UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

JOÃO PAULO LIMA DE OLIVEIRA[1]

Sobre a Topologia do Grupo Ortogonal Generalizado

Maringá - PR

2016

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

JOÃO PAULO LIMA DE OLIVEIRA

Sobre a Topologia do Grupo Ortogonal Generalizado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana
Co-orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza

Maringá - PR
2016

JOÃO PAULO LIMA DE OLIVEIRA

SOBRE A TOPOLOGIA DO GRUPO ORTOGONAL GENERALIZADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alexandre José Santana
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Oteiral Corrêa Hoefel
Universidade Federal do Paraná

Rodrigo Martins
Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Josiney Alves de Souza
Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 24 de fevereiro de 2016.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Oliveira, João Paulo Lima de
O482s Sobre a topologia do grupo ortogonal generalizado / João Paulo Lima de Oliveira. -- Maringá, 2016.
72 f. : il. figs.

Orientador: Prof°. Dr°. Alexandre José Santana.
Co-orientador: Prof°. Dr°. Josiney Alves de Souza.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2016.

1. Grupo ortogonal generalizado. 2. Teorema da decomposição de Mostow. 3. Grupos topológicos. 4. Grupos de Lie. 5. Grupos de matrizes. 6. Generalized orthogonal group. 7. Mostow´s decomposition theorem. 8. Topological groups. 9. Lie groups. 10. Matrix groups. I. Santana, Alexandre José, orient. II. Souza, Josiney Alves de, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. IV. Título.

CDD 22.ed. 512.55

A good algorithm is like a sharp knife: it does what it is supposed to do with a minimum amount of applied effort. Using the wrong algorithm to solve a problem is like trying to cut a steak with a screwdriver: you may eventually get a digestible result, but you will expend considerably more effort than necessary, and the result is unlikely to be aesthetically pleasing.

Th. Cormen, Ch. Leiserson, R. Rivest

Ao meus pais: João e Edna

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus por todo amor e paciência que tem tido comigo ao longo dos anos. Sempre que me vi em dificuldades, impedido por algum obstáculo ou restrição, o Senhor me conduziu com força e sabedoria me mostrando o melhor caminho. Estou certo de que sem Ele esta realização não seria possível.

Agradeço a minha família, a qual esteve ao meu lado por toda minha vida, nos momentos bons e ruins.

Gostaria também de expressar um grande agradecimento aos meus orientadores: Prof. Dr. Alexandre José Santana e Prof. Dr. Josiney Alves de Souza, por suas orientações e conhecimentos dedicados a mim desde o início até a conclusão deste trabalho. Seus conselhos em muitos momentos me deram um ponto de partida. Sem eles eu não saberia nem mesmo como começar a resolver alguns problemas. Obrigado!

Agradeço especialmente ao meu amigo e ótimo companheiro de estudos André Luiz Marques. Não foram poucas as vezes em que me ajudou. Seja pessoalmente, por meio de uma ligação ou até mesmo por e-mail, sempre me ofereceu com disposição sua ajuda, muitas vezes tratando meus problemas como se fossem seus. Obrigado! Espero poder retribuir-lhe um dia!

De igual modo, também gostaria de agradecer ao amigo Hugo Murilo Rodrigues por diversos motivos: primeiramente, por sua contribuição na resolução de problemas, sem a qual eu ficaria horas e horas enroscado, possivelmente sem chegar a lugar algum. E, principalmente, agradeço por sua agradável companhia. Muitas horas teriam sido tediosas sem ela.

Agradeço aos amigos Richard Wagner Maciel Alves e Anderson Macedo Setti, pelas ótimas horas de estudo na biblioteca durante o segundo semestre de curso.

Em geral, agradeço a todos os amigos do mestrado. Por alguns motivos, não tive a oportunidade de passar muito tempo com todos eles. Embora eles possam não saber disso, o pouco tempo que estivemos juntos, seja em um roda de amigos ou até mesmo assistindo as aulas, foram importantes para mim. Não podendo mencionar a todos, pois felizmente a lista é demasiado longa, gostaria de citar Ademir Benteus Pampu, Bruno Alexandre Rodrigues, Gabriel Pereira Both (também por seu acolhimento) e João Augusto Navarro Cossich.

Agradeço a todos que foram meus professores, tanto pelo conhecimento compartilhado quanto pela inspiração e incentivos. Agradeço a todo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, a Lúcia Kiyoko Kato e José de Almeida Junior pelo seu excelente atendimento e, principalmente, a professora Dra. Rosali Brusamarello. Sua ajuda excedeu os limites da sala de aula.

Agradeço aos amigos Nilson Guedes Gonçalves e Rose Hélida Astolfo Freire por todo o carinho, ajuda e conselhos que me dispensaram. Sempre comemoraram minhas conquistas como se fossem suas. Deus os abençoe!

E por último, mas não menos importante, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro dispensado que me possibilitou dedicar-me aos estudos.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma descrição do *Grupo Ortogonal Generalizado* e desenvolvemos um estudo sobre alguns de seus aspectos topológicos como compacidade, conexidade e grupo fundamental. Estes resultados são obtidos por meio da aplicação do *Teorema da Decomposição de Mostow*, uma forma mais refinada da decomposição polar em $Gl(n;\mathbb{C})$. Tendo em mente estes objetivos, construímos as bases começando com uma abordagem simples associando álgebra, geometria e topologia no estudo dos grupos topológicos, grupos de Lie de matrizes e álgebras de Lie.

Palavras-chave: Grupo Ortogonal Generalizado, grupos topológicos, grupos de Lie de matrizes, álgebras de lie, Teorema da Decomposição de Mostow.

Abstract

In this work we present a description of the *Generalized Orthogonal Group* and develop a study on some of its topological aspects such as compactness, connectedness and fundamental group. These results are obtained by applying *Mostow's Decomposition Theorem*, a more refined version of $Gl(n, \mathbb{C})$ polar decomposition. Bearing these goals in mind, we build the foundations starting with a simple approach involving algebra, geometry and topology in the study of topological groups, matrix Lie groups and Lie algebras.

Keywords: Generalized Orthogonal Group, topological groups, matrix Lie groups, Lie algebras, Mostow's Decomposition Theorem.

Sumário

Introdução

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, o *Grupo Ortogonal Generalizado*, denotado por $O(m;n)$, pertence à classe dos que hoje conhecemos como Grupos Lineares Clássicos, os quais são subgrupos fechados de $Gl(m+n;\mathbb{C})$. Ele é um grupo de Lie formado por todas as transformações lineares do espaço $\mathbb{R}^{m+n}$ que deixam invariante uma determinada forma bilinear simétrica não-degenerada de assinatura (m,n). Mais precisamente, para todo $x = (x_1, \ldots, x_{m+n})$, $y = (y_1, \ldots, y_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,n} \colon \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ por

$$\langle x, y \rangle_{m,n} = -x_1 y_1 - \cdots - x_m y_m + x_{m+1} y_{m+1} + \cdots + x_{m+n} y_{m+n}.$$

O grupo $O(m;n)$ é então o conjunto formado pelas matrizes reais de ordem $(m+n) \times (m+n)$ que preservam a formula bilinear definida acima. Isto é, se $X \in O(m;n)$ então $\langle Xx, Xy \rangle_{m,n} = \langle x, y \rangle_{m,n}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{m+n}$. É interessante mencionar que, particularmente, no caso em que $m = 1$ e $n = 3$, o espaço $\mathbb{R}^{1+3}$ munido da forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ se torna o *Espaço-Tempo de Minkowski*, a estrutura matemática onde atualmente se formula a Teoria da Relatividade Restrita de Einstein. Neste cenário, $O(1;3)$ representa um subgrupo do grupo de isometrias deste espaço conhecido como *Grupo de Poincaré* (veja [15]).

Colocando os aspectos físicos à parte, nossa motivação central concentra-se no estudo das questões topológicas. Especificamente aquelas relacionadas ao conceito de conexidade. Em [15], Souza *et. al.* apresentam uma demonstração, por meio do conceito de ações de grupos, de que o espaço $O(1;n)$ possui quatro componentes conexas para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotando por $SO(1;n)$ o subgrupo de $O(1;n)$ formado pelas matrizes de determinante 1, este resultado é obtido mostrando que o quociente $SO(1;n)/SO(n)$ possui duas componentes conexas. Pela conexidade de $SO(n)$ segue que $SO(1;n)$ possui duas componentes conexas (veja Teorema 1.29).

Objetivando generalizar esta ideia, nos propusemos então a investigar o que ocorre, relativamente ao número de componentes conexas quando m é arbitrário. Acreditávamos, devido as pouquíssimas obras que abordam o assunto, que este era ainda um problema em aberto. Uma abordagem inicial interessante foi considerar o quociente $SO(m;n)/SO(m-1;n)$. Sendo este quociente conexo, é natural esperar que $SO(m;n)$ também seja. Porém, quando $m > 1$, este método tem um inconveniente: ao contrário de $SO(n)$, o grupo $SO(m-1;n)$ não é *a priori* conexo, o que impossibilita obter alguma conclusão.

Contrariando nossa intuição, as referências [6] e [8] mostram que o número de componentes conexas de $SO(m;n)$, e consequentemente de $O(m;n)$, se mantém no caso geral. Ou seja, duas e quatro, respectivamente. Com o objetivo de obter ferramentas que possibilitem a demonstração deste fato de modo claro, organizamos esta dissertação como segue.

O Capítulo 1 desenvolve um estudo dos Grupos Topológicos, espaços topológicos munidos de uma estrutura de grupo compatível com sua topologia. Os resultados se baseiam principalmente nas obras [2], [19] e [15]. Nos vários resultados apresentados, pode-se perceber como a presença de uma estrutura de grupo em um espaço topológico nos permite obter informações sobre compacidade, conexidade, etc. Ao final do capítulo mostramos como certos espaços topológicos podem ser identificados por meio de quocientes de grupos.

O Capítulo 2 trata de uma exposição de alguns dos grupos lineares clássicos. Após apresentar uma breve descrição, classificamos os grupos compactos e conexos. Por meio desta linha, damos início a um estudo introdutório dos Grupos de Lie sob o ponto de vista matricial. Esta postura é adotada por Baker [3] e Hall [7]. Embora a abordagem clássica aos grupos de Lie é a mais adequada, segundo Hall, a abordagem matricial é, num primeiro momento, conveniente pois: **1)** dispensa o aluno de ter conhecimento prévio sobre Variedades Diferenciáveis. **2)** a aplicação exponencial é definida de uma modo mais simples por meio de séries de potências. **3)** A álgebra de Lie, que na abordagem clássica, é definida como o espaço dos campos de vetores invariantes à esquerda, admite uma caracterização menos abstrata, feita por meio do conceito de subgrupo a 1-parâmetro. Escolhemos seguir este modelo pois se mostrou simples e suficiente para nossos propósitos.

No Capítulo 3 estudamos a aplicação exponencial bem como suas principais propriedades. Ainda por meio da exponencial, definimos a álgebra de Lie de um grupo de Lie de matrizes. Em seguida, apresentamos alguns resultados que justificam a importância do estudo das álgebras de Lie mostrando que um homomorfismo contínuo de grupos induz um homomorfismo de álgebras de Lie. Continuamos com um estudo sobre o espaço $H(n)$ das matrizes hermitianas de ordem n e o espaço $U(n)$ das matrizes unitárias de ordem n, indispensáveis para estabelecer a decomposição polar de $Gl(n;\mathbb{C})$, segundo a qual toda matriz complexa invertível pode ser escrita como produto Ue^H, onde $H \in H(n)$ e $U \in U(n)$. Por fim, provamos que se G é um grupo pseudo-algébrico auto-adjunt o, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que G é homeomorfo a $(G \cap U(n)) \times \mathbb{R}^m$. Este resultado é conhecido como o *Teorema da Decomposição de Mostow* [17], que é essencialmente uma versão mais refinada da decomposição polar em $Gl(n;\mathbb{C})$. Ele nos permite concluir que o estudo das características topológicas de um tal grupo G se resume àquelas do grupo $G \cap U(n)$.

O último capítulo se volta então para a questão topológica do Grupo Ortogonal Generalizado $O(m;n)$. Procuramos aplicar os resultados estabelecidos nos capítulos anteriores para este fim. Primeiramente, apresentamos algumas caracterizações de $O(m;n)$ que nos permitirão concluir que este é também um Grupo de Lie de matrizes. Descrevemos sua álgebra de Lie e calculamos sua dimensão. Em seguida, mostramos que $O(m;n)$ em geral não é compacto e possui quatro componentes conexas. E por fim, apresentamos uma breve descrição do Grupo de Poincaré, o grupo das aplicações $f\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{1+n}$ que preservam a distância de Lorentz.

Capítulo 1

Grupos Topológicos

1.1 Definição de Grupo Topológico

Nesta seção começamos introduzindo o conceito de grupo topológico seguido de alguns exemplos, bem como alguns resultados essenciais que mostram como a presença de uma estrutura de grupo em espaços topológicos simplifica o estudo de certas propriedades nestes espaços. A menos que seja explicitamente colocado de outra forma, utilizamos a notação multiplicativa para denotar a operação de um grupo G. Seu elemento neutro será indicado por e.

Definição 1.1. *Um grupo topológico é um espaço topológico G munido de uma estrutura de grupo de modo que as aplicações $\rho\colon G\times G \to G$ e $Inv\colon G \to G$, definidas por $\rho(x,y) = x\cdot y$ e $Inv(x) = x^{-1}$ são contínuas.*

Nesta definição estamos considerando que $G\times G$ é dotado da topologia produto. Segue imediatamente que para que um espaço topológico G com estrutura de grupo seja um grupo topológico é necessário e suficiente que a aplicação $f\colon G\times G \to G$, $f(x,y) = x\cdot y^{-1}$ seja contínua. Com efeito, $f(x,y) = \rho(x, Inv(y))$. Logo, f é contínua se ρ e Inv são contínuas. Reciprocamente, se f é contínua, $Inv(y)$ é a aplicação parcial $f(e,y) = y^{-1}$, portanto contínua. Do mesmo modo temos $\rho(x,y) = f(x, Inv(y))$. Os próximos dois exemplos mostram como podemos obter novos grupos topológicos por meio de outros previamente conhecidos.

Exemplo 1.1. *Todo subgrupo $H \subset G$ de um grupo topológico é topológico quando considerado como um subespaço de G. Com efeito, as aplicações $\rho_H : H\times H \to H$ e $Inv_H : H \to H$ são restrições à $H\times H$ e H, respectivamente, das aplicações ρ e Inv. Logo são contínuas.*

Exemplo 1.2. *Dados G_1, ...,G_n grupos topológicos, podemos definir de modo natural duas aplicações $\rho : G \times G \to G$, $Inv : G \to G$ no produto cartesiano $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$ de modo a torná-lo um grupo topológico. Escrevemos $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$ e $Inv = (Inv_1, ..., Inv_n)$. A continuidade dessas aplicações segue da continuidade das aplicações coordenadas.*

Exemplo 1.3. *Um dos exemplos mais simples de um grupo topológico é o do Espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$, com as operações de adição, que associa a cada par de vetores $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n), y = (\beta_1, ..., \beta_n)$ o vetor $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$, e a inversão que faz corresponder a cada vetor $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ o seu oposto $-x = (-\alpha_1, ..., -\alpha_n)$.*

Exemplo 1.4. *Sejam E, F e G espaços vetoriais reais normados com E, F de dimensão finita. Toda aplicação bilinear $f : E \times F \to G$ é contínua (veja o Corolário em [14], p. 60). Como caso particular, a multiplicação definida no espaço $M(n;\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n é contínua. Considere o conjunto $Gl(n;\mathbb{R})$ das Matrizes Invertíveis de ordem n com entradas reais. Dadas as matrizes A, $B \in Gl(n;\mathbb{R})$, as aplicações de multiplicação $(A, B) \to AB$ e inversão de matrizes $A \to A^{-1}$ tornam $Gl(n;\mathbb{R})$ um grupo topológico. Pelo que foi dito acima, a continuidade da multiplicação segue de que $Gl(n;\mathbb{R}) \subset M(n;\mathbb{R})$ é um subespaço. Quanto a continuidade da inversão de matrizes, veja demonstração do Lema e seu comentário em [12], p. 253.*

Segue do Exemplo 1.1 que todo subgrupo de $Gl(n;\mathbb{R})$ é também um grupo topológico. No Capítulo 2, veremos vários exemplos de subgrupos de $Gl(n;\mathbb{R})$. Para uso posterior, porém, registramos aqui de modo breve o exemplo seguinte: o Grupo Ortogonal $O(n)$ é o grupo formado pelas matrizes que preservam o produto interno de $\mathbb{R}^n$. Ou seja, dizemos que uma matriz X é ortogonal se $\langle Xx, Xy\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Existem ainda outros dois modos usuais e equivalentes de se definir $O(n)$: primeiro: $X \in O(n)$ se e somente se $XX^T = X^TX = I$, de onde concluímos que $det(X) = \pm 1$. Isso mostra que de fato $O(n) \subset Gl(n;\mathbb{R})$. Segundo: uma matriz X é ortogonal se, e somente se, seus vetores-coluna formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. O subgrupo denotado por $SO(n)$ formado pelas matrizes $X \in O(n)$ com determinante 1 é chamado de Grupo Ortogonal Especial.

Para cada elemento $g \in G$ destacam-se as aplicações $\lambda_g : G \to G$, $\lambda_g(x) = gx$ e $\delta_g : G \to G$, $\delta_g(x) = xg$, chamadas de *translação à esquerda* e *translação à direita*, respectivamente. Essas aplicações são bijeções contínuas. As aplicações inversas são dadas, respectivamente, por $\lambda_{g^{-1}}$ e $\delta_{g^{-1}}$, que são também translações, logo contínuas. Temos portanto que toda translação é um homeomorfismo. Elas mostram que todo grupo topológico é um espaço topológico homogêneo. Isto é, dados $x, y \in G$, existe um homeomorfismo $h : G \to G$ tal que $h(x) = y$ (tome por exemplo a translação à esquerda pelo elemento yx^{-1}). Como aplicação deste fato, podemos ver que nenhuma operação pode tornar o espaço $[0, \infty)$ um grupo topológico, pois todo homeomorfismo $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ deve cumprir $h(0) = 0$ (consulte [13], ex. 79 p. 107)

Dado um subconjunto $X \subset G$, escreveremos sempre gX quando nos referirmos ao conjunto $\lambda_g(X) = \{gx : x \in X\}$. Do mesmo modo indicaremos $\delta_g(X) = \{xg : x \in X\}$ por Xg. Mais geralmente, se $X, Y \subset G$, usaremos as notações $XY = \{xy \in G : x \in X, y \in Y\}$ e $X^n = \{x_1 \dots x_n \in G : x_i \in X, i = 1, \dots, n\}$

Sejam $X, Y \subset G$. Quando X ou Y são conjuntos abertos, o conjunto XY também é aberto. De fato, podemos escrever $XY = \bigcup_{x \in X} xY = \bigcup_{y \in Y} Xy$. Isso mostra que XY é uma reunião de conjuntos abertos. Um resultado análogo não vale para conjuntos fechados. Tomando, por exemplo, $F = \mathbb{Z}$ e $H = \{0, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ como subconjuntos de $\mathbb{R}$, o produto $FH = \mathbb{Q}$ não é fechado. Porém, quando um deles é compacto, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2. *Sejam $F, K \subset G$ com F fechado e K compacto. Os conjuntos FK e KF são fechados*

Demonstração: Seja $x = \lim_{\lambda \in \mathcal{D}} k_\lambda f_\lambda$ onde $k_\lambda \in K$, $f_\lambda \in F$ e $\mathcal{D}$ é um conjunto dirigido de índices. Pela compacidade de K, existe uma sub-rede (k_{λ_i}) convergindo para um ponto $k \in K$. Devemos ter então $k^{-1} = \lim_{\lambda_i} k_{\lambda_i}^{-1}$ e, portanto, $\lim_{\lambda_i} [k_{\lambda_i}^{-1}(k_{\lambda_i} f_{\lambda_i})] = k^{-1}x = f \in F$, pois F é fechado. Assim, $x = kf \in KF$. Portanto, KF é fechado. O caso FK se trata de maneira análoga. □

Teorema 1.3. *Sejam G, H grupos topológicos. Um homomorfismo $h \colon G \to H$ é contínuo se, e somente se, é contínuo no ponto e.*

Demonstração: É imediato que se h é contínuo então particularmente é contínuo no ponto e. Reciprocamente, suponhamos que h é contínuo no ponto e. Vamos mostrar que h é contínuo em todo ponto $g \in G$. Seja $V \subset H$ um aberto contendo $h(g)$. O conjunto

$(h(g))^{-1}V$ é então um aberto contendo e' = elemento neutro de H. Seque que existe um aberto $U \subset G$ contendo e tal que $h(U) \subset (h(g))^{-1}V$. Assim, gU é uma vizinhança de g tal que $h(gU) = h(g)h(U) \subset h(g)(h(g))^{-1}V = V$. Logo, h é contínuo em g. □

Outra propriedade muito importante que utilizaremos no decorrer da teoria é o seguinte: para toda vizinhança $U \subset G$ do elemento neutro $e \in G$, existe um aberto V contendo e tal que $V^2 \subset U$. Para ver isto, basta notar que o produto $\rho\colon G \times G \to G$ é contínuo no ponto (e, e). Ou seja, para todo aberto $U \ni e$, existe um aberto $V \times V \subset G \times G$, contendo (e, e) tal que $\rho(V \times V) = V^2 \subset U$. Podemos também admitir que V é simétrico (ou seja, $V = V^{-1}$) substituindo-o, se necessário, por $V \cap V^{-1}$.

Teorema 1.4. *Todo grupo topológico G é um espaço regular*

Demonstração: Na demonstração deste teorema, usaremos a seguinte caracterização de regularidade: um espaço topológico X é regular se, e somente, se para todo ponto $x \in X$ e toda vizinhança U de x, existe um aberto $V \ni x$ tal que $\overline{V} \subset U$. Consideremos inicialmente uma vizinhança U da identidade. Existe um vizinhança simétrica V tal que $V^2 \subset U$. Se $x \in \overline{V}$, então $Vx \cap V \neq \varnothing$ (observe que Vx é um aberto contendo x, logo deve interceptar V). Assim, existem $g, h \in V$ tais que $gx = h$. Isso implica $x = g^{-1}h \in V^{-1}V = V^2 \subset U$. Logo, $\overline{V} \subset U$.

