

Os axiomas 1, 2 e 3 serão chamados respectivamente de Axioma da Identidade, Axioma de Grupo e Axioma da Continuidade.

Dado um sistema dinâmico em um espaço topológico X, o conjunto X e a aplicação π são chamados, respectivamente, de Espaço Fase (ou espaço estado) e a Aplicação de Fase (do Sistema Dinâmico). De agora em diante, diremos simplesmente sistema dinâmico para indicar um sistema dinâmico em um espaço topológico X. No caso do espaço topológico ser um espaço métrico, indicaremos por d a métrica de X.

Para simplificar a notação denotaremos a imagem $\pi(x,t)$, de um ponto $(x,t) \in \mathbb{R}$, simplesmente por xt. Desta forma, os Axiomas da Identidade e o Axioma de Grupo serão do seguinte modo:

1. $x.0 = x, \quad \forall x \in X.$
2. $xt_1(t_2) = x(t_1 + t_2), \quad \forall x \in X$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Munidos dessa notação, se $M \subset X$ e $A \subset \mathbb{R}$ são conjuntos não vazios, então MA é o conjunto $\{xt;\, x \in M$ e $t \in A\}$. Se M ou A é um conjunto unitário, ou seja, $M = \{x\}$ ou $A = \{t\}$, escreveremos simplesmente xA e Mt para indicar $\{x\}A$ e $M\{t\}$, respectivamente. Dado $x \in X$, o conjunto $x\mathbb{R}$ é chamado de trajetória de x.

A aplicação de fase determina uma aplicação de uma variável quando fixamos t ou x. Assim para $t \in \mathbb{R}$ fixado, a aplicação $\pi^t : X \to X$, dada por $\pi^t(x) = xt$ é chamada de aplicação de transição, e para $x \in X$ fixo, a aplicação $\pi_x : \mathbb{R} \to X$ definido por $\pi_x(t) = xt$ é chamada de aplicação movimento. Observe que π_x mapeia $\mathbb{R}$ na trajetória $x\mathbb{R}$.

O seguinte teorema expressa uma importante propriedade da aplicação de transição.

Teorema 1.2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, π^t é um homeomorfismo de X em si mesmo.*

Demonstração. Dado qualquer $t \in \mathbb{R}$, π^t é contínua uma vez que π é contínua. Para mostrar que π^t é bijetora, mostraremos que π^{-t} é a inversa de π^t. Com efeito, dados $s, t \in \mathbb{R}$, pelo Axioma de Grupo, temos que

$$\pi^t \circ \pi^s(x) = \pi^t(\pi^s(x)) = \pi^t(xs) = xst = x(s+t) = x(t+s) = \pi^{t+s}(x).$$

Logo, $\pi^t \circ \pi^s = \pi^{t+s}$. Assim como π^0 é a aplicação identidade em X, pelo Axioma da Identidade, segue que $\pi^t \circ \pi^{-t} = \pi^0 = \pi^{-t} \circ \pi^t$, donde π^t é bijetora com inversa π^{-t}, a qual é contínua pela continuidade de π. Portanto π^t é um homeomorfismo de X e o resultado segue da arbitrariedade de $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Da demonstração anterior podemos concluir alguns fatos. O primeiro deles é, a aplicação transição torna o conjunto $\mathcal{F} = \{\pi^t;\, t \in \mathbb{R}\}$ um grupo abeliano munido com a operação de composição. De fato, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\pi^0 = Id_x \in \mathcal{F}$. Além disso, dados $\pi^a, \pi^b, \pi^c \in \mathcal{F}$, temos que, para cada $x \in X$,

$$(\pi^a \circ \pi^b) \circ \pi^c(x) = \pi^a \circ \pi^b(xc) = xc(b+a) = x(c+(b+a)) = x((c+b)+a) = \pi^a \circ (\pi^b \circ \pi^c(x))$$

e como vimos, dado $\pi^t \in \mathcal{F}$, o elemento π^{-t} é o inverso de π^t, e ainda, π^0 é o elemento neutro da operação de composição. Por fim, o grupo $\mathcal{F}$ é abeliano já que

$$\pi^a \circ \pi^b(x) = \pi^a(xb) = (xb)a = x(b+a) = x(a+b) = (xa)b = \pi^b(xa) = \pi^b \circ \pi^a(x).$$

Um outro fato importante é que sendo as aplicações π_x e π^t contínuas, para qualquer $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ e qualquer conjunto compacto (e/ou conexo) $A \subset X$, o conjunto $\pi^t(A) = At$ é compacto (e/ou conexo). Ainda, se $B \subset \mathbb{R}$ é compacto (e/ou conexo), segue que o conjunto $\pi_x(B) = xB$ é compacto (e/ou conexo). Em particular, dados $a, b \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\pi_x([a,b]) = \{xt, t \in [a,b]\} = x[a,b]$$

é conexo e compacto.

Veremos agora alguns exemplos de sistemas dinâmicos.

Exemplo 1.3 (Sistema de Equações Diferenciais Autônomas a um parâmetro)**.** *Considere o sistema diferencial*

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{1.1}$$

com μ um parâmetro em um espaço métrico M, e $f : \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Assuma que, para cada $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times M$, exista uma única solução $\phi(t, (x, \mu))$ definida em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\phi(0, (x, \mu)) = x$.

Escrevendo $X = \mathbb{R}^n \times M$ e definindo $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ por $\pi((x, \mu), t) = (\phi(t, (x, \mu)), \mu)$, vemos que a aplicação π define um sistema dinâmico em X.

Com efeito, é imediato que $\pi((x, \mu), 0) = (x, \mu)$, por definição. Agora para verificar que $\pi(\pi((x, \mu), t), s) = \pi((x, \mu), t + s)$, recordemos primeiramente que a solução ϕ, definida acima, tem como domínio o conjunto $\mathbb{R} \times X$ e contradomínio $\mathbb{R}^n$. Assim, note que por um lado temos

$$\pi(\pi((x, \mu), t), s) = \pi([\phi(t, (x, \mu)), \mu], s) = \phi(s, \phi(t, (x, \mu)), \mu)$$

e, por outro lado, temos

$$\pi((x, \mu), t + s) = (\phi(t + s, (x, \mu)), \mu).$$

Desta forma, basta provarmos que $\phi(s, \phi(t, (x, \mu)), \mu) = \phi(t + s, (x, \mu))$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$ e $(x, \mu) \in X$. Com efeito, dado $(x, \mu) \in X$, fixe $s \in \mathbb{R}$ e defina $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por $\beta(t) = \phi(s, \phi(t, (x, \mu), \mu))$ e também $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por $\gamma(t) = \phi(s + t, (x, \mu))$ e observe que,

$$\beta(0) = \phi(s, \phi(0, (x, \mu)), \mu) = \gamma(0)$$

e assim pela unicidade das soluções vemos que $\beta \equiv \gamma$, donde segue que $\phi(s, \phi(t, x, \mu), \mu) = \phi(t + s, x, \mu)$, o que prova que $\pi(\pi((x, \mu), t), s) = \pi((x, \mu), t + s)$, e como a aplicação ϕ é contínua, vem que π é contínua e portanto $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico.

Exemplo 1.4. *(Sistema Dinâmico no Toro) Considere a equação diferencial definida no plano $\mathbb{R}^2$ pela equação*

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

onde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é uma função contínua e para todo ponto* $x \in \mathbb{R}^2$ *a equação diferencial acima admite solução única* $\phi(t,x)$ *definida em toda reta* $\mathbb{R}$ *e satisfaz* $\phi(0,x) = x$*. Denotemos* $x = (\theta, \nu)$ *e* $f = (f_1, f_2)$ *e assuma ainda que as funções* f_1 *e* f_2 *são periódicas com período* 1 *em cada uma das variáveis* θ *e* ν*. Desta forma temos*

$$f_i(\theta,\nu) = f_i(\theta+1,\nu) = f_i(\theta,\nu+1) = f_i(\theta+1,\nu+1), \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

A equação diferencial definida em (1.2) representa um equação diferencial no toro quando identificamos o conjunto $I^2 = \{(\theta,\nu);\, 0 \leq \theta < 1,\, 0 \leq \nu < 1\}$ *com o toro, identificando os lados opostos* $\theta = 0$*,* $\theta = 1$ *e* $\nu = 0$*,* $\nu = 1$*, em particular os pontos* $(0,0)$*,* $(0,1)$*,* $(1,0)$ *e* $(1,1)$ *são todos identificados. O plano* $\mathbb{R}^2$ *é agora projetado no toro identificando os pontos da forma* (θ,ν) *com o ponto* (θ',ν') *do conjunto* I^2 *quando* $\theta - \theta'$ *e* $\nu - \nu'$ *são inteiros. As trajetórias da equação diferencial (1.2) no plano são projetadas no toro, o que torna o toro uma sistema dinâmico quando as condições (1.3) são satisfeitas.*

1.2 Conjuntos Invariantes e Trajetória

Nesta secção estudaremos os conjuntos invariantes e trajetórias. Começaremos definindo o conceito de invariante. Seja $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico fixado.

Definição 1.5. *Dado um conjunto* $M \subset X$*, então:*

1. *M é dito* ***positivamente invariante*** *se, para todo* $t \in \mathbb{R}^+$ *e* $x \in M$*, tem-se* $xt \in M$*.*

2. *M é dito* ***negativamente invariante*** *se, para todo* $t \in \mathbb{R}^-$ *e* $x \in M$*, tem-se* $xt \in M$*.*

3. *M é dito* ***invariante*** *se é positivamente e negativamente invariante.*

Observe que X e $\emptyset$ são conjuntos invariantes, o primeiro é imediato, enquanto o segundo é por vacuidade. Além disso, segue da definição que $\pi_t(M) = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e M um conjunto invariante, ou seja, um conjunto invariante é preservado pelas transições.

A respeito de um conjunto invariante, temos as seguintes propriedades.

Proposição 1.6. *Seja* $\{M_i\}_{i \in I}$ *uma coleção de conjuntos positivamente invariantes ou negativamente invariantes ou invariantes de* X*. Então sua união e sua intersecção possuem a mesma propriedade.*

Demonstração. Demonstraremos que união de conjuntos positivamente invariantes é positivamente invariante e que intersecção de conjuntos negativamente invariantes é negativamente invariante. Os outros casos seguem analogamente. Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma coleção de conjuntos positivamente invariantes e considere $x \in \bigcup_{i\in I} M_i$ e $t \in \mathbb{R}^+$ arbitrários. Assim existe $i_0 \in I$ tal que $x \in M_{i_0}$ e como M_{i_0} é positivamente invariante e $t \in \mathbb{R}^+$ segue que $xt \in M_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} M_i$, donde vem que $\bigcup_{i\in I} M_i$ é um conjunto positivamente invariante. Agora suponha que $\{N_j\}_{j\in J}$ seja uma coleção de conjuntos negativamente invariantes de X e escolha $x \in \bigcap_{j\in J} N_j$. Então $x \in N_j$ para todo $j \in J$, e uma vez que N_j é negativamente invariante para todo $j \in J$, dado qualquer $t \in \mathbb{R}^-$, tem-se $xt \in N_j$, ou seja, $xt \in \bigcap_{i\in J} N_j$, e portanto, pela arbitrariedade de x, segue que $\bigcap_{j\in J} N_j$ é negativamente invariante.

$\square$

Como um conjunto invariante é preservado por transições, é de se esperar que o conceito de invariância tenha propriedades topológicas. Veremos isso nos próximos resultados.

Com respeito ao fecho de um conjunto invariante, temos o seguinte.

Proposição 1.7. *Seja $M \subset X$ um conjunto positivamente invariante ou negativamente invariante ou invariante de X. Então o seu fecho, $\overline{M}$, tem a mesma propriedade.*

Demonstração. Faremos o caso que M é um conjunto invariante, os outros casos são análogos a este. Sejam $M \subset X$ um conjunto invariante, $x \in \overline{M}$ e $t \in \mathbb{R}$ arbitrário. Como $x \in \overline{M}$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M, tais que $x_n \to x$. Pelo fato de que M é invariante, segue que $x_n t \in M$, para todo n. Logo $\{x_n t\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de M e como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, pelo Axioma da Continuidade, vemos que $x_n t \to xt$, donde tem-se que $xt \in \overline{M}$, e pela arbitrariedade de t, o resultado segue. $\square$

Para mostrar que o interior e a fronteira de um conjunto invariante é invariante, precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 1.8. *Um conjunto $M \subset X$ é positivamente invariante se, e somente se, $X \backslash M$ é negativamente invariante. Além disso, M é invariante se, e só se, $X \backslash M$ é invariante.*

Demonstração. Faremos o caso em que M é invariante se, e só se, $X\backslash M$ é invariante, o outro caso é análogo. Seja M um conjunto invariante e considere $x \in X\backslash M$. Dado $t \in \mathbb{R}$ queremos mostrar que $xt \in X\backslash M$. De fato, caso contrário teríamos que $xt \in M$, mas como M é invariante temos também que $(xt)(-t) \in M$, ou seja, $(xt)(-t) = x(t-t) = x0 = x \in M$, contradizendo o fato de que $x \in X\backslash M$. Portanto devemos ter que $xt \in X\backslash M$, isto é, $X\backslash M$ é invariante. Reciprocamente, suponha que $X\backslash M$ é invariante e seja $x \in M$, dado $t \in \mathbb{R}$ mostraremos que $xt \in M$. Com efeito, se $xt \in X\backslash M$, então teríamos que $(xt)(-t) \in X\backslash M$, pois $X\backslash M$ é invariante, mas $(xt)(-t) = x \in X\backslash M$, contradizendo o fato de que $x \in M$, e portanto devemos ter que $xt \in M$ e assim M é invariante. $\square$

Uma consequência dos resultados obtidos acima é o seguinte teorema:

Teorema 1.9. *Se $M \subset X$ é um conjunto invariante, então sua fronteira ∂M e seu interior $int(M)$ são conjuntos invariantes. Além disso, caso ∂M e $int(M)$ sejam invariantes, então M será invariante se for aberto ou fechado.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que M é um conjunto invariante e mostraremos que sua fronteira e seu interior também são conjuntos invariantes. Uma vez que M é invariante, segue do Teorema 1.8 que $X \backslash M$ é invariante. Além disso, munidos da Proposição 1.7, vemos que $\overline{M}$ e $\overline{X \backslash M}$ são também invariantes. Desta forma, os conjuntos $int(M) = X \backslash (\overline{X \backslash M})$ e $\partial M = \overline{X \backslash M} \cap \overline{M}$ são invariantes como complementar e intersecção, respectivamente, de conjuntos invariantes. Para mostrarmos a recíproca, suponhamos que ∂M e $int(M)$ são invariantes, então se M é aberto, segue que $M = int(M)$ é invariante. Caso M seja fechado, temos que $M = \overline{M} = int(M) \cup \partial M$ é invariante, como união de conjuntos invariantes. Logo, em qualquer caso, vemos que M é invariante como desejado. □

Corolário 1.10. *Se M é positivamente invariante ou negativamente invariante, então seu interior também possui a mesma propriedade.*

Demonstração. Faremos o caso em que M é negativamente invariante, o outro caso segue por um raciocínio análogo. Se M é negativamente invariante, então $X \backslash M$ é positivamente invariante, e assim $\overline{X \backslash M}$ também é, donde vem que $int(M) = X \backslash \overline{X \backslash M}$ é negativamente invariante. □

Denotaremos o conjuntos das partes de X por $\wp(X)$. Um subconjunto importante de $\wp(X)$ que estudaremos agora é o seguinte conjunto:

Definição 1.11. *Seja $\wp(X)$ o conjunto das partes de um X. Definimos as aplicações γ, γ^+ e γ^-, de X em $\wp(X)$ por:*

$$\gamma(x) = \{xt;\, t \in \mathbb{R}\},\ \gamma^+(x) = \{xt;\, t \in \mathbb{R}^+\},\ \gamma^-(x) = \{xt;\, t \in \mathbb{R}^-\}.$$

Para qualquer $x \in X$, os conjuntos $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ e $\gamma^-(x)$ serão chamados, respectivamente, de ***trajetória****,* ***semi trajetória positiva*** *e* ***semi trajetória negativa*** *ao longo de x, ou simplesmente de x.*

Observação 1.12. *Dado $x \in X$, os conjuntos $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ e $\gamma^-(x)$ são, respectivamente, invariante, positivamente invariante e negativamente invariante. Mostraremos que $\gamma^+(x)$ é positivamente invariante, nos outros casos se procede de maneira análoga. Considere $y \in \gamma^+(x)$ e $t \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Como $y \in \gamma^+(x)$ existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$, tal que, $y = xt_0$. Assim, como $(t_0 + t) \in \mathbb{R}^+$, já que ambos são positivos, temos que $y = x(t_0 + t) \in \gamma^+(x)$, donde segue que $\gamma^+(x)$ é positivamente invariante.*

Dado uma aplicação $Q : X \to \wp(X)$ e $M \subset X$ não vazio, indicaremos por $Q(M)$ o conjunto $Q(M) = \bigcup_{x \in M} Q(x)$. Desta forma, dado $M \subset X$, temos que os conjuntos

$\gamma(M)$, $\gamma^+(M)$ e $\gamma^-(M)$ são, respectivamente, invariante, positivamente invariante e negativamente invariante, pelo Proposição 1.6. Munidos dessa notação, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.13. *Para que um conjunto $M \subset X$ seja invariante, positivamente invariante ou negativamente invariante, é necessário e suficiente que, $\gamma(M) = M$, $\gamma^+(M) = M$ ou $\gamma^-(M) = M$, respectivamente.*

Demonstração. Mostraremos que M é invariante se, e somente se, $\gamma(M) = M$. Os outros casos seguem de maneira análoga. É imediato que $M \subset \gamma(M)$, pois $x \in \gamma(x) \subset \gamma(M)$ para cada $x \in M$. Além disso, M é invariante, se e somente se, $xt \in M$ para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $\gamma(x) \subset M$ para cada $x \in M$, ou ainda, $\gamma(M) \subset M$, donde segue que $\gamma(M) = M$.

□

Uma consequência da demonstração acima é a seguinte proposição

Proposição 1.14. *Um conjunto $M \subset X$ é invariante, positivamente invariante, negativamente invariante se, e somente se, $\gamma(M) \subset M$, $\gamma^+(M) \subset M$ ou $\gamma^-(M) \subset M$, respectivamente.*

Em geral, os conjuntos $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ e $\gamma^-(x)$ não são abertos e nem fechados. Veremos exemplos disto mais adiante. Entretanto uma propriedade interessante é o seguinte teorema.

Teorema 1.15. *Um conjunto $M \subset X$ é invariante, positivamente invariante ou negativamente invariante se, e somente se, cada uma de suas componentes conexas possui a mesma propriedade.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que M é invariante e mostraremos que cada uma de suas componentes conexas também é. Seja $M = \bigcup_{k\in K} C_k$, onde cada C_k é uma componente conexa de M e K um conjuntos de índices. Queremos mostrar que para cada $k \in K$ o conjunto C_k é invariante. Com efeito, tome $x \in C_k$. Uma vez que o conjunto $x\mathbb{R}$ é conexo, pois π_x é contínua e $\pi_x(\mathbb{R}) = x\mathbb{R}$, devemos ter que $x\mathbb{R} \subset C_k$. Dessa forma devemos ter que $x\mathbb{R} = \gamma(x) \subset C_k$, pela arbitrariedade de x, segue que $\gamma(C_k) \subset C_k$ e, portanto, pela Proposição 1.14 C_k é invariante. Como $k \in K$ é um elemento qualquer, obtemos o desejado. O caso em que M é positivamente invariante ou negativamente invariante é feito por argumentos análogos. Reciprocamente, se cada componente conexa de M é um conjunto invariante, positivamente invariante ou negativamente invariante, segue que $M = \bigcup_{k\in K} C_k$ é invariante, positivamente invariante ou negativamente invariante como união de conjuntos que possuem a respectiva propriedade. □

Uma consequência imediata do teorema acima é que cada componente conexa do espaço de fase é um conjunto invariante.

1.3 Pontos críticos e Trajetórias Periódicas

Nesta secção daremos início à classificação de certas trajetórias de um sistema dinâmico. Os pontos críticos se caracterizam pelo fato de sua trajetória consistir somente de um elemento, a saber, o ponto. Enquanto que a trajetória periódica consiste inteiramente da imagem pela aplicação π_x de um intervalo compacto $[0, t]$ para algum t. Nesta secção e no restante do capítulo admitiremos que o espaço de fase X é um espaço métrico. Começaremos definindo ponto crítico.

Definição 1.16. *Um ponto $x \in X$ é dito **ponto crítico**, ou ainda **ponto de equilíbrio**, se $x = xt$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Uma maneira de caracterizar os pontos críticos ou trajetórias de pontos críticos é o que expressa o seguinte teorema.

Teorema 1.17. *Seja $x \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *x é um ponto crítico.*
2. *$\{x\} = \gamma(x)$.*
3. *$\{x\} = \gamma^+(x)$.*
4. *$\{x\} = \gamma^-(x)$.*
5. *Existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tais que $\{x\} = x[a, b]$.*
6. *Existe uma sequência $\{t_n\}$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$ com $x = xt_n$ para cada n.*

Demonstração. É imediato da definição que a condição 1 equivale a 2. Além disso, por definição a condição 2 implica 3 e 4, por definição.

Agora mostremos que as condições 3 e 4 implicam 1. De fato, suponhamos que $\gamma^-(x) = \{x\}$ e mostremos que x é um ponto crítico. Para isso basta mostrar que $xt = x$ para $t \in \mathbb{R}^+$, uma vez que $\{x\} = \gamma^-(x)$. Seja $t \in \mathbb{R}^+$, então $-t \in \mathbb{R}^-$ e $x(-t) = x$, assim temos $xt = (x(-t))t = x(-t+t) = x0 = x$, donde segue que x é um ponto crítico. Se tivermos que $\gamma^+(x) = \{x\}$. Considere $t \in \mathbb{R}^-$. Então $-t \in \mathbb{R}^+$, isto é, $x(-t) = x$, por hipótese, logo, como feito acima, $xt = x$ e assim x é um ponto crítico. Agora mostraremos que a condição 1 equivale a 5. É fato que se x é crítico então $\{x\} = x[a, b]$ para algum, mais ainda, para todo $a < b$. Suponha então que $\{x\} = x[a, b]$ para algum $a < b$ e mostremos que x é um ponto crítico. Primeiro note que se $\{x\} = x[a, b]$ então $\{x\} = x[-b, -a]$, pois dado $t \in [-b, -a]$ temos $-t \in [a, b]$, donde $x(-t) = x$ e assim $xt = (x(-t))t = x(-t+t) = x0 = x$. Agora, dado $b_0 \in [a, b]$ temos que $xb_0 = x$. Afirmamos que $xnb_0 = x$ para todo n inteiro. Com efeito, como $x(-b_0) = (xb_0)(-b_0) = x0 = x$ basta mostrar que $xnb_0 = x$ para todo n inteiro e positivo. Faremos por indução sobre n. Note que $x2b_0 = x(b_0 + b_0) = (xb_0)b_0 = xb_0 = x$. Suponha que $xnb_0 = x$ e mostremos que $x(n+1)b_0 = x$. De fato, $x(n+1)b_0 = x(b_0 n + b_0) = (xb_0)nb_0 = x$, como desejado.

Assim já que $a < b$ e $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n(b-a), n(b-a)]$, segue que x é um ponto crítico e o resultado segue.

Por fim, faremos a equivalência entre a condição 6 e a condição 1. É imediato da definição que 1 implica em 6. Assuma que existe uma sequência $\{t_n\}$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$ com $x = xt_n$ para cada n e considere $t \in \mathbb{R}$. Se existem k e n inteiros tais que $t = kt_n$, como foi feito acima, vemos que $xt_n = xmt_n = x$ para todo inteiro m. Em particular, temos que $xt = xkt_n = x$. Entretanto, se $t \neq kt_n$ para todos inteiros k e n, vemos que para cada m inteiro existe k_m tal que $k_m t_m < t < (k_m + 1)t_m$, pela propriedade arquimediana dos números reais. E assim temos $0 < t - k_m t_m < t_m$, e como $t_n \to 0$, segue que $(t - k_m t_m) \to 0$. Logo é possível escolher $l > m$ de forma que $t_l < t_m$ e $t - k_l t_l < t - k_m t_m$, donde vem que $k_m t_m < k_l t_l < t < (k_l + 1)t_l < (k_m + 1)t_m$. Desta forma, por construção, tem-se $t_m k_m \to t$. Assim, pelo Axioma da Continuidade, segue que $xk_m t_m \to xt$. Mas como $xt_n = x$, vemos que $xk_n t_n = x$ para todo inteiro n, e assim segue que $xt = x$. Pela arbitrariedade de t concluímos que x é um ponto crítico. □

Um resultado que segue da demonstração feita acima é o seguinte.

Corolário 1.18. *Dado $x \in X$, se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = xt$ então $x = x(nt)$ para todo inteiro n.*

Os pontos críticos não se caracterizam apenas pelo fato de que suas trajetórias consistem de um conjunto unitário. Podemos também analisar vizinhanças de um ponto para determinar se ele é crítico ou não, como provaremos no próximo teorema. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.19. *Se $x \neq xt$ para algum x e $t \in \mathbb{R}$, isto é, x não é um ponto crítico, então existem vizinhanças U e V de x e xt, respectivamente, tais que $V = Ut$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Demonstração. Uma vez que $x \neq xt$ sejam $\varepsilon = \frac{d(x,xt)}{2} > 0$, $W_1 = B(x, \varepsilon)$ e $W_2 = B(xt, \varepsilon)$. Assim $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Já que a aplicação π^t é um homeomorfismo de X, vemos que $\pi^t(W_1) = W_1 t$ é aberto, e como $x \in W_1$ vem que $xt \in \pi^t(W_1)$. Considere $V = W_2 \cap \pi^t(W_1)$ e $U = \pi^{-t}(V)$. Por construção, temos V aberto, $V \subset W_2$ e $xt \in V$, donde vem que $x \in U$ e $U \subset W_1$. Portanto as vizinhanças U e V cumprem as condições requeridas, como desejado. □

Teorema 1.20. *Um ponto $x \in X$ é crítico se, e somente se, toda vizinhança U de x contém uma semi trajetória de algum ponto de U.*

Demonstração. A implicação segue do teorema anterior, uma vez que $\gamma^+\{x\} = \gamma^-\{x\} = \{x\}$ implica que toda vizinhança de x contém uma semi trajetória de x. Para mostrarmos a recíproca faremos por contra positiva, ou seja, mostraremos que se x não é um ponto crítico, então existe uma vizinhança U de x que não contém nenhuma semi trajetória. De fato, suponha que x não seja um ponto crítico, então sem perda de generalidade, existe $t \in \mathbb{R}^-$ tal que $x \neq xt$. Assim, pelo lema anterior, existem vizinhanças U e V, de x e xt, respectivamente, tais que U e V são disjuntos e $V = Ut$. Para cada $y \in U$ tem-se que $yt \in V$, e como U e V são disjuntos, U não pode conter nenhuma semi trajetória. Caso contrário se U contém uma semi trajetória negativa de um ponto $y_0 \in U$ teríamos que $y_0 t \in U$ e assim $U \cap V \neq \emptyset$, uma contradição. De forma análoga, se U contém uma semi trajetória positiva de um ponto $y_0 \in U$, teríamos que $y_0, y_0(-t) \in U$, e assim $U \cap V \neq \emptyset$, o que não pode ocorrer. Portanto U não contém nenhuma semi trajetória e o resultado segue. $\square$

Como consequência do resultado acima, podemos analisar o comportamento assintótico dos pontos de X para encontrarmos os pontos críticos.

Teorema 1.21. *Sejam $x, y \in X$ e $d(yt, x) \to 0$ quando $t \to +\infty$(ou quando $t \to -\infty$). Então x é um ponto crítico.*

Demonstração. Para mostrar que x é um ponto crítico, pelo teorema anterior, basta mostrarmos que toda vizinhanças de x possui uma semi trajetória. Seja U uma vizinhança de x, então por hipótese existe $A > 0$ tal que $yt \in U$, para todo $t > A$. Mas assim, por definição, temos que $\gamma^+(yB) \subset U$ com $B > A$, e portanto x é um ponto crítico. $\square$

Por fim, o conjunto de todos os pontos críticos de um sistema dinâmico satisfaz a seguinte propriedade.

Teorema 1.22. *O conjunto dos pontos críticos de X é fechado.*

Demonstração. Seja C o conjunto dos pontos críticos de X. Queremos mostrar que $C = \overline{C}$. É fato que $C \subset \overline{C}$. Agora considere $x \in \overline{C}$ e $t \in \mathbb{R}$, então existe uma sequência x_n de pontos de C, tais que $x_n \to x$ e, além disso, $x_n t = x_n$ para todo n. Queremos mostrar que $xt = x$. Suponha por absurdo que $xt \neq x$. Então pelo Lema 1.19, existem vizinhanças U e V de x e xt, respectivamente, disjuntas e $V = Ut$. Mas como $x_n \to x$, existe N inteiro tal que $x_n \in U$, para todo $n > N$. Uma vez que $U = Vt$, temos que $x_n t \in V$, entretanto $x_n = x_n t$, contradizendo o fato de que U e V são disjuntos. Portanto devemos ter que $x = xt$, e assim segue que $x \in C$, logo $\overline{C} \subset C$ e $\overline{C} = C$. $\square$

Agora iremos estudar um outro caso de trajetória de um sistema dinâmico: as trajetórias periódicas.

Definição 1.23. *Um ponto $x \in X$ é **periódico** se existe um $T \neq 0$ tal que $xt = x(t+T)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

*O número T com a propriedade acima é chamado de **período** de x. Se um ponto $x \in X$ é periódico, então tanto a aplicação π_x, quanto a trajetória $\gamma(x)$, serão chamadas de periódicas.*

Observação 1.24. *Se um ponto $x \in X$ é crítico, então x é periódico com período t, para todo $t \in \mathbb{R}$. Note ainda que, para todo $x \in X$, o número $T = 0$ cumpre a condição $xt = x(t+T)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entretanto x não é necessariamente periódico.*

Uma forma de determinar os pontos periódicos é o que apresenta a proposição a seguir.

Proposição 1.25. *Um ponto $x \in X$ é periódico se, e somente se, existe $T \neq 0$, com $x = xT$.*

Demonstração. Para a implicação, dado período $T \neq 0$, tome $t = 0$ que teremos o seguinte $x = x0 = xt = x(t+T) = xT$. Agora suponha a recíproca válida. Então dado $t \in \mathbb{R}$ qualquer, vemos que

$$xt = (xT)t = x(T+t) = x(t+T)$$

e assim x é periódico com período T. □

Quando $x = xT$, para $T \neq 0$, o Corolário 1.18 garante que $x = xnT$, para todo inteiro n. Assim o período de um ponto periódico não é necessariamente único, em particular, os pontos críticos admitem uma quantidade não enumerável de períodos. Entretanto, quando um ponto periódico x não é crítico, pode-se mostrar que o conjunto dos períodos positivos de x admite um mínimo t_0, além disso, todos os outros períodos são múltiplos de t_0, como veremos agora.

Teorema 1.26. *Se $x \in X$ é um ponto periódico, mas não é crítico, então existe $T > 0$, tal que, T é o menor período positivo de x. Mais ainda, se τ é outro período de x então existe um inteiro n, de forma que $\tau = nT$.*

Demonstração. Seja $P = \{t > 0; -t \text{ é um período de } x\}$. Observe primeiramente que $P \neq \emptyset$, pois se $t \in \mathbb{R}$ é período de x então $x(-t) = (xt)(-t) = x(t-t) = x0 = x$, ou seja, $-t$ também é período de x. Logo, t ou $-t$ pertence a P, visto que ambos são não nulos. Ainda, 0 é um limitante inferior para o conjunto P, assim seja $T = \inf P$. Afirmamos que $T > 0$. De fato, caso contrário teríamos que $T = 0$, e como $T = \inf P$, existiria uma sequência $\{t_n\}$ de pontos de P, tais que $t_n \to 0$ e ainda como $t_n \in P$, tem-se que $xt_n = x$. Daí, segue do Teorema 1.17 que x é um ponto crítico, o que não pode ocorrer. Logo $T > 0$. Agora observe que T é um período de x, pois como existe uma sequência $\{t_n\}$ de pontos de P, tais que $t_n \to T$, pelo Axioma da Continuidade segue que $xt_n \to xT$. Mas $xt_n = x$, para todo n assim $xt_n \to x$. Desta forma, pela unicidade dos limites, temos $xT = x$. Portanto T é um período de x e, além disso, como $T = \inf P$, vemos que T é o menor período positivo de x. Finalmente, seja τ um período de x e suponha por absurdo que $\tau \neq nT$, para todo n inteiro. Disto vem que existe n_0 inteiro de forma que $n_0 T < \tau < (n_0+1)T$. Além disso, do Corolário 1.18, segue que $-n_0 T$ é também um período de x, donde

$$x(\tau - n_0 T) = x(\tau)(-n_0 T) = x(-n_0 T) = x,$$

ou seja, o número $\tau - n_0 T > 0$ é um período de x e $0 < \tau - n_0 T < T$, contradizendo a escolha de T. Logo devemos ter que $\tau = nT$, para algum inteiro n, como desejado. □

O teorema acima nos motiva a seguinte definição.

Definição 1.27. *Se x é um ponto periódico que não é crítico, então o menor período positivo de x é chamado de* ***período fundamental*** *ou* ***período primitivo****.*

Em geral, o conjunto dos pontos periódicos de um sistema dinâmico não é fechado, como acontece com os pontos críticos. Entretanto, veremos que, para um número real arbitrário t_0, o conjunto dos pontos periódicos com período menor do que ou igual a t_0 é fechado em X. Mas antes disso precisamos do lema abaixo.

Lema 1.28. *Se $\{x_n\}$ é uma sequência de pontos periódicos com período positivo $T_n \to 0$ e $x_n \to x$, então x é um ponto crítico.*

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{R}$, mostremos que $xt = x$. Para cada inteiro n existe um inteiro k_n, de modo que, $k_n T_n \leq t < (k_n + 1)T_n$. Uma vez que $T_n \to 0$ vem que $k_n T_n \to t$ e assim, como $k_n T_n$ são períodos de x_n, temos que $x_n = x_n(k_n T_n) \to xt$. Portanto x é ponto crítico. □

Com isso provaremos que:

Teorema 1.29. *Dado qualquer $\alpha > 0$, o conjunto de todos os pontos periódicos com período $T \leq \alpha$ é fechado.*

Demonstração. Seja P o conjunto de todos os pontos periódicos com período $\leq \alpha$. Dado $x \in \overline{P}$, existe uma sequência $\{x_n\}$ de pontos periódicos em P tal que $x_n \to x$ e seu período $0 \leq T_n \leq \alpha$, para todo n. Se $T_n \to 0$, pelo lema anterior vem que x é ponto crítico e, portanto, periódico. Caso contrário, como a sequência T_n é limitada, existe uma subsequência T_{n_k}, com $T_{n_k} \to \tau$ e $\alpha \geq \tau > 0$. Mas como T_{n_k} é o período de x_{n_k}, temos que, $x_{n_k} = x_{n_k} T_{n_k} \to x$. Como $T_{n_k} \to \tau$, por continuidade, vemos que $x_{n_k} T_{n_k} \to x\tau$ e pela unicidade do limite segue que $x\tau = x$. Portanto, em qualquer caso, vemos que x é ponto periódico e assim $\overline{P} \subset P$, e o resultado segue. □

Observação 1.30. *Note que se $x \in X$ é periódico, então $\gamma(x) = \gamma^-(x) = \gamma^+(x)$ é um conjunto compacto. De fato, se x é um ponto crítico, então $\gamma(x) = \gamma^-(x) = \gamma^+(x) = \{x\}$ é um conjunto compacto. Se x não é crítico, por definição existe $T > 0$, tal que $xt = x(t + T)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $\gamma(x) = \gamma^+(x) = \gamma^-(x) = x[0, T]$. Com efeito, dado um $y \in \gamma(x)$ existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y = xt_0$. Além disso, existe um inteiro k de forma que $kT \leq t_0 < (k + 1)T$, e uma vez que $x(-kT) = x$, pois $xT = x$, vem que*

$$xt_0 = x(-kT)t_0 = x(t_0 - kT) \in x[0, T].$$

Logo $\gamma(x) \subset x[0, T]$, e é claro que $x[0, T] \subset \gamma(x)$, donde segue a igualdade. As igualdades $\gamma^+(x) = x[0, T]$ e $\gamma^-(x) = x[0, T]$ são feitas de modo análogo.

1.4 Fecho de uma trajetória e Conjunto Limite

Nesta secção estudaremos o fecho de uma trajetória e os conjuntos limite. Os conjuntos limite descrevem o comportamento assintótico dos pontos de um sistema dinâmico. Estudaremos também o fecho de uma trajetória e veremos que o fecho de uma trajetória é a união da trajetória e dos conjuntos limite. Começaremos definindo conjunto limite.

Definição 1.31. *Definimos as aplicações* $\Lambda^+ : X \to \wp(X)$ *e* $\Lambda^- : X \to \wp(X)$ *como segue:*

$$\Lambda^+(x) = \{y \in X;\ \textit{existe uma sequência } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{R} \textit{ com } t_n \to +\infty \textit{ tal que } xt_n \to y\},$$

$$\Lambda^-(x) = \{y \in X;\ \textit{existe uma sequência } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{R} \textit{ com } t_n \to -\infty \textit{ tal que } xt_n \to y\}.$$

Para cada $x \in X$*, o conjunto* $\Lambda^+(x)$ *é chamado de* ***conjunto limite positivo*** *(ou* ***ômega limite****) e* $\Lambda^-(x)$ *é chamado de* ***conjunto limite negativo*** *(ou* ***alpha limite****).*

Observação 1.32. *Se* $x \in X$ *é um ponto periódico, então tem-se as seguintes igualdades* $\Lambda^+(x) = \Lambda^-(x) = \gamma(x)$*. De fato, seja* $y \in \Lambda^+(x)$*(ou* $y \in \Lambda^-(x)$*), então existe* $t_n \to +\infty$ *(ou* $t_n \to -\infty$*), tal que* $xt_n \to y$*. Como* x *é periódico, vimos que* $\gamma(x)$ *é compacto, e portanto fechado. Logo já que* $xt_n \in \gamma(x)$ *para cada* n *inteiro, segue que* $y \in \gamma(x)$ *e assim* $\Lambda^+(x) \subset \gamma(x)$ *(e* $\Lambda^-(x) \subset \gamma(x)$*). Agora dado um* $xt_0 \in \gamma(x)$*, considere* T *um período positivo de* x*. Defina* $t_n := nT + t_0$ *(ou* $t_n := (-n)T + t_0$*), para* n *inteiro positivo. É fato que assim teremos* $t_n \to +\infty$ *(e* $t_n \to -\infty$*), e além disso* $xt_n \to xt_0$*, o que prova que* $\gamma(x) \subset \Lambda^+(x)$ *(e* $\gamma(x) \subset \Lambda^-(x)$*).*

Veremos agora alguns exemplos de conjunto limite positivo e negativo.

Exemplo 1.33. *Considere o sistema de equações diferenciais em* $\mathbb{R}^2$*, dado em coordenadas polares por*

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r),\ \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Como as funções que definem o sistema de equações diferenciais são contínuas, mais ainda, de classe C^∞*, então existem soluções e tais soluções são únicas. Desta forma, as equações acima definem um sistema dinâmico. As trajetórias são dadas pela Figura 1.1.*

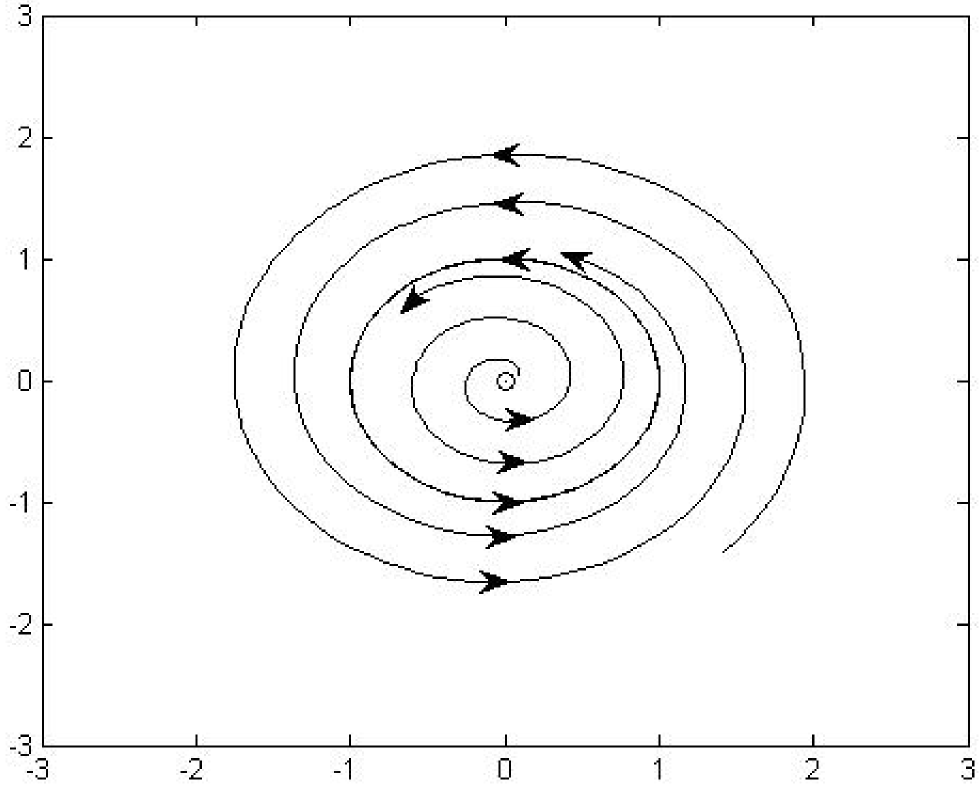

Figura 1.1: Retrato de fase do sistema $\frac{dr}{dt} = r(1-r)$, $\frac{d\theta}{dt} = 1$.

Temos um ponto crítico, a saber o ponto $O = (0,0)$, uma trajetória periódica, sendo ela o círculo unitário S^1, e ainda temos as trajetórias espirais, em cada ponto (r,θ) do sistema com $r \neq 0$ e $r \neq 1$. Para os pontos $P = (r,\theta)$, com $0 < r < 1$, temos que $\Lambda^+(P) = S^1$ e $\Lambda^-(P) = \{O\}$. Para os pontos $P = (r,\theta)$ com $r > 1$, temos $\Lambda^+(P) = S^1$ e $\Lambda^-(P) = \emptyset$.

Exemplo 1.34. *Considere o sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^2$ dado em coordenadas polares*

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \begin{cases} sen^2\theta + \frac{1}{log(3)}, & se\ 0 < r \leq \frac{3}{4} \\ sen^2\theta + \frac{1}{log(\frac{r}{1-r})}, & se\ \frac{3}{4} < r < 1 \\ sen^2\theta, & se\ r = 1 \\ sen^2\theta + \frac{1}{log(\frac{r}{r-1})}, & se\ r > 1. \end{cases}$$

Observe que as equações que definem o sistema são contínuas e assim o sistema admite solução, e as soluções são únicas. Logo o sistema de equações diferenciais definem um sistema dinâmico cujas trajetórias descrevem a Figura 1.2.

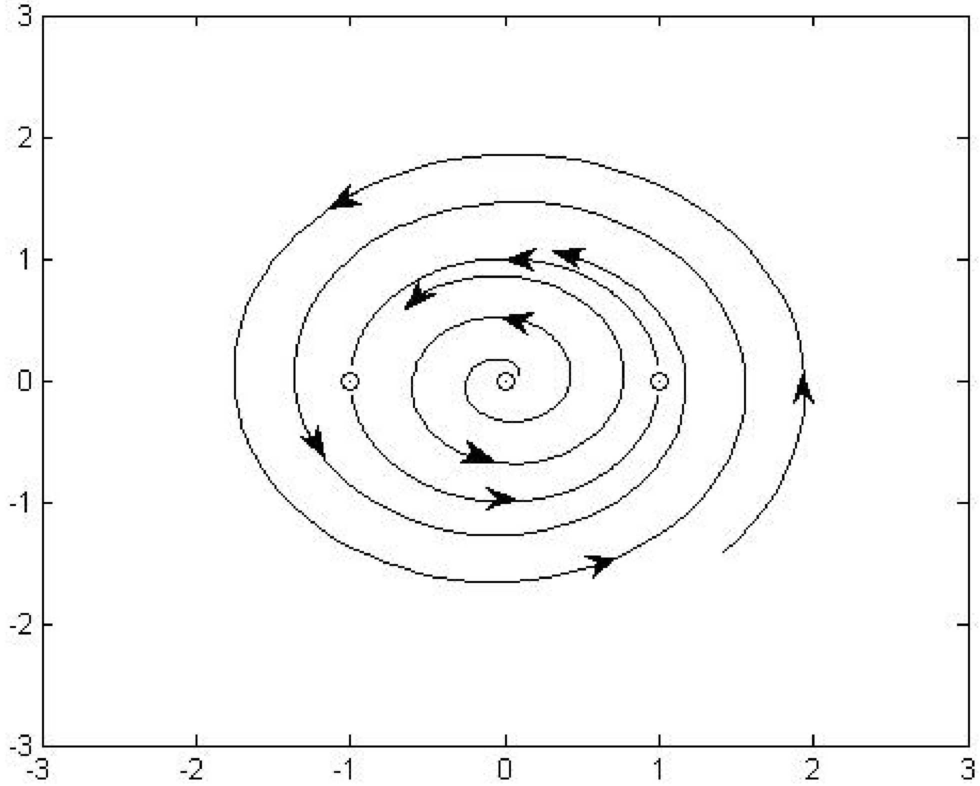

Figura 1.2: Retrato de fase do Exemplo 1.34.

Temos três pontos críticos: a origem $O = (0,0)$*, o ponto* $A = (1,0)$ *e o ponto* $B = (1,\pi)$*. Duas trajetórias* $\gamma_1=\{(1,\theta);\ 0 < \theta < \pi\}$ *e* $\gamma_2=\{(1,\theta);\ \pi < \theta < 2\pi\}$ *no círculo unitário* S^1*, e trajetórias espirais ao longo dos pontos* $P = (r,\theta)$ *com* $r \neq 1$ *e* $r \neq 0$*. Para os pontos* $P = (r,\theta)$*, com* $0 < r < 1$*, temos* $\Lambda^+(P) = S^1$ *e* $\Lambda^-(P) = \{O\}$*. Para* $r > 1$*, temos que* $\Lambda^+(P) = S^1$ *e* $\Lambda^-(P) = \emptyset$*. Para os pontos* $P = (1,\theta)$*, com* $0 < \theta < \pi$*, tem-se que* $\Lambda^+(P) = \{B\}$ *e* $\Lambda^-(P) = \{A\}$*. Já para os pontos* $P = (1,\theta)$*, com* $\pi < \theta < 2\pi$*, vemos que* $\Lambda^+(P) = \{A\}$ *e* $\Lambda^-(P) = \{B\}$*.*

Exemplo 1.35. *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o sistema de equações diferenciais dada por*

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad \dot{y} = g(x,y)$$

onde as funções f *e* g *são dadas por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & se\ |x| \geq 1 \\ -\frac{y(1-x^2)}{(1+y^2)(1-p(x)q(y))}, & se\ |x| < 1, \end{cases}$$

e

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x \geq 1 \\ -1, & se\ x \leq -1 \\ x, & se\ |x| < 1. \end{cases}$$

Aqui as funções $q(y)$ e $p(x)$ são quaisquer funções de classe C^1 satisfazendo

$$\begin{array}{cl} 0 < p(x) < \frac{1}{2}, & \textit{se } 0 < x < 1 \\ p(x) = 0, & \textit{se } x \leq 0 \\ p(x) = \frac{1}{2}, & \textit{se } x \geq 1 \\ 0 < q(y) < \frac{1}{2}, & \textit{se } y < 0 \\ q(y) = 0, & \textit{se } x \geq 0. \end{array}$$

Como o sistema de equações acima são contínuas, o mesmo define um sistema dinâmico cujas trajetórias são dadas como mostra a Figura 1.3.

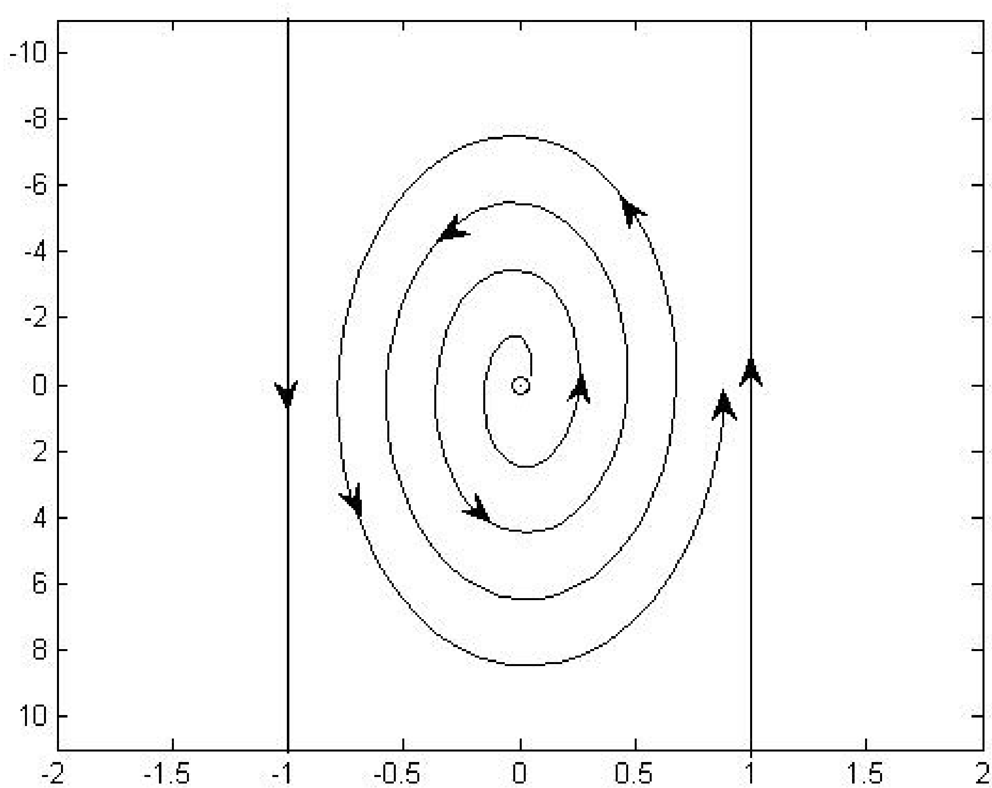

Figura 1.3: Retrato de fase do Exemplo 1.35.

Temos que a origem $O = (0,0)$ é um ponto crítico e as trajetórias $\gamma_1 = \{(1,y);\, y \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma_2 = \{(-1,y);\, y \in \mathbb{R}\}$ possuem conjunto limite positivo e negativo vazios. Para os pontos $P = (x,y)$ com $0 < |x| < 1$, as trajetórias passando por P são espirais e temos que $\Lambda^+(P) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ e $\Lambda^-(P) = \{O\}$.

O próximo teorema nos trás uma condição para verificar quando uma semi trajetória é um conjunto fechado, além de caracterizar duas propriedades dos conjuntos limites.

Teorema 1.36. *Para qualquer $x \in X$ temos:*

1. *$\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ são conjuntos fechados e invariantes.*
2. *$\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$ e $\overline{\gamma^-(x)} = \gamma^-(x) \cup \Lambda^-(x)$.*

Demonstração. Mostraremos, primeiramente, que $\Lambda^-(x)$ é fechado e invariante, a prova de que $\Lambda^+(x)$ possui a mesma propriedade é análoga. Se $y \in \overline{\Lambda^-(x)}$, então existe uma sequência $\{y_n\}$ de pontos de $\Lambda^-(x)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Além disso, como cada $y_n \in \Lambda^-(x)$, existe uma sequência $\{t_n^k\}$ de números reais, de forma que, $t_n^k \rightarrow -\infty$ e $xt_n^k \rightarrow y_k$. Assim, como $xt_n^k \rightarrow y_k$, podemos assumir que $d(xt_n^k, y_k) < \frac{1}{n}$ e $t_n^k \leq -k$ para $n \geq k$, já que $t_n^k \rightarrow -\infty$. Considere a sequência $\{t_n\}$ de números reais dada por $t_n := t_n^n$. Afirmamos que $xt_n \rightarrow y$. De fato, note que

$$d(xt_n, y) \leq d(xt_n, y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + d(y_n, y)$$

e já que $y_n \rightarrow y$, segue que $d(xt_n, y) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Logo $xt_n \rightarrow y$ e, portanto, temos $y \in \Lambda^-(x)$, donde $\Lambda^-(x) = \overline{\Lambda^-(x)}$. Para mostrarmos que $\Lambda^-(x)$ é invariante, seja $y \in \Lambda^-(x)$ e $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Desta forma, existe uma sequência $\{t_n\}$ de números reais que $t_n \rightarrow -\infty$ e $xt_n \rightarrow y$. Mas assim a sequência $a_n := t_n + t$ é tal que $a_n \rightarrow -\infty$ e

$$xa_n = x(t_n + t) = (xt_n)t \rightarrow yt$$

pelo Axioma da Continuidade. Portanto $yt \in \Lambda^-(x)$.

Agora provaremos que $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$, o outro caso é análogo. É claro que $\gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ e, além disso, por definição vemos que $\Lambda^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Logo $\Lambda^+(x) \cup \gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Agora tome $y \in \overline{\gamma^+(x)}$, então existe uma sequência y_n de pontos de $\gamma^+(x)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Mas como para cada n, $y_n \in \gamma^+(x)$, existe $t_n \in \mathbb{R}^+$, de forma que, $y_n = xt_n$. Assim, caso $t_n \rightarrow +\infty$, temos que, $y \in \Lambda^+(x)$. Caso contrário, como $\mathbb{R}^+$ é fechado, existe uma subsequência t_{n_k} tal que $t_{n_k} \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}^+$, e assim $xt_{n_k} \rightarrow xt_0 \in \gamma^+(x)$, e uma vez que $xt_n \rightarrow y$, vem $y = xt_0$. Logo em qualquer caso, temos $\overline{\gamma^+(x)} \subset \Lambda^+(x) \cup \gamma^+(x)$. Portanto $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$. □

Teorema 1.37. *Dado $x \in X$, valem as seguintes igualdades*

$$\Lambda^+(x) = \bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)}$$

e, além disso, $\Lambda^+(x) = \Lambda^+(xt)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O mesmo vale para o conjunto limite negativo, com as devidas adaptações.

Demonstração. Mostremos que $\Lambda^+(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)}$, a prova de que $\Lambda^+(x) = \bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)}$ é análoga. Considere $a \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)}$, então para cada n temos $B(a, \frac{1}{n}) \cap \gamma^+(xn) \neq \emptyset$. Escolhamos para cada n um elemento $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap \gamma^+(xn)$. Temos assim que $x_n = xt_n$

com $t_n \geq n$. Logo quando $n \to +\infty$ temos que $t_n \to +\infty$ e ainda $x_n \to a$ por construção, donde $a \in \Lambda^+(x)$. Agora dado $a \in \Lambda^+(x)$ queremos provar que $a \in \overline{\gamma^+(xt)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, uma vez que $a \in \Lambda^+(x)$, existe uma sequência $\{t_n\}$ de números reais tal que $t_n \to +\infty$ e $xt_n \to a$. Dado $t \in \mathbb{R}^+$ mostraremos que $a \in \overline{\gamma^+(xt)} = \gamma^+(xt) \cup \Lambda^+(xt)$, o caso em que $t \in \mathbb{R}^-$ é análogo. Uma vez que $t \geq 0$ e $t_n \to +\infty$ existe um inteiro n_0 de modo que $t_n > t_0$ para $n > n_0$. E assim temos $xt_n \in \gamma^+(xt)$. Como $xt_n \to a$, segue que $a \in \overline{\gamma^+(xt)}$, de modo análogo mostramos que $a \in \overline{\gamma^-(xt)}$ para todo $t \in \mathbb{R}^-$. Desta forma temos que $a \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)}$, donde segue que $\Lambda^+(x) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)}$. Finalmente, observe que $\Lambda^+(x) = \Lambda^+(xt)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, pois se $y \in \Lambda^+(xt)$, por definição, temos $(xt)t_n \to y$ e $t_n \to +\infty$, isto é, $x(t + t_n) \to y$ e $t_n + t \to +\infty$, ou seja, $y \in \Lambda^+(x)$.

□

Quando $\Lambda^+(x)$ é compacto podemos obter informações tanto de $\overline{\gamma^+(x)}$ quanto do próprio conjunto $\Lambda^+(x)$. Uma delas garante que se o conjunto limite positivo é compacto, então $\Lambda^+(x)$ é conexo quando o espaço de fase X é localmente compacto. Além disso, quando o conjunto $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto vale que $\Lambda^+(x)$ também é. Aliás vale a recíproca dessa afirmação quando o espaço de fase é localmente compacto, como veremos na próxima observação. Mas antes investigaremos a respeito da conexidade de $\Lambda^+(x)$. Para tal, precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 1.38. *Seja X um espaço de Hausdorff, conexo e compacto. Dado um aberto U de X e uma componente conexa C de U, o conjunto $\overline{U} \backslash U$ contém um ponto de acumulação de C.*

Demonstração. Veja [8] página 37. □

Lema 1.39. *Defina $\phi : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ por $\phi(x,t) = (\pi(x,t), t)$, onde $\pi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação de fase. Então ϕ é um homeomorfismo.*

Demonstração. A inversa de ϕ é $\phi^{-1} : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ dada por $\phi^{-1}(x,t) = (\pi(x,-t), t)$. De fato,

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \circ \phi(x,t) &= \phi^{-1}(\pi(x,t),t) = (\pi(\pi(x,t),-t),t) = (x,t), \\ \phi \circ \phi^{-1}(x,t) &= \phi(\pi(x,-t),t) = (\pi(\pi(x,-t),t),t) = (x,t). \end{aligned}$$

Além disso, como as coordenadas de ϕ e ϕ^{-1} são contínuas, vemos que ϕ e ϕ^{-1} são funções contínuas, ou seja, ϕ é um homeomorfismo. □

Com isso provaremos o seguinte teorema.

Teorema 1.40. *Se X é localmente compacto e $\Lambda^+(x)$ é compacto, então $\Lambda^+(x)$ é conexo. Mais ainda, se $\Lambda^+(x)$ não é compacto, então nenhuma de suas componentes conexas é compacta.*

Demonstração. Suponhamos que $\Lambda^+(x)$ seja compacto e que não seja conexo, ou seja, temos $\Lambda^+(x) = P \cup Q$ com P e Q fechados, disjuntos e não-vazios. Como $\Lambda^+(x)$ é compacto, vê-se que P e Q também são, e assim existe $\varepsilon > 0$ tal que as vizinhanças $B(P, \varepsilon)$ e $B(Q, \varepsilon)$ são disjuntas.

Dados $x_1 \in P$ e $x_2 \in Q$, existem sequências t_n e s_n de números reais, tais que $t_n \to +\infty$, $s_n \to +\infty$, $xt_n \to x_1$ e $xs_n \to x_2$, pois $x_1, x_2 \in \Lambda^+(x)$. Como $x_1 \neq x_2$, podemos assumir sem perda de generalidade que $t_n - s_n > 0$, $xt_n \in B(P, \varepsilon)$ e $xs_n \in B(Q, \varepsilon)$, para todo n inteiro. Mas como $x[s_n, t_n]$ é compacto e conexo, para cada n inteiro, existe T_n tal que $s_n < T_n < t_n$ e $xT_n \in S(P, \varepsilon)$, pois $xt_n \in B(P, \varepsilon)$, $xs_n \notin B(P, \varepsilon)$ e $x[s_n, t_n]$ é conexo. Além disso, como $x[t_n, s_n]$ é compacto, vemos que existe uma subsequência $\{T_{n_k}\}$ com a propriedade $xT_{n_k} \to y \in S(P, \varepsilon)$ e $T_{n_k} \to +\infty$ por construção. Assim, por definição, vem que $y \in \Lambda^+(x)$. Entretanto $y \notin P \cup Q$, o que é uma contradição. Portanto devemos ter que $\Lambda^+(x)$ é conexo. Para segunda parte, seja $X^* = X \cup \{\omega\}$ a compactificação de Alexandrov de X, que existe pois X é localmente compacto. Estenda o sistema dinâmico de X para X^* da seguinte forma. Defina a aplicação de fase $\pi^* : X^* \times \mathbb{R} \to X^*$ por

$$\pi^*(x,t) = \begin{cases} \pi(x,t), & \text{se } x \in X \\ \omega & \text{se } x \notin X. \end{cases}$$

Afirmamos que $(X^*, \mathbb{R}, \pi^*)$ é um sistema dinâmico. É claro que o Axioma da Identidade é satisfeito. Agora dado $x \in X^*$, temos dois casos a analisar:

(i) Se $x \in X$. Então temos

$$\pi^*(x, t_1 + t_2) = \pi(x, t_1 + t_2) = \pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(\pi^*(x, t_1), t_2) = \pi^*(\pi^*(x, t_1), t_2).$$

(ii) Se $x = \omega$. Então note que $\pi^*(x, t_1) = \omega$, e também que $\pi^*(\pi^*(x, t_1), t_2) = \pi^*(\omega, t_2) = \omega = \pi^*(\omega, t_1 + t_2) = \pi^*(x, t_1 + t_2)$.

Assim em qualquer caso o Axioma de Grupo é válido. Mostremos agora que π^* é contínua. Para isso dado um ponto $(x, t) \in X^* \times \mathbb{R}$ e uma vizinhança V de x, queremos mostrar que existe uma vizinhança U de (x, t), tal que $\pi^*(U) \subset V$. Temos dois casos a analisar:

(i) Se $x \in X$. Então a vizinhança V dada é uma vizinhança de x em X, assim como π é contínua existe uma vizinhança U de (x, t) em $X \times \mathbb{R}$, tal que, $\pi(U) \subset V$. Mas U é aberto de $X^* \times \mathbb{R}$, pois é aberto de $X \times \mathbb{R}$, e como $U \subset X \times \mathbb{R}$ tem-se que $\pi^*(U) = \pi(U) \subset V$. Logo U é a vizinhança desejada.

(ii) Se $x = \omega$. Então V é uma vizinhança de ω, assim $F = X^* \backslash V$ é compacto em X. Seja $K = \pi^{-1}(F) \cap (X \times [t-1, t+1]) = \phi^{-1}(F \times [t-1, t+1])$, onde ϕ é como definida no Lema 1.38. Como F e $[t-1, t+1]$ são compactos e ϕ^{-1} é um homeomorfismo, vem que K é um compacto de $X \times \mathbb{R}$. Assim $\pi_1(K)$ é compacto em X, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada. Logo $X^* \backslash \pi_1(K)$ é aberto em X^* e $X^* \backslash \pi_1(K)$ é uma vizinhança de ω. Considere $U = (X^* \backslash \pi_1(K)) \times (t-1, t+1)$. É claro que U é uma vizinhança de (ω, t) em $X^* \times \mathbb{R}$ e, além disso, $\pi^*(U) \subset V$, pois se $(y, z) \in U$, então $y \notin \pi_1(K) = \pi_1(\phi^{-1}(F \times [t-1, t+1]))$, assim $(y, z) \notin \phi^{-1}(F \times [t-1, t+1])$. Logo se $y = \omega$ então $\pi^*(y, z) \notin F$, e se $y \in X$ então $\pi(y, z) \notin F$, isto é, $\pi^*(y, z) \notin F$, donde $\pi^*(y, z) \notin F$

em qualquer caso e, portanto, $\pi^*(y,z) \in Y$. Assim π^* é contínua. Agora dado $x \in X^*$, denote $\Lambda^*_+(x)$ o conjunto limite de x em X^*. Então temos, $\Lambda^*_+(x) = \Lambda^+(x) \cup \{\omega\}$ sempre que $x \in X$ e $\Lambda^+(x)$ é não compacto. Com efeito, dado uma vizinhança U de ω, então $U = X \backslash C$, para algum compacto C de X. Assim $U \cap \Lambda^+(x) \neq \emptyset$ pois caso contrário teríamos que $\Lambda^*_+(x) \subset C$ e como C é compacto e $\Lambda^+(x)$ é fechado, vem que $\Lambda^+(x)$ é compacto, o que não pode ocorrer. Logo $\omega \in \overline{\Lambda^+(x)}$. Agora como $\Lambda^*_+(x)$ é fechado, devemos ter que $\omega \in \Lambda^*_+(x)$, desta forma vale a igualdade $\Lambda^*_+(x) = \Lambda^+(x) \cup \{\omega\}$. Além disso, já que X^* é compacto, $\Lambda^*_+(x)$ é fechado e conexo, pelo que foi demonstrado acima, Hausdorff e ainda $\Lambda^*_+(x) = \Lambda^+(x) \cup \{\omega\}$, vem que $\Lambda^+(x)$ é aberto em $\Lambda^*_+(x)$. Pelo Lema 1.38, toda componente conexa de $\Lambda^+(x)$ tem ω como ponto de acumulação e, portanto, toda componente conexa de $\Lambda^+(x)$ não é compacta por não ser fechada. □

O exemplo a seguir ilustra que a hipótese de localmente compacto no teorema anterior é essencial.

Exemplo 1.41. *Considere o Sistema Dinâmico dado no Exemplo 1.34 restrito ao conjunto* $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Para os pontos $P = (r, \theta)$, *com* $0 < r < 1$, *temos que* $\Lambda^+(P) = A \cup B$ *que é claramente compacto, entretanto* $\Lambda^+(P)$ *não é conexo.*

O nosso próximo teorema fornece uma forte relação entre $\Lambda^+(x)$ e $\overline{\gamma^+(x)}$.

Teorema 1.42. *1. Se* $\overline{\gamma^+(x)}$ *é compacto, então* $\Lambda^+(x)$ *é não vazio, compacto e conexo. Além disso, se* X *é localmente compacto e* $\Lambda^+(x)$ *é compacto e não vazio, então* $\overline{\gamma^+(x)}$ *é compacto.*

2. Se $\overline{\gamma^+(x)}$ *é compacto temos que* $d(xt, \Lambda^+(x)) \to 0$, *quando* $t \to +\infty$.

Demonstração. A prova de 2 é análoga à demonstração feita no Teorema 1.37. Mostraremos 1.

Assuma primeiro que $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto e provaremos que $\Lambda^+(x)$ é compacto e não vazio, a conexidade segue do teorema anterior. Seja $t_n \to +\infty$ uma sequência de números reais. Note que $xt_n \in \overline{\gamma^+(x)}$ para cada n inteiro. Como $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto, segue que a sequência $\{xt_n\}$ admite subsequência, digamos $\{xt_{n_k}\}$, convergente a um ponto $y \in \overline{\gamma^+(x)}$. Assim, por definição, temos $y \in \Lambda^+(x)$. Portanto, $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$ e como $\Lambda^+(x)$ é fechado e $\overline{\gamma^+(x)}$ compacto, temos também que $\Lambda^+(x)$ é compacto, já que X é Hausdorff. Agora suponhamos que X é localmente compacto e $\Lambda^+(x)$ compacto e não vazio, mostraremos que $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto. De fato, existe $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto $B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$ é compacto já que X é localmente compacto. Afirmo que existe $T(\varepsilon) > 0$, tal que $(xT(\varepsilon))\mathbb{R}^+ \subset B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$. Note primeiro que $\Lambda^+(x) \subset \overline{(xn)\mathbb{R}^+}$ (veja Teorema 1.37), logo temos $B(\Lambda^+(x), \varepsilon) \cap ((xn)\mathbb{R}^+) \neq \emptyset$. Se não ocorresse que $(xT(\varepsilon))\mathbb{R}^+ \subset B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$, então existiria uma sequência $\{t_n\}$, tal que $t_n \to +\infty$ e $xt_n \in S(\Lambda^+(x), \varepsilon)$, uma vez que $(xt_n)\mathbb{R}^+$ é conexo e ainda $B(\Lambda^+(x), \varepsilon) \cap ((xt_n)\mathbb{R}^+) \neq \emptyset$. Mas assim como $S(\Lambda^+(x), \varepsilon)$ é compacto, temos $xt_{n_k} \to y \in S(\Lambda^+(x), \varepsilon)$. Como por definição, $y \in \Lambda^+(x)$, temos um absurdo! Portanto $(xT(\varepsilon))\mathbb{R}^+ \subset B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$, e como $\gamma^+(x) = x[0,T] \cup (xT)\mathbb{R}^+$, temos que $\overline{\gamma^+(x)} = x[0,T] \cup \overline{(xT)\mathbb{R}^+}$. Assim $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto, pois $x[0,T]$ e $\overline{(xT)\mathbb{R}^+}$ são compactos, sendo este último subconjunto fechado contido em um compacto. □

1.5 Primeiro Prolongamento e Conjunto Limite Prolongacional

O conjunto limite positivo e o conjunto limite negativo exercem um papel importante no estudo do comportamento assintótico de uma dada trajetória do sistema dinâmico. Entretanto aos estudar tais conjuntos, como mostra o Teorema 1.37, estamos analisando apenas o comportamento assintótico da trajetória de um ponto. Iremos agora estudar o primeiro prolongamento e conjunto limite prolongacional que, além de estudar o comportamento da trajetória, também leva em conta vizinhanças suficientemente pequenas do ponto.

Definição 1.43. *Definimos os conjuntos D^+, D^-, J^+ e J^- de X em $\wp(X)$, pondo para cada $x \in X$*

$$\begin{aligned} D^+(x) &= \{y \in X;\ \textit{existem sequências } \{x_n\} \textit{ em } X \textit{ e } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{R}^+, \\ &\qquad \textit{com } x_n \to x \textit{ e } x_n t_n \to y\}, \\ D^-(x) &= \{y \in X;\ \textit{existem sequências } \{x_n\} \textit{ em } X \textit{ e } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{R}^-, \\ &\qquad \textit{com } x_n \to x \textit{ e } x_n t_n \to y\}, \\ J^+(x) &= \{y \in X;\ \textit{existem sequências } \{x_n\} \textit{ em } X \textit{ e } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{R}, \\ &\qquad \textit{com } x_n \to x, t_n \to +\infty \textit{ e } x_n t_n \to y\}, \\ J^-(x) &= \{y \in X;\ \textit{existem sequências } \{x_n\} \textit{ em } X \textit{ e } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{R}, \\ &\qquad \textit{com } x_n \to x, t_n \to -\infty \textit{ e } x_n t_n \to y\}. \end{aligned}$$

Para cada $x \in X$, o conjunto $D^+(x)$ é chamado ***primeiro prolongamento positivo****, $D^-(x)$ é chamado de* ***primeiro prolongamento negativo****. Já os conjuntos $J^+(x)$ e $J^-(x)$ são chamados, respectivamente,* ***conjunto limite prolongacional positivo*** *e* ***conjunto limite prolongacional negativo****.*

A próxima observação nos fornece uma relação entre a definição acima e os conceitos já conhecidos:

Observação 1.44. *Valem as seguintes inclusões $\gamma^+(x) \subset D^+(x)$, $\gamma^-(x) \subset D^-(x)$, $\Lambda^+(x) \subset J^+(x)$ e $\Lambda^-(x) \subset J^-(x)$. Veremos mais adiante que $J^+(x) \subset D^+(x)$ e $J^-(x) \subset D^-(x)$.*

De fato, se $y \in \gamma^+(x)$ então existe $t \in \mathbb{R}^+$, tal que $xt = y$. Basta tomar as sequências constantes $x_n = x$ e $t_n = t$ que teremos $y \in D^+(x)$. As outras inclusões são feitas de maneira análoga.

As inclusões da observação acima podem ser próprias, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.45. *Considere o sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^2$ abaixo*

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1, \ \frac{dx_2}{dt} = x_2.$$

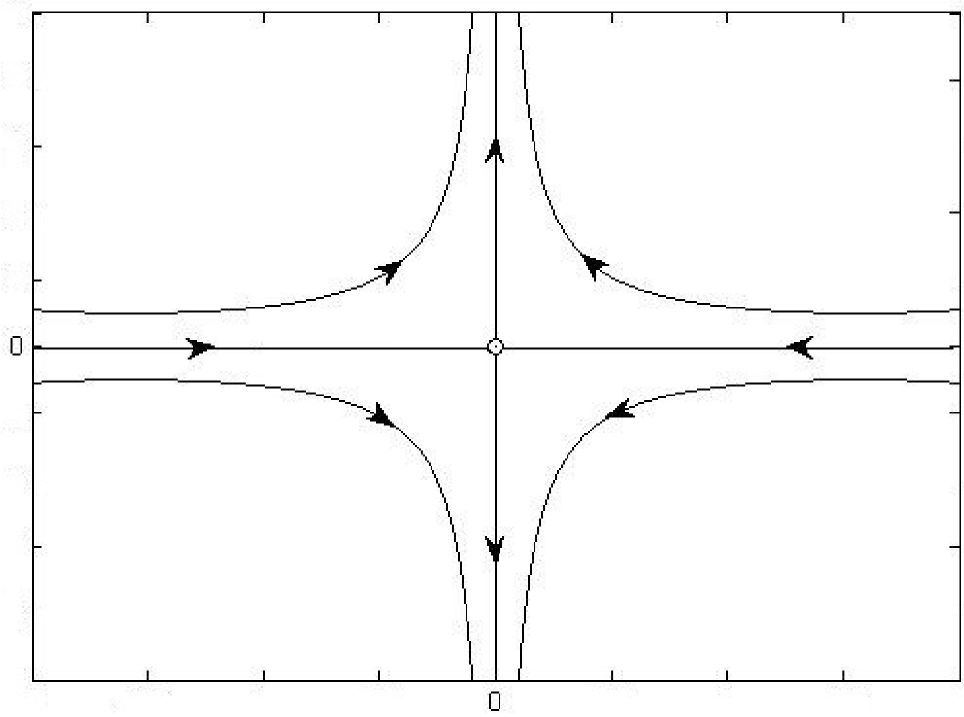

Figura 1.4: Retrato de fase do Exemplo 1.45. Aqui o retrato de fase é um nó.

Para qualquer ponto $P = (x, 0)$, *temos* $D^+(P) = \gamma^+(P) \cup \{(x_1, x_2); x_1 = 0\}$, $D^-(P) = \gamma^-(P)$, $J^+(P) = \{(x_1, x_2); x_1 = 0\}$, $J^-(P) = \emptyset$, *se* $x \neq 0$, *e caso* $x = 0$ *tem-se que* $J^-(P) = \{(0, 0)\}$.

Para os pontos $P = (x, y)$ *com* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$, *temos* $D^+(P) = \gamma^+(x)$, $D^-(P) = \gamma^-(P)$, $J^+(P) = J^-(P) = \emptyset$.

Observe que, para os pontos $P = (x, 0)$, *temos* $\Lambda^+(P) = (0, 0)$ *e* $\Lambda^-(P) = \emptyset$. *Assim* $J^+(P) \supsetneq \Lambda^+(P)$ *e, caso* $x = 0$, *temos* $J^-(P) \supsetneq \Lambda^-(P)$.