Quanto ao caso geral, basta utilizar o fato de que G é um espaço homogêneo e reduzir ao caso já demonstrado: dado um aberto U contendo um ponto arbitrário $g \in G$, o aberto $g^{-1}U$ é uma vizinhança aberta da identidade. Logo existe uma vizinhança V de e tal que $\overline{V} \subset g^{-1}U$. Segue que gV é um aberto contendo g tal que $\overline{(gV)} \subset U$. □

Observação 1.5. *Mais precisamente, um grupo topológico é um espaço completamente regular. Isso ocorre porque esses grupos admitem o que chamamos de uma família admissível de coberturas abertas, o que os classifica como espaços admissíveis. Um espaço é admissível se, e somente se, é um espaço uniforme, e este último equivale a ser completamente regular (veja [1] e o Capítulo 2 de [18]).*

Sejam X um espaço topológico qualquer e $h\colon X \to X$ um homeomorfismo. Recordemos que para todo subconjunto $Y \subset X$ valem as relações $h(\overline{Y}) = \overline{h(Y)}$ e $h(int(Y)) = int(h(Y))$. Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é invariante por h quando $h(Y) \subset Y$.

Lema 1.6. *Seja $h: X \to X$ um homeomorfismo. Se $Y \subset X$ é um subconjunto invariante por h, então $\overline{Y}$ e $int(Y)$ também são.*

Demonstração: Por hipótese, temos $\varphi(Y) \subset Y$. Então, $\varphi(\overline{Y}) = \overline{\varphi(Y)} \subset \overline{Y}$ e $\varphi(int(Y)) = int(\varphi(Y)) \subset int(Y)$. □

Teorema 1.7. *Se $H \subset G$ é um subgrupo então seu fecho $\overline{H}$ também é. Além disso, se H é normal o mesmo ocorre com $\overline{H}$.*

Demonstração: Este resultado segue diretamente do Lema 1.6. Inicialmente, observemos que $Inv : G \to G$ é um homeomorfismo segundo o qual H é invariante. Logo, seu fecho também é. Ou seja, $x^{-1} \in \overline{H}$ para todo $x \in \overline{H}$. Um raciocínio semelhante mostra que se tem $xy \in \overline{H}$, para todo $x, y \in \overline{H}$.

Suponhamos agora que H é um subgrupo normal. Isto significa que, para todo $g \in G$, H é invariante pela aplicação de conjugação $x \longmapsto gxg^{-1}$. Logo, seu fecho também é. □

Teorema 1.8. *Seja $H \subset G$ um subgrupo. Se $int(H)$ é não-vazio, então H é aberto.*

Demonstração: Suponhamos que exista $x \in int(H)$. Dado $y \in H$, vamos mostrar que $y \in int(H)$. Temos que o conjunto $yx^{-1}int(H)$ é uma vizinhança aberta de y contida em H. Portanto, $y \in int(H)$ e $H \subset int(H)$. □

Teorema 1.9. *Em um grupo topológico, todo subgrupo aberto também é fechado.*

Demonstração: Se $H = G$, nada há para demonstrar. Suponhamos então que H e um subgrupo próprio de G. Podemos escrever $G = \bigcup gH$ como reunião disjunta de classes laterias. Como toda translação é um homeomorfismo, essas classes laterias são conjuntos abertos. Em particular, é aberto o conjunto $\bigcup gH$, onde $g \in G - H$. Assim, $H = G - \bigcup_{g \in G-H} gH$ é fechado, pois é complementar de um conjunto aberto. □

Conclui-se deste último resultado que se G é um grupo topológico conexo, então é também seu único subgrupo aberto. De fato, se H é um subgrupo aberto, então é também fechado. Assim, H e $G - H$ formam uma cisão de G, a qual não seria trivial se H fosse um subgrupo próprio. Não é difícil obter exemplos que mostram que a recíproca deste resultado não é verdadeira. Isto é, existem subgrupos fechados que não são abertos.

Tome o Exemplo 1.3 do Espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. O subgrupo trivial $\{0\}$ é fechado, porém, não é aberto. Um exemplo menos trivial é o do subgrupo $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.10. *Dado um grupo topológico G, indiquemos por G_0 a componente conexa do elemento neutro de G. Então G_0 é um subgrupo fechado e normal de G. As demais componentes conexas de G são classes laterais gG_0.*

Demonstração: Para todo $g \in G$, temos que λ_g leva componentes conexas em componentes conexas. Logo $\lambda_g(G_0) = gG_0$ é uma componente conexa. Isso mostra que toda classe lateral é uma componente conexa. Seja agora $C \subset G$ uma componente conexa. Fixando $g \in C$, temos que $g^{-1}C$ é uma componente conexa contendo o elemento neutro de G, logo $g^{-1}C = G_0$ ou, equivalentemente, $C = gG_0$.

Quando $g \in G_0$, temos $g = \lambda_g(e) \in gG_0$, logo $gG_0 = G_0$. Isso significa que $gy \in G_0$, para todo $y \in G_0$. Como $g \in G_0$ é arbitrário, temos $xy \in G_0$, para todo $x, y \in G_0$. Do mesmo modo, $Inv\colon G \to G$ é um homeomorfismo. Logo, leva componentes conexas em componentes conexas. Assim, $Inv(G_0)$ é uma componente conexa de G. Como $Inv(e) = e$, temos $Inv(G_0) = G_0$. Ou seja, tem-se $x^{-1} \in G_0$, para todo $x \in G_0$. Portanto, G_0 é um subgrupo de G. A prova de que este subgrupo é normal segue a mesma ideia. Dado $g \in G$ arbitrário, consideramos desta vez a aplicação de conjugação $h\colon G \to G$, definida por $h(x) = gxg^{-1}$, a qual é também um homeomorfismo. Logo, $h(G_0) = gG_0g^{-1}$ é uma componente conexa de G. E como $h(e) = e$, concluímos que $gG_0g^{-1} = G_0$. □

Teorema 1.11. *Se G é localmente conexo, então G_0 é um subgrupo aberto (e portanto, fechado).*

Demonstração: Existe um aberto conexo U_0 contendo o elemento neutro de G. Assim, $U_0 \subset G_0$. Portanto, G_0 tem interior não-vazio. Logo é aberto. □

Teorema 1.12. *Seja G um grupo topológico conexo. Se U é uma vizinhança aberta de e, então $G = \bigcup_{n \geq 1} U^n$.*

Demonstração: Escreva $V = U \cap U^{-1}$ e considere $W = \bigcup_{n\geq 1} V^n$. Temos $xy \in W$, para todo $x, y \in W$. Além disso, como $[V^n]^{-1} = V^{-n}$, temos $x^{-1} \in W$, para todo $x \in W$.

Logo, W é um subgrupo aberto de G, pois tem interior não-vazio uma vez que $V \subset W$. Sendo conexo, isso obriga $G = W \subset \bigcup_{n\geq 1} U^n$. Portanto, $G = \bigcup_{n\geq 1} U^n$. $\square$

Teorema 1.13. *Se H um subgrupo normal e discreto de um grupo topológico conexo G, então H está contido no centro de G.*

Demonstração: Devemos mostrar que todo elemento de H comuta com todo elemento de G. Se $H = \{e\}$ a demonstração é imediata. Fixemos pois $h \in H$ diferente do elemento neutro. Existe um aberto $U \subset G$ tal que $H \cap U = \{h\}$. Observe que pela continuidade da operação de multiplicação e da igualdade $ehe = h$, existe uma vizinhança simétrica do elemento neutro V tal que $VhV \subset U$. Seja $g \in V$ qualquer. Sendo H um subgrupo normal, $ghg^{-1} \in H$. Evidentemente, temos também $ghg^{-1} \in VhV \subset U$. Assim, $ghg^{-1} \in H \cap U$. Portanto, $ghg^{-1} = h$, o que implica $gh = hg$. Ou seja, os elementos de H comutam com todos os elementos de V. Como o grupo G é conexo, podemos escrever $G = \bigcup_{n\geq 1} V^n$. Assim, todo elemento de G pode ser escrito na forma $x = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$. Segue que

$$xh = (g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)h = g_1 \cdot \ldots \cdot hg_n = g_1h \cdot \ldots \cdot g_n = h(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n) = hx.$$

Temos portanto o resultado enunciado. $\square$

1.2 Ações de Grupos

As ações de grupos tem sua motivação principalmente nos grupos de permutações. Dado um conjunto X, denotamos por $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções $f\colon X \to X$. O conjunto $S(X)$, munido com a operação de composição, é um grupo chamado de grupo das permutações de X. Quando $X = \{1, \ldots, n\}$, é comum denotarmos $S(X)$ por S_n e seus elementos pela lista $f = (i_1, \ldots, i_n)$ para significar que $f(1) = i_1, \ldots, f(n) = i_n$. Desse modo, podemos pensar intuitivamente que o grupo S_n age sobre o conjunto X mudando seus elementos de lugar. Como veremos a seguir, este conceito pode ser de certo modo generalizado para um grupo qualquer G.

Definição 1.14. *Sejam G um grupo e X um conjunto qualquer. Uma ação (à esquerda) de G em X é uma aplicação $\varphi : G \times X \to X$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\varphi(e, x) = x$, *para todo* $x \in X$.

2. $\varphi(g \cdot h, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$*, para todo* $g, h \in G$ *e* $x \in X$*.*

Em geral, é comum utilizarmos a notação $g \cdot x$, ou ainda, gx em lugar de $\varphi(g, x)$. Com estas novas notações, as condições apresentadas acima se escrevem $e \cdot x = x$ e $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, em lugar de *1* e *2*, respectivamente.

Exemplo 1.5. *Dado um subgrupo* $H \subset G$*, o grupo* G *também exerce uma ação natural sobre o quociente* G/H *definida por* $\varphi(g, hH) = ghH$*. Essa ação é conhecida como ação de translação nas co-classes.*

Exemplo 1.6. *Seja* $\mathcal{B}(X; X)$ *o grupo das aplicações bijetoras* $f \colon X \to X$*, onde* X *é um conjunto qualquer. Podemos considerar uma ação* $\varphi \colon \mathcal{B}(X; X) \times X \to X$ *definida por* $\varphi(f, x) = f(x)$*.*

Exemplo 1.7. *Considerando os elementos de* $Gl(n; \mathbb{R})$ *como transformações lineares invertíveis, temos um caso particular do exemplo anterior, onde* $Gl(n; \mathbb{R})$ *age sobre* $\mathbb{R}^n$ *do seguinte modo:* $\varphi(T, x) = Tx$*.*

As ações à direita são definidas de modo análogo as ações à esquerda. Todas as considerações feitas daqui em diante podem também ser aplicadas para aquelas. Por este motivo, colocaremos nossa atenção apenas nestas últimas.

Definição 1.15. *Seja* $x \in X$*. Definimos sua órbita como sendo o conjunto*

$$G \cdot x = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Uma forma alternativa de se definir a órbita de um elemento $x \in X$ é por meio da seguinte relação de equivalência: dados $x, y \in X$, dizemos que $x \sim y$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $x = gy$. Seguindo esta linha, temos que as órbitas $G \cdot x$ definidas acima são as classes de equivalência dessa relação. Desse modo, duas órbitas em X ou são iguais ou são disjuntas.

Definição 1.16. *Dizemos que um subconjunto* $Y \subset X$ *é* G*-invariante quando* $gY \subset Y$*, para todo* $g \in G$*.*

Segue da definição que um conjunto $Y \subset X$ é G-invariante se, e somente se, é reunião de órbitas de X. De fato, afirmamos que $Y = \bigcup_{y \in Y} G \cdot y$. A inclusão $Y \subset \bigcup_{y \in Y} G \cdot y$

é imediata. Quanto a inclusão contrária, temos $gy \in Y$, para todo $g \in G$ e $y \in Y$. Então, fixando $y \in Y$, a órbita $G \cdot y$ está contida em Y. Logo, $\bigcup_{y \in Y} G \cdot y \subset Y$, tendo portanto a igualdade. Por outro lado, se Y é reunião de órbitas de X, o resultado é óbvio.

A importância dos subconjuntos G-invariantes reside no fato de que podemos sempre considerar a restrição de uma ação a tais subconjuntos. Em particular, um grupo G sempre age transitivamente em cada uma de suas órbitas num sentido que será definido posteriormente.

Definição 1.17. *Dada uma ação de G em um conjunto X, fixemos um elemento $x \in X$. O subgrupo de isotropia ou estabilizador de x, denotado por G_x, é o conjunto formado pelos elementos $g \in G$ que deixam x fixo. Mais precisamente:*

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Dados $g, h \in G_x$, temos $(gh)x = g(hx) = gx = x$. Isso mostra que $gh \in G_x$. Além disso, $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$. Assim, $g^{-1} \in G_x$. Portanto, G_x é de fato um subgrupo de G.

Quando $x, y \in X$ pertencem a mesma órbita, podemos relacionar seus subgrupos de isotropia por meio de uma importante relação:

Teorema 1.18. *Sejam $x, y \in X$ tais que $y = gx$, para algum $g \in G$. Então $G_y = gG_xg^{-1}$. Ou seja, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.*

Demonstração: Com efeito, temos $h \in G_y$ se, e somente se, $hy = y$. Equivalentemente, $h(gx) = (hg)x = gx$. Logo, $g^{-1}hgx = x$. E isso ocorre, se e somente se, $g^{-1}hg \in G_x$. Logo, $G_y = gG_xg^{-1}$. □

Definição 1.19. *Considere uma ação de um grupo G em um conjunto X.*

1. *Dizemos que a ação é efetiva quando a seguinte afirmação for verdadeira: se $gx = x$, para todo $x \in X$ então $g = e$. Isso significa que a intercessão de todos estabilizadores é igual ao grupo trivial $\{e\}$.*

2. *Dizemos que a ação é livre quando a seguinte afirmativa for verdadeira: se $gx = x$, para algum $x \in X$ então $g = e$. Essa afirmativa equivale ao fato de que todos os subgrupos de isotropia se reduzem a $\{e\}$.*

3. *A ação é dita transitiva quando, para todo $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Equivalentemente, X é a única órbita dessa ação.*

Como deve ter ficado claro na definição acima, toda ação livre é efetiva. A recíproca, porém, não é verdadeira. Um exemplo é dado pela grupo $\mathcal{B}(X; X)$ das bijeções de um conjunto X que contenha no mínimo dois elementos. Definimos $\varphi\colon \mathcal{B} \times X \to X$ pondo $\varphi(f, x) = f(x)$. Observe que se $f(x) = x$, para todo x, então $f = I =$ aplicação identidade. Logo a ação é efetiva. Fixando um elemento $x_0 \in X$, existe uma aplicação $g\colon X \to X$, tal que $g(x_0) = x_0$ e, como X tem mais de um elemento, $g(y) \neq y$, se $y \neq x_0$. Assim, $g \neq I$. Logo, esta ação não é livre.

Fica justificada, com estas definições, nossa afirmação dada acima de que um grupo age transitivamente em cada uma de suas órbitas.

Teorema 1.20. *Considere uma ação transitiva de um grupo G em um um conjunto X. Fixando um ponto $x \in X$, a aplicação $\xi\colon G/G_x \to X$ definida por $\xi(gG_x) = gx$ é uma bijeção.*

Demonstração: Primeiramente, devemos mostrar que a aplicação está bem definida. Tomemos elementos $g_1, g_2 \in G$ de modo que as classes g_1G e g_2G coincidam. Isso significa que $g_2^{-1}g_1 \in G_x$, ou seja, $g_2^{-1}g_1x = x$, logo $\xi(g_1G_x) = g_1x = g_2x = \xi(g_2G_x)$. A aplicação portanto independe do representante das classes. Observe que podemos reverter todo o argumento descrito acima e concluir que essa aplicação é também injetiva. A sobrejetividade é evidente uma vez que a ação é transitiva. $\square$

Como mencionamos anteriormente, em particular, um grupo G age transitivamente em cada uma de suas órbitas. Mediante este último resultado, sempre que for conveniente poderemos considerar bijeções entre G/G_x e $G \cdot x$.

1.3 Ações Contínuas

Nesta seção, retomamos o estudo dos grupos topológicos dentro do contexto das ações de grupos. Nesse caso, é importante considerarmos que uma ação de um grupo G agora em um espaço topológico X é contínua conforme a seguinte definição.

Definição 1.21. *Dizemos que uma ação* $\varphi : G \times X \to X$*, de um grupo topológico* G *em um espaço topológico* X *qualquer é contínua quando a aplicação* φ *é contínua.*

É interessante notar que, no caso de ações contínuas e transitivas, fixando-se um ponto $g \in G$ a aplicação parcial $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$ fornece um homeomorfismo de X em X. De fato, φ_g é claramente contínua. Se tivermos $gx = gy$, multiplicando a esquerda por g^{-1} temos $x = y$, donde essa aplicação é também injetiva. Quanto a sobrejetividade, dado $y \in X$, escrevemos $x = g^{-1}y$. Assim, $\varphi_g(x) = gx = y$. Por fim, a aplicação inversa é dada por $\varphi_{g^{-1}}$. Usaremos este fato posteriormente em uma ocasião oportuna.

Teorema 1.22. *Seja* $\varphi : G \times X \to X$ *uma ação contínua onde* X *é um espaço de Hausdorff. Para todo* $x \in X$*, os subgrupos de isotropia* G_x *são fechados.*

Demonstração: Imediato, pois $G_x = \{g \in G : \varphi(g, x) = x\} = \varphi^{-1}(x)$. □

Dada uma ação transitiva $\varphi : G \times X \to X$, a partir deste momento, estamos interessados em identificar topologicamente o quociente G/G_x com X, onde $x \in X$ é um ponto qualquer. Isso será feito por meio da aplicação ξ introduzida no Teorema 1.20. Precisamos então estabelecer condições de modo que essa aplicação seja um homeomorfismo. Para isto, começaremos definindo uma topologia no quociente G/G_x de modo a dar sentido à nossa discussão.

Definição 1.23. *Sejam* X *um espaço topológico,* E *uma relação de equivalência em* X *e* $\pi : X \to X/E$ *a projeção que associa a cada ponto* $x \in X$ *a classe* $\pi(x)$ *que o contém. No conjunto* X/E *definimos a topologia co-induzida por essa projeção pondo como abertos os subconjuntos* $B \subset X/E$ *tais que* $\pi^{-1}(B)$ *é aberto em* X*.*

Esta topologia definida acima é a mais fina que torna a projeção π contínua. Quando se tem dois espaços topológicos X, Y e uma relação de equivalência E sobre X, um método útil para se verificar a continuidade de uma aplicação $f : X \to Y$ por meio do quociente X/E é dado pelo resultado a seguir:

Teorema 1.24. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos e* E *uma relação de equivalência em* X*. Uma aplicação* $f : X/E \to Y$ *é contínua se, e somente se, a aplicação* $f \circ \pi : X \to Y$ *for contínua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/E \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração: Se f é contínua, $f \circ \pi$ é contínua pois π é contínua. Agora se $f \circ \pi$ é contínua, seja $B \subset Y$ um aberto. Então $(f \circ \pi)^{-1}(B) = \pi^{-1}(f^{-1}(B))$ é aberto em X. Então, $f^{-1}(B)$ é aberto no quociente X/E. □

Teorema 1.25. *Seja $H \subset G$ um subgrupo de um grupo topológico G. A projeção $\pi\colon G \to G/H$ é uma aplicação aberta. Se H é compacto, então ela é também fechada.*

Demonstração: Seja $U \subset G$ um aberto. Queremos mostrar que $\pi(U)$ é aberto em G/H. Isso ocorrerá, por definição da topologia quociente, se $\pi^{-1}(\pi(U))$ for aberto em G. Ora, $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH = \bigcup_{h\in H} Uh$. Logo, $\pi(U)$ é aberto. Agora, se H é compacto, seja $F \subset G$ um conjunto fechado. Então $\pi^{-1}(\pi(F)) = FH$ é fechado pelo Teorema 1.2. □

Teorema 1.26. *Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo. Se H é um subgrupo normal de G então G/H é um grupo topológico.*

Demonstração: Indicaremos por $\rho_{G/H}\colon G/H \times G/H \to G/H$ e $Inv_{G/H}\colon G/H \to G/H$ o produto e a inversa em G/H, respectivamente. Vamos mostrar a continuidade da operação de inversão. Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Inv"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "Inv_{G/H}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Seja $U \subset G/H$ um aberto. Temos $(Inv_{G/H} \circ \pi)^{-1}(U) = (\pi \circ Inv)^{-1}(U)$ é aberto em G. Pelo teorema 1.24, segue que $Inv_{G/H}(U)$ é aberto em G/H. A continuidade de $\rho_{G/H}$ se prova de maneira análoga. □

Teorema 1.27. *Sejam $H \subset G$ grupos topológicos. O quociente G/H é um espaço de Hausdorff se, e somente se, H é fechado*

Demonstração: Se G/H é Hausdorff, então $H = \pi^{-1}(eH)$ é fechado. Reciprocamente, suponhamos que H é fechado. Vamos mostrar que a diagonal $\Delta = \{(xH, xH) : x \in G\}$ é fechada em $G/H \times G/H$.

Considerando a projeção $\pi\colon G \times G \to G/H \times G/H$, $\pi(g, h) = (gH, hH)$, afirmamos que Δ é fechada se, e somente se, $\pi^{-1}(\Delta)$ é fechado. Com efeito, se $\pi^{-1}(\Delta)$ é fechado, $G \times G - \pi^{-1}(\Delta)$ é aberto. Assim, $\pi(G \times G - \pi^{-1}(\Delta)) = G/H \times G/H - \Delta$ é aberto, donde Δ é fechada.

Ora, temos $\pi(g, h) \in \Delta$ se, e somente se, $gH = hH$, ou seja, $h^{-1}g \in H$. Seja $f\colon G \times G \to G$ contínua, $f(x, y) = y^{-1}x$. Segue que $\pi^{-1}(\Delta) = f^{-1}(H)$ é fechado. □

Dado um espaço topológico X, seja $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos fechados de X. Diz-se que $\mathcal{F}$ possui a propriedade da interseção finita quando toda interseção finita de seus elementos é não-vazia. Isto é, tomando quaisquer $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n} \in \mathcal{F}$, vale $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \varnothing$. Quando necessário, nessas condições, podemos assumir que $F = F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n} \in \mathcal{F}$ pois, se assim não fosse, poderíamos substituir $\mathcal{F}$ pela família $\mathcal{F}'$ formada pelas interseções finitas de seus elementos, a qual também possui a propriedade da interseção finita.

É um fato conhecido da topologia geral que um espaço topológico X é compacto se, e somente se, a seguinte afirmação for verdadeira: se $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos fechados que possui a propriedade da interseção finita, então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \varnothing$. De um modo equivalente: se X é compacto então para toda família de subconjuntos fechados $\mathcal{F}$ tal que $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \varnothing$ existe uma quantidade finita de elementos $F_{\lambda_i} \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$, tais que $F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n} = \varnothing$. Ou seja, $\mathcal{F}$ não possui a propriedade da interseção finita. Essa caracterização dos conjuntos compactos será utilizada em nosso próximo resultado.

Teorema 1.28. *Sejam G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo. Se G/H e H são compactos então G é compacto.*

Demonstração: Tomamos uma família $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados de G, fechada por interseções finitas e que possui a propriedade da interseção finita. Sendo H compacto, o Teorema 1.25 garante que cada $\pi(F_\lambda) \in G/H$ é um subconjunto fechado.

Como $\pi(F_{\lambda_1}\cap\ldots\cap F_{\lambda_n}) \subset \pi(F_{\lambda_1})\cap\ldots\cap\pi(F_{\lambda_n})$, temos que a família $\mathcal{F}' = (\pi(F_\lambda))$ possui a propriedade da interseção finita. Pela compacidade de G/H, temos que existe uma classe $gH \in \bigcap \pi(F_\lambda)$. Observe que como subconjunto de G, a classe gH é homeomorfa a H, portanto é compacta. Do fato de $gH \in \bigcap \pi(F_\lambda)$ podemos concluir que, para todo λ existe $h_\lambda \in H$ tal que $g_\lambda = gh_\lambda \in F_\lambda$. Isso significa que todo $F_\lambda \in \mathcal{F}$ intercepta a classe lateral gH. Em particular, como $\mathcal{F}$ é fechada por interseções, temos que $F = F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}$ também intercepta gH. Assim

$$(F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}) \cap gH = (F_{\lambda_1} \cap gH) \cap \ldots \cap (F_{\lambda_n} \cap gH) \neq \varnothing.$$

Concluímos então que $(F_\lambda \cap gH)$ é uma família de subconjuntos fechados de gH que possui a propriedade da interseção finita. Pela compacidade de gH, segue que

$$\left(\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda\right) \cap gH = \bigcap_{\lambda\in L}(F_\lambda \cap gH) \neq \varnothing.$$

Portanto, $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda \neq \varnothing$, logo G é compacto. □

Se G é um grupo compacto, é claro que G/H é compacto seja qual for o subgrupo H, pois a projeção $\pi\colon G \to G/H$ é contínua. Porém, a compacidade de G não implica a de H. Por exemplo, considere o grupo compacto $S^1 = \{(cos(t), sen(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ e o subgrupo $H = \{(cos(t), sen(t)) : t \in \mathbb{Q}\}$. H é limitado (por estar contido em S^1), mas não é fechado. De fato, basta tomar um ponto irracional t tal que $(cos(t), sen(t))$ não pertença a H e uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de números racionais com $t_n \longmapsto t$. Se, porém, colocarmos a hipótese adicional de que H é fechado (ou aberto, pelo Teorema 1.9), teremos que H é fechado em um grupo compacto G. Logo, H é compacto.

Teorema 1.29. *Seja G um grupo topológico. Se $H \subset G$ é um subgrupo conexo então G e G/H possuem o mesmo número de componentes conexas.*

Demonstração: Note que em todo caso a quantidade de componentes conexas de G/H é sempre menor do que ou igual a quantidade de componentes conexas de G, pois a projeção $\pi\colon G \to G/H$ é contínua e sobrejetiva. Vamos mostrar que se $C \subset G/H$ é uma componente conexa, então $S = \pi^{-1}(C)$ é uma componente conexa de G. Nesse caso, como componentes conexas são conjuntos disjuntos, o número de componentes de G não poderá ser estritamente maior que o de G/H de modo que teremos a igualdade. Passemos então à demonstração. Primeiramente, temos que S é conexo. Escrevemos $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$, onde U, e V são abertos não vazios de G que interceptam S. Vamos mostrar que U e V não podem ser disjuntos. Ora,

$$C = \pi(S) = \pi(S \cap U) \cup \pi(S \cap V) \subset (C \cap \pi(U)) \cup (C \cap \pi(V)) \subset C.$$

Vale portanto a igualdade $C = (C \cap \pi(U)) \cup (C \cap \pi(V))$. Pela conexidade de C, deverá existir $g \in S$ tal que $\pi(g) = gH \in C \cap \pi(U) \cap (V)$. Observe que $\pi^{-1}(gH) = gH$, onde no primeiro membro, gH é um ponto/elemento de G/H, enquanto no segundo é um subconjunto de G. Assim, de $\pi(g) = gH \in C$, temos que $\pi^{-1}(gH) = gH \subset \pi^{-1}(C) = S$. Escrevemos então

$$gH = gH \cap S = (gH \cap U) \cup (gH \cap V),$$

onde $gH \cap U$ e $gH \cap V$ são abertos não-vazios em gH, que é homeomorfo a H, logo conexo. Pela conexidade de gH, U e V não podem ser disjuntos.

Por fim, resta mostrar que se $T \subset G$ é um conjunto conexo contendo S, então $S = T$. O subconjunto $\pi(T)$ é conexo em G/H e contem C. Como C é uma componente conexa de G/H, devemos ter $C = \pi(T)$, de onde concluímos que $T \subset \pi^{-1}(\pi(T)) = \pi^{-1}(C) = S$. □

Corolário 1.30. *Sejam G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo. Se G/H e H são conexos então G é conexo.*

Assim como no caso de grupos compactos, a recíproca deste último resultado também não é verdadeira. Novamente pela continuidade da aplicação projeção, se G é conexo, então o quociente G/H também é. Por outro lado, podemos ter H desconexo. O exemplo clássico é dado pela esfera unitária S^1 quando escrita como quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1.4 Espaços Topológicos como Quocientes de Grupos

Dados um grupo topológico G, um espaço topológico X e um ponto fixo $x \in X$, seja $\varphi\colon G \times X \to X$ uma ação contínua e transitiva. Neste momento, voltamos nossa atenção para a bijeção $\xi\colon G/G_x \to X$ descrita no Teorema 1.20. Nosso objetivo é obter condições que nos permitam concluir que ξ é um homeomorfismo. Como será visto posteriormente, este resultado é de extrema importância, uma vez que permite identificar certos objetos topológicos como quocientes de grupos facilitando, assim, o estudo de suas propriedades.

Primeiramente, um procedimento simples é mostrar que ξ sempre é uma aplicação contínua. Com efeito, pelo Teorema 1.24, ξ será contínua se $\xi \circ \pi \colon G \to X$ for contínua. Ora, $(\xi \circ \pi)(g) = \xi(\pi(g)) = \xi(gG_x) = gx = \varphi(g, x)$, para todo $g \in G$. Portanto, ξ é contínua.

O problema está no fato de que, sem supor hipóteses adicionais sobre G e X, ξ pode não ser uma aplicação aberta (ou seja, sua inversa é descontínua) como podemos ver no exemplo seguinte:

Exemplo 1.8. *Considere um grupo G munido de duas topologias τ_1, τ_2, de modo que τ_2 esteja contida propriamente em τ_1 e G é um grupo topológico em relação à τ_1. Vamos escrever $G_1 = (G, \tau_1)$ e $G_2 = (G, \tau_2)$. Definimos uma ação $\varphi \colon G_1 \times G_2 \to G_2$ por $\varphi(g, h) = gh$. Seja qual for o ponto $h \in G_2$, temos que o subgrupo de isotropia $G_{1h} = \{e\}$. Logo, $G_1/G_{1h} = G_1$. Segue que $\xi_h \colon G_1/G_{1h} = G_1 \to G_2$ é dada por $\xi_h(g) = gh$. Em particular, se $h = e$, $\xi_e = Id \colon G_1 \to G_2$, que não é uma aplicação aberta, pois a topologia de G_2 é estritamente menos fina que a de G_1.*

No lema a seguir, consideramos uma ação contínua e transitiva de um grupo G em um espaço X.

Lema 1.31. *Suponhamos que exista um ponto $x_0 \in X$ tal que para todo aberto $U \subset G$ contendo o elemento neutro, tenhamos $x_0 \in int(U \cdot x_0) = int(\xi_{x_0}(U))$. Então $\xi_x \colon G/G_x \to X$ é um homeomorfismo, seja qual for $x \in X$.*

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que ξ_{x_0} é um homeomorfismo. Resta mostrar apenas que esta aplicação é aberta. Seja então $V \subset G$ um aberto e $gx_0 \in \xi_{x_0}(V) = V \cdot x_0$. Sendo $g \in V$ temos que o conjunto $U = g^{-1}V$ é uma vizinhança aberta da identidade. Logo, $U \cdot x_0$ contém x_0 em seu interior. Assim, $V \cdot x_0 = (gU) \cdot x_0 = g(U \cdot x_0)$. Ou seja, $V \cdot x_0$ contém gx_0 em seu interior. Como o ponto gx_0 foi tomado arbitrariamente, devemos ter que $V \cdot x_0$ é aberto.

Considerando agora um ponto $x \in X$ qualquer, como a ação é transitiva existe $h \in G$ tal que $x = hx_0$. Definimos o homeomorfismo $\eta \colon G/Gx \to G/G_{x_0}$, pondo

$\eta(gG_x) = ghG_{x_0}$. Temos $\xi_x(gG_x) = gx = ghx_0 = \xi_{x_0}(ghG_{x_0})$. Ou seja, $\xi_x = \xi_{x_0} \circ \eta$ sendo, portanto, um homeomorfismo. $\square$

Lema 1.32. *Seja $D \subset G$ um subconjunto denso de um grupo topológico G. Se $U \subset G$ é uma vizinhança aberta do elemento neutro, então podemos escrever $G = \bigcup_{g \in D} gU$.*

Demonstração: Devemos mostrar que para todo $x \in G$, existe $g \in D$ tal que $x \in gU$. Tome $V = U \cap U^{-1}$. Para todo $x \in G$, existe um ponto $g \in D$ tal que $g \in xV$. De modo equivalente, $x^{-1}g \in V$. Como $V = V^{-1}$, temos $g^{-1}x \in V$, o que implica $x \in gV \subset gU$. $\square$

Teorema 1.33. *Sejam G um grupo topológico separável localmente compacto e X um espaço de Baire. Suponhamos que X seja Hausdorff. Se G exerce uma ação contínua e transitiva sobre X, então a aplicação $\xi_x\colon G/G_x \to X$ é um homeomorfismo, seja qual for $x \in X$.*

Demonstração: Vamos deixar um ponto fixo $x_0 \in X$ e tomar uma vizinhança qualquer U do elemento neutro. Pelo Lema 1.31, é suficiente mostrar que $U \cdot x_0$ contém x_0 em seu interior. Sejam K um um compacto simétrico tal que $e \in int(K)$, $K^2 \subset U$ e $D = \{g_1, \dots, g_n, \dots\}$ um subconjunto denso em G. Pelo lema anterior, os conjuntos g_nK cobrem G. Como X é Hausdorff, por serem compactos os conjuntos $g_nK \cdot x_0$ são fechados em X. Logo, estes conjuntos formam uma cobertura fechada de X. Como X é um espaço de Baire, deve existir algum $g_{n_0}K \cdot x_0$ com interior diferente do vazio. Seja então $g_{n_0}g \cdot x_0$ um ponto no interior de $g_{n_0}K \cdot x_0$. Considere a aplicação $\lambda\colon X \to X$, definida por $\lambda(x) = g^{-1}g_{n_0}^{-1} \cdot x$. Como λ é um homeomorfismo, temos que x_0 é um ponto interior de $g^{-1}g_{n_0}^{-1}(g_{n_0}K \cdot x_0)$, que está contido em $U \cdot x_0$ pois

$$g^{-1}g_{n_0}^{-1}(g_{n_0}K \cdot x_0) = g^{-1}K \cdot x_0 \subset K^2 \cdot x_0 \subset U \cdot x_0.$$

Segue portanto o resultado. $\square$

Como afirmamos anteriormente, este resultado é de suma importância, pois permite identificar topologicamente, sob certas hipóteses, um objeto por meio de um quociente de grupos. As Proposições 1.28 e 1.29 são muitas vezes empregadas para obter informações conforme mostramos no exemplo a seguir:

Exemplo 1.9. *Seja* $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, u\rangle = 1\}$ *a esfera unitária de dimensão* $n-1$. *Seja qual for a matriz ortogonal* X, *temos* $|Xu| = |u|$. *Logo, podemos considerar a ação contínua de* $O(n)$ *sobre* S^{n-1} *dada por* $(X, u) \longmapsto Xu$. *Dado* $v \in S^{n-1}$, *podemos estendê-lo a uma base ortonormal* $\{v = v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$. *Assim, a matriz* X *que tem esta base como vetores coluna é tal que* $Xe_1 = v$. *Isso mostra que essa ação é transitiva, pois dados* $u, v \in S^{n-1}$ *tomamos matrizes ortogonais* X, Y *tais que* $Xe_1 = u$ *e* $Ye_1 = v$. *Logo,* $YX^{-1}u = v$.

Como deve ter ficado evidente acima, a órbita $O(n)\cdot e_1 = S^{n-1}$. *Calculemos então o estabilizador* $O(n)_{e_1}$.

Seja $X = [x_{ij}]$ *uma matriz ortogonal tal que* $Xe_1 = e_1$. *Isso significa que* e_1 *é o primeiro vetor-coluna de* X. *Como seus vetores-coluna formam um conjunto ortonormal, se* $v_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj})$ *representa o j-ésimo vetor-coluna,* $j = 2, \ldots, n$, *devemos ter* $\langle e_1, v_j\rangle = x_{1j} = 0$. *Assim,* X *é uma matriz da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

onde $Y \in O(n-1)$. *Temos então que* G_{e_1} *é homeomorfo a* $O(n-1)$. *O grupo* $O(n)$ *é separável por ser um subespaço de um espaço separável. Por um motivo semelhante,* S^{n-1} *é um espaço de Baire. Do Teorema 1.33, temos que* $O(n)/O(n-1)$ *é homeomorfo a* S^{n-1}. *Quando* $n = 2$, $O(1) = \{-1, 1\}$ *é compacto. Supondo que* $O(n-1)$ *é compacto, para algum* $n \geq 2$, *o Teorema 1.28 garante que* $O(n)$ *é compacto. Por indução, temos* $O(n)$ *é compacto para todo* $n \in \mathbb{N}$.

É claro que $O(n)$ *não é conexo, pois se* $\det(X) = 1$ *e* $\det(Y) = -1$, *não existe um caminho contínuo contido em* $O(n)$ *ligando* X *a* Y. *Por outro lado, usando um argumento análogo, podemos mostrar que* $SO(n)$ *também exerce uma ação contínua e transitiva sobre* S^{n-1}. *Desta vez,* $SO(n)_{e_1}$ *é homeomorfo a* $SO(n-1)$. *Logo,* $SO(n)/SO(n-1)$ *é homeomorfo a* S^{n-1}. *Temos que* $SO(1) = \{1\}$ *é conexo. Por indução, utilizando agora o Teorema 1.29, concluímos que* $SO(n)$ *é conexo para todo* $n \in N$.

Capítulo 2

Grupos Lineares Clássicos

Deste ponto em diante, a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica tanto o produto interno hermitiano em $\mathbb{C}^n$ quanto o produto interno usual do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Isto não é um abuso de notação pois o produto interno em $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como o produto interno hermitiano restrito aos vetores complexos com coordenadas reais. Usaremos também a notação trX para indicar o traço $trX = x_{11} + \cdots + x_{nn}$ de uma matriz $X = [x_{ij}] \in M(n; \mathbb{C})$.

2.1 Grupos de Lie de Matrizes

Seja $M(n; \mathbb{C})$ o espaço vetorial formado pelas matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas. Tomando uma matriz $X = [x_{ij}] \in M(n; \mathbb{C})$ e escrevendo os elementos de suas colunas ordenadamente em uma mesma linha, obtemos uma correspondência biunívoca $[x_{ij}] \longmapsto (x_{11}, \ldots, x_{nn})$ entre $M(n; \mathbb{C})$ e o espaço $\mathbb{C}^{n^2}$. Por meio desta correspondência, podemos definir uma norma no espaço das matrizes complexas de ordem n considerando uma matriz complexa como um vetor do espaço $\mathbb{C}^{n^2}$. Em termos mais precisos: dada uma matriz $X = [x_{ij}] \in M(n; \mathbb{C})$, sua norma é o número real

$$|X|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Esta norma é conhecida como norma de **Frobenius**. Para todo $X, Y \in M(n; \mathbb{C})$, ela satisfaz as seguintes propriedades:

$$|X + Y|_F \leq |X|_F + |Y|_F \tag{2.1}$$

$$|XY|_F \leq |X|_F |Y|_F \tag{2.2}$$

A primeira destas propriedades é conhecida como desigualdade triangular e é válida em qualquer espaço vetorial normado. A segunda terá sua importância justificada quando estudarmos as propriedades da aplicação exponencial. Ela decorre diretamente da desigualdade de *Cauchy-Schwarz*: dados $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n)$ vetores em $\mathbb{C}^{n^2}$, tem-se

$$|u_1 v_1 + ... + u_n v_n|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right).$$

Dada uma matriz $X = [x_{ij}] \in M(n;\mathbb{C})$ denotamos por $X^* = \overline{X^T}$ sua adjunta. Equivalentemente, a norma de Frobenius pode também ser expressa por $|X|_F = \sqrt{trX^*X}$. Seja $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ um vetor unitário. Ou seja, $|u|^2 = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 = 1$.

$$|Xu|^2 = \left|\sum u_i X e_i\right|^2 \leq \left(\sum |u_i||Xe_i|\right)^2 \leq \left(\sum |u_i|^2\right)\left(\sum |Xe_i|^2\right) = |X|_F^2.$$

Ou seja, $|Xu| \leq |X|_F$, se u é um vetor unitário. Se definirmos a norma $|X| = sup\{|Xu| : u \in \mathbb{C}^n, |u| = 1\}$, temos $|X| \leq |X|_F$. Concluímos também de todas estas considerações que para todo vetor $v \in \mathbb{C}^n$, $|Xv| \leq |X|_F \cdot |v|$. Em particular, se v é um autovetor associado ao autovalor λ, concluímos que $|\lambda| \leq |X|_F$. Utilizaremos este fato posteriormente em uma ocasião oportuna. Deste ponto em diante, usaremos a norma de Frobenius consistentemente. Por este motivo, escreveremos simplesmente $|X|_F = |X|$.

A métrica proveniente da norma de Frobenius dada acima define em $M(n;\mathbb{C})$ uma topologia relativamente a qual a função determinante $det\colon M(n;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ é contínua. Denotamos por $Gl(n;\mathbb{C})$ o subconjunto de $M(n;\mathbb{C})$ formado pelas matrizes com determinante não nulo. Ou seja, $Gl(n;\mathbb{C})$ é o complementar do conjunto $det^{-1}(0)$, logo é um subconjunto aberto de $M(n;\mathbb{C})$. Se $X \in Gl(n;\mathbb{C})$ então existe uma matriz $X^{-1} \in Gl(n;\mathbb{C})$, denominada a inversa de X, tal que $XX^{-1} = X^{-1}X = I$, onde I denota a matriz identidade. Além disso, o produto de duas matrizes com determinante não nulo é ainda uma matriz com determinante não nulo. Estas considerações mostram que com a operação de multiplicação de matrizes, $Gl(n;\mathbb{C})$ é um grupo chamado de *Grupo Linear Geral Complexo*.

Podemos ainda considerar $Gl(n;\mathbb{C})$ como um subespaço topológico de $M(n;\mathbb{C})$ (a topologia de $Gl(n;\mathbb{C})$, neste caso, será a mesma proveniente da norma de Frobenius). Seguindo o mesmo raciocínio aplicado ao Exemplo 1.4 no Capítulo 1, as aplicações $(X,Y) \longmapsto XY$ e $X \longmapsto X^{-1}$ que determinam a estrutura de grupo de $Gl(n;\mathbb{C})$ tornam-se aplicações contínuas, de onde concluímos que $Gl(n; \mathbb{C})$ é um grupo topológico.

Definição 2.1. *Seja $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência de matrizes complexas. Dizemos que X_m converge para uma matriz $X \in M_n(\mathbb{C})$, e escrevemos $\lim\limits_{m \to \infty} X_m = X$ quando cada entrada de X_m converge para a entrada correspondente de X.*

Definição 2.2. *Dizemos que um subgrupo $G \subset Gl_n(\mathbb{C})$ é um Grupo de Lie de Matrizes quando G é um subgrupo fechado de $Gl_n(\mathbb{C})$. Os Grupos de Lie de matrizes também são chamados de Grupos de Lie Lineares.*

A condição de que $G \subset Gl(n; \mathbb{C})$ seja um subgrupo fechado de modo algum é inócua. Ela nos permite mostrar que os grupos de Lie de matrizes são aqueles para os quais podemos associar uma álgebra de Lie conforme demonstrado no Teorema 3.15.

De acordo com a definição, a verificação de que $G \subset Gl(n; \mathbb{C})$ é um Grupo de Lie de Matrizes pode ser feita por meio de sequências: se para toda sequência (X_m) em G com $\lim X_m = X$ tivermos que X não é invertível ou $X \in G$, então G é fechado. Logo, é um Grupo de Lie. Uma outra maneira seria escrever G como interseção de $Gl(n; \mathbb{C})$ com um subconjunto fechado de $M(n; \mathbb{C})$ ou ainda, mostrar que G é a imagem inversa de um subconjunto fechado por uma aplicação contínua tendo como domínio $Gl(n; \mathbb{C})$. Todos estes métodos podem ser aplicados nos exemplos seguintes sem dificuldades, de modo que não nos estenderemos preenchendo todos os detalhes.