O conjunto primeiro prolongamento positivo e o conjunto prolongacional positivo possuem propriedades semelhantes as propriedades da trajetória e do conjunto limite positivo, como veremos nos próximos resultados.

Teorema 1.46. *Para qualquer* $x \in X$, *temos:*

1. $D^+(x)$ *é fechado e positivamente invariante.*

2. $J^+(x)$ *é fechado e invariante.*

3. $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x)$.

Demonstração. Mostraremos primeiramente o item 1. Se $y \in \overline{D^+(x)}$, então existe uma sequência $\{x_n\} \subset D^+(x)$ tal que $x_n \to y$. Ainda, para cada $x_n \in D^+(x)$, existem sequências $\{x_k^n\}$ em X e $\{t_k\}$ em $\mathbb{R}^+$ de forma que $x_k^n \to x$ e $x_k^n t_k \to x_n$. Mas assim,

$$d(x_n^n t_n, y) \leq d(x_n^n t_n, x_n) + d(x_n, y)$$

e quando $n \to +\infty$ vemos que $x_n^n t_n \to y$. Logo como $x_n^n \to x$ segue que $y \in D^+(x)$, donde $D^+(x) = \overline{D^+(x)}$. Agora mostraremos que $D^+(x)$ é positivamente invariante. Para isso se $y \in D^+(x)$ e $t \in \mathbb{R}^+$, então existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$ de X e $\mathbb{R}^+$, respectivamente, de forma que $x_n \to x$ e $x_n t_n \to y$. Pelo Axioma da Continuidade, temos $(x_n t_n)t \to yt$, e assim $yt \in D^+(x)$, já que $(t_n + t) \in \mathbb{R}^+$ para cada n inteiro. Portanto $D^+(x)$ é positivamente invariante.

Mostremos que $J^+(x)$ é fechado e invariante. Para tal, se $y \in \overline{J^+(x)}$, então existe uma sequência $x_n \in J^+(x)$ tal que $x_n \to y$. Além disso, como $x_n \in J^+(x)$, para cada n existem sequências x_k^n e t_k tais que $x_k^n \to x$ e $t_k \to +\infty$ com $x_k^n t_k \to x_n$. Assim para cada inteiro k podemos assumir que $t_k > k$ e $d(x_k^n t_k, x_n) < \frac{1}{k}$. Desta forma, temos que

$$d(x_n^n t_n, y) \leq d(x_n^n t_n, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{n} + d(x_n, y)$$

e quando $n \to +\infty$, vemos que $x_n^n t_n \to y$. Pela escolha de t_n tem-se $t_n \to +\infty$, logo $y \in J^+(x)$ donde segue que $J^+(x)$ é fechado. Resta mostrar que $J^+(x)$ é invariante. Sejam $y \in J^+(x)$ e $t \in \mathbb{R}$. Então existem sequências $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $x_n t_n \to y$. Mas assim, temos $(t_n + t) \to +\infty$ e, pelo Axioma da Continuidade, $x_n(t_n + t) \to yt$ donde $yt \in J^+(x)$, ou seja, $J^+(x)$ é invariante.

Por fim, mostraremos que $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x)$. Por definição, $\gamma^+(x) \cup J^+(x) \subset D^+(x)$, e ainda, dado $y \in D^+(x)$, existem sequências $x_n \to x$ e $x_n t_n \to y$. Assim, caso a sequência t_n admita uma subsequência limitada t_{n_k}, temos então que $t_{n_k} \to t$ e $x_{n_k} t_{n_k} \to xt$, donde $xt = y \in \gamma^+(x)$. Caso contrário, temos $t_n \to +\infty$ e assim $y \in J^+(x)$. Logo, em qualquer caso, $y \in \gamma^+(x) \cup J^+(x)$ donde $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x)$. □

Com respeito a conexidade de $D^+(x)$ e $J^+(x)$, vale um resultado análogo ao Teorema 1.40 para $\Lambda^+(x)$. Primeiro veremos que $D^+(x)$ é conexo, quando é compacto.

Teorema 1.47. *Seja X um espaço localmente compacto. Então para qualquer $x \in X$, $D^+(x)$ é conexo sempre que é compacto. Se $D^+(x)$ não é compacto, então nenhuma de suas componentes conexas é compacta.*

Demonstração. Suponha que $D^+(x)$ é compacto, mas não é conexo. Então existem fechados, disjuntos e não vazios P e Q tais que $D^+(x) = P \cup Q$. Uma vez que X é localmente compacto, existe $\delta > 0$ tal que $B[P, \delta]$ e $B[Q, \delta]$ são vizinhanças compactas e disjuntas de P e Q, respectivamente. Como $x \in D^+(x)$ temos $x \in P$ ou $x \in Q$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \in P$. Dado $y \in Q$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$ tais que $x_n \to x$ e $x_n t_n \to y$. Assim, podemos supor que $x_n t_n \in B(Q, \delta)$ para todo n. Assim, como para cada n o conjunto $x_n[0, t_n]$ é conexo, temos que $x_n[0, t_n]$ intercepta $S(P, \delta)$. Deste modo, para cada n, existe $T_n \in (0, t_n)$, tal que $x_n T_n \in S(P, \delta)$.

Logo, como $S(P,\delta)$ é compacto, a sequência $x_nT_n \to z \in S(P,\delta)$ e assim $z \in D^+(x)$, já que $x_n \to x$. Mas $z \notin P \cup Q$, o que é um absurdo! Portanto devemos ter que $D^+(x)$ é conexo.

Agora suponhamos que $D^+(x)$ não é compacto e considere a compactificação de Alexandrov de X, digamos $X^* = X \cup \{\omega\}$. Seja $D^*_+(x)$ o primeiro prolongamento em X^* para o ponto $x \in X^*$. Como X^* é compacto e $D^*_+(x)$ é fechado, segue que $D^*_+(x)$ é compacto e, pelo que acabamos de provar, conexo. Deste modo, se dado $x \in X$ com $D^+(x)$ não compacto, então $D^*_+(x) = D^+(x) \cup \{\omega\}$, assim como foi feito para $\Lambda^+(x)$ no Teorema 1.40. Logo $D^+(x)$ é aberto em $D^*_+(x)$ e pelo Lema 1.38, segue que toda componente conexa de $D^+(x)$ tem ω como ponto de acumulação, ou seja, toda componente de $D^+(x)$ não é compacta, por não ser fechada. □

Antes de provarmos a mesma propriedade acima para o Conjunto Limite Prolongacional, precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 1.48. *Seja X localmente compacto. Se $J^+(x)$ é não vazio e compacto, então $\Lambda^+(x)$ é não vazio e compacto.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\Lambda^+(x) = \emptyset$ e assuma que $J^+(x)$ é não vazio e compacto. Então $\gamma^+(x)$ é fechado e disjunto de $J^+(x)$. De fato, como $\Lambda^+(x) = \emptyset$ temos $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x) = \gamma^+(x)$ e caso tenhamos $\gamma^+(x) \cap J^+(x) \neq \emptyset$, como $J^+(x)$ é invariante teríamos que $\gamma^+(x) \subset J^+(x)$, pois dado $xt_0 \in \gamma^+(x) \cap J^+(x)$, temos $x(t_0 + t) \in J^+(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, temos $\gamma^+(x) = x[-t_0, -\infty) \subset J^+(x)$. Como $J^+(x)$ é compacto e $\gamma^+(x)$ é fechado, teríamos $\gamma^+(x)$ compacto. Assim dada qualquer sequência $t_n \to +\infty$, teríamos que a sequência $\{x_nt_n\}$ admite subsequência convergente para um ponto $y \in \gamma^+(x)$ e, por definição $y \in \Lambda^+(x)$, o que é um absurdo! Agora como $J^+(x)$ é compacto e disjunto de $\gamma^+(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $B[J^+(x), \delta]$ é compacto e disjunto de $\gamma^+(x)$. Ainda, como $J^+(x) \neq \emptyset$, existe $y \in J^+(x)$ e sequências $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $x_nt_n \to y$. Como $y \in B[J^+(x), \delta]$ podemos assumir, descartando alguns termos se necessário, que $x_nt_n \in B[J^+(x), \delta]$ para todo n. Assim os segmentos $x[0, t_n]$ interceptam $S(J^+(x), \delta)$ para cada n. Logo para cada n, existe $T_n \in [0, t_n]$ tal que $x_nT_n \in S(J^+(x), \delta)$. Como $S(J^+(x), \delta)$ é compacto, a sequência $\{x_nT_n\}$ admite uma subsequência de forma que $x_{n_k}T_{n_k} \to z \in S(J^+(x), \delta)$. Agora se $T_{n_k} \to T \in \mathbb{R}^+$, então $z \in \gamma^+(x)$, pois $x_{n_k}T_{n_k} \to xT$ pelo Axioma da Continuidade. Assim $xT = z$ pela unicidade do limite, o que contradiz o fato de que $\gamma^+(x) \cap B[J^+(x), \delta] = \emptyset$. Entretanto, se $T_{n_k} \to +\infty$ teríamos que $z \in \Lambda^+(x)$, o que contradiz $\Lambda^+(x) = \emptyset$. Em qualquer caso, obtemos uma contradição e assim $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$. Por fim, como $\Lambda^+(x) \subset J^+(x)$ e $\Lambda^+(x)$ é fechado, segue que $\Lambda^+(x)$ é compacto, como desejado. □

Lema 1.49. *Seja X localmente compacto. Então $J^+(x)$ é não vazio e compacto se, e somente se, $D^+(x)$ é compacto.*

Demonstração. Se $J^+(x)$ é não vazio e compacto, então $\Lambda^+(x)$ é não vazio e compacto. Mas assim, provaremos que $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto. Com efeito, afirmamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $T(\varepsilon) > 0$ tal que $\gamma^+(xT) \subset B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$. Caso contrário existe $\{s_n\} \subset$

$\mathbb{R}^+$ com $s_n \to +\infty$, tal que $xs_n \notin B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$ para todo n. Como $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$, existe $y \in \Lambda^+(x)$. Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \to +\infty$ e $xt_n \to y$. Escolha n_0 inteiro tal que $xt_n \in B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$ para todo $n \geq n_0$. Nos restringindo a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $s_n < t_n$ para todo n. Como $xs_n \notin B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$ e $xt_n \in B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$, existe T_n de forma que $s_n < T_n < t_n$ tal que $xT_n \in S(\Lambda^+(x), \varepsilon)$. Sendo $S(\Lambda^+(x), \varepsilon)$ compacto, pois $\Lambda^+(x)$ é compacto e X localmente compacto, podemos extrair uma subsequência $\{T_{n_k}\}$ tal que $xT_{n_k} \to z \in S(\Lambda^+(x), \varepsilon)$, mas como $T_{n_k} \to +\infty$ teremos que $z \in \Lambda^+(x)$, o que é um absurdo! Portanto $\overline{\gamma^+(xT)} \subset \overline{B[\Lambda^+(x), \varepsilon]}$, e como podemos escolher $B[\Lambda^+(x), \varepsilon]$ compacto, segue que $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto. Assim $\overline{\gamma^+(x)} = x[0, T] \cup \overline{\gamma^+(xT)}$ é compacto como união finita de conjuntos compactos. Desta forma, $D^+(x) = \overline{D^+(x)} = \overline{\gamma^+(x) \cup J^+(x)} = \overline{\gamma^+(x)} \cup J^+(x)$ é compacto. Reciprocamente, se $D^+(x)$ é compacto temos $J^+(x)$ compacto, por ser fechado. Para mostrar que $J^+(x)$ é não vazio, seja $t_n \to +\infty$. Temos $xt_n \in D^+(x)$ para todo n, mas, por hipótese, $\{xt_n\}$ admite subsequência convergente para um ponto $y \in D^+(x)$. Só que por definição temos $y \in J^+(x)$, o que prova que $J^+(x) \neq \emptyset$, como desejado. □

Finalmente podemos provar que o conjunto limite prolongacional positivo é conexo, sempre que é compacto.

Teorema 1.50. *Se X é localmente compacto, então para qualquer $x \in X$, $J^+(x)$ é conexo sempre que é compacto. Se $J^+(x)$ não é compacto, então nenhuma de suas componentes conexas é compacta.*

Demonstração. O caso em que $J^+(x) = \emptyset$ é imediato. Suponha que $J^+(x)$ é compacto, não conexo e não vazio. Assim existem conjuntos disjuntos, fechados, e portanto compactos, P e Q tais que $J^+(x) = P \cup Q$. Como $\Lambda^+(x)$ é compacto, e portanto conexo, devemos ter que $\Lambda^+(x) \subset P$ ou $\Lambda^+(x) \subset Q$, pois $\Lambda^+(x) \subset J^+(x)$. Admita, sem perda de generalidade, que $\Lambda^+(x) \subset P$. Pelo que foi mostrado no lema anterior, temos que $\gamma^+(x) \cup P$ é compacto, pois $J^+(x)$ é compacto e não vazio. Além disso, $Q \cap (\gamma^+(x) \cup P) = \emptyset$, caso contrário, já que P e Q são disjuntos, temos $Q \cap \gamma^+(x) \neq \emptyset$. Mas como Q é compacto e conexo, temos Q invariante, e como é fechado, teríamos $\Lambda^+(x) \subset Q$, o que não pode ocorrer. Desta forma, $D^+(x) = P \cup \gamma^+(x) \cup Q$, mas como $J^+(x)$ é compacto, segue que $D^+(x)$ é compacto, pelo Lema 1.49, e portanto conexo, contradizendo o fato de que $D^+(x) = P \cup \gamma^+(x) \cup Q$. Portanto devemos ter que $J^+(x)$ é conexo. Agora seja $X^* = X \cup \{\omega\}$ a compactificação de Alexandrov de X. Denote $J^*_+(x)$ o conjunto limite prolongacional positivo de X^*. Se $x \in X$ é tal que $J^+(x)$ não é compacto, então $J^*_+(x) = J^+(x) \cup \{\omega\}$, e pelo Lema 1.38, toda componente conexa de $J^+(x)$ tem ω como ponto de acumulação, ou seja, nenhuma componente conexa de $J^+(x)$ é compacta. □

O próxima teorema nos dá uma forma de determinar o prolongamento positivo e o conjunto limite prolongacional positivo em termos das vizinhanças do ponto x.

Teorema 1.51. *Para qualquer $x \in X$ valem as seguintes igualdades:*

$$D^+(x) = \bigcap_{\alpha > 0} \overline{B(x, \alpha)\mathbb{R}^+}\, , D^-(x) = \bigcap_{\alpha > 0} \overline{B(x, \alpha)\mathbb{R}^-}\, , J^+(x) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} D^+(x\alpha)$$

e $J^-(x) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} D^-(x\alpha)$.

Demonstração. Provaremos que $D^+(x) = \bigcap_{\alpha>0} \overline{B(x,\alpha)\mathbb{R}^+}$, as outras igualdades são similares. Seja $y \in \bigcap_{\alpha>0} \overline{B(x,\alpha)\mathbb{R}^+}$. Então, em particular, para cada n, temos $B(y,\frac{1}{n}) \cap B(x,\frac{1}{n})\mathbb{R}^+ \neq \emptyset$. Se escolhemos $x_n \in B(y,\frac{1}{n}) \cap B(x,\frac{1}{n})\mathbb{R}^+$, então para cada n temos $x_n = x'_n t'_n$, $x_n \to y$, $x'_n \to x$ e $\{t'_n\} \subset \mathbb{R}^+$, logo $y \in D^+(x)$. Agora escolha $y \in D^+(x)$ e $\alpha > 0$ quaisquer. Mostraremos que $y \in \overline{B(x,\alpha)\mathbb{R}^+}$. De fato, como $y \in D^+(x)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$ com $x_n \to x$ e $x_n t_n \to y$. Já que $x_n \to x$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_n \in B(x,\alpha)$ para todo n. Além disso, já que $t_n \in \mathbb{R}^+$, por definição, segue que $y \in \overline{B(x,\alpha)\mathbb{R}^+}$, como desejado. □

O teorema acima é de importância prática, pois para determinarmos o conjunto limite prolongacional de um certo ponto, olhamos o comportamento assintótico de vizinhanças suficientemente pequenas deste ponto.

Exemplo 1.52. *Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$ gerado pelo sistema de equações diferenciais,*

$$\frac{dx}{dt} = sen(y), \quad \frac{dy}{dt} = cos^2(y).$$

O retrato de fase do sistema dinâmico está representado na Figura 1.5.

As trajetórias que consistem de $\gamma_k = \{(x,y);\ y = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$, para $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, são trajetórias paralelas ao eixo x; entre dois γ_k, as trajetórias são dadas pelo conjunto $\{(x,y);\ x + c = sec(y)\}$ onde a constante c depende da trajetória. Para $P \in \gamma_{-1}$, note que os conjuntos $J^+(P) = \gamma_0 \cup \gamma_{-2}$ e $\Lambda^+(P) = \emptyset$, assim a recíproca do Lema 1.48 não é válida.

Exemplo 1.53. *No Exemplo 1.35. Considere o sistema dinâmico restrito a faixa $F = \{(x,y);\ -1 < y \geq 1,\ x \in \mathbb{R}\}$. Para cada ponto $(x,y) \in F$ com x e y não nulos, temos $J^+((x,y)) = \{(1,y);\ y \in \mathbb{R}\}$. Assim $J^+((x,y))$ é conexo mas não é compacto, provando que a recíproca do Teorema 1.50 não é válida.*

O próximo teorema fornece uma importante relação entre o conjunto limite prolongacional positivo e negativo. Tal propriedade nem sempre ocorre entre o conjunto limite positivo e negativo, vide Exemplo 1.45.

Teorema 1.54. *Sejam $x, y \in X$. Então $y \in J^+(x)$ se, e somente se, $x \in J^-(y)$.*

Demonstração. Note que $y \in J^+(x)$ se, e somente se, existem sequências $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $x_n t_n \to y$. Defina $\tau_n := -t_n$ e $y_n := x_n t_n$. Temos assim que $y_n \to y$, $\tau_n \to -\infty$ e $y_n \tau_n \to x$, isto é, $x \in J^-(y)$. A recíproca é análoga. □

Com o teorema acima podemos estudar somente o comportamento do conjunto limite prolongacional positivo, pois assim obtemos também o comportamento do conjunto limite prolongacional negativo.

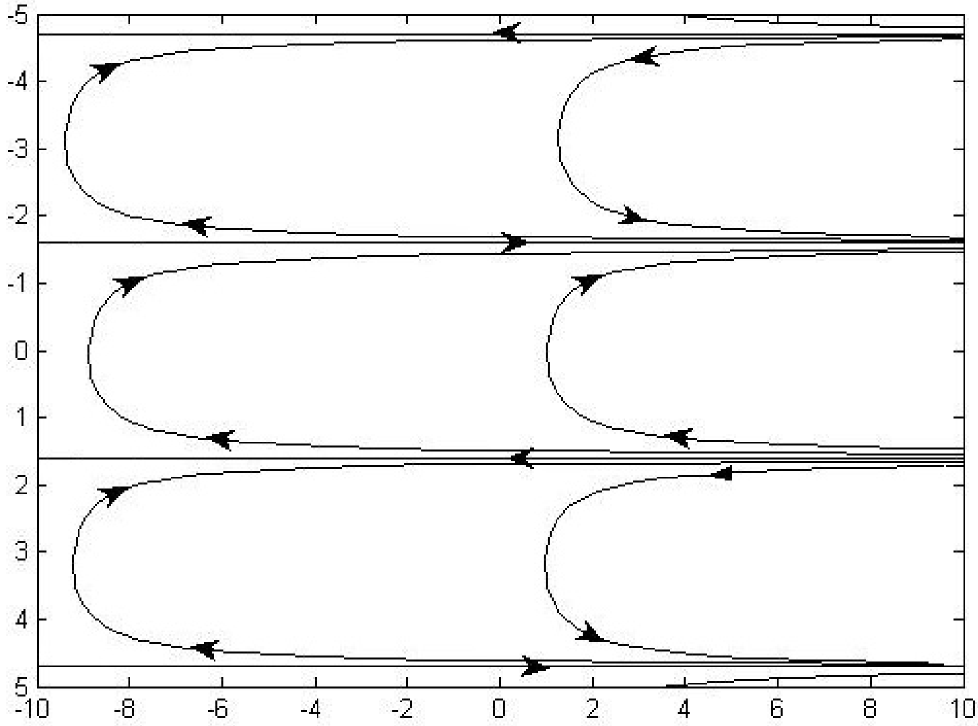

Figura 1.5: Retrato de fase do sistema $\frac{dx}{dt} = sen(y)$, $\frac{dy}{dt} = cos^2(y)$.

Capítulo 2

Conceitos Recursivos

Neste capítulo estudaremos os conceitos recursivos, que dizem respeito aos pontos que pertencem a seu conjunto limite ou ao seu conjunto limite prolongacional. Os resultados obtidos aqui serão importantes no desenvolvimento do próximo capítulo. Na Secção 2.1 veremos a estabilidade de Poisson e os pontos não errantes, que são pontos cujo comportamento assintótico tendem ao próprio ponto ou a vizinhança do mesmo. Na Secção 2.2 estudaremos pontos recorrentes e conjuntos minimais que serão importantes para determinar os conjuntos Lagrange estáveis, os quais serão estudados na Secção 2.3. Em todo capítulo, consideramos fixado um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ sobre um espaço métrico (X, d).

2.1 Estabilidade de Poisson e pontos não-errantes

Nesta secção, começamos estudando a estabilidade de Poisson, conceito que corresponde aos pontos que pertencem ao seu conjunto limite. Depois estenderemos essa noção definindo os pontos errantes. Começamos definindo recursividade.

Definição 2.1. *Um conjunto não vazio $A \subset X$ é dito* ***positivamente recursivo*** *com respeito ao conjunto não vazio $B \subset X$, se para cada $T \in \mathbb{R}$ existe um $t > T$ e um $x \in B$ tais que $xt \in A$. O conjunto A é* ***negativamente recursivo*** *com respeito ao conjunto B se as condições acima são satisfeitas substituindo-se $t > T$ por $t < T$. Dizemos que A é* ***positivamente auto recursivo*** *se é positivamente recursivo com respeito a si mesmo. E analogamente definimos* ***negativamente auto recursivo****. Por fim diremos que A é* ***auto recursivo*** *se é positivamente e negativamente auto recursivo.*

Exemplo 2.2. *Quando $x \in X$ é um ponto periódico, então o conjunto $A = \{x\}$ é auto recursivo.*

Definiremos agora a noção de ponto Poisson estável.

Definição 2.3. *Um ponto $x \in X$ é dito* ***positivamente Poisson estável****, se toda vizinhança de x é positivamente recursiva com respeito a $\{x\}$.*

O próximo resultado nos fornece uma maneira de determinar quando um ponto é Poisson estável.

Teorema 2.4. *A respeito de um ponto $x \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *x é positivamente Poisson estável.*
2. *Dada uma vizinhança U de x e $T > 0$, $xt \in U$ para algum $t > T$.*
3. *$x \in \Lambda^+(x)$.*
4. *$\overline{\gamma^+(x)} = \Lambda^+(x)$.*
5. *$\gamma^+(x) \subset \Lambda^+(x)$.*
6. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $t \geq 1$ tal que $xt \in B(x, \varepsilon)$.*

Demonstração. Pelo fato de $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$ e $\Lambda^+(x)$ ser invariante, vemos que 3, 4 e 5 são equivalentes entre si. Além disso, segue da definição que 1 equivale a 2. Mostraremos que 2 equivale a 3 e 6 equivale a 3.

(3)⇒(2)

Assuma que $x \in \Lambda^+(x)$. Mostraremos que dada uma vizinhança U de x e $T > 0$, $xt \in U$ para algum $t > T$. Com efeito, dados U vizinhança de x e $T > 0$, como $x \in \Lambda^+(x)$, existe $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $xt_n \rightarrow x$. Já que U é vizinhança de x, existe n_0 inteiro tal que $xt_n \in U$ para $n > n_0$. Além disso, como $t_n \rightarrow +\infty$ existe n_1 inteiro tal que $t_n > T$ sempre que $n > n_1$. Assim escolhendo $N = max\{n_0, n_1\}$, vemos que $xt_n \in U$ e $t_n > T$ para todo $n > N$.

(2)⇒(3)

Agora suponha que, para qualquer vizinhança U de x e $T > 0$, exista $t > T$ tal que $xt \in U$. Mostraremos que $x \in \Lambda^+(x)$. De fato, por hipótese, temos $x \in \overline{\gamma^+(xT)}$ para todo $T > 0$, deste modo segue que $x \in \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(xt)} = \Lambda^+(x)$, como desejado.

(3)⇒(6)

Esta implicação é imediata da definição de $\Lambda^+(x)$.

(6)⇒(3)

Suponha que, para todo $\varepsilon > 0$ exista $t \geq 1$ de modo que $xt \in B(x, \varepsilon)$. Mostraremos que $x \in \Lambda^+(x)$. Com efeito, dada uma sequência $\{\varepsilon_n\}$ de números reais tais que $\varepsilon_n \rightarrow 0$, por hipótese, para cada n é possível escolher $t_n \geq 1$, de modo que $xt_n \in B(x, \varepsilon_n)$. Desta forma, $xt_n \rightarrow x$, por construção. Se a sequência $\{t_n\}$ admite subsequência ilimitada, digamos $t_{n_k} \rightarrow +\infty$, então por definição, tem-se que $x \in \Lambda^+(x)$. Caso a sequência não admita subsequência ilimitada, então $\{t_n\}$ é limitada e, assim, existe uma subsequência $\{t_{n_j}\}$ de modo que $t_{n_j} \rightarrow t \geq 1$. Assim, pelo axioma da continuidade, temos que $xt_{n_j} \rightarrow xt$, donde segue que $x = xt$ pela unicidade do limite. Logo x é um ponto periódico, e assim $x \in \Lambda^+(x)$. Em qualquer caso temos o desejado, o que termina a prova do teorema. □

Pelo teorema acima e o fato de que $\Lambda^+(x)$ é invariante, vemos que se x é positivamente Poisson estável, então xt também é, para todo $t \in \mathbb{R}$. O teorema acima nos motiva a seguinte definição.

Definição 2.5. *Um ponto $x \in X$ é* ***positivamente Poisson estável*** *ou* ***negativamente Poisson estável****, respectivamente, se $x \in \Lambda^+(x)$ ou $x \in \Lambda^-(x)$. Um ponto $x \in X$ é dito* ***Poisson estável*** *se é negativamente e positivamente Poisson estável. Quando um ponto x é Poisson estável, tanto o movimento π_x quanto a trajetória $\gamma(x)$ serão chamados de Poisson estável.*

Vimos na Observação 1.30 que se x é periódico então $\gamma^+(x)$ é compacto. Desta forma, uma vez que $\Lambda^+(x) \subset \gamma^+(x)$ e $\Lambda^+(x)$ é fechado, temos que $\Lambda^+(x)$ é compacto. Além disso, já que $\Lambda^+(x)$ é invariante, temos $\Lambda^+(x) = \gamma^+(x)$. Acabamos de demonstrar a recíproca do próximo teorema.

Teorema 2.6. *Seja $x \in X$. Então $\gamma^+(x) = \Lambda^+(x)$ se, e somente se, x é um ponto periódico.*

Demonstração. A recíproca foi provada acima. Agora se $\Lambda^+(x) = \gamma^+(x)$, como $\Lambda^+(x)$ é invariante, temos $\Lambda^+(x) = \gamma(x)$. Desta forma, $\gamma^+(x) = \gamma(x)$, ou seja, dado $xt \in \gamma(x)$ para cada $t < 0$ temos $xt = xt_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}^+$, donde $x = x(t_0 - t)$. Portanto x é periódico com período $t_0 - t$. □

Pelo Teorema 2.4 e o Exemplo 2.2 temos que os pontos periódicos são Poisson Estáveis. Entretanto é natural indagar se existem pontos Poisson Estáveis que não são periódicos. O próximo exemplo nos mostra a resposta desta indagação.

Exemplo 2.7. *Considere o sistema dinâmico definido no toro T pelo sistema planar de equações diferenciais*

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, \theta) \quad e \quad \frac{d\theta}{dt} = \alpha f(\varphi, \theta),$$

onde $f(\varphi, \theta) = f(\varphi + 1, \theta) = f(\varphi, \theta + 1) = f(\varphi + 1, \theta + 1)$, $f(\varphi, \theta) > 0$ se φ e θ são ambos não nulos e $f(0, 0) = 0$. Considere $\alpha > 0$ irracional.

É claro que o ponto $P = (0, 0)$ é um ponto fixo e além disso, é o único ponto fixo. Existe exatamente uma trajetória γ_1 tal que $\Lambda^+(x) = \{P\}$, para todo $x \in \gamma_1$, e exatamente uma trajetória γ_2, de forma que $\Lambda^-(x) = \{P\}$ para todo $x \in \gamma_2$. Para qualquer outra trajetória γ em T, tem-se que $\Lambda^+(x) = \Lambda^-(x) = T$ para todo $x \in \gamma$. Além disso, se $x \in \gamma_1$ temos $\Lambda^-(x) = T$ e se $x \in \gamma_2$ então $\Lambda^+(x) = T$.

Neste exemplo os pontos da trajetória γ_1 são pontos negativamente Poisson estáveis mas não são positivamente Poisson estáveis; os pontos da trajetória γ_2 são positivamente Poisson estáveis mas não são negativamente Poisson estáveis. E ainda, todos os pontos em $T \backslash (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup P)$ são Poisson estáveis, mas não são pontos periódicos. O retrato de fase é mostrado na Figura 2.1.

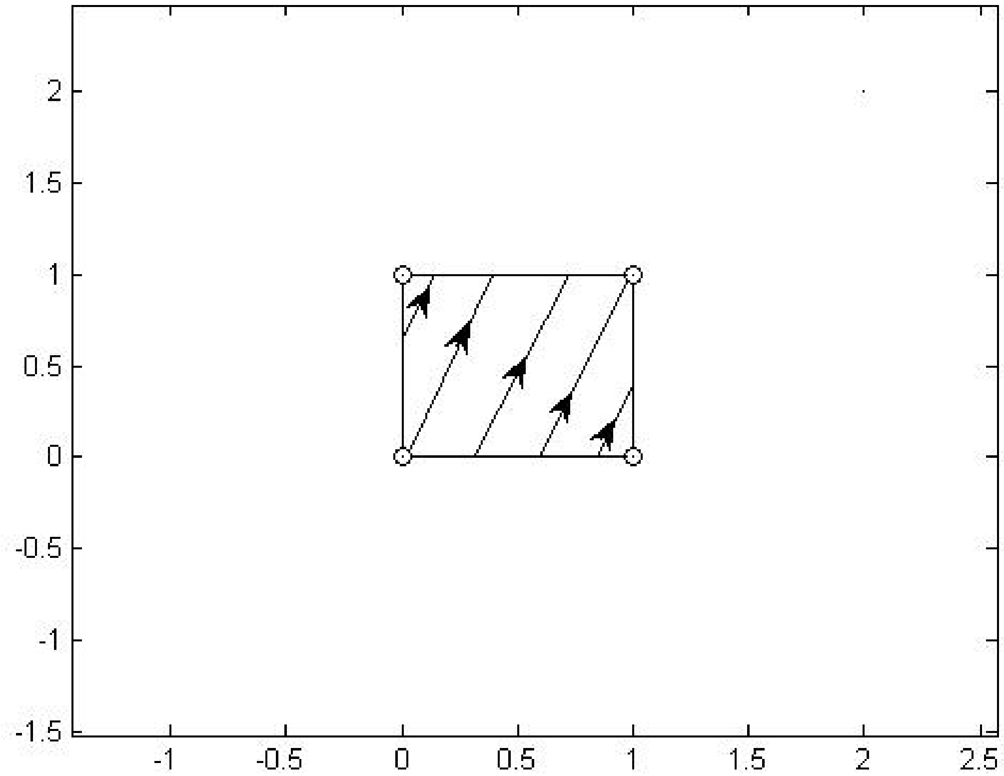

Figura 2.1: Sistema dinâmico no Toro

O próximo teorema nos fornece informações a respeito de pontos Poisson estáveis tais que $\gamma^+(x) \neq \Lambda^+(x)$.

Teorema 2.8. *Seja X um espaço métrico completo. Se $x \in X$ é um ponto positivamente Poisson estável mas não periódico, então o conjunto $\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)$ é denso em $\Lambda^+(x)$, ou seja, $\overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)} = \Lambda^+(x)$.*

Demonstração. Segue do fato de x ser positivamente Poisson estável que $\Lambda^+(x) = \overline{\gamma(x)}$, pois se $x \in \Lambda^+(x)$ então $\gamma(x) \subset \Lambda^+(x)$, e assim $\overline{\gamma(x)} \subset \overline{\Lambda^+(x)} = \Lambda^+(x)$. Agora para mostrarmos que vale a igualdade $\overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)} = \Lambda^+(x)$, mostraremos que $\gamma(x) \subset \overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)}$, pois assim $\overline{\gamma(x)} = \Lambda^+(x) \subset \overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)}$ e também $\overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)} \subset \Lambda^+(x)$. O fato de que $\overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)} \subset \Lambda^+(x)$ segue do fato de que $\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x) \subset \Lambda^+(x)$, e como $\Lambda^+(x)$ é fechado, temos $\overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)} \subset \Lambda^+(x)$. Agora para mostrarmos que $\gamma(x) \subset \overline{\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)}$, mostraremos que para cada ponto $y \in \gamma(x)$, toda vizinhança de y intercepta $\Lambda^+(x)\backslash\gamma(x)$, ou seja, dado $y \in \gamma(x)$ e $\varepsilon^*>0$, temos que $B(y,\varepsilon^*) \cap \Lambda^+(x)\backslash\gamma(x) \neq \emptyset$. Para isso, note primeiro que $y \in \Lambda^+(x) = \Lambda^+(y)$, ou seja, existe uma sequência $\{t_n\}$, podemos supor ainda que $\{t_n\}$ é monótona e crescente, tal que $t_n \to +\infty$ e $yt_n \to y$ e seja $\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{2}$. Escolha assim $\tau_1 > t_1$, tal que, $y\tau_1 \in B(y,\varepsilon)$. Além disso, como x não é periódico temos $y\tau_1 \notin y[-t_1,t_1]$. Seja $\delta_1 = d(y\tau_1, y[-t_1,t_1]) > 0$ e $\varepsilon_1 = min\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon - d(y,y\tau_1), \frac{\delta_1}{2}\}$.

Então $B(x\tau_1, \varepsilon_1) \subset B(y, \varepsilon)$ e $B(y\tau_1, \varepsilon_1) \cap y[-t_1, t_1] = \emptyset$. Definidos τ_{n-1} e ε_{n-1}, escolha $\tau_n > t_n$ tal que $y\tau_n \in B(y\tau_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$, o qual é possível já que x é positivamente Poisson estável. Desta forma, defina indutivamente $\varepsilon_n = min\{\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}, \varepsilon_{n-1} - d(y\tau_{n-1}, \tau_n), \frac{\delta_{n-1}}{2}\}$, onde $\tau_n = d(y\tau_n, y[-t_n, t_n]) > 0$ uma vez que x é não periódico. Logo, temos $B(y\tau_n, \varepsilon_n) \subset B(y\tau_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$ e $B(y\tau_n, \varepsilon_n) \cap y[-t_n, t_n] = \emptyset$. A sequência $\{y\tau_n\}$ é uma sequência de Cauchy, uma vez que

$$d(y\tau_n, y\tau_{n-1}) < \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, e como X é um espaço métrico completo, temos $y\tau_n \to z \in X$. Como $\tau_n \to +\infty$ e $y\tau_n \in \gamma(x)$, por construção, vemos que $z \in \Lambda^+(x)$. Afirmamos agora que $z \notin \gamma(x)$. De fato, se $z \in \gamma(x) = \gamma(y)$, então $z = y\tau$ para algum τ, mas assim existe n, tal que, $t_n > |\tau|$, donde $z \in y[-t_n, t_n]$. Entretanto $z \in B(y\tau_n, \varepsilon_n)$ e, por construção, $B(y\tau_n, \varepsilon_n) \cap y[-t_n, t_n] = \emptyset$, ou seja, $z \notin y[-t_n, t_n]$, um absurdo! Assim $z \notin \gamma(x)$. Por fim, como $d(y, y\tau_n) < \varepsilon$, vemos que $d(y, z) \leq \varepsilon < \varepsilon^*$, e assim $z \in B(y, \varepsilon^*)$ o que conclui a prova do teorema. □

Uma consequência do teorema acima e do Teorema 1.36 é a seguinte:

Corolário 2.9. *Assuma que X é completo. Então x é periódico se, e só se, $\gamma(x) = \Lambda^+(x)$.*

Demonstração. Se x é periódico então é claro que $\gamma(x) = \Lambda^+(x)$. Agora se $\gamma(x) = \Lambda^+(x)$, então x é positivamente Poisson estável, pois $\gamma(x) \subset \Lambda^+(x)$. Assim, se supormos que x não é periódico vem, do teorema anterior, que $\overline{\Lambda^+(x) \backslash \gamma(x)} = \Lambda^+(x)$, mas isso é um absurdo já que $\Lambda^+(x) \backslash \gamma(x) = \emptyset$. Portanto devemos ter que x é periódico. □

O corolário acima não é verdadeiro se retirarmos a hipótese de que X é completo. No Exemplo 2.7, restringindo o sistema dinâmico à trajetória γ_1, temos $\gamma_1 = \Lambda^+(x)$ para todo $x \in \gamma_1$. Mas nenhum ponto $x \in \gamma_1$ é periódico.

Vimos que x é positivamente Poisson estável se, e só se, $x \in \Lambda^+(x)$. Agora para generalizarmos essa noção ao conjunto limite prolongacional, temos a seguinte definição.

Definição 2.10. *Um ponto $x \in X$ é dito **ponto não-errante** se toda vizinhança U de x é positivamente auto recursiva.*

O próximo teorema estabelece uma relação entre os pontos não-errantes e os conjuntos limite prolongacionais.