Exemplo 2.1. *Como todo espaço topológico é fechado em si mesmo, temos que o próprio $Gl(n; \mathbb{C})$ é um Grupo de Lie. Do mesmo modo, o grupo trivial, reduzido à matriz identidade, é um subconjunto fechado. Considerando agora o espaço $M(n; \mathbb{R})$ das matrizes reais de ordem n, teremos que ele é fechado em $M(n; \mathbb{C})$. Logo, o grupo $Gl(n; \mathbb{R}) = M(n; \mathbb{R}) \cap Gl(n; \mathbb{C})$ das matrizes invertíveis com entradas reais é um Grupo de Lie.*

Exemplo 2.2. *Considere o conjunto $Sl(n, \mathbb{C})$ formado pelas matrizes $X \in Gl(n; \mathbb{C})$ tais que $det(X) = 1$. É simples provar que se $X, Y \in Sl(n, \mathbb{C})$ então $XY, X^{-1} \in Sl(n, \mathbb{C})$, o que mostra que este conjunto é um subgrupo de $Gl_n(\mathbb{C})$ conhecido como Grupo Linear Especial ou Grupo Unimodular. Se considerarmos a restrição $det\colon Gl(n; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, temos que $Sl(n, \mathbb{C}) = det^{-1}(1)$. Portanto, $Sl(n, \mathbb{C})$ é também um Grupo de Lie. De modo análogo ao exemplo anterior, podemos definir o Grupo Unimodular $Sl(n, \mathbb{R})$ das matrizes* *reais com determinante 1. Temos $Sl(n,\mathbb{R}) = M(n;\mathbb{R}) \cap Sl(n,\mathbb{C})$ sendo, portanto, um Grupo de Lie.*

Exemplo 2.3. *Uma matriz $X = [x_{ij}] \in M(n;\mathbb{C})$ é chamada unitária quando $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\bar{x}_{kj} = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). Isto significa que os vetores-coluna de X são dois a dois ortogonais e de comprimento igual a 1. De modo equivalente, podemos dizer que uma matriz $X = [x_{ij}]$ é unitária quando preserva o produto interno hermitiano de $\mathbb{C}^n$: tem-se $\langle Xu, Xv\rangle = \langle u, v\rangle$, para todo $u, v \in \mathbb{C}^n$. Ou ainda, quando $XX^* = X^*X = I$, onde $X^* = \overline{X^T}$ é o conjugado transposto ou a adjunta de X. O grupo das matrizes unitárias de ordem n é chamado de Grupo Unitário e será denotado por $U(n)$.*

Como $det(X^*) = \overline{det(X)}$, segue que $det(X^*X) = \overline{det(X)}\cdot det(X) = |det(X)|^2 = 1$, para todo $X \in U(n)$. Logo, $|det(X)| = 1$. O Grupo Unitário Especial, denotado por $SU(n)$, é então definido como segue:

$$SU(n) = \{X \in U(n) : det(X) = 1\}.$$

Exemplo 2.4. *O Grupo Ortogonal $O(n)$ e seu subgrupo $SO(n)$ introduzidos no Exemplo 1.4 também são grupos de Lie.*

Exemplo 2.5. *Podemos proceder de maneira análoga ao Exemplo 2.3 do seguinte modo: definimos a forma bilinear simétrica $b(v,w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$, $v = (v_1,\ldots,v_n), w = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n$, a qual não se trata de um produto interno pois não é definida. Definimos então o Grupo Ortogonal Complexo, indicado por $O(n;\mathbb{C})$ como o grupo formado pelas matrizes $X \in M(n;\mathbb{C})$ tais que $b(Xv, Xw) = b(v,w)$, para todo $v, w \in \mathbb{C}^n$. Como no exemplo anterior, segue da definição que $X \in O(n;\mathbb{C})$ se e somente se $XX^T = X^TX = I$, de onde concluímos que $det(X) = \pm 1$. A intercessão deste grupo com as matrizes de determinante 1 forma um subgrupo chamado de Grupo Ortogonal Especial Complexo, denotado por $SO(n,\mathbb{C})$. Temos ainda $O(n) = M(n;\mathbb{R}) \cap O(n;\mathbb{C})$ e $SO(n) = M(n;\mathbb{R}) \cap SO(n;\mathbb{C})$*

Exemplo 2.6. *Alguns Grupos de Lie podem ser definidos em termos de formas bilineares antissimétricas. Este é o caso dos Grupos Simpléticos $Sp(n;\mathbb{R})$, $Sp(n;\mathbb{C})$ e $Sp(n)$. Considere a forma bilinear $b : \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ definida por $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i$.*

Definimos então o Grupo Simplético Complexo $Sp(n;\mathbb{C})$ como o conjunto de todas as matrizes $X \in M(2n;\mathbb{C})$ tais que $b(Xx, Xy) = b(x,y)$, para todo $x, y \in \mathbb{C}^{2n}$.

Pode-se mostrar ainda que $Sp(n;\mathbb{C})$ é o conjunto das matrizes $X \in M(2n;\mathbb{C})$ tais que $X^T BX = B$, onde B é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim como nos casos anteriores, temos $Sp(n;\mathbb{R}) = M(2n;\mathbb{R}) \cap Sp(n;\mathbb{C})$. E finalmente, temos, por definição, $Sp(n) = Sp(n;\mathbb{C}) \cap U(2n)$. Estes grupos são comuns em física no estudo de Mecânica Clássica.

Exemplo 2.7. *Uma isometria no espaço $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias. Mais precisamente: para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale a relação $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. O Grupo Euclidiano $E(n)$ é o grupo formado por todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$.*

Interpretando uma matriz $X \in M_n(\mathbb{R})$ como uma transformação linear $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vemos que os elementos do Grupo Ortogonal $O(n)$ são particularmente isometrias, logo $O(n) \subset E(n)$. Não é verdade, porém, que todo elemento do Grupo Euclidiano seja uma aplicação linear. Fixando um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, podemos definir a translação $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x + v$. Um cálculo simples mostra que a translação T é uma isometria.

Proposição 2.3. *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria. Existem uma aplicação ortogonal $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e uma translação $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que $f = T \circ S$.*

Demonstração: A demonstração se baseia em duas observações:
1. Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria tal que $T(0) = 0$, então T é linear (necessariamente ortogonal). Com efeito, a condição $|T(x)-T(y)| = |x-y|$ é equivalente a $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ e esta última propriedade implica $|T(x)|^2 = |x|^2$. Temos então que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned}
|T(\lambda x) - \lambda T(x)|^2 &= \langle T(\lambda x) - \lambda T(x), T(\lambda x) - \lambda T(x)\rangle \\
|T(\lambda x) - \lambda T(x)|^2 &= |T(x)|^2 - 2\lambda\langle T(\lambda x), T(x)\rangle + \lambda^2|T(x)|^2 \\
|T(\lambda x) - \lambda T(x)|^2 &= \lambda^2|x|^2 - 2\lambda\langle \lambda x, x\rangle + \lambda^2|x|^2 = 0
\end{aligned}$$

Logo, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Desenvolvendo $|T(x + y) - T(x) - T(y)|^2$ de modo semelhante ao caso acima, chegamos a conclusão de que $T(x + y) = T(x) + T(y)$. Portanto, T é linear.

2. Sejam f uma isometria e $v \in \mathbb{R}^n$. A aplicação $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = f(x) + v$ é uma isometria: $|g(x) - g(y)| = |f(x) + v - f(y) - v| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$

Tendo em mente as observações acima, dada uma isometria f, seja $f(0) = v$, a aplicação $S(x) = x - v$ é uma aplicação ortogonal. Logo, $f = T \circ S$, onde $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a translação pelo vetor v, $S(x) = x + v$. □

Sempre que for conveniente, indicaremos uma isometria $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por meio do par (T, v) onde $f(x) = T(x) + v$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, T é uma aplicação ortogonal. Dadas duas isometrias $f = (T, v)$, $g = (S, w)$, para todo x temos que $(f \circ g)(x) = f(S(x) + w) = T(S(x) + w) + v = TS(x) + T(w) + v$. Assim, de acordo com essa notação, a multiplicação em $E(n)$ é dada por $(T, v)(S, w) = (TS, T(w) + v)$.

Como deve ter ficado evidente, o Grupo Euclidiano não é um subgrupo de $Gl(n, \mathbb{C})$, pois nem todos os seus elementos são aplicações lineares. No entanto, $E(n)$ é isomorfo ao subgrupo fechado $O(n) \times \mathbb{R}^n$ de $Gl(n+1, \mathbb{C})$ por meio da correspondência que associa a cada isometria (T, v) à matriz

$$(T, v) \longmapsto \begin{pmatrix} & & & v_1 \\ & T & & \vdots \\ & & & v_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Segue portanto que $E(n)$ é, a menos de isomorfismo, um grupo de Lie.

2.2 Grupos Compactos

Em Topologia Geral, um espaço compacto é definido em termos de coberturas abertas. No entanto, é usual definirmos um grupo de Lie de matrizes compacto como sendo um subconjunto limitado e fechado de $M(n; \mathbb{C})$, uma vez que este espaço pode ser pensado como $\mathbb{C}^{n^2}$. Temos assim a definição a seguir:

Definição 2.4. *Um grupo de Lie de matrizes é dito compacto quando satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se (X_m) é uma sequência de matrizes em G, com $\lim_{m\to\infty} X_m = X$, então $X \in G$.*

2. *Existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $X = [x_{ij}] \in G$, $|x_{ij}| \leq c$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplo 2.8. *Conforme demonstrado no Capítulo 1, os grupos* $O(n)$ *e* $SO(n)$ *são compactos. Isto pode ser demonstrado de um modo direto e simples utilizando a definição acima. Note que o limite de uma sequência de matrizes ortogonais é ainda ortogonal. Além disso, os vetores-coluna de uma matriz* $X = [x_{ij}] \in O(n)$ *tem norma igual a* 1. *Logo,* $|x_{ij}| \leq 1$. *Por um argumento inteiramente análogo a este, pode-se mostrar que os grupos* $U(n)$ *e* $SU(n)$ *também são compactos. No entanto, podemos usar os Teoremas 1.28 e 1.33 e obter o mesmo resultado por meio da ação de* $U(n)$ *e* $SU(n)$ *em* $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 2.9. *Os grupos* $Gl(n;\mathbb{R})$ *e* $Gl(n;\mathbb{C})$ *não são compactos por não serem nem limitados nem fechados. Os grupos* $Sl(n;\mathbb{R})$ *e* $Sl(n;\mathbb{C})$, *excetuando os casos triviais* $Sl(1,\mathbb{R}) = Sl(1,\mathbb{C}) = \{1\}$, *não são compactos. Considere as matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} m & & & & \\ & 1/m & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

onde os termos que não figuram são iguais a zero. Essas matrizes tem sempre determinante igual a 1, *dado pelo produto dos elementos de sua diagonal. Como* m *é um número complexo qualquer, podemos escolhe-lo de modo que* $|m|$ *seja arbitrariamente grande. Ou seja, qualquer que seja* $c \in \mathbb{R}$, *podemos encontrar uma matriz* $X = [x_{ij}] \in Sl(n;\mathbb{C})$ *tal que* $|x_{ij}| > c$, *para algum* x_{ij}.

Quanto a $O(n;\mathbb{C})$ *e* $SO(n;\mathbb{C})$, *eles são compactos quando* $n = 1$, *pois se reduzem ao caso trivial. Vamos mostrar que* $SO(n;\mathbb{C})$ *não é limitado quando* $n > 1$, *implicando que* $O(n;\mathbb{C})$ *também não é. Para isso, basta considerar as matrizes da forma*

$$X_t = \begin{pmatrix} cosh(t) & 0 & \cdots & 0 & -i \cdot senh(t) \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & I & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ i \cdot senh(t) & 0 & \cdots & 0 & cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que $X_t \in SO(n;\mathbb{C})$, para todo $t \in \mathbb{R}$ pelas relações $XX^T = X^TX = I$ e $det(X_t) = cosh^2(t) + (-1)^{n+1} i \cdot senh(t)(-1)^n(-i) \cdot senh(t) = cosh^2(t) - senh^2(t) = 1$. Como as funções hiperbólicas não são limitadas, o resultado segue.

Os grupos $Sp(n;\mathbb{R})$ e $Sp(n;\mathbb{C})$ também não são compactos seja qual for $n \in \mathbb{N}$. Os exemplos seguem modelos similares do grupo ortogonal complexo. Por outro lado, $Sp(n)$ é compacto uma vez que é definido por $Sp(n;\mathbb{C}) \cap U(2n)$.

E por último, o grupo euclidiano $E(n)$ não é compacto por ser homeomorfo a $O(n) \times \mathbb{R}^n$.

2.3 Grupos Conexos

No âmbito da Topologia Geral, conexidade e conexidade por caminhos são ideias distintas. Temos que a última implica a primeira, mas em geral não vale a recíproca. Com relação aos grupos de Lie de matrizes, porém, ocorre uma equivalência entre estes dois conceitos. Comecemos com a definição a seguir.

Definição 2.5. *Dizemos que um grupo de Lie de matrizes G é conexo se para todo $X, Y \in G$, existe uma aplicação contínua $\lambda\colon [0,1] \to G$ tal que $\lambda(0) = X$ e $\lambda(1) = Y$.*

A definição dada acima é, estritamente falando, de espaços conexos por caminhos e não simplesmente de espaços conexos em seu sentido usual. No entanto, todo grupo de Lie de matrizes G é, como a terminologia sugere, um grupo de Lie propriamente dito, ou seja, uma variedade diferenciável do espaço $M(n;\mathbb{C})$ (não demonstraremos este fato aqui. Veja [7] p. 52 Corolário 2.33). Isso significa que G é localmente conexo por caminhos. Logo, sua conexidade implica em conexidade por caminhos.

Exemplo 2.10. *O grupo $SO(n)$, conforme demonstramos no Capítulo 1, é conexo. Para cada matriz $X \in SO(n)$, podemos assocar a matriz $Y \in O(n) - SO(n)$, obtida de X por meio da permutação de duas colunas pré-determinadas. Essa correspondência é um homeomorfismo. Logo, o complementar de $SO(n)$ é conexo. Assim, $O(n)$ tem duas componentes conexas.*

Exemplo 2.11. *Mostraremos agora que $Sl(n;\mathbb{R})$ é conexo. Primeiramente, afirmamos que $Sl(n;\mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Sejam v um vetor não-nulo e $\{v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal do complemento ortogonal $[v]^\perp$. Tome então a matriz $X = [v/|v|, v_2, v_3, \ldots, v_n]$, indicada por seus vetores coluna. Mais precisamente, X é uma matriz ortogonal. Podemos, sem perda de generalidade, considerar que os vetores $v/|v|, v_2, v_3, \ldots, v_n$ foram ordenados de modo que $det(X) = 1$, logo $X \in Sl(n;\mathbb{R})$. Além disso, $Xe_1 = v$. Portanto, a ação é contínua e transitiva. O subgrupo de isotropia $Sl(n;\mathbb{R})_{e_1}$ é composto pelas matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

onde $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $Y \in Sl(n-1;\mathbb{R})$. Assim, o subgrupo de isotropia de e_1 é isomorfo a $Sl(n-1;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Pelo Teorema 1.33, o quociente $Sl(n;\mathbb{R})/Sl(n-1;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$, o qual é conexo. Notando agora que $Sl(1;\mathbb{R}) = \{1\}$, usando o Teorema 1.29 podemos iniciar um processo de indução e mostrar que $Sl(n;\mathbb{R})$ é conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Quanto a conexidade de $Sl(n;\mathbb{C})$ veja demonstração em [7], p. 14 Proposição 1.10.

Exemplo 2.12. *Como sabemos, o grupo $Gl(n;\mathbb{R})$ não é conexo, pois não podemos ligar por um caminho contínuo, inteiramente contido em $Gl(n;\mathbb{R})$, duas matrizes cujos determinantes tem sinais opostos. Porém, o subgrupo $G^+ = Gl(n;\mathbb{R})^+$ formado pelas matrizes de determinante positivo é conexo. Isto também pode ser demonstrado via ação de grupos ou, mais simplesmente, utilizando a conexidade de $Sl(n;\mathbb{R})$ demonstrada no exemplo anterior. De fato, sejam $X = [v_1, \ldots, v_n]$, $Y = [w_1, \ldots, w_n]$ matrizes de determinante positivo. Ligamos primeiramente X à matriz $X' = [v_1, \ldots, v_n/det(X)]$ por meio do caminho $\lambda(t) = [v_1, \ldots, v_n/\delta(t)]$, onde $\delta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ é uma função que liga o ponto $\delta(0) = 1$ ao ponto $\delta(1) = det(X)$. Em seguida, ligamos X' a matriz $Y' = [w_1, \ldots, w_n/det(Y)]$ (isso pode ser feito pois X' e Y' pertencem a $Sl(n;\mathbb{R})$. Por fim, ligamos Y' a Y por um processo* *análogo.*

Quanto ao grupo $Gl(n;\mathbb{C})$, afirmamos que ele é conexo. Existem mais de uma demonstração deste fato. Preferimos a seguinte: sejam $X, Y \in Gl(n;\mathbb{C})$. Como a função determinante $det\colon M(n;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é um polinômio em n^2 variáveis complexas existe um número finito de pontos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tais que $det(\lambda_i X + (1-\lambda_i)Y) = 0$. Definimos então um caminho contínuo $f\colon [0,1] \to Gl(n;\mathbb{C})$ por $f(t) = \lambda(t)X + (1-\lambda(t))Y$, onde $\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é um caminho contínuo tal que $\lambda(t) \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, para todo $t \in [0,1]$.

Apresentamos a seguir uma tabela listando como os principais grupos de Lie lineares se comportam quanto a conexidade:

Grupo	**N. de componentes**	**Grupo**	**N. de componentes**
$Gl(n;\mathbb{C})$	1	$SO(n)$	1
$Gl(n;\mathbb{R})$	2	$E(n)$	2
$Sl(n;\mathbb{C})$	1	$Sp(n;\mathbb{C})$	1
$Sl(n;\mathbb{R})$	1	$Sp(n;\mathbb{R})$	1
$U(n)$	1	$Sp(n)$	1
$SU(n)$	1	$O(n;\mathbb{C})$	2
$O(n)$	2	$SO(n;\mathbb{C})$	1

Não apresentaremos as demonstrações de todos estes resultados. Informamos que a maioria destas encontram-se no Capítulo 1 de [7].

Capítulo 3

O Teorema da Decomposição de Mostow

3.1 A Aplicação Exponencial

A aplicação exponencial é uma aplicação contínua $e\colon M(n;\mathbb{C}) \to Gl(n;\mathbb{C})$ definida do seguinte modo: dada $X \in M(n;\mathbb{C})$ pomos

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^m}{m!} + \cdots \tag{3.1}$$

A série que se encontra definida acima é convergente. De fato, de 2.2 temos que para toda matriz X e todo $m \in \mathbb{N}$ vale $|X^m| \leq |X|^m$. Assim,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{X^m}{m!} \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|X|^m}{m!} = e^{|X|} < \infty.$$

Logo, a série em questão é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Com o objetivo de facilitar a escrita, escreveremos às vezes $exp(X)$ em lugar de e^X.

Se observarmos atentamente, não está claro pela definição acima que a aplicação exponencial toma de fato valores em $Gl(n;\mathbb{C})$. Isto ficará evidente na demonstração do item 4 da

Proposição 3.1. *A aplicação exponencial possui as seguintes propriedades:*

1. $(e^X)^T = e^{X^T}$

2. $\overline{(e^X)} = e^{\overline{X}}$

3. *Se as matrizes* X, Y *comutam então* $e^{X+Y} = e^X e^Y$

4. A matriz e^X é invertível e $(e^X)^{-1} = e^{-X}$

5. Se P é uma matriz invertível, então $e^{PXP^{-1}} = Pe^X P^{-1}$

Demonstração: Comecemos pela propriedade 1. Indicando por $S_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{X^m}{m!}$ as somas parciais na definição da exponencial, temos

$$e^{X^T} = \lim_{p\to\infty} S_p^T = \left(\lim_{p\to\infty} S_p\right)^T = (e^X)^T$$

onde na segunda igualdade utilizamos o fato de que a transposição de matrizes é uma operação contínua.

A demonstração da propriedade 2 segue de modo análogo. Basta tomarmos $\overline{S_p}$ em lugar de S_p^T.

Para demonstrar a propriedade 3, observe que por definição

$$e^X e^Y = \left(I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots\right)\left(I + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \cdots\right).$$

Multiplicando as séries de potências termo a termo e reagrupando as parcelas onde o expoente de X mais o expoente de Y é igual a m, obtemos

$$e^X e^Y = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m} \frac{X^p}{p!}\frac{Y^{m-p}}{(m-p)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}\frac{m!}{p!(m-p)!}X^pY^{m-p}. \tag{3.2}$$

Por hipótese, $XY = YX$, logo vale a fórmula do Binômio de Newton no anel $M(n;\mathbb{C})$ das matrizes complexas de ordem n (vide [9] p. 40, Exercício 8d):

$$(X+Y)^m = \sum_{p=0}^{m}\frac{m!}{p!(m-p)!}X^pY^{m-p}.$$

Substituindo a fórmula acima em 3.2, o resultado segue.

A propriedade 4 é uma simples consequência deste último resultado. Com efeito, tendo em mente que as matrizes X e $-X$ comutam $e^X e^{-X} = e^{X-X} = e^0 = I$

E por último, notando que $(PXP^{-1})^m = PX^mP^{-1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$ um cálculo simples mostra que $e^{PXP^{-1}} = Pe^XP^{-1}$. □

Proposição 3.2. *Dada $X \in M(n;\mathbb{C})$, seja $f\colon M(n;\mathbb{C}) \to Gl(n;)$, definida por $f(t) = e^{tX}$. Então f é diferenciável com $\dfrac{d}{dt}e^{tX} = X \cdot e^{tX}$. Ou seja, $t \longmapsto e^{tX}$ é uma curva de classe C^∞ com vetor-velocidade $\left.\dfrac{d}{dt}e^{tX}\right|_{t=0} = X$, no ponto $t = 0$.*

Demonstração: De acordo com [12], corolário da p. 269, podemos diferenciar a série e^{tX} termo a termo e obter o resultado apresentado. □

Proposição 3.3. *Seja $X \in M(n;\mathbb{C})$ com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Os autovalores da matriz e^X são $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$.*

Este resultado é uma consequência direta da proposição seguinte.