Teorema 2.11. *Para um ponto $x \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *x é não-errante.*
2. *$x \in J^+(x)$.*
3. *Toda vizinhança de x é negativamente auto recursiva.*
4. *$x \in J^-(x)$.*

Demonstração. Mostremos primeiro que 1 equivale a 2. De fato, assuma que x é um ponto não-errante. Considere uma sequência $\{\varepsilon_n\}$ de números reais tais que $\varepsilon_n > 0$ e $\varepsilon_n \to 0$, e uma outra sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to +\infty$. Como x é não-errante, para cada t_n e $x_n \in B(x, \varepsilon_n)$, existe $\tau_n > t_n$ tal que $x_n \tau_n \in B(x, \varepsilon_n)$. Já que $\varepsilon_n \to 0$, vemos que $x_n \to x$ e, além disso $x_n \tau_n \to x$, e ainda por construção $\tau_n \to +\infty$, donde $x \in J^+(x)$. Agora assuma 2, então existem sequências $\{x_n\}$ em X e $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}^+$, tais que, $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $x_n t_n \to x$. Assim, dada uma vizinhança U de x e $T > 0$, existe um N inteiro tal que $t_n > T$, $x_n \in U$ e $x_n t_n \in U$ para todo $n \geq N$. Desta forma, U é positivamente auto recursivo e assim x é não-errante. Com as devidas adaptações, mostramos também que 3 equivale a 4. Por fim, pelo Teorema 1.54, segue que 2 equivale a 4, o que conclui a demonstração do teorema. □

No geral, ainda não temos muitas maneiras de encontrar os pontos não-errantes, com exceção do Teorema 1.51. Os próximos teoremas nos fornecem outras maneiras de encontrar os pontos não-errantes.

Teorema 2.12. *Dado $x \in X$, todo ponto $y \in \Lambda^+(x)$ é não-errante.*

Demonstração. É suficiente provar que $y \in J^+(y)$, se $y \in \Lambda^+(x)$. Com efeito, caso $y \in \Lambda^+(x)$ existe uma sequência $\{t_n\}$ de números reais tais que $t_n \to +\infty$ e $x t_n \to y$. Podemos assumir, nos restringindo a uma subsequência caso necessário, que $t_{n+1} - t_n \geq n$. Considere $\tau_n := t_{n+1} - t_n$ e $x_n := x t_n$. Logo, temos que $x_n \to y$ e $x_n \tau_n = x t_{n+1} \to y$ e além disso por construção, $\tau_n \to +\infty$, donde $y \in J^+(y)$, como desejado. □

Teorema 2.13. *Seja $P \subset X$ tal que para todo $x \in P$, x é positivamente ou negativamente Poisson estável. Então todo ponto $y \in \overline{P}$ é não-errante.*

Demonstração. Se $y \in \overline{P}$, então existe uma sequência $\{y_n\} \subset P$ tal que $y_n \to y$. Uma vez que $y_n \in P$ para cada n, temos que y_n é positivamente ou negativamente Poisson estável. Assuma, sem perda de generalidade, que y_n é positivamente Poisson estável para cada n, o outro caso é análogo. Como $\{y_k\} \subset \Lambda^+(y_k)$, pois para cada k tem-se que y_k é positivamente Poisson estável, existe sequências $\{t_n^k\}$ tal que $t_n^k \to +\infty$ e $y_k t_n^k \to y_k$. Ainda temos

$$d(y_n t_n^n, y) \leq d(y_n t_n^n, y_n) + d(y_n, y).$$

Assim, $y_n t_n^n \to y$ quando $n \to +\infty$ e, além disso, $t_n^n \to +\infty$ e $y_n \to y$, donde $y \in J^+(y)$. O caso em que $\{y_n\}$ é negativamente Poisson estável, mostramos que $y \in J^-(y)$. Portanto em qualquer caso temos que y é não-errante, e pela arbitrariedade de y segue o desejado. □

O próximo teorema estabelece quase uma recíproca ao teorema anterior, mais especificamente, se todo ponto de um espaço métrico completo é não-errante, então os pontos Poisson estáveis são densos no espaço.

Teorema 2.14. *Seja X um espaço métrico completo. Suponha que todo ponto de X é não-errante. Então o conjunto de pontos Poisson estáveis P é denso em X.*

Demonstração. Dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, mostraremos que existe um ponto Poisson estável em $B(x, \varepsilon)$, ou seja, sendo P o conjunto de pontos Poisson estáveis de X, então $\overline{P} = X$. Seja $U = B(x, \varepsilon)$. Como U é positivamente auto recursivo, existe $t_1 > 1$ tal que $U \cap Ut_1 \neq \emptyset$. Ainda, como U é aberto, temos Ut_1 aberto, donde $U \cap Ut_1$ aberto. Assim, sejam $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ e $x_1 \in U \cap Ut_1$ tais que $B(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap Ut_1$. Considere $U_1 = B(x_1, \varepsilon_1)$. Já que x_1 é não-errante, existe $t_2 < -2$ tal que $U_1 \cap U_1 t_2 \neq \emptyset$. Escolha $x_2 \in U_1 \cap U_1 t_2$ e $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2^2}$, tal que, $B(x_2, \varepsilon_2) \subset U_1 \cap U_1 t_2$. Note que ε_2 existe, pois $U_1 \cap U_1 t_2$ é aberto. Seja $U_2 = B(x_2, \varepsilon_2)$. Como x_2 é não-errante, existe $t_3 > 3$ tal que $U_2 \cap U_2 t_3 \neq \emptyset$. Escolha $x_3 \in U_2 \cap U_2 t_3$ e $0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2^3}$ tais que $B(x_3, \varepsilon_3) \subset U_2 \cap U_2 t_3$. Note que ε_2 existe, pois $U_1 \cap Ut_2$ é aberto. Procedendo desta forma obtemos uma sequência $\{x_n\}$, tal que, $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$, e além disso $U_n \supset U_{n+1}$, por construção. Como $U_n \neq \emptyset$, pois $x_n \in U_n$, segue do fato de que X é completo que existe y com $x_n \to y$. Afirmamos que y é Poisson estável. De fato, para cada $n \geq 2$ existe $\{t_n\}$ tal que $U_n(-t_n) \subset U_{n-1}$, pois $U_n \subset U_{n-1} t_n$. Em particular, como $y \in U_n$, para todo n, temos $y(-t_{n+1}) \in U_n$. Desta forma as sequências $\{y(-t_{2n+1})\}$ e $\{y(-t_{2n})\}$ convergem a y, e como $-t_{2n} \to -\infty$ e $-t_{2n+1} \to +\infty$, vem que $y \in \Lambda^+(y)$ e $y \in \Lambda^-(y)$, donde segue que y é Poisson estável, como desejado. □

2.2 Conjuntos Minimais e Pontos Recorrentes

Nesta secção estudaremos conjuntos minimais e pontos recorrentes. Veremos que em um conjunto compacto essas noções são correspondentes. Primeiro começaremos definindo o conceito de conjunto minimal.

Definição 2.15. *Um conjunto $M \subset X$ é chamado de **conjunto minimal**, se M é não vazio, fechado, invariante e nenhum subconjunto próprio de M possuem estas propriedades.*

O próximo teorema estabelece uma importante caracterização dos conjuntos minimais.

Teorema 2.16. *Um conjunto $M \subset X$ não vazio é minimal se, e somente se, $\overline{\gamma(x)} = M$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Assuma que M é um conjunto minimal. Então dado $x \in M$, como M é invariante, vem que $\gamma(x) \subset M$. Além disso, como M é fechado temos $\overline{\gamma(x)} \subset \overline{M} = M$, e como $\overline{\gamma(x)}$ é fechado e invariante, segue da minimalidade de M, que $\overline{\gamma(x)} = M$.

Reciprocamente, assuma que $\overline{\gamma(x)} = M$ para todo $x \in M$. Suponha por absurdo que M não é minimal. Então existe um subconjunto próprio e não vazio $P \subset M$ que é fechado e invariante. Dado $x \in P$, temos então que $\overline{\gamma(x)} \subset P \subsetneq M$, contradizendo a hipótese. Logo, devemos ter que M é minimal. □

Uma importante propriedade dos conjuntos minimais em um espaço métrico é que eles são abertos ou são conjuntos magros, isto é, possuem interior vazio.

Teorema 2.17. *Seja $M \subset X$ um conjunto minimal com $int(M) \neq \emptyset$. Então M é aberto, em outras palavras, $M = int(M)$.*

Demonstração. Seja $y \in M$. Como M é minimal temos $M = \overline{\gamma(y)}$. Já que $int(M) \neq \emptyset$, existe $x \in int(M)$ e $x \in \overline{\gamma(y)}$, logo como $int(M)$ é aberto contendo x, temos que $int(M) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$. Assim, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $yt \in int(M)$, mas assim $y \in int(M)(-t)$. Como $int(M)$ é aberto, temos que $int(M)(-t)$ é aberto e assim $y \in int(M)(-t) \subset M(-t) = M$, pois M é invariante. Portanto y é um ponto interior a M, como y é arbitrário segue o desejado. □

Observe que nas condições do teorema acima para um conjunto $M \subset X$, se tivermos ainda que X é conexo, então como M é aberto e fechado temos $M = X$. Com isso acabamos de provar o corolário abaixo.

Corolário 2.18. *Nas condições do teorema anterior, se X é conexo então $M = X$.*

Para um conjunto compacto M, o próximo teorema estabelece maneiras de determinar se o conjunto M é minimal ou não.

Teorema 2.19. *Seja $M \subset X$ um conjunto compacto e não vazio. Então são equivalentes:*

1. *M é minimal.*
2. *$\overline{\gamma(x)} = M$ para todo $x \in M$.*
3. *$\overline{\gamma^+(x)} = M$ para todo $x \in M$.*
4. *$\overline{\gamma^-(x)} = M$ para todo $x \in M$.*
5. *$\Lambda^+(x) = M$ para todo $x \in M$.*
6. *$\Lambda^-(x) = M$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Já temos que 1 equivale a 2. Mostraremos as outras equivalências. Primeiramente, assuma que M é minimal e mostremos que $\Lambda^+(x) = M$ para todo $x \in M$. Seja $x \in M$. Uma vez que M é compacto vemos que $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$. Além disso, como $\Lambda^+(x)$ é fechado e invariante temos $\Lambda^+(x) = M$, pois M é minimal. Agora se $M = \Lambda^+(x)$ para todo $x \in M$, já temos que M é fechado e invariante. Suponha que existe $P \subsetneq M$, com P não vazio, fechado e invariante. Dado $y \in P$, teríamos $\overline{\gamma^+(y)} \subset P$, pois P é fechado e invariante, donde $\Lambda^+(y) \subset P \subsetneq M$, um absurdo! Logo M é minimal, assim 1 equivale a 5. De forma análoga mostramos que M é minimal se, e só se, $\Lambda^-(x) = M$ para todo $x \in M$. Suponhamos agora que M é minimal e mostremos que $M = \overline{\gamma^+(x)}$ para todo $x \in M$. De fato, temos $\overline{\gamma^+(x)} \subset M$ para todo $x \in M$, e além disso, como $M = \Lambda^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ segue que $M = \overline{\gamma^+(x)}$ para todo $x \in M$, como desejado. Agora suponha que $M = \overline{\gamma^+(x)}$ para todo $x \in M$. Então dado $x \in M$ temos que $M = \overline{\gamma^+(xt)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)} = M$, donde $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \overline{\gamma^+(xt)} = \Lambda^+(x) = M$, portanto M

é minimal. Da mesma forma se mostra que M é minimal se, e só se, $\overline{\gamma^-(x)}$ para todo $x \in M$, o que completa a prova do teorema. $\square$

Exemplo 2.20. *Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$ dado no Exemplo 1.35.*

Note que γ_1 é fechado, invariante e não vazio, além disso, nenhum subconjunto próprio de γ_1 é fechado e invariante, logo γ_1 é minimal. Entretanto, para cada $x \in \gamma_1$ temos $\Lambda^+(x) = \emptyset$ e $\Lambda^-(x) = \emptyset$, ou seja, o teorema anterior não é válido quando M não é compacto.

Como vimos no teorema acima, todos os pontos de um conjunto minimal compacto é Poisson estável. A próxima definição será um conceito importante no estudo de conjuntos minimais compactos.

Definição 2.21. *Um ponto $x \in X$ é dito **recorrente** se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $T = T(\varepsilon) > 0$, tal que*

$$\gamma(x) \subset B(x[t-T, t+T], \varepsilon)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Quando um ponto x é recorrente, dizemos que a aplicação π_x é recorrente. Ainda se π_x é recorrente, então para todo $y \in \gamma(x)$ tem-se que π_y é recorrente, já que $\gamma(x) = \gamma(y)$. Desta forma, quando um ponto x é recorrente, diremos também que a trajetória $\gamma(x)$ é recorrente.

O próximo resultado demonstra que os pontos recorrentes são Poisson estáveis.

Proposição 2.22. *Todo ponto recorrente é Poisson estável.*

Demonstração. De fato, observe que por definição $d(x, x[t-T, t+T]) < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Escolha para cada nT um elemento $s_n \in [(n-1)T, (n+1)T]$. Temos assim que $d(x, xs_n) < \varepsilon$ e portanto $xs_n \in B(x, \varepsilon)$ e como a sequência $s_n \rightarrow +\infty$ temos que $x \in \Lambda^+(x)$. Portanto x é positivamente Poisson estável, e com um argumento análogo mostramos que x é negativamente Poisson estável, donde x é Poisson estável. $\square$

O próximo teorema fornece uma relação entre conjuntos minimais compactos e trajetórias recorrentes.

Teorema 2.23. *Toda trajetória em um conjunto minimal compacto é recorrente. Desta forma, todo conjunto minimal compacto é o fecho de uma trajetória recorrente.*

Demonstração. Seja M um conjunto minimal e compacto. Suponha por absurdo que exista um $x \in M$ que não é um ponto recorrente. Então existe um $\varepsilon > 0$ e sequências $\{T_n\}$, $\{t_n\}$ e $\{\tau_n\}$, com $T_n > 0$, $T_n \rightarrow +\infty$ e

$$x\tau_n \notin B(x[t_n - T_n, t_n + T_n], \varepsilon) \quad n = 1, 2, \ldots.$$

ou seja,

$$d(x\tau_n, x(t_n + t)) \geq \varepsilon \text{ para todo } \; t \in \mathbb{R}.$$

As sequências $\{xt_n\}$ e $\{x\tau_n\}$ estão em M e assuma, sem perda de generalidade já que M é compacto, que são convergentes. Seja $xt_n \to y$ e $x\tau_n \to z$. Então $y, z \in \overline{\gamma(x)} = M$. Considere o movimento π_y. Para cada $t \in \mathbb{R}$ tem-se $x(t_n + t) \to yt$ e assim temos que

$$d(yt,z) = d(yt,z) + d(yt, x(t_n+t)) - d(yt, x(t_n+t)) + d(z, x\tau_n) - d(z, x\tau_n) \geq$$

$$\geq d(x\tau_n, yt) + d(yt, x(t_n+t)) - d(yt, x(t_n+t)) - d(z, x\tau_n) \geq$$
$$\geq d(x\tau_n, yt) - d(yt, x(t_n+t)) - d(z, x\tau_n), \text{ para todo } n = 1, 2, \dots.$$

Assim, quando $n \to +\infty$ vemos que $d(yt,z) \geq \varepsilon$ já que $x(t_n+t) \to yt$, $x\tau_n \to z$ e $d(x\tau_n, x(t_n+t)) \geq \varepsilon$ para todo t, donde $z \notin \overline{\gamma(y)}$. Como $\overline{\gamma(y)} = M$ vemos que $z \notin M$, o que é uma contradição. Portanto devemos ter que $\gamma(x)$ é recorrente. □

O próximo resultado é uma recíproca ao teorema anterior.

Teorema 2.24. *Se a trajetória $\gamma(x)$ é recorrente e $\overline{\gamma(x)}$ é compacto, então $\overline{\gamma(x)}$ é um conjunto minimal.*

Demonstração. Seja $M = \overline{\gamma(x)}$. Se supormos que M não é minimal, então existe um conjunto invariante, compacto e não vazio $N \subsetneq M$. É fato que $x \notin N$, pois senão $\overline{\gamma(x)} \subset N$, o que não pode ocorrer. Considere assim $\varepsilon = d(N, x) > 0$. Como x é recorrente, existe um $T > 0$ tal que $\gamma(x) \subset B(x[t-T, t+T], \frac{\varepsilon}{3})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora dado $y \in N$, temos $y \in M = \overline{\gamma(x)}$ e $y \notin \gamma(x)$. Assim $y \in \Lambda^+(x)$ ou $y \in \Lambda^-(x)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $y \in \Lambda^+(x)$. Então existe uma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to +\infty$ e $xt_n \to y$. Pelo Axioma da continuidade, existe um $\delta > 0$ tal que $d(yt, zt) < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $d(y,z) < \delta$ e $|t| \leq T$. Assim, temos que $d(yt, x(t_n+t)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para $|t| \leq T$ e n suficientemente grande. Logo

$$d(x, x(t_n+t)) = d(x, x(t_n+t)) + d(yt, x(t_n+t)) - d(yt, x(t_n+t)) \geq$$

$$\geq d(x, yt) - d(yt, x(t_n+t)) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{para } |t| \leq T$$

o que contradiz o fato de $\gamma(x) \subset B(x[t-T, t+T], \frac{\varepsilon}{3})$, concluindo a prova do teorema. □

Lembremos que um conjunto M em um espaço métrico é compacto se, e somente se, M é completo e totalmente limitado, isto é, toda sequência de Cauchy em M é convergente e para cada $\varepsilon > 0$, M admite uma subcobertura finita por ε bolas. Com isso, mostraremos que em um espaço métrico completo o fecho de toda trajetória recorrente é um conjunto compacto, e, portanto minimal.

Teorema 2.25. *Se X é um espaço métrico completo, então o fecho de qualquer trajetória recorrente é um conjunto minimal e compacto.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, basta mostrar que $\overline{\gamma(x)}$ é compacto, ou seja, $\overline{\gamma(x)}$ é completo e totalmente limitado. Primeiro observe que $\overline{\gamma(x)}$ é fechado e sendo X completo, segue que $\overline{\gamma(x)}$ é completo. Afirmamos agora que $\gamma(x)$ é totalmente limitado.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\gamma(x) \subset B(x[t-T, t+T], \frac{\varepsilon}{2})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Quando $t = 0$, temos $\gamma(x) \subset B(x[-T,T], \frac{\varepsilon}{2})$. Logo $d(xt, x[-T,T]) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $y \in \overline{\gamma(x)}$, então existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ com $xt_n \rightarrow y$. Assim $d(xt_n, x[-T,T]) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Quando $n \rightarrow +\infty$ temos $d(y, x[-T,T]) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x[-T,T]$ é compacto, então é totalmente limitado e assim existem $x_1, \ldots, x_k \in x[-T,T]$ tais que

$$x[-T,T] \subset B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup B(x_k, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Por compacidade existe $z \in x[-T,T]$ com $d(y, x[-T,T]) = d(y,z)$. Além disso pelo mostrado acima existe x_i tal que $z \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Então

$$d(y, x_i) \leq d(y,z) + d(z, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto $y \in B(x_i, \varepsilon)$, logo $\overline{\gamma(x)} \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_k, \varepsilon)$, provando que $\overline{\gamma(x)}$ é totalmente limitado. Assim, como $\overline{\gamma(x)}$ é completo e totalmente limitado, segue que $\overline{\gamma(x)}$ é compacto e o resultado segue. $\square$

Vimos que para determinar se um conjunto compacto M é minimal basta verificar então que dado $x \in M$ a trajetória $\gamma(x)$ é recorrente. O próximo teorema nos garante uma outra forma de determinar se uma dada trajetória $\gamma(x)$ é recorrente. Mas antes disso, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.26. *Um conjunto D de números reais é dito **relativamente denso** se existe $T > 0$ tal que $D \cap (t-T, t+T) \neq \emptyset$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Agora podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.27. *Para um $x \in X$, suponha que $\overline{\gamma(x)}$ é um conjunto compacto. Então o movimento π_x é recorrente se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto*

$$K_\varepsilon = \{t;\, d(x, xt) < \varepsilon\}$$

é relativamente denso.

Demonstração. Suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $K_\varepsilon = \{t;\, d(x,xt) < \varepsilon\}$ é relativamente denso e mostremos que x é um ponto recorrente. Para isso, como $\overline{\gamma(x)}$ é compacto, basta mostrarmos que $\overline{\gamma(x)}$ é minimal. Suponhamos por absurdo que $\overline{\gamma(x)}$ não é minimal, ou seja, existe um conjunto $M \subsetneq \overline{\gamma(x)}$ fechado e invariante. Observe que $x \notin M$, pois se $x \in M$ teríamos $\overline{\gamma(x)} \subset M$ o que não pode ocorrer. Assim, seja $3\varepsilon = d(x, M) > 0$. Pela continuidade da aplicação de fase, dado $y \in M$ temos $d(yt, zt) < \varepsilon$ sempre que $d(y,z) < \delta$ e $|t| \leq T$. Note ainda que se $y \in M$ temos $y \notin \gamma(x)$, pois caso contrário tem-se $\overline{\gamma(x)} \subset M$ o que não pode ocorrer. Logo $y \in \Lambda^-(x)$ ou $y \in \Lambda^+(x)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $y \in \Lambda^+(x)$. Então existe $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $xt_n \rightarrow y$. Assim para n suficientemente grande, temos que $d(yt, x(t_n + t)) < \varepsilon$ sempre que $|t| < T$. Em particular, para $t \in [t_n - T, t_n + T]$ temos

$$d(x, xt) = d(x, xt) + d(xt, y(t-t_n)) - d(xt, y(t-t_n)) \geq$$

$$d(x, y(t - t_n)) - d(xt, y(t - t_n)).$$

Como M é invariante, temos $yt \in M$ e

$$d(x, y(t - t_n)) - d(xt, y(t - t_n)) \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

ou seja, $K_\varepsilon \cap [t_n - T, t_n + T] = \emptyset$, um absurdo. Portanto devemos ter que $\overline{\gamma(x)}$ é minimal, donde segue que $\overline{\gamma(x)}$ é recorrente. Agora suponhamos que $\gamma(x)$ é recorrente e seja $\varepsilon > 0$. Então existe $T > 0$ tal que $\gamma(x) \subset B(x[t - T, t + T], \varepsilon)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostremos que K_ε é relativamente denso. De fato fixe $t \in \mathbb{R}$, temos que $x \in \gamma(x) \subset B(x[t - T, t + T], \varepsilon)$, ou seja, existe $t_0 \in [t - T, t + T]$ tal que $d(x, xt_0) < \varepsilon$. Se $t_0 \in (t - T, t + T)$ não há nada a fazer. Caso $t_0 = t - T$, escolha $s \in (t - T, t + T)$ de forma que $xs \in B(xt_0, \delta)$ onde $\delta = \varepsilon - d(x, xt_0) > 0$. Assim teremos que $xs \in B(x, \varepsilon)$ e $s \in (t - T, t + T)$. De maneira análoga, mostramos que existe $l \in (t - T, t + T)$ e $xl \in B(x, \varepsilon)$ caso $t_0 = t + T$. Portanto, em qualquer caso, vemos que K_ε é relativamente denso, e pela arbitrariedade de ε, o resultado segue. $\square$

Exemplo 2.28. *No Exemplo 2.7, restrinja o sistema dinâmico ao toro T menos o ponto fixo P. O conjunto assim obtido $T \backslash \{P\}$ não é compacto, mas para cada $x \in T \backslash \{P\}$ temos $\overline{\gamma(x)} = T \backslash \{P\}$, portanto o conjunto $T \backslash \{P\}$ é minimal e contém mais de uma trajetória. Logo existe um conjunto não compacto e minimal que contém mais que uma trajetória, observe ainda que neste exemplo as trajetórias não são recorrentes, o que demonstra a necessidade da hipótese de compacto no Teorema 2.23.*

2.3 Estabilidade de Lagrange e Existência de Conjuntos Minimais

Nesta seção estudaremos a estabilidade de Lagrange. Tal conceito é crucial para garantir a existência de conjuntos minimais como veremos adiante.

Definição 2.29. *Para qualquer $x \in X$, o movimento π_x é dito* ***positivamente Lagrange estável*** *se $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto. Se $\overline{\gamma^-(x)}$ é compacto, então o movimento π_x é chamado de* ***negativamente Lagrange estável****. Caso $\overline{\gamma(x)}$ é compacto, dizemos simplesmente que π_x é* ***Lagrange estável****.*

Observação 2.30. 1) *Se $X = \mathbb{R}^n$, então π_x é positivamente Lagrange estável, negativamente Lagrange estável ou Lagrange estável se, e somente se, $\gamma^+(x)$, $\gamma^-(x)$ ou $\gamma(x)$ é limitado, respectivamente.*

2) *Se X é localmente compacto, então π_x é positivamente Lagrange estável se, e somente se, $\Lambda^+(x)$ é não vazio e compacto.*

3) *Se π_x é positivamente Lagrange estável, então $\Lambda^+(x)$ é compacto e conexo. Além disso, $d(xt, \Lambda^+(x)) \to 0$ quando $t \to +\infty$.*

Teorema 2.31. *Um conjunto compacto, não vazio e invariante admite ao menos um conjunto compacto e minimal.*

Demonstração. Seja M um conjunto compacto, não vazio e invariante. Considere $\mathcal{F} = \{A \subset M;\ A \text{ é não vazio, fechado e invariante}\}$.

Note que $\mathcal{F}$ é não vazio, pois $M \in \mathcal{F}$, e parcialmente ordenado pela relação de ordem $A \prec B$ se, e somente se, $B \subset A$. Além disso, dada uma cadeia ascendente de elementos de $\mathcal{F}$, digamos $A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \dots$, considerando $\bigcap_i A_i$, vemos que $\bigcap_i A_i$ é o limitante superior da cadeia. Assim, pelo Lema de Zorn, segue que toda cadeia de elementos de $\mathcal{F}$ admite um elemento maximal. Mas desta forma, tal elemento é minimal por definição. $\square$

Como consequência do Teorema 2.31, um sistema dinâmico contém um conjunto minimal compacto se, e somente se, existe um ponto que é positivamente Lagrange estável ou negativamente Lagrange estável, como veremos agora.

Teorema 2.32. *Um conjunto X contém um conjunto compacto minimal, se e somente se, existe um $x \in X$ tal que $\overline{\gamma^+(x)}$ ou $\overline{\gamma^-(x)}$ é compacto.*

Demonstração. Suponhamos que $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto. Então $\Lambda^+(x)$ é não vazio, compacto e invariante. Portanto pelo Teorema 2.31, X admite um conjunto compacto e minimal. Da mesma forma, se $\overline{\gamma^-(x)}$ é compacto vemos que X contém um conjunto compacto e minimal.

Reciprocamente, se X contém um conjunto compacto e minimal, digamos M, vemos que $M = \overline{\gamma^-(x)} = \overline{\gamma^+(x)}$ e assim $\overline{\gamma^-(x)}$ e $\overline{\gamma^+(x)}$ são compactos. $\square$

Exemplo 2.33. *Considere o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$, onde x é um vetor 2×1 e A uma matriz invertível 2×2. O objetivo deste exemplo é classificar as trajetórias com respeito a estabilidade de Lagrange. Temos alguns casos a analisar:*

1) *Se A possui autovalores reais e distintos de mesmo sinal.*
Neste caso o retrato de fase é um nó. Caso A possua dois autovalores negativos, então o retrato de fase é um nó assintoticamente estável .

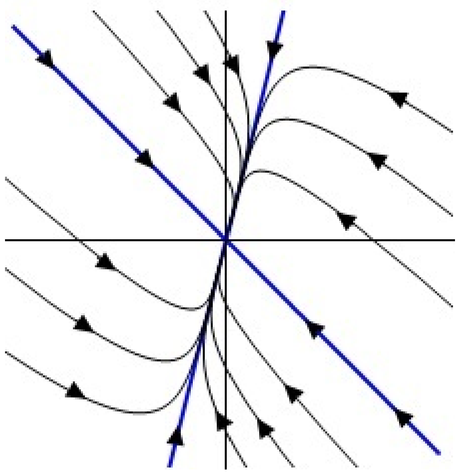

Figura 2.2: Ponto Nó Assintoticamente Estável.

Aqui cada ponto x, com exceção da origem, tem uma semi trajetória $\overline{\gamma^+(x)}$ compacta, enquanto $\overline{\gamma^-(x)}$ é não compacto. Desta forma, os pontos do sistema são positivamente Lagrange estável mas não são negativamente Lagrange estável. A origem é o único ponto Lagrange estável.

Caso os autovalores sejam ambos positivos, o retrato de fase é como mostra a figura a seguir e os pontos são negativamente Lagrange estável, mas não positivamente Lagrange estável.

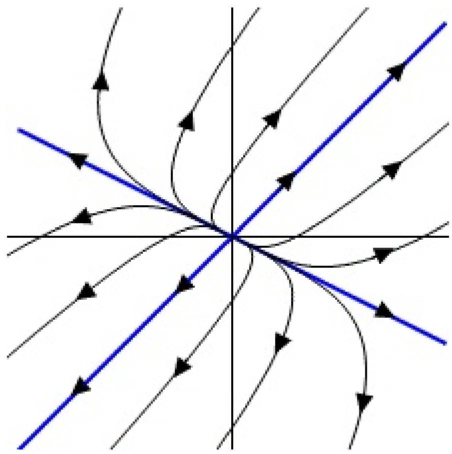

Figura 2.3: Ponto Nó Assintoticamente Instável.

2) *Autovalores Reais com sinais diferentes.*

Neste caso o retrato de fase é uma sela, como mostra a figura abaixo.

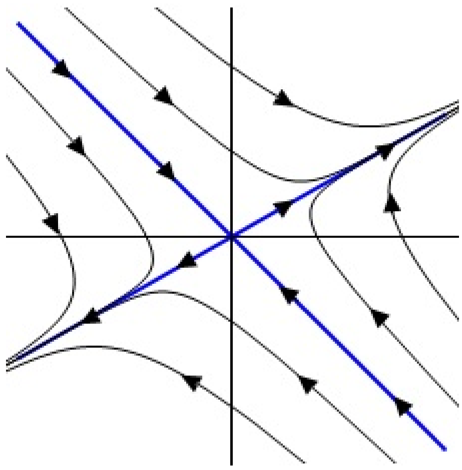

Figura 2.4: Ponto de Sela.

Considere v_1 e v_2 os autovetores da matriz. Para os pontos na reta determinada por v_2, com exceção da origem, vemos que são positivamente Lagrange estável mas não são negativamente Lagrange estável. O contrário ocorre com a reta determinada por v_1. O único ponto Lagrange estável é a origem, enquanto os pontos fora das retas determinadas por v_1 e v_2 não são nem positivamente e nem negativamente Lagrange estável.

3) *Autovalores Iguais.*

Aqui temos dois sub-casos a verificar:

(i) *Dois autovetores independentes.*

Neste caso o retrato de fase é um ponto estrela na origem. Quando o autovalor é negativo o retrato de fase é como mostra a figura abaixo

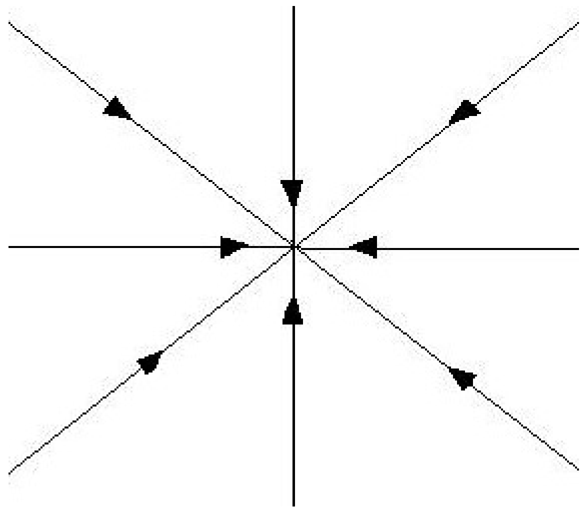

Figura 2.5: Ponto Estrela.

Aqui a origem é um ponto Lagrange estável, enquanto os outros pontos são positivamente Lagrange estáveis, mas não são negativamente Lagrange estáveis. Quando os autovalores são positivos, o retrato de fase muda de sentido e assim os pontos positivamente Lagrange estáveis se tornam negativamente Lagrange estáveis.

(ii) *Um auto vetor independente.*

Neste caso o retrato de fase depende da orientação do autovetor v *da matriz* A*. O retrato de fase é um nó impróprio.*

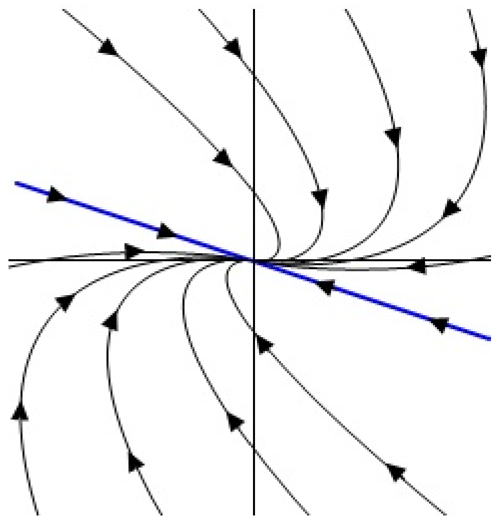

Figura 2.6: Nó impróprio.

A origem é o único ponto Lagrange estável, qualquer outro ponto é positivamente Lagrange estável mas não é negativamente Lagrange estável.

Caso o autovalor seja positivo o sentido do retrato de fase muda, e assim, os pontos se tornam negativamente Lagrange estáveis, mas não positivamente, com exceção da origem que é Lagrange estável.

4) *Autovalores Complexos.*

Sejam $\lambda_1 = a + bi$ *e* $\lambda_2 = a - bi$ *os autovalores da matriz* A*, com* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$*. Aqui as trajetórias são espirais em torno da origem. O sentido depende da parte real dos autovalores. As figuras abaixo mostram o retrato de fase quando* $a < 0$ *e* $a > 0$*, respectivamente.*

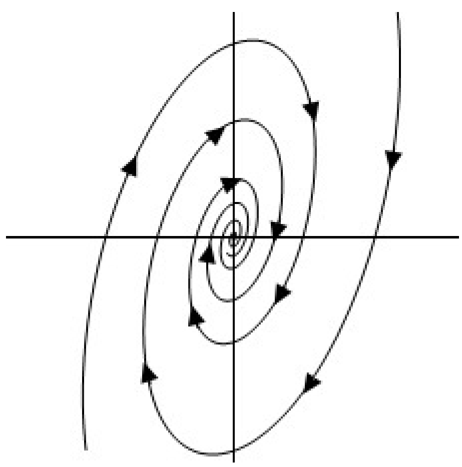

Figura 2.7: Ponto espiral quando $a < 0$.

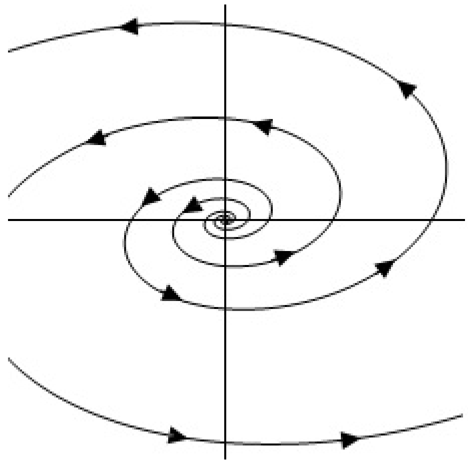

Figura 2.8: Ponto espiral quando $a > 0$.

Quando $a < 0$ as trajetórias são positivamente Lagrange estáveis, mas não são negativamente, a origem é a única trajetória Lagrange estável. Se $a > 0$, as trajetórias são negativamente Lagrange estáveis, mas não são positivamente Lagrange estáveis, com exceção da origem que é Lagrange estável.

5) *Autovalores Imaginários Puros.*

Aqui os autovalores são $\lambda_1 = bi$ e $\lambda_2 = -bi$. As trajetórias são círculos de centro na origem e, dependendo do valor de b, percorrem no sentido horário se $b > 0$ ou anti-horário, caso $b < 0$. Um exemplo é como mostra o retrato de fase da figura abaixo

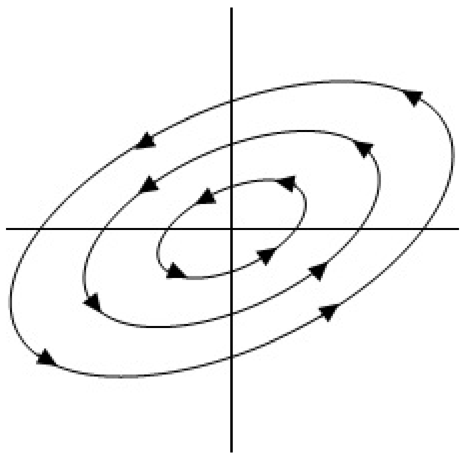

Figura 2.9: Um centro.

Neste caso, todos os pontos do sistema são Lagrange estáveis, visto que suas trajetórias são periódicas com período $\frac{2\pi}{b}$.