Proposição 3.4. *Se $v \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor de uma matriz $X \in M(n;\mathbb{C})$ relativamente ao autovalor λ, então v é autovetor da matriz e^X relativamente ao autovalor e^λ.*

Demonstração: Por definição, temos $e^X = \lim_{m\to\infty} S_m$, onde $S_m = I + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^m}{m!}$. Então, $(e^X)v = (\lim_{m\to\infty} S_m)v$. Pela continuidade da multiplicação, $(e^X)v = \lim_{m\to\infty}(S_m v)$. Ora,

$$\begin{aligned} S_m v &= \left(I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^m}{m!}\right) v = v + Xv + \frac{X^2}{2!}v + \cdots + \frac{X^m}{m!}v \\ S_m v &= v + \lambda v + \frac{\lambda^2}{2!}v + \cdots + \frac{\lambda^m}{m!}v = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^m}{m!}\right) v. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{m\to\infty}(S_m v) = e^\lambda v$. Isso demonstra o resultado. □

Corolário 3.5. *Para toda matriz $X = [x_{ij}] \in M(n;\mathbb{C})$ tem-se $det(e^X) = e^{trX}$, onde $trX = x_{11} + \cdots + x_{nn} =$ traço de X.*

Demonstração: Com efeito, o determinante de uma matriz X é igual ao produto de seus autovalores. Sejam, pois, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de X. Pela proposição acima, os autovalores de e^X são $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$. Logo, $det(e^X) = e^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = e^{trX}$. □

A esta altura, é natural pensarmos se assim como no caso dos números complexos a aplicação exponencial de matrizes admite, ainda que localmente, uma aplicação inversa. Veremos que a resposta é sim: existem subconjuntos abertos $U \subset M(n;\mathbb{C})$, $V \subset Gl(n;\mathbb{C})$, contendo 0 e I respectivamente, tal que $e\colon U \to V$ é um homeomorfismo. A aplicação inversa será denotada por $log\colon V \to U$ e chamada de aplicação logaritmo. Para dar início a nossa discussão, temos que no caso dos números complexos a aplicação log dada por

$$log(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(z-1)^m}{m}$$

está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-1| < 1$. Além disso, temos $e^{log(z)} = z$. Se $u \in \mathbb{C}$ é um vetor com $|u| < log2$, então $|e^u - 1| < 1$ e $log(e^u) = u$. Usaremos este fato para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.6. *Seja $B(I;1) \subset Gl(n;\mathbb{C})$ a bola de centro I e raio 1. Isto é, o subconjunto formado pelas matrizes X tais que $|X-I| < 1$. A aplicação $log\colon B(I;1) \to M(n;\mathbb{C})$ dada pela série de potências $logX = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m}$ é contínua. Além disso,*

i. *Para todo $X \in Gl(n;\mathbb{C})$ tal que $|X-I| < 1$, tem-se $e^{logX} = X$.*

ii. *Seja $U \subset M(n;\mathbb{C})$ o subconjunto das matrizes X tais que $|X| < log2$. Valem $|e^X - I| < 1$ e $log(e^X) = X$, para todo $X \in U$.*

Assim, escrevendo $V = exp(U)$, temos que log é um homeomorfismo $V \longmapsto U$.

Demonstração: Em primeiro lugar, note que como $|(X-I)^m| \leq |X-I|^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, a série que define log é absolutamente convergente, se $|X-I| < 1$. Além disso, $(X-I)^m$ é uma função contínua de X. Logo, as reduzidas dessa série são funções contínuas que convergem uniformemente em cada bola fechada $B[0;r] \subset Gl(n;\mathbb{C})$. Assim, log é uma função contínua.

Para provar que $exp(log(X)) = X$, para todo X com $|X-I| < 1$, consideraremos dois casos.

Caso 1: X é diagonalizável.

Escrevemos $X = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal. Então, $X - I = PDP^{-1} - I = P(D-I)P^{-1}$. Segue que $(X-I)^m$ tem a forma

$$(X-I)^m = P \begin{pmatrix} (z_1-1)^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (z_n-1)^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

onde $z_1, \ldots, z_n$ são autovalores de X.

Agora, se $|X - I| < 1$, deveremos ter $|z_i - 1| < 1$, $i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$log(X) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m} = P \begin{pmatrix} log(z_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & log(z_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Portanto,

$$exp(log(X)) = P \begin{pmatrix} e^{log(z_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{log(z_n)} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} P^{-1} = X.$$

Caso 2: X não é diagonalizável.

Considere uma sequência (X_m) de matrizes diagonalizáveis tais que $X_m \longmapsto X$. Se $|X - I| < 1$, então $|X_m - I| < 1$ para todo m suficientemente grande. Pelo caso 1, $exp(log(X_m)) = X_m$ e, pela continuidade das aplicações exp e log, $exp(log(X)) = X$.

Seja agora $X \in M(n; \mathbb{C})$ com $|X| < log2$. Então

$$|e^X - I| = \left| X + \frac{X^2}{2!} + \cdots \right| \leq |X| + \frac{|X|^2}{2!} + \cdots = e^{|X|} - 1 < 1.$$

Por fim, a demonstração de que $log(exp(X)) = X$ pode também ser dividida em dois casos seguindo a mesma linha do argumento acima. □

Definição 3.7. *Dizemos que uma função $A \colon \mathbb{R} \to Gl(n; \mathbb{C})$ é um* ***subgrupo a 1-parâmetro*** *de $Gl(n; \mathbb{C})$ se satisfaz as seguintes condições:*

1. *A é contínua*

2. *$A(0) = I$*

3. *$A(t + s) = A(t)A(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Como a terminologia sugere, o conjunto imagem de um subgrupo a 1-parâmetro é de fato um subgrupo de $Gl(n; \mathbb{C})$. O Teorema 3.9 dá uma caracterização para estes subgrupos em termos da aplicação exponencial. Para demonstrá-lo, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 3.8. *Sejam $B(0;\epsilon) \subset M(n;\mathbb{C})$ a bola aberto de centro na origem e raio $\epsilon < log2$ e $U = exp(B(0;\epsilon/2))$. Para todo $Y \in U$ existe uma única matriz $X \in U$ tal que $X^2 = Y$. Além disso, temos $X = exp\left(\frac{1}{2} \cdot logY\right)$.*

Demonstração: Escreva $S = logY$. Observe que definindo $X = exp(S/2)$ temos de fato $X^2 = exp(S) = Y$. Resta apenas mostrar a unicidade. Sejam $X' \in U$ uma matriz tal que $(X')^2 = Y$ e $T = logX'$. Segue que $exp(2T) = (X')^2 = Y = exp(S)$. Como $T \in B(0;\epsilon/2)$ devemos ter $2T \in B(0;\epsilon)$. Também temos $X \in B(0;\epsilon/2) \subset B(0;\epsilon)$. Observe que a aplicação exponencial restrita a bola $B(0;\epsilon)$ é injetiva, de onde concluímos que $2T = S$. Assim, $X' = exp(T) = exp(S/2) = X$. □

Teorema 3.9. *Se A é um subgrupo a 1-parâmetro, então existe uma única matriz $X \in M(n;\mathbb{C})$ tal que $A(t) = e^{tX}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Defina $B(0;\epsilon)$ e U como no lema anterior. Pela continuidade de A existe $s > 0$ tal que $A(t) \in U$ para todo t tal que $|t| \leq s$. Seja $X = \frac{1}{s} logA(s)$. Temos $sX = logA(s)$. Então $sX \in B(0;\epsilon/2)$ e $A(s) = exp(sX)$. Temos ainda $A(s/2) \in U$ e $(A(s/2))^2 = A(s)$. Pelo lema, $A(s)$ tem uma única raiz quadrada em U e esta é igual a $exp(sX/2)$. Assim, $A(s/2) = exp(sX/2)$. Aplicando este argumento repetidamente, teremos que

$$A(s/2^k) = exp(sX/2^k)$$

para todo inteiro positivo k. Segue que para todo inteiro m, temos $A(ms/2^k) = (A(s/2^k))^m = exp(msX/2^k)$. Isso significa que $A(t) = exp(tX)$ para todo número real t da forma $t = ms/2^k$. Como o conjunto de tais números é denso em $\mathbb{R}$ e as aplicações $exp(tX)$ e $A(t)$ são ambas contínuas, concluímos que $A(t) = exp(tX)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Teorema 3.10 (Fórmula do Produto de Lie). *Sejam $X, Y \in M(n;\mathbb{C})$. Então $e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty} \left(e^{X/m}e^{Y/m}\right)^m$.*

Demonstração: Temos que $e^{X/m}e^{Y/m} = I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. Por simplicidade, nesta notação estamos adotando a mesma postura de Hall [7], indicando por $O(1/m^2)$ o somatório de todas as parcelas que contenham potências de $\frac{1}{m}$ com expoentes maiores do que ou iguais a 2.

Observe que como $e^{X/m}e^{Y/m} \longmapsto I$ à medida que $m \longmapsto \infty$, temos que $e^{X/m}e^{Y/m}$ pertence ao domínio da aplicação logaritmo para todo m suficientemente grande. Assim,

$$\begin{aligned} log\left(e^{X/m}e^{Y/m}\right) &= log\left(I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) \\ log\left(e^{X/m}e^{Y/m}\right) &= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right). \end{aligned}$$

Aplicando a exponencial, temos

$$e^{X/m}e^{Y/m} = exp\left(\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right).$$

Elevando a m-ésima potência, vem

$$\left(e^{X/m}e^{Y/m}\right)^m = exp\left(X + Y + O\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Observe agora que $O(1/m^2) \longmapsto 0$ quando $m \longmapsto \infty$. Aplicando o limite e pela continuidade da aplicação exponencial, temos o resultado enunciado

$$\lim_{m\to\infty}\left(e^{X/m}e^{Y/m}\right)^m = exp(X+Y).$$

□

3.2 Álgebras de Lie

. Iniciamos agora um estudo breve de uma estrutura algébrica conhecida como álgebra de Lie. Embora a abordagem a este assunto em um sentido geral seja feita de modo independente, definiremos uma álgebra de Lie de modo que ela esteja sempre associada a um grupo de Lie de matrizes. Neste contexto, o estudo das álgebras de Lie nos permite obter informações sobre os grupos de Lie correspondentes, um vez que aquelas possuem uma estrutura algébrica mais simples. Mais precisamente, a álgebra de lie associada a um grupo de Lie G é o espaço vetorial tangente a G no ponto I (veja o Teorema 3.20).

Definição 3.11. *Seja G um grupo de Lie de matrizes. A álgebra de Lie de G, denotada por $\mathfrak{g}$ é o conjunto de todas as matrizes $X \in M(n;\mathbb{C})$ tais que $e^{tX} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Isso significa que uma matriz X pertence a álgebra de Lie de G quando o subgrupo a 1-parâmetro gerado por X está inteiramente contido em G. A seguir, apresentamos as álgebras de Lie associadas à alguns dos grupos de Lie de matrizes estudados neste trabalho.

Exemplo 3.1. *Os casos mais simples são dos grupos lineares $Gl(n;\mathbb{C})$ e $Gl(n;\mathbb{R})$. Observe que dado $X \in M(n;\mathbb{C})$, a matriz e^{tX} é sempre invertível. Então $e^{tX} \in G$, seja qual for t. Segue que a álgebra de Lie de $Gl(n;\mathbb{C})$ é o espaço $M(n;\mathbb{C})$.*

Se $X \in M(n;\mathbb{R})$, então e^{tX} é uma matriz real e ainda invertível. Por outro lado, se e^{tX} é real para todo t, então $X = \left.\dfrac{d}{dt}e^{tX}\right|_{t=0}$ é também uma matriz real. A álgebra de Lie de $Gl(n;\mathbb{R})$ é, portanto, $M(n;\mathbb{R})$.

Exemplo 3.2. *Seja $X = [x_{ij}]$ uma matriz complexa. Vimos que o traço de X é definido por $trX = x_{11} + \ldots + x_{nn}$. Se X é tal que $trX = 0$, então $tr(tX) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela relação $det(e^{tX}) = e^{t \cdot trX}$, temos que $det(e^{tX}) = 1$. Logo, $e^{tX} \in Sl(n;\mathbb{C})$. Reciprocamente, se $det(e^{tX}) = e^{t \cdot trX} = 1$ para todo t, então em particular para $t = 1$ devemos ter $e^{trX} = 1$. Isso só é possível se $trX = 0$. Portanto, a álgebra de Lie de $Sl(n;\mathbb{C})$, denotada por $\mathsf{sl}(n;\mathbb{C})$, é o espaço das matrizes complexas de traço nulo.*

Para $Sl(n;\mathbb{R})$ o raciocínio é o mesmo, pelo qual concluímos que sua álgebra de Lie é o espaço das matrizes reais de traço nulo, denotado por $\mathsf{sl}(n;\mathbb{R})$.

Exemplo 3.3. *Vamos agora calcular a álgebra de Lie dos grupos unitários. Lembrando que uma matriz U é unitária se, e somente se, $U^* = U^{-1}$. Assim, e^{tX} é unitária se, e somente se, $(e^{tX})^* = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX}$. Mas $(e^{tX})^* = e^{(tX)^*}$. Assim, se a condição $X^* = -X$ for satisfeita, então e^{tX} será unitária. Reciprocamente, se e^{tX} é unitária para todo t, diferenciando a igualdade $e^{(tX)^*} = e^{-tX}$ no ponto $t = 0$, vemos que a condição $X^* = -X$ é também necessária. Assim, a álgebra de Lie de $U(n)$ é o espaço $\mathsf{u}(n) = \{X \in M(n;\mathbb{C}) : X^* = -X\}$.*

Usando o resultado obtido no exemplo anterior, temos que a álgebra de Lie de $SU(n)$ é o conjunto $\mathsf{su}(n) = \{X \in M(n;\mathbb{C}) : X^* = -X,\ e\ trX = 0\}$.

Exemplo 3.4. *Antes de calcularmos a álgebra de Lie do Grupo Ortogonal $O(n)$ precisamos de uma observação preliminar: Dado um grupo de Lie, se $X \in \mathfrak{g}$, então e^{tX} pertence a componente conexa da identidade de G. De fato, a aplicação $f\colon [0,t] \to G$ definida por $f(s) = e^{sX}$ é uma aplicação contínua ligando a identidade a e^{tX}. Esse resultado será formalizado na Proposição 3.12.*

Essa observação mostra que a álgebra de Lie de $O(n)$ é a mesma de $SO(n)$, pois este último é a componente conexa da identidade de $O(n)$. Denotaremos essa álgebra por $so(n)$. Sabemos que uma matriz X é ortogonal quando cumpre $X^T = X^{-1}$. Assim, e^{tX} é ortogonal se, e somente se, $e^{tX^T} = (e^{tX})^T = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX}$. Uma condição suficiente para que isso ocorra é que $X^T = -X$. Diferenciando a igualdade $e^{tX^T} = e^{-tX}$, no ponto $t = 0$, teremos que essa condição é também necessária. Note que dessa condição concluímos que a diagonal de uma matriz em $so(n)$ é nula, donde o traço também é. Portanto, $so(n) \subset sl(n;\mathbb{R})$.

Exemplo 3.5. *Passemos agora para os grupos simpléticos. Recordando: uma matriz $X \in Sp(n;\mathbb{C})$ se e somente se $X^T BX = B$, onde B é a matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

No caso da matriz e^{tX}, temos $(e^{tX})^T Be^{tX} = B$. Aplicando as propriedades da exponencial e notando que B é invertível, vem $e^{tX^T} Be^{tX}B^{-1} = e^{tX^T} e^{tBXB^{-1}} = I$. Novamente, essa condição será satisfeita se $BXB^{-1} = -X^T$. Assim como foi feito anteriormente, diferenciando no ponto $t = 0$ concluiremos que essa condição é também necessária. Escrevemos então $\mathsf{sp}(n;\mathbb{C}) = \{X \in M(n;\mathbb{C}) : BXB^{-1} = -X^T\}$. Quanto a $Sp(n;\mathbb{R})$, o procedimento é o mesmo, apenas deve se ter o cuidado de se considerar somente matrizes reais.

Por último, a álgebra de Lie de $Sp(n)$, denotada por $\mathsf{sp}(n)$, é dada por $\mathsf{sp}(n) = \mathsf{sp}(n;\mathbb{C}) \cap \mathsf{u}(2n)$.

Exemplo 3.6. *A álgebra de Lie do grupo euclidiano $E(n)$ é espaço $\mathsf{so}(n) \times \mathbb{R}^n$. O leitor poderá verificar esta afirmação sem dificuldades usando o fato de que $E(n)$ é isomorfo a $O(n) \times \mathbb{R}^n$. É claro que este meio usa a afirmação ainda não demonstrada de que grupos de Lie isomorfos possuem a mesma (a menos de isomorfismo) álgebra de Lie (veja o Teorema 3.17).*

Proposição 3.12. *Sejam G um grupo de Lie de matrizes, X um elemento de sua álgebra de Lie e $t \in \mathbb{R}$ fixado. A matriz e^{tX} pertence a componente conexa da identidade de G.*

Demonstração: A aplicação $\lambda\colon [0,t] \to G$ definida por $\lambda(s) = e^{sX}$ é um caminho contínuo ligando a identidade à e^{tX}. □

Proposição 3.13. *Sejam G um grupo de Lie de matrizes, $Y \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$. Então $YXY^{-1} \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Temos $e^{t(YXY^{-1})} = Ye^{tX}Y^{-1} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Definição 3.14. *Sejam X, Y matrizes complexas de ordem n. Chama-se colchete de Lie ou comutador à matriz $[X,Y] = XY - YX$.*

A operação $(X,Y) \longmapsto [X,Y]$ possui as seguintes propriedade:

i. É bilinear:

$$[X + X', Y] = [X,Y] + [X',Y]$$
$$[X, Y + Y'] = [X,Y] + [X,Y']$$
$$[\alpha X, Y] = \alpha[X,Y] = [X, \alpha Y]$$

ii. É antissimétrica: $[X,Y] + [Y,X] = 0$

iii. Identidade de Jacobi: $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$

Num sentido geral, uma álgebra de Lie real é um espaço vetorial real $\mathcal{A}$, munido com uma operação $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que possua as propriedades acima. Mostraremos que a álgebra de Lie de um grupo de Lie de matrizes, munida com o colchete de Lie da Definição 3.14 é de fato uma álgebra de Lie no sentido geral.

Teorema 3.15. *Sejam G um grupo de Lie de matrizes e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Então são válidas as seguintes condições:*

i. *$X + Y \in \mathfrak{g}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

ii. *$tX \in \mathfrak{g}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$.*

iii. *$[X,Y] \in \mathfrak{g}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Se as matrizes X e Y comutam, então i. segue do fato de que $e^{X+Y} = e^X e^Y \in G$. Se este não for o caso, podemos recorrer a fórmula do produto de Lie. Temos

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{m\to\infty} \left(e^{tX/m} e^{tY/m}\right)^m.$$

Como X e Y pertencem à álgebra de Lie, temos que $e^{tX/m}, e^{tY/m} \in G$ e, como G é um grupo, $(e^{tX/m}e^{tY/m})^m$ também pertence a G, para todo $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como G é um subgrupo fechado, se o limite de uma sequência convergente de matrizes é invertível, esse limite deve pertencer a G. Ora, sabemos que $e^{t(X+Y)}$ é invertível, logo deve pertencer a G para todo t real. Portanto, $X+Y$ pertence à álgebra de Lie.

O item ii é imediato pois $e^{t'(tX)} = e^{(t't)X} \in G$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$. Com estes dois itens demonstrados, vemos que a álgebra de Lie de um grupo de Lie de matrizes G é de fato um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. O último item mostrará que ela é também, num sentido geral, uma álgebra de Lie.

Na Proposição 3.2, vimos que $\left.\frac{d}{dt}e^{tX}\right|_{t=0} = X$. Então $\left.\frac{d}{dt}e^{tX}Y\right|_{t=0} = XY$. Usando a fórmula de derivação de um produto, temos

$$\left.\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\right|_{t=0} = f'(0) = XY - YX$$

onde $f\colon \mathbb{R} \to M(n;\mathbb{C})$ é definida por $f(t) = e^{tX}Ye^{-tX}$. Pela Proposição 3.13, temos que $f(t) = e^{tX}Ye^{-tX} \in \mathfrak{g}$, para todo t real. Sendo um subespaço vetorial de $M(n;\mathbb{C})$, a álgebra de Lie é um subconjunto fechado. Logo,

$$XY - YX = f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tX}Ye^{-tX} - Y}{t}$$

pertence a $\mathfrak{g}$. □

O próximo resultado é de extrema importância no estudo dos Grupos de Lie. Ele, de certa forma, justifica nosso estudo das álgebras de Lie mostrando que dois grupos de Lie isomorfos tem, a menos de isomorfismo, a mesma álgebra de Lie. Precisamos antes da seguinte definição:

Definição 3.16. *Sejam G e H grupos de Lie de matrizes. Dizemos que uma aplicação $\varphi\colon G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie se φ é um homomorfismo contínuo de grupos. Se φ for invertível com inversa contínua, então dizemos que φ é um isomorfismo de grupos de Lie.*

Teorema 3.17. *Sejam G, H grupos de Lie de matrizes, com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Suponha que $\varphi\colon G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie. Então existe uma única transformação linear invertível $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que $\varphi(e^X) = e^{\phi(X)}$, para* *todo $X \in \mathfrak{g}$. Além disso, as aplicações φ e ϕ possuem as seguintes propriedades:*

1. $\phi(YXY^{-1}) = \varphi(Y)\phi(X)\varphi(Y)^{-1}$, *para todo* $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in G$.