Capítulo 3

Conceitos Dispersivos

Neste capítulo estudaremos sistemas dinâmicos Lagrange instáveis, Poisson instáveis, completamente instáveis, dispersivos e paralelizáveis. Nosso principal objetivo é estudar os sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis. Em suma veremos que sob certas condições do espaço de fase, o sistema dinâmico dispersivo é equivalente ao paralelizável. Entre os conceitos que estudaremos na Secção 3.1, que são os sistemas dinâmicos Poisson instáveis, Lagrange instáveis, completamente instáveis e dispersivo, daremos mais enfoque a este último para obtermos ferramentas de modo a mostrarmos a equivalência desejada. Na Secção 3.2 estudaremos os sistemas dinâmicos paralelizáveis e secção de um sistema dinâmico, veremos que um sistema dinâmico é paralelizável se, e só se, admite secção com função contínua e assim daremos início à teoria para construção de uma secção com função contínua de um sistema dinâmico dispersivo. Em todo capítulo, consideramos fixado um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ sobre um espaço métrico (X, d). Para mais detalhes a respeito de instabilidade e sistemas dinâmicos dispersivos o leitor pode consultar [3], entretanto para uma exposição com mais detalhes do Teorema de Whitney-Bebutoff e do Teorema 3.23 pode-se consultar [13].

3.1 Instabilidade e Sistemas Dinâmicos Dispersivos

Para definirmos os conceitos citados acima, precisaremos da seguinte definição.

Definição 3.1. *Seja $x \in X$. Dizemos que*

1) o movimento π_x é ***positivamente Lagrange instável*** *sempre que $\overline{\gamma^+(x)}$ não é compacto. Quando $\overline{\gamma^-(x)}$ não é compacto, dizemos que π_x é* ***negativamente Lagrange instável****. Finalmente, dizemos que π_x é* ***Lagrange instável*** *se é positivamente e negativamente Lagrange instável.*

2) Um ponto $x \in X$ é ***positivamente Poisson instável*** *se $x \notin \Lambda^+(x)$,* ***negativamente Poisson instável*** *se $x \notin \Lambda^-(x)$ e* ***Poisson instável*** *se é negativamente e positivamente Poisson instável.*

3) Um ponto $x \in X$ é chamado ***errante*** *se $x \notin J^+(x)$.*

Definiremos agora conceitos que serão fundamentais para o desenvolvimento deste capítulo.

Definição 3.2. *O sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é chamado de:*

1) ***Lagrange instável*** *se para cada* $x \in X$ *o movimento* π_x *é Lagrange instável.*

2)***Poisson instável*** *se cada* $x \in X$ *é Poisson instável.*

3) ***Completamente instável*** *se todo ponto de* X *é errante.*

4) ***Dispersivo*** *se, para cada par de pontos* $x, y \in X$*, existem vizinhanças* U_x *de* x *e* U_y *de* y *tais que* U_x *não é positivamente recursivo com respeito a* U_y*.*

Observação 3.3. 1)*Não é necessário definir conceitos de pontos positivamente errante e negativamente errante, uma vez que* $x \notin J^+(x)$ *é equivalente a, pelo Teorema 1.54,* $x \notin J^-(x)$*.*

2) *Observe que sistema dinâmico dispersivo implica em completamente instável, entretanto completamente instável não implica que o sistema dinâmico seja dispersivo, como veremos em um exemplo a seguir. Além disso, se o sistema dinâmico é completamente instável então ele é Lagrange instável. De fato, se para algum* $x_0 \in X$ *tivermos que* $\overline{\gamma(x_0)}$ *é compacto, então o conjunto* $\Lambda^+(x_0)$ *é compacto e não vazio. Assim para* $y \in \Lambda^+(x_0)$ *temos* $y \in J^+(y)$*, pelo Teorema 2.12, contradizendo o fato de que o sistema dinâmico é completamente instável. Portanto, para cada* $x \in X$ *o conjunto* $\overline{\gamma(x)}$ *não é compacto, ou seja, o sistema dinâmico é Lagrange instável.*

Observação 3.4. *Dizemos que um Sistema Dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é dito positivamente Lagrange instável se para cada* $x \in X$ *o conjunto* $\overline{\gamma^+(x)}$ *não é compacto. Desta forma,* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é Lagrange instável se, e somente se, é positivamente Lagrange instável. A implicação é imediata. Agora assuma que o sistema dinâmico seja positivamente Lagrange instável, mas não seja Lagrange instável, isto é, existe um* $x \in X$ *tal que* $\overline{\gamma^-(x)}$ *é compacto. Assim pelo Teorema 2.32, o sistema dinâmico admite um conjunto minimal e compacto* M *e desta forma, para cada* $y \in M$ *temos que* $\overline{\gamma^+(y)} = M$*, contradizendo o fato de que o sistema dinâmico é positivamente Lagrange instável. De maneira análoga define-se sistema dinâmico negativamente Lagrange instável, e como feito acima, vemos que um sistema dinâmico é Lagrange instável se, e só se, é negativamente Lagrange instável.*

Observação 3.5. *Um Sistema Dinâmico é positivamente Poisson instável se para cada* $x \in X$ *tem-se que* $x \notin \Lambda^+(x)$*. Um sistema dinâmico positivamente Poisson instável não é necessariamente Poisson instável. No Exemplo 2.7, restrinja o sistema dinâmico à trajetória* γ_2*. Temos assim que, para cada* $x \in \gamma_2$*,* $\Lambda^+(x) = \emptyset$ *entretanto* $\Lambda^-(x) = \gamma_2$*. Logo, o sistema dinâmico assim obtido é positivamente Poisson instável, mas não é Poisson estável.*

Não faz sentido considerarmos o espaço de fase compacto ao estudarmos sistemas dinâmicos dispersivos, ou até completamente instáveis, visto que nesses casos, o conjunto $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto, por ser fechado em um compacto, e assim segue dos Teoremas 2.32, 2.19 e 2.12 que existe $y \in J^+(y)$.

Daremos dois exemplos para mostrar que nem sempre os sistemas dinâmicos definidos acima são equivalentes.

Exemplo 3.6. *Considere o sistema dinâmico planar cujo retrato de fase é representado na Figura 3.1.*

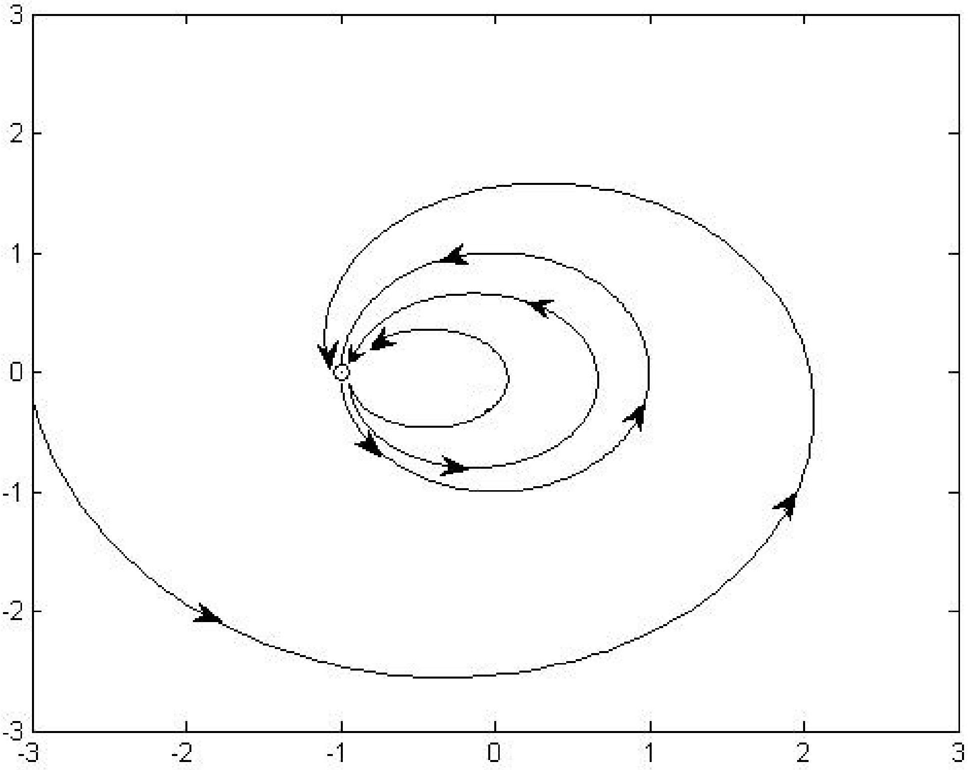

Figura 3.1: Retrato de fase do Exemplo 3.6.

Observe que para cada ponto q na trajetória γ, que consiste do círculo unitário menos o ponto $p = (-1, 0)$, temos $\Lambda^+(q) = \{p\}$. Também, para cada ponto x no interior do círculo unitário, temos $\Lambda^+(x) = \{p\}$. Ainda, para os pontos y no exterior do círculo unitário temos $\Lambda^+(y) = \gamma \cup \{p\}$. Restringindo este sistema dinâmico a $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$, vemos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é Poisson instável e Lagrange instável, entretanto o sistema dinâmico não é completamente instável, pois para cada $q \in \gamma$, temos $J^+(x) = \gamma$, ou seja, $q \in J^+(q)$.

Exemplo 3.7. *Considere o sistema dinâmico planar dado no Exemplo 1.52. Como sabemos o retrato de fase do sistema dinâmico é como a Figura 3.2.*

Este sistema dinâmico é completamente instável, pois se $q \in \gamma_k$ com k par, temos $J^+(q) = \emptyset$. Se k é ímpar, temos $J^+(q) = \gamma_{k+1} \cup \gamma_{k-1}$. Assim, em qualquer caso, $q \notin J^+(q)$. Por fim se $q \in \gamma$, então $J^+(q) = \emptyset$.

Portanto o sistema dinâmico é completamente instável, mas não é dispersivo, já que se $q \in \gamma_{-1}$, vê-se que toda vizinhança de q é positivamente recursiva com respeito a qualquer vizinhança do ponto $p \in \gamma_0$.

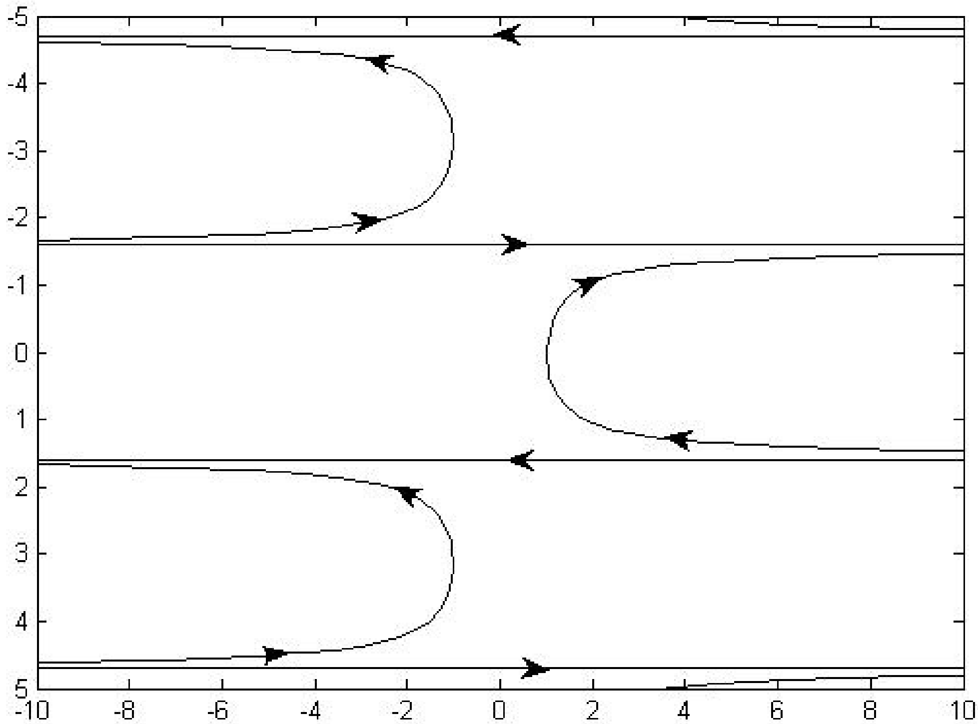

Figura 3.2: Sistema dinâmico completamente instável que não é dispersivo.

Os próximos teoremas nos fornecem condições para determinar quando um sistema dinâmico é dispersivo.

Teorema 3.8. *Para um sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é dispersivo.*

2. *Para quaisquer dois pontos* $x, y \in X$*, existem vizinhanças* U_x *de* x*,* U_y *de* y *e uma constante* $T > 0$*, tais que,* $U_x \cap U_y t = \emptyset$ *para todo* t *com* $|t| \geq T$*.*

3. *Para quaisquer dois pontos* $x, y \in X$*, tem-se que* $x \notin J^+(y)$*.*

Demonstração. É imediato que 1 equivale a 2. Mostremos que 2 equivale a 3. Assuma primeiramente que, para quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existam vizinhanças U_x de x, U_y de y e $T > 0$, tais que, $U_x \cap U_y t = \emptyset$ para $|t| \geq T$. Mas assim, dadas sequências $\{x_n\}$ em X e $\{t_n\}$ de números reais com $t_n \to +\infty$ e $x_n \to y$, temos que $x_n \in U_y$ para n suficientemente grande, e como $U_x \cap U_y t = \emptyset$ para $|t| \geq T$, vê-se que $x_n t_n \notin U_x$, para todo n suficientemente grande, donde vem que $x \notin J^+(y)$. Agora se $x \notin J^+(y)$, suponhamos por absurdo que, para cada n inteiro positivo e cada vizinhanças U_x de x e U_y de y exista $t_n > n$, tal que $U_x \cap U_y t_n \neq \emptyset$. Assim para $n = 1$ e $t_1 > 1$ escolha $x_1 \in B(x, 1) \cap B(y, 1)t_1$.

Para $n = 2$ e $t_2 > 2$, escolha $x_2 \in B(x, \frac{1}{2}) \cap B(y, \frac{1}{2})t_2$. Da mesma forma, para $n = 3$ e $t_3 > 3$, considere $x_3 \in B(x, \frac{1}{3}) \cap B(y, \frac{1}{3})t_3$. Procedendo iteradamente obteremos uma sequência $\{x_n\}$ de pontos de X e uma sequência $\{t_n\}$ de números reais, de forma que, sendo $z_n := -t_n$, temos $x_n \to x$ e $x_n z_n \to y$ com $z_n \to -\infty$, ou seja, $y \in J^-(x)$, o que equivale a $x \in J^+(y)$, uma contradição, o que prova o teorema. □

O próximo resultado nos fornece uma caracterização de sistemas dinâmicos dispersivos que em alguns trabalhos, vide [7], é usada como definição de sistemas dinâmicos dispersivos.

Teorema 3.9. *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo se, e somente se, $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponhamos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico dispersivo. Então pelo teorema anterior, para cada $x \in X$, temos $J^+(x) = \emptyset$. Agora suponha que $J^+(x) = \emptyset$ para cada $x \in X$. Então para todo $y \in X$, tem-se que $y \notin J^+(x)$ e assim pelo teorema anterior, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico dispersivo. □

Note que trajetórias periódicas e pontos críticos possuem conjunto limite prolongacional não vazio. Por conta disso, sistemas dinâmicos dispersivos não admitem pontos críticos ou trajetórias periódicas. Além disso, pelos Teoremas 3.9 e 1.46, vemos que $D^+(x) = \gamma^+(x)$. A recíproca deste fato é o próximo resultado.

Teorema 3.10. *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo se, e somente se, $D^+(x) = \gamma^+(x)$ para todo $x \in X$ e não há pontos críticos e trajetórias periódicas.*

Demonstração. Suponhamos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico dispersivo. Então $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$, e assim $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x) = \gamma^+(x)$. Além disso, como $\Lambda^+(x) \subset J^+(x) = \emptyset$, para cada $x \in X$, vemos que $\gamma^+(x) \neq \Lambda^+(x)$ e assim não há trajetórias periódicas e nem pontos críticos. Reciprocamente, suponhamos que não há trajetórias periódicas e nem pontos críticos e ainda $D^+(x) = \gamma^+(x)$ para todo $x \in X$. Afirmamos que, neste caso, $J^+(x) = \emptyset$, para todo $x \in X$. De fato, caso contrário, como $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x) = \gamma^+(x)$, segue que $J^+(x) \subset \gamma^+(x)$, e uma vez que $J^+(x_0) \neq \emptyset$ para algum $x_0 \in X$, teríamos que $\gamma(x) \subset J^+(x)$, pois $J^+(x_0)$ é não vazio e invariante. Como $J^+(x_0) \subset \gamma^+(x_0)$, segue que $\gamma(x) = \gamma^+(x)$. Logo para um dado $\tau < 0$ existe $\tau^* \geq 0$, tal que, $x\tau = x\tau^*$ donde $x(\tau^* - \tau) = x$, ou seja, x é periódico com período $\tau^* - \tau > 0$, uma contradição. Portanto, devemos ter que $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$, donde segue que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo. □

Observação 3.11. *A hipótese de que $D^+(x) = \gamma^+(x)$ no teorema acima é essencial. No exemplo 2.7, restrinja o sistema dinâmico ao Toro T menos o ponto crítico P. O sistema dinâmico assim obtido não possui pontos críticos ou trajetórias periódicas, entretanto o sistema dinâmico não é dispersivo já que $J^+(x) = T \backslash P$, para todo $x \in T \backslash P$.*

3.2 Sistemas Dinâmicos Paralelizáveis

Nesta secção estudaremos sistemas dinâmicos paralelizáveis. Uma importante característica em sistemas dinâmicos paralelizáveis é a existência de uma secção. Nosso objetivo é demonstrar que em espaço de fase métrico, localmente compacto e separável, um sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, é dispersivo. Para isso, construiremos uma secção em um sistema dinâmico dispersivo de modo que o torne paralelizável.

Definição 3.12. *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é chamado de **paralelizável** se existe um conjunto $S \subset X$ e um homeomorfismo $h : X \to S \times \mathbb{R}$, tal que $S\mathbb{R} = X$ e $h(xt) = (x, t)$, para todo $x \in S$ e $t \in \mathbb{R}$.*

Para estudarmos sistemas dinâmicos paralelizáveis, precisamos encontrar um subconjunto nas características descritas acima. Para isso definiremos o conceito de secção.

Definição 3.13. *Um conjunto $S \subset X$ é chamado de **secção** de $(X, \mathbb{R}, \pi)$ se, para cada $x \in X$ existe um único $\tau(x) \in \mathbb{R}$ tal que $x\tau(x) \in S$.*

Note que a existência de uma secção implica que existe uma aplicação $\tau : X \to \mathbb{R}$. Em geral, a aplicação τ não é contínua, mas a continuidade da aplicação τ garante que o sistema dinâmico é paralelizável, como veremos adiante.

Teorema 3.14. *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ admite uma secção se, e somente se, não há pontos críticos ou trajetórias periódicas.*

Demonstração. É imediato verificar que se existe um secção S então não há pontos críticos ou trajetórias periódicas, visto que não conseguimos a unicidade do elemento $\tau(x)$ para pontos críticos ou pontos em trajetórias periódicas. Agora suponha que não há trajetórias periódicas e nem pontos críticos no sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$. Seja S o conjunto definido da seguinte forma: para cada trajetória $\gamma(x)$ em X, escolha um único elemento x_0 de $\gamma(x)$ e definamos $x_0 \in S$. Afirmamos que S é uma secção. De fato, dado $x \in X$ então $x \in \gamma(x_0)$ para algum $x_0 \in S$. Assim $x = x_0t_0$ com $t_0 \in \mathbb{R}$. Desta forma $x(-t_0) = x_0 \in S$. Para provarmos a unicidade, suponhamos que exista $x_0 \in X$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ com $t_1 \neq t_2$, tais que, $x_0t_1, x_0t_2 \in S$. Podemos supor sem perda de generalidade que $t_1 > t_2$. Como x_0t_1 e x_0t_2 estão na mesma trajetória e pertencem a S, vemos que $x_0t_1 = x_0t_2$, por construção, donde $x_0 = x_0(t_1 - t_2)$ e $t_1 - t_2 > 0$. Segue que x_0 é um ponto crítico ou um ponto periódico, um absurdo! Logo, para cada $x \in X$ existe um único $\tau(x) \in \mathbb{R}$ tal que $x\tau(x) \in S$, o que prova que S é uma secção de $(X, \mathbb{R}, \pi)$. □

Exemplo 3.15. *Considere o sistema dinâmico definido em $\mathbb{R}^2$ pelas equações diferenciais*

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2) \text{ e } \frac{dx_2}{dt} = 0,$$

onde $f(x_1, x_2)$ é contínua, $f(n, \frac{1}{n}) = 0$ quando n é um inteiro positivo e $f(x_1, x_2) > 0$ para os outros pontos. O retrato de fase é como mostra a Figura 3.3.

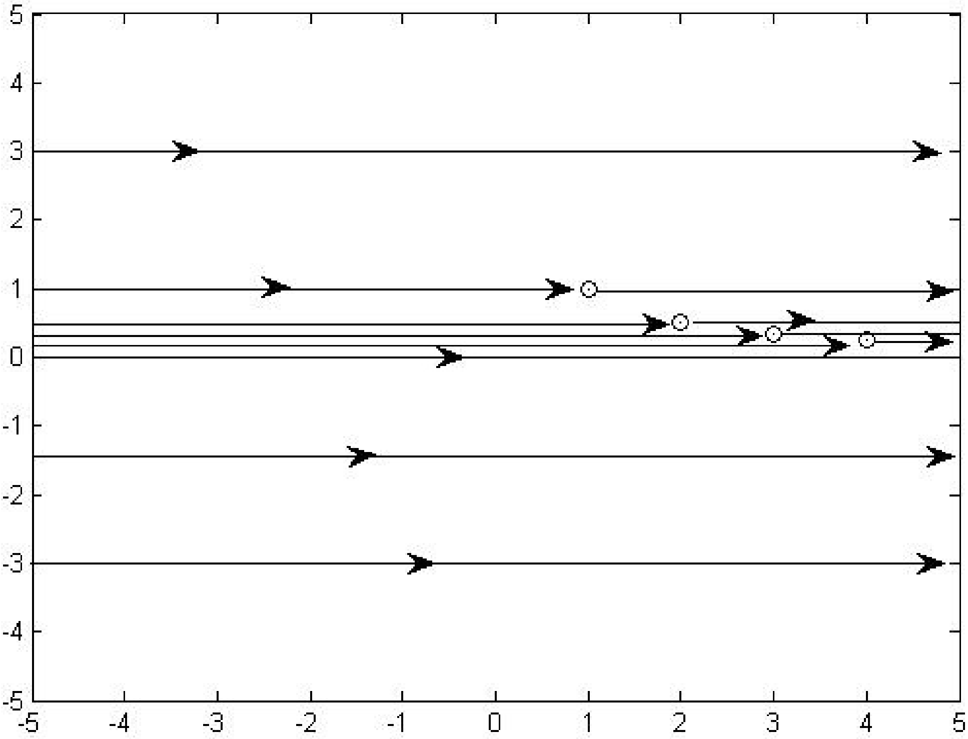

Figura 3.3: Sistema dinâmico dispersivo que não é paralelizável.

Considere o sistema dinâmico obtido acima, deletando o conjunto $I_n = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \leq n,\ x_2 = \frac{1}{n},\}$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$.

Este sistema dinâmico é dispersivo, já que $J^+(x) = \emptyset$*, mas não é paralelizável, pois não admite secção com função* τ *contínua como veremos no próximo teorema. Veremos mais adiante que o espaço de fase deste sistema dinâmico não é localmente compacto.*

Proposição 3.16. *Se* S *é uma secção do sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *com aplicação* $\tau(x)$ *contínua em* X*, então:*

1. S *é fechado em* X.
2. S *é conexo, conexo por caminhos ou simplesmente conexo se, e somente se,* X *é, respectivamente, conexo, conexo por caminhos ou simplesmente conexo.*
3. *Se* $K \subset S$ *é fechado em* S*, então* Kt *é fechado em* X*, para todo* $t \in \mathbb{R}$.
4. *Se* $K \subset S$ *é aberto em* S*, então* KI*, para qualquer* I *intervalo aberto em* $\mathbb{R}$*, é aberto em* X.

Demonstração. 1. Sendo τ contínua, note que S é fechado já que $\tau^{-1}(\{0\}) = S$. Com efeito, dado $x \in S$ por um lado temos que $x\tau(x) \in S$. Por outro lado, $x0 = x \in S$

e assim pela unicidade, segue que $\tau(x) = 0$. Pela arbitrariedade do elemento x, temos $S \subset \tau^{-1}(\{0\})$. Agora seja $x \in \tau^{-1}(\{0\})$, temos assim que $\tau(x) = 0$, mas $x\tau(x) = x0 = x$ donde $x \in S$, por definição. Logo $\tau^{-1}(\{0\}) \subset S$ e segue a igualdade.

2. Assuma que X é conexo e suponha, por absurdo, que S é desconexo, isto é, existem S_1 e S_2 fechados e disjuntos, tais que $S = S_1 \cup S_2$. Uma vez que $X = S\mathbb{R}$, pois S é uma secção, temos $X = S_1\mathbb{R} \cup S_2\mathbb{R}$. Note ainda que $S_1\mathbb{R} \cap S_2\mathbb{R} = \emptyset$, pois se $x_0 \in S_1\mathbb{R} \cap S_2\mathbb{R}$ então existem $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in S_1$ e $x_2 \in S_2$, tais que, $x_0 = x_1t_1 = x_2t_2$, mas desta forma temos $x_0(-t_1) \in S_1 \subset S$ e $x_0(-t_2) \in S_2 \subset S$. Assim pela unicidade do elemento $\tau(x_0)$, segue que $t_1 = t_2$ donde $x_1 = x_1(t_1 - t_2) = x_2$, ou seja, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, um absurdo. Afirmamos agora que $S_1\mathbb{R}$ e $S_2\mathbb{R}$ são fechados em X. Com efeito, seja $\{x_n\}$ uma sequência em $S_1\mathbb{R}$ com $x_n \to x \in X$. Como a aplicação τ é contínua, temos que, $\tau(x_n) \to \tau(x)$ e pelo Axioma da Continuidade vem que $x_n\tau(x_n) \to x\tau(x)$. Uma vez que $\{x_n\tau(x_n)\}$ é uma sequência em S_1 e S_1 é fechado em X, pois S é fechado em X, vem que $x\tau(x) \in S_1$. Desta forma $x = x\tau(x)(-\tau(x)) \in x\tau(x)\mathbb{R} \subset S_1\mathbb{R}$, portanto $S_1\mathbb{R}$ é fechado em X. De maneira análoga se mostra que $S_2\mathbb{R}$ é fechado em X. Portanto segue que $X = S_1\mathbb{R} \cup S_2\mathbb{R}$ é união disjunta de conjuntos fechados, uma contradição. Logo devemos ter que S é conexo. Suponhamos agora que S é conexo e mostremos que X é conexo. Note que para cada $x \in X$, $x\mathbb{R}$ é conexo e $x\mathbb{R} \cap S \neq \emptyset$, pois S é uma secção. Seja assim $T_x = x\mathbb{R} \cup S$. Pelas observações anteriores T_x é conexo para cada $x \in X$, pois S é conexo, e assim $X = \displaystyle\bigcup_{x \in X} T_x$ é conexo, pois $\displaystyle\bigcap_{x \in X} T_x = S \neq \emptyset$.

Mostraremos agora que se X é conexo por caminhos, então S é conexo por caminhos. Dados $a, b \in S$ existe um caminho contínuo $f : [0,1] \to X$, tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$ pois X é conexo por caminhos. Agora defina $g : [0,1] \to S$ dada por $g(t) = f(t)\tau(f(t))$. É imediato verificar que g é um caminho em S e contínuo já que $g(t) = \pi(f(t), \tau(f(t)))$. Logo g é um caminho contínuo ligando a e b em S. Segue da arbitrariedade de a e b que S é conexo por caminhos, como desejado. Suponhamos agora que S é conexo por caminhos e mostremos que X é conexo por caminhos. Para isso sejam $a, b \in X$. Temos alguns casos a analisar:

(i) Se $a, b \in S$, então existe um caminho contínuo $f : [0,1] \to S$ ligando a até b, mas assim $g = i \circ f : [0,1] \to X$, onde $i : S \to X$ é a aplicação de inclusão, é um caminho contínuo ligando a até b em X.

(ii) Caso $a \in S$ e $b \in X$, sabemos que existe $\tau(b) \in \mathbb{R}$, tal que $b\tau(b) \in S$, como S é conexo por caminhos, existe um caminho contínuo $f : [0,1] \to S$ ligando a até $b\tau(b)$. Considere agora a aplicação $g : [0, \tau(b)] \to X$, dada por $g_b(t) = bt$. Note que estamos supondo $\tau(b) > 0$, não há perda de generalidade em assumirmos essa condição, pois se $\tau(b) < 0$ basta definir $g : [0, -\tau(b)] \to X$ por $g_b(t) = b(-t)$. É imediato verificar que g_b é uma aplicação contínua. Por fim defina $h : [0,1] \to X$ pondo

$$h(x) = \begin{cases} i(f(2t)), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(\tau(b)(-2t+2)), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

onde $i : S \to X$ é a aplicação de inclusão. Desta forma h é contínua, pelo lema da colagem, e é um caminho contínuo ligando a até b em X.

(iii) Caso $a, b \in X \backslash S$, sabemos que existem $\tau(a), \tau(b) \in \mathbb{R}^+$ tais que $a\tau(a), b\tau(b) \in S$ e como S é conexo por caminhos existe um caminho $f : [0,1] \rightarrow S$ ligando $a\tau(a)$ até $b\tau(b)$ em S. Considerando as aplicações $g_a : [0, \tau(a)] \rightarrow X$ e $g_b : [0, \tau(b)] \rightarrow X$ dadas por $g_a(t) = at$ e $g_b(t) = bt$. As aplicações g_a e g_b são contínuas em X, defina assim a aplicação $h : [0,1] \rightarrow X$, dada por

$$h(t) = \begin{cases} g_a(3\tau(b)t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{3}], \\ i(f(3t-1)), & \text{se } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ g_b(\tau(b)(3t-2)), & \text{se } t \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

onde $i : S \rightarrow X$ é a aplicação de inclusão, desta forma h é um caminho contínuo que liga a até b em X. Portanto X é conexo por caminhos.

Agora assuma que X é simplesmente conexo. Mostremos que S é simplesmente conexo. Uma vez que X é simplesmente conexo, segue que S é conexo por caminhos, pois X é conexo por caminhos. Agora sejam $f, g : [0,1] \rightarrow S$ caminhos contínuos em S, tais que, $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$. Assim $i \circ f : [0,1] \rightarrow X$ e $i \circ g : [0,1] \rightarrow X$ são caminhos contínuos em X, com $i(f(0)) = i(g(0))$ e $i(f(1)) = i(g(1))$, onde $i : S \rightarrow X$ é a aplicação de inclusão. Como X é simplesmente conexo, existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$, tal que

$$H(s,0) = f(s),\ H(s,1) = g(s),\ H(0,t) = f(0) = g(0),\ H(1,t) = f(1) = g(1),$$

e desta forma $H_s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow S$, dada por $H_s(t,s) = H(t,s)\tau(H(t,s))$, é contínua e possui as mesmas propriedades de H, visto que $S = \tau^{-1}(\{0\})$. Logo, H_s é uma homotopia em S entre f e g e portanto S é simplesmente conexo. Suponhamos agora que S é simplesmente conexo e mostraremos que X é simplesmente conexo. Observe que X é conexo por caminhos, pois S é conexo por caminhos por ser simplesmente conexo. Dados caminhos contínuos $f, g : [0,1] \rightarrow X$ com $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$, temos que $f_\tau : [0,1] \rightarrow S$ e $g_\tau : [0,1] \rightarrow S$, dadas por $f_\tau(t) = f(t)\tau(f(t))$ e $g_\tau(t) = g(t)\tau(g(t))$, são funções contínuas em S, pois ambas são compostas de funções contínuas, e ainda $f_\tau(0) = g_\tau(0)$ e $f_\tau(1) = g_\tau(1)$ pela unicidade de τ. Como S é simplesmente conexo existe uma homotopia $H_s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow S$ tal que

$$H_s(s,0) = f_\tau(s),\ H_s(s,1) = g_\tau(s),\ H_s(0,t) = f_\tau(0) = g_\tau(0),\ H_s(1,t) = f_\tau(1) = g_\tau(1).$$

Assim $H_x : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ é contínua, onde $H_x = i \circ H_s$ com $i : S \rightarrow X$ a aplicação de inclusão. Defina assim H:$[0,1] \times [0,1] \rightarrow X$, dada por

$$H(s,t) = H_x(s,t)([1-t](-\tau(f(s))) + t(-\tau(g(s))).$$

É imediato verificar que H é uma aplicação contínua em X, e ainda temos:

$$\begin{aligned} H(s,0) &= H_x(s,0)([1-0](-\tau(f(s))) + 0(-\tau(g(s))) = f_\tau(s)(-\tau(f(s))) = f(s), \\ H(s,1) &= H_x(s,1)([1-1](-\tau(f(s))) + 1(-\tau(g(s))) = g_\tau(s)(-\tau(g(s))) = g(s), \\ H(0,t) &= H_x(0,t)([1-t](-\tau(f(0))) + 0(-\tau(g(0))) = f_\tau(0)(-\tau(g(0))) = f(0) = g(0), \\ H(1,t) &= H_x(1,t)([1-1](-\tau(f(1))) + 1(-\tau(g(1))) = g_\tau(1)(-\tau(g(1))) = g(1) = f(1), \end{aligned}$$

Desta forma, H é uma homotopia em X que transforma f em g. Portanto X é simplesmente conexo.

3. Seja $K \subset S$ um conjunto fechado e $t \in \mathbb{R}$ um número real arbitrário. Como S é fechado em X e K fechado em S, temos que K é fechado em X. Uma vez que a aplicação $\pi_t : X \to X$ é um homeomorfismo, segue que $\pi_t(K) = Kt$ é fechado em X.

4. Considere agora $K \subset S$ aberto em S e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo da reta aberto. Mostraremos que KI é aberto em X. Defina primeiro a função $g : X \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = -\tau(x)$. Uma vez que τ é contínua vem que g é contínua. Assim $g^{-1}(I)$ é aberto e note ainda que $g^{-1}(I) = SI$. Com efeito, dado $y \in g^{-1}(I)$, então $-\tau(y) \in I$. Entretanto observe que $y = y(\tau(y) + (-\tau(y))) \in SI$, já que $y\tau(y) \in S$, donde $g^{-1}(I) \subset SI$. Considere $y \in SI$, então $y = y_0 t_0$ com $y_0 \in S$ e $t_0 \in I$. Desta forma, $y(-t_0) = y_0 \in S$ e pela unicidade de τ vem que $\tau(y) = -t_0$, isto é, $-\tau(y) \in I$ e assim $y \in g^{-1}(I)$, logo $SI \subset g^{-1}(I)$ e a igualdade segue. Agora seja $p : X \to S$ dada por $p(x) = x\tau(x)$. É imediato verificar que p é contínua e além disso que $p^{-1}(K)$ é aberto em X, já que K é aberto em S. Por fim, afirmo que $KI = p^{-1}(K) \cap SI$, pois se $y \in KI$, então $y = y_0 t_0$ com $y_0 \in K$ e $t_0 \in I$. Assim $p(y) = y_0(t_0 + (-t_0)) = y_0 \in K$. Logo $y \in p^{-1}(K)$. É imediato que $KI \subset SI$ e assim $KI \subset p^{-1}(K) \cap SI$. Agora se $y \in p^{-1}(K) \cap SI$, então $p(y) \in K$ e além disso, $y = y_0 t_0$ com $t_0 \in I$ e $y_0 \in S$. Como $p(y) \in K$, segue que $y_0 \in K$ donde $p^{-1}(K) \cap SI \subset KI$. Portanto $KI = p^{-1}(K) \cap SI$ é aberto como intersecção de abertos de X. $\square$

A proposição acima estabelece a importante relação entre a secção S do sistema dinâmico e seu espaço de fase, entretanto é importante observar que a compacidade da secção não implica na compacidade do espaço de fase como veremos a seguir.

Exemplo 3.17. *Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$\dot{x_1} = f(x_1, x_2), \;\; \dot{x_2} = 0,$$

com f contínua e $f(x_1, x_2) > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

As trajetórias do sistema dinâmico são retas paralelas ao eixo das abscissas. Restrinja o sistema à faixa $\mathbb{R}\times[0,1]$, então $S = \{0\}\times[0,1]$ é uma secção compacta do sistema dinâmico, mas $\mathbb{R}\times[0,1]$ não é compacto.

Agora veremos que um sistema dinâmico admitir secção com aplicação τ contínua é equivalente ao sistema dinâmico ser paralelizável.

Teorema 3.18. *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável se, e somente se, existe uma secção S com τ contínua em X.*

Demonstração. Suponhamos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável. Então existem $S \subset X$ e um homeomorfismo $h : X \to S\times\mathbb{R}$ tal que $h(xt) = (x, t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e cada $x \in S$. Além disso $S\mathbb{R} = X$. Afirmamos que S é uma secção de X com aplicação τ contínua. De fato, dado $x \in X$ existem $y \in S$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $h(x) = (y, t)$, pois $X = S\mathbb{R}$. Definindo $\tau : X \to \mathbb{R}$ por $\tau(x) = -t$, segue do fato que h é contínua, que τ é contínua e como h é uma bijeção, segue a unicidade de τ para cada $x \in X$. Portanto S é uma secção com $\tau(x)$ contínua. Reciprocamente suponhamos que S é uma secção com $\tau(x)$ contínua em X. Definamos $h : X \to S \times \mathbb{R}$ por $h(x) = (x\tau(x), -\tau(x))$. É imediato verificar que h é bijetora e contínua, pelo Axioma da Continuidade e a continuidade de τ. A inversa de h é $h^{-1} : S \times \mathbb{R} \to X$ dada por $h^{-1}(x,t) = xt$ que também é contínua, novamente pelo Axioma da Continuidade. Além disso, é imediato que $S\mathbb{R} = X$. Portanto h é um homeomorfismo de X em $S \times \mathbb{R}$ e como $X = S\mathbb{R}$, segue que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável, como desejado. $\square$

Como o leitor pode verificar, a demonstração acima não usa o fato do espaço de fase ser um espaço métrico. Logo, a equivalência entre um sistema dinâmico ser paralelizável e possuir secção com aplicação τ contínua é válida mesmo quando o espaço de fase X seja um espaço topológico.

Observe que no Exemplo 3.15, o sistema dinâmico definido não é paralelizável, pois não admite secção com função τ contínua. De fato, seja S uma secção com função τ. Afirmamos que τ não é contínua em todo ponto $(x_1, 0)$ com $x_1 > 0$ já que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe n, tal que $(n, \frac{1}{n}) \notin B((x_1, 0), \varepsilon)$. Logo a trajetória γ_n em $\mathbb{R}^2 \backslash I_n$ que passa pela reta $R = \{(x, \frac{1}{n}); x \in \mathbb{R}\}$ não intercepta γ_n, e assim qualquer que seja o aberto (a,b) com $\tau((x_1, 0)) \in (a,b)$, $\tau^{-1}((a,b))$ não é aberto, uma vez que $B((x_1, 0), \varepsilon) \not\subset \tau^{-1}((a,b))$.

O Exemplo 3.15 diz que nem todo sistema dinâmico dispersivo é paralelizável. Nosso próximo objetivo é encontrar condições para que um sistema dinâmico dispersivo seja paralelizável. Para isso precisaremos estudar um conjunto que se comporta localmente como uma secção, como definiremos a seguir.

Definição 3.19. *Dado um conjunto aberto $U \subset X$ e $\tau > 0$, o conjunto $U(-\tau, \tau)$ chamado de **tubo**, se existe um subconjunto $S \subset U$ tal que para cada $x \in U$ existe um único número real $\tau(x)$, com $|\tau(x)| < \tau$ de forma que $x\tau(x) \in S$.*

*O conjunto $U(-\tau, \tau)$ neste caso será chamado de τ-**tubo** com secção S e S uma $\tau - U$ **secção** do tubo. Se para todo $\tau > 0$, $U(-\tau, \tau)$ é um τ-tubo com secção S, diremos neste caso que U é um ∞-tubo e S uma $\infty - U$ secção.*

Observação 3.20. *Note que um λ-tubo U está associado a uma aplicação $\tau : U \to (-\lambda, \lambda)$. Valem propriedades semelhantes a que vimos para uma secção S de um sistema dinâmico. Se a aplicação τ de um λ-tubo U é contínua, enfatizaremos a seguinte propriedade:*

1. *Se $K \subset S$ é uma aberto da $\tau - U$ secção do tubo U e $I_t = (-t, t)$ é um intervalo aberto com $0 < t < \tau$, então KI_t é um aberto de U.*

Com efeito, definindo as funções $p : U \to S$ e $g : U \to \mathbb{R}$ dadas por $p(x) = x\tau(x)$ e $g(x) = -\tau(x)$, respectivamente, pela continuidade de τ temos que p e g são contínuas em U. Desta forma, como feito anteriormente vemos que $KI_t = p^{-1}(K) \cap g^{-1}(I_t)$ é aberto.

A observação implica que o conjunto KI_t é um t-tubo com secção K e a continuidade da função τ foi crucial na demonstração acima. Com isso, é importante sabermos em quais condições um τ-tubo U admite função τ contínua. A próxima proposição nos conduz a uma resposta parcial a esta pergunta.

Proposição 3.21. *Seja U um τ-tubo com secção S. Se $K \subset S$ é compacto, então a função τ é contínua em KI_s para qualquer s com $0 < s < \tau$.*

Demonstração. Seja $0 < s < \tau$. Mostremos que a função $\tau(x)$ é contínua em KI_s. Para isso mostraremos que $\tau^{-1}(F)$ é fechado em KI_s, para todo conjunto fechado $F \subset I_s$. Com efeito, seja $F \subset I_s$ um conjunto fechado. Basta mostrarmos que $\tau^{-1}(F)$ é compacto que o resultado segue. Considere $\{x_n\}$ um sequência em $\tau^{-1}(F)$. Afirmamos que $\{x_n\}$ admite uma subsequência convergente a um ponto de $\tau^{-1}(F)$. De fato, a sequência $\{x_n\tau(x_n)\}$ é uma sequência em K. Já que $\tau^{-1}(F) \subset KI_s$ temos que $x_n = y_n t_n$ com $y_n \in K$ e $t_n \in I_s$, mas assim $x_n(-t_n) = y_n \in K \subset S$ e pela unicidade vemos que $\tau(x_n) = -t_n$ e $x_n\tau(x_n) \in K$. Como K é compacto existe uma subsequência $\{x_{n_k}\tau(x_{n_k})\}$ tal que $x_{n_k}\tau(x_{n_k}) \to x' \in K$. Agora como $\tau(x_{n_k}) \in F \subset I_s$ para todo k, vem que $\tau(x_{n_k})$ é uma sequência limitada de números reais, logo existe uma subsequência $\tau(x_{n_{k_j}}) \to \tau' \in \overline{F} = F$. Desta forma, $x_{n_{k_j}}(\tau(x_{n_{k_j}}) + (-\tau(x_{n_{k_j}}))) \to x'(-\tau')$. Além disso, $\tau(x'(-\tau')) = \tau' \in F$, donde segue que a sequência $\{x_{n_{k_j}}\}$ converge para um ponto de $\tau^{-1}(F)$, o que prova o afirmado. Portanto $\tau^{-1}(F)$ é compacto e, consequentemente, fechado e desta forma $\tau(x)$ é contínua em KI_s. □

Uma questão natural a ser considerada é sobre a existência dos tubos. Em quais condições um ponto x admite um tubo U contendo ele. O próximo resultado responde a essa pergunta e é conhecido como Teorema de Whitney-Bebutoff.

Teorema 3.22. *(Teorema de Whitney-Bebutoff) Se $x \in X$ não é um ponto crítico, então existe um tubo contendo x.*

Demonstração. Seja $x \in X$ fixado. Como x não é ponto crítico existe $T > 0$ tal que $d(x, xT) > 0$. Defina $\psi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(y,t) = \int_t^{t+T} d(x, y\tau) d\tau.$$

Note que,

$$\psi(y, t_1 + t_2) = \int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+T} d(x, y\tau) d\tau = \int_{t_2}^{t_2+T} d(x, y(\tau + t_1)) d\tau =$$

$$= \int_{t_2}^{t_2+T} d(x, y\tau(t_1)) d\tau = \psi(yt_1, t_2).$$

Além disso ψ é contínua em (y,t) pelo axioma da continuidade, da continuidade da função distância e da continuidade da integral de uma função contínua. Ainda, ψ admite derivada parcial em relação a t que é dada por

$$\psi_t(y,t) = d(x, y(T+t)) - d(x, yt).$$

Ainda $\psi_t(x, 0) = d(x, xT) - d(x, x) = d(x, xT) > 0$. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que $\psi_t(y, 0) > 0$ para todo $y \in B(x, \varepsilon)$. Defina $\tau_0 > 0$ de forma que $x[3(-\tau_0), 3\tau_0] \subset B(x, \varepsilon)$.

Como $\psi_t(y,t)$ é positiva em $B(x,\varepsilon)$ sempre que $y \in B(x,\varepsilon)$. Temos assim que $\psi(x,\tau_0) > \psi(x,0) > \psi(x,(-\tau_0))$. Uma vez que

$$\psi(x,\tau_0) = \psi(x\tau_0,0) > \psi(x,0) > \psi(x(-\tau_0),0) = \psi(x,(-\tau_0))$$

escolha $\zeta > 0$ de modo que, $\psi(y,0) > \psi(x,0)$ para todo $y \in B(x(-\tau_0),\zeta)$ e $\psi(y,0) < \psi(x,0)$ para todo $y \in B(x\tau_0,\zeta)$ e ainda que

$$B[x\tau_0,\zeta] \cup B[x(-\tau_0),\zeta] \subset B(x,\varepsilon).$$

Por fim, determine $\delta > 0$ tal que $B[x,\delta]\tau_0 \subset B(x\tau_0,\zeta)$, $B[x,\delta](-\tau_0) \subset B(x(-\tau_0),\zeta)$ e ainda $B[x,\delta][-3\tau_0,3\tau_0] \subset B(x,\varepsilon)$. Veja figura abaixo.

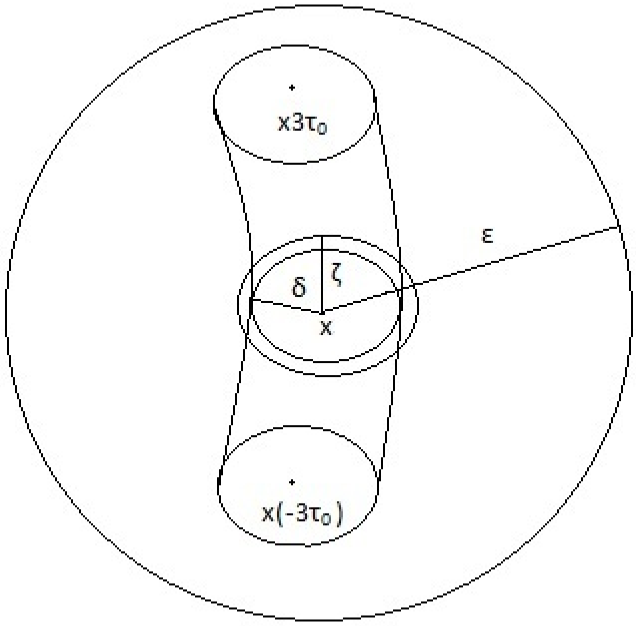

Figura 3.4: Construção do tubo em um espaço métrico.

Agora note que se $y \in B[x,\delta]$, então existe um único $\tau(y)$, $|\tau(y)| < \tau_0$, tal que, $\psi(y,\tau(y)) = \psi(x,0)$, pois $\psi(y,t) = \psi(yt,0)$ e $\psi(y,t)$ é uma função crescente de t e ainda $\psi(y,\tau_0) > \psi(x,0) > \psi(y,(-\tau_0))$ já que $B[x,\delta]\tau_0 \subset B(x\tau_0,\zeta)$ e $B[x,\delta](-\tau_0) \subset B(x(-\tau_0),\zeta)$.

Considere o aberto $U = B(x,\delta)I_{\tau_0}$, onde $I_{\tau_0} = (-\tau_0,\tau_0)$ e seja $S = \{y \in U;\ \psi(y,0) = \psi(x,0)\}$. Mostraremos que S é uma $2\tau_0 - U$ secção. Primeiramente, observe que se $y \in U$, então existe um único $\tau(y)$ com $|\tau(y)| < \tau_0$ e $y\tau(y) \in S$.

De fato, dado $y \in U$ existe t' com $|t'| < \tau_0$ tal que $y' = yt' \in B(x,\delta)$, e para $y' \in B(x,\delta)$ existe t'' com $|t''| < \tau_0$ tal que $y't'' \in S$, pela escolha de δ e o fato de que ψ ser uma função crescente em t. Assim definindo $\tau(y) = t' + t''$ temos $y\tau(y) = y(t'+t'') \in S$, com $|\tau(y)| \leq |t'| + |t''| < 2\tau_0$. Para mostrar a unicidade, suponha que existam $\tau'(y)$

e $\tau''(y)$ com $|\tau'(y)| < 2\tau_0$ e $|\tau''(y)| < 2\tau_0$ tais que $y\tau'(y), y\tau''(y) \in S$. Consideremos $y' = yt' \in B(x, \delta)$ com $|t'| \leq \tau_0$. Então

$$\psi(y', \tau'(y) - t') = \psi(y, \tau'(y)) = \psi(y\tau'(y), 0) = \psi(x, 0)$$

e

$$\psi(y', \tau''(y) - t') = \psi(y, \tau''(y)) = \psi(y\tau''(y), 0) = \psi(x, 0)$$

uma vez que $y\tau'(y), y\tau''(y) \in S$. Mas $|\tau'(y) - t'| \leq 3\tau_0$ e $|\tau''(y) - t'| \leq 3\tau_0$, como $\psi_t(y', t) > 0$ para $|t| \leq 3\tau_0$, temos que, $\tau'(y) - t' = \tau''(y) - t'$, ou seja, $\tau''(y) = \tau'(y)$, o que prova a unicidade e portanto S é uma $2\tau_0 - U$ secção, isto é, U é um $2\tau_0$-tubo contendo x como desejado.

□

Este teorema foi demonstrado primeiramente por H. Whitney no artigo [18] de 1933, e independentemente por M. Bebutoff no seu artigo [2] publicado em 1939. Ambos autores não só demonstraram o teorema acima de modo diferente, como também o abordam em aspectos distintos. A demonstração feita acima foi inspirada na versão de Bebutoff. O Teorema de Whitney-Bebutoff nos fornece como se comporta o sistema dinâmico em uma vizinhança arbitrariamente pequena dos pontos não críticos.

Uma consequência importante da demonstração anterior, que será usado no próximo resultado, é que se $x \in X$ não é um ponto crítico e $\tau_0 > 0$ é suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ de modo que o tubo $B(x, \delta)(-\tau_0, \tau_0)$ admite secção S. Além disso, note que, por construção, o ponto x pertence a secção S. Ambos os fatos serão importantes no nosso próximo resultado.

Teorema 3.23. *Seja $x \in X$ um ponto que não é crítico. Seja $\tau > 0$, restrito somente por $\tau < \frac{T}{4}$ se a aplicação movimento π_x é periódica com período fundamental T. Então existe um tubo U contendo x com $\tau - U$ secção S. Mais ainda, se X é localmente compacto, então a função τ correspondente a secção S pode ser assumida contínua em U.*

Demonstração. Dado $\tau_0 > 0$ suficientemente pequeno, pelo Teorema de Whitney-Bebutoff, existe $\delta_0 > 0$ tal que o tubo $B(x, \delta_0)(-\tau_0, \tau_0)$ admite secção local. Defina $\tau_n := \dfrac{\tau_0}{n}$ e correspondente a ele existe um $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$, de forma que o tubo

$$\Phi'_n = B(x, \delta_n)(-\tau_n, \tau_n),$$

admite secção F_n. Considere o conjunto $\Phi_n = B(x, \delta_n)(-\tau, \tau)$, onde $\tau < \frac{T}{4}$ se π_x é periódica com período fundamental T. Note que para cada $q \in \Phi_n$, existe um t_q, com $|t_q| \leq \tau + \tau_n$, tal que $qt_q \in F_n$. De fato, dado $q \in \Phi_n$, caso $q \in \Phi'_n$, então existe um único t_q, com $|t_q| < \tau_n \leq \tau + \tau_n$, de modo que $qt_q \in F_n$. Entretanto, se $q \notin \Phi'_n$, existe um t', com $|t'| < \tau - \tau_n$ tal que $qt' \in \Phi'_n$, e agora existe $t_{qt'}$, com $|t_{qt'}| < \tau_n$, de modo que $q(t + t_{qt'}) \in F_n$. Assim $|t + t_{qt'}| \leq \tau - \tau_n + \tau_n = \tau \leq \tau + \tau_n$. Mostraremos agora que podemos encontrar n_0 de forma que F_{n_0} é uma secção para o tubo Φ_{n_0}. Para isto, basta mostrar que o número t_q, para n_0 suficientemente grande, é único. Suponhamos o contrário, então para cada n pode-se obter um ponto $q'_n \in \Phi_n$ tal que

$$q'_n t'_n \in F_n,\ q'_n t''_n \in F_n,\ |t'_n| \leq 2\tau,\ |t''_n| \leq 2\tau \text{ e } t'_n \neq t''_n.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $t''_n - t'_n > 0$ e considere $t_n = t''_n - t'_n$. Denote $q_n = q'_n t'_n \in F_n$. Então

$$q'_n t''_n = q'_n(t''_n - t'_n + t'_n) = q'_n t'_n(t_n) = q_n t_n \in F_n.$$

Além disso, $|t_n| \leq |t'_n| + |t''_n| \leq 4\tau$. Por outro lado, podemos encontrar $q^*_n \in B(x, \delta_n)$ tal que $q_n = q^*_n t^*_n$, com $|t^*_n| < \tau_0$, uma vez que para cada $y \in B(x, \delta_n)$, existe um único t_y, com $|t_y| < \tau_0$ de forma que $\psi(y, t_y) = \psi(x, 0)$. Ainda temos $\psi_t(q^*_n, t) > 0$ para $|t| \leq 3\tau_0$, como feito no teorema anterior. Mas como $q^*_n t^*_n \in F_n$ e $q^*_n(t^*_n + t_n) = q_n t_n \in F_n$, temos que $\psi(q^*_n, t^*_n + t_n) = \psi(q^*_n, t^*_n)$. Assim pela injetividade de ψ na segunda variável, vem que $|t^*_n + t_n| > 3\tau_0$, e como $t_n > 0$ temos que $|t^*_n| + t_n \geq |t^*_n + t_n| > 3\tau_0$, ou seja, $t_n > 3\tau_0 - |t^*_n| = 3\tau_0 - \tau_0 = 2\tau_0$. Os pontos q_n convergem para x pelas escolhas de τ_n, δ_n e $q_n \in F_n \subset \Phi'_n = B(x, \delta_n)(-\delta_n, \delta_n)$. Ainda em virtude das desigualdades $2\tau_0 < t_n \leq 4\tau$, existe uma subsequência convergente $\{t_{n_k}\}$ com $\lim\limits_{k \to +\infty} t_{n_k} = t$ e $2\tau_0 \leq t \leq 4\tau$. Observe ainda que $q_n t_n \in F_n$ e portanto $q_n t_n \to x$. Desta forma, $q_{n_k} t_{n_k} \to xt$ quando $k \to +\infty$, e assim $xt = x$ pela unicidade do limite. Como $2\tau_0 \leq t \leq 4\tau$, vem que x é um ponto periódico com período $T \leq 4\tau$, contradizendo a hipótese, o que prova o afirmado. Agora se X é localmente compacto, podemos tomar o tubo com fecho compacto, e como a secção é fechada no tubo, segue pela Proposição 3.21 que τ é contínua. $\square$

Note que a única restrição para a construção do tubo no teorema anterior é para pontos periódicos. Entretanto, é natural se indagar se pontos não periódicos admitem, portanto, ∞-tubo. O próximo teorema nos fornece uma condição para que um ponto x admita um ∞-tubo.

Teorema 3.24. *Se $x \in X$ é um ponto errante, ou seja, $x \notin J^+(x)$ e se X é localmente compacto, então existe um tubo U contendo x, com $\infty - U$ secção S e τ contínua em U.*

Demonstração. Pelo teorema anterior existe um tubo W contendo x, com $\tau - W$ secção S e τ contínua em W. Uma vez que x é um ponto errante, afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \cap S = S^*$ é um $\infty - U$ secção do aberto $U = (B(x, \delta) \cap S)\mathbb{R} = S^*\mathbb{R}$. Aqui $B(x, \delta)$ pode ser tomado com fecho compacto pela compacidade local de X. Para isso mostraremos que existe $\delta' > 0$ tal que para cada $y \in B(x, \delta') \cap S$ a trajetória $\gamma(y)$ intercepta $B(x, \delta') \cap S$ apenas em y. De fato, caso contrário, para cada $n \geq 1$ encontraríamos $q_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$ e $|t_n| \geq \tau$ tal que $q_n t_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$. Se a sequência $\{t_n\}$ admite alguma subsequência ilimitada, digamos $t_{n_k} \to +\infty$ (ou $t_{n_k} \to -\infty$) teríamos que $q_{n_k} t_{n_k} \to x$ e $q_{n_k} \to x$, donde vem que $x \in J^+(x)$ (ou $x \in J^-(x)$), o que não pode ocorrer. Assim a sequência $\{t_n\}$ é limitada, logo existe uma subsequência $\{t_{n_k}\}$ com $t_{n_k} \to t_0$, donde $q_{n_k} t_{n_k} \to xt_0$. Ainda como $q_n t_n \to x$, pois $q_n t_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$, temos $x = xt_0$. Como $|t_n| \geq \tau > 0$, para todo n, obtemos que $t_0 > 0$ ou $t_0 < 0$, e já que $x = xt_0$ segue que x é um ponto periódico, o que é um absurdo. Portanto, existe um $\delta' > 0$ tal que $y \in B(x,\delta') \cap S$ e a trajetória $\gamma(y)$ intercepta $B(x,\delta') \cap S$ somente em y. Assim dado $z \in U$, existe um único $z' \in B(x,\delta') \cap S$ e $t' \in \mathbb{R}$ de forma que $z't' = z$, pois pelo provado acima, só pode existir um $z' \in B(x,\delta') \cap S$ tais que $\gamma(y) \cap (B(x,\delta') \cap S) = \{z'\}$. Se existissem dois números $t', t'' \in \mathbb{R}$, com $t' \neq t''$, tal que $z't' = z't''$ para $z' \in S$, então $z' = z(-t') = z(-t'')$, o que contradiz novamente o fato provado acima. Agora, como X é localmente compacto, podemos escolher $\delta'' > 0$ tal que $\overline{B(x,\delta'')}$ é compacto. Desta forma, como $B(x,\delta') \cap B(x,\delta'')$ é aberto e contém x, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(x,\delta') \cap B(x,\delta'')$. Seja então $S^* = B(x,\delta) \cap S$ e $U = S^*\mathbb{R}$. Pelo que foi mostrado acima para cada $y \in U$, existe um único $y' \in S^*$ e $t' \in \mathbb{R}$ tal que $y't' = y$. Resta mostrar então que U é um aberto. Com efeito, o conjunto $B(x,\delta) \cap S$ é aberto em S, e assim dado $0 < t < \tau$, temos que $V := (B(x,\delta) \cap S)(-t,t)$ é aberto em W pela Observação 3.20, e desta forma, é imediato verificar que $U = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} Vt$ é aberto, como união de abertos. Logo S^* é uma $\infty - U$ secção do tubo $U = (B(x,\delta) \cap S)\mathbb{R}$. A continuidade de τ em U segue do fato de que S^* é compacto em U e da Proposição 3.21. □

Agora restringiremos nosso estudos de tubos para ∞-tubos. Como sabemos em um sistema dinâmico dispersivo, todo ponto é errante e, portanto, contém um ∞-tubo. Uma classe de ∞-tubos que será importante no decorrer do capítulo será os tubos com secção compacta como definiremos agora.

Definição 3.25. *Dado um ∞-tubo U com secção S, τ contínua em U, considere conjuntos N e K, com $N \subset K \subset S$, onde N é aberto e K é compacto. Chamamos o conjunto $K\mathbb{R}$ de* ***tubo baseado compactamente*** *sobre K.*

Vimos na Proposição 3.21 que τ restrita a $K\mathbb{R}$ é contínua em $K\mathbb{R}$. Além disso, tubo baseado compactamente são invariantes, por definição.

Podemos agora provar o seguinte teorema.

Teorema 3.26. *Seja $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico completamente instável com espaço de fase localmente compacto e separável. Então existe uma cobertura enumerável $\{K_n\mathbb{R}\}$ de X, por tubos baseados compactamente $K_n\mathbb{R}$, com τ_n contínua em $K_n\mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, existe uma bola aberta B_x contendo x com fecho compacto, já que X é localmente compacto. Além disso, como x é errante, pelo teorema anterior existe um ∞-tubo U com secção S e função τ contínua em U. Agora note que $B_x \cap S \subset \overline{B_x} \cap S \subset S$, e como B_x é aberto com fecho compacto, segue que $B_x \cap S$ e $\overline{B_x} \cap S$ são aberto e compacto, respectivamente, uma vez que S é fechado em U. Assim $(\overline{B_x} \cap S)\mathbb{R}$ é um tubo baseado compactamente sobre $\overline{B_x} \cap S$. Agora como τ é contínua em U, vemos que $(B_x \cap S)\mathbb{R}$ é aberto em X, pois U é aberto em X. Assim $\bigcup_{x \in X} (B_x \cap S)\mathbb{R}$ é uma cobertura aberta do espaço métrico separável X. Logo existe uma subcobertura de X enumerável $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_{x_n} \cap S)\mathbb{R}$, uma vez que temos $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_{x_n} \cap S)\mathbb{R}$. Com mais razão segue que $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\overline{B_{x_n}} \cap S)\mathbb{R}$, e portanto X admite uma cobertura enumerável por tubos baseados compactamente com função τ_n contínua. $\square$

Exemplo 3.27. *Considere o Exemplo 1.52. Qualquer tubo baseado compactamente contendo $p \in \gamma_0$ não é fechado, pois seu fecho contém γ_{-1} e γ_1, que não estão necessariamente no tubo. Como vimos neste caso, o sistema dinâmico não é dispersivo.*

Quando o sistema dinâmico é dispersivo temos o seguinte resultado.

Lema 3.28. *Um tubo baseado compactamente sobre o compacto K em um sistema dinâmico dispersivo $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é fechado em X.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $U = K\mathbb{R}$ com $x_n \to x$. Uma vez que U é um tubo baseado compactamente com secção compacta K, para cada n existem elementos $y_n \in K$ e $t_n \in \mathbb{R}$, tais que, $x_n = y_n t_n$. Já que $y_n \in K$, y_n admite uma subsequência convergente, digamos $y_{n_k} \to y \in K$. Mas assim $x_{n_k}(-t_{n_k}) \to y$ e como $x_{n_k} \to x$, devemos ter que a sequência $\{t_{n_k}\}$ é limitada, pois caso contrário $y \in J^-(x)$. Assim $\{t_{n_k}\}$ admite uma subsequência $t_{n_{k_j}}$ convergente, digamos $t_{n_{k_j}} \to t_0 \in \mathbb{R}$. Logo pelo axioma da continuidade temos que $y_{nk_j} t_{n_{k_j}} \to y t_0$. Como $x_{n_{k_j}} \to x$, segue que $x = yt_0$, ou seja, $x \in y\mathbb{R} \subset K\mathbb{R}$, donde $x \in U$ e assim U é fechado. $\square$

O nosso próximo lema garante que a união de dois tubos baseados compactamente é um tubo baseado compactamente.

Lema 3.29. *Sejam U_1 e U_2 dois tubos baseados compactamente, com secções K_1, K_2 e funções contínuas τ_1 e τ_2, respectivamente, em um sistema dinâmico dispersivo. Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então $U = U_1 \cup U_2$ é um tubo baseado compactamente com secção $K \supset K_1$ e função contínua τ.*

Demonstração. Pelo Lema 3.28, U_1 e U_2 são fechados e invariantes. Além disso, $K_2 \cap U_1$ é compacto e não vazio. Considere $S_2 = K_2 \cap U_1$ e $S_1 = K_1 \cap U_1$. Qualquer órbita em $U_1 \cap U_2$ intercepta K_2, e portanto S_2, em exatamente um ponto, e o mesmo para K_1 e consequentemente para S_1. Assim para qualquer $x \in U_1 \cap U_2$, afirmamos que $\tau_1(x) = \tau_2(x) + \tau_1(x\tau_2(x))$. De fato, como $x\tau_1(x) \in K_1$ para todo $x \in U_1$, temos que $x\tau_2(x)(\tau_1(x\tau_2(x))) \in K_1$, e pela unicidade vemos que $x\tau_1(x) = x\tau_2(x)(\tau_1(x\tau_2(x))) = x(\tau_2(x) + \tau_1(x\tau_2(x)))$, donde segue o afirmado. A função τ_1 é contínua em S_2, pois é contínua em U_1, que é compacto, e assim, pelo Teorema de Tietze pode ser estendida para uma função contínua τ definida em U_2, com $\tau(x) \equiv \tau_1(x)$ quando $x \in S_2$. Observe agora que $\{x\tau(x);\, x \in S_2\} = S_1$, pois $\tau(x) = \tau_1(x)$ para $x \in S_2$. Note ainda que o conjunto $\{x\tau(x);\, x \in K_2\}$ é compacto, pois dado uma sequência $\{x_n\}$ em $\{x\tau(x);\, x \in K_2\}$, para cada n existe $x'_n \in K_2$ tal que $x_n = x'_n\tau(x'_n)$. Como a sequência $\{x'_n\}$ é uma sequência em um conjunto compacto, então admite subsequência convergente, digamos $x'_{n_k} \to x_0 \in K_2$. Pela continuidade de τ em K_2 temos $\tau(x'_{n_k}) \to \tau(x_0)$ e do axioma da continuidade concluímos que $x'_{n_k}\tau(x'_{n_k}) \to x_0\tau(x_0)$ com $x_0\tau(x_0) \in \{x\tau(x);\, x \in K_2\}$, o que prova que $\{x_n\}$ admite uma subsequência convergente, ou seja, $\{x\tau(x);\, x \in K_2\}$ é compacto. Definimos agora $K = K_1 \cup \{x\tau(x);\, x \in K_2\}$ e τ^* em $K\mathbb{R} = K_1\mathbb{R} \cup K_2\mathbb{R}$ dada por

$$\tau^*(x) := \begin{cases} \tau_1(x) & \text{se } x \in K_1\mathbb{R} \\ \tau_2(x) + \tau(x\tau_2(x)) & \text{se } x \in K_2\mathbb{R} \end{cases}.$$

Afirmamos que o conjunto $K\mathbb{R}$ é um tubo baseado compactamente com secção K e função contínua τ^*. Por construção, K é compacto e $K_1 \subset K$. Agora, para provar a unicidade, seja $x \in K$. Se $x \in K_1\mathbb{R}\backslash K_2\mathbb{R}$, então como $K_1\mathbb{R}$ é um tubo baseado compactamente, existem únicos $x' \in K_1$ e $t' \in \mathbb{R}$ tais que $x = x't'$. Se $x \in K_2\mathbb{R}\backslash K_1\mathbb{R}$ então existem únicos $x' \in K_2$ e $t' \in \mathbb{R}$, tais que, $x = x't'$. Já que $K_2\mathbb{R}$ é um tubo baseado compactamente, existe um único $t'' = t' + \tau(x't')$ de forma que $x = x't'\tau(x't') \in \{x\tau(x);\, x \in K_2\}$. Por fim, se $x \in K_1\mathbb{R} \cap K_2\mathbb{R}$, então como $\tau_1(x) = \tau_2(x) + \tau_1(x\tau_2(x)) = \tau_2(x) + \tau(x\tau_2(x))$, existem únicos $x' \in K$ e $t' \in \mathbb{R}$ de forma que, $x = x't'$. Assim em qualquer caso temos a unicidade. Resta mostrar a continuidade de τ^* em $K\mathbb{R}$. É imediato verificar que $\tau^*(x)$ é contínua em $K_1\mathbb{R}$ e $K_2\mathbb{R}$. Resta verificar então que para $x \in K_1\mathbb{R} \cap K_2\mathbb{R}$, temos $\tau_1(x) = \tau_2(x) + \tau(x\tau_2(x))$. Mas note que, como $x\tau_2(x) \in S_2$, temos $\tau(x\tau_2(x)) = \tau_1(x\tau_2(x))$ e como já foi provado que $\tau_1(x) = \tau_2(x) + \tau_1(x\tau_2(x))$, segue o desejado.

Portanto $K\mathbb{R}$ é um tubo baseado compactamente com $K \supset K_1$ e função contínua τ^*. $\square$

Temos todos os requisitos necessários para demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.30. *Seja $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico, onde X é um espaço métrico separável e localmente compacto. Então $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo se, e somente se, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável, mostraremos que o sistema dinâmico é dispersivo. Para isso provaremos que não há pontos críticos e nem trajetórias periódicas e que $D^+(x) = \gamma^+(x)$, e o resultado segue do Teorema 3.10. Como o sistema dinâmico é paralelizável, pelo Teorema 3.18 existe uma secção S com função τ contínua. Como já vimos, o sistema dinâmico não possui pontos críticos e nem trajetórias periódicas, confira Teorema 3.14. Resta provar que $D^+(x) = \gamma^+(x)$ para todo $x \in X$. Com efeito, já sabemos que $\gamma^+(x) \subset D^+(x)$, provaremos então que $D^+(x) \subset \gamma^+(x)$. Seja $y \in D^+(x)$, então existem sequências $\{x_n\}$ em X e $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}^+$, tais que $x_n \to x$ e $x_n t_n \to y$. Como τ é contínua, temos $\tau(x_n) \to \tau(x)$ e $\tau(x_n t_n) \to \tau(y)$. Observe que, para cada n, temos $x_n\tau(x_n) \in S$ e também $x_n t_n \tau(x_n t_n) = x_n(t_n + \tau(x_n t_n)) \in S$. Entretanto pela unicidade segue que $\tau(x_n) = t_n + \tau(x_n t_n)$, donde $t_n = \tau(x_n) - \tau(x_n t_n)$ e assim temos que $t_n \to \tau(x) - \tau(y)$. Desta forma temos $x_n t_n = x_n(\tau(x_n) - \tau(x_n t_n)) \to x(\tau(x) - \tau(y))$. Como $\{t_n\}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^+$, temos $\tau(x) - \tau(y) \in \mathbb{R}^+$, e portanto $y \in \gamma^+(x)$. Assim segue do Teorema 3.10 que o sistema dinâmico é dispersivo.

Agora suponhamos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo e mostraremos que o sistema dinâmico é paralelizável, ou seja, admite uma secção S com função τ contínua em X. Pelo teorema anterior, X admite uma cobertura enumerável por tubos $\{U'_n\}$ baseados compactamente sobre $\{K'_n\}$ com função τ'_n contínua em U'_n. Recobriremos X por uma cobertura $\{U_n\}$ com tubos baseados compactamente construídos indutivamente da seguinte forma. Defina $K_1 = K'_1$ e $U_1 = U'_1$ e função $\tau_1(x) = \tau'_1(x)$ para todo $x \in U_1$. Dados os conjuntos U'_2 e K'_2, caso $U_1 \cap U'_2 = \emptyset$, definamos $K_2 = K_1 \cup K'_2$, $U_2 = U_1 \cup U'_2$ e

$$\tau_2(x) = \begin{cases} \tau_1(x) & \text{se } x \in U_1 \\ \tau'_2(x) & \text{se } x \in U_2 \end{cases}.$$

Como $U_1 \cap U'_2 = \emptyset$, é imediato verificar que U_2 é um tubo baseado compactamente sobre K_2 com função contínua τ_2 em U_2. Temos ainda que $K_1 \subset K_2$ e $U_1 \subset U_2$. Caso $U_1 \cap U'_2 \neq \emptyset$, pelo lema anterior existe um tubo baseado compactamente U sobre K com função contínua τ e, ainda, $K_1 \subset K$ e $U_1 \subset U$. Definimos assim $K_2 = K$, $U_2 = U$ e $\tau_2(x) = \tau(x)$ para todo $x \in U$. Temos assim $U_1 \subset U_2$, $K_1 \subset K_2$ e τ_2 contínua em U_2. Definidos U_n, K_n e τ_n, dado U'_{n+1}, caso $U_n \cap U'_{n+1} = \emptyset$, definimos o elemento $U_{n+1} = U_n \cup U'_{n+1}$, $K_{n+1} = K_n \cup K'_{n+1}$ e

$$\tau_{n+1}(x) = \begin{cases} \tau_n(x) & \text{se } x \in U_n \\ \tau'_{n+1}(x) & \text{se } x \in U'_{n+1} \end{cases}.$$

Teremos assim que $K_n \subset K_{n+1}$, $U_n \subset U_{n+1}$ e τ_{n+1} contínua em U_{n+1}. Caso $U_n \cap U'_{n+1} \neq \emptyset$, usamos novamente o lema anterior para encontrar K', U' e τ' contínua em U', de forma que $U_n \subset U'$, $K_n \subset K'$. Definimos assim $K_{n+1} = K$, $U_{n+1} = U'$ e $\tau_{n+1}(x) = \tau'(x)$ para todo $x \in U_{n+1}$, que teremos $U_n \subset U_{n+1}$, $K_n \subset K_{n+1}$ e τ_{n+1} contínua em U_{n+1}. Procedendo indutivamente, obtemos uma cobertura $\{U_n\}$ de X por tubos baseados compactamente sobre K_n com função τ_n contínua em U_n, para cada n. Considerando $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, temos assim que $X = S\mathbb{R}$. Defina τ pondo para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in U_n$ $\tau(x) = \tau_n(x)$. Como $\{U_n\}$ cobre X, τ está bem definida em X. Além disso, observe que para cada $x \in X$ existe um único $\tau(x)$, tal que, $x\tau(x) \in S$. Com efeito, suponha que para um dado $x \in X$ existam $t, t' \in \mathbb{R}$, tais que $xt, xt' \in S$. Em particular, $xt, xt' \in X$, logo existem $l, n \in \mathbb{N}$ de forma que $xt \in U_n$ e $xt' \in U_l$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $l \geq n$ e assim $U_n \subset U_l$, $K_n \subset K_l$ e ainda $\tau_l|_{U_n} = \tau_n$. Logo pela unicidade de τ_l, existe um único $\tau_l(x)$ tal que $x\tau_l(x) \in K_l \subset S$, donde segue que $t = t'$. Por fim, para provarmos a continuidade de τ, seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$ um elemento básico da topologia de $\mathbb{R}$. Mostraremos que $\tau^{-1}((a,b))$ é aberto em X. Primeiramente observe que $\tau^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n^{-1}((a,b))$. De fato, dado $x \in \tau^{-1}((a,b))$, então $\tau(x) \in (a,b)$. Além disso $x \in U_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e por definição $\tau_n(x) = \tau(x)$, assim $\tau^{-1}((a,b)) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n^{-1}((a,b))$. Seja $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n^{-1}((a,b))$, então para algum n $\tau_n(x) \in (a,b)$, assim $x \in U_n$, donde $\tau(x) = \tau_n(x)$ e a igualdade segue. Ainda para cada n o conjunto $\tau_n^{-1}((a,b))$ é aberto em U_n, ou seja, existe um aberto W_n de X de forma que $\tau_n^{-1}((a,b)) = U_n \cap W_n$. Afirmamos que $\tau^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Com efeito, observe que podemos considerar os elementos W_n de forma que se tenha $W_n \subset W_{n+1}$

para todo n, pois $U_n \cap W_n = \tau_n^{-1}((a,b)) \subset \tau_{n+1}^{-1}((a,b)) = U_{n+1} \cap W_{n+1}$. Assim definindo $W_n' = W_n \cap W_{n+1}$, temos $\tau_n^{-1}((a,b)) = U_n \cap W_n'$, W_n' aberto de X e $W_n' \subset W_{n+1}$. Agora note que dado $x \in \tau^{-1}((a,b))$ temos $x \in \tau_n^{-1}((a,b))$ para algum n e assim $x \in W_n$. Seja agora $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$, então temos $x \in W_n$ para algum n. Além disso como $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ existe k tal que $x \in U_k$. Logo $x \in U_k \cap W_n$. Se $k \leq n$, então $U_k \subset U_n$ donde $x \in U_n \cap W_n = \tau_n^{-1}((a,b))$. Caso $k > n$, como $W_n \subset W_k$, temos $x \in U_k \cap W_k = \tau_k^{-1}((a,b))$. Em qualquer caso, temos $x \in \tau^{-1}((a,b))$, já que $\tau^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n^{-1}((a,b))$. Portanto $\tau^{-1}((a,b))$ é aberto, como união de abertos, donde segue que τ é contínua e assim o sistema dinâmico admite secção com função τ contínua, ou seja, o sistema dinâmico é paralelizável. $\square$

Capítulo 4

Fibrados e Espaços de Tychonoff

Neste capítulo estudaremos sistemas dinâmicos em espaços topológicos mais gerais que espaços métricos. O nosso principal objetivo é generalizar o Teorema 3.30. Para tal feito, estudaremos o espaço das órbitas de um sistema dinâmico e definiremos a propriedade de regularidade em um sistema dinâmico. Obteremos uma generalização do Teorema de Whitney-Bebutoff em espaços de Tychonoff e com isso, veremos que um sistema dinâmico em um espaço de Tychonoff é paralelizável se, e somente se, é completamente instável e o espaço das órbitas é paracompacto. Desta forma veremos que em um espaço métrico localmente separável, um sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, é completamente instável e possui a propriedade de regularidade, e com isso obteremos uma versão mais fraca do Teorema 3.30. Começaremos estudando alguns conceitos topológicos que serão úteis para demonstrarmos os resultados citados acima.