2. $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

3. $\phi(X) = \dfrac{d}{dt}\varphi(e^{tX})\Big|_{t=0}$, *para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Como φ é um homomorfismo contínuo de grupos, a aplicação $\varphi(e^{tX})$ será um subgrupo a 1-parâmetro de H. Assim, pelo Teorema 3.9, existe uma única matriz Z (dependendo de X) tal que $\varphi(e^{tX}) = e^{tZ}$. Definimos então a aplicação ϕ por $\phi(X) = Z$. Com esta definição, tomando $t = 1$ temos imediatamente que $\varphi(e^X) = e^{\phi(X)}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Segue também que $\phi(tX) = t\phi(X)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$e^{t\phi(X+Y)} = e^{\phi(t(X+Y))} = \varphi(e^{t(X+Y)}).$$

Aplicando a fórmula do produto de Lie e lembrando que φ é um homomorfismo contínuo, temos

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= \varphi\left(\lim_{m\to\infty}\left(e^{tX/m}e^{tY/m}\right)^m\right) \\ e^{t\phi(X+Y)} &= \lim_{m\to\infty}\left(\varphi(e^{tX/m})\varphi(e^{tY/m})\right)^m. \end{aligned}$$

Temos então que

$$e^{t\phi(X+Y)} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{t\phi(X)/m}e^{t\phi(Y)/m}\right)^m = e^{t(\phi(X)+\phi(Y)}.$$

Diferenciando esta igualdade no ponto $t = 0$, concluímos que $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$. Portanto, ϕ é uma aplicação linear. Deixando a questão da unicidade para o final, prosseguimos demonstrando as propriedades 1, 2 e 3.

Dados $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in G$, temos que

$$exp(t\phi(YXY^{-1})) = exp(\phi(tYXY^{-1})) = \varphi(exp(tYXY^{-1})).$$

Usando a linearidade de φ e as propriedades da aplicação exponencial, vem

$$exp(t\phi(YXY^{-1})) = \varphi(Ye^{tX}Y^{-1}) = \varphi(Y)\varphi(e^{tX})\varphi(Y)^{-1} = \varphi(Y)e^{t\phi(X)}\varphi(Y)^{-1}.$$

A propriedade 1 segue então diferenciando esta igualdade no ponto $t = 0$.

Quanto a propriedade 2, recorde que na demonstração do Teorema 3.15 mostramos que $[X, Y] = \left.\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\right|_{t=0}$. Assim

$$\phi([X,Y]) = \phi\left(\left.\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\right|_{t=0}\right) = \left.\frac{d}{dt}\phi(e^{tX}Ye^{-tX})\right|_{t=0}.$$

Pela propriedade 1, temos

$$\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \left.\frac{d}{dt}\varphi(e^{tX})\phi(Y)\varphi(e^{-tX})\right|_{t=0} \\
\phi([X,Y]) &= \left.\frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}\right|_{t=0} \\
\phi([X,Y]) &= [\phi(X), \phi(Y)].
\end{aligned}$$

E por último, temos $\left.\frac{d}{dt}\varphi(e^{tX})\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}\right|_{t=0} = \phi(X)$. Isso demonstra a propriedade 3. Resta apenas mostrar a unicidade de ϕ. Mas isso é imediato pois, se ψ é uma aplicação linear satisfazendo as mesmas condições que ϕ, em particular, ψ deve satisfazer a condição 3. Logo, $\phi = \psi$. $\square$

Dado $\epsilon > 0$, assim como procedemos anteriormente, denotamos por $B(0;\epsilon) \subset M(n;\mathbb{C})$ a bola aberta de raio ϵ e centro na origem.

Teorema 3.18. *Seja $G \subset Gl(n;\mathbb{C})$ um grupo de Lie de matrizes. Existe $0 < \epsilon < log2$ tal que, pondo $U = exp(B(0;\epsilon))$, para todo $X \in U$ tem-se $X \in G$ se, e somente se, $log(X) \in \mathfrak{g}$*

Observe que dentro das hipóteses do teorema acima, se $log(X) \in \mathfrak{g}$ então $X = exp(log(X)) \in G$. Resta então apenas demonstrar a recíproca. Entretanto, antes de apresentarmos a demonstração, começamos com um lema.

Lema 3.19. *Seja (B_m) uma sequência de matrizes em G convergindo para a identidade I. Para todo m suficientemente grande, seja $Y_m = log(B_m)$. Suponhamos que Y_m é não-nulo para todo m e que $Y_m/|Y_m| \longmapsto Y \in M(n;\mathbb{C})$. Então, $Y \in \mathfrak{g}$*

Demonstração: Queremos mostrar que $e^{tY} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Fixemos t e observemos que $tY_m/|Y_m| \longmapsto tY$. Como $|Y_m| \longmapsto 0$, podemos obter uma sequência de números inteiros (s_m) tais que $s_m|Y_m| \longmapsto t$. Temos

$$exp(s_m Y_m) = esp\left(s_m|Y_m|\frac{Y_m}{|Y_m|}\right) \longmapsto exp(tY).$$

Entretanto, $exp(s_m Y_m) = (exp(Y_m))^{s_m} = B_m^{s_m} \in G$. Como G é fechado, concluímos que $e^{tY} = \lim_{m\to\infty} e^{s_m Y_m} = \lim_{m\to\infty} B_m^{s_m} \in G$. $\square$

Demonstração do Teorema 3.18. Nesta discussão, identificaremos o espaço $M(n;\mathbb{C})$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n^2}$. Assim, podemos ver $\mathfrak{g}$ como um subespaço de de $\mathbb{R}^{2n^2}$. Seja D o complemento ortogonal de $\mathfrak{g}$ relativamente ao produto interno usual. Definimos a aplicação $\varphi\colon \mathfrak{g} \oplus D \to Gl(n;\mathbb{C})$ dada por $f(X,Y) = e^X e^Y$. Temos que

$$\frac{d}{dt}\varphi(tX,0)\Big|_{t=0} = X$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(0,tY)\Big|_{t=0} = Y.$$

Isso mostra que a derivada de φ no ponto $0 \in \mathbb{R}^{2n^2}$ a aplicação identidade. Em particular, pelo Teorema da Aplicação Inversa, φ admite localmente uma inversa contínua definida em uma vizinhança da matriz identidade.

Tendo em mente estas considerações, recordemos que nosso objetivo é provar que existe um $0 < \epsilon < log2$ tal que, escrevendo $U = exp(B(0;\epsilon))$, se $X \in G \cap U$ então $log(X) \in \mathfrak{g}$. Suponhamos, por absurdo, que este resultado seja falso. Então para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $A_m \in G$ tal que $A_m \longmapsto I$ e $log(A_m) \notin \mathfrak{g}$. Usando agora o fato de que φ possui localmente uma inversa contínua, podemos escrever A_m de modo único, para todo m suficientemente grande, como $A_m = e^{X_m} e^{Y_m}$, onde $X_m, Y_m \longmapsto 0$, $X \in \mathfrak{g}$ e $Y_m \in D$. Necessariamente, deveremos ter $Y_m \neq 0$ pois, caso contrário, seria $log(A_m) = X_m \in \mathfrak{g}$.

Seja agora $B_m = exp(-X_m)A_m = exp(Y_m)$. Então $B_m \in G$ e $\lim B_m = I$. Como a esfera unitária contida em D é compacta, podemos supor (tomando uma subsequência se necessário) que $Y_m/|Y_m|$ converge para algum $Y \in D$, com $|Y| = 1$. Pelo lema acima, devemos ter $Y \in \mathfrak{g}$. Mas isto é uma contradição, uma vez que D é complemento ortogonal de $\mathfrak{g}$. Segue então que o resultado é verdadeiro. $\square$

O último resultado desta seção apresenta outra caracterização para a álgebra de Lie de um grupo de Lie de matrizes G. Como mencionamos anteriormente, um grupo de

Lie de matrizes é uma variedade diferenciável. O teorema seguinte afirma que a álgebra de Lie coincide com o espaço vetorial tangente a G no ponto I = matriz identidade.

Teorema 3.20. *Seja $G \subset Gl(n;\mathbb{C})$ um grupo de Lie de matrizes. Tem-se $X \in \mathfrak{g}$ se, e somente se, existe um intervalo real J contendo a origem e um caminho diferenciável $\lambda\colon J \to Gl(n;\mathbb{C})$ tal que $\lambda(t) \in G$, para todo $t \in J$, $\lambda(0) = I$ e $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{t=0} = X$.*

Demonstração: Se $X \in \mathfrak{g}$, tomamos qualquer $\epsilon > 0$ e definimos $\lambda\colon (-\epsilon, \epsilon) \to Gl(n;\mathbb{C})$ por $\lambda(t) = e^{tX}$. Temos $\lambda(t) \in G$, para todo t, $\lambda(0) = I$ e ainda $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{t=0} = X$. Reciprocamente, Suponhamos que exista um caminho diferenciável $\lambda\colon J \to G$, com $\lambda(0) = I$ e $\lambda'(0) = X$. Pelo Teorema 3.18, temos $log(\lambda(t)) \in \mathfrak{g}$, para todo t suficientemente pequeno. Como $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial (e topológico) de $M(n;\mathbb{C})$, é também fechado. Por este motivo, segue que

$$\left.\frac{d}{dt}log(\lambda(t))\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{log(\lambda(t))}{t}$$

também pertence a $\mathfrak{g}$. Entretanto, temos que

$$log(\lambda(t)) = (\lambda(t) - I) - \frac{(\lambda(t) - I)^2}{2} + \frac{(\lambda(t) - I)^3}{3} - \cdots$$

Observe que se $m > 1$ é um inteiro, $\left.\frac{d}{dt}\left((-1)^{m-1}\frac{(\lambda(t) - I)^m}{m}\right)\right|_{t=0} = 0$. Ou seja, se diferenciarmos no ponto $t = 0$ a série de potências dada acima para $log(\lambda(t))$, todos os termos, com exceção do primeiro, irão se anular. Assim,

$$\left.\frac{d}{dt}log(\lambda(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(\lambda(t) - I)\right|_{t=0} = \lambda'(0) = X \in \mathfrak{g}.$$

Como queríamos demonstrar. □

3.3 Matrizes Hermitianas e o Teorema da Decomposição de Mostow

Dada $X \in M_n(\mathbb{C})$, recordemos que as notações $X^T = [x_{ji}]$ e $\overline{X} = [\bar{x}_{ij}]$ indicam a transposta e a matriz conjugada de X, respectivamente.

Definição 3.21. *Dizemos que uma matriz $X \in M(n;\mathbb{C})$ é hermitiana quando $X^T = \overline{X}$.*

Uma conclusão imediata que podemos tirar desta definição é que se $X = [x_{ij}]$ é uma matriz hermitiana, os elementos $x_{11}, \ldots, x_{nn}$ da diagonal principal são números reais. Com efeito, temos $x_{ii} = \bar{x}_{ii}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto, $x_{ii} \in \mathbb{R}$. Segue também da definição que o determinante de uma matriz hermitiana é sempre um número real. De fato, $det(X) = det(\overline{X^T}) = \overline{det(X)}$. Logo, $det(X) \in \mathbb{R}$. Denotaremos o conjunto das matrizes hermitianas de ordem n por $H(n)$.

Proposição 3.22. *Uma matriz X é hermitiana se, e somente se, $\langle Xv, w\rangle = \langle v, Xw\rangle$.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que a condição é suficiente. Suponhamos $\langle Xv, w\rangle = \langle v, Xw\rangle$. Em particular, para os vetores da base canônica, $\langle Xe_i, e_j\rangle = \langle e_i, Xe_j\rangle$. Por um lado, $Xe_i = \sum_k x_{ki}e_k$, donde temos $x_{ji} = \langle Xe_i, e_j\rangle$. Por outro lado, $Xe_j = \sum_k x_{kj}e_k$, logo $\bar{x}_{ij} = \langle e_i, Xe_j\rangle$. Concluímos que $x_{ji} = \bar{x}_{ij}$ e, o que dá no mesmo, $X^T = \overline{X}$.

Reciprocamente, suponhamos que $x_{ji} = \bar{x}_{ij}$. Revertendo o argumento acima, teremos que $\langle Xe_i, e_j\rangle = \langle e_i, Xe_j\rangle$. Assim, para todo $v = \sum_i v_ie_i$ e $w = \sum_j w_je_j$

$$\begin{aligned}\langle Xv, w\rangle &= \left\langle X\sum_i v_ie_i, \sum_j w_je_j\right\rangle = \sum_i\sum_j v_i\bar{w}_j\langle Xe_i, e_j\rangle = \sum_i\sum_j v_i\bar{w}_j\langle e_i, Xe_j\rangle \\ &= \left\langle \sum_i v_ie_i, X\sum_j w_je_j\right\rangle = \langle v, Xw\rangle.\end{aligned}$$

□

Proposição 3.23. *Sejam $X, P \in M(n;\mathbb{C})$ com X hermitiana e P unitária. A matriz PXP^{-1} é hermitiana. Além disso, existe uma matriz unitária P_0 tal que $P_0XP_0^{-1}$ é diagonal. Se todas as entradas de X forem reais, então podemos tomar P_0 ortogonal.*

Demonstração: Temos $(PXP^{-1})^T = (P^{-1})^TX^TP^T = \bar{P}\bar{X}\bar{P}^{-1} = \overline{PXP^{-1}}$. Logo, PXP^{-1} é hermitiana. A segunda parte será demonstrada por indução sobre a ordem n de X. A afirmação é evidente para $n = 1$. Suponhamos que seja verdadeiro para matrizes de ordem $n-1$, $n > 1$

Seja λ_1 um autovalor de X relativamente ao autovetor $v_1 \in \mathbb{C}^n$. Estendendo este vetor a uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ obtemos uma matriz unitária P tal que $Pv_1 = e_1$

(neste caso, estamos considerando P como a inversa da matriz unitária tendo como colunas os vetores da base estendida). Consideremos a matriz hermitiana PXP^{-1}. Temos que $PXP^{-1}e_1 = \lambda_1 e_1$. Como os elementos da diagonal principal de uma matriz hermitiana são números reais, devemos ter $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Observe que, a esta altura, se X for uma matriz real, então podemos supor $v_1 \in \mathbb{R}^n$ (De fato, os coeficientes de v_1 devem satisfazer o seguinte sistema homogêneo de equações lineares com coeficientes reais: $(X - \lambda_1 I)v_1 = 0$. Como $det[X - \lambda_1 I] = 0$, pela regra de Cramer, este sistema possui uma solução não-trivial). Além disso, os elementos da primeira linha são iguais aos transpostos dos elementos da primeira coluna, logo

$$PXP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

onde Y é uma matriz hermitiana de ordem $n-1$. Por hipótese, existe uma matriz unitária Q_0 tal que $Q_0 Y Q_0^{-1}$ é diagonal, a qual podemos assumir ortogonal caso Y (ou X) seja real. Denotamos por Q a matriz unitária

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix}.$$

Definimos então a matriz $P_0 = QP$. Observe que P_0 é ainda unitária - pois é produto de matrizes unitárias - e ainda $P_0 X P_0^{-1}$ é diagonal. Portanto, o resultado é válido para matrizes de ordem n. □

Corolário 3.24. *Os autovalores de uma matriz hermitiana são números reais*

Demonstração: Como vimos, toda matriz hermitiana é semelhante a uma matriz hermitiana diagonal. Os autovalores desta última são os elementos de sua diagonal, os quais são números reais. □

Proposição 3.25. *Seja $X \in M(n;\mathbb{C})$ uma matriz hermitiana. Existe uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovetores de X.*

Demonstração: Seja $v \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de X. Para toda matriz invertível P, Pv é um autovetor de PXP^{-1}. Tomamos então P unitária de modo que PXP^{-1} seja diagonal. Logo, os vetores $e_1, \ldots, e_n$ são seus autovetores. A matriz P^{-1}, por ser ainda unitária, leva bases ortonormais em bases ortonormais. Logo, os vetores $v_1, \ldots, v_n$, definidos por

$P^{-1}e_i = v_i$, $1 \leq i \leq n$, formam uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ e, pelo que foi dito no início desta demonstração, são autovetores da matriz $P^{-1}(PXP^{-1})P = X$. □

Dizemos que uma matriz hermitiana é definida positiva quando todos os seus autovalores são positivos. Usaremos a notação $H(n)^+$ para indicar o conjunto de tais matrizes. Se X é uma matriz hermitiana, e^X é também hermitiana pois $(e^X)^T = e^{X^T} = e^{\overline{X}} = \overline{(e^X)}$. De acordo com a Proposição 3.3, os autovalores de e^X são positivos e dados por $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$, onde os λ_i's são os autovalores de X. Logo, e^X é uma matriz hermitiana definida positiva, para todo $X \in M(n;\mathbb{C})$. Mostraremos, a seguir, que a recíproca é verdadeira. Ou seja, dada uma matriz hermitiana Y definida positiva, existe uma matriz hermitiana X tal que $e^X = Y$.

Teorema 3.26. *A aplicação $X \longmapsto e^X$ é um homeomorfismo do conjunto das matrizes hermitianas no conjunto das matrizes hermitianas positivas.*

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente a sobrejetividade. Seja Y uma matriz hermitiana com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, relativamente aos autovetores $v_1, \ldots, v_n$. Seja ainda P a matriz formada pelos autovetores de Y. Escrevemos $\mu_i = log\lambda_i$ e definimos X por $Xv_i = \mu_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Temos $P^{-1}XPe_i = \mu_i e_i$, o que mostra que $P^{-1}XP$ é uma matriz diagonal com coeficientes reais, logo é hermitiana. Isso mostra que $X = P(P^{-1}XP)P^{-1}$ também é hermitiana. Por fim, temos $(e^X)v_i = e^{\mu_i}v_i = \lambda_i v_i$. Assim, as matrizes e^X e Y coincidem.

Quanto à injetividade, suponhamos que $e^X = e^Y$, com X, Y matrizes hermitianas. Seja $w \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de Y associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos $(e^X)w = (e^Y)w = e^\lambda w$. Logo, e^λ é autovalor de e^X, Isso significa que existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ autovalor de X tal que $e^\lambda = e^{\lambda'}$. Pela injetividade da aplicação exponencial restrita ao conjunto dos números reais, temos $\lambda = \lambda'$. Logo, λ é autovalor de X.

Seja pois $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovetores de X, relativamente aos autovalores $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Escrevemos w em termos desta base: $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Por um lado, temos

$$(e^Y)w = e^\lambda w = e^\lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 e^\lambda v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2} v_2 + \cdots + \alpha_n e^\lambda v_n,$$

e por outro, temos

$$(e^X)w = (e^X)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha v_n) = \alpha_1 e^{\lambda} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2} v_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n} v_n.$$

Subtraindo as duas equações, vem

$$\alpha_2(e^{\lambda} - e^{\lambda_2})v_2 + \cdots + \alpha_n(e^{\lambda} - e^{\lambda_n})v_n = 0.$$

Dada a independência linear dos vetores acima, cada coeficiente $\alpha(e^{\lambda} - e^{\lambda_i})$, $i = 2, \ldots, n$, deve ser nulo. Logo, a condição $\lambda \neq \lambda_i$ implica $\alpha_i = 0$. Assim, na expressão $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, podemos considerar que os únicos α_i's possivelmente não nulos são aqueles para os quais $\lambda = \lambda_i$. Logo,

$$\begin{aligned} Xw &= X(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n \\ Xw &= \alpha_1 \lambda v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda v_n = \lambda(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \lambda w. \end{aligned}$$

Observe que como o autovetor w é arbitrário, X produz o mesmo efeito que Y em seus autovetores. Em particular, se tomarmos agora uma base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ formada por autovetores de Y, teremos $Xw_i = Yw_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, $X = Y$.

A continuidade da aplicação $X \longmapsto e^X$ é imediata uma vez que se trata simplesmente da aplicação exponencial restrita ao subespaço das matrizes hermitianas. Resta provar apenas a continuidade da aplicação inversa.

Seja $Y_1, \ldots, Y_m, \ldots$ uma sequência de matrizes hermitianas positivas convergindo para uma matriz hermitiana positiva $Y \in M(n;\mathbb{C})$. Queremos mostrar que a sequência $X_1, \ldots, X_m, \ldots$ formada pelas matrizes hermitianas X_m tais que $e^{X_m} = Y_m$ é convergente e $e^{\lim X_m} = \lim e^{X_m} = \lim Y_m = Y$. O polinômio característico de Y_m converge para o polinômio característico de Y. Logo, os autovalores $\mu_{m1}, \ldots, \mu_{mn}$ de Y_m, quando ordenados convenientemente, convergem para os autovalores $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de Y (pois os autovalores são raízes do polinômio característico). Para todo $j = 1, \ldots, n$, tem-se $log\mu_{mj} < \mu_{mj}$. Logo, a sequência $\lambda_{mj} = log\mu_{mj}$ é uma sequência limitada de números reais. Segue que os autovalores das matrizes X_m permanecem limitados à medida que $m \longmapsto \infty$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja P_m a matriz unitária tal que $P_m X_m P_m^{-1} = D_m$ é diagonal. Como a diagonal de D_m é formada pelos autovalores de X_m, e seus demais elementos são nulos, temos que as entradas de D_m são limitadas. Cada entrada de P_m tem valor absoluto ≤ 1. Logo, os coeficientes de $X_m = P_m^{-1} D_m P_m$ permanecem limitados à medida que $m \longmapsto \infty$. Desse modo, a sequência $X_1, \ldots, X_m, \ldots$ pertence a um subconjunto limitado (o qual podemos supor compacto) de $M(n; \mathbb{C})$. Podemos então extrair uma subsequência convergente $X'_1, \ldots, X'_m, \ldots$ com $\lim\limits_{m \to \infty} X'_m = X$. Fazendo $m \longmapsto \infty$ na igualdade $(X'_m)^T = \overline{X'}_m$, vemos que $X^T = \overline{X}$. Logo, X é hermitiana. Pela continuidade da aplicação exponencial, temos

$$e^X = e^{\lim X'_m} = \lim e^{X'_m} = \lim Y'_m = Y.$$

Se $X''_1, \ldots, X''_m, \ldots$ é qualquer outra subsequência de (X_m) convergindo para uma matriz X', repetindo o argumento acima, novamente teremos X' hermitiana e $e^{X'} = Y$. Pela injetividade da aplicação exponencial restrita ao espaço das matrizes hermitianas, concluímos que $X' = X$. Ou seja, toda subsequência de (X_m) deve convergir para X. Logo, (X_m) é convergente com $\lim\limits_{m \to \infty} X_m = X$ tal que $e^X = Y$. Isso prova que $X \longmapsto e^X$ é um homeomorfismo. $\square$

Teorema 3.27. *Toda matriz invertível $Y \in Gl(n; \mathbb{C})$ pode ser escrita, de modo único, como produto UP de uma matriz unitária U por uma matriz hermitiana positiva P. A aplicação $Y = UP \longmapsto (U, P)$ é um homeomorfismo conhecido como a Decomposição Polar de Y.*

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 3.27, vamos utilizar o seguinte lema

Lema 3.28. *Seja $P \in M(n; \mathbb{C})$ uma matriz hermitiana positiva. Existe uma única matriz positiva $Q \in M(n; \mathbb{C})$ tal que $P = Q^2$.*

Demonstração: Tomamos uma matriz $T \in M(n; \mathbb{C})$ de modo que a matriz $D = TPT^{-1}$ é diagonal. Escrevemos $P = T^{-1} D T$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de P, os quais formam a diagonal de D. Seja B a matriz definida por

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Definimos $Q = T^{-1}BT$ e temos então $Q^2 = T^{-1}B^2T = T^{-1}DT = P$.