4.1 Conceitos Topológicos

Esta secção tem como objetivo fornecer alguns resultados e conceitos topológicos que serão úteis no restante do capítulo. Começaremos estudando redes em espaços topológicos. O conceito de rede tem o objetivo de generalizar sequências para espaços topológicos que não tem base enumerável. Veremos que as redes possuem propriedades similares às sequências. Estudaremos também a estrutura admissível de um espaço de Tychonoff e veremos que tal estrutura se assemelha à métrica de um espaço topológico. Depois estudaremos a teoria de fibrados e fibrados principais, ambos conceitos serão usados fortemente ao longo do capítulo. Alguns resultados sobre redes estudados aqui podem ser encontrados em [21]. Para mais detalhes sobre a estrutura admissível de um espaço topológico o leitor pode consultar [1] e [16]. A teoria de fibrados pode ser encontrada em [10] e [15], entretanto os detalhes estudados aqui são baseados em [1] e [16]. Por fim, os dois últimos resultados dessa secção pode ser encontrado em [7].

Para estudarmos redes precisaremos antes do conceito de conjunto dirigido.

Definição 4.1. *Seja Γ um conjunto e $\prec$ uma pré-ordem em Γ. Diremos que um conjunto Γ é um* ***conjunto dirigido*** *se para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$ existir $\lambda \in \Gamma$ tal que $\lambda_1 \prec \lambda$ e $\lambda_2 \prec \lambda$. Uma pré-ordem $\prec$ em Γ que satisfaça as condições acima será chamada de* ***direção****.*

Agora podemos definir uma rede em espaços topológicos.

Definição 4.2. *Seja X um espaço topológico e Γ um conjunto dirigido. Uma* ***rede*** *em X é uma aplicação $x : \Gamma \to X$.*

Dada uma rede $x : \Gamma \to X$ em um espaço topológico X, denotaremos a rede por $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$.

Definição 4.3. *Dada uma rede $x : \Gamma \to X$, uma* ***sub-rede*** *de x é uma rede $x \circ \phi : \Sigma \to X$ definida em um conjunto dirigido Σ com $\phi : \Sigma \to \Gamma$ uma aplicação contínua e cofinal, ou seja, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Dados $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ com $\sigma_1 \prec \sigma_2$, tem-se $\phi(\sigma_1) \prec \phi(\sigma_2)$, ou seja, ϕ é crescente.*
2. *Para todo $\lambda \in \Gamma$, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\lambda \prec \phi(\sigma)$, isto é, ϕ é cofinal.*

Definiremos agora o que é uma rede convergente. Como o leitor pode observar tal definição é semelhante à definição de convergência de sequências.

Definição 4.4. *Uma rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ é* ***convergente*** *se existe um ponto $x \in X$, tal que, para toda vizinhança U de x existe um $\lambda_0 \in \Gamma$ de forma que, para todo $\lambda \in \Gamma$, com $\lambda_0 \prec \lambda$ tem-se $x_\lambda \in U$. Neste caso, o ponto x será chamado de limite da rede $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ e quando uma rede converge a um ponto x, escreveremos $x_\lambda \to x$.*

Observe que se uma rede converge a um ponto x, então toda sub-rede também converge a x. É natural se indagarmos se uma rede convergente converge para um único ponto. Veremos agora que uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça é que o espaço topológico seja Hausdorff.

Teorema 4.5. *As seguintes condições para um espaço topológico X são equivalentes.*

1. *X é Hausdorff.*
2. *Toda rede convergente em X converge a um único ponto.*

Demonstração. Veja Teorema 13.7 em [21]. □

Além do resultados acima, uma rede convergente se relaciona com uma função contínua da seguinte forma.

Teorema 4.6. *Sejam X e Y um espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para toda rede $x_\lambda \to x$ tivermos que $f(x_\lambda) \to f(x)$.*

Demonstração. Confira o Teorema 11.8 em [21]. □

Com o conceito de rede, podemos determinar a compacidade dos subconjuntos de um espaço topológico, como garante o próximo teorema.

Teorema 4.7. *Um conjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, toda rede em K admite uma sub-rede convergente a um ponto de K.*

Demonstração. Confira os teoremas 11.4 e 17.4 de [21]. $\square$

Para provarmos uma versão do Teorema 3.24 em espaços de Tychonoff estudaremos a estrutura admissível dos espaços de Tychonoff. Foi demonstrado em [14] que todo espaço de Tychonoff admite uma família admissível de coberturas abertas admissível. Uma família admissível de coberturas abertas é uma estrutura de um espaço topológico que tem um papel semelhante às bolas abertas em espaços métricos. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [16].

Consideremos primeiramente um espaço topológico X e duas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de X. Diremos que $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. Escreveremos $\mathcal{V} \preceq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ para indicar que para quaisquer $V, V' \in \mathcal{V}$ com $V \cap V' \neq \emptyset$ existe $U \in \mathcal{U}$, tal que, $V \cup V' \subset U$.

Munidos das notações acima, a relação $\preceq$ é uma relação de pré-ordem no conjunto de coberturas abertas de X. Dado um conjunto não vazio $C \subset X$, definimos

$$[\mathcal{U}, C] = \{U \in \mathcal{U};\ C \cap U \neq \emptyset\}.$$

Antes de definirmos um espaço admissível, precisaremos das seguintes definições.

Definição 4.8. *Sejam V um aberto não vazio de X e K um compacto de X contido em V. Diremos que uma cobertura $\mathcal{U}$ é K-**subordinada** a V se todo elemento de $\mathcal{U}$ que intercepta K está contido em V, em outras palavras, se $U \in [\mathcal{U}, K]$ então $U \subset V$.*

Definição 4.9. *Uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X é dita **admissível** se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \preceq \frac{1}{2}\mathcal{U}$.*
2. *Dado um aberto V de X e um compacto K contido em V, então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ de forma que $\mathcal{U}$ é K-subordinada a V.*
3. *Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe um $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ de forma que $\mathcal{W} \preceq \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \preceq \mathcal{V}$.*

Definição 4.10. *Diremos que um espaço topológico X é **admissível** se possui uma família de coberturas abertas admissível.*

Um importante conjunto do espaço admissível que exerce uma função semelhante às bolas abertas em espaços métricos são as $\mathcal{U}$-vizinhanças como definiremos agora.

Definição 4.11. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta do espaço topológico X e C um subconjunto não vazio. Chamaremos de $\mathcal{U}$-**vizinhança** de C o conjunto*

$$B(C,\mathcal{U}) = \{y \in X;\ \textit{existem } x \in C \textit{ e } U \in \mathcal{U} \textit{ tais que } x, y \in U\} = \bigcup_{U \in [\mathcal{U}, C]} U.$$

É imediato verificar que $B(C,\mathcal{U})$ é uma vizinhança aberta de C, para todo $C \subset X$. Por conveniência, para $x \in X$ denotaremos o conjunto $B(\{x\},\mathcal{U})$ simplesmente por $B(x,\mathcal{U})$.

Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível do espaço topológico X. Dado um aberto $A \subset X$ o conjunto $B(A,\mathcal{U})$ é uma vizinhança aberta de A para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Logo a família $\mathcal{O}$ gera uma topologia em X que é mais fina que a topologia de X considerada inicialmente. Veremos que essa topologia na verdade coincide com a topologia do espaço X.

Teorema 4.12. *Seja (X,τ) um espaço topológico admissível com família admissível $\mathcal{O}$. A coleção das $\mathcal{U}$ vizinhanças $B(x,\mathcal{U})$, com $x \in X$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, é uma base para uma topologia em X. Além disso, essa topologia coincide com a topologia τ de X.*

Demonstração. Veja Teorema 1 na página 5 em [16]. □

O teorema acima nos permite trabalhar com as $\mathcal{U}$-vizinhanças ao invés de trabalharmos com os abertos de X e esse fato será importante para construirmos redes convergentes no espaço topológico. Quando um espaço topológico X é admissível com família admissível $\mathcal{O}$, temos $x_\lambda \to x$ se, e somente se, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $\lambda_0 \in \Gamma$ de forma que, se $\lambda_0 \prec \lambda$ então $x_\lambda \in B(x,\mathcal{U})$. Note ainda que a família admissível $\mathcal{O}$ é um conjunto dirigido com ordem $\preccurlyeq$ definida por

$$\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V} \text{ se, e somente se, } \mathcal{V} \preceq \mathcal{U} \text{ para todos } \mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}.$$

Quando nos for conveniente, trabalharemos com redes no conjunto dirigido $\mathcal{O}$. Sempre que consideramos redes no conjunto dirigido $\mathcal{O}$ teremos o seguinte resultado.

Teorema 4.13. *Dado $x \in M$, se para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tivermos que $x_\mathcal{V} \in B(x,\mathcal{V})$, então $x_\mathcal{V} \to x$.*

Demonstração. Veja Lema 2 em [16]. □

Agora estudaremos um pouco da teoria de fibrados. O conceito de fibrado nos será útil nos resultados que obteremos na Secção 4.3 e Secção 4.4, veremos que fibrados, fibrados principais e sistemas dinâmicos têm uma forte relação entre si. Começaremos definindo fibrado.

Definição 4.14. *Um **fibrado** é uma tripla (X,p,B), onde X e B são espaços topológicos e $p : X \to B$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva. O conjunto X é chamado **espaço total**, B será denominado de **espaço base** e a aplicação p de **projeção**. Para cada $b \in B$, o conjunto $p^{-1}(b)$ é chamado de **fibra** do fibrado sobre $b \in B$.*

Exemplo 4.15. *Dado um sistema dinâmico $(X,\mathbb{R},\pi)$, a tripla $(X,e,X/C)$ é um fibrado, como garante o Lema 4.43.*

O exemplo acima demonstra que todo sistema dinâmico $(X,\mathbb{R},\pi)$ está associado a um fibrado, com espaço total X e o espaço das órbitas sendo o espaço base.

Exemplo 4.16. *Dados X e Y espaços topológicos. A tripla $(X\times Y, \pi_1, X)$, onde π_1é a projeção na primeira coordenada, é um fibrado já que a aplicação π_1 é contínua e sobrejetiva.*

A próxima definição nos diz quando dois fibrados são isomorfos.

Definição 4.17. *Dizemos que os fibrados (X, p, B) e (X', p', B') são* ***isomorfos*** *se existem homeomorfismos $\Phi : X\to X'$ e $\Psi : B\to B'$ entre os espaços bases e totais, respectivamente, de modo que o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{\Psi} & B' \end{array}$$

Em geral a aplicação projeção p não admite inversa, entretanto quando admite inversa à esquerda chamamos a inversa de p de secção transversal.

Definição 4.18. *Dado um fibrado (X, p, B), uma* ***secção transversal*** *para o fibrado é uma aplicação contínua $s : B\to X$ tal que $p \circ s \equiv Id_B$. Em outras palavras, uma secção transversal é uma aplicação contínua de forma que $s(b) \in p^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.*

Precisaremos do conceito de fibrados principais. Um fibrado principal é um fibrado munido de uma ação de um grupo topológico que é contínua, livre e as fibras são isomorfas às órbitas da ação. Começaremos primeiro definindo o que é uma ação de um grupo topológico, mas antes precisamos da definição.

Definição 4.19. *Um* ***grupo topológico*** *G é um espaço topológico munido da estrutura de grupo de forma que a operação $(s, t)\to st^{-1}$ é contínua.*

Uma consequência da definição acima é que em um grupo topológico, a aplicação definida em $G\times G$ a G dada por $(s, t)\to st$ e a aplicação definida de G em G dada por $s\to s^{-1}$ são contínuas.

Definição 4.20. *Uma* ***ação*** *de um grupo topológico G em um espaço topológico X é uma aplicação $\mu : X\times G\to X$ que satisfaz as seguintes condições:*

$$\mu(x, e) = x \text{ para todo } x \in X,$$

$$\mu(\mu(x, s_1), s_2) = \mu(x, s_1 s_2),$$

onde e denota o elemento neutro do grupo topológico G.

Por conveniência denotaremos o elemento $\mu(x, s)$ por xs. Dado $x \in X$, o conjunto xG é chamado de **órbita** de x. Quando a aplicação μ é contínua diremos que a ação é contínua em X. Neste caso diremos que X é um G-**espaço** para indicar que a ação em X é contínua. Uma classe importante de aplicações entre G-espaços que estudaremos são as aplicações equivariantes.

Definição 4.21. *Dados dois G-espaços X e Y, diremos que uma função* $f : X \to Y$ *é* ***equivariante*** *quando* $f(xs) = f(x)s$*, para todo* $x \in X$ *e* $s \in G$*.*

Exemplo 4.22. *Dado um sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$*, o espaço de fase X pode ser visto de forma natural como um* $\mathbb{R}$*-espaço onde a ação é dada pela aplicação de fase* $\pi(x,t) = xt$*. É imediato do Axioma da Identidade, Axioma de Grupos e o Axioma da Continuidade que* π *é uma ação do grupo topológico* $\mathbb{R}$ *em X.*

Agora definiremos uma ação livre.

Definição 4.23. *Uma ação de um grupo topológico G em um espaço topológico X é* ***livre*** *sempre que* $xs = x$ *implicar que* $s = e$ *para todo* $x \in X$*.*

Exemplo 4.24. *É imediato verificar que a ação* π *do sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é livre se, e somente se, não há trajetórias periódicas ou pontos críticos.*

Como vimos no Teorema 3.14, quando a ação em um sistema dinâmico é livre o sistema dinâmico admite uma secção. Logo, a ação de um sistema dinâmico é livre se, e somente se, o sistema dinâmico admite secção.

Podemos agora definir fibrados principais e isomorfismo entre fibrados principais.

Definição 4.25. *Um fibrado* (X, p, B) *é* ***principal*** *quando X é um G-espaço com ação livre em X de modo que as fibras* $p^{-1}(b)$ *sejam isomorfas às órbitas da ação de G.*

Definição 4.26. *Dizemos que os G-fibrados principais* (X, p, B) *e* (X', p', B') *são* ***isomorfos*** *se os fibrados* (X, p, B) *e* (X', p', B') *são isomorfos e o homeomorfismo entre os espaços bases* $\Phi : X \to X'$ *é equivariante, isto é,* $\Phi(xs) = \Phi(x)s$*.*

Uma classe de fibrados que possui uma forte relação com sistemas dinâmicos paralelizáveis são os fibrados principais triviais, como veremos agora.

Exemplo 4.27. *Sejam X um espaço topológico, G um grupo topológico e* $\pi_1 : X \times G \to X$ *a projeção na primeira coordenada. Podemos definir no produto* $X \times G$ *uma ação por G pondo para cada* $(x,t) \in X \times G$*,* $(x,t)s = (x,ts)$ *para todo* $s \in G$*. É imediato verificar que a ação é contínua e livre, pois se* $(x,ts) = (x,t)$ *então* $ts = t$*, donde* $s = e$*. Além disso observe que* $\pi_1^{-1}(x) = (x,e)G \cong G$*. Dessa forma o fibrado* $(X \times G, \pi_1, X)$ *é principal. O fibrado nesse exemplo é denominado de* ***G-fibrado principal trivial****.*

O exemplo acima nos motiva a seguinte definição.

Definição 4.28. *Um G-fibrado principal* (X, p, B) *é dito* ***G-fibrado principal trivial****, ou simplesmente* ***G-fibrado trivial****, se é isomorfo a um G-fibrado principal trivial.*

Um importante teorema relativo à fibrados principais que nos será útil é o seguinte resultado.

Teorema 4.29. *As seguintes afirmações a respeito de um G-fibrado principal* (X, p, B) *são equivalentes:*

1. *O fibrado admite secção transversal.*

2. *O fibrado é trivial.*

Demonstração. Veja Corolário 8.3 em [10] na página 49. □

Uma outra classe de fibrados principais que também estudaremos são os fibrados principais localmente triviais.

Definição 4.30. *Um G-fibrado principal (X, p, B) é **localmente trivial** se para cada ponto $b \in B$ existe um aberto U_i contendo b e um homeomorfismo $\Psi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ na seguinte forma:*

$$\Psi_i(x) = (p(x), \phi_i(x))$$

com $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to G$ uma aplicação equivariante, ou seja, $\phi_i(xt) = \phi_i(x)t$ para todo $x \in p^{-1}(U_i)$ e $t \in G$.

Nosso próximo exemplo mostra que todo fibrado principal trivial é localmente trivial.

Exemplo 4.31. *Considere o G-fibrado principal trivial $(X \times G, \pi_1, X)$ dado no Exemplo 4.27. Como π_1 é sobrejetiva temos $\pi_1^{-1}(X) = X \times G$, logo para cada $x \in X$ escolha o aberto X e o seguinte homeomorfismo $\Psi = id_{X \times G} : \pi_1^{-1}(X) = X \times \to X \times G$ dada por $\Psi(x, t) = (\pi_1(x, t), \pi_2(x, t)$. Como a aplicação π_2 é contínua e equivariante, segue que o G-fibrado principal trivial é localmente trivial.*

Nos será útil saber quando podemos estender uma secção transversal definida em um subconjunto do espaço base para uma secção transversal definida em todo espaço base do fibrado. Antes de apresentarmos esse resultado precisaremos da seguinte definição.

Definição 4.32. *Um conjunto Y é denominado **sólido** se para todo espaço normal X, conjunto fechado $A \subset X$ e aplicação contínua $f : A \to Y$, existe uma aplicação contínua $f' : X \to Y$ tal que $f'|_A = f$.*

Para uma versão do lema abaixo em espaço normal e paracompacto o leitor pode consultar [9].

Lema 4.33. *Seja X um espaço topológico normal e Lindelöf. Considere um fibrado sobre X com fibra Y que é sólida. Seja f uma secção transversal do fibrado definida em um conjunto fechado A de X. Então f pode ser estendida para uma secção transversal definida em todo X.*

Demonstração. Confira [15], página 55. □

Lembremos que um conjunto regular e Lindelöf é paracompacto. O nosso próximo objetivo é enfraquecer essa condição.

Proposição 4.34. *Um conjunto regular localmente Lindelöf é paracompacto se, e somente se, é a união disjunta de conjuntos abertos, regulares e Lindelöf.*

Demonstração. Assuma que X é regular, localmente Lindelöf e paracompacto. Mostraremos que X é a união disjunta de conjuntos abertos, regulares e Lindelöf. Para cada $x \in X$, seja V_x a vizinhança aberta e Lindelöf de x, que existe pois X é localmente Lindelöf. Considere $\mathcal{U} = \{V_x;\, x \in X\}$ uma cobertura aberta de X por conjuntos abertos e Lindelöf. Uma vez que X é paracompacto existe uma subcobertura $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ que é localmente finita. Defina agora em X a seguinte relação: dados $x, y \in X$ diremos que $x \simeq y$ se, e somente se, existem $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n} \in \mathcal{U}'$ tais que $x \in V_{\alpha_1}, y \in V_{\alpha_n}$ e $V_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Afirmamos que a relação $\simeq$ é de equivalência. De fato, uma vez que $\mathcal{U}'$ cobre X, para cada $x \in X$ existe V_{α_1} tal que $x \in V_{\alpha_1}$ donde vem que $x \simeq x$. Agora suponha que dados $x, y \in X$ tenhamos $x \simeq y$. Então existem $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n} \in \mathcal{U}'$ tais que $x \in V_{\alpha_1}, y \in V_{\alpha_n}$ e $V_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Mas assim temos que $V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_n} \in \mathcal{U}'$ são tais que $y \in V_{\beta_1}, x \in V_{\beta_n}$ e $V_{\beta_i} \cap V_{\beta_{i+1}} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$, onde $\beta_{j+1} = \alpha_{n-j}$ com $j = 0, \ldots, n-1$, logo $y \simeq x$. Por fim, dados $x, y, z \in X$ tais que $x \simeq y$ e $y \simeq z$, temos que existem $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}, V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_l} \in \mathcal{U}'$ tais que $x \in V_{\alpha_1}, y \in V_{\alpha_n}, y \in V_{\beta_1}, z \in V_{\beta_l}$ e ainda $V_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$, $V_{\beta_j} \cap V_{\beta_{j+1}} \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \ldots, l-1$. Desta forma, definimos $V_{\delta_1} = V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\delta_n} = V_{\alpha_n}, V_{\delta_{n+1}} = V_{\beta_1}, \ldots, V_{\delta_{n+l}} = V_{\beta_l}$. Visto que $y \in V_{\alpha_n} \cap V_{\beta_1}$, temos $x \simeq z$ e portanto $\simeq$ é uma relação de equivalência. Assim X é a união disjunta das classes de equivalência dadas pela relação anterior. Note que dado $a \in X$, a classe de equivalência C_a do elemento a é

$$C_a = \{x \in X;\, x \simeq a\} =$$

$$= \{x \in X;\, \exists m\, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n} \in \mathcal{U}', a \in V_{\alpha_1}, \ldots, x \in V_{\alpha_n} \text{ e } V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset \text{ para } i = 1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{n(a)} V_i.$$

Desta forma C_a é aberto e Lindelöf como união de conjuntos abertos e Lindelöf. Além disso como X é regular, temos que C_a é regular donde segue o desejado. Reciprocamente, se $X = \dot{\bigcup_{\lambda \in \Lambda}} U_\lambda$ é união disjunta de conjuntos abertos, Lindelöf e regulares, queremos mostrar que X é paracompacto. Para isso, seja $\mathcal{U} = \{V_\gamma;\, \gamma \in \Gamma\}$ uma cobertura aberta de X. Então para cada $\lambda \in \Lambda$, temos que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma \cap U_\lambda$ cobre U_λ. Uma vez que U_λ é paracompacto, por ser regular e Lindelöf, existe uma subcobertura $\bigcup_{\gamma_\lambda \in \Gamma_\lambda} V_{\gamma_\lambda} \cap U_\lambda$ que é localmente finita. Seja $\mathcal{U}' = \{V_{\gamma_\lambda} \cap U_\lambda; \gamma_\lambda \in \Gamma_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}$. Afirmamos que $\mathcal{U}'$ é uma cobertura localmente finita de X. Com efeito, dado $x \in X$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\lambda_0}$, mas assim existe uma quantidade finita de índices $\gamma^1_{\lambda_0}, \ldots, \gamma^n_{\lambda_0} \in \Gamma_{\lambda_0}$ de forma que $V_{\gamma^i_{\lambda_0}} \cap U_{\lambda_0} \neq \emptyset$, donde segue o afirmado. Portanto X é paracompacto como desejado. $\square$

Uma consequência do resultado acima é o seguinte fato.

Corolário 4.35. *Seja $p : X \to Y$ a projeção de um fibrado e assuma que X é paracompacto, localmente Lindelöf, Y regular e a fibra F conexa. Então Y é paracompacto.*

Demonstração. Pelo resultado anterior X é a união disjunta de conjuntos abertos, Lindelöf e regulares. Uma vez que a fibra F é conexa e $p : X \to Y$ é uma aplicação aberta e sobrejetora, Y pode ser decomposta em uma união disjunta de conjuntos abertos e Lindelöf. Como Y é regular, cada conjunto na união é regular. Desta forma, Y pode ser decomposto em conjuntos abertos, Lindelöf e regulares. Pela proposição anterior, segue que Y é paracompacto. □

4.2 Secção Local em Espaços de Tychonoff

Nesta secção estudaremos o conceito de secção local em Espaços de Tychonoff. Uma secção local é conjunto que se comporta como uma secção, entretanto para tempo arbitrariamente pequeno. O nosso principal objetivo é provar a recíproca do Teorema 4.51, ou seja, para todo ponto errante x existe um tubo infinito U contendo x. Além disso obteremos uma versão do Teorema de Whitney-Bebutoff para espaços de Tychonoff. Boa parte do trabalho feito aqui pode ser encontrado em [6].

Ao longo de toda esta secção, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico definido em um espaço de fase X que é um espaço de Tychonoff.

Começaremos com a definição de secção local.

Definição 4.36. *Um conjunto não vazio $Q \subset X$ é chamado de **secção local** se existe um $\varepsilon > 0$ tal que*

$$(Q\theta) \cap (Q\theta') = \emptyset \quad \textit{sempre que} \quad \frac{-\varepsilon}{2} \leq \theta < \theta' \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

*Qualquer ε como acima será denominado uma t-**extensão** de Q. Se ε pode ser tomado arbitrariamente grande, diremos que Q tem uma t-**extensão do** ∞.*

Observe que todo ponto que não é crítico é uma secção, visto que, neste caso existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \neq xt$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ou seja, $\{x\}$ é uma secção local de t-extensão ε. Além disso, segue da definição acima que todo subconjunto de uma secção Q é também uma secção.

A respeito de uma secção local valem as seguintes equivalências.

Proposição 4.37. *Um conjunto não vazio $Q \subset X$ é uma secção local com t-extensão $\varepsilon > 0$ se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$(Q\theta) \cap (Q\theta') = \emptyset$ sempre que $\frac{-\varepsilon}{2} \leq \theta < \theta' \leq \frac{\varepsilon}{2}$.*

2. *$Q \cap (Q\theta) = \emptyset$ sempre que $0 < |\theta| \leq \varepsilon$.*

3. *Denotando* $I = [\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$, *a aplicação* $\pi_Q = \pi|_{Q\times I} : Q\times I \to QI$ *dada por* $\pi_Q(x,t) = xt$ *é um homeomorfismo, onde* π *é a aplicação de fase.*

Demonstração. Por definição Q é uma secção local se, e somente se, (1) é satisfeito. Além disso, observe que se $x \in Q\theta \cap Q\theta'$ com $\frac{-\varepsilon}{2} \leq \theta < \theta' \leq \frac{\varepsilon}{2}$, tem-se $x = q\theta = q'\theta'$ assim $x(-\theta') = q(\theta - \theta') = q' \in Q$, ou seja, $x \in Q\theta \cap Q\theta'$ se, e só se, $x(-\theta') \in Q \cap Q\theta''$ onde $0 < |\theta''| = |\theta - \theta'| \leq \varepsilon$. Assim cada elemento de $Q\theta \cap Q\theta'$ corresponde a um elemento de $Q \cap Q\theta''$. Logo (1) equivale a (2). Mostraremos agora que (1) é equivalente a (3). Assuma primeiramente que existe um homeomorfismo $\pi_Q : Q\times I \to QI$. Queremos mostrar que vale (1). Dados $\frac{-\varepsilon}{2} \leq \theta < \theta' \leq \frac{\varepsilon}{2}$, temos então

$$Q\theta \cap Q\theta' = \pi_Q(Q\times\{\theta\}) \cap \pi_Q(Q\times\{\theta'\}) = \pi_Q(Q\times\{\theta\} \cap Q\times\{\theta'\}) = \emptyset,$$

uma vez que π_Q é bijetora, e desta forma (1) é satisfeito. Reciprocamente, para todo $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ com $\frac{-\varepsilon}{2} \leq \theta < \theta' \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tivermos que $(Q\theta) \cap (Q\theta') = \emptyset$, então para cada $x, x' \in Q$ e $\theta, \theta' \in I$, com $x\theta = x'\theta'$ temos que $x = x'(\theta' - \theta)$, assim por hipótese $\theta = \theta'$, donde $x = x'$. Logo a aplicação $\pi_Q : Q\times I \to QI$ é uma bijeção. Mostraremos agora que π_Q é um homeomorfismo. Para isso note que π_Q é contínua, pois π é contínua. Agora para mostrarmos que π_Q^{-1} é contínua, considere $\{x_n\} \subset Q$, $x \in Q$, $\{\theta_n\} \subset I$ e $\theta \in I$ tais que $x_n\theta_n \to x\theta$. Como I é compacto, podemos assumir que $\theta_n \to \theta' \in I$, mas assim

$$x_n = x_n(\theta_n - \theta_n) = (x\theta_n)(-\theta_n) \to (x\theta)(-\theta') = x(\theta - \theta').$$

Note que $|\theta - \theta'| \leq |\theta| + |\theta'| \leq \varepsilon$. Segue do fato de que Q é fechado que $x(\theta - \theta') \in Q$, donde $\theta = \theta'$ implicando que $\theta_n \to \theta$ e assim $x_n \to x$, como desejado. Portanto, π_Q é um homeomorfismo. □

Como já foi observado antes, pontos que não são críticos são secções locais. Assim uma questão natural a se perguntar é se todo ponto x que não é crítico admite uma secção local que contenha $\{x\}$ como subconjunto próprio, isto é, se existe uma generalização do Teorema de Whitney-Bebutoff para espaços que não são métricos. Veremos a resposta no próximo teorema.

Teorema 4.38. *Seja* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *um sistema dinâmico e* S *uma secção compacta. Então existe uma secção fechada* S' *de* t*-extensão maior que* 0 *com* $S \subset S'$.

Demonstração. Seja S uma secção compacta e $\varepsilon > 0$ tal que 4ε é menor ou igual do que a t-extensão de S. Considere $J = [-\varepsilon, \varepsilon]$ e a função $h : S2J \to S\times 2J$, onde h é o homeomorfismo inverso de $\pi_S : S\times 2J \to S2J$, e seja $p : S\times 2J \to 2J$ a projeção na segunda coordenada. Então a aplicação $p \circ h : S2J \to 2J$ está definida em um conjunto compacto, e portanto fechado, a valores reais. Uma vez que X é Tychonoff, podemos estender a função $p \circ h$ definida em $S2J$ para todo X da seguinte forma. Considere Y a compactificação de Stone-Cech de X, que existe pois X é Tychonoff. Como $S2J$ é compacto em X, segue que $S2J$ é compacto em Y e desta forma, pelo Teorema de

Tietze, existe uma função contínua $f : Y \to 2J$ tal que $f|_{S2J} = p \circ h$. Seja $\psi : X \to 2J$ dada por $\psi = f|_X$. Assim $\psi|_{S2J} = p \circ h$, ou seja, para cada $(x, \theta) \in S \times 2J$ tem-se que $\psi \circ \pi(x, \theta) = \psi(x\theta) = p \circ h(x\theta) = p(x, \theta) = \theta$. Além disso, $\psi(x\theta)$ é uma função contínua com respeito a x e a θ. Uma vez que S é compacto, toda vizinhança de S contém uma vizinhança fechada. Logo existe uma vizinhança U de S em que podemos definir a função $\varphi : \overline{U}2J \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x\lambda) d\lambda.$$

Observe que a aplicação φ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\varphi(x\theta) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x(\lambda + \theta)) d\lambda = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \psi(x\lambda) d\lambda,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x\theta) = \frac{1}{2\varepsilon} [\psi(x(\theta + \varepsilon)) - \psi(x(\theta - \varepsilon))],$$

para todo $(x, \theta) \in \overline{U} \times J$. Em particular, para $(x, \theta) \in S \times J$ temos

$$\varphi(x\theta) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \psi(x\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \lambda d\lambda = \frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{(\theta + \varepsilon)^2}{2} - \frac{(\theta - \varepsilon)^2}{2} \right] = \theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x\theta) = 1, \quad \varphi(x) = 0.$$

Agora escolheremos uma vizinhança de S da seguinte forma. Pela continuidade da derivada de φ e o fato de que $\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x\theta) > 0$, para $(x, \theta) \in S \times J$, existe uma vizinhança V_1 de S com

$$V_1 \subset U, \ \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x\theta) > 0, \text{ para } (x, \theta) \in V_1 \times J.$$

Além disso, pela compacidade de S, existe uma vizinhança de S e $\varepsilon \geq \delta > 0$ tal que sendo $I = [-\delta, \delta]$,

$$V_2 2I \subset V_1.$$

Em particular, $I \subset J$. Usando esse valor de δ, vem que

$$\varphi(x\delta) = \delta > 0 > -\delta = \varphi(x(-\delta)) \text{ para todo } x \in V_2.$$

Desta forma, existe uma vizinhança G de S, tal que, $\overline{G} \subset V_2$ e

$$\varphi(x\delta) > 0 > \varphi(x(-\delta)) \text{ para } x \in \overline{G}.$$

Agora afirmamos que $S \subset G \subset \overline{G} \subset \overline{U}$ e ainda $\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x\theta) > 0$ para $(x, \theta) \in \overline{G} \times 3I$. Com efeito, por construção temos $S \subset G \subset \overline{G} \subset \overline{U}$ e ainda G é aberto. Agora como $\overline{G} \subset V_2$, vem que $\overline{G}2I \subset V_2 2I \subset V_1$. Assim $(\overline{G}2I)I \subset V_2 I \subset V_1 J$ e como $\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x\theta) > 0$

para $(x,\theta) \in V_1 \times J$, segue o afirmado. Seja $S' = \{x \in \overline{U};\, \varphi(x) = 0\} \cap (\overline{G}I)$. Então S' é uma secção fechada de t-extensão 2δ e $S \subset S'$. Primeiro note que $\overline{G}I$ é fechado. De fato, tomando $\{x_n\theta_n\}$ uma sequência em $\overline{G}I$ com $x_n\theta_n \to x$, queremos mostrar que $x \in GI$. Com efeito, como $\{\theta_n\}$ é uma sequência em I, existe uma subsequência $\{\theta_{n_k}\}$ com $\theta_{n_k} \to \theta' \in I$, mas assim $x_{n_k} = (x_{n_k}\theta_{n_k})(-\theta_{n_k}) \to x(-\theta')$. Uma vez que $x_{n_k} \in \overline{G}$ para cada k, x_{n_k} é convergente e $\overline{G}$ fechado, segue que $x(-\theta') \in \overline{G}$. Desta forma $x_{n_k}\theta_{n_k} \to x(-\theta')(\theta') \in \overline{G}$. Logo $\overline{G}I$ é sequencialmente compacto e, portanto, fechado. Agora como $\overline{G}$ e $\{x \in \overline{U};\, \varphi(x) = 0\}$ são fechados, segue que S' é fechado. Mostraremos agora que S' é uma secção de t-extensão 2δ. Sejam $x \in S'$ e $\theta \in 2I$ com $|\theta| > 0$. Queremos provar que $x\theta \notin S'$ e assim pela Proposição 4.37 segue o desejado. Para tal, mostraremos que $\varphi(x\theta) \neq 0$ e teremos $x\theta \notin S'$, por construção. Observe primeiramente que $x = x'\theta'$ para algum $x' \in \overline{G}$ e $\theta' \in I$, assim $x\theta = x'(\theta' + \theta)$ com $(\theta' + \theta) \in 3I$. Agora como

$$\varphi(x\theta) - \varphi(x) = \varphi(x'(\theta'_\theta)) - \varphi(x'\theta') = \int_{\theta'}^{\theta'+\theta} \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x'\lambda)d\lambda$$

e $\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(yt) > 0$ para $(y,t) \in \overline{G} \times 3I$, vem que $\varphi(x\theta) - \varphi(x) > 0$, e já que $\varphi(x) = 0$, pois $x \in S'$, segue que $\varphi(x\theta) > 0$ donde $x\theta \notin S'$, como desejado. Por fim, note que $S \subset S'$, já que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in S$ e ainda $S \subset \overline{G} \subset \overline{G}I$. Logo $S \subset S'$. □

Uma consequência importante para nosso objetivo é o seguinte fato.