Quanto a unicidade, sejam S uma matriz positiva tal que $P = S^2$. Obtemos uma matriz T de modo que $S = TDT^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal formada por autovalores de D e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os respectivos autovalores (os quais formam a diagonal de D). Temos $Pv_i = S^2v_i = \lambda_i^2 v_i$. Isto é, os λ_i^2's são os autovalores de P. Isso mostra que S coincide com a matriz Q definida acima. $\square$

Demonstração do Teorema 3.27. Provamos inicialmente a unicidade. Dada $Y \in Gl(n;\mathbb{C})$, escrevemos $Y = UP$, com U unitária e P hermitiana positiva. Temos $\overline{Y^T}Y = \overline{(UP)^T}UP = \overline{P^TU^T}UP = P^2$. Isso significa que, de acordo com o Lema 3.28, a matriz P é a única raiz quadrada positiva da matriz $\overline{Y^T}Y$ e é ainda invertível, uma vez que é positiva. Logo, a unicidade de U seque da igualdade $U = YP^{-1}$.

A demonstração de existência já se encontra inclusa no argumento acima: tomamos P como a única raiz quadrada positiva da matriz $\overline{Y^T}Y$. Um cálculo simples mostra que P é hermitiana: $(\overline{Y^T}Y)^T = Y^T\overline{Y} = \overline{(\overline{Y^T}Y)}$. Do mesmo modo, definimos U pela igualdade $U = YP^{-1}$. Resta apenas mostrar que U é unitária. Temos

$$\overline{U^T}U = \overline{(YP^{-1})}^T(YP^{-1}) = (\overline{P^{-1}})^T\overline{Y^T}YP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I.$$

Toda essa discussão prova que a aplicação $Y = UP \longmapsto (U, P)$ é uma bijeção. Ela também é, evidentemente, contínua pois a primeira aplicação coordenada é igual a $Y \longmapsto \overline{Y^T}Y$, enquanto a segunda é igual a $Y \longmapsto YP^{-1}$. A inversa $(U, P) \longmapsto UP = Y$ é simplesmente a operação de multiplicação restrita ao espaço $H(n)^+ \times U(n)$. Portanto, a decomposição polar é um homeomorfismo. $\square$

Observação 3.29. *Sempre que for conveniente, podemos utilizar o Teorema 3.26 e escrever a decomposição polar de uma matriz invertível Y na forma Ue^H, onde H é uma matriz hermitiana e U unitária.*

Um polinômio em n variáveis complexas é uma função $p\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ do tipo $p(z) = \sum_n a_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$. O produto interno hermitiano $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, dado por $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\bar{w}_i$, é um exemplo de polinômio em $2n$ variáveis. Outro exemplo de vital importância para nossa discussão é a função determinante $det\colon M(n;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, que é um polinômio em n^2 variáveis. Este fato, não tão óbvio à primeira vista, pode ser demonstrado por indução em n. Para $n = 1$, o resultado é imediato. Supondo que seja verdadeiro para $n-1$, $n > 1$, para toda matriz $X = [x_{ij}] \in M(n;\mathbb{C})$, podemos expandir $det(X)$ por meio dos elementos da primeira linha:

$$det(X) = x_{11}|X_{11}| - x_{12}|X_{12}| + \cdots + (-1)^n x_{1,n-1}|X_{1,n-1}| + (-1)^{n+1}x_{1n}|X_{nn}|,$$

onde X_{1j}, $i = 1, \ldots, n$, é a matriz de ordem $n-1$ que se obtém de X suprimindo-se a primeira linha e a j-ésima coluna. Por hipótese, $|X_{1j}|$ é um polinômio em $(n-1)^2$ variáveis. Logo, $det(X)$ é um polinômio em n^2 variáveis.

No que se segue, dados uma matriz $X = [x_{ij}] \in M(n;\mathbb{C})$ e um polinômio p em n^2 variáveis complexas, escreveremos com um certo abuso de notação, $p(X)$ em lugar de $p(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{nn})$. Ou seja, calculamos p nas entradas de X, ordenadamente.

Definição 3.30. *Seja $G \subset Gl(n;\mathbb{C})$ um grupo. Dizemos que G é um grupo pseudo-algébrico quando existe um conjunto de polinômios $\mathcal{P}$ em n^2 variáveis complexas tal que $X \in G$ se, e somente se, $p(X) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$.*

Esta definição encontra-se em [16] p. 71. No entanto, outros resultados envolvendo este conceito podem ser encontrados em [21]. Nesta obra, em lugar de Grupo Pseudo-Algébrico, Zelobenko usa simplesmente o termo Grupo Algébrico e o conjunto de polinômios $\mathcal{P}$ é chamado de *Sistema Definidor*. Para um estudo mais aprofundado, porém, recomendamos [10], uma obra que trata massivamente do assunto.

Exemplo 3.7. *Consideremos para cada par de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ o polinômio $p = p[x, y]\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ definido por $p(X) = \langle Xx, Xy\rangle - \langle x, y\rangle$. Tomemos $\mathcal{P}$ como o conjunto de tais polinômios. Dada uma matriz X, temos $p(X) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $\langle Xx, Xy\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ou seja, $\mathcal{P}$ é o sistema definidor do grupo ortogonal $O(n)$, provando que este é um grupo pseudo-algébrico.*

Exemplo 3.8. *Um exemplo de um grupo que não é pseudo-algébrico, embora um tanto trivial, é o do Grupo Linear Geral $Gl(n;\mathbb{C})$. De fato, suponhamos por absurdo que exista algum polinômio $p\colon \mathbb{C}^{n^2} \to \mathbb{C}$ tal que $X \in M(n;\mathbb{C})$ se, e somente se, $p(X) = 0$. Definimos então um polinômio q pondo $q(X) = p(X) + det(X)$. Se for $X \in Gl(n;\mathbb{C})$ então $q(X) \neq 0$.*

Se tivermos $X \notin Gl(n;\mathbb{C})$ então também será $q(X) \neq 0$. Ou seja, q será um polinômio que não admite nenhuma raiz complexa, o que contraria o Teorema Fundamental da Álgebra. Logo, $Gl(n;\mathbb{C})$ não é pseudo-algébrico.

Lema 3.31. *Seja $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um polinômio. Suponhamos que existam constantes reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que $p(e^{\lambda_1 m}, \ldots, e^{\lambda_n m}) = 0$, para todo inteiro positivo m. Então, $p(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Observe que aplicando o polinômio p ao ponto $(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$, onde $t \in \mathbb{R}$, obtemos uma função $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\sigma(t) = p(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) = \sum_{i=1}^{r} c_i e^{b_i t}$. Reduzindo os termos semelhantes, podemos assumir que os b_i's são distintos e foram ordenados de modo que $b_1 < \ldots < b_r$. Por hipótese, $\sigma(m) = 0$, sempre que $m \in \mathbb{N}$. Se mostrarmos que $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$, então teremos que σ é identicamente nula. Ou seja, $\sigma(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Começaremos mostrando que $c_r = 0$. Quando $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{r} c_i e^{b_i m}\right) e^{-b_r m} = \sum_{i=1}^{r-1} c_i e^{(b_i - b_r)m} + c_r = 0.$$

Definimos uma sequência (x_m) pondo $x_m = \sum_{i=1}^{r-1} c_i e^{(b_i - b_r)m} + c_r$. Note que $b_i - b_r < 0$, para todo $i = 1, \ldots, r-1$. Isso implica $e^{(b_i - b_r)m} \longmapsto 0$, quando $m \longmapsto \infty$. Logo, $\lim_{m\to\infty} x_m = c_r$. Por outro lado, $\lim_{m\to\infty} x_m = 0$. Assim, $c_r = 0$.

Tendo demonstrado que $c_r = c_{r-1} = \ldots = c_{r-j+1} = 0$, repetimos este mesmo argumento obtendo $c_{r-j} = 0$. Por fim, chegaremos à conclusão $c_1 = \ldots = c_r = 0$. □

Teorema 3.32 (**Teorema da Decomposição de Mostow**)**.** *Seja $G \subset Gl(n;\mathbb{C})$ um subgrupo fechado pseudo-algébrico. Suponha que $X^* \in G$, sempre que $X \in G$. Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G, a aplicação $(G \cap U(n)) \times (H(n) \cap \mathfrak{g}) \to G$, dada por $(U, H) \longmapsto Ue^H$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Pelo resultado estabelecido no Teorema 3.27, temos que a aplicação $U(n) \times H(n) \longmapsto Gl(n;\mathbb{C})$, definida por $(U, H) \longmapsto Ue^H$ é um homeomorfismo. Restringindo seu domínio temos uma aplicação contínua e injetiva $(G \cap U(n)) \times (H(n) \cap \mathfrak{g}) \longmapsto G$. Resta apenas mostrar sua sobrejetividade.

Sejam então $X \in G$ e Ue^H sua decomposição polar. Por hipótese, temos que $X^* = e^H U^{-1} \in G$. Logo, $X^*X = e^{2H} \in G$. Se mostrarmos que $2H \in \mathfrak{g}$, como este é um espaço vetorial, então teremos também $H \in \mathfrak{g}$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor $e^H \in G$. Suponhamos, inicialmente, que H é uma matriz diagonal com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Um cálculo simples mostra que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tH} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Como G é pseudo-algébrico, existe um conjunto $\mathcal{P}$ de polinômios complexos em n^2 variáveis tais que $e^{tH} \in G$ se, e somente se, $p(e^{tH}) = p(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) = 0$, para todo $p \in \mathcal{P}$. Agora, sendo $e^H \in G$, temos $e^{2H} = e^H \cdot e^H \in G$. Do mesmo modo, $e^{3H} = e^{2H} \cdot e^H \in G$. Sucessivamente, temos $e^{tH} \in G$, para todo inteiro positivo t. Logo, seja qual for $p \in \mathcal{P}$, temos $p(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) = 0$, sempre que t é um inteiro positivo. Pelo Lema 3.31, concluímos que $p(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e isso significa que $e^{tH} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $H \in \mathfrak{g}$. Deste fato segue imediatamente que $U = Xe^{-H} \in G$.

Temos ainda de considerar o caso em que H é uma matriz arbitrária. Pelo Teorema 3.23, existe uma matriz unitária V tal que $H = VDV^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal. Então $e^H = Ve^DV^{-1}$, de modo que $e^D \in V^{-1}GV$. Pelo caso já demonstrado, temos $e^{tD} \in V^{-1}GV$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, D pertence a álgebra de Lie de $V^{-1}GV$. Existe então um caminho diferenciável $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longmapsto V^{-1}GV$, tal que $f(0) = I$ e $f'(0) = D$. Logo, o caminho $g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longmapsto G$, definido por $g(t) = Vf(t)V^{-1}$ é tal que $g(0) = I$ e $g'(0) = VDV^{-1} = H$. Portanto, H pertence a álgebra de Lie de G. □

Observe que $H(n) \cap \mathfrak{g}$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Portanto, denotando sua dimensão por m temos que ele é homeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Logo, sempre que for conveniente, podemos considerar que G é homeomorfo a $(G \cap U(n)) \times \mathbb{R}^m$. Usaremos este fato na demonstração do corolário abaixo.

Corolário 3.33. *Seja $G \subset Gl(n;\mathbb{C})$ um subgrupo fechado pseudo-algébrico. Se G é compacto, então a única matriz hermitiana contida na álgebra de Lie de G é a matriz nula.*

Demonstração: Pelo que foi dito acima, temos que G é homeomorfo a $(G \cap U(n)) \times \mathbb{R}^m$. Pela compacidade de G, deveremos ter $m = 0$. Como m é a dimensão do espaço $H(n) \cap \mathfrak{g}$, o resultado segue. □

Observação 3.34. *A aplicação* $(G \cap U(n)) \times (H(n) \times \mathfrak{g}) \longmapsto G$ *é mais precisamente um difeomorfismo, mas a demonstração deste fato está além dos propósitos deste trabalho. Ela pode ser encontrada em [8], Teorema 6.31, p. 362.*

Capítulo 4

O Grupo Ortogonal Generalizado

4.1 Introdução

Inicialmente, sejam m, n números naturais. Consideremos o Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{m+n}$. Para todo $x = (x_1, \ldots, x_{m+n})$, $y = (y_1, \ldots, y_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ definimos a forma bilinear simétrica

$$\langle x, y\rangle_{m,n} = -x_1y_1 - \cdots - x_my_m + x_{m+1}y_{m+1} + \cdots + x_{m+n}y_{m+n}.$$

O **Grupo Ortogonal Generalizado** ou **Grupo Ortogonal Indefinido**, denotado por $O(m; n)$, é o conjunto formado pelas matrizes reais de ordem $(m+n)\times(m+n)$ que preservam a formula bilinear definida acima. Isto é, se $X \in O(m; n)$ então $\langle Xx, Xy\rangle_{m,n} = \langle x, y\rangle_{m,n}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{m+n}$. É evidente que a definição dada acima não deixa claro, num primeiro momento, a existência de uma estrutura de grupo em $O(m; n)$. Esta estrutura, porém, ficará estabelecida na demonstração do Teorema 4.2.

Denotando por $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{m+n}$, temos que $\langle e_i, e_i\rangle_{m,n} = -1$, se $i = 1, \ldots, m$, enquanto que $\langle e_i, e_i\rangle_{m,n} = 1$, se $i = m+1, \ldots, m+n$. Por este motivo, dizemos que o espaço $\mathbb{R}^{m+n}$ munido da forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}$ tem assinatura (m, n).

Calculando os valores $\langle e_i, e_j\rangle_{m,n}$, para todo $i, j = 1, \ldots, m + n$, temos a matriz de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}$ com respeito à base canônica:

$$[\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

onde 0 representa o bloco nulo e I_m, I_n são as matrizes identidade de ordem $m\times m$, $n\times n$, respectivamente.

Segue que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}$ é uma forma bilinear não-degenerada, pois $det\,[\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}]_{\mathcal{E}} = \pm 1$.

Outro fato que deve ter ficado evidente a esta altura é que esta forma bilinear não é definida. Logo, não é um produto interno.

Proposição 4.1. *Seja $B\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ o operador linear auto-adjunto tal que $\langle x, y\rangle_{m,n} = \langle B(x), y\rangle$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *A matriz de B relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^{m+n}$ é dada por*

$$[B]_{\mathcal{E}} = [\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

2. $[B]_{\mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{E}}^{-1}$

3. *Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_{m+n}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{m+n}$. A matriz de B relativamente à base $\mathcal{B}$ é dada por $[B]_{\mathcal{B}} = [\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}]_{\mathcal{B}}$*

Demonstração: Temos $\langle x, y\rangle_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} -x_i y_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i y_i$ enquanto que $\langle B(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{m} -B(x)_i y_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} B(x)_i y_i$. Igualando as duas expressões e fazendo sucessivamente $y = e_j$, $j = 1, \ldots, m+n$, temos que $B(x)_i = x_i$. Fazendo agora $x = e_1, \ldots, e_n$ teremos o resultado desejado.

Para calcularmos a inversa de $[B]_{\mathcal{E}}$ observe que

$$[B]_{\mathcal{E}}\,[B]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}.$$

Logo, $[B]_{\mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{E}}^{-1}$

Para cada u_i escrevemos $B(u_j) = \sum_{i=1}^{m+n} b_{ij} u_i$. Isto é, $[b_{ij}]$ é a matriz de B com respeito a base $\mathcal{B}$. Agora $\langle u_i, u_j\rangle_{m,n} = \langle B(u_i), u_j\rangle = b_{ij}$. Logo, $[B]_{\mathcal{B}} = [b_{ij}] = [\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}]_{\mathcal{B}}$.
□

Teorema 4.2. *O conjunto $O(m;n)$ das matrizes que preservam a forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle_{m,n}$ é um grupo de Lie de matrizes.*

Demonstração: Evidentemente, $I \in O(m;n)$. Dadas $X, Y \in O(m;n)$, temos $\langle XYx, XYy\rangle_{m,n} = \langle Yx, Yy\rangle_{m,n} = \langle x, y\rangle_{m,n}$, donde $XY \in O(m;n)$.

Seja agora x pertencente ao núcleo de X. Para todo $y \in \mathbb{R}^{m+n}$, temos que $\langle B(x), y \rangle = \langle x, y \rangle_{m,n} = \langle Xx, Xy \rangle_{m,n} = \langle 0, Xy \rangle_{m,n} = 0$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,n}$ é não-degenerada, devemos ter $B(x) = 0$ e, como B é invertível, $x = 0$. Logo, X é invertível. Além disso, $\langle X^{-1}x, X^{-1}y \rangle_{m,n} = \langle XX^{-1}x, XX^{-1}y \rangle_{m,n} = \langle x, y \rangle_{m,n}$. Logo, $X^{-1} \in O(m;n)$, o qual é, portanto, um grupo.

Por último, seja $X = \lim\limits_{m \to \infty} X_m$, com $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $O(m;n)$. Tomando $x, y \in \mathbb{R}^{m+n}$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
\langle Xx, Xy \rangle_{m,n} &= \left\langle \lim_{m \to \infty} X_m x, \lim_{m \to \infty} X_m y \right\rangle_{m,n} \\
\langle Xx, Xy \rangle_{m,n} &= \lim_{m \to \infty} \langle X_m x, X_m y \rangle_{m,n} \\
\langle Xx, Xy \rangle_{m,n} &= \lim_{m \to \infty} \langle x, y \rangle_{m,n} = \langle x, y \rangle_{m,n}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $O(m;n)$ é fechado em $Gl(m+n;\mathbb{R})$. Portanto, $O(m;n)$ é um grupo de Lie. □

No que se segue, dada uma matriz $X = [x_{ij}] \in O(m;n)$, sempre que for conveniente usaremos a notação $X = [v_1, \ldots, v_{m+n}]$, onde os v_j's, $1 \le j \le m+n$, são os vetores coluna de X. Ou seja, $v_j = (x_{1j}, \ldots, x_{m+n,j})$.

Teorema 4.3. *Seja $X = [v_1, \ldots, v_{m+n}] \in Gl(m+n;\mathbb{R})$. Tem-se $X \in O(m;n)$ se, e somente se, são válidas todas as condições a seguir:*

$$\begin{aligned}
&\langle v_i, v_i \rangle_{m,n} = -1, && \text{sempre que } 1 \le i \le m, \\
&\langle v_j, v_j \rangle_{m,n} = 1, && \text{sempre que } m+1 \le j \le m+n, \\
&\langle v_i, v_j \rangle_{m,n} = 0, && \text{sempre que } i \ne j.
\end{aligned}$$

Ou seja, os vetores-coluna de X formam uma base ortonormal com respeito a $\langle \cdot, \cdot, \rangle_{m,n}$.

Demonstração: Suponhamos que $X \in O(m;n)$. Então $\langle v_i, v_i \rangle_{m,n} = \langle Xe_i, Xe_j \rangle_{m,n} = \langle e_i, e_j \rangle_{m,n}$. Temos assim o resultado acima.

Reciprocamente, se as condições acima forem satisfeitas, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} &= \left\langle X\sum_{i=1}^{m+n} x_i e_i, X\sum_{j=1}^{m+n} y_j e_j\right\rangle_{m;n}\\
\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} &= \sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n} x_i y_j \langle Xe_i, Xe_j\rangle_{m;n}\\
\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} &= \sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n} x_i y_j \langle v_i, v_j\rangle_{m;n}\\
\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} &= \sum_{i=1}^{m} -x_i y_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i y_i = \langle x, y\rangle_{m;n}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4. *Seja $X \in Gl(m+n;\mathbb{R})$ e denotemos, por simplicidade, $B = [B]_{\mathcal{E}}$. Tem-se $X \in O(m;n)$ se, e somente se, $X^T BX = B$.*

Demonstração: No seguinte argumento, dado um vetor $x \in \mathbb{R}^{m+n}$, usaremos a notação $[x]_{\mathcal{E}}$ para indicar o vetor-coluna formado pelas coordenadas de x na base canônica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$. Sejam pois $x, y \in \mathbb{R}^{m+n}$ temos

$$\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} = \langle B(Xx), Xy\rangle = [Xx]_{\mathcal{E}}^T [B]_{\mathcal{E}} [Xy]_{\mathcal{E}} = [x]_{\mathcal{E}}^T X^T BX[y]_{\mathcal{E}}.$$

Calculamos agora $\langle Xx, Xy\rangle_{m;n}$ de outro modo:

$$\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} = \langle x, y\rangle_{m;n} = [x]_{\mathcal{E}}^T B[y]_{\mathcal{E}}.$$

Logo, $[x]_{\mathcal{E}}^T X^T BX[y]_{\mathcal{E}} = [x]_{\mathcal{E}}^T B[y]_{\mathcal{E}}$. Como essa igualdade é válida para todo $x, y \in \mathbb{R}^{m+n}$, seque que $X^T BX = B$.