Corolário 4.39. *Considere $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico e S uma secção compacta. Então existe uma secção S' de t-extensão $\varepsilon > 0$ tal que $S \subset S'$ e $S'(-\varepsilon, \varepsilon)$ é um aberto.*

Demonstração. Usaremos a notação da construção feita no teorema anterior. Entretanto, a secção S' obtida acima será denotada por S'', por conveniência. Afirmamos primeiramente que $S \subset G \subset S''(-2\delta, 2\delta)$. Já sabemos que $S \subset G$, provaremos que $G \subset S''(-\delta, \delta)$. De fato, dado $y \in G$ temos que

$$\varphi(y\delta) > 0 > \varphi(y(-\delta)) \quad \text{para } y \in \overline{G}$$

Logo para uma escolha apropriada de $\theta \in (-\delta, \delta)$, temos que $\varphi(y\theta) = 0$, pela continuidade de φ e o fato de que $(-\delta, \delta)$ é conexo. Desta forma temos que $y\theta \in \overline{G}(-\delta, \delta)$ e também $x\theta \in S''$ pela construção de S''. Assim $y = (y\theta)(-\theta) \in S''(-\delta, \delta)$. Considere agora o conjunto $S' = G \cap S''$. Segue da definição de secção local que S' é uma secção local de t-extensão $2\delta > 0$, já que $S' \subset S''$ e ainda como $S \subset G \subset S''$ vem que $S \subset S'$. Finalmente observe que $S'(-3\delta, 3\delta)$ é aberto, uma vez que

$$G(-\delta, \delta) = (G \cap S''(-\delta, \delta))(-\delta, \delta) = (G \cap S'')(-2\delta, 2\delta) = S'(-2\delta, 2\delta)$$

e como G é aberto temos $G(-\delta, \delta)$ aberto. Portanto, tomando $\varepsilon = 2\delta$, o resultado segue. □

Com os resultados acima e o conceito de espaço admissível estudados na Secção 4.1, vale que:

Lema 4.40. *Seja x um ponto errante. Então existe um tubo infinito U tal que $U = S\mathbb{R}$ e $S\mathbb{R} \cong S\times\mathbb{R}$.*

Demonstração. Primeiramente como x é um ponto errante, então $\{x\}$ é uma secção local. Logo do Corolário 4.39 existe uma secção S' de t-extensão $\delta > 0$ e $S'(-2\delta, 2\delta)$ um aberto contendo x.

Mostraremos agora que dada família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X, existe um elemento $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que, para todo elemento $y \in B(x,\mathcal{U}) \cap S'$, a trajetória $y\mathbb{R}$ intercepta $B(x,\mathcal{U}) \cap S'$ somente em um ponto.

Com efeito, suponhamos por absurdo que para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existam $y_\mathcal{V} \in B(x,\mathcal{V}) \cap S'$ e $t_\mathcal{V} \in \mathbb{R}$ não nulo, tais que $y_\mathcal{V}, y_\mathcal{V}t_\mathcal{V} \in B(x,\mathcal{V}) \cap S'$. Primeiro note que podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_\mathcal{V} > 0$, pois se $t_\mathcal{V} < 0$, então denotando $y'_\mathcal{V} = y_\mathcal{V}t_\mathcal{V}$ e $t'_\mathcal{V} = -t_\mathcal{V}$ temos que $y'_\mathcal{V}, y'_\mathcal{V}t'_\mathcal{V} \in B(x,\mathcal{V}) \cap S'$ com $t'_\mathcal{V} > 0$. Além disso, como $y_\mathcal{V}, y_\mathcal{V}t_\mathcal{V} \in S'$ e S' é uma t-extensão $2\delta > 0$, vem que $t_\mathcal{V} > 2\delta > 0$ já que $S' \cap S'\theta = \emptyset$ para $0 < \theta \leq 2\delta$. Ainda, pelo Teorema 4.13 temos que $y_\mathcal{V} \to x$ e $y_\mathcal{V}t_\mathcal{V} \to x$. Desta forma, como x é um ponto errante, ou seja, $x \notin J^+(x)$, então nem a rede $\{t_\mathcal{V}\}$ e nenhuma sub-rede de $\{t_\mathcal{V}\}$ diverge para $+\infty$. Logo a rede $\{t_\mathcal{V}\}$ está contida em um conjunto compacto $[2\delta, T]$, assim pelo Teorema 4.7 existe uma sub-rede $t_\mathcal{W} \to t_0 \in [-2\delta, T]$. Desta forma pela continuidade de π temos $y_\mathcal{W}t_\mathcal{W} \to xt_0$ e como $y_\mathcal{W}t_\mathcal{W} \to x$, segue que $x = xt_0$. Uma vez que $t_0 > 0$ então x é um ponto periódico, o que é uma contradição.

Desta forma, para cada $\theta > 0$, temos que $(B(x,\mathcal{U}) \cap S') \cap (B(x,\mathcal{U}) \cap S')\theta = \emptyset$, ou seja, $B(x,\mathcal{U}) \cap S'$ é uma secção local de t-extensão ∞. Agora como $S'(-3\delta, 3\delta)$ é aberto, temos que $S'(-3\delta, 3\delta) \cap B(x,\mathcal{U})$ é aberto. Portanto, denotando $V = S'(-3\delta, 3\delta) \cap B(x,\mathcal{U})$, temos que $(B(x,\mathcal{U}) \cap S')\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{t\in\mathbb{R}} Vt$ é aberto como união de conjuntos abertos.

Considerando $S = B(x,\mathcal{U}) \cap S'$ e $U = S\mathbb{R}$, por definição U é um tubo infinito em X contendo x e além disso, como U é uma secção local de t-extensão ∞, segue do Teorema 4.37 que $S\mathbb{R} \cong= S\times\mathbb{R}$, como desejado. □

4.3 Espaço das Órbitas e a Propriedade de Regularidade

Nesta secção estudaremos o espaço das órbitas de um sistema dinâmico e definiremos a propriedade de regularidade. Veremos que em um sistema dinâmico com espaço de fase regular, a propriedade de regularidade equivale a dizer que o espaço das órbitas é regular. Usaremos o conceito de redes, que generaliza sequências em espaços topológicos, para então definirmos o conjunto limite prolongacional positivo e negativo. Por fim veremos como a propriedade de regularidade se relaciona com os sistemas dinâmicos dispersivos. Os resultados apresentados nessa secção e na Secção 4.4 podem ser encontrados em [7]. Nesta seção, a menos que digamos o contrário, X será assumido um espaço topológico. Estudaremos primeiramente o espaço das órbitas.

Definição 4.41. *Dado um sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$*, definimos a relação "*$\prec$*"em* X *da seguinte forma: dados* $x, y \in X$*, diremos que* $x \prec y$ *se, e somente se,* $x \in \gamma(y)$*.*

A relação acima definida é uma relação de equivalência em X. De fato, é claro que $x \in \gamma(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, $x \prec x$ para todo $x \in X$, donde $\prec$ é reflexiva. Suponhamos que dados $x, y \in X$, tenhamos $x \prec y$, ou seja, $x \in \gamma(y)$. Desta forma, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = yt$, mas assim $y = x(-t)$, e portanto $y \in \gamma(x)$, isto é, $y \prec x$. Agora, dados $x, y, z \in X$ tais que $x \prec y$ e $y \prec z$ existem, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de forma que $x = yt_1$ e $y = zt_2$. Assim $x = (zt_2)t_1 = z(t_1 + t_2)$ donde $x \in \gamma(z)$, ou seja, $x \prec z$, o que prova que $\prec$ é uma relação transitiva. Desta forma, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.42. *Se* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é um sistema dinâmico, então* $\prec$ *é uma relação de equivalência em* X*.*

As classes de equivalência dadas pela relação acima são precisamente as órbitas do sistema dinâmico. O espaço quociente, ou seja, o conjuntos formado pelas órbitas do sistema dinâmico X, será denotado por X/C e será chamado de espaço das órbitas. Como sabemos uma relação de equivalência induz uma topologia no espaço quociente. Daqui em diante, assumiremos que o espaço das órbitas está munido com a topologia quociente, isto é, a topologia induzida pela aplicação $e : X \to X/C$, dada por $e(x) = \gamma(x)$. Por conveniência, denotaremos a trajetória $\gamma(x)$ por $x\mathbb{R}$.

Lema 4.43. *A aplicação* $e : X \to X/C$*, dada por* $e(x) = x\mathbb{R}$*, é contínua, aberta e sobrejetiva.*

Demonstração. Observe que e é contínua, por definição, e é imediato verificar que e é sobrejetiva. Para mostrarmos que e é aberta, dado $A \subset X$ aberto, temos que $e^{-1}(e(A)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} At$. Assim a imagem inversa de $e(A)$ é aberto em X, e portanto, $e(A)$ é aberto em X/C. Logo e é uma aplicação aberta. □

Apresentaremos agora a definição da propriedade de regularidade em um sistema dinâmico.

Definição 4.44. *Um sistema dinâmico* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *possui a* ***propriedade de regularidade*** *se para cada ponto* $x \in X$ *e vizinhança invariante* U *contendo* x*, existe uma vizinhança invariante* V *contendo* x *tal que* $x \in \overline{V} \subset U$*.*

A propriedade de regularidade está relacionada com o espaço das órbitas da seguinte forma.

Proposição 4.45. *Seja* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *um sistema dinâmico. Então:*

1. *O sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade se, e somente se, o espaço das órbitas é regular.*

2. *Se* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é paralelizável com espaço de fase regular, então o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade.*

Demonstração. Mostraremos (1). Suponhamos primeiramente que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ possui a propriedade de regularidade, provaremos que X/C é regular. Sejam $\overline{x} \in X/C$ e U' uma vizinhança invariante de $\overline{x}$ em X/C. Então $e^{-1}(U')$ é aberto de X contendo a órbita $x\mathbb{R} = e^{-1}(\overline{x})$. Note ainda que $e^{-1}(U')$ é invariante, já que dado um elemento $y \in e^{-1}(U')$, então $e(y) \in U'$, mas assim $y\mathbb{R} = \gamma(y) \subset e^{-1}(U')$, ou seja, $\gamma(e^{-1}(U')) \subset e^{-1}(U')$. Desta forma, $e^{-1}(U')$ é uma vizinhança invariante contendo x. Como o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade, existe uma vizinhança invariante V de X, tal que $x \in \overline{V} \subset e^{-1}(U')$. Logo $e(x) \in e(\overline{V}) \subset U' = e(e^{-1}(U'))$. Para concluirmos que X/C é regular, resta provar que $e(\overline{V})$ é fechado em X/C. Afirmamos que se $A \subset X$ é invariante, então $e^{-1}(e(A)) = A$. Com efeito, dado $y \in e^{-1}(e(A))$, temos $e(y) \in e(A)$, ou seja, $y\mathbb{R} \subset A$ e como A é invariante, vem que $y \in A$. Agora se $y \in A$, temos $y\mathbb{R} \subset A$, pois A é invariante, donde $e(y) \in e(A)$, isto é, $y \in e^{-1}(e(A))$, e assim segue a igualdade. Com o mostrado acima, temos que $e^{-1}(e(\overline{V})) = \overline{V}$, donde segue que $e(\overline{V})$ é fechado em X/C, pois $\overline{V}$ é fechado em X, o que conclui a prova de que X/C é regular. Reciprocamente, suponhamos que X/C é regular e considere $x \in X$ e uma vizinhança U invariante de x. Queremos mostrar que X possui a propriedade de regularidade, ou seja, existe uma vizinhança V de x invariante, tal que $x \in \overline{V} \subset U$. Como U é aberto e contém x, vemos que $e(U)$ é aberto, já que e é uma aplicação aberta, e contém $e(x) = \overline{x}$. Já que X/C é regular, existe um aberto V de X/C tal que $\overline{x} \in \overline{V} \subset e(U)$. Assim, $x \in e^{-1}(\overline{V}) \subset e^{-1}(e(U)) = U$, esta última igualdade segue do fato de que U é invariante e o mostrado acima, o que conclui a prova de que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ possui a propriedade de regularidade.

Provaremos agora (2). Suponhamos então que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável com X regular. Mostraremos que o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade. Uma vez que o sistema dinâmico é paralelizável, pelo Teorema 3.18, existe uma secção S e uma aplicação contínua $\tau : X \to \mathbb{R}$. Defina $g : X \to S$ por $g(x) = x\tau(x)$. É imediato verificar a continuidade de g. Agora considere $x \in X$ e U uma vizinhança invariante de x. Queremos mostrar que existe V aberto e invariante tal que $x \in \overline{V} \subset U$. Com efeito, podemos supor sem perda de generalidade que $x \in S$. Assim como X é regular, seja $\overline{V}$ tal que $x \in \overline{V} \subset U$. Note que $g^{-1}(\overline{V}) \neq \emptyset$, pois $x \in g^{-1}(\overline{V})$ e como $\overline{V}$ é fechado em S, temos $g^{-1}(\overline{V})$ fechado em X. Além disso $g^{-1}(\overline{V})$ é invariante, já que dado $y \in g^{-1}(\overline{V})$ e $t \in \mathbb{R}$, temos deste modo $g(y) = y\tau(y) \in \overline{V} \subset S$, mas como $g(yt) = yt(\tau(yt)) = y(t+\tau(yt)) \in S$ segue que $\tau(y) = t + \tau(yt)$, e assim $(yt)\tau(yt) \in \overline{V}$, isto é, $g(yt) \in \overline{V}$. Desta forma, $x \in g^{-1}(V) \subset g^{-1}(\overline{V}) \subset U$ e $g^{-1}(\overline{V})$ é a vizinhança desejada. $\square$

Começaremos agora a estudar os sistemas dinâmicos instáveis definidos no capítulo anterior. Para isso precisaremos definir os conjuntos limites prolongacionais. Entretanto, como o leitor percebeu, usamos sequências para definir os conjuntos limites prolongacionais. Em espaços topológicos mais gerais tais definições não fazem sentido, e por isso usaremos o conceito de rede que generaliza sequência em espaços topológicos. Com o conceito de rede, podemos formalizar essas definições.

Definição 4.46. *Definimos os conjuntos J^+ e J^- de X em $\wp(X)$, pondo para cada*

$x \in X$,

$$\begin{aligned} J^+(x) = \{y \in X; \ & \textit{existem redes } \{x_\lambda\} \textit{ em } X \textit{ e } \{t_\lambda\} \textit{ em } \mathbb{R}, \\ & \textit{com } x_\lambda \to x, t_\lambda \to +\infty \textit{ e } x_\lambda t_\lambda \to y\}, \\ J^-(x) = \{y \in X; \ & \textit{existem redes } \{x_\lambda\} \textit{ em } X \textit{ e } \{t_\lambda\} \textit{ em } \mathbb{R}, \\ & \textit{com } x_\lambda \to x, t_\lambda \to -\infty \textit{ e } x_\lambda t_\lambda \to y\}. \end{aligned}$$

Para cada $x \in X$, os conjuntos $J^+(x)$ e $J^-(x)$ são chamados, respectivamente, ***conjunto limite prolongacional positivo*** *e* ***conjunto limite prolongacional negativo****.*

A próxima observação tem o objetivo de formalizar alguns conceitos estudados no capítulo anterior para sistemas dinâmicos em espaços de Tychonoff.

Observação 4.47. (1). *Dado um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ em um espaço de Tychonoff X, um ponto $x \in X$ será dito ponto errante se $x \notin J^+(x)$.*

(2). *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ em um espaço de Tychonoff X será chamado de completamente instável se para todo $x \in X$, temos $x \notin J^+(x)$. O sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo se para todo $x \in X$ tivermos que $J^+(x) = \emptyset$.*

É imediato da definição que um sistema dinâmico dispersivo é completamente instável. A recíproca a este resultado é verdadeira quando o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade e o espaço de fase é Hausdorff, como veremos agora.

Teorema 4.48. *Seja $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico completamente instável com a propriedade de regularidade e espaço de fase Hausdorff. Então $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é dispersivo e X/C é Hausdorff. Reciprocamente, se X é localmente compacto, então dispersividade implica que o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade.*

Demonstração. Suponhamos que o sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável, possui a propriedade de regularidade e o espaço de fase é Hausdorff. Mostraremos que o sistema dinâmico é dispersivo, ou seja, $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$. Observe primeiramente que $\Lambda^+(x) = \emptyset = \Lambda^-(x)$ para todo $x \in X$ e portanto o sistema dinâmico é Poisson instável, isto é, $x \notin \Lambda^+(x)$ e $x \notin \Lambda^-(x)$ para todo $x \in X$. Com efeito, se existe $x \in X$ com $y \in \Lambda^+(x)$, então $y \in J^+(y)$ pelo Teorema 2.12, o que não pode ocorrer. Logo $\Lambda^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$. De maneira análoga mostramos que $\Lambda^-(x) = \emptyset$. Desta forma, se para algum $x \in X$ tem-se que $y \in J^+(x)$, então observe que $y \notin \gamma(x)$, pois caso contrário $x \in J^+(x)$. Ainda $\overline{\gamma^+(y)} = \gamma^+(y) \cup \Lambda^+(y) = \gamma^+(y)$. Logo $x \in X \backslash \gamma^+(y)$ é um aberto invariante e por hipótese existe uma vizinhança invariante V de x tal que $x \in \overline{V} \subset X \backslash \gamma^+(y)$. Desta maneira como $\overline{V}$ é fechado, invariante e contém x, segue que $D^+(x) \subset \overline{V}$, donde $J^+(x) \subset D^+(x) \subset \overline{V}$, isto é, $y \in \overline{V}$ o que é um absurdo! Finalmente, como X possui a propriedade de regularidade, temos que X/C é regular e portanto X/C é Hausdorff. Reciprocamente, suponhamos X localmente compacto, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ dispersivo. Mostremos que o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade, isto é, para cada $x \in X$ e uma vizinhança invariante U de x, existe uma vizinhança invariante V tal que $x \in \overline{V} \subset U$. Sejam $x \in X$ e U uma vizinhança invariante de x. Como x é localmente compacto, existe um aberto V tal que $\overline{V}$ é compacto e $x \in \overline{V} \subset U$. Uma vez que $V\mathbb{R} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} Vt$, vemos que $V\mathbb{R}$ é aberto e invariante, além disso $\overline{V}\mathbb{R}$ é fechado em X, pois o sistema dinâmico é dispersivo. Assim $\overline{V}\mathbb{R}$ é a vizinhança desejada, como queríamos. $\square$

Observe que a hipótese de localmente compacto é essencial na recíproca do teorema acima. Considere o sistema dinâmico dado no Exemplo 3.15. O espaço de fase não é localmente compacto. Tal sistema dinâmico é dispersivo, mas não possui a propriedade de regularidade.

4.4 Fibrados e Paralelismo

Nesta secção estudaremos o conceito de fibrado e fibrados principais. Veremos como esses conceitos se relacionam com um sistema dinâmico. Inicialmente veremos que uma secção com aplicação τ contínua em um sistema dinâmico é uma secção transversal para o fibrado. Depois estudaremos uma generalização do Teorema de Whitney-Bebutoff para espaços de Tychonoff, e munidos desse resultado provaremos uma generalização do Teorema 3.30.

Veremos agora que uma secção para o sistema dinâmico é uma secção transversal para o fibrado. Em particular mostraremos que a secção é homeomorfa ao espaço das órbitas.

Teorema 4.49. *Seja $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico. Toda secção S para o sistema dinâmico com aplicação τ contínua corresponde a existência de uma secção transversal para o fibrado $(X, e, X/C)$. Além disso, se $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável e Hausdorff, então uma secção transversal para o fibrado implica na existência de uma secção com aplicação τ contínua.*

Demonstração. Seja S uma secção para o sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ com aplicação τ contínua. Queremos mostrar que existe uma secção transversal para o fibrado, ou seja, existe uma aplicação $g : X/C \to X$ tal que $e \circ g = Id_{X/C}$. Observe que X/C é homeomorfo a S. Com efeito, defina $h : X/C \to S$ por $h(x\mathbb{R}) = x\tau(x)$. Note que se $y\mathbb{R} = x\mathbb{R}$, então sabemos que existe um único $s \in S$ tal que $x\tau(x) = y\tau(y) = s$ e assim $h(y\mathbb{R}) = h(x\mathbb{R})$. Logo h está bem definida e ainda, como τ é contínua, segue que h é contínua. Além disso é imediato verificar que $h \circ e|_S \equiv Id_S$ e $e|_S \circ h \equiv Id_{X/C}$. Logo a aplicação h é uma secção transversal para o fibrado, e ainda S é homeomorfo a X/C. Para a recíproca, suponha que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável e X Hausdorff, $s : X/C \to X$ contínua com $e \circ s \equiv Id_{X/C}$. Seja $S = Im(s)$. Desta forma, S intercepta cada trajetória de X em somente um ponto, e assim para cada $x \in S$ temos que $x = s(e(x))$, uma vez que x e $s(e(x))$ pertencem a mesma trajetória. Note ainda que S é fechado. De fato, seja $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em S com $x_\lambda \to x$. Como $s \circ e$ é contínua temos que $s(e(x_\lambda)) \to s(e(x))$. Mas note que $s(e(x_\lambda)) = x_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, logo $x_\lambda \to s(e(x))$ e como X é Hausdorff temos $s(e(x)) = x$, donde $x \in S$. Agora como X é completamente instável, não há órbitas periódicas e pontos críticos, logo existe uma aplicação $\theta : X \to \mathbb{R}$, que associa para cada $x \in X$ um único elemento $\theta(x) \in \mathbb{R}$ tal que $x\theta(x) \in S$. Mostremos agora que a aplicação θ é contínua. Seja $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X com $x_\lambda \to x$. Queremos mostrar que $\theta(x_\lambda) \to \theta(x)$. Note primeiro que para cada $\lambda \in \Lambda$, temos $x_\lambda \theta(x_\lambda) \in S$ e $x\theta(x) \in S$. Temos ainda que $s \circ e(x_\lambda) = x_\lambda \theta(x_\lambda) \to x\theta(x) = s \circ e(x)$, pois $s \circ e$ é contínua. Considere t' um ponto de acumulação de $\theta(x_\lambda)$. Uma vez que o sistema dinâmico é completamente instável, segue que $t' \neq \pm\infty$. Como S é fechado e t' é finito, devemos ter que $\theta(x) = t'$, pois caso contrário como $x_\lambda \theta(x_\lambda) \to xt'$ e S é fechado vem que $xt' \in S$. Assim $xt', x\theta(x) \in S$ e como S intercepta cada trajetória de X em somente um ponto temos $xt' = x\theta(x)$. Desta forma $\theta(x_\lambda) \to \theta(x)$, como queríamos, portanto θ é contínua o que conclui a prova do teorema. □

Como vimos no Teorema 3.18, um sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, possui secção com aplicação contínua. Observe que naquela ocasião não foi utilizado a métrica do espaço de fase X. Portanto, o Teorema 3.18 e o teorema acima garante que uma condição necessária e suficiente para que um sistema dinâmico seja paralelizável é que o fibrado admita secção transversal contínua. O próximo teorema garante que um sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, o fibrado principal é trivial.

Teorema 4.50. *Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável se, e somente se, o fibrado $(X, e, X/C)$ é um $\mathbb{R}$-fibrado principal trivial.*

Demonstração. Suponhamos que o sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável e mostraremos que o fibrado $(X, e, X/C)$ é um $\mathbb{R}$-fibrado principal trivial. Primeiramente note que existe uma secção S para o sistema dinâmico com aplicação τ contínua e, assim como vimos no Exemplo 4.24, a ação é livre. Resta mostrar que as fibras $e^{-1}(\overline{x})$ são isomorfas às órbitas da ação de $\mathbb{R}$, ou seja, as trajetórias $x\mathbb{R}$ são isomorfas a $\mathbb{R}$. Com efeito, como a aplicação τ é contínua e S é uma secção, como feito no Teorema 3.18, a função $h : X \to S \times \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (x\tau(x), -\tau(x))$, é um homeomorfismo tal que $X = S\mathbb{R}$ e $h(xt) = (x, t)$. Assim $h(x\mathbb{R}) = \{x\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Logo o fibrado definido pelo sistema dinâmico é principal. Para provarmos que o fibrado principal é trivial, note que o $\mathbb{R}$-fibrado principal $(S \times \mathbb{R}, \pi_1, S)$ é trivial e $p : X/C \to S$ dada por $p(\overline{x}) = x\tau(x)$ é contínua e bijetora, com inversa $p^{-1} : S \to X/C$ dada por $p^{-1}(x) = e(x)$ contínua. Assim $p : X/C \to S$ é um homeomorfismo, e ainda, para cada $x \in S$ temos $p \circ e(x) = x\tau(x) = x = \pi_1 \circ h(x)$, donde segue que o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & S \times \mathbb{R} \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ X/C & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

provando que $(X, e, X/C)$ é um $\mathbb{R}$-fibrado principal trivial. Reciprocamente, suponhamos que o fibrado principal dado pelo sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é trivial e mostraremos que o sistema dinâmico é paralelizável. Para isso mostraremos que existe uma secção S com aplicação τ contínua. Primeiramente note que, sendo o fibrado principal $(X, e, X/C)$

trivial, então $(X, e, X/C)$ é isomorfo a $((X/C)\times\mathbb{R}, \pi_1, X/C)$ onde π_1 é a projeção na primeira coordenada, isto é, existem homeomorfismos $\Phi : X\to(X/C)\times\mathbb{R}$ e $\Psi : X/C\to X/C$ de forma que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "e"'] & (X/C)\times\mathbb{R} \arrow[d, "\pi_1"] \\
X/C \arrow[r, "\Psi"] & X/C
\end{tikzcd}$$

Construiremos a secção da seguinte forma. Como o fibrado principal é trivial, pelo Teorema 4.29 existe uma secção transversal $s : X/C\to X$ tal que $e\circ s = Id_{X/C}$. Seja $S = s(X/C)$. Além disso, como s é contínua e bijetora sobre S segue que S é homeomorfa a X/C. Dessa forma $\Phi' : X\to S\times\mathbb{R}$ é um homeomorfismo, onde $\Phi'(x) = (s(\Phi_1(x)), \Phi_2(x))$, aqui Φ_1 e Φ_2 denotando as coordenadas de Φ. Note que cada trajetória $x\mathbb{R}$ intercepta S em somente um ponto, já que s é uma função. Logo, para cada $x \in X$ existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $xt \in S$. Assim existe uma aplicação $\tau : X\to\mathbb{R}$ tal que $x\tau(x) \in S$. Observe ainda que para cada $x \in X$ tem-se $s(e(x)) = x\tau(x)$. Por fim, afirmamos que a aplicação τ é contínua. Com efeito, como $s(e(x)) \in S$ temos $\Phi'(s(e(x))) = (s(e(x)), \Phi_2'(s(e(x)))$, donde vem que $\tau \equiv -\Phi_2' \circ s \circ e$ é contínua, como composta de funções contínuas. Logo S é uma secção para o sistema dinâmico com função τ contínua. Portanto temos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico paralelizável. $\square$

O nosso próximo teorema é uma generalização do Teorema 3.24 para espaços de Tychonoff, ou seja, existe um tubo infinito contendo um ponto errante.

Lema 4.51. *Seja X um espaço de Tychonoff. Um ponto $x \in X$ é errante se, e somente se, existe um tubo infinito U contendo x tal que $U = S\mathbb{R}$ é aberto e $S\mathbb{R}$ é homeomorfo a $S\times\mathbb{R}$.*

Demonstração. Para um ponto errante $x \in X$ o tubo existe pelo Lema 4.40. Agora para a recíproca, basta observar que se $x \in S\mathbb{R}$ e $S\mathbb{R}$ é um tubo infinito contendo x, então para toda rede $\{x_\lambda t_\lambda\}$ com $x_\lambda t_\lambda\to x$ temos que $x\lambda t_\lambda \in S\mathbb{R}$ para $\lambda \prec \lambda_0$. Como $S\mathbb{R}$ é um tubo infinito devemos ter que $t_\lambda\to 0$, logo x é errante. $\square$

Com o lema acima podemos mostrar que em espaços de Tychonoff um sistema dinâmico ser completamente instável é equivalente ao fibrado do sistema dinâmico ser principal localmente trivial.

Teorema 4.52. *Para um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ em um espaço de Tychonoff, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável.*

2. *$e : X\to X/C$ é a projeção de um $\mathbb{R}$-fibrado principal localmente trivial.*

Demonstração. Assuma primeiro que $e : X \to X/C$ é a projeção de um $\mathbb{R}$-fibrado principal localmente trivial e mostraremos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável. Uma vez que o fibrado é localmente trivial, cada ponto $x \in X$ pertence a uma vizinhança $p^{-1}(U)$ que é homeomorfa ao aberto $U \times \mathbb{R}$, com $\overline{x} \in U$. Assim pelo Lema 4.51 segue que x é um ponto errante, logo $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável. Reciprocamente, suponhamos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável e mostraremos que para cada $x \in X/C$, existe uma vizinhança U e um homeomorfismo $h_U : U \times \mathbb{R} \to e^{-1}(U)$ tal que $e \circ h_U$ é a projeção de $U \times \mathbb{R}$. Seja $x' \in X$ tal que $e(x') = x$. Por hipótese cada $y \in X$ é errante, logo pelo Lema 4.40 existe uma secção local S contendo x', onde $U' = S \times \mathbb{R}$ é um aberto contendo x'. Além disso, U' é um tubo infinito. Assim para cada $x \in U'$ existe um único $\tau(x) \in \mathbb{R}$ tal que $x\tau(x) \in S$. Note que $U = e(U')$ é um aberto de X/C e $x \in U$. Seja $f : U \to S$ a inversa de $e|_S$. Como feito no teorema anterior temos que $f(x) = x\tau(x)$. Assim a aplicação $h_U : U \times \mathbb{R} \to U'$ dada por $h_U(y, t) = y(\tau(y))t$ é um homeomorfismo, já que sua inversa $h_U^{-1} : U' \to U \times \mathbb{R}$ dada por $h_U^{-1}(x) = (e(x), -\tau(x))$ é contínua. Por fim, note que a aplicação $-\tau(x)$ é equivariante, pois $x\tau(x) \in S$ e $xt\tau(xt) \in S$, donde $\tau(xt) = \tau(x) - t$, isto é, $-\tau(xt) = t - \tau(x)$ o que completa a prova de que o fibrado principal é localmente trivial. $\square$

Há uma forte relação entre a teoria de fibrados e sistemas dinâmicos como vimos nos resultados acima, entretanto um dos mais importante que veremos neste capítulo é que um sistema dinâmico completamente instável é equivalente ao paralelizável quando o espaço das órbitas é paracompacto. Este teorema nos permitirá obter resultados importante no que se segue.

Teorema 4.53. *Considere um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ em um espaço de Tychonoff X e assuma que X/C é paracompacto. Então $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável se, e somente se, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável.*

Demonstração. Assuma primeiramente que o sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável. Então pelo Teorema 3.18, existe uma secção S com aplicação τ contínua. Mostraremos que o sistema dinâmico é dispersivo. Com efeito, suponhamos que para um elemento $x \in X$ exista $y \in X$, tal que $y \in J^+(x)$. Assim existem redes $x_\lambda \to x$ e $x_\lambda t_\lambda \to y$ com $t_\lambda \to +\infty$. Uma vez que τ é contínua, temos $\tau(x_\lambda) \to \tau(x)$ e $\tau(x_\lambda t_\lambda) \to \tau(y)$. Mas note que, por um lado $x_\lambda \tau(x_\lambda) \in S$, por outro lado $x_\lambda(t_\lambda + \tau(x_\lambda t_\lambda)) = x_\lambda t_\lambda \tau(x_\lambda t_\lambda) \in S$. Logo pela unicidade do elemento $\tau(x_\lambda)$, segue que $\tau(x_\lambda) = t_\lambda + \tau(x_\lambda t_\lambda)$, ou seja, $t_\lambda = \tau(x_\lambda) - \tau(x_\lambda t_\lambda)$ para todo λ. Desta forma $t_\lambda = \tau(x_\lambda) - \tau(x_\lambda t_\lambda) \to \tau(x) - \tau(y)$, contradizendo o fato de que $t_\lambda \to +\infty$. Logo, devemos ter que $J^+(x) = \emptyset$, para todo $x \in X$, como desejado. Suponhamos agora que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável. Então pelo teorema anterior $e : X \to X/C$ é a projeção de um $\mathbb{R}$-fibrado principal localmente trivial. Desta forma para cada $b \in X/C$ existem U_p aberto e um homeomorfismo $\Psi_p : e^{-1}(U_p) \to X/C \times \mathbb{R}$. Como X é Tychonoff temos $e^{-1}(U_p)$ regular, donde U_p é regular. Assim X/C é Hausdorff e, por hipótese, segue que X/C é normal. Logo pelo Lema 4.33 segue que X admite uma secção transversal, e pelo Teorema 4.49 segue que essa secção transversal admite uma secção para o sistema dinâmico com aplicação τ contínua. Portanto, pelo Teorema 3.18 segue que o sistema dinâmico é paralelizável, como desejado. $\square$

Para aplicarmos o Teorema 4.53 precisamos provar que o espaço das órbitas de um sistema dinâmico é paracompacto. Para isso o Corolário 4.35 nos é de grande ajuda.

Teorema 4.54. *Se* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é um sistema dinâmico com* X *Hausdorff, paracompacto e localmente Lindelöf, então* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é paralelizável se, e somente se,* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é completamente instável e possui a propriedade de regularidade.*

Demonstração. Já provamos que paralelizável é completamente instável, por ser dispersivo. Mostraremos a recíproca. Seja $(X, \mathbb{R}, \pi)$ um sistema dinâmico que possui a propriedade de regularidade e é definido em um espaço de fase Hausdorff, paracompacto e localmente Lindelöf. Mostraremos que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável. Para isso aplicaremos o Teorema 4.53. Primeiro note que X é normal, pois é Hausdorff e paracompacto, e assim X é um espaço de Tychonoff. Além disso como o sistema dinâmico possui a propriedade de regularidade, vem que X/C é regular. Logo X e X/C satisfazem a hipótese do Corolário 4.35, assim X/C é paracompacto. Como $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é completamente instável, segue do Teorema 4.53 que o sistema dinâmico é paralelizável, como desejado. □

Agora podemos provar uma versão mais fraca do Teorema 3.30.

Corolário 4.55. *Se* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é um sistema dinâmico em um espaço de fase Hausdorff, paracompacto e localmente compacto, então* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é paralelizável se, e se só se, é dispersivo.*

Demonstração. A implicação é imediata. Suponhamos a recíproca. Então pelo Teorema 4.48, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ possui a propriedade de regularidade. Além disso, como todo conjunto localmente compacto é localmente Lindelöf, segue do corolário anterior que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é paralelizável, como desejado. □

Com isso obtemos o seguinte resultado em espaços métricos.

Corolário 4.56. *Se* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *é um sistema dinâmico definido em um espaço métrico localmente separável, então o sistema dinâmico é paralelizável se, e somente se, é completamente instável e possui a propriedade de regularidade.*

Demonstração. Só é necessário a prova da recíproca. Suponhamos então que $(X, \mathbb{R}, \pi)$ é um sistema dinâmico completamente instável, que possui a propriedade de regularidade e X é métrico.

Como X é um espaço métrico, X é paracompacto e Hausdorff. Além disso localmente separável é equivalente a localmente Lindelöf em espaço métrico. Assim o resultado segue do corolário anterior. □

Bibliografia

[1] Alves, R. W. M.; **Aspectos de uniformidade em espaços topológicos admissíveis**, Dissertação de Mestrado, Maringá, 2014.

[2] Bebutoff, M; **Sur la représentation des trajectoires d'uns système dynamique un système de droites parallèles**, Bulletin of Mathematical of the University Moscow, v. 2, fasc. 3, 1-22, 1939.

[3] Bhatia, N. P.; Szegö, G.P.; **Stability Theory of Dynamical Systems**; Springer, 1980.

[4] Bhatia, N. P.; Szegö, G.P.;**Dynamical Systems: Stability Theory and Applications**(Lectures Notes in Mathematics, vol. 35). Berlin-Heidelberg-New York:Springer 1967.

[5] Dugundji, J.; Antonsiewicz, H. A. **Parallelizable flows and Liapunov's second method**, Annals of Mathematics, v. 73, n. 3, 543-555, 1961.

[6] Hájek, O.; **Dynamical systems in the plane**, Academic Press Inc. London, 1º edition, 1968.

[7] Hájek, O.; **Parallelizability Revisited**; Proceedings of The American Mathematical Society, V. 27, n. 1, 77-84, 1971.

[8] Hocking, J. G.; Young, G. S.; **Topology** Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 37, 1961.

[9] Huebsch, W.; **On the covering homotopy theorem**; Annals of Mathematics, V. 61, n. 3, 555-565, 1955.

[10] Husemoller, D.; **Graduate Texts in Mathematics - Fibre Bundles**, Springer-Varley, 3º edition, New York, 1993.

[11] Irwin, M. C.; **Smooth Dynamical System**; Academy Press, 55, 1980.

[12] Nemytskii, V. V.; **Topological problems of the theory of dynamical systems**, Uspehi Mat. Nauk, v. 4, 91-153, 1949.

[13] Nemytskii, V. V.; Stepanov V. V.;**Qualitative theory of differential equations**, 1º edition, Pricenton University Press, 1960.

[14] Patrão, M. M. A.; **Semifluxos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento**, Tese de doutorado na Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

[15] Steenrod, N.; **Topology of Fiber Bundles**, Princeton University Press, 3º edição, 1951.

[16] Tozatti, H. V. M.; **Dispersividade e Recursividade para Ações de Semigrupos**, Tese de Doutorado, Maringá, 2014.

[17] Whitney, H.; **On the regular families of curves**, Bulletin of the American Mathematical Society, v. 47, n.2, 145-147, 1941.

[18] Whitney, H.; **Regular families of curves**, Annals of Mathematics, v. 35, n. 2, 244-270, 1933.

[19] Whitney, H.;**Regular families of curves I**, Proceedings of the National Academy Sciences of the United State of America, v. 18, n. 3, 275-278, 1932.

[20] Whitney, H.;**Regular families of curves II**, Proceedings of the National Academy Sciences of the United State of America, v. 18, n. 4, 340-342, 1932.

[21] Willard, S.; **General Topology**, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

Índice Remissivo