Reciprocamente, se $X^T BX = B$, dados $x, y \in \mathbb{R}^{m+n}$,

$$\langle Xx, Xy\rangle_{m;n} = \langle B(Xx), Xy\rangle = [x]_{\mathcal{E}}^T X^T BX[y]_{\mathcal{E}} = [x]_{\mathcal{E}}^T B[y]_{\mathcal{E}} = \langle x, y\rangle_{m;n}.$$

Portanto, $X \in O(m;n)$. □

Corolário 4.5. *Se $X \in O(m;n)$ então $det(X) = \pm 1$*

Demonstração: Da igualdade $X^TBX = B$ vem

$$det(X^TBX) = det(X^T) \cdot det(B) \cdot det(X) = det(B).$$

Como $det(X^T) = det(X)$, temos $[det(X)]^2 = 1$, donde $det(X) = \pm 1$. □

De modo análogo ao que foi feito com alguns dos grupos mencionados no Capítulo 2, destacamos o subgrupo de $O(m;n)$ formado pelas matrizes de determinante 1, chamado de *Grupo Ortogonal Generalizado Especial*, denotado por $SO(m;n)$.

$$SO(m;n) = \{X \in O(m;n) : det(X) = 1\}$$

O grupo $SO(m;n)$ é também um Grupo de Lie de Matrizes. Com efeito, se $X, Y \in SO(m;n)$ então $det(XY^{-1}) = det(X) \cdot det(Y^{-1}) = 1$. Temos ainda $SO(m;n) = O(m;n) \cap det^{-1}(1)$.

Exemplo 4.1. *O caso mais simples que se pode apresentar é o de menor dimensão possível. Ou seja, $O(1;1)$. Uma matriz $X \in O(1;1)$ admite uma estrutura muito simples possuindo uma das seguintes formas:*

$$\begin{pmatrix} cosh(t) & senh(t) \\ senh(t) & cosh(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -cosh(t) & senh(t) \\ senh(t) & -cosh(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cosh(t) & -senh(t) \\ senh(t) & -cosh(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -cosh(t) & -senh(t) \\ senh(t) & cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples utilizando as propriedades entre os vetores-coluna de uma matriz ortogonal e tendo em mente a identidade $cosh^2(t) - senh^2(t) = 1$ mostra que as matrizes dos quatro tipo acima pertencem a $O(1;1)$. Reciprocamente, se $X \in O(1;1)$, escrevendo $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$, pelo Teorema 4.3, temos as seguintes relações: $x^2 - y^2 = 1$, $w^2 - z^2 = 1$ e $-xz + yw = 0$. Observe que as duas primeiras relações obrigam $x^2, w^2 \geq 1$. Vamos então fixar a parametrização $y = senh(t)$. Se parametrizarmos $w = cosh(t)$, concluímos das duas primeiras relações que $x = \pm cosh(t)$ e $z = \pm senh(t)$, enquanto a terceira relação mostra que x e z devem ter o mesmo sinal. Isso cobre as matrizes 1 e

4. Se, porém, escolhermos $w = -cosh(t)$, teremos ainda $x = \pm cosh(t)$ e $z = \pm senh(t)$. Mas, em decorrência da terceira relação, x e z devem ter sinais trocados. Isso cobre as outras duas matrizes.

Observe que como $cosh(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, não existem sobreposições dos quatro tipos de matrizes descritas acima. Além disso, duas matrizes do mesmo tipo podem ser conectadas por meio de um segmento retilíneo ligando os parâmetros. Isso mostra que $O(1;1)$ possui quatro componentes conexas.

Como as funções $cosh(t)$ e $senh(t)$ não são limitadas, temos que nenhuma das componentes conexas de $O(1;1)$ forma um subconjunto limitado. Logo, $O(1;1)$ não é compacto. Veremos que ambos os resultados apresentados são verdadeiros no caso geral.

4.2 A Álgebra de Lie de O(m;n)

Neste momento, vamos calcular a álgebra de Lie de $O(m;n)$. O procedimento é similar aquele aplicado aos grupos simpléticos. Pelo mesmo argumento utilizado no caso $O(n)$, temos que essa álgebra de Lie é o mesma de sua componente conexa denotada por $SO(m;n)_0$. Como $SO(m;n)_0$ também é a componente conexa de $SO(m;n)$, temos que este grupo e $O(m;n)$ tem a mesma álgebra de Lie. Por este motivo a denotaremos por $\mathsf{so}(m;n)$.

Suponhamos que $e^{tX} \in SO(m;n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.4, temos que X deve satisfazer a condição $(e^{tX})^T B e^{tX} = B$, onde $B = [B]_{\mathcal{E}}$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Isso equivale a $e^{tX^T} B e^{tX} B^{-1} = e^{tX^T} B e^{tX} B = e^{tX^T} e^{tBXB} = I$. Isso significa que $e^{tBXB} = e^{-tX^T}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Diferenciando essa igualdade no ponto $t = 0$, concluímos que X deve satisfazer a condição $BXB = -X^T$. Por outro lado, se uma matriz $X \in M(m+n;\mathbb{R})$ satisfaz essa condição, podemos reverter nosso raciocínio e concluir que $(e^{tX})^T B e^{tX} = B$. Isso nos dá

$$\mathsf{so}(m;n) = \{X \in M(m+n;\mathbb{R}) : BXB = -X^T\}.$$

Escrevendo uma matriz $X \in M(m+n;\mathbb{R})$ em forma de blocos e utilizando a condição $BXB = -X^T$, podemos refinar este resultado descrevendo as matrizes $X \in \mathsf{so}(m;n)$ como sendo as matrizes da forma $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix}$, onde $X_1^T = -X_1$, $X_3^T = -X_3$ e X_2 é uma matriz arbitrária.

Tendo determinado a álgebra de Lie de $O(m;n)$, podemos agora calcular sua dimensão, que é definida como a dimensão de $\mathsf{so}(m;n)$. Seja $X = [x_{ij}] \in M(m+n;\mathbb{R})$ uma matriz pertencente a $\mathsf{so}(m;n)$. Observe que a matriz BX diferencia-se de X apenas por uma mudança de sinal de suas m primeiras linhas. Do mesmo modo, XB é obtida de X por meio da mudança de sinal de suas m primeiras colunas. Assim temos

$$BXB = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} & -x_{1,m+1} & \dots & -x_{1,m+n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} & -x_{2,m+1} & \dots & -x_{2,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} & -x_{m,m+1} & \dots & -x_{m,m+n} \\ -x_{m+1,1} & -x_{m+1,2} & \dots & -x_{m+1,m} & x_{m+1,m+1} & \dots & x_{m+1,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{m+n,1} & -x_{m+n,2} & \dots & -x_{m+n,m} & x_{m+n,m+1} & \dots & x_{m+n,m+n} \end{pmatrix}.$$

A condição $BXB = -X^T$ nos dá então as seguintes relações:

i. $x_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, m+n$.

ii. $x_{ij} = -x_{ji}$, se $1 \leq i, j \leq m$ ou $m+1 \leq i, j \leq m+n$.

iii. $x_{ij} = x_{ji}$, se $1 \leq i \leq m$ e $m+1 \leq j \leq m+n$ ou ainda, se $m+1 \leq i \leq m+n$ e $1 \leq j \leq m$.

Destas condições, vemos que podemos determinar unicamente a matriz X conhecendo-se todos os elementos acima ou abaixo da diagonal. Não é difícil, pois, determinar uma base para $\mathsf{so}(m;n)$ e verificar que esta tem exatamente $\dfrac{(m+n)(m+n-1)}{2}$ elementos.

4.3 Compacidade

Em geral, os grupos $O(m;n)$ e $SO(m;n)$ não são compactos. Isto ficou claro no exemplo acima, quando $m = n = 1$. Quando $m > 1$ ou $n > 1$, temos de mostrar de acordo com a definição que estes grupos não são limitados. Isto pode ser visto de um modo muito simples. Consideremos para cada $x \in \mathbb{N}$ as matrizes quadradas A_x de ordem $m+n$ da seguinte forma

$$A_x = \begin{pmatrix} cosh(x) & 0 & \cdots & 0 & senh(x) \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & I & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ senh(x) & 0 & \cdots & 0 & cosh(x) \end{pmatrix},$$

onde I indica a matriz identidade de ordem $m+n-2$.

Podemos verificar sem dificuldades que estas matrizes cumprem a condição de ortonormalidade descrita no Teorema 4.3. Além disso,

$$det(A_x) = cosh^2(x) + (-1)^{m+n+1}(-1)^{m+n} senh^2(x) = 1.$$

Logo, $A_x \in SO(m;n)$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Como as funções *senh* e *cosh* não são limitadas, concluímos que $SO(m;n)$, e consequentemente $O(m;n)$, não são compactos.

4.4 Conexidade

Vimos que quando $m = n = 1$, o Grupo Ortogonal Generalizado é formado por quatro componentes conexas. Vamos mostrar que este resultado se mantem verdadeiro no caso geral. Pela condição $det(X) = 1$ e expandindo a expressão $X^TBX = B$ em termos das entradas da matriz X, vemos que $SO(m;n)$ é um grupo pseudo-algébrico. Além disso, temos $XBX^T = (X^TBX)^T = B^T = B$. Isso mostra que $X^T \in SO(m;n)$ se $X \in SO(m;n)$. Pelo que vimos no Teorema 3.32, o número de componentes conexas de $SO(m;n)$ é o mesmo do conjunto $SO(m;n) \cap U(m+n)$. Tomamos então $X = [v_1, \ldots, v_{m+n}] \in SO(m;n) \cap U(m+n)$, onde $v_j = (x_{1j}, \ldots, x_{m+n,j})$. Se $1 \leq j \leq m$, o vetor v_j deve satisfazer as condições

$$-x_{1j}^2 - \ldots - x_{mj}^2 + x_{m+1,j} + \ldots + x_{m+n,j} = -1,$$
$$x_{1j}^2 + \ldots + x_{mj}^2 + x_{m+1,j} + \ldots + x_{m+n,j} = 1.$$

Somando estas equações, devemos ter $x_{m+1,j} = \ldots = x_{m+n,j} = 0$ e a segunda equação passar a ser $x_{1j}^2 + \ldots + x_{mj}^2 = 1$. Quando $m+1 \leq j \leq m+n$, um procedimento semelhante nos permite concluir que $x_{1,j} = \ldots = x_{m,j} = 0$ e $x_{m+1,j} + \ldots + x_{m+n,j} = 1$. Isso significa que podemos escrever

$$X = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

onde $Y \in O(m)$ e $Z \in O(n)$. Como $det(X) = det(Y) \cdot det(Z)$, o determinante de Y e o determinante de Z devem ter o mesmo sinal. Logo, $X \in SO(m) \times SO(n)$ ou $X \in SO(m)^C \times SO(n)^C$, sendo ambos conjuntos conexos disjuntos. É imediato também que se X pertence a algum destes conjuntos, então $X \in SO(m;n) \cap U(m+n)$. Temos portanto, $SO(m;n) \cap U(m+n) = [SO(m) \times SO(n)] \cup [SO(m)^C \times SO(n)^C]$. Isso prova que $SO(m;n)$ possui duas componentes conexas e, consequentemente, $O(m;n)$ possui quatro componentes.

Observação 4.6. *Para uma demonstração alternativa do número de componentes conexas no caso $m = 1$ por meio de ações de grupos, contendo inclusive uma descrição explícita destas componentes, vide [15].*

Vimos que a álgebra de Lie é formada pelas matrizes da forma $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix}$, com $X_1^T = -X_1$, $X_3^T = -X_3$ e X_2 arbitrária. Calculando a interseção $\mathsf{so}(m;n) \cap H(m+n)$, vemos que este espaço é composto pelas matrizes

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ X_2^T & 0 \end{pmatrix},$$

onde X_2 é uma matriz qualquer. Logo, $\mathsf{so}(m;n) \cap H(m+n)$ é um espaço vetorial de dimensão mn. Temos portanto a estrutura topológica de $O(m;n)$: O Grupo Ortogonal Generalizado $O(m;n)$ é homeomorfo a $O(m) \times O(n) \times \mathbb{R}^{mn}$. Em particular, vemos que $O(m;n)$ é homeomorfo a $O(n;m)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Recorde que estamos denotando a componente conexa da identidade de $O(m;n)$ por $SO(m;n)_0$. Pelos mesmos argumentos utilizados acima, ela é homeomorfa a $SO(m) \times SO(n) \times \mathbb{R}^{mn}$. Este fato é comumente utilizado para calcular o grupo fundamental de $SO(m;n)_0$. Como $\mathbb{R}^{mn}$ é simplesmente conexo e, para todo espaço topológico X, Y vale $\pi_i(X \times Y) \cong \pi_i(X) \times \pi_i(Y)$, onde π_i é o i-ésimo grupo de homotopia, temos $\pi_1(SO(m;n)_0) \cong \pi_1(O(m)) \times \pi_1(O(n))$. A tabela a seguir apresenta os resultados:

Tabela 4.1: **Grupo Fundamental de $\mathbf{SO(m;n)_0}$**

$\pi_1(SO(m;n)_0)$	$n=1$	$n=2$	$n \geq 3$
$m=1$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
$m=2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$
$m \geq 3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

4.5 O grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré, denotado por $P(1;n)$ desempenha no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1+n}$ um papel análogo àquele desempenhado pelo grupo Euclidiano $E(n)$ no espaço $\mathbb{R}^n$. Ele é é o conjunto formado por todas as aplicações $f\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{1+n}$ que preservam a distância de Lorentz, munido da operação de composição. Isto é, $f \in P(1;n)$ se, e somente se, $|f(x) - f(y)|_{1,n} = |x-y|_{1,3}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$. Nesta última seção mostramos que, assim como o grupo Euclidiano pode ser descrito pelo grupo ortogonal $O(n)$, o grupo de Poincaré pode ser caracterizado por meio de $O(1;n)$. A teoria segue praticamente as mesmas linhas que a do grupo Euclidiano $E(n)$.

Evidentemente, temos $O(1;n) \subset P(1;n)$. No entanto, nem todo elemento do

Grupo de Poincaré é uma aplicação linear. As translações $T\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{1+n}$, definidas por $T(x) = x+v$, onde $v \in \mathbb{R}^{1+n}$ também são elementos $P(1;n)$. O teorema abaixo caracteriza os elementos do grupo de Poincaré e mostra que este é, a menos de isomorfismo, um subgrupo fechado de $Gl(n+2;\mathbb{R})$.

Teorema 4.7. *Seja $f \in P(1;n)$. Existem uma aplicação ortogonal $S \in O(1;n)$ e uma translação $T\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{1+n}$, $T(x) = x + v$ tais que $f = T \circ S$. Escrevendo $f = (T, v)$, temos uma identificação entre o grupo de Poincaré $P(n)$ e o espaço $O(1;n) \times \mathbb{R}^{1+n}$.*

Demonstração: A demonstração segue a mesma linha da Proposição 2.3, feita para o grupo Euclidiano. Ou ainda, pode ser encontrada no artigo [15]. □

Conclusão

De acordo com sua introdução, esta dissertação tomou como motivação inicial a investigação dos aspectos topológicos relacionados ao Grupo Ortogonal Generalizado. Vejamos o que se concluiu nesta busca. Desde o nosso ponto de partida, o fato de que $O(m;n)$ em geral não é compacto já havia sido estabelecido em [15]. Com relação a conexidade, o mesmo artigo também apresenta o fato de que $O(1;n)$ é composto por quatro componentes conexas homeomorfas entre si. O caso geral, porém, até onde conhecíamos sobre o assunto continuava indefinido. Com o objetivo de chegar a uma resposta, iniciamos um estudo dos conceitos relacionados a $O(m;n)$.

Antes de tudo, o grupo $O(m;n)$ é um grupo topológico, motivo pelo qual iniciamos no Capítulo 1 um estudo introdutório de tais grupos, onde foram apresentados diversos resultados, dentre os quais o principal é o homeomorfismo $\xi\colon G/G_x \to X$, que permite identificar sob certas condições um espaço de Baire X com um quociente G/G_x, onde G é um grupo topológico separável que age transitivamente em X.

O Capítulo 2 teve como foco a exposição dos principais grupos de Lie lineares, servindo como base para introduzir os conceitos do Capítulo 3. Além dos exemplos, analisamos como tais grupos se comportam no que diz respeito à compacidade e conexidade.

Com o objetivo de estabelecer o teorema da decomposição polar em $Gl(n;\mathbb{C})$, iniciamos o capítulo seguinte com o estudo da aplicação exponencial e, por meio desta, definimos a álgebra de Lie de um grupo de Lie de matrizes. Com relação a este último conceito, dentre outros resultados, vimos que o Teorema 3.18 estabelece um homeomorfismo local entre um grupo de Lie de matrizes e sua álgebra de Lie, o que nos permite transferir informações desta para aquele. Esta é uma ferramenta muito útil, uma vez que sendo um espaço vetorial, a álgebra de Lie possui uma estrutura algébrica mais simples do que a do grupo ao qual está associada. Seguiu-se com a introdução das matrizes hermitianas, o que juntamente com os conceitos anteriores estabelecemos a decomposição polar no grupo das matrizes invertíveis. Mais ainda, vimos que todo subgrupo fechado

$G \subset Gl(n;\mathbb{C})$, pseudo-algébrico e auto-adjunto admite uma decomposição polar. De um modo mais preciso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que G é homeomorfo a $(G \cap U(n)) \times \mathbb{R}^m$. Este foi o conteúdo do Teorema da Decomposição de Mostow [17].

Seguindo as ideias de [6] e [8], foi a aplicação deste teorema que nos possibilitou, no Capítulo 4, mostrar que o estudo da conexidade de $O(m;n)$ se resume ao estudo da conexidade em $O(m;n) \cap U(m+n) = O(m) \times O(n)$. Ou seja, provamos que $O(m;n)$ é homeomorfo a $O(m) \times O(n) \times \mathbb{R}^{mn}$, de onde concluímos que este possui quatro componentes conexas. Além disso, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, determinamos o grupo fundamental da componente conexa da identidade, denotada por $SO(m;n)_0$.

Por fim, este estudo constituiu uma contribuição para o conhecimento das propriedades topológicas do Grupo Ortogonal Generalizado, bem como um estudo introdutório dos grupos topológicos, grupos de Lie de matrizes e suas álgebras de Lie. O estudo dos grupos e álgebras de Lie em um sentido geral constitui uma boa continuação para os assuntos tratados aqui, e podem ser feitos por exemplo por meio das obras [3], [4], [8], [10] e [19].

Referências Bibliográficas

[1] Alves, R. W. M.; Rocha, V. H. L.; Souza, J. A.; **A Caracterization of Completely Regular Spaces**. International Jornal of Mathematics. World Scientific Publishing Company, vol. 26, No. 3. 17/03/2015.

[2] Arhangel'skii, A. Tkachenko M. **Topological Groups and Related Structures.** vol. 1. Paris: Atlantis Press+World Scientific, 2008. 781 p. (*Atlantis Studies in Mathematics*).

[3] Baker, Andrew. **Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory.** 1 ed. Londres: Springer-Verlag London: 2002, 330 p. (*Springer Undergraduate Mathematics Series*).

[4] Chevalley, C. **Theory of Lie Groups, I.** 1 ed. Princeton: Princeton University Press, 1946. 214 p.

[5] Coelho, F. U. Lourenço, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear.** vol. 34. 2 ed. São Paulo: Edusp, 2005. 275 p.

[6] Gallier, Jean. **Clifford Algebras, Clifford Groups and a Generalization of the Quaternions: The Pin and The Spin Groups.** Department of Computer and Information Science. Universidade da Pensilvânia. Filadélfia, EUA. 2014. Disponível em <http://arxiv.org/abs/0805.0311>. Acesso em 13/01/2016.

[7] Hall, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction.** vol. 222. 1 ed. Nova York: Springer Science+Business Media, Inc., 2003. 351 p. (*Graduate Texts in Mathematics*).

[8] Knapp, Anthony W. **Lie Groups Beyond an Introduction.** vol. 140. 2 ed. New York: Birkhäuser Boston, 2002. 812 p. (*Progress in Mathematics*).

[9] Gonçalves, Adilson. **Introdução à Álgebra.** 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 194 p. (*Projeto Euclides*).

[10] Hochschild, Gerhard P. **Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras.** vol. 75. 1 ed. Nova York: Springer-Verlag, 1981. 269 p. (*Graduate Texts in Mathematics*).

[11] Lima, E. L. **Álgebra Linear.** 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 357 p. (*Coleção Matemática Universitária*).

[12] Lima, E. L. **Curso de Análise.** vol. 2. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 547 p. (*Projeto Euclides*).

[13] Lima, E. L. **Elementos de Topologia Geral.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 297 P. (*Textos Universitários*).

[14] Lima, E. L. **Espaços Métricos.** 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 337 p. (*Projeto Euclides*).

[15] Marques, C.H.; Mendes, L.O.; Bortotti, M. F. A.; Montanhano, S.B.; Souza, J. A. **Isometrias no Espaço de Minkowski: Grupo Ortogonal Generalizado e Grupo de Poincaré**. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Maringá, vol. 34, 2016, p. 99-128.

[16] Mneimné, R. Testard, F. **Introduction A La Théorie des Groupes de Lie Classiques.** 1 ed. Paris: Hermann, 1986. 346 p. (*Collection Méthodes*).

[17] Mostow, G. D. **Self-Adjoint Groups**. The Annals of Mathematics. vol. 62, No. 1, 1955, p. 44 - 55.

[18] Roelcke, W. Dierolf, S. **Uniform Structures on Topological Groups And Their Quotients**. 1. ed. McGraw-Hill, 1981. 276 p. (*Advanced Group Program*).

[19] San Martin, Luiz A. B. **Grupos de Lie**. *Em processo de impressão.*

[20] Shim, Hyung Bo. **Indefinite String Structure.** Tese (Doutorado em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade de Pittsburgh. Pensilvânia, EUA. 23/04/2013. 82 p. Disponível em <http://d-scholarship.pitt.edu/19620/>. Acesso em: 15/01/2016.

[21] Zelobenko, D. P. **Compact Lie Groups and Their Representations**. vol. 40. 1 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1973. 448 p. (*Translations of Mathematical Monographs*).